

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA

## *DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA*

---

### **Las Ecuaciones de Balance de Energía y de Momento en la Electrodinámica de Medios Continuos y la Controversia de Abraham-Minkowski**

Tesis que presenta  
*Miguel Angel López Mariño*

para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias



**Asesor**

*José Luis Jiménez Ramírez*

MARZO 25, 2010.

---

## DEDICATORIA

*A mis padres Juan y Guadalupe,*

*...que me dieron el inicio de TODO.*

*A la memoria de la abuela Cuquita,*

*...que me contagió el amor por el conocimiento.*

*A Norma Nelly,*

*...que se atrevió a convivir con mis ansiedades.*

*A Natalia, Ernesto y Juan Miguel*

*...que alimentan mis esperanzas cada día.*

*A Félix Eduardo*

*...que me animó a no perder de vista la meta.*

*A Tere Vergara*

*...que me brindó la luz de una hermana.*

---

## AGRADECIMIENTOS

Antes de iniciar, debo confesar que no es sencillo definir las palabras adecuadas para agradecer a todos aquellos que, de una u otra forma, apoyaron este trabajo. Debo confesar el inmenso temor que siento al presentar una lista de personas, pues corro el riesgo de no mencionar a todas las que debiera. Sin embargo, debo confesar que mi deseo de agradecer es más grande que el miedo a equivocarme.

Empezaré por mi Profesor José Luis Jiménez Ramírez, a quien mucho le agradezco me haya enseñado la importancia de generar preguntas, me haya transmitido la pasión por el trabajo y que paso a paso me haya mostrado el oficio de investigar. Son innumerables y valiosas las conversaciones electrónicas, telefónicas y presenciales en que sostuvimos atractivas discusiones sobre nuestra línea de investigación y de las que emergieron los resultados que presento en este trabajo. Puedo decir mucho de la relación de trabajo que he sostenido con mi Profesor, pero debo destacar el carácter humano que imperó desde nuestra primera reunión en que él así lo estableció.

También le agradezco me haya puesto en contacto con personas muy valiosas como el Profesor Ignacio Campos Flores y el Dr. José Antonio Eduardo Roa Neri quienes revisaron parte del trabajo e hicieron significativos comentarios, por lo cual les estoy muy agradecido.

A cada uno de los miembros del jurado, Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent, Dr. José Luis Hernández Pozos, Dr. Moisés Martínez Mares y Dr. Víctor David Granados García, no sólo por la lectura de mi trabajo, sino también por sus valiosos comentarios que lo enriquecieron. A medida que fui entrevistándome con cada uno de ellos, observé claramente su intención de apoyarme, lo que me ofreció muchas y grandes oportunidades de aprendizaje que espero haber aprovechado.

A mi querido amigo y compadre, el Dr. Norberto Aquino Aquino, le agradezco todos sus útiles consejos y su incondicional apoyo. Aprendí mucho de él, pero sé que me falta aprenderle aún más.

A mi estimado Dr. Eleuterio Castaño Tostado le agradezco me haya abierto las puertas de la UAM-I y me haya orientado para definir mi área de investigación. Su trato hacia mi persona y sus consejos me hicieron sentir muy valioso.

A mi querida M en C. Ma. Iseo González, quien desde que inicié mis estudios hasta el final me ha orientado con gran voluntad para facilitar los procesos administrativos.

Al Dr. Roberto Palacios Rodríguez, Lic. Mauricio García Ballinas, Lic. Sergio Martínez Flores, Dr. Luis Alberto Barroso Moreno, Lic. Desdémona Almazán Morales, Ing. David Osvaldo Huerta Harris, Ing. Paulino Miguel Bernot Silis y Dr. Rafael Modesto De Gasperín Gasperín; compañeros, directivos y amigos

---

del Tecnológico de Monterrey que dispusieron lo necesario, administrativa y académicamente, para que pudiera realizar mis estudios.

A Adrián Penagos Tress, Gonzalo Tress Capitaine, Mónica del Río de Tress, Axel Gutiérrez Zamora, Juan Didier Camacho Leal, María Luisa Martínez, Airanné Lacarriere, Tanya Lilián Ramírez, Lluvia Lara, Boris Camacho, María Estela Segura, Rafael García y Anna M. Knajdrowska Choińska; compañeros, exalumnos y todos grandes amigos que me animaron a concluir mi trabajo y no me dejaron caer ante la tentación de la deserción.

Al Ing. Juan Antonio González Aréchiga y de la Cueva y al Ing. Héctor Manuel Yeomans Reyna no sólo les agradezco me hayan abierto las puertas, respectivamente, de la Universidad Mexicana del Noreste y del Depto. de Ing. Eléctrica del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, sino también las del oficio de la docencia con sus enseñanzas. Que hayan confiado en mí y me hayan apoyado con sus referencias para iniciar mis estudios doctorales.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, le agradezco el apoyo que me brindó para realizar mis estudios doctorales dentro de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Pero no sólo porque a Miguel Angel López Mariño le brindó la oportunidad de conocer y amar más a la Ciencia, sino porque también ha ayudado y ayudará a muchos otros mexicanos que creen que ese es uno de los caminos para lograr un mejor país.

A TODOS, GRACIAS

*Miguel Angel*

---

*Porque el hombre es más ancho  
que el mar y que sus islas  
y hay que caer en él como en un pozo  
para salir del fondo  
con un ramo de agua secreta  
y de verdades sumergidas.*

PABLO NERUDA

---

## ÍNDICE

<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>i</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>ii</b>
<b>Capítulo 1: Introducción</b> .....	<b>7</b>
1.1. La controversia de A-M .....	8
1.2. Ecuación de balance de energía-momento-esfuerzos explícitamente covariante.....	11
<b>Capítulo 2: Las ecuaciones de balance de energía y de momento en la electrodinámica de medios continuos no dispersivos.....</b>	<b>19</b>
2.1. Deducción usual de las ecuaciones de balance de energía y momento .....	20
2.1.1. El balance de energía.....	20
2.1.2. El balance de momento.....	22
2.2. Deducción alternativa de las ecuaciones de balance.....	26
2.2.1. Balance de energía.....	26
2.2.2. Balance de momento.....	27
2.3. Crítica de Robinson al procedimiento alternativo.....	32
2.4. La densidad de fuerza de Helmholtz.....	34
2.5. Análisis de la objeción de Robinson.....	37
2.6. Discusión.....	39
2.7. Comentarios .....	43
<b>Capítulo 3: Los modelos de Lai y de Johnson, Cragin y Hodges para apoyar las propuestas de Abraham y de Minkowski.....</b>	<b>44</b>
3.1 El modelo de Lai.....	45
3.2 El modelo de Lai con cilindros conductores .....	49
3.3 Modelo de Johnson, Cragin y Hodges.....	51
3.4 El balance de momento usando el modelo de Johnson, Cragin y Hodges .....	54
3.5 Discusión.....	56
3.6 Consideración de medios magnéticos .....	58
3.6.1 El modelo de Lai con medio magnético.....	58
3.6.2 El modelo de Johnson, Cragin y Hodges con medio magnético.....	62
3.7 Comentarios .....	63

---

<b>Capítulo 4: La deducción microscópica de la densidad de fuerza eléctrica de Helmholtz</b>	<b>64</b>
4.1 La propuesta de Gordon para la deducción microscópica de la densidad de fuerza eléctrica de Helmholtz.....	66
4.2 La deducción microscópica de Lai, Suen y Young para la densidad de fuerza de Helmholtz .....	70
4.3 Discusión.....	75
4.4 La derivación de la densidad de fuerza magnética de Helmholtz.....	76
4.5 Comentarios .....	84
<b>Capítulo 5: Conclusiones.....</b>	<b>85</b>
<b>Apéndice A. RESULTADO PRELIMINAR.....</b>	<b>90</b>
<b>Apéndice B. SOBRE LA PROPUESTA DE ABRAHAM PARA LA ECUACIÓN DE BALANCE .....</b>	<b>93</b>
<b>Apéndice C. PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO DEL BALANCE DE MOMENTO EN EL MODELO DE JOHNSON, CRAGIN Y HODGES.....</b>	<b>98</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## Introducción

## 1.1. La controversia de A-M

La controversia de Abraham-Minkowski (A-M) surgió muy poco después del nacimiento de la teoría de la relatividad especial, cuando se buscó la generalización explícitamente covariante de las ecuaciones de Maxwell en un medio material en movimiento.

Esta controversia ha permanecido hasta nuestros días y es un claro ejemplo de los problemas conceptuales que aún existen en las teorías clásicas bien establecidas. Nuestro objetivo, en este capítulo, es presentar el origen de la controversia. Dada la confusión imperante hasta hoy (Weilong et al, 2008), procuramos ser muy explícitos en argumentos y deducciones con el propósito de evitar, en lo posible, hipótesis implícitas que son, en buena medida, la raíz del problema.

La controversia de A-M surgió con la formulación explícitamente covariante de la ecuación de balance de energía-momento-esfuerzos en la electrodinámica de medios continuos elaborada por Minkowski

$$\frac{1}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = \partial_{\mu} T_M^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi} \left\{ (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - (\partial^{\nu} G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} \right\}.$$

Esta formulación involucra una densidad de momento

$$\mathbf{g}_M = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

y un tensor no simétrico; como consecuencia de esto último, el momento angular no se conserva. Esto causó, y sigue causando hasta el día de hoy, gran malestar y confusión, lo que condujo a la elaboración de otra formulación diferente, propuesta por Abraham, que involucra un tensor simétrico; la densidad de momento, en este caso, es

$$\mathbf{g}_A = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

e implica una nueva contribución a la densidad de fuerza, que es conocida como la densidad de fuerza de Abraham. Se originó, entonces, la pregunta: ¿Cuál es la densidad de momento del campo electromagnético correcta? Para dar respuesta a esta interrogante, se buscó medir la nueva contribución a la densidad de fuerza, y hay quienes manifiestan que lo han hecho; la pregunta persiste porque hay quienes también afirman tener pruebas de que la densidad de momento es la propuesta por Minkowski. En la centenaria discusión sobre este problema, han participado célebres científicos con una notable cantidad de experimentos reales o pensados para apoyar una u otra propuesta; además, existen dos

factores importantes como el deseo constante de entender un problema fundamental y el placer asociado con ello, así como también la creencia de que un experimento decidirá la controversia. Sin embargo, surgieron y continúan surgiendo resultados en ambas direcciones. Ciertamente, estamos ante un problema conceptual; lo que necesitamos es entenderlo y desenmarañar su entorno para entender también cómo se ha formado semejante confusión.

En estos poco más de 100 años de controversia, se ha producido una cantidad enorme de trabajos que la discuten; es prácticamente imposible considerar una revisión bibliográfica, pero el reciente trabajo de Weilong (Weilong et al, 2008) exhibe cómo, hasta el día de hoy, se mantiene el interés en el problema. Como ejemplo de la confusión reinante, podemos considerar algunos pocos ejemplos de los diferentes puntos de vista con apoyo, teórico o experimental:

- de quienes apoyan la propuesta de Abraham: Stratton [1941], Pauli [1958] (después cambió de opinión), Gordon [1973], Walker y Lahoz [1975], Jones [1978], Lai [1980], Landau [1984], Weilong et al [2008]
- de quienes apoyan la propuesta de Minkowski: Jones y Richards [1954], Pauli (Pauli, 1958, nota al pie en p. 216), Jones y Leslie [1978], Gibson et al [1979], Johnson et al [1984], Campbell et al [2005], Mansuripur [2005]
- de quienes apoyan a ambas propuestas: Loudon et al [2005] y Leonhardt [2006] y
- de quienes no apoyan alguna de las propuestas: Haus [1969], Burt y Peierls [1973], Peierls [1976], Nelson [1991], Mansuripur [2007]

¿Realmente se puede exigir que el tensor involucrado en la ecuación de balance sea simétrico?, ¿Qué sustento tienen las formulaciones en pugna?, ¿Realmente una propuesta descalifica a la otra? El propósito fundamental de este trabajo es, por un lado, dar respuesta a estas interrogantes y, por otro, entender por qué ha persistido la controversia; como veremos aquí, más que resolverla, demostrando o refutando contundentemente una de las propuestas, lo que se requiere es disolverla mediante el análisis del origen de la confusión y mostrar la utilidad de las diferentes propuestas.

Nuestro trabajo está enfocado en entender los problemas conceptuales alrededor de la controversia dentro del marco general de la Teoría Electromagnética. Nuestras discusiones y aportaciones están incluidas en el presente y en los próximos cuatro capítulos.

En el presente Capítulo, presentamos y discutimos la ecuación de balance de energía-momento-esfuerzos en forma covariante. A diferencia del usual, el método que usamos no parte de la fuerza de Lorentz, sino de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, donde evitamos la separación de los campos en propios y externos. La ecuación de balance obtenida nos permite, además, analizar los orígenes de la controversia de A-M.

En el Capítulo 2, presentamos las deducciones usuales no covariantes de las ecuaciones de balance de energía y de momento; también lo hacemos mediante un método alternativo al usado en el Capítulo 1 que nos permite analizar, por un lado, los errores comunes que se comenten en las deducciones usuales y, por otro, las objeciones de Robinson [1975] a tal procedimiento presentado. Las objeciones a dicho procedimiento se basan en considerar a la ecuación de balance de momento como una mera identidad matemática como lo presentamos en la sección (2.4); cuestionamos dichas objeciones. Por último, analizamos la deducción de la expresión para la densidad de fuerza de Helmholtz, ampliamente aceptada, incluso por Robinson [1975]; mostramos cómo surge, naturalmente, de la ecuación de balance de momento previamente obtenida.

En el Capítulo 3, analizamos dos modelos simples; el de Lai [1980], que apoya la propuesta de Abraham y el de Johnson, Cragin y Hodges [1994], que apoya la propuesta de Minkowski alimentando así la controversia. Nuestro propósito es analizar ambos modelos, que consideran sólo medios dieléctricos, para lo cual hacemos el balance de momento que omitió Johnson et al [1994] y demostramos que conduce a las mismas conclusiones que el de Lai [1980] ¿Por qué continuar? Como veremos en este Capítulo, hay aspectos no considerados por estos autores; analizamos ambos modelos con medios magnéticos y podemos establecer la utilidad de la propuesta de Minkowski y las limitaciones de la propuesta de Abraham y con esto señalamos claramente parte de las raíces del problema.

En el Capítulo 4, nuestro propósito es analizar qué nos puede ofrecer una visión microscópica del problema; no debemos perder de vista que la controversia está íntimamente ligada con la expresión para la densidad de fuerza en medios materiales. Un camino para aclarar el problema es determinar cuál es la densidad de fuerza en un medio material cuando se somete a la acción de campos que dependen del tiempo, mediante los modelos de Gordon [1973] y de Lai et al [1982]. En este análisis no consideramos campos magnéticos.

Llevamos a cabo la deducción microscópica de la densidad de fuerza para campos magnéticos, análoga a la obtenida por Lai et al [1982]. Deseamos ver si el análisis de ambas deducciones para la densidad de fuerza eléctrica y magnética nos conduce a las densidades de fuerza y de momento propuestas por Abraham, por lo que pretendemos establecer las limitaciones y la generalidad de la ecuación de Helmholtz. Si en modelos experimentales con campos magnéticos en el rango de frecuencias ópticas, como el analizado por Lai et al [1982], no podemos establecer la necesidad del

campo  $\mathbf{H}$ , los resultados no pueden ser de pleno apoyo para la propuesta de Abraham, lo cual suele pasarse por alto.

Finalmente, en el Capítulo 5, presentamos las conclusiones de nuestro estudio y también proponemos perspectivas para continuar con la línea de investigación que hemos iniciado en el presente trabajo.

## 1.2. Ecuación de balance de energía-momento-esfuerzos explícitamente covariante

A continuación, presentamos una deducción de la ecuación de balance, explícitamente covariante, libre de contradicciones, gracias a que realizamos la distinción entre **campos propios** y **campos externos**.

Es directo establecer que las ecuaciones de Maxwell en un medio material pueden expresarse como

$$\partial_{\alpha} G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^{\beta} . \quad (1.1)$$

Es conveniente mencionar que usaremos las convenciones del texto de Jackson [1975];  $g^{\mu\alpha}$  es el tensor métrico con signatura  $-2$ ,  $G_{\alpha\beta}$  es el tensor de campo electromagnético formado por los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$ ,  $(D_i = G_{0i}, H^l = -\frac{1}{2}\epsilon^{ljk}G_{jk})$ , análogo al tensor de campo electromagnético  $F^{\alpha\beta}$  formado por los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ,  $(E^i = F^{i0}, B_l = -\frac{1}{2}\epsilon_{ljk}F^{jk})$ .  $J^{\beta}$  es el cuadvectores de corriente.

Las ecuaciones homogéneas mantienen la misma forma

$$\partial_{\alpha} \mathfrak{F}^{\alpha\beta} = 0 , \quad (1.2)$$

donde  $\mathfrak{F}^{\alpha\beta}$  es el tensor dual definido por

$$\mathfrak{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\theta} F_{\lambda\theta} ; \quad (1.3)$$

el problema inmediato es establecer cuál es la ecuación de balance de energía-momento-esfuerzos. Si partimos de las ecuaciones (1.1) y (1.2), podemos realizar la deducción directamente; puesto que tal

deducción no es tan usual como la correspondiente para el vacío, vamos a mostrarla con detalle para apreciarla.

Es necesario aclarar, desde ahora, las deficiencias del camino usual para saber qué errores se cometen. Se suele partir de la ecuación para la densidad de fuerza de Lorentz, que involucra **campos externos**, esto es

$$F^{\nu} = \frac{1}{c} F^{\nu\beta}_{ext} J_{\beta} \quad (1.4)$$

y sustituir a la cuadracorriente,  $J^{\beta}$ , por su expresión, en términos de los campos, dada por la ecuación de Maxwell inhomogénea (1.1) y usar luego, en el proceso, las ecuaciones de Maxwell homogéneas. Evidentemente, en las ecuaciones de Maxwell están los **campos totales**, es decir, soluciones homogéneas, **campos externos** y soluciones inhomogéneas dependientes de  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ , **campos propios**; distinción crucial en reacción de radiación. Discutimos este procedimiento con más detalle en el Capítulo 2.

No partimos de la densidad de fuerza de Lorentz para evitar la separación de los **campos propios** y **externos**.

