

**FENÓMENOS ONDULATORIOS EN UN TUBO ELEVADOR  
EN EL RÉGIMEN DE FLUIDIZACIÓN RÁPIDA Y CON  
EFECTOS DE COMPRESIBILIDAD**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO  
DE MAESTRO EN CIENCIAS EN  
INGENIERÍA QUÍMICA

QUE PRESENTA

JOSÉ ROSARIO GUADALUPE SÁNCHEZ LÓPEZ

DIRECTORES DE TESIS

DR. ALBERTO SORIA LÓPEZ

DRA. ELIZABETH SALINAS BARRIOS

MÉXICO D. F., SEPTIEMBRE DE 2003



Casa abierta al tiempo

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

## UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

IDONEA COMUNICACION DE RESULTADOS

FENOMENOS ONDULATORIOS EN UN TUBO ELEVADOR EN EL REGIMEN DE FLUIDIZACION RAPIDA Y CON EFECTOS DE COMPRESIBILIDAD

En México, D.F. se presentaron a las 11:00 horas del día 05 del mes de SEPTIEMBRE del año 2003 en la Unidad IZTAPALAPA de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del Jurado.

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON;  
DRA. ELIZABETH LEON BECERRIL Y  
DR. ALBERTO SORIA LOPEZ

bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último se reunieron a la presentación de la Idónea Comunicación de Resultados para la obtención del Grado de Maestro en:

CIENCIAS ( INGENIERIA QUIMICA )

JOSE ROSARIO GUADALUPE SANCHEZ LOPEZ



presentó una comunicación de resultados, cuya denominación al margen y de acuerdo con el artículo 78 fracciones I, II, III y V del Reglamento de Estudios Superiores de esta Universidad, los miembros del Jurado resolvieron:

José R. Gpe. Sánchez López

JOSE ROSARIO GUADALUPE SANCHEZ LOPEZ  
FIRMA DEL INTERESADO

*aprobar*

REVISO

LIC. CARMEN LLORENS FABREGAT  
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el Presidente del Jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

VISTO BUENO

DR. TOMAS VIVEROS GARCIA  
DIRECTOR DE DIVISION

PRESIDENTE

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

VOCAL

DRA. ELIZABETH LEON BECERRIL

SECRETARIO

DR. ALBERTO SORIA LOPEZ

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme concluir uno de mis más grandes anhelos de mi vida académica.

A mis Padres Agustín y Rosa, por todo el apoyo que siempre me han brindado.

A mis hermanos, por estar siempre conmigo y apoyarme.

A mis amigos y compañeros del posgrado en ingeniería química, por todos los momentos que hemos compartido; y que me han escuchado, sobre todo en los momentos en los que las cosas no iban bien, por las veces que me han aguantado cuando no estaba de buen humor.

Al Profesor Gustavo Izquierdo Buenrostro, por las discusiones sostenidas acerca de la teoría de las distribuciones, que sirvieron para elaborar el Apéndice C.

A mis sinodales, Dra. Elizabeth León Becerril y Dr. Jesús Álvarez Calderón, por aceptar revisar y criticar el manuscrito; así como por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar el trabajo final.

A mis asesores, por la acertada y valiosa dirección de la presente tesis. En especial al Dr. Alberto Soria López, que ha contribuido mucho en mi formación como investigador; así como a la Dra. Elizabeth Salinas Barrios, por su constante preocupación por el proyecto y entusiasta participación en el desarrollo del mismo. Por haberme ayudado a cristalizar uno de los trabajos más interesantes que he realizado.

Al CONACYT, por el financiamiento recibido durante el desarrollo de este proyecto, mediante la beca 162476/171522.

A la UAM-I con orgullo y satisfacción.

## RESUMEN

Se desarrolló un modelo hidrodinámico, partiendo de las ecuaciones hidrodinámicas locales de masa y de cantidad de movimiento para un conjunto de partículas y un vapor de arrastre, que fluyen en un lecho fluidizado en el régimen de fluidización rápida.

Utilizando el modelo de dos fluidos para describir la hidrodinámica, se promediaron las ecuaciones en el espacio-tiempo, ya que es necesario hacer una suavización tanto en el espacio, como en el tiempo, debido a la naturaleza del flujo turbulento que se tiene en este sistema. Se analizaron los términos de cerradura; posteriormente, se proyectó el sistema cerrado de ecuaciones en la dirección del flujo (Capítulo II).

Se obtuvo un sistema equivalente al sistema de ecuaciones linealizado, mediante una representación en términos de ecuaciones de onda para la fracción volumen y la presión; así como un modelo unificado de una ecuación de onda para cualquiera de las variables perturbadas. Se obtuvieron las velocidades características de dichas ondas, se analizó la estabilidad lineal del sistema, mediante gráficas de las velocidades características contra la fracción volumen de sólidos y también, mediante la relación de dispersión con el fin de estudiar la respuesta del sistema ante pequeñas perturbaciones y de analizar su proceso de disipación a través del lecho (Capítulo III). Posteriormente, se obtuvo la solución analítica de la ecuación de onda al considerar los efectos de pared y al no tomarlos en cuenta, finalmente se dan las conclusiones de los distintos análisis de estabilidad.

Por último, en el Capítulo IV correspondiente a conclusiones y perspectivas, se resaltó la importancia de obtener un modelo hidrodinámico en el régimen de fluidización rápida considerando los efectos de la compresibilidad del vapor de arrastre, y de cómo fue posible obtener un operador diferencial de onda aplicado en cualquiera de las variables perturbadas. Por otro lado, se citan las perspectivas del trabajo para desarrollar posibles trabajos futuros; dentro de las cuales, destaca la de considerar efectos térmicos mediante el balance de energía y tomar en cuenta la inyección de gasóleo, incorporándolo como una tercera fase en el modelo.

# CONTENIDO

RESUMEN .....	iii
CONTENIDO .....	iv

## CAPÍTULO I. ANTECEDENTES

1.1	Introducción .....	2
1.2	<b>CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS FLUIDIZADOS .....</b>	<b>2</b>
1.2-1	REGÍMENES DE FLUJO EN LA FLUIDIZACIÓN GAS-SÓLIDO .....	3
1.2-2	FLUIDIZACIÓN TURBULENTO Y RÁPIDA .....	5
1.3	<b>DEFINICIÓN DE MODELO .....</b>	<b>6</b>
1.4	<b>MODELO DE DOS FLUIDOS .....</b>	<b>8</b>
1.5	<b>PROMEDIO ESPACIO-TEMPORAL .....</b>	<b>9</b>
1.6	<b>ONDAS .....</b>	<b>10</b>
1.7	<b>ORIGEN DE BURBUJAS EN EL RÉGIMEN DE FLUIDIZACIÓN UNIFORME LÍQUIDO-SÓLIDO Y GAS-SÓLIDO .....</b>	<b>11</b>
1.8	<b>DEFINICIÓN DEL PROBLEMA .....</b>	<b>19</b>
OBJETIVOS .....	21	

## CAPÍTULO II. ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO

2.1	Introducción .....	23
2.2	HIPÓTESIS Y LIMITACIONES DEL MODELO .....	23
2.3	ECUACIONES LOCALES INSTANTÁNEAS PARA CADA UNA DE LAS FASES .....	25
2.4	PROMEDIADO UTILIZANDO FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN .....	27
	PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $X_k(\mathbf{x},t)$ .....	29

<b>2.5</b>	<b>OPERADORES PROMEDIO EN EL ESPACIO-TIEMPO .....</b>	<b>30</b>
	PROMEDIO PONDERADO EN LA MASA DEL CAMPO DE VELOCIDAD .....	31
<b>2.6</b>	<b>DESCOMPOSICIÓN ESPACIO-TEMPORAL .....</b>	<b>32</b>
	DESCOMPOSICIÓN PARA EL PROMEDIO PONDERADO EN LA MASA DEL CAMPO DE VELOCIDAD .....	33
<b>2.7</b>	<b>TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA EL DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO .....</b>	<b>34</b>
<b>2.8</b>	<b>ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO .....</b>	<b>35</b>
2.8-1	ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA .....	37
2.8-2	ECUACIÓN DE BALANCE DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO .....	37
<b>2.9</b>	<b>CERRADURA DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO .....</b>	<b>39</b>
2.9-1	ÁREA INTERFACIAL ESPECÍFICA .....	39
2.9-2	ESFUERZOS LAMINARES .....	41
2.9-3	ESFUERZOS TURBULENTOS .....	41
2.9-4	ECUACIÓN DE ESTADO, PARA TOMAR EN CUENTA LOS EFECTOS DE LA COMPRESIBILIDAD DEL GAS .....	46
2.9-5	TÉRMINOS DE INTERACCIÓN CON LAS PAREDES DEL TUBO .....	46
2.9-6	MODELO DE CELDA UNITARIA SIMÉTRICA .....	48
<b>2.10</b>	<b>MODELO HIDRODINÁMICO COMPRESIBLE .....</b>	<b>53</b>
2.10-1	ECUACIONES PROMEDIADAS Y CERRADAS PARA CADA FASE .....	53
2.10-2	SIMPLIFICACIONES AL MODELO .....	54
2.10-3	VARIABLES EMPÍRICAS .....	54
2.10-4	RESUMEN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE DOS FLUIDOS .	54
2.10-5	MODELO UNIDIMENSIONAL .....	56
2.10-6	MODELO CONSIDERANDO A AMBAS FASES COMO INCOMPRESIBLES .....	57

## **CAPÍTULO III. DINÁMICA ONDULATORIA**

<b>3.1</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>59</b>
<b>3.2</b>	<b>LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS .....</b>	<b>60</b>
<b>3.3</b>	<b>ECUACIONES DE ONDA DE FRACCIÓN VOLUMEN Y DE PRESIÓN .</b>	<b>61</b>
3.3-1	COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE ONDA .....	64
3.3-2	VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN ASOCIADAS A LAS ECUACIONES DE ONDA .....	65
<b>3.4</b>	<b>ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN EN EL MODELO INCOMPRESIBLE .....</b>	<b>67</b>
3.4-1	LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS .....	67
3.4-2	ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN .....	68
3.4-3	VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN ASOCIADAS A LA ECUACIÓN DE ONDA .....	70
<b>3.5</b>	<b>DISCUSIÓN PRELIMINAR .....</b>	<b>70</b>
<b>3.6</b>	<b>MODELO DE UNA ECUACIÓN DE ONDA .....</b>	<b>71</b>
3.6-1	MODELO SIMPLIFICADO .....	71
3.6-2	ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN DE VAPOR ...	72
3.6-3	ECUACIÓN DE ONDA PARA LA PRESIÓN .....	75
<b>3.7</b>	<b>ECUACIÓN DE ONDA DESPRECIANDO LOS EFECTOS DE PARED .</b>	<b>78</b>
<b>3.8</b>	<b>RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LAS ECUACIONES DE ONDA</b>	<b>80</b>
<b>3.9</b>	<b>ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL .....</b>	<b>82</b>
3.9-1	ANÁLISIS DE LAS VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN .....	82
3.9-2	RELACIÓN DE DISPERSIÓN Y CONDICIONES DE ESTABILIDAD .....	87
3.9-3	SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA .....	95
<b>3.10</b>	<b>CONCLUSIONES DE LOS DISTINTOS ANÁLISIS DE ESTABILIDAD .</b>	<b>98</b>

## CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

<b>4.1</b>	<b>Introducción</b> .....	<b>100</b>
<b>4.2</b>	<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>100</b>
4.2-1	CAPÍTULO II .....	100
4.2-2	CAPÍTULO III .....	101
<b>4.3</b>	<b>PERSPECTIVAS</b> .....	<b>102</b>

## APÉNDICES

<b>Apéndice A</b>	Teoremas fundamentales para el desarrollo de las ecuaciones promediadas en el espacio-tiempo .....	105
<b>Apéndice B</b>	Evaluación de la fracción volumen de sólidos y velocidades intersticiales de vapor y sólidos .....	107
<b>Apéndice C</b>	El promedio volumétrico y el promedio temporal como casos asintóticos del promedio espacio-temporal .....	109
<b>Apéndice D</b>	Análisis de la masa virtual utilizando la teoría de flujo reptante alrededor de una esfera .....	116
<b>Apéndice E</b>	Evaluación de los esfuerzos superficiales totales, mediante el modelo de celda unitaria simétrica con flujo reptante .....	118
<b>Apéndice F</b>	Ecuaciones de conservación de la masa y de balance de cantidad de movimiento promedio unidimensionales .....	122
<b>Apéndice G</b>	Ecuaciones hidrodinámicas linealizadas: “modelo compresible” .....	124
<b>Apéndice H</b>	Obtención de las ecuaciones de onda de fracción volumen y de presión .....	131
<b>Apéndice I</b>	Ecuaciones hidrodinámicas linealizadas “modelo incompresible” .....	134
<b>Apéndice J</b>	Adimensionalización de las ecuaciones de onda del modelo compresible .....	139
Notación .....		143
Índice de tablas .....		154
Índice de figuras .....		155
Referencias Bibliográficas .....		157

# ***CAPÍTULO I. ANTECEDENTES***

# **1. ANTECEDENTES**

## **1.1 Introducción**

En este Capítulo se hace una breve revisión de los conceptos más importantes acerca de la fluidización gas-sólido, sin pretender hacer una revisión exhaustiva; ya que existen revisiones bibliográficas muy completas, por ejemplo en los trabajos de Valencia (2001) y Gallardo (2003); así como en los textos de Kunii y Levenspiel (1991); Gidaspow (1994); Grace y cols. (1997), entre otros. El propósito aquí es el de plantear el problema, definir sus términos y conceptos más importantes y señalar las vías de solución más adecuadas, como elementos introductorios a la propuesta de trabajo y al desarrollo de la presente tesis.