Iniciamos escribiendo las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en un medio material como

$$\partial^{\alpha} G_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_{\beta} \quad (1.5)$$

y si la multiplicamos por  $F^{\nu\beta}$ , tenemos que

$$\frac{4\pi}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = F^{\nu\beta} \partial^{\alpha} G_{\alpha\beta} . \quad (1.6)$$

Luego reescribimos el miembro derecho como

$$F^{\nu\beta} \partial^{\alpha} G_{\alpha\beta} = \partial^{\alpha} (F^{\nu\beta} G_{\alpha\beta}) - (\partial^{\alpha} F^{\nu\beta}) G_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

y si, además, consideramos el resultado del apéndice A

$$(\partial^{\alpha} F^{\nu\beta}) G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} , \quad (1.8)$$

podemos expresar la Ec. (1.6) como

$$\frac{4\pi}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = \partial^{\alpha} (F^{\nu\beta} G_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Por otra parte, podemos escribir

$$\frac{1}{2} (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \partial^{\nu} (F^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} (\partial^{\nu} G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta}, \quad (1.10)$$

con lo cual transformamos la Ec. (1.9) en

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = & \left\{ \partial^{\alpha} (G_{\alpha\beta} F^{\nu\beta}) - \frac{1}{4} \partial^{\nu} (G_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right\} + \\ & - \frac{1}{4} \left\{ (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - (\partial^{\nu} G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Si ahora usamos

$$\partial^{\alpha} = \partial_{\mu} g^{\mu\alpha} \quad (1.12)$$

y

$$\partial^{\nu} = \partial_{\mu} g^{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

donde, como es usual,  $g^{\mu\nu}$  es el tensor de métrica, expresamos la ecuación de balance deseada como

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = & \partial_{\mu} \left( \frac{1}{4\pi} \left\{ g^{\mu\alpha} G_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\} \right) + \\ & - \frac{1}{16\pi} \left\{ (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - (\partial^{\nu} G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

ó

$$\frac{1}{c} F^{\nu\beta} J_{\beta} = \partial_{\mu} T_M^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi} \left\{ (\partial^{\nu} F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - (\partial^{\nu} G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} \right\}, \quad (1.15)$$

donde  $T_M^{\mu\nu}$  está dado por

$$T_M^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ g^{\mu\alpha} G_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\} \quad (1.16)$$

y es el tensor de esfuerzos propuesto por Minkowski.

Hay varios puntos importantes que debemos notar; en primer lugar, que a pesar de lo que parece, el miembro izquierdo de la ecuación (1.15) no es, exactamente, la cuadrifuerza de Lorentz. Podemos apreciar este aspecto importante y controversial, aunque poco discutido en la literatura, si fijamos nuestra atención en los campos involucrados en el miembro izquierdo de las componentes de la ecuación de balance (1.15). Escribimos la componente temporal como

$$\frac{1}{c} F^{0\nu} J_\nu = \partial_0 T^{00} + \partial_k T^{k0} \quad (1.17a)$$

o vectorialmente

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (1.17b)$$

que parece la ecuación de balance de energía o teorema de Poynting, y la componente espacial como

$$F^{\nu 0} J_0 = \partial_0 T^{0\nu} + \partial_k T^{k\nu} - \frac{1}{4} \left\{ (\partial^\nu F^{\alpha\beta}) G_{\alpha\beta} - (\partial^\nu G_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} \right\} \quad (1.18a)$$

o vectorialmente

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = & \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} \right\} + \\ & - \frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \}, \end{aligned} \quad (1.18b)$$

que también parece la ecuación usual de balance de momento en medios materiales.

Debemos interpretar, como hemos insistido, los campos que aparecen en los miembros izquierdos de las ecuaciones vectoriales (1.17) y (1.18). No son, como en la densidad de fuerza de Lorentz y el teorema de Poynting usual, los **campos externos** relacionados con las cargas y corrientes fuera de la región de

interés; son los **campos totales**, esto es, los externos más los campos que producen las cargas y corrientes dentro de tal región asociados con las densidades de carga y de corriente que aparecen en las ecuaciones de Maxwell. Esto es claro desde el punto de inicio de la deducción, por lo que las ecuaciones (1.17) y (1.18) no son las usuales; discutiremos este punto en el próximo capítulo. Los resultados obtenidos también toman la misma forma que en el vacío. Debemos notar también que el término entre corchetes de (1.18) se anula si  $\mathcal{E}$  y  $\mu$  son constantes (si el medio es isotrópico, homogéneo y no dispersivo) y puede considerarse como parte de la densidad de fuerza en medios.

El punto que nos interesa resaltar es que el tensor de Minkowski no es simétrico; de hecho

$$T_M^{0n} = \mathbf{g}_M^{(n)} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})^n \quad (1.19)$$

y

$$T_M^{n0} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^n . \quad (1.20)$$

Para Abraham, esto hace que esta formulación sea inaceptable y para comprender el por qué de su malestar con la no simetría del tensor  $T^{\alpha\beta}$ , veamos las implicaciones que esto tiene en la conservación del momento angular. Consideremos lo siguiente: La densidad de momento angular del campo electromagnético se define como

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}, \quad (1.21)$$

cuya generalización covariante está dada en términos del tensor de tercer rango

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta ; \quad (1.22)$$

si se satisface la conservación del momento angular, debe cumplirse

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0 . \quad (1.23)$$

De las ecuaciones (1.22) y (1.23), tenemos

$$\begin{aligned}
 T^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} x^\beta &= 0 \\
 T^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\gamma + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\beta - \frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} x^\beta &= 0 \\
 T^{\gamma\beta} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} x^\gamma - T^{\beta\gamma} - \frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} x^\beta &= 0
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

y como hemos supuesto

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{1.25}$$

resulta que la única manera en que se satisface (1.24) es que el tensor  $T^{\gamma\beta}$  sea simétrico

$$T^{\gamma\beta} = T^{\beta\gamma}. \tag{1.26}$$

Según Abraham y sus seguidores, se requiere entonces que el tensor de esfuerzos sea simétrico y, además, que la densidad de momento electromagnético, para medios isotrópicos, homogéneos y no dispersivos, esté dada por

$$T_A^{n0} = T_A^{0n} = \mathbf{g}_A^{(n)} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^n. \tag{1.27}$$

Para lograr esto, él propone un tensor de energía-momento-esfuerzos del tipo

$$T_A^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

y considerando que  $\beta^\nu = \frac{U^\nu}{c}$ , donde  $U^\nu$  es el cuadrivector de velocidad del medio o sistema, se tiene

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon \mu - 1) \beta^\mu \beta_\gamma F_{\lambda\phi} \beta^\phi \{ G^{\nu\gamma} \beta^\lambda + G^{\gamma\lambda} \beta^\nu + G^{\lambda\nu} \beta^\gamma \}. \tag{1.29}$$

Podemos escribir esta ecuación y entenderla mejor si usamos los cuadrivectores  $F^\mu$  y  $G^\mu$  (ver Apéndice B) que definimos como

$$F^{\mu\nu} \beta_\nu = F^\mu \quad (1.30)$$

y

$$G^{\mu\nu} \beta_\nu = G^\mu ; \quad (1.31)$$

escribimos la Ec. (1.29) como

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon\mu - 1) \epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \beta_\beta \beta_\lambda F_\alpha \mathcal{G}^\nu , \quad (1.32)$$

donde  $\mathcal{G}^\nu$  es el dual de  $G^\nu$ , esto es

$$\mathcal{G}^\nu = \mathcal{G}^{\nu\lambda} \beta_\lambda . \quad (1.33)$$

De esta manera,  $\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \beta_\beta \beta_\lambda F_\alpha \mathcal{G}^\nu$  conduce al término  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Si denotamos al sistema propio por el subíndice (0), tenemos

$$t_{(0)}^{0n} = \frac{1}{4\pi c} (\epsilon\mu - 1) (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^n ; \quad (1.34)$$

de esta manera, si el medio es homogéneo e isotrópico, se anula el término entre corchetes de (1.18) y obtenemos la ecuación para la densidad de fuerza

$$f^\nu = \partial_\mu T_A^{\mu\nu} . \quad (1.35)$$

Se suele definir, además,

$$f_A^\nu = -\partial_\mu t^{\mu\nu} , \quad (1.36)$$

que en el sistema propio resulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} - \mathbf{f}_L &= \mathbf{f}_A \\
 &= \frac{1}{4\pi c} (\epsilon \mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
 &= (\epsilon \mu - 1) \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

que se conoce como densidad de fuerza de Abraham, donde hemos expresado a la fuerza de Lorentz por  $\mathbf{f}_L$ . Es un nuevo término en la densidad de fuerza y su relevancia radica en que muestra claramente la consecuencia de la postura de Abraham acerca de la expresión para el tensor de esfuerzos y da origen a la casi centenaria controversia de A-M. De hecho, esto muestra un aspecto de otro problema, la inexistencia de una expresión para la densidad de fuerza, en la teoría electromagnética de medios continuos, de aceptación general. Algunos autores han tratado de resolver la controversia de A-M midiendo tal densidad de fuerza con algunos dispositivos simples y con ello resolver la controversia a favor de Abraham. Los trabajos teóricos y experimentales que siguen apareciendo muestran, inequívocamente, que no basta con medir la densidad de fuerza de Abraham.

La controversia se inicia con la pregunta: ¿Debe ser o no simétrico el tensor de energía-momento-esfuerzos?, pero usualmente se plantea como: ¿Cuál es la expresión correcta para la densidad de momento del campo electromagnético? (una muestra de los diferentes puntos de vista alrededor de la controversia pueden verse en la página 2 y en las referencias citadas por esos autores) Desde nuestro punto de vista, estas preguntas no son equivalentes. La segunda es legítima, incluso en la formulación de Minkowski con su tensor no simétrico. El propósito de los siguientes capítulos es responder a las preguntas anteriores.

Como veremos a lo largo del trabajo, el problema es conceptual y reside en entender e interpretar las ecuaciones de balance en el marco general de la teoría electromagnética (López-Mariño y Jiménez, 2004)

# Capítulo 2

**Las ecuaciones de balance de energía y de momento en la electrodinámica de medios continuos no dispersivos**

Dado el interés en los aspectos conceptuales de la teoría electromagnética, pero sobre todo para facilitar la argumentación que refute las críticas hechas por Robinson [1975], reconocida autoridad en el tema, que descalifican el tipo de deducción de las ecuaciones de balance presentadas en el capítulo anterior, es conveniente que ampliemos la discusión sobre tal deducción; en este Capítulo, lo hacemos con la ecuación de balance de energía y extendemos los argumentos, directamente, a la ecuación de balance de momento.

En relación con la ecuación de balance de energía, podría pensarse que un teorema tan conocido y aceptado como el de Poynting no podría tener dificultades en su interpretación; sin embargo, basta con mencionar dos aspectos (Campos y Jiménez 1992) para darnos cuenta que esto no es así: el primero lo podemos notar si agregamos al vector de Poynting  $\mathbf{S}$  un vector arbitrario sin divergencia, pues la Ec. (1.17b) se sigue satisfaciendo; el segundo aspecto, que ya hemos mencionado en el Capítulo 1, es el de la interpretación de los campos involucrados en las ecuaciones de balance.

## 2.1. Deducción usual de las ecuaciones de balance de energía y momento

### 2.1.1. El balance de energía

En el libro de Jackson [1975], se encuentra el arquetipo de deducción de las ecuaciones de balance de energía y de momento más conocido; aunque diversos autores lo reproducen (Stratton 1941, Panofsky y Phillips 1962, Landau y Lifshitz 1984), sólo citaremos a Jackson [1975] por facilidad. Nuestro propósito es precisar lo dicho en el Capítulo 1 sobre la deducción de las ecuaciones de balance. Para el caso del teorema de Poynting, parte de la suma de los trabajos realizados, en la unidad de tiempo y en un volumen finito  $V$ , por los **campos externos**  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sobre las cargas y corrientes:

“Para una carga, el trabajo realizado, por unidad de tiempo, por los campos externos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  es...”.

Jackson [1975], al igual que otros autores, no distinguen los **campos externos** de los **campos totales** en la notación; aquí lo hacemos para señalar las fallas y el procedimiento es el siguiente: Si  $E$  es la energía

$$\frac{dE}{dt} = -\int \rho \mathbf{E}_{ext} \cdot \mathbf{v} d^3x \quad (2.1)$$

y si  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , puede reescribir (2.1) como

$$\frac{dE}{dt} = -\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{ext} d^3x; \quad (2.2)$$

luego, hace uso de la ecuación de Ampere-Maxwell en la expresión anterior para eliminar  $\mathbf{J}$  en términos de los campos

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left( \nabla \times \mathbf{B}_{tot} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{tot}}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

y por esta razón es que estos son **campos totales**, pero Jackson [1975], como ya lo mencionamos, no lo señala; por lo tanto, escribimos el miembro derecho de (2.2) como

$$-\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{ext} d^3x = \frac{c}{4\pi} \int \left( \nabla \times \mathbf{B}_{tot} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{tot}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}_{ext} d^3x. \quad (2.4)$$

De aquí, no se puede avanzar a menos que se haga caso omiso de la distinción entre **campos externos** y **campos totales**, tal como lo hace Jackson [1975] para poder reescribirla, usando la ley de Faraday, como

$$-\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int \left[ c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d^3x; \quad (2.5)$$

supone que el volumen  $V$  es arbitrario y obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

donde

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

es la densidad de energía electromagnética y

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

es el vector de Poynting.

Es importante mencionar también que Jackson [1975], para discutir el miembro derecho de (2.6), después de partir de ecuaciones microscópicas, habla más tarde de la ley de Ohm, ley evidentemente macroscópica. Sobre esto no abundaremos en este momento.

### 2.1.2. El balance de momento

Jackson [1975], en su libro, obtiene la ecuación de balance de momento en el vacío siguiendo un procedimiento completamente análogo al del balance de energía. Para facilitar nuestras discusiones posteriores, a continuación detallamos la deducción de la ecuación de balance de momento, tal como lo hace Jackson [1975] y sin olvidar su afirmación previa:

"La conservación del momento lineal puede ser considerada similarmente".

Parte de la fuerza total sobre una partícula cargada debida a **campos externos**; a diferencia de Jackson [1975], nosotros señalamos esto mediante el uso de subíndices,

$$\mathbf{F} = \int_V \left( \rho \mathbf{E}_{ext} + \rho \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_{ext} \right) d^3x \quad (2.7)$$

y si la suma de los momentos de todas las partículas en el volumen  $V$  es  $\mathbf{P}_{mec}$ , la segunda ley de Newton establece que

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \int_V \left( \rho \mathbf{E}_{ext} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}_{ext} \right) d^3x \quad (2.8)$$

y tal como lo hizo en la deducción del teorema de Poynting, usa las ecuaciones de Maxwell para eliminar  $\rho$  y  $\mathbf{J}$ ; no se debe olvidar que en este caso los campos involucrados son, evidentemente, los totales,

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}_{tot} , \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left( \nabla \times \mathbf{B}_{tot} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{tot}}{\partial t} \right). \quad (2.10)$$

Ahora con las Ecs. (2.9) y (2.10), escribe el integrando de la Ec. (2.8) como

$$\rho \mathbf{E}_{ext} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{ext} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}_{ext} (\nabla \cdot \mathbf{E}_{tot}) + \frac{1}{c} \mathbf{B}_{ext} \times \frac{\partial \mathbf{E}_{tot}}{\partial t} - \mathbf{B}_{ext} \times (\nabla \times \mathbf{B}_{tot}) \right] \quad (2.11)$$

y como puede verse, para continuar es necesario **hacer caso omiso de la distinción entre campos externos y totales**, tal como lo hizo Jackson [1975] en el caso del balance de energía. Luego escribe

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

y suma

$$\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (2.13)$$

en el lado derecho de (2.11) y obtiene

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.14)$$

Por lo tanto, puede escribir la derivada, respecto al tiempo, del momento como

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] d^3x. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Luego Jackson [1975] dice:

“Podemos identificar tentativamente la integral en el lado izquierdo como el momento total del campo electromagnético  $\mathbf{P}_{campo}$  en el volumen  $V$

$$\mathbf{P}_{campo} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x \quad (2.16)$$

y su densidad como

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})". \quad (2.17)$$

A partir de aquí, sorprendentemente, Jackson [1975] parece renunciar al cálculo vectorial y usa coordenadas cartesianas denotadas por  $x_\alpha$ ,  $\alpha=1, 2, 3$  y escribe la componente  $\alpha=1$  del primer término del lado derecho de (2.15) como

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_1 &= \\ &= E_1 \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) - E_2 \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) + E_3 \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1)^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_1 E_3) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \end{aligned}$$

y, en general, para la componente  $\alpha$  escribe

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{\alpha\beta} \right); \quad (2.18)$$

para el campo magnético se cumple una ecuación análoga

$$[\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (2.19)$$

Con esto, reescribe la Ec. (2.15) como

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{campo})_\alpha = \sum_\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} d^3x \quad (2.20)$$

o aplicando el teorema de divergencia como la integral de volumen

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{campo})_\alpha = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta da, \quad (2.21)$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.22)$$

es el tensor de esfuerzos y  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie cerrada.

Como vemos, el procedimiento que sigue Jackson [1975] para el caso de la obtención del balance de momento para cargas en el vacío es análogo al del balance de energía. Lamentablemente, el caso de la ecuación en medios materiales no lo discute en detalle; para realizar la deducción siguiendo este procedimiento, se requeriría de una expresión para la densidad de fuerza en medios materiales, lo cual es ya un punto espinoso; sin embargo, señala:

”En medios macroscópicos, debe tenerse cuidado extremo al definir la densidad de energía electromagnética

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}),$$

flujo de energía

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

flujo de momento

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}),$$

y tensor de esfuerzos, en notación de diadas,

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} \right],$$

puesto que lo que se considera electromagnético y mecánico es, en cierta medida, arbitrario”.

Después, menciona los resultados obtenidos antes por otros autores, pero sin detenerse en la deducción y análisis más extenso de la ecuación de balance de momento. Como podemos ver, aún en temas tan conocidos como las ecuaciones de balance que aparecen en los libros de texto hay problemas conceptuales.

## 2.2. Deducción alternativa de las ecuaciones de balance

### 2.2.1. Balance de energía

Algunas de las dificultades que aparecen en la deducción de las ecuaciones de balance se pueden evitar si en lugar de partir de la densidad de fuerza de Lorentz se parte directamente de las Ecs. de Maxwell, tal y como se hizo en el Capítulo 1. Veamos cómo y analicemos el método. Lo hacemos, en este caso, para medios materiales y así facilitar la comparación con lo establecido en el Capítulo 1.

A las ecuaciones de Maxwell que involucran a las derivadas parciales respecto del tiempo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.23)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.24)$$

las multiplicamos escalarmente, por  $\mathbf{H}$  la primera ecuación y por  $-\mathbf{E}$ , la segunda. Lo que obtenemos después de sumarlas es

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (2.25)$$

que podemos reescribir como

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.26)$$

Este es, precisamente, el camino seguido en el Capítulo 1. Es importante notar, que a diferencia de la deducción propuesta por Jackson [1975], no hay problema ahora con la distinción entre **campos externos** y **campos totales**, puesto que hemos usado, consistentemente, los **campos totales**; esto es, el campo  $\mathbf{E}$  en el lado derecho de (2.26) es el **campo total** igual que en el Capítulo 1, discutido también por otros autores (Campos y Jiménez 1992), y no el **campo externo** como lo señala Jackson [1975]. La deducción es inobjetable; sin embargo, existen problemas de interpretación.

En este momento, podemos sentirnos tentados a efectuar el paso que parece obligado, el análogo al que se hace cuando se analiza el problema en el vacío

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}), \quad (2.27)$$

que sólo es posible si el medio es no dispersivo (suponemos que las propiedades del medio no dependen del tiempo). Podemos, por tanto, afirmar que la Ec. (2.26) es la ecuación de balance deseada y que de ella se obtienen los resultados conocidos, ya sea en el vacío o en medios no dispersivos.

### 2.2.2. Balance de momento

Ahora, vamos a deducir la ecuación de balance de momento procediendo de manera análoga a como lo hicimos con el balance de energía y a identificar la densidad de fuerza en un medio material (como veremos, hay varias expresiones para ella). Partimos de las ecuaciones de Maxwell (Jiménez y Campos 1995)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

La deducción no covariante que presentamos aquí es directa y contrasta con los trucos en las deducciones usuales. Si multiplicamos por  $\mathbf{E}$  a (2.28), por  $\mathbf{H}$  a (2.29), luego multiplicamos vectorialmente por la derecha, a (2.30) por  $\mathbf{D}$  y a (2.31) por  $\mathbf{B}$ , y finalmente sumamos y reacomodamos términos, obtenemos

$$\frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (2.32)$$

Con el propósito de presentar la ecuación anterior como una ecuación de balance, es necesario que reescribamos los primeros cuatro términos del miembro izquierdo de la ecuación anterior, por lo que es conveniente definir

$$\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{T}_1 \quad (2.33)$$

y

$$\mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{T}_2 . \quad (2.34)$$

Para reescribir a  $\mathbf{T}_1$ , usamos las siguientes identidades vectoriales

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} , \quad (2.35)$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) , \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} ; \quad (2.37)$$

si usamos las Ecs. (2.36) y (2.37) con  $\mathbf{u} = \mathbf{D}$  ,  $\mathbf{v} = \mathbf{E}$  , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2}\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{2}\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{D} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{D})] + \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} - (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E}] . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Luego, si reagrupamos y usamos (2.37) con  $\mathbf{u} = \mathbf{E}$  ,  $\mathbf{v} = \mathbf{D}$  , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E} \\ &= \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2}[\mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E})] ; \end{aligned} \quad (2.39)$$

por último, utilizamos la Ec. (2.35), después agrupamos y obtenemos

$$\mathbf{T}_1 = \nabla \cdot \left( \mathbf{D}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{2}[\mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E})] , \quad (2.40)$$

que es el resultado deseado. Análogamente, encontramos

$$\mathbf{T}_2 = \nabla \cdot \left( \mathbf{B}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{2} [\mathbf{H} \cdot (\nabla \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{H})]. \quad (2.41)$$

Con las expresiones que obtuvimos para  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ , transformamos la Ec. (2.32) en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} \right\} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \\ & + \frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{H}) \} + \\ & = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

que es la ecuación deseada; podemos escribirla como

$$\nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} = \mathbf{f}_{Maxwell}, \quad (2.43)$$

donde

$$\mathbf{g}_M = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (2.44)$$

es la densidad de momento del campo electromagnético, el tensor de esfuerzos, expresado en notación de diadas, está dado por

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} \right] \quad (2.45)$$

y la densidad de fuerza buscada es

$$\mathbf{f}_{Maxwell} = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \}, \quad (2.46)$$

que llamaremos la densidad de fuerza de Maxwell.

Es importante señalar que las ecuaciones de balance de energía y de momento, (2.26) y (2.42), respectivamente, coinciden con las Ecs. (1.17b) y (1.18b) obtenidas en el Capítulo 1 y ambas conducen a las expresiones usuales en el vacío cuando  $\mathbf{E} = \mathbf{D}$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ .

En la expresión para la densidad de fuerza de Lorentz (integrando de Ec. (2.7)), los **campos externos** son conocidos y actúan sobre densidades de carga y corriente a las cuales les suministran energía. Por otro lado, en la densidad de fuerza que involucra a los **campos totales**, aparecen también los **campos propios**, esto es, los producidos por la densidad de carga y corriente; es decir, estas fuentes no sólo reciben energía de los **campos externos**, también la suministran al entorno modificando los campos alrededor, y de paso, modificando la posición y velocidad de las fuentes.

Es conveniente discutir el balance de momento angular; si bien es posible realizar el análisis explícitamente covariante, en la cual aparece el tensor de tercer rango de densidad de momento angular,

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta ;$$

la ecuación con dos índices cero de dicha ecuación de balance enfrenta algunos problemas conceptuales que no discutiremos aquí; de hecho, para nuestra discusión en el próximo capítulo nos basta la formulación no covariante, por ello la presentamos a continuación:

Para un medio homogéneo e isotrópico, la ecuación de balance (2.42) se reduce a

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial g_k}{\partial t} + f_k ; \quad (2.47)$$

en este caso, es fácil encontrar la ecuación de balance de momento angular multiplicando vectorialmente ambos miembros de la ecuación anterior por  $x$ , así

$$\epsilon_{mnk} x_n \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_{mnk} x_n g_k] + \epsilon_{mnk} x_n f_k . \quad (2.48)$$

Podemos simplificar el lado izquierdo de la ecuación anterior si notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} [\epsilon_{mnk} x_n T_{kl}] &= \epsilon_{mnk} \delta_{nl} T_{kl} + \epsilon_{mnk} x_n \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \\ &= \epsilon_{mlk} T_{kl} + \epsilon_{mnk} x_n \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (2.49)$$

y consideramos, además, que el tensor  $T_{kl}$  es simétrico, ya que el primer término de la derecha se anula, puesto que es el producto de un tensor antisimétrico con otro simétrico, por lo que podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_l} [\epsilon_{mnk} x_n T_{kl}] = \epsilon_{mnk} x_n \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}. \quad (2.50)$$

Es conveniente definir el tensor

$$M_{mnk} = \epsilon_{mnk} x_n T_{kl} \quad (2.51)$$

y con esto, reescribimos la Ec. (2.48) como

$$\frac{\partial M_{mnk}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_{mnk} x_n \mathbf{g}_k] + [\epsilon_{mnk} x_n \mathbf{f}_k]. \quad (2.52)$$

Es importante notar que no concuerda el número de índices libres del miembro izquierdo con los del miembro del derecho, puesto que, como es usual, representamos al tensor antisimétrico de segundo rango que representa al producto cruz con un solo índice, como si fuera vector. Por ello, para evitar confusiones con los índices, vamos a escribir  $M_{mk}$  en lugar de  $M_{mnk}$ .

Si ahora integramos sobre el volumen interior de una superficie estacionaria y luego usamos el teorema de Gauss, resulta

$$\int da_k M_{mk} = \frac{d}{dt} \int d^3x [\epsilon_{mnk} x_n \mathbf{g}_k] + \int d^3x [\epsilon_{mnk} x_n \mathbf{f}_k]. \quad (2.53)$$

El último término del lado derecho es la torca actuando sobre las cargas dentro del volumen y debe ser igual a la derivada, en el tiempo, del momento mecánico; es decir,

$$\frac{d}{dt} \int d^3x l_m^{mec} = \int d^3x \epsilon_{mnk} x_n f_k ; \quad (2.54)$$

el primer término del lado derecho lo podemos interpretar como la derivada, en el tiempo, del momento angular del campo

$$\frac{d}{dt} \int d^3x l_m^{campo} = \frac{d}{dt} \int d^3x \epsilon_{mnk} x_n \mathbf{g}_k . \quad (2.55)$$

Ahora, podemos escribir la Ec. (2.53) como

$$\int da_k L_{mk} = \frac{d}{dt} \int d^3x [l_m^{campo} + l_m^{mec}] . \quad (2.56)$$

Para un sistema donde no hay flujo de momento angular, un sistema cerrado, tenemos que

$$0 = \frac{d}{dt} \int d^3x [l_m^{campo} + l_m^{mec}] , \quad (2.57)$$

resultado que nos será de gran utilidad más adelante.

### 2.3. Crítica de Robinson al procedimiento alternativo

Robinson es, sin lugar a duda, una autoridad en este campo y realizó una excelente revisión del problema en 1975; sin embargo, como veremos a continuación, algunos de sus puntos de vista nos parecen incorrectos.

Robinson [1975] sostiene que las ecuaciones de balance, como las hemos presentado en la sección anterior, son meramente identidades surgidas de las ecuaciones de Maxwell y por ello las descalifica. Debemos mencionar que estas no son las únicas expresiones que descalifica Robinson [1975]; si se parte de la densidad de fuerza

$$\mathbf{f}_1 = \rho_{total} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_{total} \times \mathbf{B} , \quad (2.58)$$

donde en un medio material

$$\rho_{total} = \rho_{libre} - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.59)$$

y

$$\mathbf{J}_{total} = \mathbf{J}_{libre} + \dot{\mathbf{P}} + c \nabla \times \mathbf{M}, \quad (2.60)$$

con ayuda de las ecuaciones de Maxwell puede obtenerse

$$\begin{aligned} & (\rho_{libre} - \nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \mathbf{J}_{libre} + \dot{\mathbf{P}} + c \nabla \times \mathbf{M} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ & = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{I} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nuevamente, con ayuda de las ecuaciones de Maxwell puede obtenerse otra expresión para la fuerza

$$\begin{aligned} & \rho_{libre} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \mathbf{J}_{libre} \times \mathbf{H} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{M}} \right) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ & = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.62)$$

aunque Robinson [1975] no es claro en su punto de partida, podemos inferir que parte de

$$\mathbf{f}_2 = \rho_{libre} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_{libre} \times \mathbf{B} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (2.63)$$

Según Robinson [1975], para obtener la ecuación de balance de momento debe partirse de una expresión para la energía libre del sistema, y con ella deducir la expresión para la densidad de fuerza, tal y como se hace con la densidad de fuerza de Helmholtz<sup>1</sup>, luego con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell deducir la ecuación de balance deseada. Insiste, enfáticamente, que las deducciones como la presentada en el Capítulo 1, la sección 2.3 anterior y las Ecs. (2.61), (2.62) carecen de significado físico por ser meramente identidades.

<sup>1</sup> Es la densidad de fuerza que discutiremos en la siguiente sección.

Para facilitar la discusión es conveniente tener presente el procedimiento que se sigue para la deducción de la densidad de fuerza de Helmholtz; ese es el objetivo de la próxima sección

## 2.4. La densidad de fuerza de Helmholtz

Con respecto al balance de momento, frecuentemente, se propone como la densidad de fuerza electromagnética, en un medio material sometido a campos estáticos, la expresión de Helmholtz (Stratton 1941, Panofsky y Phillips 1955, Robinson 1975, Landau y Lifshitz 1984); sin embargo, esta propuesta aparece como algo totalmente ajeno o con una relación muy oscura con la ecuación de balance de momento. Por ahora, sólo discutiremos el caso eléctrico y es muy importante señalar que el análisis que involucra campos eléctricos que dependen del tiempo fue resuelto hace relativamente poco, en 1982, por Lai, Suen y Young (Lai et al, 1982); nosotros hemos generalizado su método para el caso magnético y hemos analizado también sus consecuencias en la controversia de A-M, pero eso lo discutiremos en el Capítulo 4. En este Capítulo, presentamos los puntos importantes de la deducción de la densidad de fuerza de Helmholtz y discutimos su relación con la ecuación de balance de momento Maxwelliana.

Robinson [1975] está más interesado que Jackson [1975] en la electrodinámica de medios continuos, particularmente en que no hay una expresión para la densidad de fuerza, de aceptación general, como la densidad de fuerza de Lorentz en el vacío. Su punto de partida, como la de muchos otros autores, es la ecuación para la energía libre de un sistema inmerso en campos electromagnéticos y luego aceptar que la variación en el tiempo de esta energía es igual a la integral de la densidad de fuerza buscada, multiplicada por la velocidad del medio; después, con ayuda de las ecuaciones de Maxwell, reescribe esta densidad de fuerza como una ecuación de balance. El método hace clara la manera de incorporar la hidrodinámica y la termodinámica en la deducción de la densidad de fuerza, punto, sin lugar a duda, crucial, pero nosotros estamos interesados en usar el mínimo de hipótesis y restringirnos, básicamente, sólo a la teoría electromagnética para aclarar la controversia de A-M.

Como ya hemos mencionado, se parte de la energía libre,  $U$ , de un dieléctrico dentro de un campo electrostático, luego se considera su variación en el tiempo y esto se relaciona con la fuerza sobre el dieléctrico mediante la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = -\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV, \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidad del dieléctrico.

Si se considera que la energía libre está dada por

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV, \quad (2.65)$$

su cambio en el tiempo es

$$\frac{dU}{dt} = \int \left( \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dV, \quad (2.66)$$

donde, como es usual,  $\varphi$  es el potencial.

Con el propósito de incluir el campo de velocidad  $\mathbf{V}$ , es necesario usar las ecuaciones de la conservación de la masa y de la carga,

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0, \quad (2.67)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.68)$$

y además calcular  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ , teniendo cuidado extremo en distinguir entre derivadas parciales y derivadas sustanciales

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{d\varepsilon}{dt} - (\nabla \varepsilon) \cdot \mathbf{v}; \quad (2.69)$$

de esta manera y con la ayuda de la ecuación de Clausius-Mossotti,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \frac{d\rho_m}{dt}, \quad (2.70)$$

se obtiene, después de una laboriosa manipulación,

$$\frac{dU}{dt} = \int \left( -\phi \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) + \left( \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \rho_m (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV. \quad (2.71)$$

Luego de transformar el primero y el tercer término del lado derecho de (2.71) mediante integración por partes, puede reescribirse como

$$\frac{dU}{dt} = \int \left( -\rho \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon - \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right) \right) \cdot \mathbf{v} dV, \quad (2.72)$$

de donde al comparar con la Ec. (2.64), resulta la expresión para la densidad de fuerza de Helmholtz

$$\mathbf{f}_E = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right). \quad (2.73)$$

El primer término representa la densidad de fuerza electrostática ordinaria. El segundo está asociado con la densidad de fuerza debida a la no homogeneidad del medio cuando el dieléctrico se somete a un campo eléctrico. El tercero, es el término de electrostricción, que representa una densidad de fuerza sobre un dieléctrico sometido a un campo eléctrico no homogéneo. De manera análoga, puede obtenerse la contraparte magnética

$$\mathbf{f}_M = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} H^2 \right). \quad (2.74)$$

Las ecuaciones anteriores suelen reescribirse (Jackson 1975, Panofsky y Phillips 1962), con ayuda de las ecuaciones de Maxwell, como

$$\mathbf{f}_E = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{D} \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \left( 1 - \frac{\rho_m}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \right\} \quad (2.75)$$

y

$$\mathbf{f}_M = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{B} \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \left( 1 - \frac{\rho_m}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right) \right] \right\}. \quad (2.76)$$

Como se verá un poco más adelante, la forma de escribir estas ecuaciones es parte de la confusión alrededor de la relación entre la densidad de fuerza de Helmholtz y la ecuación de balance de momento.

Aún queda un punto que vale la pena aclarar, pues al principio de la deducción se supuso que  $\mathcal{E}$  sólo dependía de  $t$  y  $\mathbf{r}(t)$ , pero la Ec. (2.70) hace evidente que esto no es suficiente;  $\mathcal{E}$  debe depender también de  $\rho_m(\mathbf{r}(t))$ . Esto no modifica las deducciones, pero se reinterpreta el significado del gradiente en la Ec. (2.73), según la ecuación,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial r} = \nabla \mathcal{E}; \quad (2.77)$$

este punto se pasa por alto frecuentemente, aún cuando se usa en otros lugares, pero es relevante si se desea entender la generalidad de la ecuación de balance de momento y también extender estos resultados para sólidos, lo cual no discutiremos en el presente trabajo.

El que en la ecuación de balance de momento Maxwelliana, el punto de partida, se consideren los **campos totales** es crucial, pues en la ecuación de Helmholtz se incluyen tanto los **campos externos** como los debidos a los dipolos del medio; este último punto no se aprecia en la deducción presentada aquí, ya que se usó la relación de Clausius-Mossotti, pero se verá más claramente en el Capítulo 4 cuando se aborde la deducción microscópica de Helmholtz. Esto muestra la coherencia de los resultados obtenidos.

## 2.5. Análisis de la objeción de Robinson

Básicamente, la objeción de Robinson [1975] consiste en que la ecuación de balance (2.42) y las Ecs. (2.61) y (2.62) son identidades surgidas directamente de la manipulación de las ecuaciones de Maxwell. No se partió de una expresión para la densidad de fuerza obtenida de la energía libre del sistema como se hizo para la densidad de fuerza de Helmholtz en la sección 2.4.

Ante esta posición, debemos señalar lo siguiente:

- Es bien conocido, desde los cursos intermedios, que al aplicarle la divergencia a la ecuación de Ampere-Maxwell se obtiene la ecuación de continuidad: la carga se conserva. Esta es una deducción plenamente aceptada y no hay razón para descalificarla; el propio Robinson [1975] lo reconoce.

- En la misma sección en que Robinson [1975] critica las Ecs. (2.61) y (2.62), acepta la deducción de la ecuación de balance de energía que presentamos con detalle en la sección (2.2.1), que es otra identidad. Tampoco la descalificó. Sus argumentos no son muy sólidos.
- Recordemos también que manipulando las ecuaciones de Maxwell se obtienen (norma de Lorentz) las ecuaciones de onda que gobiernan a los potenciales electromagnéticos  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$ , que permiten resolver las ecuaciones de Maxwell; estas deducciones se usan sin mayor problema. Insistimos en que sus objeciones no tienen un sustento firme.
- El miembro derecho de la Ec. (2.46) es el que se usa en el estudio de la reacción de radiación, esto es, la expresión análoga a la densidad de fuerza de Lorentz, pero con **campos totales**,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}_{tot} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}_{tot} . \quad (2.78)$$

Consideramos que la obtención de las expresiones dadas por las Ecs. (2.42), (2.61) y (2.62), así como la ecuación de continuidad, la Ec. (2.26) para el balance de energía, las ecuaciones de onda para los potenciales electromagnéticos, etc... no pueden ser descalificadas por ser identidades, más aún, tienen la validez de las ecuaciones de Maxwell; la única limitación o restricción adquirida es la proveniente de las limitaciones asociadas con las manipulaciones matemáticas involucradas.

Por otro lado, si los resultados o identidades obtenidas no tienen por qué ser descartados de antemano, lo que resulta crucial es su interpretación. Por ejemplo, en la ecuación de Poynting en el vacío o en medios materiales aparece el término  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ; es necesario analizar su significado, considerando que el campo involucrado es el total, lo mismo sucede con el vector de Poynting, como ya hemos señalado antes. Tomando en cuenta esto, lo primero que requerimos es analizar el significado de las ecuaciones obtenidas.

Veamos lo que sucede si en los siguientes términos actúan los **campos totales**; para el caso de  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ , se incluye no sólo el trabajo por unidad de tiempo de los campos sobre las cargas, sino también el suministro de energía por unidad de tiempo de las cargas a los campos y para el caso de  $\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}$  (punto de partida en reacción de radiación), se incluye tanto la fuerza de los campos sobre las cargas y corrientes como el efecto de éstas sobre los campos.