Cuando se ha decidido utilizar un lecho fluidizado para un proceso; es necesario saber las características hidrodinámicas de la suspensión gas-sólido y del mecanismo particular para poner en contacto la fase fluida y la sólida. Desde el punto de vista de la ingeniería, los principales problemas hidrodinámicos son los relacionados con los factores de diseño como el diámetro y la altura de la columna, forma de la pared, diseño del distribuidor de gas, estructura de la salida del lecho, mecanismos para la separación y reciclaje de los sólidos, así como condiciones de operación, tiempos de residencia, tamaño y tipo de partículas que deben emplearse en el desempeño de sistemas circulantes. Por lo que es muy importante tener una comprensión cuantitativa de la hidrodinámica, y en particular de la circulación de lechos fluidizados; puesto que es necesaria para el diseño y escalamiento de nuevos reactores (Gidaspow y cols., 1992), ya que muchos reactores y equipos de separación están basados en la interacción físico-química de los componentes, originalmente contenidos en una o en fases diferentes. Algunos ejemplos de flujos multifásicos usados industrialmente son: los reactores de lecho-escurrido y agitados, columnas de burbujeo, reactores de lecho fluidizado de dos y tres fases, etc. (Soria, 1991; Soria y de Lasa, 1991).

Por todo esto, es indispensable la obtención de modelos hidrodinámicos que ofrezcan una mejor comprensión de los procesos físicos que ocurren dentro de este tipo de sistemas.

En este Capítulo, se describe también en que consiste el modelo de dos fluidos, puesto que es el modelo hidrodinámico en el que se representa el sistema, se habla de los operadores promedio, y específicamente del promedio espacio-temporal que es el que se utiliza en la obtención de las ecuaciones promediadas en el Capítulo 2.

También se da un marco conceptual relacionado con las ondas que surgen al provocar perturbaciones en un sistema. En la última parte del Capítulo, se hace una descripción de los trabajos que se han hecho en lechos fluidizados con líquidos y gases; tratando de comprender la formación de burbujas en lechos fluidizados del tipo gas-sólido. De ésta revisión bibliográfica surge la motivación para realizar este trabajo. La cuál, se trata de expresar claramente en la definición del problema, en la última parte de este Capítulo.

## **1.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS FLUIDIZADOS**

Kunni y Levenspiel (1991) definen fluidización como “la operación en la cual partículas sólidas se comportan como un fluido en una suspensión de gas o de líquido”.

De esta manera, un lecho fluidizado está formado por dos fluidos, uno de ellos es usualmente un gas (también puede ser un líquido) que asciende en un lecho de partículas (povos) que se comportan como un pseudofluido.

Hoy en día, se sabe que incluso sobre la velocidad mínima de fluidización, las partículas se están tocando unas a otras la mayor parte del tiempo (Geldart, 1986), con la excepción de sólidos cohesivos la fricción interpartícula es entonces pequeña que el ensamble fluido/sólido se comporta como un líquido que tiene una densidad igual a la densidad del seno de las partículas; la presión se incrementa linealmente con la distancia debajo de la superficie, los objetos densos se hunden, los ligeros flotan, y se observa un movimiento ondulatorio. Los sólidos se pueden remover o añadir al lecho continuamente, y esto provee muchas ventajas de procesamiento. Las partículas finas poseen un área superficial específica muy elevada: por ejemplo,  $1 \text{ m}^3$  de partículas de  $100 \mu\text{m}$  tiene un área superficial de cerca de  $30,000 \text{ m}^2$ .

Comparado con un lecho fijo con la misma carga de partículas sólidas operado a la misma profundidad y velocidad de gas, la caída de presión sobre el lecho fluidizado es mucho menor, y esto junto con la mayoría de las características descritas anteriormente hacen del lecho fluidizado una atractiva opción como una herramienta de procesamiento física o química.

Hay, sin embargo, desventajas que pueden pesar más que las características atractivas: para algunas aplicaciones, las burbujas de gas dificultan el escalamiento y proporcionan un medio con que los gases reaccionantes pueden evitar el contacto con los sólidos; la entrada de partículas es casi inevitable y el roce de partículas y la erosión en la superficie del metal ocurre en regiones donde las velocidades del gas son elevadas (Geldart, 1986).

Los componentes básicos requeridos para un lecho fluidizado son cuatro: un contenedor, que usualmente es un tubo, un gas suministrado a través de un distribuidor, partículas sólidas, y una fuente de gas. La provisión de otros elementos muestran la dependencia en una aplicación particular contemplada. Por ejemplo, los lechos fluidizados granulantes pueden incluir un aspersor, un portador de partículas y de un suministro de sólidos mediante un ducto exterior, pero sin un ciclón interno o superficies de transferencia de calor. Los reactores para la producción de acrilonitrilo tienen ciclones y tubos intercambiadores de calor internos, un portador de partículas y un desenganchador, pero carecen de boquillas aspersoras.

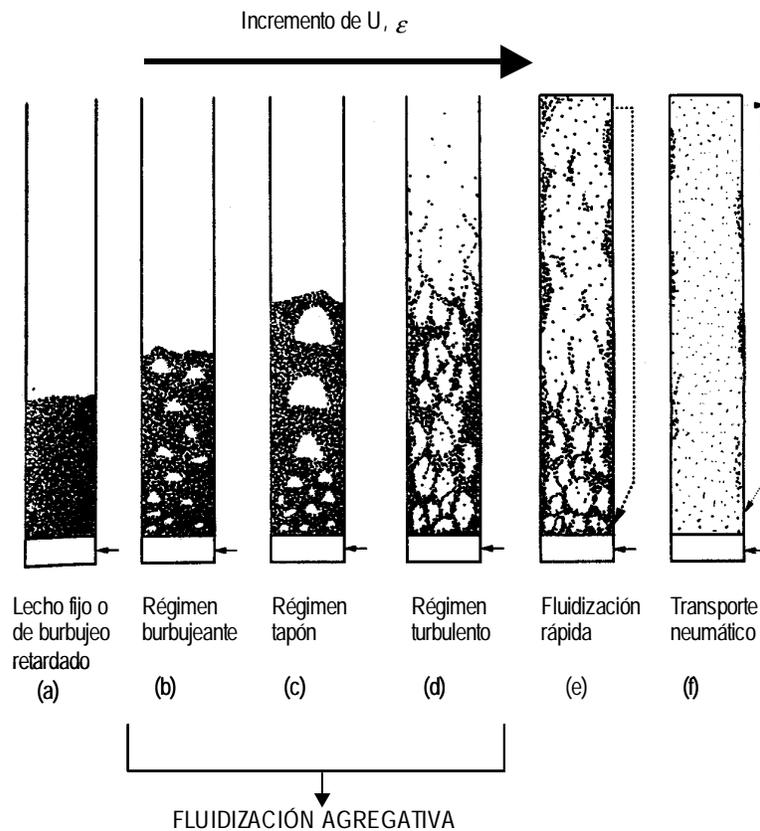
La variedad de lechos fluidizados encontrados en operación comercial es enorme e incluye sólidos que tienen tamaños medios tan pequeños como:  $15 \mu\text{m}$  y tan grandes como  $6 \text{ mm}$ , los diámetros del lecho van de  $0.1$  a  $10 \text{ m}$  y velocidades del gas de  $0.01$  a  $3 \text{ m/s}$  o casi tan altas como  $10 \text{ m/s}$  para lechos recirculantes a alta velocidad (Geldart, 1986).

### 1.2-1 REGÍMENES DE FLUJO EN LA FLUIDIZACIÓN GAS-SÓLIDO

Parte de la definición del régimen de flujo es una descripción del arreglo morfológico de los componentes, o patrón de flujo (Wallis, 1969). Los regímenes de flujo en una sola fase pueden clasificarse de acuerdo a su movimiento interno de flujo en: flujo laminar, de

transición y turbulento. Sin embargo, los flujos en dos o más fases no pueden clasificarse de esta manera y los distintos regímenes de flujo se clasifican de acuerdo a la geometría de la interface (Ishii, 1990).

La introducción de gas por el fondo de una columna que contiene partículas sólidas por vía de un distribuidor de gas puede causar que las partículas se fluidicen. Se han identificado diversos patrones de flujo/regímenes (figura 1.1). Con un incremento en la velocidad del gas, los regímenes en lechos fijos son, burbujeante retardado o fluidización libre de burbujas, fluidización burbujeante, fluidización en flujo tapón, fluidización turbulenta, fluidización rápida y convección neumática diluida.



**Figura 1.1** Patrones de flujo en un lecho fluidizado gas-sólido (Grace, 1986).

La transición de un lecho fijo a la fluidización es delimitada por la velocidad mínima de fluidización,  $u_{mf}$ , la cual corresponde a la velocidad más baja de gas a la cual todas las partículas del lecho son suspendidas por el gas. Esta se determina empíricamente al igualar la carga de presión en el lecho con la velocidad superficial del gas (Gidaspow, 1994).

La aparición del régimen burbujeante se indica por la velocidad mínima de burbujeo,  $u_{mb}$ , la velocidad del gas a la cual las burbujas empiezan a aparecer en el lecho (Abrahamsen y Geldart, 1980). Se ha encontrado que la velocidad mínima de burbujeo es una función fuerte de las propiedades de las partículas (específicamente su tamaño) figura 1.1b.

Cuando la velocidad superficial del gas se incrementa adicionalmente, las burbujas de gas se vuelven más grandes. Se dice que ocurre la transición al régimen en flujo tapón, cuando las burbujas crecen a tamaños comparables con el diámetro de la columna como se observa en la figura 1.1c (Clift y cols., 1978).

Abordaremos en forma separada los regímenes turbulento y rápido por ser de especial interés en este trabajo.

## 1.2-2 FLUIDIZACIÓN TURBULENTA Y RÁPIDA

Discutiremos los regímenes de fluidización turbulenta y rápida por ser regímenes de fluidización a altas velocidades, que ocurren usualmente en el tubo elevador.

Para distinguir entre el régimen en flujo tapón y el régimen turbulento, comúnmente se define la velocidad superficial del gas a la cual la desviación estándar de las fluctuaciones de presión alcanzan un máximo,  $u_c$ , como el comienzo del régimen turbulento (Yerushalmi y Cankurt, 1979; Bi y cols., 2000). Se cree que  $u_c$  refleja la condición en la cual la coalescencia y el rompimiento de burbujas alcanza un balance dinámico, volviéndose predominante el rompimiento de las burbujas si la velocidad del gas se incrementa aún más.

Comúnmente se considera que el régimen de fluidización turbulenta se encuentra entre la fluidización en flujo tapón y el régimen de fluidización rápida (figura. 1.1). Se le ha caracterizado por la baja amplitud de las fluctuaciones de presión, que resultan del desvanecimiento de grandes burbujas/fracciones. La aplicación industrial de los lechos fluidizados turbulentos incluye procesos químicos y metalúrgicos, entre otros (Grace y cols, 1997).