## 2.6. Discusión

Lo que deseamos señalar es la posibilidad de obtener tanto las expresiones (2.73) y (2.74) para las densidades de fuerza a partir de la ecuación de balance (2.42). Si consideramos el caso electrostático, la Ec. (2.42) se reduce a

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{D}\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{I} \right] \right\} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{D}) \}. \quad (2.79)$$

Si usamos que

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.80)$$

en el miembro derecho de (2.79) y en el producto escalar del lado izquierdo usamos

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (1 + 4\pi\chi) \mathbf{E} \\ &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

obtenemos

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{D}\mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} \right] \right\} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla (\chi E^2); \quad (2.82)$$

además, si consideramos que para un fluido Clausius-Mossotti se satisface

$$\chi = \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m}, \quad (2.83)$$

podemos escribir la Ec. (2.82) como

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right), \quad (2.84)$$

que coincide con la densidad de fuerza de Helmholtz para el caso electrostático, Ec. (2.73).

La ecuación (2.83) permite escribir la ecuación (2.79) como la densidad de fuerza de Helmholtz; puede parecer trivial este punto, pero pasarlo por alto es uno de los motivos por los cuales Robinson considera que la densidad de fuerza “correcta” es la de Helmholtz y no la obtenida de la ecuación de balance de Maxwell. Aquí queda claro no sólo la falta de sustento de esa afirmación, sino también la generalidad del enfoque propuesto.

De esta manera, podemos afirmar que las Ecs. (2.73) y (2.74) están incluidas en la ecuación de balance, Ec. (2.42) que emerge de las ecuaciones de Maxwell. Como hemos visto, existen objeciones (Robinson, 1975) sobre tal ecuación de balance; sin embargo, no existe ningún cuestionamiento sobre la Ec. (2.73) más allá de considerar que sólo utilizamos campos estáticos y la validez de Clausius-Mossotti, aún cuando proviene de la ecuación de balance de momento Maxwelliano.

Debemos mencionar que podemos obtener de la ecuación de balance (2.42), después de una laboriosa álgebra, las Ecs. (2.61) y (2.62) usando las ecuaciones constitutivas (2.81) y

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad (2.85)$$

y con ayuda de la identidad, muy poco usual,

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}]. \quad (2.86)$$

Es muy importante señalar que la propuesta de Abraham también está contenida en la ecuación de balance (2.42); en otras palabras, la propuesta de Abraham no es otra cosa que una forma de reescribir la ecuación de balance de Minkowski. Es fácil ver esto de la siguiente manera:

La ecuación de Maxwell, cuando  $\mathcal{E}$  y  $\mu$  son constantes, es

$$\nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (2.87)$$

donde  $\mathbf{g}_M$  y el tensor  $\mathbf{T}$  están dados por las ecuaciones (2.44) y (2.45), respectivamente. Si sumamos y restamos  $\frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t}$  en la ecuación (2.87), tenemos

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} - \left( \frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} \right) &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} \\
 \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} + \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
 \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} + \mathbf{f}_A .
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

En esta última ecuación aparece la densidad de momento  $\mathbf{g}_A$  y surge, naturalmente, el término  $\mathbf{f}_A$  de la densidad de fuerza de Abraham. En ocasiones, se piensa que su medición justifica plenamente la propuesta de Abraham, pero las ecuaciones (2.87) y (2.88) son las mismas. Medir  $\mathbf{f}_A$ , como veremos en el próximo capítulo, depende tan sólo de la situación experimental.

Podemos obtener, tanto la densidad de fuerza de Helmholtz como las densidades de fuerza expresadas en las ecuaciones (2.61) y (2.62) y la misma ecuación de Abraham, de la ecuación de balance (2.42). ¿Qué podemos concluir de esto? ¿Queda descalificada la propuesta de Abraham? Ante todo, debemos subrayar que descalificar la propuesta de Abraham equivale a descalificar la propuesta de Minkowski, puesto que, como hemos visto, de una se llega a la otra; este punto de vista de no descalificar alguna propuesta no es usual, pero es precisamente lo que queremos señalar y promover para disolver la controversia. Podemos entender mejor esto en el contexto relativista. Veamos a qué nos referimos.

Un sistema cerrado, descrito por el tensor  $T^{\mu\nu}$  satisface,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.89}$$

y lo podemos separar en varios sistemas abiertos; para analizar esto, basta con considerar sólo dos subsistemas,

$$T^{\mu\nu} = T_I^{\mu\nu} + T_{II}^{\mu\nu} , \tag{2.90}$$

y definir

$$f^\nu = -\partial_\mu T_{II}^{\mu\nu} ; \tag{2.91}$$

es evidente que las ecuaciones (2.89), (2.90) y (2.91) implican

$$\partial_{\mu} T_I^{\mu\nu} = f^{\nu} , \quad (2.92)$$

que es expresada como ecuaciones de balance que lucen como

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_I + \frac{1}{c} \frac{\partial u_I}{\partial t} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} , \quad (2.93)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_I - \frac{\partial \mathbf{g}_I}{\partial t} = \mathbf{f} . \quad (2.94)$$

Debemos notar que  $\mathbf{f}$  representa la densidad de fuerza que el sistema  $II$  ejerce sobre el sistema  $I$ . Sin embargo, cualquier descomposición es, en cierta forma, arbitraria y es necesaria la intuición física para descomponer un sistema cerrado en subsistemas. Por lo tanto,  $T_I^{\mu\nu}$  y  $T_{II}^{\mu\nu}$  no deben ser necesariamente simétricos, pero su suma sí. Este es precisamente el caso con el tensor de Minkowski, Ec. (2.45), y entonces la arbitrariedad de la expresiones para la densidad de fuerza y para la densidad de momento, por ejemplo, no es sorprendente, como tampoco lo es el hecho de que el tensor de esfuerzos no sea simétrico. De aquí, podemos ver que la separación propuesta por Abraham es una de muchas posibles; otras propuestas condujeron a las Ecs. (2.61) y (2.62) e incluso a la densidad de fuerza de Helmholtz. Debemos remarcar que, aún para el vacío, las ecuaciones de balance de energía y de momento para campos electromagnéticos con cargas y corrientes tienen la misma forma de (2.93) y (2.94). Es decir, aún la electrodinámica microscópica describe un sistema abierto.

Debe quedar claro, por lo tanto, que hay muchas maneras de escribir la ecuación de balance, pero ¿Cuál es la mejor?, o, ¿Cuál es la correcta? Todas son correctas, pero la mejor depende de la situación experimental que se considere; esto se aclarará con los ejemplos que presentamos en el capítulo siguiente y veremos por qué hemos dicho que la medición de la densidad de fuerza de Abraham no descalifica a la propuesta de Minkowski.

## 2.7. Comentarios

Como hemos podido darnos cuenta, no hay razón física para esperar que la teoría electromagnética expresada por las ecuaciones de Maxwell conduzca a una ecuación de balance con un tensor simétrico; una ecuación de balance del tipo  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}$ , describe a un sistema abierto y no hay razón para exigir que el tensor  $\mathbf{T}$  sea simétrico. Hemos observado también que las diferentes separaciones posibles conducen a diferentes propuestas de densidades de momento electromagnético.

De la deducción no covariante presentada en este Capítulo, es evidente que la propuesta de Abraham no es más que una de las separaciones posibles del sistema en subsistemas. De hecho, hemos mostrado varias separaciones posibles, ya conocidas y descalificadas por Robinson [1975]; sobre todo, la separación que conduce a la densidad de fuerza de Helmholtz, siempre y cuando dispongamos de la ecuación de estado adecuada. Esperamos que esto sea evidente, ya que la objeción de Robinson [1975] carece, por completo, de fundamento.

¿Hasta dónde se puede extender esto? Es un punto pendiente aún, podemos formular también la pregunta como: ¿Cuáles son las limitaciones de la ecuación de balance estudiada? Desde luego, todavía no se incorpora la termodinámica ni la elasticidad, lo cual presenta retos muy grandes si se desea hacer el análisis desde la perspectiva relativista. En fin, mientras no se reconozca que la separación de un sistema cerrado en subsistemas es arbitraria, determinada sólo por la situación física o experimental de interés, la controversia continuará. Por lo contrario, basta con reconocer esta arbitrariedad en la separación en subsistemas para que la controversia se disuelva. Apoyaremos este punto de vista con los resultados de los próximos capítulos.

# Capítulo 3

**Los modelos de Lai y de Johnson, Cragin y  
Hodges para apoyar las propuestas de  
Abraham y de Minkowski**

Una de las formas de plantear la controversia de A-M se puede reducir a dar respuesta a la pregunta ¿Cuál debe ser la expresión correcta para la densidad de momento del campo electromagnético en un medio material?

En 1980, H. M. Lai (Lai, 1980), mediante un dispositivo muy sencillo, apoyó la propuesta de Abraham; poco después, en 1994, Johnson, Cragin y Hodges (Johnson et al 1994, en el futuro lo denotaremos como JCH) abordaron nuevamente el problema y, también mediante el análisis de un dispositivo muy simple, aparentemente sin conocer el resultado de Lai (Lai, 1980), respaldaron la propuesta de Minkowski. Ambos análisis son claros y, a primera vista, lucen contundentes, lo que muestra por qué la controversia continúa hasta nuestros días y también muestra la confusión alrededor de este problema. Nuestro interés en este capítulo se centra en los dos trabajos antes mencionados dada su simplicidad y la oportunidad que ofrecen para echar un poco de luz sobre esta controversia y cómo proponemos disolverla.

Con el propósito de facilitar la discusión y hacer las conclusiones tan claras como sea posible, consideramos necesario presentar, con detalle, los argumentos tanto de Lai (Lai, 1980) como de JCH (Johnson et al 1994).

### 3.1 El modelo de Lai

Para realizar su análisis, Lai (Lai, 1980) considera un sistema formado por dos cascarones cilíndricos concéntricos, dieléctricos y de radios  $a$  y  $b$ , de longitud  $l$  donde  $a < b \ll l$ .

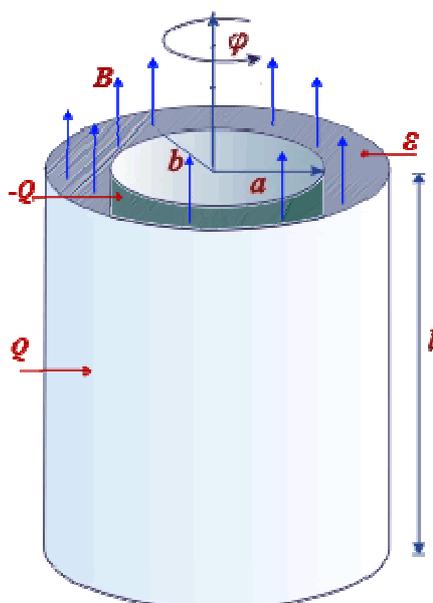


Fig. 3.1 Cascarones cilíndricos.

En dichos cascarones se deposita carga,  $Q$  en el cascarón interior y  $-Q$  en el exterior; además, el espacio entre ellos se llena con un dieléctrico no magnético ( $\mu = 1$ ) con permitividad  $\epsilon$ . Todo este dispositivo se coloca dentro de un campo magnético  $\mathbf{B}$ , cuya dirección es paralela al eje de los cilindros, como se muestra en la figura 3.1.

El análisis se basa en la conservación del momento angular durante todo el proceso, esto es

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{elm} + \mathbf{L}_{mec}) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{L}_{elm}$  es el momento angular del campo electromagnético y  $\mathbf{L}_{mec}$  el momento angular mecánico. Si el campo magnético se reduce a cero, el campo eléctrico inducido produce una fuerza azimutal sobre las cargas en los cilindros la cual los hace girar. Se puede, por tanto, comparar la torca producida con el cambio del momento angular del campo electromagnético,

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{d\mathbf{L}_{elm}}{dt}, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{L}_{elm}$  puede considerarse usando, ya sea la propuesta de Minkowski o la de Abraham. Aquella propuesta cuya derivada temporal coincida con la torca calculada, usando la fuerza producida sobre las cargas, se verá favorecida.

Al disminuir el campo magnético, se induce el campo eléctrico azimutal

$$\mathbf{E}_{\phi i} = -\frac{r}{2c} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}, \quad (3.3)$$

que produce, a su vez, las fuerzas

$$\mathbf{F}_a = -Q \frac{a}{2c} \frac{dB}{dt} \hat{\phi} \quad (3.4)$$

y

$$\mathbf{F}_b = +Q \frac{b}{2c} \frac{dB}{dt} \hat{\phi} \quad (3.5)$$

sobre las cargas en los cascarones cilíndricos; estas fuerzas dan lugar a la torca

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_b = \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.6)$$

Para calcular el momento angular del campo electromagnético se utiliza

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d^3r, \quad (3.7)$$

con la proposición de Abraham (1.27), tomando en cuenta que, por ser un medio no magnético,  $\mu = 1$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , con lo que

$$\mathbf{g}_A = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (3.8)$$

Como el campo magnético al final es cero, el valor final de la densidad de momento  $\mathbf{g}_A$  será también cero, sólo hace falta calcular su valor inicial. El campo eléctrico debido a las cargas  $Q$  en los cilindros es

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{r\epsilon} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.9)$$

y así

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_A &= \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{2Q}{r\epsilon} \right) B \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{k}} \\ &= -\frac{QB}{2\pi r\epsilon} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Al sustituir este resultado en la Ec. (3.7), se obtiene la propuesta de Abraham para la densidad de momento angular electromagnético

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &= -\int \frac{rQB}{2\pi r\epsilon} r dr d\phi dz \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= -\frac{QB}{2c\epsilon} (b^2 - a^2) \hat{\mathbf{k}}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

como puede verse,

$$\boldsymbol{\tau} = -\varepsilon \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} \quad (3.12)$$

y como para medios no magnéticos

$$\varepsilon \mathbf{g}_A = \mathbf{g}_M, \quad (3.13)$$

el momento angular electromagnético asociado a la propuesta de Minkowski está dado por

$$\varepsilon \mathbf{L}_A = \mathbf{L}_M \quad (3.14)$$

y por lo tanto,

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{d\mathbf{L}_M}{dt}. \quad (3.15)$$

Esto parece favorecer la propuesta de Minkowski; sin embargo, como Lai (Lai, 1980) señala, no se ha tomado en cuenta aún, la fuerza sobre la carga de polarización en el dieléctrico entre los cilindros. Como la carga de polarización es

$$Q_p = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)Q, \quad (3.16)$$

entonces la torca sobre la carga de polarización la obtiene de la Ec. (3.6) con la sustitución  $Q \rightarrow Q_p$ ,

$$\boldsymbol{\tau}_p = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.17)$$

y al sumar esta contribución con la dada en (3.6) encuentra

$$\boldsymbol{\tau}_{total} = \frac{Q}{2c\varepsilon} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}; \quad (3.18)$$

en consecuencia

$$\boldsymbol{\tau}_{total} = -\frac{d\mathbf{L}_A}{dt}. \quad (3.19)$$

De aquí, Lai (Lai, 1980) concluye que la conservación del momento angular total conduce a descartar la propuesta de Minkowski y aceptar la de Abraham.

### 3.2 El modelo de Lai con cilindros conductores

Es ilustrativo mostrar que la conclusión de Lai (Lai, 1980) no se modifica, en lo fundamental, si los cilindros son conductores conectados a una batería.

Supongamos que  $Q$  representa la carga en los cilindros en ausencia de dieléctrico entre ellos. Esta carga  $Q$  tiene el mismo valor que antes, así que cuando se llena de dieléctrico el espacio entre los cilindros y se mantiene constante la diferencia de potencial entre ellos, la carga libre en las placas es  $\epsilon Q$ , mientras que en el dieléctrico la carga de polarización  $Q_p$  es, en este caso,  $(1 - \epsilon)Q$ .

Puesto que el campo azimutal inducido no se altera, la Ec. (3.3) continúa siendo válida, pero las fuerzas sobre las cargas libres están expresadas ahora por

$$\mathbf{F}'_a = -\epsilon Q \frac{a}{2c} \frac{dB}{dt} \boldsymbol{\phi} \quad (3.20)$$

y

$$\mathbf{F}'_b = +\epsilon Q \frac{b}{2c} \frac{dB}{dt} \boldsymbol{\phi} \quad (3.21)$$

y si con ellas calculamos la torca, tenemos

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}'_a + \boldsymbol{\tau}'_b = \epsilon \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.22)$$

El factor  $\epsilon$  que aparece en esta ecuación puede sugerirnos que los papeles de  $\mathbf{g}_A$  y de  $\mathbf{g}_M$  se invertirán, pero como veremos más adelante, no es así.

Para calcular el momento angular mediante la Ec. (3.7), debemos conocer el campo eléctrico en el interior del dieléctrico; este es,

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{rl} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.23)$$

por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{L}_A = -\frac{QB}{2c} (b^2 - a^2) \hat{\mathbf{k}} \quad (3.24)$$

y al usar la Ec. (3.14), obtenemos

$$\tau = -\frac{d\mathbf{L}_M}{dt}. \quad (3.25)$$

Los valores de  $\tau$  y  $\mathbf{L}_M$  se modifican, pero se cumple la ley dinámica de conservación (3.25), igual que antes se cumplía (3.15). Falta ahora que tomemos en cuenta la torca asociada con la fuerza que se ejerce sobre la carga de polarización  $Q_p$ , dada en este caso por

$$Q_p = (1 - \epsilon)Q. \quad (3.26)$$

Al igual que antes, podemos usar la Ec. (3.22), pero en lugar de la carga libre  $\epsilon Q$ , usamos la carga de polarización dada en (3.26). Tenemos así

$$\tau'_p = (1 - \epsilon) \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.27)$$

y por lo tanto, escribimos la torca total como

$$\tau'_{total} = \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.28)$$

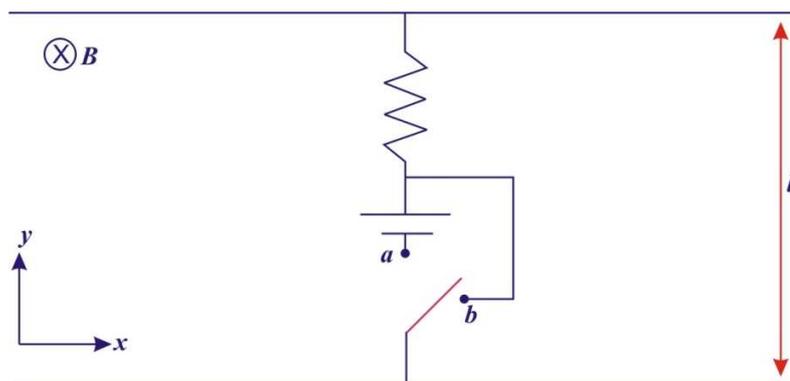
que coincide, exactamente, con la conclusión del resultado dado por (3.18); es decir,

$$\tau'_{total} = -\frac{d\mathbf{L}_A}{dt}. \quad (3.29)$$

Podemos ver que los resultados obtenidos por Lai (Lai, 1980) son independientes de que los cilindros sean o no conductores; en otras palabras, no dependen de que la carga o la diferencia de potencial sean constantes.

### 3.3 Modelo de Johnson, Cragin y Hodges

Estos autores consideran, para su análisis del momento electromagnético, un condensador de placas paralelas como el que se muestra en la figura 3.2; todo el dispositivo se encuentra inmerso dentro de un campo magnético uniforme.



**Fig. 3.2** Circuito propuesto por Johnson et al [1994].

Cuando el interruptor se posiciona en  $a$ , fluye una corriente hacia las placas

$$\mathbf{I} = i \hat{\mathbf{j}} \quad (3.30)$$

y al interactuar con el campo magnético

$$\mathbf{B} = -B \hat{\mathbf{k}} \quad (3.31)$$

se produce una fuerza sobre el circuito

$$\mathbf{f} = -\frac{B}{c} l \frac{dQ}{dt} \hat{\mathbf{i}}, \quad (3.32)$$

por lo que le transfiere a éste un impulso

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{circuito}} &= -\frac{Bl}{c} \int \frac{dQ}{dt} dt \\ &= -\frac{BIQ}{c} \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por otro lado, el momento electromagnético adquirido por el condensador está dado por

$$\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}(Al) = \mathbf{g}_{elm} V \quad (3.34)$$

y como el campo eléctrico al final del proceso de cargado es

$$\mathbf{E} = -4\pi \frac{Q}{A} \hat{\mathbf{j}}, \quad (3.35)$$

el momento  $\mathbf{g}_{elm} V$  del campo electromagnético resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{elm} V &= \frac{EBAl}{4\pi c} \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{QBl}{c} \hat{\mathbf{i}}; \end{aligned} \quad (3.36)$$

comparando este resultado con el de la Ec. (3.33), es evidente que

$$\mathbf{P}_{\text{circuito}} = -\mathbf{g}_{elm} V. \quad (3.37)$$

JCH (Johnson et al, 1994) expresan este resultado en términos de la corriente de desplazamiento, pues de las Ecs. (3.32) y (3.34) escriben la fuerza sobre el circuito como

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\partial \mathbf{g}_{elm} V}{\partial t} \\ &= \left( \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) V \\ &= \left( \frac{1}{4\pi} \mathbf{J}_d \times \mathbf{B} \right) V; \end{aligned} \quad (3.38)$$

con este resultado, observan que la transferencia de momento está asociada con la corriente de desplazamiento,  $\mathbf{J}_d$ .

Si el condensador se llena con un dieléctrico de permitividad  $\mathcal{E}$ , entonces la carga adquirida por el condensador y el impulso impartido al circuito son mayores por un factor  $\mathcal{E}$ . JCH (Johnson et al, 1994) se hacen la pregunta: “¿Cuál es la densidad de momento electromagnético en este caso?, ¿Es acaso

$\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ó  $\frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ ?”, luego afirman:

“la diferencia entre las dos es el momento por unidad de volumen entregado al dieléctrico”.

Y poco después dicen también (usan el sistema de unidades mks):

“Con el dieléctrico en el lugar, la corriente de desplazamiento incluye un término de polarización y

$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ . El primer término es indicador de la misma creación, por unidad de tiempo, de

densidad de momento electromagnético sin el dieléctrico,  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}$ ; puede ser considerado como la

producción, por unidad de tiempo, de momento del campo puro. El segundo término incluye una fuerza

por unidad de volumen,  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{B}$ , ejercida al dieléctrico como consecuencia de la corriente de

polarización. Este es el momento entregado al dieléctrico y es considerado parte de la densidad de

momento electromagnético cuando es definido como  $\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{B}$  [debe ser  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}$

en lugar de  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ ]. Además, el ejemplo proporciona un argumento que es más apropiado, desde un punto de vista físico, para considerar que la densidad de momento electromagnético esté dado por

$\mathbf{D} \times \mathbf{B}$  más que por  $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , con el momento mecánico tratado por separado en el último caso”.

De esta argumentación, concluyen:

“desde un punto de vista físico considerar la densidad de momento electromagnético dada por  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$  más que  $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ”.

Con esto, podemos apreciar cómo JCH (Johnson et al, 1994) llegan a su conclusión. Como en

presencia de un medio material,  $\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$  incluye la corriente de desplazamiento en el medio,

$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ , entonces  $\frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B}$  debe ser la expresión correcta para la densidad de momento electromagnético. Este no es un argumento firmemente establecido, pues en ningún momento plantean ni discuten el balance de momento propiamente dicho, si bien un poco después escriben las expresiones para el impulso cedido al circuito y al dieléctrico cuando hay un proceso de descarga del capacitor.

Con el propósito de fundamentar o refutar los resultados de Lai (Lai, 1980) y de JCH (Johnson et al, 1994) es necesario que los analicemos con condiciones adicionales. En la siguiente sección, llevaremos a cabo el balance de momento en el modelo JCH (Johnson et al, 1994). Luego analizaremos las modificaciones a los modelos de Lai (Lai, 1980) y de JCH (Johnson et al, 1994) cuando el medio utilizado, además de ser dieléctrico, es magnético.

### 3.4 El balance de momento usando el modelo de Johnson, Cragin y Hodges

Para facilitar nuestra discusión del balance de momento con el modelo de JCH (Johnson et al, 1994) cuando está presente el dieléctrico, es conveniente que escribamos, explícitamente, las expresiones para el impulso transferido al circuito y la densidad de momento electromagnético dentro del condensador.

Como la diferencia de potencial permanece constante, la carga al final del proceso de cargado es

$$Q = \epsilon Q, \quad (3.39)$$

de manera que el impulso transferido al circuito es

$$\mathbf{P}_{\text{circuito}} = -\frac{\epsilon QBl}{c} \hat{\mathbf{i}} \quad (3.40)$$

y el momento electromagnético dentro del condensador está dado, de acuerdo con la proposición de Minkowski, por

$$\mathbf{g}_M V = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{B} V = \epsilon \mathbf{G}_{\text{elm}} V \quad (3.41)$$

y como la diferencia de potencial es constante, el campo eléctrico sigue siendo

$$\mathbf{E} = -4\pi \frac{Q}{A} \hat{\mathbf{j}} \quad (3.42)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_M V &= \frac{\varepsilon E B A l}{4\pi c} \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{\varepsilon Q B l}{c} \hat{\mathbf{i}}; \end{aligned} \quad (3.43)$$

si comparamos esta expresión con (3.40), tenemos que

$$\mathbf{P}_{\text{circuito}} = -\mathbf{g}_M V. \quad (3.44)$$

Esto parece confirmar la conclusión de JCH (Johnson et al, 1994), pero no hemos incluido, aún, la transferencia de momento al dieléctrico. Como señalaron estos autores, la fuerza sobre el dieléctrico está dada por la Ec. (3.38), pero si usamos la corriente de desplazamiento en un medio material, podemos escribirla como

$$\mathbf{f} = \left( \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon - 1) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) V, \quad (3.45)$$

(nótese que en este caso, esta es la fuerza de Abraham) y usando la Ec. (3.42) para el campo eléctrico, tenemos

$$\mathbf{f} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} B l \hat{\mathbf{i}}. \quad (3.46)$$

Con esta fuerza, es fácil determinar el impulso cedido al dieléctrico mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{dielc}} &= \int \mathbf{f} dt \\ &= (\varepsilon - 1) \frac{Q B l}{c} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

y si consideramos el impulso transferido tanto al dieléctrico como al condensador, Ec. (3.43), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{total} &= \mathbf{P}_{circuito} + \mathbf{P}_{dielec} \\
 &= -\frac{QBl}{c} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\mathbf{g}_{elm} V \hat{\mathbf{i}},
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

que concuerda con la expresión para el vacío, y en este caso, con la de Abraham.

### 3.5 Discusión

Del trabajo de Lai (Lai, 1980) y la discusión anterior sobre el trabajo de JCH (Johnson et al, 1994) parece concluirse que la proposición correcta es la de Abraham y que, por lo tanto, la de Minkowski es incorrecta. Antes de aceptar tal conclusión, debemos tener presente tres cosas:

- a) La expresión para la densidad de momento del campo electromagnético propuesta por Minkowski proviene directamente de la ecuación de balance de momento que emana de las ecuaciones de Maxwell. Rechazarla indicaría que deben rechazarse las ecuaciones de Maxwell.
- b) Es necesario, por tanto, establecer si los resultados de Lai (Lai, 1980) y la discusión anterior descalifican o no la propuesta de Minkowski.
- c) Es importante analizar un medio material, que además de dieléctrico,  $\epsilon \neq 1$ , sea también magnético, es decir,  $\mu \neq 1$ .

La ecuación de balance propuesta por Minkowski surge rigurosamente de las ecuaciones de Maxwell; considerarla incorrecta equivale a descalificar a las ecuaciones de Maxwell, que si bien no son un dogma insuperable, han demostrado tener una fundamentación muy sólida que tampoco debemos menospreciar. Entonces debemos analizar si debe o no conservarse el momento angular. Ante todo, debemos tener presente que las ecuaciones de Maxwell macroscópicas se refieren al campo electromagnético, al medio material y posibles fuentes externas que produzcan corrientes y densidades de carga. No es evidente que tal sistema, tan complejo, sea un sistema cerrado donde deba cumplirse la conservación del momento angular.

Por otro lado, la propuesta de Abraham no es otra cosa que una forma de reescribir la ecuación de balance de Minkowski; es fácil ver esto si reescribimos la ecuación de balance (2.42) como sigue:

La ecuación de Minkowski es

$$\nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (3.49)$$

donde  $\mathbf{g}_M$  y el tensor  $\mathbf{T}$  están dados por las Ecs. (2.44) y (2.45), respectivamente. Si sumamos y restamos  $\frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t}$  en la Ec. (3.49), tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} - \left( \frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} \right) &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi c} (\epsilon\mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial t} &= \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} + \mathbf{f}_A. \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde  $\mathbf{f}_A$  es la densidad de fuerza de Abraham.

Es cierto que en esta última ecuación aparece la densidad de momento  $\mathbf{g}_A$ , pero surgió ahora el término  $\mathbf{f}_A$  que se interpreta como una densidad de fuerza. En ocasiones, se piensa que su medición justificaría la propuesta de Abraham, pero las Ecs. (3.49) y (3.50) son las mismas. Medir  $\mathbf{f}_A$  depende tan sólo de la situación experimental y buena muestra de ello son los ejemplos anteriores. Lo que podemos ver fácilmente de la Ec. (3.50) es que la fuerza de Abraham es la diferencia de las derivadas de las dos proposiciones cuando  $\mu = 1$ .

A partir del modelo de Lai (Lai, 1980), consideramos el caso de los dos cilindros concéntricos, dieléctricos, con carga  $Q$ , con un dieléctrico entre ellos, pero no fijo a los cilindros, y un campo magnético variable en el tiempo. Suponemos que se puede seleccionar a quiénes fijar; a los cilindros, al dieléctrico entre ellos, o a ambos. Hay tres situaciones posibles:

- i. Dieléctrico fijo, cilindros móviles: podemos determinar la torca sobre los cilindros mediante el uso de  $\mathbf{g}_M$ .

- ii. Dieléctrico móvil, cilindros fijos: podemos determinar la torca sobre el dieléctrico mediante el uso de  $\mathbf{f}_A$ .
- iii. Dieléctrico y cilindros móviles (unidos entre ellos): podemos determinar la torca mediante el uso de  $\mathbf{g}_A$ .

Los puntos i-iii se extienden trivialmente al dispositivo propuesto por JCH (Johnson et al, 1994). Las conclusiones no dependen de cómo se deposite la carga libre en los cilindros, sean o no conductores.

Con esto discutimos los dos primeros puntos con que iniciamos esta sección. De los resultados de Lai (Lai, 1980) y JCH (Johnson et al, 1994), según hemos analizado, no es posible descartar la propuesta de Minkowski; la firmeza de las ecuaciones de Maxwell y las conclusiones que de ellas se derivan se mantienen. Analizar el punto c) es nuestro propósito para la siguiente sección.

## 3.6 Consideración de medios magnéticos

### 3.6.1 El modelo de Lai con medio magnético

Para revisar las consecuencias de que el medio sea también magnético, basta con que consideremos el dispositivo propuesto por Lai (Lai, 1980), sólo que ahora el medio entre los cilindros además de permitividad eléctrica,  $\epsilon \neq 1$ , tiene permeabilidad magnética,  $\mu \neq 1$ .

Puesto que el campo eléctrico inducido depende del campo magnético  $\mathbf{B}$ , la torca sobre los cascarones cilíndricos sigue siendo (3.6), aún cuando  $\mu \neq 1$ , de manera que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_\mu &= \boldsymbol{\tau}_{a\mu} + \boldsymbol{\tau}_{b\mu} \\ &= \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

sólo que en lugar de la Ec. (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{A\mu} &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\
 &= \frac{1}{4\pi c\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{\mathbf{g}_A}{\mu}.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

El campo eléctrico es el mismo, por lo tanto, la Ec. (3.9) es también válida y transformamos la Ec. (3.52) en

$$\mathbf{g}_{A\mu} = -\frac{QB}{2\pi rlc \epsilon\mu} \hat{\phi} \tag{3.53}$$

y si la sustituimos en la Ec. (3.7), tenemos como resultado

$$\mathbf{L}_{A\mu} = -\frac{QB}{2c\epsilon\mu} (b^2 - a^2) \hat{\mathbf{k}}, \tag{3.54}$$

de modo que obtenemos

$$\boldsymbol{\tau}_\mu = -\epsilon\mu \frac{d\mathbf{L}_{A\mu}}{dt}; \tag{3.55}$$

dado que  $\mathbf{g}_{M\mu} = \mathbf{g}_M$ ,  $\mathbf{L}_{M\mu} = \mathbf{L}_M$ , entonces

$$\epsilon\mu \mathbf{g}_{A\mu} = \mathbf{g}_{M\mu} \tag{3.56}$$

o bien

$$\epsilon\mu \mathbf{L}_{A\mu} = \mathbf{L}_M, \tag{3.57}$$

por lo que podemos escribir

$$\boldsymbol{\tau}_\mu = -\frac{d\mathbf{L}_M}{dt}. \tag{3.58}$$

Como se hizo en el análisis original, debemos considerar la torca sobre la carga de polarización. La Ec. (3.17) es válida para este caso, es decir

$$\boldsymbol{\tau}_{p\mu} = \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \frac{Q}{2c} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.59)$$

y al sumarla con (3.51) tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{total\mu} &= \boldsymbol{\tau}_{a\mu} + \boldsymbol{\tau}_{b\mu} + \boldsymbol{\tau}_{p\mu} \\ &= \frac{Q}{2c\epsilon} (b^2 - a^2) \frac{dB}{dt} \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

así que

$$\boldsymbol{\tau}_{total\mu} \neq - \frac{d\mathbf{L}_{A\mu}}{dt}; \quad (3.61)$$

de hecho,

$$\boldsymbol{\tau}_{total\mu} = -\mu \frac{d\mathbf{L}_{A\mu}}{dt}. \quad (3.62)$$

Cuando el medio es magnético ( $\mu \neq 1$ ), la utilidad de  $\mathbf{g}_A$  se desvanece, pero no la podemos calificar como errónea. Es claro que podemos extender este análisis al modelo de JCH (Johnson et al, 1994) y también que las conclusiones no dependen de dónde y cómo asentemos la carga libre, ya sea en placas dieléctricas o conductoras, conectadas o no a una batería.

Si el medio es magnético, el campo  $\mathbf{B}(t)$  también induce una magnetización  $\mathbf{M}(t)$  paralela al campo dada por

$$\mathbf{M}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu} \mathbf{B}(t) = \alpha \mathbf{B}(t); \quad (3.63)$$

la magnetización  $\mathbf{M}(t)$  está relacionada con las corrientes ligadas según

$$\mathbf{J}_M = c \nabla \times \mathbf{M}, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{j}_M = c\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.65)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario normal a la superficie del material. En este momento, es necesario que analicemos si existe una contribución a la torca debido a las corrientes ligadas.

Es importante señalar que la torca aplicada en el modelo de Lai (Lai, 1980) tiene su origen en la carga de polarización inducida por el campo eléctrico que surge de las cargas libres en los cilindros y el campo eléctrico inducido por el campo magnético dependiente del tiempo; esto es, la carga y el campo inducido tienen diferentes fuentes. Por otro lado, las densidades de corriente (3.64) y (3.65) pueden interactuar solamente con el campo magnético y, en este caso, el campo magnético es el mismo que induce las corrientes ligadas. Ahora, veamos si hay una contribución a la torca debida a las corrientes ligadas inducidas.

Como el medio es homogéneo,  $\mathbf{J}_M = 0$  y tenemos que

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.66)$$

para el exterior o interior del cilindro, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_M &= c\alpha \mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{k}} \times (\pm \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \pm c\alpha \mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}} \\ &= \pm c\alpha \mathbf{B}(t) \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (3.67)$$

y da lugar a la densidad de fuerza magnética

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \left(\frac{1}{c}\right) \mathbf{j}_M \times \mathbf{B} \\ &= \pm \alpha B^2(t) \boldsymbol{\phi} \times \hat{\mathbf{k}} \\ &= \pm \alpha B^2(t) \hat{\mathbf{r}}; \end{aligned} \quad (3.68)$$

debido a que esta fuerza es radial, no hay contribución a la torca.

### 3.6.2 El modelo de Johnson, Cragin y Hodges con medio magnético

Como en el caso del modelo propuesto por Lai (Lai, 1980), la idea es que analicemos el balance de momento con el dispositivo del condensador cuando el medio introducido entre las placas, además de dieléctrico, es también magnético ( $\mu \neq 1$ ).

Puesto que el campo eléctrico no se modifica por la presencia del medio, el momento transferido al circuito o a las placas es el mismo que en el análisis original

$$\mathbf{P}_{\text{circuito } \mu} = -\frac{\epsilon QBl}{c} \hat{\mathbf{i}}, \quad (3.69)$$

donde el subíndice  $\mu$  sólo indica la presencia del medio magnético.

Por otro lado, el momento electromagnético entre las placas, de acuerdo con la proposición de Abraham, es

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{A\mu} V &= \frac{\mathbf{g}_A V}{\mu} \\ &= \frac{QBl}{c\epsilon\mu} \hat{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

de manera que ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{circuito } \mu} &= -\epsilon\mu \mathbf{g}_{A\mu} V \\ &= -\mathbf{g}_{M\mu} V, \end{aligned} \quad (3.71)$$

que contrasta con  $\mathbf{g}_{A\mu} V$ .

Si tomamos en cuenta la carga de polarización, el impulso que se le transfiere es

$$\mathbf{P}_{\text{dielec } \mu} = -(1 - \epsilon) \frac{QBl}{c} \hat{\mathbf{i}}, \quad (3.72)$$

así que el momento mecánico total queda dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{total\mu} &= \mathbf{P}_{circuito\mu} + \mathbf{P}_{dielec\mu} \\
 &= -\frac{QBl}{c} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\mathbf{g}_A V ;
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

si comparamos esta última ecuación con la Ec. (3.70), tenemos

$$\mathbf{P}_{total\mu} \neq \mathbf{g}_{A\mu} V
 \tag{3.74}$$

o bien

$$\mathbf{P}_{total\mu} = -\mu \mathbf{g}_{A\mu} V .
 \tag{3.75}$$

Los resultados coinciden con los obtenidos para el dispositivo propuesto por Lai (Lai, 1980), como era de esperarse.