Sin embargo, la mayoría de los lechos fluidizados circulantes operan en el llamado régimen hidrodinámico de “fluidización rápida” donde no se distingue o se reconoce una superficie superior del lecho.

En el régimen de fluidización rápida, el arrastre de sólidos es muy grande (figura 1.1e), por lo que debe estarse introduciendo carga fresca de sólidos continuamente y en una proporción significativa para recuperar la pérdida de sólidos en el lecho y lograr operaciones en estado estacionario (Kunii y Levenspiel, 1991).

Las principales aplicaciones de este régimen de fluidización, se encuentran en la desintegración catalítica en medio fluido (FCC) y combustión en lechos fluidizados circulantes (CFBC); los cuales, son muy importantes y el hablar de ellos implicaría dedicarles un Capítulo especial en esta tesis, lo cual no se hará, debido a que no es el objetivo de la presente. Solo mencionaremos que a mediados de los 1990s, había en el mundo aproximadamente 250 unidades de FCC en operación utilizando tubos elevadores CFB y aproximadamente 400 unidades de CFBC comerciales. Además, hay más de 70 CFB a escala laboratorio, modelos en frío en operación en distintos países (Grace y cols, 1997).

Tradicionalmente para simular y obtener información de los sistemas físicos, se han elaborado modelos matemáticos del sistema en consideración. A continuación se discuten algunas variedades y técnicas para generar modelos.

### 1.3 DEFINICIÓN DE MODELO

Bouré (1987) define un modelo como “un conjunto de ecuaciones, que teóricamente representa el comportamiento de un sistema físico bajo ciertas condiciones; y está basado en las ecuaciones que expresan los principios de conservación (las ecuaciones de balance, de conservación y de salto para la masa, momento y energía) e involucra ecuaciones que expresan las condiciones de frontera y/o iniciales apropiadas para la situación física en consideración”.

El conjunto de ecuaciones de balance (ecuaciones de campo y condiciones de discontinuidad o salto) y condiciones de frontera e iniciales no son suficientes para hacer cálculos, ya que involucran más cantidades desconocidas o incógnitas que ecuaciones disponibles. En lenguaje matemático, se dice que el conjunto *no esta cerrado*.

Las leyes de cerradura (los valores numéricos, formas matemáticas) que complementan el modelo, son muy importantes, debido a que tienen una fuerte influencia en el fenómeno de propagación presente en el modelo (Bouré, 1987; 1988), así como en la estabilidad de su simulación numérica (Gidaspow, 1994).

Localmente, un flujo en dos fases consiste de un cierto número de regiones de una sola fase rodeadas por interfaces móviles. Por lo tanto, al menos en teoría, el problema podría formularse en términos de las ecuaciones de balance estándares aplicables a sistemas monofásicos con apropiadas condiciones de frontera en la interface. Sin embargo, en general, una formulación basada en variables instantáneas e interfaces móviles resulta en un problema de multi-fronteras con posiciones desconocidas de las interfaces. Por lo tanto, obtener una solución de esta formulación es imposible e impráctico para la mayoría de los casos debido a las dificultades matemáticas asociadas. Además, de que ese nivel de descripción tan detallado, no es importante en ingeniería, sino que basta con tener una descripción en términos de los aspectos globales del flujo (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983).

Por las razones discutidas en el párrafo anterior, se ha seguido una formulación de los problemas de flujo en dos fases en términos de variables globales del flujo.

Los modelos necesarios para diseñar y operar los equipos presentan algunas características fundamentales comunes, ya que resultan de la aplicación de los principios de conservación, así como de la segunda ley de la termodinámica para los casos específicos. Hay dos variedades de estos modelos:

- aquellos donde se postulan ecuaciones globales en términos de variables promedio sin hacer referencia a los balances locales y
- aquellos que se construyen formalmente utilizando algún procedimiento para promediar las ecuaciones locales.

El primer enfoque presenta una ventaja obvia; ya que no es necesario desarrollar un procedimiento complejo para promediar. El segundo, es un enfoque racional, que al seguirlo, se gana en comprensión de los alcances y limitaciones del modelo, ya que es posible ver cómo las ecuaciones globales surgen de consideraciones locales apropiadas, de manera semejante al procedimiento por el cual surgen los esfuerzos de Reynolds en los flujos monofásicos turbulentos al promediar temporalmente el balance de conservación de cantidad

de movimiento. Como consecuencia se gana en la intuición de los mecanismos importantes, y esto será una ventaja al formular las ecuaciones constitutivas. Además cuando aparece un término que no era esperado en el enfoque alternativo de postular las ecuaciones, éste debe ser incluido en tal modelo o se debe explicar su poca importancia. (Drew, 1983; Soria, 1985).

Otra forma de generar modelos, es la seguida por varios autores (Bedford y Drumheller, 1978; Drumheller y Bedford, 1980) mediante una formulación variacional de los flujos en dos fases. La formulación variacional empieza con el principio de Hamilton, dado por,

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (K - P) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (1.3-1)$$

donde  $\delta$  representa la variación sobre un espacio apropiado de funciones,  $K$  y  $P$  son las energías cinética y potencial respectivamente,  $\delta W$  es el trabajo virtual,  $t_1$  y  $t_2$  son dos tiempos arbitrarios. La formulación variacional tiene la ventaja de que si se desea incluir un efecto (por ejemplo, la masa virtual), el efecto debe ser incluido consistentemente en las ecuaciones de masa, momento y energía cinética. Una ventaja más concreta e inmediata se encuentra en las técnicas de formulación numérica, y específicamente, técnicas de elemento finito, donde la formulación variacional facilita la traslación de las ecuaciones diferenciales parciales a ecuaciones discretas.

Para utilizar la formulación variacional, es necesario definir la variación  $\delta$ , las energías  $K$  y  $P$ , y el trabajo virtual  $\delta W$ ; así como también, deben incluirse restricciones con los multiplicadores de Lagrange.

Bedford y Drumheller, usaron la técnica para mostrar cómo el efecto de las oscilaciones en el diámetro de una burbuja pueden tomarse en cuenta al incluir la energía cinética del líquido debida al cambio en el diámetro de la burbuja. Ellos incluyen en forma similar la masa virtual argumentando que las aceleraciones relativas incrementan la energía cinética. Una dificultad conceptual con esta aproximación se debe a que uno debe decidir cuales fluctuaciones contribuyen a la energía cinética total y cuales al trabajo virtual. Por ejemplo, el arrastre viscoso se debe a fluctuaciones en la velocidad del fluido cerca de las partículas, pero se incluyen como un término de trabajo virtual. El trabajo virtual se asocia con energía irrecuperable, en tanto que la energía cinética y potencial con energía recuperable. Las formulaciones variacionales en general no mencionan el efecto de los esfuerzos de Reynolds, los cuales son una manifestación de las fluctuaciones. Terminaremos esta discusión diciendo, que mientras las formulaciones variacionales son útiles, su formulación no siempre es directa (Drew, 1983).

Los modelos en términos de cantidades promediadas son mucho más sencillos que los locales; sin embargo, mucha información se pierde al establecer procedimientos para promediar las ecuaciones locales y sólo puede recuperarse parcialmente si se proponen relaciones de comportamiento apropiadas en los casos particulares.

Lo anterior explica la gran cantidad de correlaciones empíricas existentes en la literatura de los fenómenos de transporte en medios heterogéneos dispersos y los esfuerzos recientes para desarrollar correlaciones con mayor sentido físico (Soria, 1985).

Existen dos formulaciones fundamentalmente diferentes para las ecuaciones globales de sistemas de flujo en dos fases: el modelo de dos fluidos y el modelo de mezcla. El modelo de mezcla considera el movimiento de una mezcla de dos fases como un todo en términos de la ecuación de movimiento de la mezcla. La hipótesis más importante de este modelo es que existe un fuerte acoplamiento entre los movimientos de las fases (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983).

Debido a los fenómenos físicos que están presentes dentro del reactor de la unidad de FCC, los modelos de mezcla no pueden ser capaces de describir estos fenómenos tan complejos. Por lo tanto, se obtendrá un modelo global para el tubo elevador de la unidad de FCC, desarrollado a partir de los conceptos básicos del modelo de dos fluidos (Valencia, 2001).

#### **1.4 MODELO DE DOS FLUIDOS**

El modelo de dos fluidos se basa en considerar cada fase por separado. De tal forma que se obtienen dos conjuntos de ecuaciones gobernantes de balance de masa, momentum, energía y especies químicas. Estos modelos de flujos multifásicos, tratan específicamente el intercambio finito de las tasas de transporte de masa, momentum, energía, etc. Sin embargo, el tratar los campos promedios de esta manera no significa que una fase sea independiente de la otra. Los términos de interacción entre las fases, los cuales acoplan estas tasas de transporte entre las fases, se dan a través de las interfaces o aparecen también como términos fuente en las ecuaciones de campo promedio (Faeth, 1983; Ishii y Kocamustafaogullari, 1983; Ishii, 1990).

La importancia real del modelo de dos fluidos es que puede tomar en cuenta las interacciones dinámicas entre las fases, debido a que cada fase posee sus propios campos de velocidad, los cuales especifican su movimiento. De esta forma, es de esperar que el modelo de dos fluidos sea útil en el análisis de propagación de ondas y en los cambios de regímenes de flujo (Ishii, 1990; Lahey, 1991). Particularmente si las dos fases están débilmente acopladas, las ondas pueden propagarse en cada fase con velocidades diferentes, el modelo de dos fluidos debe usarse para estudiar estos fenómenos (Ishii, 1990).

El modelo de dos fluidos, es de gran utilidad para obtener un modelo transitorio en el cual las dos fases están débilmente acopladas tanto dinámica como térmicamente (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983; Ishii, 1990). La clase de flujos que no están en equilibrio pueden ser: flujos de entrada, en desarrollo, mezclados bruscos, transición de flujos, flujos a co-corriente y a contra-corriente, y el flujo multifásico presente dentro del tubo elevador.

Para la formulación de este modelo, los procesos de transferencia de cada fase, son expresadas por su propio conjunto de ecuaciones, entonces se espera que este modelo pronostique más detalladamente las interacciones de las fases, que los modelos de mezcla. Sin embargo, esto implica que el modelo de dos fluidos sea más complicado no únicamente respecto al número de ecuaciones, sino también porque se requiere un mayor número de relaciones de comportamiento y de cerradura (Wallis, 1969; Ishii y Kocamustafaogullari, 1983; Ishii, 1990).

Existen diversos criterios para verificar las ecuaciones globales, y construir relaciones de cerradura; entre los cuales destacan: la segunda ley de la termodinámica (Arnold y cols., 1990), el principio de equiprescencia (Drew y Lahey, 1993), modelos de celda unitaria (Drew

y Lahey, 1993; Whitaker, 1999) y el principio de objetividad material (Truesdell y Toupin, 1960; Drew, 1983).

Los términos de intercambio interfacial en las ecuaciones promediadas son muy importantes; ya que sin ellos, las dos fases serían esencialmente independientes. Estos términos de interacción deciden el grado de acoplamiento entre las fases, así los procesos de transporte en cada fase están en gran medida influenciados por estos términos; de esta forma, a menos de que los términos de interacción sean modelados en forma precisa, la ventaja del modelo de dos fluidos sobre el modelo de mezcla desaparece y en ciertos casos resultan inestabilidades numéricas (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983; Ishii, 1990).

En el modelo de dos fluidos, los materiales son separados por una interface, que asumimos como una superficie (otra forma de considerarla es como una superficie material, capaz de contener masa y servir como fuente o sumidero de la misma, este tipo de consideraciones, nos lleva a discusiones de origen físico o topológico según sea el caso). Una interface es una pequeña película localizada entre dos fases adyacentes. Las propiedades termodinámicas y el comportamiento mecánico del material en la interface puede ser muy diferente del de las fases adyacentes, contribuyendo con nuevas características al proceso termomecánico global (Soria y de Lasa, 1991).