### 3.7 Comentarios

El análisis detallado del modelo propuesto por JCH (Johnson et al, 1994) conduce a los mismos resultados que el modelo propuesto por Lai (Lai, 1980). A primera vista, esto parece apoyar de manera definitiva la propuesta de Abraham; sin embargo, como vimos en el análisis, para medios no magnéticos ambas propuestas son válidas y útiles, pero para medios magnéticos sólo la propuesta de Minkowski conduce directamente a la información referente a la fuerza o torca sobre las cargas libres; esto no descarta la utilidad de otros casos de la propuesta de Abraham.

Además, la expresión para la densidad de fuerza depende del dispositivo experimental; en otras palabras, tanto la Ec. (3.49) como la Ec. (3.50) son correctas, pero en ocasiones la separación necesaria para llegar a (3.50) no es de gran utilidad.

Un punto que merece especial atención, es que en los dispositivos experimentales analizados el campo  $\mathbf{H}$  no es útil, por lo que la propuesta original de Abraham,  $\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , parece inadecuada; es necesario explorar este punto. En el próximo capítulo, partimos de un enfoque microscópico, buscando averiguar si en las expresiones usadas se ha omitido alguna contribución a las fuerzas y con ello incorporar el vector  $\mathbf{H}$  en el análisis.

# Capítulo 4

## La deducción microscópica de la densidad de fuerza eléctrica de Helmholtz

En el capítulo anterior, señalamos nuevamente la relación entre la controversia de A-M y la expresión para la densidad de fuerza en un medio material. La densidad de fuerza propuesta por Helmholtz, válida para campos estáticos, está contenida en la ecuación de balance Maxwelliana, por lo tanto, un camino para aclarar el problema es precisar cuál es la expresión para la densidad de fuerza en un medio, para campos que dependen del tiempo, al menos en situaciones sencillas como las consideradas antes, sin incluir aspectos termodinámicos o elásticos del medio; una posibilidad es empezar por la densidad de fuerza de Helmholtz para campos que dependen del tiempo. Sorprendentemente, esto fue abordado hace poco relativamente, primero por Gordon [1973], luego por Peierls [1976] y más tarde, lo que consideramos la solución final, por Lai, Suen y Young (Lai et al, 1982, en lo futuro lo denotaremos como LSY), pero esta interesante línea de trabajo consideró sólo la densidad de fuerza eléctrica y para aclarar la controversia necesitamos la parte magnética, que no existe, y es necesario hacerla, por lo cual fue uno de los objetivos de este capítulo; presentamos los resultados más adelante.

Entre los trabajos que han discutido este problema se encuentra el de Gordon [1973], quien propuso un modelo microscópico, simple y claro, pero válido, solamente, a primer orden en  $(\epsilon - 1)$ , lo que implica que no se consideran las interacciones dipolo-dipolo. Este modelo fue el punto de partida de los trabajos de Peierls (Peierls, 1976) y de LSY (Lai et al, 1982).

En 1976, Peierls [1976] intentó extender el trabajo de Gordon [1973] a orden  $(\epsilon - 1)^2$ ; esto es, incluyó en su análisis las interacciones dipolo-dipolo. Algunos años más tarde, Peierls [1991] introdujo algunas correcciones en sus resultados. Peierls [1976] enfocó su atención en la densidad de momento total, electromagnético más mecánico, asociado con el paso de una onda electromagnética a través del medio. Estableció que ninguna de las propuestas (la de Abraham o la de Minkowski) es correcta; sin embargo, reconoce en una parte de su trabajo que la propuesta de Abraham es adecuada para el momento electromagnético, contribuyendo así más a la confusión alrededor de esta controversia. Su resultado conduce a una expresión equivalente a un promedio aproximado de ambas propuestas.

Poco más tarde, LSY (Lai et al, 1982) retomaron el problema preguntándose, desde un principio, sobre la expresión equivalente de la densidad de fuerza, propuesta por Helmholtz, para campos que dependen del tiempo. Buscaron un fundamento microscópico para la densidad de fuerza eléctrica planteada por Helmholtz y establecieron la validez de la proposición incluso para campos dependientes del tiempo, indicaron el rango de validez, así como la limitación del análisis de Peierls [1976]. En su trabajo, LSY (Lai et al, 1982) incluyen, a diferencia de Peierls [1976], la densidad de fuerza mecánica intermolecular debida a la modificación de la densidad de dos partículas por el campo eléctrico, ya que esta contribución es proporcional a  $E^2$ .

## 4.1 La propuesta de Gordon para la deducción microscópica de la densidad de fuerza eléctrica de Helmholtz

No hay duda que una de las expresiones más conocidas para la densidad de fuerza es la propuesta por Helmholtz para un medio material isotrópico en el cual están presentes campos electrostáticos; sin embargo, esta proposición aparece como algo totalmente ajeno o con una relación oscura con la ecuación de balance que hemos estudiado. Su deducción siempre es macroscópica y nunca se discute qué sucede si los campos dependen del tiempo

Gordon [1973] usó como modelo un gas diluido (ver Ec. 4.5) en el cual se propaga una onda electromagnética. Parte de la ecuación para la fuerza que ejerce la onda electromagnética sobre un átomo o molécula del medio,  $\mathbf{f}_{atom\ elect}$ , el cual se polariza al paso de la onda, esto es

$$\mathbf{f}_{atom\ elect} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el momento dipolar inducido en el átomo y está relacionado con el campo eléctrico mediante la ecuación

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (4.2)$$

$\alpha$  es el coeficiente de polarizabilidad atómico. Con esto, con la ayuda de la identidad

$$\nabla \left( \frac{1}{2} E^2 \right) = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (4.3)$$

y la ley de Faraday, la Ec. (4.1) se transforma en

$$\mathbf{f}_{ate} = \alpha \left\{ \nabla \left( \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\}; \quad (4.4)$$

si ahora se multiplica por  $N$ , el número de átomos por unidad de volumen, y si el medio satisface

$$\varepsilon - 1 = 4\pi N\alpha \ll 1, \quad (4.5)$$

entonces

$$\mathbf{F}_{Ge} = N\mathbf{f}_{ate} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( (\varepsilon - 1) E^2 \right) + \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4.6)$$

Físicamente, la eliminación de términos de orden  $(\varepsilon - 1)^2$  significa que no se ha tomado en cuenta la interacción dipolo-dipolo y, por lo tanto, el campo efectivo sobre un átomo coincide con el externo que, en este caso, es el de la onda electromagnética.

Si  $\rho_m$  es la densidad de masa del medio, teniendo en cuenta que, al mismo orden  $(\varepsilon - 1)$

$$\rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi}, \quad (4.7)$$

podemos transformar la Ec. (4.6) en

$$\mathbf{F}_{Ge} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right) + \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (4.8)$$

y luego compararla con la densidad de fuerza de Helmholtz para campos estáticos

$$\mathbf{f}_{He} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right), \quad (4.9)$$

de lo que observamos que los dos primeros términos del miembro derecho de las Ecs. (4.8) y (4.9) son idénticos.

Poco tiempo después, Peierls [1976] generalizó el trabajo de Gordon [1973] e incluyó la interacción dipolo-dipolo, lo cual condujo a considerar términos de orden  $(\varepsilon - 1)^2$ . El resultado que obtuvo, después de cálculos muy elaborados, no lo presentamos aquí, pues fue superado por el resultado obtenido por LSY (Lai et al, 1982), el cual discutiremos más adelante.

Compartimos la postura de Gordon [1973] ante las proposiciones de Abraham y de Minkowski, acerca de que ambas propuestas son útiles y que lo relevante es su significado; sin embargo, es importante llevar a cabo una revisión del análisis que sugiere Gordon [1973] para apoyar la propuesta de Abraham:

Suponemos que un pulso viaja en la dirección de  $\hat{\mathbf{z}}$  con polarización en la dirección  $\hat{\mathbf{x}}$ , esto es

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{x}} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{y}} = g \left( t - \frac{n}{c} z \right) \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.11)$$

por tanto, la Ec. (4.1) nos permite determinar la densidad de fuerza sobre el gas. Si usamos tal expresión y el que en el medio se cumpla

$$nE_x = B_y, \quad (4.12)$$

además de que eliminamos el primer término de (4.1), ya que la onda está polarizada transversalmente a su dirección de propagación, obtenemos

$$\mathbf{F} = N \mathbf{f}_{\text{átomo}} = \frac{N\alpha}{2nc} \frac{\partial}{\partial t} g^2 \hat{\mathbf{z}}; \quad (4.13)$$

de (4.13) calculamos, directamente, la densidad de momento mecánico  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}(z, t) = \int_{-\infty}^t F(z, t') dt' = \left( \frac{N\alpha}{2nc} \right) g^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.14)$$

Por otro lado, de

$$\mathbf{g}_A = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi c} \frac{g^2}{n} \quad (4.15)$$

y como para un gas tenue podemos utilizar la aproximación

$$n = \varepsilon^{1/2} = (1 + 4\pi N\alpha)^{1/2} = 1 + 2\pi N\alpha \quad (4.16)$$

tenemos, en consecuencia, que

$$\mathbf{M} = (n - 1) \mathbf{g}. \quad (4.17)$$

Como la energía total del pulso se conserva, ya que la reflexión es de segundo orden en  $\varepsilon - 1$ , y como también el momento total se conserva, dado que el impulso neto impartido a cada átomo es cero, resulta que el cociente de la densidad de momento y la densidad de energía debe conservarse.

Dado que en el vacío

$$\left(\frac{\mathbf{g}}{U}\right)_{\text{vacío}} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{c} \quad (4.18)$$

y como la densidad de energía total en el medio es

$$U_{\text{medio}} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} g^2, \quad (4.19)$$

entonces, también debe cumplirse el equivalente de (4.18) para el medio, de tal manera que podemos escribir la densidad de momento total como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_T &= \frac{U}{c} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\pi c} g^2 \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si usamos (4.15), tenemos que la densidad de momento total es

$$\mathbf{g}_T = \frac{U}{c} \hat{\mathbf{z}} = n\mathbf{g} \quad (4.21)$$

y, por lo tanto, podemos escribir (4.17) como

$$n\mathbf{g} = \mathbf{M} + \mathbf{g}, \quad (4.22)$$

y puesto que  $\mathbf{M}$  es el momento mecánico,  $\mathbf{g}$  debe ser la densidad de momento electromagnético. Para Gordon [1973], este resultado apoya la propuesta de Abraham para la densidad de momento electromagnético; sin embargo, es preciso decir que para llegar a este resultado, Gordon [1973] usa la propuesta de Abraham. Debemos notar que no aparece el campo  $\mathbf{H}$  como en la propuesta original de Abraham. En este caso, es natural puesto que como veremos más adelante, para frecuencias ópticas, el campo  $\mathbf{H}$  carece de significado.

¿Resuelve esta demostración la controversia? Consideramos que no; se ha usado el campo magnético  $\mathbf{B}$ , no el campo  $\mathbf{H}$ , para frecuencias ópticas como las consideradas por Gordon [1973], esto esta plenamente justificado, como veremos en el capítulo siguiente, pero como también vimos en el capítulo anterior, las dificultades con la propuesta de Abraham se hacen evidentes cuando se consideran

medios magnéticos, donde el campo  $\mathbf{H}$  es relevante; para enfrentar este problema es necesario considerar la deducción microscópica de la densidad de fuerza magnética, a lo cual nos avocaremos en la sección 4.3. Debemos notar, también, que hay trabajos tanto teóricos como experimentales (Jones et al 1978, Gibson et al 1980, Loudon 2004, Loudon et al 2005, Mansuripur 2005, Campbell et al 2005, Mansuripur 2007) que apoyan la propuesta de Minkowski, pues describe, adecuadamente, el momento de un fotón dentro de un medio material; hay también trabajos que reconocen que ninguna de las dos propuestas es adecuada (Nelson 1991).

## 4.2 La deducción microscópica de Lai, Suen y Young para la densidad de fuerza de Helmholtz

En el trabajo de LSY (Lai et al, 1982) para el caso eléctrico, se considera un fluido dieléctrico inmerso en un campo eléctrico; se toma como punto de partida la ecuación exacta de balance de momento

$$N \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) + \nabla \cdot \Pi = N\mathbf{f}_{ext} + \int \mathbf{X}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (4.23)$$

donde  $N$  es número de partículas por unidad de volumen,  $\mathbf{v}$  es la velocidad macroscópica del fluido,  $\Pi$  es la presión cinética,  $\mathbf{f}_{ext}$  es la densidad de fuerza externa,  $\mathbf{X}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es la fuerza entre moléculas en  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  y  $\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es la densidad de dos partículas, normalizada como

$$\int \rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = (n-1)\rho(\mathbf{r}), \quad (4.24)$$

donde  $n$  es el número total de partículas en el gas. Se supone que  $\mathbf{X}_{12}$  tiene contribuciones de dos tipos, eléctrica y mecánica, esto es

$$\mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}^{(E)} + \mathbf{X}^{(CA)}, \quad (4.25)$$

la parte eléctrica,  $\mathbf{X}^{(E)}$ , es la producida por las interacciones dipolo-dipolo, no consideradas por Gordon [1973], pero sí por Peierls [1976] y la parte mecánica,  $\mathbf{X}^{(CA)}$ , que fue tomada en cuenta por Peierls [1976], puede considerarse como debida a un potencial,  $\Phi^{(CA)}$ , de corto alcance, tal que

$$\Phi^{(CA)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \begin{cases} \infty & \text{en } 0 \\ 0 & \text{en } \infty, \end{cases} \quad (4.26)$$

que tiene que ver con la impenetrabilidad de las moléculas o los dipolos.

Por otra parte, la  $\mathbf{f}_{ext}$  es

$$\mathbf{f}_{ext} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}^{(0)}, \quad (4.27)$$

donde  $\mathbf{E}^{(0)}$  es el campo aplicado externamente<sup>2</sup>.

Se aproxima la densidad de dos partículas  $\rho^{(2)}$  como

$$\rho^{(2)} = \rho_0^{(2)} + \Delta\rho^{(2)}, \quad (4.28)$$

donde  $\rho_0^{(2)}$  es la densidad en ausencia de campo y  $\Delta\rho^{(2)}$  la modificación que surge cuando aparece el campo. Se tiene, por lo tanto, que a orden  $E^2$ , al sustituir (4.25) y (4.27) en (4.23) da

$$\begin{aligned} N \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \left\{ \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} - \int \mathbf{X}_{12}^{(CA)} \rho_0^{(2)} d^3\mathbf{r}' \right\} = (N\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}^{(0)} + \\ + \int_{12}^{(E)} \mathbf{X}_{12}^{(E)} \rho_0^{(2)} d^3\mathbf{r}' + \\ + \int \mathbf{X}_{12}^{(CA)} \Delta\rho^{(2)} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Se define ahora, tomando en cuenta que  $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ ,

$$\mathbf{f}^{(E)} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}^{(0)} + \int \mathbf{X}_{12}^{(E)} \rho_0^{(2)} d^3\mathbf{r}', \quad (4.30)$$

$$\Delta\mathbf{f}^{(M)} = \int \mathbf{X}_{12}^{(CA)} \Delta\rho^{(2)} d^3\mathbf{r}'. \quad (4.31)$$

Ahora restan los pasos cruciales: calcular  $\mathbf{f}^{(E)}$  y  $\Delta\mathbf{f}^{(M)}$ . Para ello, es conveniente tener presente que, en equilibrio,

<sup>2</sup> Se supone que no hay fuerza externa de origen no eléctrico.

$$\rho_0^{(2)} = \rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')e^{-U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/kt}, \quad (4.32)$$

donde  $U$  es el potencial de la fuerza media de una molécula en  $\mathbf{r}$  con otra en  $\mathbf{r}'$ ; en general  $U \neq \Phi^{(CA)}$ . Para efectuar los cálculos, es conveniente reescribir

$$\rho_0^{(2)} = \rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') - \rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')\left(1 - e^{-U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/kt}\right) \quad (4.33)$$

y como  $\mathbf{X}^{(E)}$  representa la interacción dipolo-dipolo, resulta

$$X_i^E = -p_j(\mathbf{r})p_k(\mathbf{r}')\nabla'_k\nabla_j\left(\frac{R_i}{R^3}\right), \quad (4.34)$$

donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \quad (4.35)$$

y con esto la Ec. (4.30) se transforma en

$$f_i^E = (\mathbf{P} \cdot \nabla)E_i + P_j \int \left(1 - e^{-U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/kt}\right) \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'_k \nabla_j \left(\frac{\xi_i}{\xi^3}\right) d^3\mathbf{r}', \quad (4.36)$$

donde el campo que aparece en el primer término de la derecha es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \int \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'_k \left(\frac{R_i}{R^3}\right) d^3\mathbf{r}'; \quad (4.37)$$

la integral,  $I$ , que aparece en esta ecuación puede calcularse y se obtiene

$$I = \frac{4\pi}{5} (P_i \nabla_j P_j + P_j \nabla_i P_j + P_j \nabla_j P_i). \quad (4.38)$$

Si ahora se considera que

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1)\mathbf{E}, \quad (4.39)$$

de la sustitución de (4.37) y (4.39) en (4.36) se obtiene

$$f_i^{(E)} = -\frac{1}{8\pi} E^2 (\nabla_i \varepsilon) + \frac{1}{8\pi} \nabla_j \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) E^2 \delta_{ij} + (\varepsilon - 1)^2 \left( \frac{1}{5} E_i E_j + \frac{1}{10} E^2 \delta_{ij} \right) \right] - \frac{1}{4\pi} (\varepsilon - 1) \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})_i, \quad (4.40)$$

que concuerda, en el caso homogéneo, con el resultado obtenido por Peierls [1976].