Una vez que nos hemos decidido por el tipo de modelo que adoptaremos en nuestra descripción del lecho fluidizado, es necesario saber el tipo de operador promedio que debemos utilizar, tomando en cuenta el objetivo que persigue el modelo y las características del sistema físico que deseamos modelar (por ejemplo, el régimen de flujo).

## **1.5 PROMEDIO ESPACIO-TEMPORAL**

Los procedimientos de promediado, que pueden aplicarse a sistemas de dos fases pueden ser clasificados en tres principales grupos basados en los conceptos físicos básicos usados para formular problemas dinámicos (Ishii, 1975; 1981). Estos son: El Euleriano, Lagrangiano y promedios estadísticos de Boltzmann. El primero es el que se sigue tradicionalmente, debido a que las ecuaciones locales instantáneas están formuladas en un sistema coordinado Euleriano, por lo que normalmente se ha adoptado este sistema para promediar dichas ecuaciones.

El segundo se toma siguiendo una trayectoria determinada, por ejemplo la de una partícula sólida y el tercero, se diferencia de los otros dos porque se promedia con respecto a una función de distribución estadística, que por lo general es la distribución de Maxwell-Boltzmann. La selección de uno de ellos para un problema determinado, va a depender de los fenómenos que nos interese describir. En este caso como tenemos un flujo turbulento en un medio constituido por dos fases, y nos interesa estudiar la propagación de ondas en él, requerimos promediar en el espacio y en el tiempo las ecuaciones hidrodinámicas locales instantáneas.

La descripción tiempo-espacio de fenómenos físicos, se hace mediante una descripción de promedio Euleriano, en donde las coordenadas temporal y espacial son consideradas como variables independientes y distintas variables dependientes expresan su cambio con respecto a estas coordenadas. Desde que el campo de ecuaciones normales o estándar de la mecánica del continuo adoptaron esta descripción, ha sido natural seguir considerando este tipo de promedio con respecto a estas variables independientes (es decir

un promedio temporal y espacial), además este tipo de promedio es básicamente un operador integral, estos tienen un efecto de suavización de las variaciones locales instantáneas, dentro del dominio de integración (Ishii, 1990).

Un campo de estudio muy importante en la mecánica de fluidos y en flujos multifásicos que nos permite entender algunos fenómenos (por ejemplo, la respuesta transitoria de un proceso a una perturbación en el flujo) es la descripción ondulatoria del proceso; y ya que su estudio ocupa un lugar importante en esta tesis, trataremos de definir brevemente algunos términos que se manejan en este fascinante campo.

## 1.6 ONDAS

Las ondas constituyen la respuesta de un sistema físico, representado en un modelo matemático a pequeñas perturbaciones. Las cuales se han clasificado en diversas formas, algunas son las siguientes.

Ondas de fracción volumen. Ocurren siempre que hay una relación entre la tasa de flujo y la concentración, de tal modo, que esa diferencia de concentración origina un flujo que se propaga en el medio material del sistema en consideración, su aparición está relacionada matemáticamente a la ecuación de conservación de la masa (Wallis, 1969).

Ondas dinámicas. Las ondas dinámicas, dependen para su existencia de fuerzas que aceleren el material a través de la onda, y su origen matemáticamente se asocia con el balance de cantidad de movimiento (Wallis, 1969).

Ondas de choque. Estas se ocasionan cuando un cuerpo que se desplaza en un fluido, se mueve a una velocidad mayor a la del sonido; es decir en un flujo supersónico ( $Ma > 1$ ). En su estudio, resultan de importancia fundamental los efectos de compresibilidad del fluido, que por lo general es un gas.

Ondas de presión. Estas, gobiernan la propagación de la presión en un sistema específico; por ejemplo, en un tubo.

Puesto que una onda es la respuesta que da un sistema a una perturbación, es necesario definir un concepto importante al hablar de fenómenos ondulatorios, que es la estabilidad.

Estabilidad. Es la condición que se tiene cuando se provoca una perturbación en un sistema, y esta se disipa en el tiempo y/o espacio; por lo que se dice que el sistema es estable; por el contrario, si ésta crece, el sistema es inestable.

En esta tesis entenderemos estabilidad, como la condición en la cual la estructura de flujo se conserva al provocar una perturbación; es decir, el arreglo gas-sólido que se tenga en ese momento absorbe la perturbación sin cambiar su estructura morfológica. Y tendremos inestabilidad cuando la perturbación ocasionada en el flujo cambie permanentemente esa estructura, por ejemplo el surgimiento de burbujas y en este caso particular, podemos asociarla a la aparición de cúmulos de partículas.

La descripción de procesos mediante ecuaciones de onda se ha utilizado para tratar de comprender la formación de burbujas en lechos fluidizados, habiendo un extenso antecedente al respecto y del cual se hablará a continuación.

## **1.7 ORIGEN DE BURBUJAS EN LA FLUIDIZACIÓN UNIFORME LÍQUIDO-SÓLIDO Y GAS-SÓLIDO**

Los lechos fluidizados brindan un contacto íntimo entre las fases, por ello han encontrado muchas aplicaciones industriales, por ejemplo en reacciones catalíticas, mezclado, etc. En la mayoría de las aplicaciones los lechos fluidizados son eficientes sólo cuando la fluidización es homogénea, por ejemplo, la fracción volumen de fluido es uniforme; sin embargo, como se verá más adelante, se ha encontrado que esta situación no siempre se obtiene, especialmente con los lechos fluidizados del tipo gas-sólido.

Trabajos experimentales con lechos fluidizados han mostrado que un incremento en el flujo de fluido sobre la velocidad mínima de fluidización, provoca que el lecho se expanda uniformemente; es decir, la fracción volumen de fluido se incrementa uniformemente, hasta un cierto flujo crítico; después del cual, la expansión ya no es uniforme, desarrollándose uniformidades conocidas como burbujas o paquetes de fluido. Ya que éstas uniformidades no son deseables para la operación eficiente en los lechos fluidizados, se han hecho muchos estudios teóricos y experimentales tratando de describir y comprender los mecanismos involucrados en el desarrollo de tales fenómenos.

Existen diversos trabajos que tratan la estabilidad en lechos fluidizados, en los cuales manejan una fluidización en estado uniforme o fluidización homogénea, donde la velocidad del gas es muy cercana a la velocidad mínima de fluidización; precisando aun más, su valor está acotado, por arriba por la velocidad terminal, y por abajo por la velocidad mínima de fluidización. Estos estudios generalmente consideran a ambas fases como incompresibles, encontrando inestabilidades (sobre todo cuando el fluido utilizado como medio fluidizante es un gas), que se han asociado de acuerdo a experimentos realizados al surgimiento de burbujas, debido a que se encuentran cerca del cambio de régimen a burbujeante. A continuación, se hace una breve descripción histórica de los trabajos más sobresalientes en esta dirección.

Wilhelm y Kwauk en 1948, mediante un trabajo experimental, en el que fluidizaron partículas sólidas por medio de aire y agua, utilizando partículas de tamaño uniforme de arena, vidrio y catalizador de silicato, cubriendo un amplio intervalo de diámetros de partícula, formas geométricas y densidades, identificaron dos modos de fluidización, "uniforme" y "agregativa". La primera, resultó ser más estable a la operación, en la fluidización de las partículas con agua; y la segunda, exhibió un comportamiento más complejo en la fluidización de las partículas con un gas. En la primera, la expansión del lecho parece ser regular cuando la velocidad del fluido se aumenta más allá del valor necesario para comenzar la fluidización; es decir, las partículas tienden a separarse uniformemente, y encontraron que se separaban más, conforme se incrementaba la velocidad del flujo de agua; mientras que en la fluidización agregativa, las partículas tienden a permanecer agregadas, y el gas asciende a través del lecho principalmente en la forma de burbujas.

En esta investigación temprana, proponen un criterio aproximado para distinguir entre una fluidización y otra. Estableciendo que el sistema es agregativo si el número de Froude,

$u_{mf}^2 / g d_p$  es mayor a la unidad y uniforme si es menor que la unidad; sin embargo, esta diferencia no se ha comprendido en forma completa.

En sus observaciones, consideran las fuerzas que actúan en las partículas en la fluidización. El proceso de fluidización empieza cuando las fuerzas dispersivas del fluido son balanceadas por las fuerzas que tienden a mantener al lecho en forma compacta. Una de ellas es el peso del lecho de partículas,  $(1-\varepsilon)(\rho_s - \rho_g)g$  que actúa hacia abajo para mantener al lecho en forma compacta, y el arrastre viscoso del fluido actuando hacia arriba tendiendo a mantener dispersas a las partículas en el lecho. Esta fuerza, es el gradiente de flujo del fluido  $(\Delta p/L)g$ , y que es dependiente de la velocidad del fluido; así como del diámetro de la partícula y propiedades del fluido. En la fluidización agregativa, se observó una tercera fuerza o combinación de fuerzas, que pueden ser electrostáticas o de origen de la dinámica del fluido, o ambas; y son las causantes de que se tengan agregados de partículas.

Las burbujas características de la fluidización agregativa, han sido discutidas por muchos autores (Davies y Taylor, 1950; Yasui y Johanson, 1958; Davidson y cols., 1959).

Wace y Burnett (1961) siguieron el movimiento del fluido cerca de una burbuja mediante la técnica de trazadores, y mostraron que hay un flujo de fluido a través de la burbuja, entrando por su base y saliendo por su parte superior. Esto debe ser así, si el lecho sobre la burbuja debe permanecer fluidizado como reconocieron Harrison y cols. (1961), que compararon este movimiento con la circulación de gas dentro de una burbuja grande subiendo a través del líquido. Haciendo ciertos postulados acerca de la circulación del gas, estimaron el tamaño estable máximo de la burbuja y sugirieron que esto daba la diferencia esencial entre los sistemas agregativos y uniformes, siendo grande en los primeros y pequeña, en los segundos.

La discusión de las burbujas, hace un uso extensivo de la analogía entre la fase densa de un sistema fluidizado y un líquido. La estructura detallada de esta fase como un ensamble muy cercano de partículas interactuando con la corriente de fluido, ascendiendo por los intersticios, se desprece y es remplazada por un fluido análogo, caracterizado por parámetros tales como la densidad y la viscosidad. Esto ha llevado a algunos investigadores a esforzarse en tomar medidas de viscosidad aparente (Matheson y cols., 1949; Furukawa y Ohmae, 1958) y tensión superficial (Furukawa y Ohmae, 1958), y fue utilizada también por Rice y Wilhelm (1958) al discutir las inestabilidades de Davies y Taylor (1950) en las superficies del lecho. Encontraron una superficie inferior no soportada por ser inestable y sugirieron que estaba relacionada al comportamiento agregativo.

Posteriormente, un trabajo pionero en hacer un estudio de estabilidad hidrodinámica en el régimen homogéneo o uniforme es el de Jackson (1963a). En el cual, propone un modelo para el flujo de partículas en un lecho fluidizado, de un fluido incompresible y partículas sólidas iguales, considerando un régimen de fluidización homogéneo, y tomando en cuenta como fuerzas de interacción en el flujo, a la fuerza de arrastre y a la flotación de las partículas; así como también, incluye un término de masa virtual en forma artificial, dependiente solamente de la velocidad del fluido.

En el modelo, propone que la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad relativa entre las fases, donde la constante de proporcionalidad depende de la densidad numérica de

partículas; es decir, del número de partículas por unidad de volumen. Al analizar por métodos estándares la estabilidad lineal del estado uniforme en la fluidización, encuentra que la fluidización homogénea siempre es inestable ante cualquier pequeña perturbación. Es decir, una pequeña perturbación local en la densidad numérica de partículas se propaga hacia arriba y hacia abajo de su punto de origen en el lecho. La componente descendente se extingue rápidamente, pero la ascendente incrementa su amplitud exponencialmente a medida que se propaga. Encuentra además, que la estabilidad está muy relacionada al número de Froude; que corrobora en cierta forma las observaciones anticipadas hechas por Wilhelm y Kwauk (1948), siendo la tasa de amplificación de la perturbación pequeña en los sistemas usualmente descritos como uniformes, y muy grandes en los descritos como agregativos.