Ahora falta calcular  $\Delta \mathbf{f}^{(M)}$  y para ello debe tomarse en cuenta que  $\mathbf{X}_{12}^{(CA)}$  es de corto alcance, de orden molecular, y  $\rho^{(2)}$ , a ese nivel, depende sólo del potencial molecular en parejas, de manera que

$$\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') e^{-(\Phi^{(CA)} + \Phi^{(E)})/kT} \quad (4.41)$$

y a orden  $E^2$

$$\Delta \rho^{(2)} = -\frac{1}{kT} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \Phi^{(E)} e^{-\Phi^{(CA)}/kT}, \quad (4.42)$$

donde

$$\Phi^{(E)} = -\frac{p_j(\mathbf{r}) p_k(\mathbf{r}') (3R_j R_k - R^2 \delta_{jk})}{R^5} \quad (4.43)$$

es el potencial eléctrico debido a la interacción dipolo-dipolo. Al sustituir las Ecs. (4.42) y (4.43) en la Ec. (4.20) para  $\Delta \mathbf{f}^{(M)}$ , se obtiene

$$\Delta f_i^{(M)} = \frac{1}{8\pi} \nabla_j \left[ (\varepsilon - 1)^2 \left( -\frac{1}{5} E_i E_j + \frac{1}{15} E^2 \delta_{ij} \right) \right]. \quad (4.44)$$

Con los resultados (4.40) y (4.44), queda completamente determinada la Ec. (4.25) para la densidad de fuerza, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(H)} &= \mathbf{f}^{(E)} + \Delta \mathbf{f}^{(M)} \\ &= -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left[ (\varepsilon - 1) + \frac{1}{3} (\varepsilon - 1)^2 \right] E^2 \right) + \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon - 1) \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde se usó la Ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.46)$$

Como señalan LSY (Lai et al, 1982), este resultado es válido si  $T_c < T_p < T_I$ , donde  $T_c$  es el tiempo característico de colisiones moleculares,  $T_p$  es tiempo característico en que cambian los campos y  $T_I$  el tiempo en que cambia la intensidad del pulso. En el artículo de LSY (Lai et al, 1982) se discuten otras escalas de tiempo, pero no es nuestro propósito discutir las aquí. Sólo resta hacer hincapié en que para un líquido que satisface la ecuación de Clausius-Mossotti

$$\rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} = (\varepsilon - 1) + \frac{1}{3} (\varepsilon - 1)^2, \quad (4.47)$$

con la cual y usando (4.39), la Ec. (4.45) se transforma en

$$\mathbf{f}^{(H)} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right) + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.48)$$

Si además se acepta que el campo magnético ejerce una fuerza sobre cada dipolo

$$\mathbf{f}_{md} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \mathbf{B}, \quad (4.49)$$

entonces, usando  $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$  y agregando la fuerza

$$N\mathbf{f}_{md} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{B} \quad (4.50)$$

a la Ec. (4.48), se obtiene el resultado final

$$\mathbf{f}^{(H)} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} E^2 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{B}). \quad (4.51)$$

Es importante notar que los dos primeros términos de esta expresión coinciden con los de la densidad de fuerza de Helmholtz para campos estáticos dada por la Ec. (2.73). Sin embargo, es necesario discutir el tercero y lo hacemos en la próxima sección.

### 4.3 Discusión

Es conveniente señalar que LSY (Lai et al, 1982) no discuten suficientemente este resultado, menos aún en lo referente a la controversia de A-M; es necesario valorarlo desde esta perspectiva. Si consideramos que  $\mu = 1$  y que  $\epsilon$  no depende del tiempo podemos escribir,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi c} (\epsilon - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (4.52)$$

que es precisamente la fuerza de Abraham, pero antes de adelantar conclusiones, notemos que no se ha incluido en la Ec. (4.51) el cambio de momento electromagnético del campo, que de acuerdo con el interesante resultado de Gordon [1973] es, en este caso,

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (4.53)$$

y si se lo sumamos a la expresión anterior resulta,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}), \quad (4.54)$$

que es, precisamente, la propuesta de Minkowski. Como vemos, la controversia no se resuelve por este camino, pero sí es claro, nuevamente, que ambas propuestas tienen utilidad; el punto se reduce a responder la siguiente pregunta: ¿En qué casos es útil cada una? La solución de Gordon [1973] es aceptable mientras los medios sean no magnéticos, pero cuando no sucede esto, la propuesta de Abraham tiene dificultades, no porque sea o no el momento del campo, sino simplemente porque no aparece  $\mathbf{H}$ ; por ello, como ya mencionamos, es necesaria la deducción de la densidad de fuerza magnética.

El punto que surgió en el capítulo anterior aparece nuevamente y es la ausencia del vector  $\mathbf{H}$  en el análisis, pues en las ecuaciones de Maxwell no aparece  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  ni  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$  lo que nos indica, ya sea la imposibilidad de que se apoye plenamente la propuesta de Abraham o que debe buscarse algo nuevo aún no considerado. Esa es una de las tareas pendientes; por supuesto, esto debemos hacerlo para campos que varíen lentamente en el tiempo, lejos de las frecuencias ópticas, pero el problema queda establecido. Sin embargo, queda pendiente, para la próxima sección, explorar este punto en la deducción microscópica de la densidad de fuerza magnética de Helmholtz.

En los capítulos anteriores, mencionamos que es necesaria una deducción microscópica de la ecuación para la densidad de fuerza de Helmholtz, pero para campos magnéticos dependientes del tiempo, análoga a la que realizaron LSY (Lai et al, 1982) para campos eléctricos. Así podremos conocer las limitaciones y la generalidad de la propuesta de Helmholtz y, además, saber si en la deducción aparece la parte de la densidad de fuerza que junto con la expresión de LSY (Lai et al, 1982) conduzca a la densidad de fuerza de Abraham; ese es, precisamente, el objetivo de la siguiente sección.

#### 4.4 La derivación de la densidad de fuerza magnética de Helmholtz

El análisis original de Gordon [1973] está basado en la consideración de que el campo aplicado interactúa con los dipolos que modelan el medio.

En el caso de medios magnéticos, el análisis de Gordon [1973] lo podemos llevar a cabo si aceptamos la analogía

$$\text{i) dipolo eléctrico} \quad \rightarrow \quad \text{dipolo magnético,} \quad (4.55a)$$

$$\text{ii) campo eléctrico} \quad \rightarrow \quad \text{campo magnético.} \quad (4.55b)$$

Antes de que mostremos cómo la densidad de fuerza magnética propuesta por Helmholtz puede obtenerse siguiendo el método de Gordon [1973], es necesario tener claros dos puntos:

- En el caso eléctrico, si  $\mathbf{p}$  es el dipolo (atómico o molecular) eléctrico (llamado  $\boldsymbol{\mu}$  por Gordon [1973]) inducido por el campo externo  $\mathbf{E}^{(0)}$ , entonces

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}^{(0)}. \quad (4.56)$$

- En el caso magnético, deberíamos pensar que la correspondiente analogía para el dipolo magnético inducido,  $\mathbf{m}$ , es

$$\mathbf{m} = \beta' \mathbf{B}^{(0)}, \quad (4.57)$$

donde  $\mathbf{B}^{(0)}$  es el campo magnético externo; de acuerdo con el punto de vista de Purcell [1985], llamamos a  $\mathbf{B}$  campo magnético, no inducción magnética. Sin embargo, es fácil ver que esta propuesta no conduce a la expresión para la densidad de fuerza magnética propuesta por Helmholtz. Esto puede verse como sigue:

Si procedemos como lo hace Gordon [1973] en el caso eléctrico, en lugar de la Ec. (4.1) para la densidad de fuerza eléctrica sobre el átomo o molécula, tenemos ahora la densidad de fuerza magnética

$$\mathbf{f}_{atom\ mag\ B} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (4.58)$$

donde  $\mathbf{m}$  es el momento del dipolo magnético del átomo o molécula y si consideramos que

$$\mathbf{m} = \beta' \mathbf{B}$$

obtenemos

$$\mathbf{f}_{atom\ mag\ B} = \beta' (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}; \quad (4.59)$$

luego, con ayuda de la identidad vectorial

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (4.60)$$

podemos escribir

$$\mathbf{f}_{atom\ mag\ B} = \beta' \left\{ \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right\}, \quad (4.61)$$

donde el último término es cero para campos estáticos y en ausencia de corrientes. Por lo tanto, la fuerza por unidad de volumen está dada como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= N \mathbf{f}_{atom\ mag\ B} \\ &= N\beta \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

A primer orden en  $\mu - 1$ , podemos considerar

$$N\beta = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1), \quad (4.63)$$

con la cual podemos expresar la Ec. (4.62) en la forma

$$\frac{1}{4\pi} (\mu - 1) \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) = \frac{1}{8\pi} \nabla ((\mu - 1) B^2) - \frac{1}{8\pi} B^2 \nabla \mu. \quad (4.64)$$

En consecuencia, tenemos que la fuerza magnética por unidad de volumen es

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi} B^2 \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla ((\mu - 1) B^2), \quad (4.65)$$

que no es la expresión usual para la densidad de fuerza de Helmholtz

$$\mathbf{f}_{Helm} = -\frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla ((\mu - 1) H^2); \quad (4.66)$$

sin embargo, podemos obtener esta densidad de fuerza si en vez de  $\mu$  usamos  $-\frac{1}{\mu}$ , como algunas ocasiones se hace (Bredov et al, 1986). Podemos obtener este resultado con el método de Gordon [1973] si aceptamos, en vez de (4.58), la propuesta

$$\mathbf{f}_{atom\ mag\ H} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (4.67)$$

con

$$\mathbf{m} = \beta \mathbf{H}. \quad (4.68)$$

Tenemos, por tanto, la fuerza magnética sobre un dipolo magnético

$$\mathbf{f}_{atom\ mag\ H} = \beta (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad (4.69)$$

y con la aproximación considerada

$$N\beta\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} (\mu - 1)\mathbf{H}, \quad (4.70)$$

obtenemos directamente la fuerza de Helmholtz, Ec. (4.66).

El uso de  $\mathbf{H}$  en vez de  $\mathbf{B}$  en esta deducción indica que el procedimiento no es realmente microscópico, pues  $\mathbf{H}$  es campo macroscópico.

Continuamos con el análogo magnético de la Ec. (4) en el trabajo de LSY (Lai et al, 1982) [nuestra Ec. (4.30)]

$$\mathbf{f}_{mag\ Lai} = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}^{(0)} + \int \mathbf{X}_{12}^{mag} \rho_0^{(2)} d^3 r, \quad (4.71)$$

donde  $\rho_0^{(2)}$  es la densidad de dos partículas en ausencia del campo y  $\mathbf{X}_{12}^{mag}$  es la fuerza entre un dipolo en  $\mathbf{r}$  debida a otro dipolo en  $\mathbf{r}'$ . Si  $\mathbf{B}^{(0)}$  es el campo magnético externo, proponemos que la fuerza externa sobre el dipolo magnético es

$$\mathbf{f}_{ext\ mag} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}^{(0)} \quad (4.72)$$

y que

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m}. \quad (4.73)$$

Es importante notar que aún no hemos establecido la relación entre  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}^{(0)}$ . Este punto, junto con la Ec. (4.73), es fundamental.

Si procedemos como en el caso eléctrico, Ec. (4.29), obtenemos la densidad de fuerza

$$\mathbf{f}_{mag/L\ddot{a}i} = (\mathbf{M} \cdot \nabla) K_i + M_j \int (1 - e^{-\beta U}) \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \nabla_j \left( \frac{\xi_i}{\xi^3} \right) d^3 \mathbf{r}', \quad (4.74)$$

y, análogamente a (4.37), tenemos

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(0)} + \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}', \quad (4.75)$$

donde identificaremos a  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}^{(0)}$  más tarde. Podemos cambiar esta expresión si usamos

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' = -\nabla \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}', \quad (4.76)$$

donde identificamos, como es usual en los textos sobre electromagnetismo, a

$$\mathbf{H}_{dip} = -\nabla \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}'; \quad (4.77)$$

ahora tenemos, en la escala microscópica,

$$\mathbf{B}^{(0)} \equiv \mathbf{H}^{(0)}. \quad (4.78)$$

Por lo tanto, si en el miembro derecho de la Ec. (4.75), hacemos la identificación

$$\mathbf{K}^{(0)} \equiv \mathbf{H}^{(0)}, \quad (4.79)$$

es natural identificar a  $\mathbf{K}$  con el campo  $\mathbf{H}$  y así transformamos la Ec. (4.76) en

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}_d \\ &= \mathbf{H}^{(0)} + \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (4.80)$$

y escribimos la Ec. (4.74) como

$$\mathbf{f}_{mag/Lai} = (\mathbf{M} \cdot \nabla) H_i + M_j \int (1 - e^{-\beta U}) \mathbf{M}(r') \cdot \nabla \nabla_j \left( \frac{\xi_i}{\xi^3} \right) d^3 \mathbf{r}'. \quad (4.81)$$

La integral, en este caso, resulta

$$I = \frac{4\pi}{5} (M_i \nabla_j M_j + M_j \nabla_i M_j + M_j \nabla_i M_i) \quad (4.82)$$

y podemos escribir ahora, como es usual,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \chi \mathbf{H} \\ &= (\mu - 1) \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Tenemos, por lo tanto, que las Ecs. (4.67) y (4.70), siguiendo el procedimiento de LSY (Lai et al, 1982), conducen a

$$\mathbf{f}_{mag/Lai} = -\frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left[ \frac{1}{2} (\mu - 1) + \frac{1}{6} (\mu - 1)^2 \right] H^2 \right) - (\mu - 1) \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}); \quad (4.84)$$

si el medio magnético satisface la relación de Clausius-Mossotti para la permeabilidad magnética  $\mu$ ,

$$\frac{1}{2} (\mu - 1) + \frac{1}{6} (\mu - 1)^2 = \frac{1}{2} \rho_m \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right)_T \quad (4.85)$$

y si, además, sustituimos las Ecs. (4.83) y (4.85) en la Ec. (4.84), obtenemos

$$\mathbf{f}_{mag/Lai} = -\frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left( \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right)_T H^2 \right) - \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (4.86)$$

Si no hay corrientes libres, tenemos de la ley de Ampere-Maxwell que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.87)$$

por lo que, para el caso estático, el último término en la Ec. (4.86) es cero y obtenemos la propuesta de Helmholtz, Ec. (4.66).

Debemos tener presente que la ecuación obtenida por LSY (Lai, et al, 1982) para el caso eléctrico, Ec. (4.36),

$$\mathbf{f}_{elec/Lai} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left( \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right)_T E^2 \right) - \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (4.88)$$

es válida aún para campos que dependen del tiempo en el rango de frecuencias ópticas. Así, las ecuaciones para la densidad de fuerza en el caso eléctrico y magnético tienen diferentes rangos de aplicabilidad.

Si ahora limitamos nuestra discusión al rango en que ambas expresiones para la densidad de fuerza, eléctrica y magnética, son válidas, podemos discutir la vieja controversia de A-M acerca de la expresión correcta para la densidad de momento electromagnético, relacionada con la fuerza que un campo electromagnético produce sobre un medio material.

Por otro lado, Landau [1984] muestra, a partir de las ecuaciones de Maxwell y las leyes de la termodinámica, que

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\nabla P_0(\rho_m, T) - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left( \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right)_T E^2 \right) - \frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu + \\ & + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \left( \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right)_T H^2 \right) + \frac{1}{4\pi c} (\epsilon \mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (4.89)$$

El último término es la densidad de fuerza de Abraham y, como mencionamos antes, ha sido parte de la controversia de A-M. Hemos obtenido con el método de LSY (Lai et al, 1982) los términos que involucran a los gradientes de la permitividad y de la permeabilidad, pero el último término está aún ausente.

Con el fin de aclarar esto, necesitamos analizar los últimos dos términos en las Ecs. (4.86) y (4.88), esto es

$$\mathbf{f}_o = \mathbf{f}_{o\ elec} + \mathbf{f}_{o\ mag} = -\{\mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})\}; \quad (4.90)$$

no consideramos, ahora, el primer término,  $\nabla P_0$ , que se refiere a la presión en ausencia del campo electromagnético.

Si usamos las leyes de Faraday y de Ampere-Maxwell, podemos reescribir esta ecuación como

$$\mathbf{f}_o = \frac{1}{c} \left\{ \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}, \quad (4.91)$$

que como tal, no muestra claramente su relación con la propuesta de Abraham para la densidad de fuerza

$$\mathbf{f}_A = \frac{1}{4\pi c} (\epsilon\mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (4.92)$$

Con el propósito de relacionar las Ec. (4.91) y (4.92), es necesario que tomemos en cuenta una limitación señalada por Landau [1984] para el uso significativo del campo  $\mathbf{H}$  :

Landau [1984] señala que se requiere que  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \approx 0$ , lo que implica que  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . También, indica que si el campo cambia muy rápido,  $\mathbf{H}$  pierde su utilidad. Por otro lado, si aceptamos que en general los efectos magnéticos son más débiles que los eléctricos, entonces  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \approx 0$ . Estas condiciones limitan, notablemente, la generalidad de la Ec. (4.86); sin embargo, si aceptamos estas limitaciones, tenemos que

$$\frac{1}{c} \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) \quad (4.93)$$

y

$$\frac{1}{c} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \frac{1}{c} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{M} \times \mathbf{E}). \quad (4.94)$$

De esta manera, podemos transformar la Ec. (4.91) en

$$\mathbf{f}_o = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) \right\} \quad (4.95)$$

y si usamos las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (4.96a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \quad (4.96b)$$

reescribimos la Ec. (4.95) como

$$\mathbf{f}_o = \frac{1}{4\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\}; \quad (4.97)$$

además, si usamos que

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.98a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.98b)$$

con  $\varepsilon$  y  $\mu$  independientes del tiempo, entonces podemos transformar la Ec. (4.97) en

$$\mathbf{f}_o = \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon\mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (4.99)$$

Esta ecuación es la densidad de fuerza de Abraham. Este es un resultado interesante, pues ofrece una derivación de la densidad de fuerza y, al mismo tiempo, muestra las enormes limitaciones que resultan de las hipótesis asumidas en su deducción.

## 4.5 Comentarios

Hemos obtenido la densidad de fuerza de Abraham sólo después de realizar varias aproximaciones. En un sistema que involucra campos magnéticos con frecuencias en la región óptica como los considerados por Gordon [1973], Peierls [1976] y LSY [1982], no es posible establecer la necesidad del campo  $\mathbf{H}$ , por lo tanto, es necesario analizar modelos como los discutidos en el Capítulo 3, donde las variaciones temporales de los campos magnéticos son lentas, para buscar un dispositivo experimental donde se requiera el campo  $\mathbf{H}$  en el balance de momento; ciertamente, los dispositivos ahí discutidos no lo requieren, debemos buscar otras opciones.

# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

La controversia de A-M ha sobrevivido y se mantiene por la infundada creencia de que la ecuación de balance debe involucrar un tensor simétrico; también se sustenta en el prejuicio de que hay una propuesta de momento para el campo electromagnético, la cual descalifica a todas las otras, además de que esta propuesta debe ser independiente de la situación experimental-teórica que sea considerada. Es legítima la pregunta: ¿Cuál es la densidad de momento del campo electromagnético?, pero no debemos perder de vista que esto puede depender de la situación física-experimental que se trate; los experimentos lo confirman, hay apoyo para ambas propuestas. Al respecto, debemos ser claros en que un experimento que apoye a alguna de las dos no descalifica a la otra.

En particular, la propuesta de Abraham enfrenta un problema que no ha sido considerado con el debido cuidado; la inmensa mayoría de los experimentos, involucran radiación del dominio óptico, lo cual excluye al campo  $\mathbf{H}$  y le impide que tenga sentido, por lo tanto, cuando mucho se puede apoyar la utilidad de

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Por otro lado, si bien no muy claros, existen experimentos que apuntan a que ninguna de las dos propuestas sea útil, lo cual, desde nuestra perspectiva, es natural, por lo discutido en el Capítulo 3.

La raíz, muy profunda, de este enredo se encuentra en no reconocer que dado un sistema cerrado, descrito por un tensor simétrico de energía-momento-esfuerzos  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , este se puede separar en dos subsistemas, de muchas maneras,  $f^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu}$ , involucrando tensores no necesariamente simétricos. Insistimos en que *hay muchas maneras de separar al sistema en subsistemas*, por lo que también hay muchas densidades de fuerza, muchas densidades de momento y muchos tensores. ¿Qué separación conviene realizar? Esto depende del problema físico que se estudie.

Por último, no debemos perder de vista que apoyarse en un experimento, en una situación particular, no descalifica otras propuestas; los experimentos tienen sentido cuando los proponemos e interpretamos en el marco de una teoría. Esto queda claro con los experimentos discutidos en el Capítulo 3, como también debe serlo el que una teoría, por el simple hecho de ser microscópica, no es garantía de verdad absoluta.

Dijimos que disolveríamos la controversia de A-M y pensamos que con los argumentos anteriores lo hacemos; sin embargo, debemos trabajar en esta dirección tratando de señalar las confusiones aún existentes.

Como ya señalamos, la controversia se inicia cuando en la ecuación de balance aparece un tensor no simétrico y, en este caso, la densidad de momento electromagnético es

$$\mathbf{g}_M = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}).$$

El asunto cambia de matiz cuando se simetriza el tensor y aparece entonces

$$\mathbf{g}_A = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

como densidad de momento. Se plantea entonces la pregunta ¿Cuál es la densidad de momento electromagnético,

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \quad \text{ó} \quad \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) ?$$

Esta pregunta se ha venido discutiendo desde hace ya un siglo y en la literatura sigue vigente hasta hoy lo que es conocido como la controversia de A-M; en la disputa por dar la respuesta correcta, han participado científicos de renombre por todos conocidos. Así nace el prejuicio de que una propuesta descalifica a cualquier otra, además se piensa que la propuesta debe ser correcta, y útil, independientemente de la situación experimental.

Es bastante frecuente que se acepte

$$\mathbf{g}_A = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

argumentando que tiene un sustento relativista, pero suele olvidarse el apoyo a la otra propuesta. Incluso es frecuente que a la propuesta de Minkowski,

$$\mathbf{g}_M = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

se le llame pseudo momento, cosa que hemos evitado en este trabajo.

¿Qué tenemos, entonces, como consecuencia de nuestro análisis?

Ante todo, debemos ser cuidadosos y no entrar en problemas de nombre y aumentar la confusión; nos referiremos siempre a densidades de momento electromagnético. También, debemos enfatizar algunos puntos importantes de nuestro trabajo:

- No hay razones, como hemos visto, para esperar que el tensor de la ecuación de balance sea simétrico; la simetría del tensor es sólo un prejuicio.
- Los ejemplos que analizamos en el Capítulo 3 muestran que ambas propuestas son útiles; las dos son densidades de momento electromagnético. No deja de ser interesante señalar que ambas propuestas incluyen características del medio a través de  $\mathcal{E}$  y  $\mu$ .
- La raíz de la confusión está, según lo vemos, en dos puntos: por un lado, se supone que una propuesta de densidad de momento electromagnético es correcta y otra no; por otro lado, se deja de lado que las ecuaciones de Maxwell describen un sistema abierto. Es cierto que un sistema cerrado debe estar descrito por un tensor simétrico, pero no uno abierto. Más aún, hay muchas formas de separar un sistema cerrado en subsistemas y hemos visto esto en el trabajo. Si se entiende esto, la controversia se disuelve.
- Las críticas, muy reconocidas como la de Robinson [1975], como hemos visto, carecen de sustento; más aún, hemos demostrado que la ecuación de balance de momento alternativa, Ec. (2.42), no sólo contiene a la densidad de fuerza de Helmholtz para fluidos de Clausius-Mossotti, sino también a otras propuestas, apoyando lo dicho antes de que hay muchas maneras de dividir, en subsistemas, a un sistema dado.
- La densidad de fuerza magnética de Helmholtz tiene limitaciones, lo que mostramos, ofreciendo, por primera vez, una deducción microscópica de ella.
- Muchos de los apoyos a la propuesta de Abraham enfrentan un problema al cual no se le analiza con el debido cuidado, situación que no debemos perder de vista; muchos de los experimentos involucran radiación electromagnética en el dominio óptico, lo que excluye al campo  $\mathbf{H}$  e implica que cuando mucho se puede apoyar la utilidad de

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Por otro lado, no debemos olvidar que hay apoyo experimental para ambas propuestas.

Nos damos cuenta que aún queda mucho trabajo por hacer; de hecho, podemos mencionar algunos puntos importantes, en nuestra línea de investigación, que darán continuación al presente trabajo. Entre los que ya iniciamos, y debemos continuar, se encuentran:

- El análisis de sólidos para estudiar la electrostricción, que junto con los resultados originales presentados en el presente trabajo, nos permitiría elaborar un artículo para su posible publicación.
- La consideración de medios dispersivos, temporal y espacialmente.

También, debemos iniciar con:

- La introducción de aspectos termodinámicos.
- El análisis de la propuesta de Penfield y Haus (Penfield and Haus 1967), que con base en lo estudiado, luce como inadecuada.
- El estudio de otras propuestas de separación en subsistemas; ya hemos mencionado en el trabajo algunos puntos.
- El estudio de otros sistemas que involucren el balance de momento angular.

Seguramente, durante el desarrollo de estos puntos, nos daremos cuenta de que existen algunos más que requieran nuestra atención.

# **APÉNDICE A**

## **RESULTADO PRELIMINAR**

Deseamos demostrar que

$$(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha F^{\mu\beta})G_{\mu\beta} . \quad (\text{A1})$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior lo podemos reescribir como

$$(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\{(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} + (\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta}\}, \quad (\text{A2})$$

pero también tenemos, al intercambiar los índices mudos,

$$\mu \rightarrow \beta \quad (\text{A3})$$

$$\beta \rightarrow \mu \quad (\text{A4})$$

que

$$(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} = (\partial^\beta F^{\alpha\mu})G_{\beta\mu} = (\partial^\beta F^{\mu\alpha})G_{\mu\beta} \quad (\text{A5})$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} &= \frac{1}{2}\{(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} + (\partial^\beta F^{\mu\alpha})G_{\mu\beta}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\beta F^{\mu\alpha}\}G_{\mu\beta} . \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\alpha} + \partial^\mu F^{\alpha\beta} = 0 , \quad (\text{A7})$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \partial^\beta F^{\mu\alpha} + \partial^\mu F^{\alpha\beta} &= -\partial^\alpha F^{\beta\mu} \\ &= \partial^\alpha F^{\beta\mu} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

y así se cumple la Ec. (1.8)

$$(\partial^\mu F^{\alpha\beta})G_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha F^{\mu\beta})G_{\mu\beta} , \quad (\text{A9})$$

que es lo que buscábamos.

## **APÉNDICE B**

### **SOBRE LA PROPUESTA DE ABRAHAM PARA LA ECUACIÓN DE BALANCE**

En este apéndice, estamos interesados en mostrar las ideas que conducen a la propuesta de Abraham para obtener una ecuación de balance explícitamente covariante que involucre un tensor simétrico y cuya densidad de momento del campo electromagnético sea proporcional a  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Para llevar acabo nuestro propósito, consideramos un medio isotrópico y homogéneo en reposo, donde se satisfacen las ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{D}^{(0)} = \varepsilon \mathbf{E}^{(0)}, \quad (\text{B1})$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = \mu \mathbf{H}^{(0)}, \quad (\text{B2})$$

donde el superíndice  $^{(0)}$  denota a los campos en el medio en reposo. No es evidente cómo generalizarlas a un medio en movimiento, aunque si tomamos en cuenta el principio de relatividad parece razonable hacer algunas afirmaciones sobre cuerpos en movimiento si conocemos su comportamiento en un sistema en reposo; es la misma línea que siguió Minkowski, las ecuaciones para medios en movimiento se obtienen, sin ambigüedades, del principio de relatividad y las ecuaciones de Maxwell para medios en reposo.

En las leyes de transformación que satisfacen los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , siempre aparecen las expresiones

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}, \quad (\text{B3})$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}, \quad (\text{B4})$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}, \quad (\text{B5})$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D}, \quad (\text{B6})$$

donde se considera que los miembros izquierdos de las expresiones anteriores son los campos en un medio en movimiento. Si  $\mathbf{A}$  representa cualquiera de los campos anteriores, es evidente que

$$\mathbf{A}'^{(0)} \equiv \mathbf{A} \quad (\text{B7})$$

y por lo tanto, luce razonable expresar las ecuaciones constitutivas en un medio en movimiento mediante los campos  $\mathbf{A}'$ , pero se requiere más; se requiere una expresión explícitamente covariante de ellas, por lo que procedemos como sigue:

Es directo establecer que

$$\begin{aligned}
 F^\mu &= F^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} \\
 &= \gamma \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)
 \end{aligned} \tag{B8}$$

y, por lo tanto,

$$F^{\mu(0)} = (0, \mathbf{E}^{(0)}). \tag{B9}$$

Si usamos la Ec. (B3), podemos escribir (B8) como

$$F^\mu = \gamma \left( \mathbf{E}' \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{E}' \right); \tag{B10}$$

análogamente, para el campo  $\mathbf{D}$ , si  $G^{\mu\nu}$  es el tensor que lo involucra, tenemos

$$G^\mu = G^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} \tag{B11}$$

y similarmente a las Ecs. (B8) y (B10),

$$\begin{aligned}
 G^\mu &= \gamma \left( \mathbf{D} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{D} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \\
 &= \gamma \left( \mathbf{D}' \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{D}' \right).
 \end{aligned} \tag{B12}$$

Para obtener expresiones equivalentes para los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , usamos los tensores duales  $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$  y  $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$  de forma análoga a (B11)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}^\mu &= \mathfrak{F}^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} \\
 &= \gamma \left( \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\
 &= \gamma \left( \mathbf{B}' \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B}' \right)
 \end{aligned} \tag{B13}$$

Y

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}^\mu &= \mathfrak{G}^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} \\
 &= \gamma \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{H} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \\
 &= \gamma \left( \mathbf{H}' \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{H}' \right).
 \end{aligned} \tag{B14}$$

No debemos perder de vista que todos los campos (B10), (B12), (B13), (B14), denotados genéricamente por  $\mathbf{A}^\mu$  son cuadvectores y se reducen a los campos en el sistema en reposo, pues serán de gran utilidad; de hecho, los podemos usar para expresar a  $F^{\mu\nu}$  y  $G^{\mu\nu}$  como sigue:

$$F^{\mu\nu} = F^\mu \frac{U^\nu}{c} - F^\nu \frac{U^\mu}{c} + \epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} F_\lambda \frac{U_\theta}{c}, \tag{B15}$$

$$G^{\mu\nu} = G^\mu \frac{U^\nu}{c} - G^\nu \frac{U^\mu}{c} + \epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} G_\lambda \frac{U_\theta}{c}; \tag{B16}$$

donde las combinaciones del lado derecho de las expresiones anteriores representan el tensor antisimétrico más general que puede formarse con  $F^\mu$ ,  $\frac{U^\nu}{c}$  y  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta}$  ó con  $G^\mu$ ,  $\frac{U^\nu}{c}$  y  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta}$  respectivamente.

Si tomamos en cuenta lo anterior y aceptamos que en un medio en movimiento se satisfacen

$$\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}', \tag{B17}$$

$$\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \tag{B18}$$

tenemos que las generalizaciones covariantes esperadas son

$$\mathbf{G}^\mu = \varepsilon \mathbf{F}^\mu \leftrightarrow G^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} = \varepsilon F^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c}, \quad (\text{B19})$$

$$\mathfrak{F}^\mu = \mu \mathfrak{S}^\mu \leftrightarrow \mathfrak{F}^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c} = \mu \mathfrak{S}^{\mu\nu} \frac{U_\nu}{c}. \quad (\text{B20})$$

Lo que buscamos es eliminar, de la ecuación de balance de momento maxwelliana (1.18b), al término  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$  e incorporar al término  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ; hacerlo en la ecuación mencionada es trivial y basta con que le sumemos

$$\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon\mu - 1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (\text{B21})$$

pero el punto relevante es hacerlo en la ecuación de balance covariante (1.18a).

Es aquí donde se hace evidente la utilidad de los cuadvectores  $\mathbf{A}^\mu$ , definidos antes como expresiones covariantes de los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ . Con esto, la generalización covariante de  $(\varepsilon\mu - 1)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  es inmediata. Puesto que

$$\mathbf{E} \rightarrow F^\mu, \quad (\text{B22})$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{S}^\mu, \quad (\text{B23})$$

resulta natural que

$$\frac{1}{4\pi c} \{(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\} \rightarrow \frac{1}{4\pi c} (\varepsilon\mu - 1) \varepsilon^{\mu\nu\lambda\theta} \frac{U_\nu}{c} F_\lambda \mathfrak{S}_\theta, \quad (\text{B24})$$

que es la expresión de Abraham. Introdujimos  $U_\nu$  para poder contraer el segundo índice de  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\theta}$ ;

además,  $\frac{U_\nu}{c}$  se hace 1 en el sistema en que el medio está en reposo.

## **APÉNDICE C**

### **PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO DEL BALANCE DE MOMENTO EN EL MODELO DE JOHNSON, CRAGIN Y HODGES**

Podemos llegar a la misma conclusión si usamos el otro proceso propuesto por JCH (Johnson et al, 1994). El proceso en el cual el condensador está ya cargado completamente, pero ahora el campo magnético  $\mathbf{B}$  se disminuye hasta hacerse cero. Podemos calcular el campo eléctrico inducido como sigue:

De la Ley de Faraday, sabemos que

$$\nabla \times \mathbf{E}_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (C1)$$

y dado que dentro del condensador el campo inducido no depende de  $x$ , entonces la componente  $z$  de la ecuación anterior es

$$\frac{\partial E_{ind x}}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (C2)$$

que podemos integrar y obtener, usando  $B_z = B$ ,

$$E_{ind x} = -\frac{l}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (C3)$$

Este campo inducido ejerce una fuerza sobre la carga libre en las placas,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{circuito} &= \varepsilon Q E_{ind x} \hat{\mathbf{i}} \\ &= -\frac{\varepsilon Q l}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (C4)$$

es decir, el impulso transferido a las placas es precisamente el dado en la Ec. (3.41)

$$\mathbf{P}'_{circuito} = -\frac{\varepsilon Q B l}{c} \hat{\mathbf{i}}. \quad (C5)$$

Como la carga de polarización en el dieléctrico está dada, en este caso, por

$$Q_p = (1 - \varepsilon) Q, \quad (C6)$$

encontramos que la fuerza sobre él resulta ser

$$\mathbf{F}'_{dielec} = -\frac{(1-\varepsilon)Ql}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{i}}, \quad (C7)$$

y, por lo tanto, el impulso transferido es

$$\mathbf{P}'_{dielec} = -\frac{(1-\varepsilon)QBl}{c} \hat{\mathbf{i}}. \quad (C8)$$

De las Ecs. (C7) y (C8), el impulso total transferido al sistema, placas y dieléctrico, es

$$\mathbf{P}'_{total} = \mathbf{P}'_{circuito} + \mathbf{P}'_{dielec} = -\frac{QBl}{c} \hat{\mathbf{i}} \quad (C9)$$

y si lo comparamos con la Ec. (3.48), podemos concluir que

$$\mathbf{P}'_{total} = -\mathbf{g}_{elm} V, \quad (C10)$$

donde  $\mathbf{g}_{elm}$  es el mismo que el obtenido en ausencia de dieléctrico, además como para un medio no magnético  $\mu=1$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , observamos que la expresión para la densidad de momento electromagnético en el vacío es idéntica a la propuesta de Abraham

$$\mathbf{P}'_{total} = -\mathbf{g}_A V. \quad (C11)$$

Como podemos apreciar, los resultados de JCH (Johnson et al, 1994) concuerdan plenamente con los obtenidos previamente por Lai (Lai, 1980), por lo cual su conclusión no está debidamente fundamentada.

## REFERENCIAS

Brédov M., Rumiántsev V. and Toptiguin I. (1986). *Electrodinámica Clásica*. Mir: Moscú.

Burt M. G. y Peierls R. (1973). Proc. R. Soc. Lond. A **333**, 149-156.

Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed E. W., Ketterle W., y Pritchard D. E. (2005). Phys. Rev. Lett. **94**, 170403.

Campos I. y Jiménez J. L. (1992). Eur. J Phys. **13**, 117.

Gibson A. F, F. R. S., Kimmitt M. F., Koogian A. O., Evans D. E. y Levy F. D. (1980). Proc. R. Soc. Lond. A **370** 303-311.

Gordon J. P. (1973). Phys. Rev. A **8**, 14.

Haus H. A. (1969). Physica **43** 77.

Jackson J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley: New York.

Jiménez J. L. y Campos I. (1995). *The Balance of Energy and Momentum in Classical Electrodynamics in Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*. T Barret and D Grimes editors. World Scientific: New Jersey.

Johnson F. S., Gragin B. L. y Hodges R. R. (1994). Am. J. Phys. **62** 33.

Jones R.V. y Richards J.C.S. (1954). Proc. R Soc. London A **221**, 480.

Jones R. V. (1978). Proc. R. Soc. London A **360**, 365-371.

Jones R. V. y Leslie B. (1978). Proc. R. Soc. London A **360**, 347.

Lai H. M. (1980). Am. J. Phys. **62**, 658.

Lai H. M., Suen W. M. y Young K. (1982). Phys. Rev. A **25**, 365-71.

Landau L. D. Lifshitz E. M. y Pitaevski L. P. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon: Oxford.

Leonhardt U. (2006). *Phys. Rev. A* **73**, 032108.

López-Mariño M. A. y Jiménez J. L. (2004). *Found. Phys. Lett.*, **17**, 1.

Loudon R., Barnett S. M. y Baxter C. (2005). *Phys. Rev. A* **71**, 063802.

Loudon R. (2004). *Fortschr Phys.* **52**, 1134.

Mansuripur M. (2005). *Opt. Express*, **13**, 2245-50.

Mansuripur M. (2007). *Opt. Express* **15**, 2677-82.

Nelson D. F. (1991). *Phys. Rev. A* **44**, 3985-96.

Panofsky W. K. H. y Phillips M. (1962). *Classical Electricity and Magnetism*. 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley Publishing Company: Massachusetts.

Pauli W. (1958). *Theory of Relativity*. London:Pergamon, traducido de un artículo en la *Encyklopedia der Mathematischen Wissenschaften*, Vol.V19, Tuebner, Leipzig (1921), con notas suplementarias por el autor (1956).

Peierls R. (1976). *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **347**, 475.

Peierls R. (1991). *More Surprises in Theoretical Physics*. Cap 2. New Jersey: Princeton.

Penfield P. y Haus H. (1967). *Electrodynamics of Moving Media*. M.I.T.: Press.

Purcell E. M. (1985). *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill: New York.

Robinson F. N. H. (1975). *Phys. Report. C* **16**, 313.

Stratton J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill: New York.

Walker G.B. y Lahoz D.G. (1975). *Nature* **253**, 339.

Weilong S., Jianhui Y. y Raohui F. (2008). *Phys. Rev. Lett.* **101**, 243601.