En la segunda parte (Jackson, 1963b) aplica el modelo propuesto en la primera parte al problema del movimiento de un flujo burbujeante en un lecho fluidizado uniforme. Encuentra una solución que representa el movimiento de una burbuja aislada totalmente desarrollada. Muestra que las ecuaciones y condiciones de frontera pueden satisfacerse solamente si las burbujas se alcanzan con una velocidad dada aproximadamente por la ecuación de Davies-Taylor; sin embargo, la velocidad de ascenso puede especificarse arbitrariamente en el desarrollo de Davidson (1961) y se muestra que está unívocamente determinada por el conjunto completo de ecuaciones de movimiento de la primera parte del trabajo, y que es la misma que la velocidad calculada por Davies y Taylor (1950) para el ascenso de burbujas grandes de gas en un fluido invíscido. La densidad de las partículas y la velocidad del fluido se mapean alrededor de burbujas de diferentes tamaños.

Otro estudio importante, es el que hace Murray (1965a), que propone en la primera parte de su trabajo, un modelo para un lecho fluidizado gas-sólido, con nuevos términos a diferencia de los trabajos anteriores, tales como el de Jackson (1963a). Considera los efectos debidos a la compresibilidad del gas junto con efectos térmicos. Presenta las ecuaciones de continuidad para el gas y las partículas sólidas, más una ecuación de movimiento para la mezcla que incluye los efectos viscosos, y los campos de presión del gas y de los sólidos mediante el tensor de presiones, también incluye la flotación de las partículas debida al fluido, la fuerza de arrastre y la masa virtual; que considera proporcional a la derivada material de la velocidad relativa de los sólidos al fluido. Considera una ecuación de movimiento para el gas, una ecuación de energía para cada una de las dos fases y la ecuación de estado del gas ideal para el gas. Pero, al estudiar la estabilidad de pequeñas perturbaciones en el resto del trabajo, se desprecian los efectos térmicos; así como también, se considera que la densidad de los sólidos es mucho mayor que la del gas ( $\rho_g/\rho_s \ll 1$ ), por lo que el conjunto de ecuaciones se reduce considerablemente.

Con el sistema reducido analiza la propagación de una perturbación en dos dimensiones en un lecho fluidizado uniforme, al considerar una solución de carácter exponencial, encontrando que el sistema es inestable ante pequeñas perturbaciones. Por otro lado, analiza la propagación de ondas superficiales, las cuales son generadas por las burbujas que se rompen en la superficie del lecho fluidizado; encontrando que son estables. Estudia también los efectos debidos al suministro de calor al lecho fluidizado, o cuando se lleva a cabo una reacción química dentro de él. Del estudio de estabilidad lineal en este caso, resulta que el sistema es inestable nuevamente.

En vista de la importancia práctica de los lechos fluidizados como intercambiadores de calor en la aplicación a plantas nucleares, se estudió también un lecho centrifugado que

mejoraría la eficiencia y quizás pueda resultar en un estado estable de fluidización. De este estudio, encuentra que para velocidades angulares grandes, de tal manera que pueda desprejarse la fuerza de gravedad, hay menos modos inestables que cuando no rota el lecho, y concluye que este sistema es potencialmente más eficiente debido a la alta velocidad obtenida a diferencia de los lechos fluidizados ordinarios. Por último, en esta primera parte, estudia lechos fluidizados electromagnéticos incompresibles; este tipo de lechos se tienen cuando las partículas son eléctricamente conductoras y pueden cambiar sus características de flujo por la aplicación de campos electromagnéticos. De la magnetohidrodinámica se sabe que un campo magnético alineado puede inhibir la inestabilidad en un fluido conductor bajo ciertas circunstancias. Por esto, considera a las partículas como un medio de conductividad eléctrica prácticamente infinita y que está sujeto a un campo magnético alineado con la velocidad de fluidización. Incorpora las ecuaciones de Maxwell en la descripción del flujo gas-sólido inicial y encuentra que el sistema sigue siendo inestable.

De todos estos estudios, concluye que la inestabilidad obtenida, puede estar asociada a la formación de burbujas en el lecho. Aunque los lechos fluidizados sean inestables los resultados obtenidos no permiten dar una razón concluyente del por qué aparecen las burbujas en el lecho. Por lo que para poder responder mejor esta pregunta, sugiere que deben incluirse los efectos no lineales de las ecuaciones de movimiento en el estudio de estabilidad.

En la segunda parte de su trabajo, Murray (1965b) hace un estudio al aplicar las ecuaciones de la primera parte, para describir el movimiento de las partículas y el fluido en la presencia de burbujas totalmente desarrolladas. Estudiando el caso de una burbuja aislada en un lecho fluidizado, obtiene una solución más general a la de Davies y Taylor (1950). Considera tres casos con el fin de tomar en cuenta la geometría de la burbuja: circular, bidimensional cuya forma se parece estrechamente a la burbuja actual como desearíamos, utilizando mapas conformacionales, y bidimensional con borde circular y en la parte superior una estela de línea de corriente libre, en tanto que Davies y Taylor, así como Jackson, la consideran circular solamente. En este estudio obtiene soluciones analíticas para estos casos.

Pigford y Baron (1965) hacen un análisis de estabilidad hidrodinámica lineal, partiendo de un modelo hidrodinámico que postulan y encuentran inestabilidad a perturbaciones verticales, debido a los efectos inerciales del gas y de las partículas sólidas, también encuentran que los efectos viscosos tienen un efecto disipativo y tienen una influencia estabilizadora.

Posteriormente, Chappellear (1966) encontró con los resultados de Pigford y Baron que la dirección más importante para el análisis de estabilidad lineal con la propagación de ondas es la ascendente en el tubo y que la tasa de crecimiento de perturbaciones en la dirección axial ascendente, es independiente de la horizontal, lo cual puede extenderse a la tercera coordenada.

Un análisis posterior al estudio de Pigford y Baron (1965) y a la nota de Chappellear (1966) realizado por Anderson y Jackson (1967a), en el que continuando con el mismo modelo propuesto por Pigford y Baron mostraron que:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k = 0$ , para el gas y las partículas sólidas, por lo que las perturbaciones en los campos de velocidad son ortogonales al vector de onda,  $\mathbf{k}$ .

Ese mismo año, Anderson y Jackson (1967b) publicaron un trabajo, donde en una forma racional partiendo de las ecuaciones locales para un fluido newtoniano, obtuvieron teoremas para promediar espacialmente las ecuaciones y obtuvieron un modelo hidrodinámico, que de acuerdo a la comparación que presentan con los trabajos anteriores, resultaba mejor. Con ese modelo, al año siguiente, publican un estudio de estabilidad hidrodinámica lineal (Anderson y Jackson, 1968) considerando en las fuerzas de interacción la fuerza debida a la masa virtual que no consideraban Pigford y Baron y que en esta tesis se demuestra en el Apéndice D que no es aplicable cuando se tiene flujo reptante en la cercanía de las partículas sólidas. En su artículo, Anderson y Jackson analizan diferencias entre la fluidización de pequeñas grageas de vidrio con agua y aire, analizando la influencia de diversos parámetros tales como el coeficiente debido a la masa agregada en la estabilidad de las ecuaciones.

En 1969 Anderson y Jackson, como la tercera parte de los trabajos que habían realizado, publicaron un trabajo acerca de la comparación de la teoría y los experimentos; y ya que en los lechos fluidizados líquido-sólido, las perturbaciones se propagan más lentamente (Jackson, 1963a; 1968), es posible medir la longitud de onda característica, velocidad de propagación, y tasa de amplificación de fluctuaciones espontáneas. Por estas razones, en ese trabajo hacen un estudio experimental sobre las propiedades de la propagación de pequeñas perturbaciones en lechos fluidizados de partículas sólidas (grageas de vidrio) con agua, y se comparan los resultados con las predicciones teóricas disponibles. Obtuvieron los espectros de frecuencia de las medidas experimentales, que se compararon con las predicciones teóricas (Anderson y Jackson, 1968). Concluyendo que los experimentos predicen la inestabilidad obtenida en el modelo teórico, y que los valores de las propiedades de propagación de las perturbaciones son tomadas en cuenta en forma aproximada por la teoría.

En 1971, Drew y Segel para un modelo obtenido formalmente (Drew, 1971), y con fines de compararlo, básicamente con los de Jackson (1963a) y Murray (1965a), hacen un estudio de estabilidad del estado uniforme en un lecho fluidizado, considerando a las fases incompresibles y no haciendo distinción entre los campos de presión de las fases, considerando además, los términos de masa virtual y el arrastre viscoso. Prediciendo nuevamente inestabilidad del estado uniforme ante pequeñas perturbaciones.

En 1975, Garg y Pritchett obtienen un modelo que difiere del de Jackson por ejemplo, en que considera una presión intersticial del gas, cuya contribución aparece en las fuerzas interfaciales, y que se incorpora para considerar los gradientes de porosidad en el lecho fluidizado. Este término lo incluyen junto con el arrastre y la masa agregada, en la interacción fluido-partícula.

Por otra parte, considerando la hipótesis de equilibrio térmico local, obtienen una ecuación de energía para la mezcla, más la ecuación del gas ideal, que junto con las ecuaciones de conservación de la masa y las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, forman el modelo completo. Este modelo es muy complicado; pero lo reducen significativamente al considerar que la densidad de la fase dispersa es mucho mayor a la continua. Consideran además, que el fluido es incompresible y reducen el modelo para un lecho fluidizado uniforme.

Como una consecuencia del modelo, se obtiene que la caída de presión en el lecho se balancea con el peso de los sólidos, que es la condición para que comience el proceso de fluidización, este resultado difiere del obtenido por Jackson. Posteriormente aplican la teoría

de estabilidad hidrodinámica lineal a las ecuaciones del lecho fluidizado uniforme, encontrando que el sistema es inestable.

Para el caso de un fluido incompresible, sin considerar efectos térmicos, obtienen soluciones numéricas para el modelo de un lecho fluidizado uniforme. Los resultados más sobresalientes de las soluciones numéricas son, que al incrementar la viscosidad y disminuir la compresibilidad del ensamble de partículas se obtiene una tasa de crecimiento menor de las perturbaciones; lo que conduce a lechos fluidizados más estables y movimientos menos violentos de las partículas, por lo que según estos resultados, los lechos densos son más estables que los diluidos.

Con la finalidad de poder responder a la pregunta ¿cómo surgen las burbujas en un lecho fluidizado uniforme?, se requiere de una mayor precisión en las medidas experimentales de tal manera de poder relacionar el surgimiento de las burbujas en los experimentos, con la inestabilidad ondulatoria; es decir, para tratar de conectar la inestabilidad predicha por los modelos teóricos con el surgimiento de burbujas en el lecho fluidizado uniforme.

En 1976, El-Kaissy y Homsy hicieron un diseño experimental que obtiene mejores resultados que el propuesto por Anderson y Jackson (1969) que en parte obtuvieron visualmente, con un lecho fluidizado con agua, con el fin de adquirir datos experimentales de alta calidad para poderlos comparar con los modelos teóricos y explorar la conexión, si la hay, entre las ondas y el origen de las burbujas. El sistema que utilizaron cuenta con un dispositivo de adquisición de datos, filtros de bajas frecuencias debidas a oscilaciones que solo introducirían ruido en los espectros y se le implementaron técnicas de análisis, por medio de un analizador de Fourier para el procesamiento de las señales. Los resultados que interesan son medidas estadísticas de: la amplitud, velocidad de propagación y frecuencia de distribución; que se tomaron utilizando la técnica de transmisión de luz. La principal conclusión, es que la disolución de las ondas se sigue por un modo de movimiento sugestivo de formación de una burbuja.

Con fines de poder comparar los resultados obtenidos en los experimentos anteriores (El-Kaissy y Homsy, 1976), Homsy y cols. (1980), proponen un modelo sobre bases de la teoría de mezclas, cierran dicho modelo utilizando el principio de objetividad material. Hacen el estudio clásico de estabilidad hidrodinámica lineal, y para llevar a cabo la comparación entre teoría y experimentos, hacen un análisis de sensibilidad paramétrica de las constantes que surgieron del principio de objetividad material, para ver como cambian las propiedades de propagación con pequeños cambios en estos valores. Como conclusión, encuentran una teoría capaz de describir cuantitativamente y consistentemente la propagación ondulatoria de pequeñas perturbaciones en los lechos fluidizados, y utilizan los datos experimentales que tenían para deducir los valores de las constantes materiales que aparecen en sus relaciones constitutivas.

En 1982, Liu da una nueva interpretación del problema de estabilidad hidrodinámica lineal donde las perturbaciones finitas en un lecho fluidizado evolucionan en términos de jerarquías de ondas y de sus interacciones, de las cuales se desprende un criterio de estabilidad de flujo.

El año siguiente, Liu (1983) desarrolla una teoría para la evolución de perturbaciones planas y de amplitud finita. Lo que ayudará en la comprensión del mecanismo que conduce al equilibrio debido a los efectos no lineales y podrá dar una base racional para otros

estudios del rompimiento en perturbaciones que cruzan la corriente que llevan a burbujas como estructuras. Para hacer esto, genera un modelo en forma similar al de Anderson y Jackson (1967b). Lo novedoso de este trabajo es que aplica un análisis de estabilidad hidrodinámica, pero no lineal. Hace el análisis de estabilidad no lineal (débil), y encuentra una ecuación de jerarquía de ondas no lineal. Esta ecuación tiene una forma equivalente a la discutida por Liu (1982). La corrección no lineal encontrada tiene la tendencia a restaurar la condición de estabilidad en el sentido lineal; es decir, la presente teoría de estabilidad no lineal, indica que los efectos no lineales tienen un efecto estabilizador.

Los estudios anteriores han sido capaces de mostrar que los lechos fluidizados del tipo gas-sólido son en general más inestables que los tipo líquido-sólido, pero que debido a la complejidad de la relación de dispersión resultante, no ha sido revelado el mecanismo que conduce a la inestabilidad y la importancia relativa de muchos otros términos en las ecuaciones de movimiento. Motivados por esto, en 1983, Needham y Merkin, hicieron un estudio en el que mostraron que la presión en la fase sólida, que modelaron como una función decreciente de la fracción de gas según Drew y Segel (1971) tiene una fuerte función estabilizadora en la fluidización uniforme y que el lecho se reestabiliza en un estado periódico cuasi estacionario. Al considerar la evolución de una perturbación inducida en la fracción volumen, también se determinaron los efectos dominantes de muchos de los términos de las ecuaciones gobernantes del lecho fluidizado.

En 1985, Jackson hizo un trabajo sobre la estabilidad hidrodinámica en sistemas del tipo fluido-partícula, reuniendo la mayoría de los elementos discutidos por los otros autores. Estudia el efecto del distribuidor, así como el de las paredes del tubo, y evalúa al utilizar una viscosidad de los sólidos las tasas de erosión en los tubos.

En 1988, Batchelor publicó una nueva teoría acerca de la inestabilidad de la fluidización uniforme; en la cual, genera un modelo mediante un promedio de ensamble considerando a ambas fases incompresibles, e incorporando un término debido a la difusividad de las partículas, con el cual da a las partículas una tendencia estadística a migrar. Además, propone una forma estadística similar a la utilizada en la teoría cinética de los gases, para modelar el producto de fluctuaciones de velocidad. En este estudio, también toma en cuenta la interacción entre las partículas.

Los modelos propuestos en los trabajos anteriores, han considerado al fluido y a las partículas como un medio continuo, en el que el fluido no penetra en las partículas; y las bases sobre las que se han formulado los modelos son deterministas.

Ding y Gidaspow (1990), resaltando la importancia de los promedios estadísticos, proponen un modelo basado en la teoría cinética del flujo granular, tomando como punto de partida la ecuación de Boltzmann. El modelo que obtienen, toma en cuenta razonablemente la viscosidad de los sólidos, los esfuerzos repulsivos entre las partículas y las velocidades críticas de descarga. Además, predice las medidas experimentales de las porosidades promediadas en el tiempo en lechos fluidizados en dos dimensiones. También pronostica oscilaciones en la porosidad que están de acuerdo con los resultados experimentales, mejor que los modelos anteriores. Predice la formación de burbujas y patrones de flujo de sólidos en la fluidización con una velocidad de alimentación uniforme de acuerdo con las mediciones y observaciones.

En 1992, Göz reporta que ocurre una bifurcación de las ondas viajeras cuando el estado base se vuelve inestable.

En 1993, Batchelor postula varios estados durante el proceso de formación de burbujas. El primer estado es la inestabilidad primaria del estado uniforme que lleva al desarrollo de ondas planas. Una inestabilidad secundaria sigue, y lleva al desarrollo de una burbuja.

En 1994, Harris y Crighton consideran la evolución de una perturbación en la fracción volumen de gas en un lecho fluidizado gas-sólido. Utilizando el modelo de Needham y Merkin (1983) mostraron que se propagan ondas débiles no lineales en la fracción volumen de acuerdo a la ecuación de Korteweg-de Vries con términos de perturbación que pueden amplificarse o disiparse, dependiendo del signo del coeficiente, y examinan el caso inestable en el umbral analizando el crecimiento de un solitón en la fracción volumen del tipo KdV, siguiendo su desarrollo en diferentes regímenes. Interpretan las series de pulsos localizados de la fracción con perturbaciones que corresponden a uniformidades en el proceso de fluidización.

Los análisis de estabilidad lineal, han servido para explicar la existencia de ondas que crecen lentamente en lechos fluidizados del tipo líquido-sólido, y también explicar por qué las ondas en lechos fluidizados del tipo gas-sólido crecen más rápidamente; pero no pueden explicar por qué las ondas en los lechos fluidizados con líquidos no se desarrollan en burbujas, o si las ondas más inestables en lechos fluidizados con un gas son debidas a burbujas como precursores. Puede uno percatarse en la descripción histórica realizada hasta aquí, que se han hecho diversos intentos en extender la teoría de estabilidad unidimensional para tomar en cuenta las no linealidades de las ecuaciones de movimiento, Liu (1983); Needham y Merkin (1983); Ding y Gidaspow (1990), por citar algunos, pero que no han logrado mostrar una distinción cualitativa entre el comportamiento predicho en los lechos fluidizados con líquido y gas. Recientemente se han hecho análisis de bifurcación con movimientos unidimensionales (Göz, 1992), pero tampoco han podido mostrar diferencias significativas entre los dos casos.

Experimentalmente, se han observado inestabilidades bidimensionales de un patrón de onda unidimensional en lechos fluidizados con agua (Didwania y Homsey, 1981) que se han investigado teóricamente (Didwania y Homsey, 1981; Needham y Merkin, 1984; Batchelor y Nitsche, 1991; Batchelor, 1993). Y aunque parece que tiene parte en el proceso que lleva a la formación de burbujas, el análisis de estabilidad no es capaz de predecir la diferencia en el comportamiento entre los lechos fluidizados con gas y líquido.

En 1995, Anderson y cols. tratan de aclarar un poco esta situación entre los lechos fluidizados con líquido y gas. En 1998, Göz y Sundaresan encuentran un factor que mide la intensidad de la inestabilidad, y que es una escala apropiada para la tasa de crecimiento de una inestabilidad primaria en lechos uniformes débilmente inestables. Lo cual, da una posible explicación de porque estas tasas de crecimiento son tan diferentes para lechos fluidizados con aire y agua típicos. También encuentran que de la comparación entre las tasas de crecimiento de la inestabilidad primaria y secundaria, puede hacerse una distinción entre los lechos fluidizados con agua de los de aire.

Más recientemente, Johri y Glasser (2002) hacen un análisis de estabilidad lineal del modelo de Anderson y Jackson (1967b), considerando al fluido compresible en un lecho fluidizado uniforme. Simplifican el modelo considerablemente al proponer que  $(\rho_g/\rho_s) \ll 1$ , y encuentran que el estado uniforme pierde estabilidad formando ondas planas. Concluyen que su procedimiento sugiere fuertemente que el modelo de flujo compresible es capaz de

capturar exitosamente el proceso de formación de burbujas en dos dimensiones en un lecho fluidizado, aunque hace falta un análisis más riguroso de las soluciones en dos dimensiones para establecer los alcances y limitaciones de este modelo. Sus resultados muestran que la analogía entre un flujo gas-sólido y un flujo compresible puede utilizarse para mejorar la comprensión de un flujo de gas y partículas en un lecho fluidizado.

De esta revisión uno puede darse cuenta de los esfuerzos realizados desde hace mucho tiempo por muchos investigadores en tratar de distinguir entre los lechos fluidizados con líquido de los fluidizados con gas; así como tratar de comprender la formación de burbujas en lechos fluidizados del tipo gas-sólido.

Hasta 1975 había pocos trabajos en el régimen de fluidización turbulenta, cuando la mayoría de los investigadores se concentraron en el régimen burbujeante. De 1975 a 1985, había alrededor de diez artículos publicados sobre la fluidización turbulenta, indicando como creció el interés en este régimen. Desde 1985, las investigaciones acerca de la fluidización turbulenta han ido creciendo con un promedio de cuatro artículos por año (Bi y cols., 2000).

La aplicación industrial de los lechos fluidizados turbulentos incluyen procesos químicos y metalúrgicos; tales como el proceso de descomposición catalítica en lecho fluido (FCC) para la producción de gasolina, reacciones catalíticas de oxidación para producir: acrilonitrilo, anhídrido maleico, anhídrido ftálico, dicloro etileno, etc.

Desde entonces, se han hecho muchos progresos significativos en mejorar la comprensión de la fluidización turbulenta y de sus aplicaciones.

## **1.8 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

El proceso de FCC, es un proceso muy importante debido a su extendida aplicación en la industria petroquímica en todo el mundo. Este proceso, se lleva a cabo en el régimen de fluidización rápida, en el que intervienen tres fases (catalizador, vapor y gasóleo), existe una diferencia importante de temperatura entre las fases, presenta agregados de partículas, la evaporación de gasóleo no es instantánea, una de las fases es compresible (vapor) y se lleva a cabo una reacción catalítica heterogénea. Por todo esto, el proceso de FCC es muy complejo. Se han hecho trabajos que consideran algún aspecto en particular, estudiándolo por separado; por ejemplo, la evaporación del gasóleo (Valencia, 2001), la formación y el rompimiento de cúmulos (Gallardo, 2003), por citar algunos.

Como pudimos ver en la sección anterior, existen muchos estudios de estabilidad hidrodinámica de modelos en el régimen de fluidización uniforme; y aunque el régimen de fluidización rápida es muy importante, ya que muchos procesos industriales se llevan en este régimen (por ejemplo en la industria para la producción de gasolinas mediante el proceso de FCC), hasta donde sabemos no se ha hecho un estudio teórico de esta naturaleza en este régimen, de tal forma que pueda vincularse con resultados experimentales que se tengan con la finalidad de establecer una comparación. Un estudio así, ayudaría mucho en la comprensión que se tiene de los fenómenos que ocurren en el proceso de FCC.

Es por eso que en este trabajo, haremos un estudio teórico del efecto de la compresibilidad del vapor en la propagación de ondas y estabilidad en el lecho al provocar una pequeña perturbación, utilizando la metodología que se sigue en los estudios descritos

en la sección anterior. Los objetivos que se pretende alcanzar se presentan inmediatamente después de este Capítulo.

El sistema, tubo elevador de una unidad de FCC, en este primer acercamiento se aproxima por un lecho fluidizado isotérmico, en el régimen de fluidización rápida, de un flujo gas-sólido cuyas condiciones sean cercanas a las del proceso de FCC, antes de las boquillas de inyección de gasóleo pero con un flujo de vapor suficiente para generar fluidización rápida. El gas (vapor) para la fluidización se consideró compresible.

El trabajo se organizó como sigue: en el Capítulo II, se obtiene un modelo hidrodinámico compresible (bajo un cierto número de hipótesis que a su vez dan los alcances y limitaciones del mismo) al promediar las ecuaciones locales de conservación de la masa y del momento lineal. Posteriormente, en el Capítulo III, se hace un estudio de estabilidad hidrodinámica lineal del modelo, al linealizarlo alrededor de un estado estacionario, se hace también un estudio de la dinámica ondulatoria asociada. Finalmente en el Capítulo IV, se dan las conclusiones de este trabajo, así como de las perspectivas que deja, para trabajos posteriores en esta dirección.

## **OBJETIVOS**

Con base en lo descrito con anterioridad en la definición del problema, se formula el objetivo general y los objetivos particulares siguientes.

### **Objetivo general**

Describir el comportamiento de un lecho fluidizado en el régimen de fluidización rápida, que represente lo que ocurriría en el tubo elevador de una unidad de FCC, al no tener inyección de gasóleo, haciendo énfasis en el efecto de la compresibilidad del vapor de arrastre y hacer un estudio de la dinámica ondulatoria, mediante un análisis de estabilidad hidrodinámica en el lecho y de la solución analítica para diversos casos.

### **Objetivos particulares**

1. Obtener un conjunto de ecuaciones promediadas que gobiernen al sistema vapor-catalizador, para las condiciones de operación usuales en esta región mediante el promedio espacio-temporal de las ecuaciones hidrodinámicas locales para cada una de las fases.
2. Obtener una ecuación de onda de orden superior para las perturbaciones de cualquiera de las variables del sistema.
3. Obtener condiciones de estabilidad.
4. Obtener la solución de la ecuación de onda con y sin efectos de pared.

En el siguiente Capítulo se obtienen las ecuaciones globales al promediar espacio-temporalmente las ecuaciones hidrodinámicas locales instantáneas.

## ***CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO***

## **2. ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO**

### **2.1 Introducción**

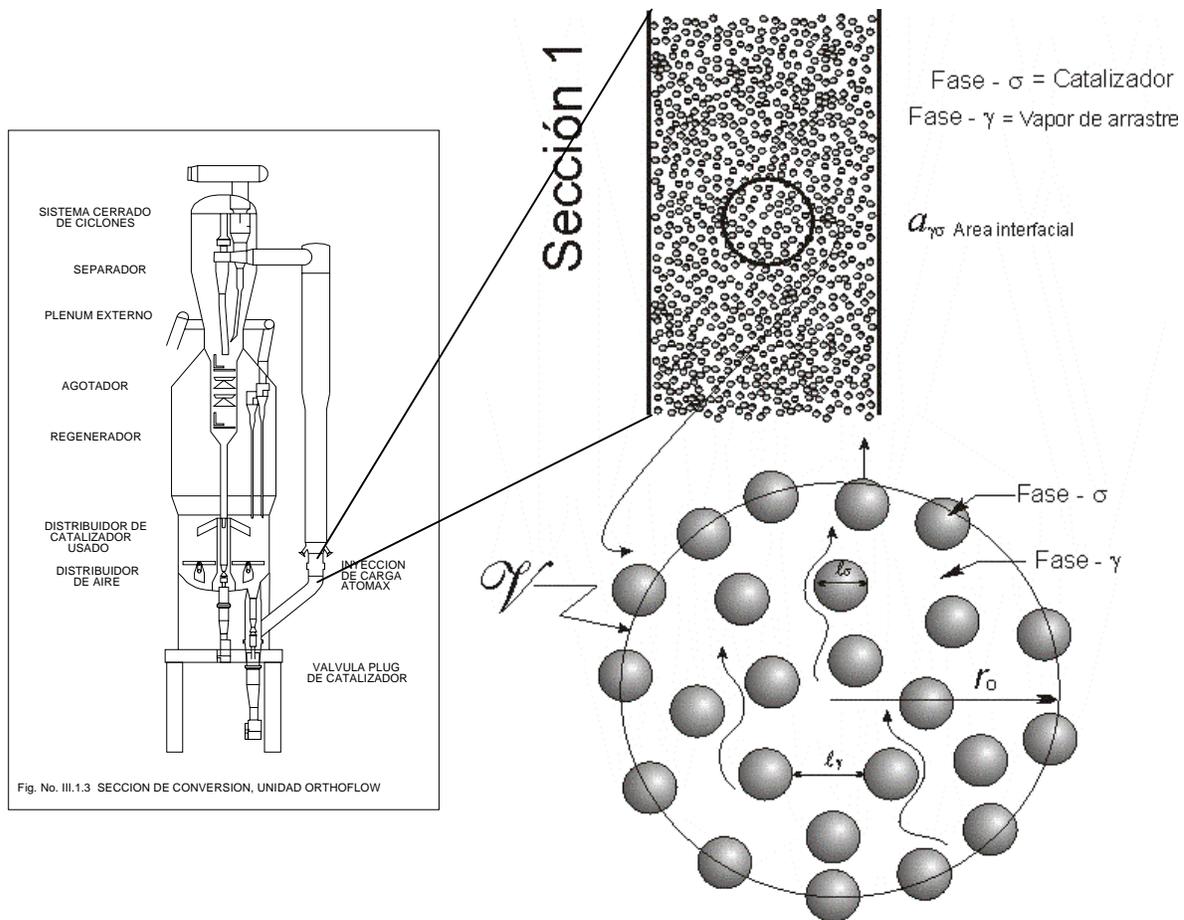
En este Capítulo se obtiene un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales parciales en una dimensión, que describe el comportamiento de un flujo de partículas en un lecho fluidizado en el régimen de fluidización rápida. La fase sólida ( $\sigma$ ), está formada por un conjunto de partículas de catalizador y la fase gaseosa ( $\gamma$ ), está formada por el vapor que se inyecta en varios puntos a la entrada del tubo elevador y arrastra al catalizador. Para la formulación del modelo de dos fluidos, constituido por las ecuaciones de balance locales instantáneas de conservación de la masa y de cantidad de movimiento para cada una de las dos fases, se obtienen las ecuaciones promedio en el espacio-tiempo, utilizando un operador promedio definido en el espacio tetra-dimensional. Se analiza la cerradura de los términos fuente en las ecuaciones así promediadas, mediante un análisis en la micro estructura de los flujos, empleando para tal efecto un modelo de celda, e identificando mediante los números adimensionales comunes en estos sistemas, la teoría hidrodinámica que puede utilizarse en dicho análisis. Se considera la ecuación de estado de gas ideal con el fin de estudiar los efectos de compresibilidad del vapor en el modelo. Posteriormente, en la sección 2.10-3, se hace la asociación de las variables de operación con las variables promediadas. Este punto, es muy importante pues establece la conexión entre las variables que se miden en planta y las del modelo promediado. Finalmente se obtiene el modelo incompresible correspondiente como un caso particular.

### **2.2 HIPÓTESIS Y LIMITACIONES DEL MODELO**

- El sistema está formado por partículas de polvo de un catalizador, las cuales se consideran como sólidos rígidos y esféricos y un vapor que se considera como un fluido newtoniano compresible.
- Los esfuerzos en las partículas sólidas son una función tensorial continua; además, estos esfuerzos son constantes en cada partícula.
- El campo de esfuerzos debidos a la presión en las partículas sólidas se puede sustituir por una continuación del campo de presiones en el gas. Esta hipótesis, está de acuerdo con el enunciado matemático de los teoremas de Arquímedes.
- No hay transferencia de masa en la interface.
- El sistema es isotérmico.
- El vapor se comporta como un gas ideal.
- La dispersión de partículas es muy diluida ( $\varepsilon_s \leq 0.3$ ; siendo  $\varepsilon_s$ , la fracción volumen de la fase sólida).
- No hay fuerzas de interacción entre las partículas de catalizador.

- Régimen de fluidización rápida.
- Las partículas son perfectamente esféricas, y de un tamaño que corresponde al diámetro medio de las partículas de catalizador.
- Se consideran flujos tridimensionales en el desarrollo del modelo y se reduce al caso unidimensional en la etapa final, por medio de la proyección de las ecuaciones vectoriales en la dirección axial del tubo elevador, considerada hacia arriba en el sistema coordenado de referencia utilizado para describir el modelo.
- El tubo es de sección transversal constante.
- No se considera la inyección de gasóleo, por lo tanto el sistema no presenta reacciones químicas, ni términos fuente en la ecuación de conservación de masa (Valencia, 2001).

El punto de partida para el desarrollo del modelo hidrodinámico, será el de las ecuaciones locales instantáneas de continuidad y de cantidad de movimiento para cada una de las fases. El sistema a estudiar, se muestra en la figura 2.1.



**Figura 2.1.** Región espacial  $\mathcal{V}$  para desarrollar el modelo de dos fluidos, tomada en la sección 1 del tubo elevador, correspondiente a la zona que se encuentra antes de las boquillas de inyección de gasóleo de una unidad de FCC comercial [Valencia (2001)].

### 2.3 ECUACIONES LOCALES INSTANTÁNEAS PARA CADA UNA DE LAS FASES

La ecuación de transporte local instantánea general, presenta la siguiente estructura (Truesdell y Toupin, 1960; Soria y de Lasas, 1991; Drew y Lahey, 1993):

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) + \nabla' \cdot \Phi_k - \rho_k \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}'_k \in \mathcal{V} \quad (2.3-1)$$

donde:

- $t'$ , es la escala de tiempo de la descripción local instantánea,
- $\mathbf{x}'_k$ , es un vector de posición característico de la escala de descripción local instantánea, dirigido desde el sistema coordenado de referencia a un punto de la fase  $k$  –ésima en la región  $\mathcal{V}$ , definida en la figura 2.1,
- $\Psi_k$ , densidad volumétrica de una cantidad termodinámica de interés,
- $\rho_k$ , densidad volumétrica de masa,
- $\mathcal{V}_k$ , región espacial de la fase  $k$  –ésima,
- $\Phi_k$ , flux de  $\Psi_k$  dentro de  $\mathcal{V}_k$ ,
- $\mathbf{f}$ , suministro externo de  $\Psi_k$  por unidad de masa, y
- $\mathbf{v}_k$ , velocidad de flujo de la fase  $k$  dentro de  $\mathcal{V}$ .

Para las ecuaciones de balance de conservación de masa y cantidad de movimiento, (2.3-1) tiene las variables indicadas en la Tabla 2.1.

**Tabla 2.1.** Variables termodinámicas utilizadas en las ecuaciones de balance de conservación que corresponden a las ecuaciones locales instantáneas.

<b>GENERAL</b>	$\Psi_k$	$\Phi_k$	$\mathbf{f}$
Masa	$\rho_k$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
Movimiento	$\rho_k \mathbf{v}_k$	$\Pi_k$	$\mathbf{g}$

El siguiente conjunto de ecuaciones, se ve como un sistema global, de tal manera que las condiciones de frontera que se plantean para la ecuación de continuidad, pueden utilizarse también en la ecuación de movimiento.

Ecuación de continuidad para la fase  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma) = 0, \quad \mathbf{x}'_\gamma \in \mathcal{V} \quad (2.3-2)$$

- |       |   |                                 |
|-------|---|---------------------------------|
| C.I.1 | $\rho_\gamma = \mathfrak{R}(\mathbf{x}')$       | En $t' = 0$                     |
| C.F.1 | $\mathbf{v}_\gamma = \mathbf{w}_{\gamma\sigma}$ | En $\mathcal{S}_{\gamma\sigma}$ |
| C.F.2 | $\rho_\gamma = \mathfrak{S}(\mathbf{x}', t')$   | En $\mathcal{S}_{\gamma e}$     |

en donde  $\mathcal{S}_{\gamma\sigma}$  define la región interfacial entre las partículas de catalizador y el vapor; y  $\mathcal{S}_{\gamma e}$  representa las entradas y salidas de la fase  $\gamma$  en la frontera de la región espacial  $\mathcal{V}$  ilustrada en la figura 2.1.

Ecuación de movimiento para la fase  $\gamma$ :

$$\frac{\partial(\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma)}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma \mathbf{v}_\gamma) = -\nabla' \cdot \mathbf{\Pi}_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g}, \quad \mathbf{x}'_\gamma \in \mathcal{V} \quad (2.3-3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{C.I.2} & \mathbf{v}_\gamma = \ell(\mathbf{x}') \quad \text{En } t' = 0 \\ \text{C.F.3} & \mathbf{v}_\gamma = \wp(\mathbf{x}', t') \quad \text{En } \mathcal{S}_{\gamma e} \end{array}$$

donde (Bird y cols., 2001):

$\mathbf{\Pi}_\gamma = p_\gamma \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_\gamma$ , es el tensor de presiones de la fase gas,

$\mathbf{I}$ , es el tensor unidad o tensor métrico,

$$\boldsymbol{\tau}_\gamma = -\mu_\gamma \mathbf{D}_\gamma + \frac{1}{3} \mu_\gamma (\mathbf{D}_\gamma : \mathbf{I}) \mathbf{I} = -\mu_\gamma \mathbf{D}_\gamma + \frac{2}{3} \mu_\gamma (\nabla' \cdot \mathbf{v}_\gamma) \mathbf{I}, \text{ y}$$

$\mathbf{D}_\gamma = \left[ \nabla' \cdot \mathbf{v}_\gamma + (\nabla' \cdot \mathbf{v}_\gamma)^T \right]$ , es el tensor de rapidez de deformación.

Nótese que en la parte compresible de la relación de comportamiento de los esfuerzos viscosos, no se ha considerado el segundo coeficiente de viscosidad,  $\lambda_\gamma$ , debido a que no se encontró ningún valor en la literatura, pues hay pocos trabajos que reportan resultados experimentales (Karim y Rosenhead, 1952), pero que no corresponden a las condiciones de operación que nos interesan (vapor a 3 atm y 930 K); y aunque, los trabajos teóricos son más abundantes, la desventaja que presentan las expresiones que proponen, es que son muy complicadas para su evaluación (Hirschfelder y cols., 1954; Maximov y cols., 1998; Nikuni y Griffin, 2001).

Por otro lado, Landau y Lifshitz (1959) sostienen que este coeficiente es usualmente del mismo orden que el primer coeficiente de viscosidad o viscosidad dinámica,  $\mu_\gamma$ ; sin embargo, hay casos en los que es más importante; por ejemplo, en la propagación del sonido y flujos supersónicos.

El valor de  $\lambda_\gamma$ , depende en forma proporcional a la relación entre la tasa de compresión o expansión y el tiempo de relajación de estos procesos. Por lo que, podemos relajar un poco el no tomarlo en cuenta, si suponemos que la expansión del vapor en los puntos de inyección, es instantánea; de tal modo, que los tiempos de relajación del proceso de expansión son cortos.

Los tiempos de relajación, están definidos como (Hirschfelder y cols., 1954), el tiempo característico requerido para la transferencia de energía traslacional a los grados de libertad internos.

En resumen, aunque este coeficiente pudiera llegar a ser importante en este proceso, en esta primera aproximación no se considerará.

Ecuación de continuidad para la fase  $\sigma$  :

$$\frac{\partial \rho_\sigma}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho_\sigma \mathbf{v}_\sigma) = 0, \quad \mathbf{x}'_\sigma \in \mathcal{V} \quad (2.3-4)$$

$$\text{C.I.3} \quad \rho_\sigma = \mathfrak{K}(\mathbf{x}') \quad \text{En } t' = 0$$

$$\text{C.F.4} \quad \mathbf{v}_\sigma = \mathbf{w}_{\sigma\gamma} \quad \text{En } \mathcal{S}_{\gamma\sigma}$$

$$\text{C.F.5} \quad \rho_\sigma = \lambda(\mathbf{x}', t') \quad \text{En } \mathcal{S}_{\sigma e}$$

donde  $\mathcal{S}_{\sigma e}$  representa las entradas y salidas de la fase  $\sigma$  en la frontera de la región espacial  $\mathcal{V}$  ilustrada en la figura 2.1.

Ecuación de movimiento para la fase  $\sigma$  :

$$\frac{\partial (\rho_\sigma \mathbf{v}_\sigma)}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho_\sigma \mathbf{v}_\sigma \mathbf{v}_\sigma) = -\nabla' \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma + \rho_\sigma \mathbf{g}, \quad \mathbf{x}'_\sigma \in \mathcal{V} \quad (2.3-5)$$

$$\text{C.I.4} \quad \mathbf{v}_\sigma = \phi(\mathbf{x}') \quad \text{En } t' = 0$$

$$\text{C.F.6} \quad \mathbf{v}_\sigma = \varphi(\mathbf{x}', t') \quad \text{En } \mathcal{S}_{\sigma e}$$

donde:

$\mathbf{\Pi}_\sigma = p_\sigma \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_{\sigma 0i}$ , es el tensor de presiones del sólido,

$\boldsymbol{\tau}_{\sigma 0i}$ , es el tensor de esfuerzos de la fase sólida, cuyo valor es constante en cada una de las  $i$  partículas.

## 2.4 PROMEDIADO UTILIZANDO FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

### Función indicadora de fase

El dominio de definición de las ecuaciones locales instantáneas puede extenderse a toda la región espacial  $\mathcal{V}$  utilizando una función de distribución apropiada (conocida también como función generalizada)  $X_k(\mathbf{x}', t')$  definida en cualquier lugar y con su soporte (por ejemplo, el conjunto de puntos para los cuales  $X_k(\mathbf{x}', t')$  es diferente de cero) coincidente con  $\mathcal{V}_k$  (Gel'fand y Shilov, 1964; Drew, 1971; Soria y de Lasa, 1991).

Debido a que el volumen de la fase  $k$  no puede ser ocupado por las otras fases al mismo tiempo, se introduce el concepto de función indicadora de fase  $X_k(\mathbf{x}', t')$ , la cual es una función generalizada, definida como (Drew, 1971; 1983; Soria y de Lasa, 1991; Drew y Lahey, 1993):

$$X_k(\mathbf{x}', t') = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x}' \text{ esta en la fase } k \text{ en el tiempo } t' \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (2.4-1)$$

En el espacio-tiempo,  $X_k(\mathbf{x}', t')$  es una función definida en todos lados. Por lo tanto, para cada punto, tenemos que:

$$\sum_{k=\gamma, \sigma} X_k(\mathbf{x}', t') \equiv 1. \quad (2.4-2)$$

La aplicación del método de promediado, requiere de satisfacer ciertas condiciones importantes, entre las más relevantes tenemos, como señalan Soria y de Lasa (1991).

- a) Una condición de escala; que nos indica que el volumen promediante  $V$ , definido por la región  $\mathcal{V}$  debe seleccionarse tal que (Whitaker, 1969; 1999; Soria y de Lasa, 1991):

$$\ell_\sigma \ll r_0 \ll L_s \quad (2.4-3)$$

donde,

$\ell_\sigma$ , es una longitud característica de las fases dispersas, y

$L_s$ , es una longitud característica de la estructura de flujo.

- b) En un punto fijo  $\mathbf{x}'$  representado en  $\mathcal{V}(\mathbf{x}')$ , debe estar alguna de las siguientes regiones,

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}') : \{ \mathcal{V}_\gamma, \mathcal{V}_\sigma, \mathcal{S}_{\gamma\sigma}, \mathcal{S}_{\gamma W}, \mathcal{S}_{\sigma W} \}, \quad (2.4-4)$$

puesto que consideraremos los efectos debidos a la pared del tubo elevador, en (2.4-4), hemos incluido dos regiones,  $\mathcal{S}_{kW}$ , que define el área interfacial que forma la  $k$ -ésima fase con la pared del tubo,  $\Sigma_{kW}$ .

Las ecuaciones de balance locales instantáneas (2.3-1) se pueden representar mediante la siguiente estructura funcional:

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}, \quad \text{para} \quad \mathbf{x}'_k \in \mathcal{V} \quad (2.4-5)$$

donde

$\mathbf{V}$ , es un vector que representa las propiedades termodinámicas en  $\mathcal{V}$ ,

$\mathcal{L}$ , es un operador general local instantáneo, que describe el comportamiento dinámico del fluido en la región  $\mathcal{V}$ .

La  $X_k(\mathbf{x}', t')$  permite extender el dominio de definición de (2.4-5) a todo  $\mathcal{V}(\mathbf{x}')$ . Aplicando esta función en el sentido de función generalizada tenemos,

$$\langle X_k \mathcal{L}(\mathbf{V}) \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.4-6)$$

donde  $\langle \rangle$  es un operador promedio integral en una región de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . Ya que  $\mathcal{L}$  involucra tanto derivadas temporales como espaciales, se considera un procedimiento general para poder intercambiar dichas derivadas con el operador promedio. Este procedimiento utiliza

sistemáticamente el concepto y propiedades de las derivadas distribucionales (Soria y de Lasa, 1991).

Las ecuaciones de transporte promediadas en una región  $\mathcal{V}$  pueden obtenerse en la forma general:

$$\mathcal{L} \langle X_k \mathbf{V} \rangle - \langle \mathbf{V} \mathcal{L} (X_k) \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.4-7)$$

en donde, el primer término representa el comportamiento dinámico promedio dentro de  $\mathcal{V}$ . El segundo es el flux neto promedio que proviene de  $\mathcal{V}$  hacia la superficie interfacial. Esta ecuación es una representación compacta de la simbólica, (2.8-10), que se obtendrá al aplicar este procedimiento de promediado.

En el último término de (2.4-7),  $\mathcal{L} (X_k)$  es una función de distribución tal que (Drew, 1983; Soria y de Lasa, 1991),  $\mathbf{V} \mathcal{L} (X_k) = \mathcal{L} (X_k \mathbf{V}) - X_k \mathcal{L} (\mathbf{V})$ .

#### PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $X_k(\mathbf{x}; t')$

##### Derivadas distribucionales

La función indicadora de fase, que es considerada una función de distribución, presenta las siguientes propiedades importantes (Drew, 1983; Soria y de Lasa, 1991; Drew y Lahey, 1993):

$$\frac{\partial X_k}{\partial t'} = \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{k\ell} \delta_{k\ell} \quad (2.4-8)$$

$$\nabla' X_k = -\mathbf{n}_k \delta_{k\ell} \quad (2.4-9)$$

donde:

$\mathbf{w}_{k\ell}$ , representa la velocidad de la interface  $k\ell$ ,

$\mathbf{n}_k$ , representa un vector normal unitario que apunta hacia fuera de la fase  $k$ ,

$\delta_{k\ell}$ , representa la distribución delta de Dirac, asociada a la interface  $k\ell$ , en el contexto de las funciones generalizadas (Gel'fand y Shilov, 1964; Zemanian, 1965; Estrada y Kanwal, 1980).

Si tomamos el producto escalar de (2.4-9) con  $\mathbf{w}_{k\ell}$  y sumamos con (2.4-8), obtenemos el siguiente teorema (Drew, 1983; Soria y de Lasa, 1991; Drew y Lahey, 1993):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial t'} + \mathbf{w}_{k\ell} \cdot \nabla' X_k &= 0 \\ &= \frac{D_{k\ell} X_k}{Dt'} \end{aligned} \quad (2.4-10)$$

Esta ecuación, que representa la derivada material de  $X_k$  siguiendo a la interface, tiene una explicación física razonable. Si nos encontramos en un punto fuera de la interface, entonces  $X_k = 1$  ó  $X_k = 0$ . En cualquier caso, las derivadas parciales son cero, y entonces (2.4-10) es cero. Si consideramos un punto en la interface, y nos movemos con ella, observaremos la función  $X_k$  como un salto constante, y entonces, su derivada material es cero.

Esta ecuación es conocida como la ecuación topológica para la función indicadora de fase.

A continuación, presentaremos unas relaciones importantes con la función indicadora de fase, donde ésta se introduce a los operadores derivada temporal y divergencia:

$$X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (X_k \Psi_k) - \frac{\partial X_k}{\partial t} \Psi_k, \quad (2.4-11)$$

$$X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) = \nabla \cdot (X_k \mathbf{v}_k \Psi_k) - \nabla \cdot X_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k. \quad (2.4-12)$$

Sustituyendo en estas dos ecuaciones las relaciones (2.4-8) y (2.4-9):

$$X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (X_k \Psi_k) - \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{kl} \delta_{kl} \Psi_k, \quad (2.4-13)$$

$$X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) = \nabla \cdot (X_k \mathbf{v}_k \Psi_k) + \delta_{kl} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k. \quad (2.4-14)$$

Estas dos ecuaciones serán de gran utilidad en el desarrollo de teoremas para el promediado espacio-temporal.

## 2. 5 OPERADORES PROMEDIO EN EL ESPACIO-TIEMPO

En esta sección se presentan las definiciones de los operadores promedio que se utilizarán en el trabajo; así como también, se obtienen algunos resultados importantes que serán de utilidad al promediar las ecuaciones de transporte locales instantáneas representadas en (2.3-1).

El operador promedio espacio-temporal se define aquí como sigue:

$$\langle \bullet_k \rangle (\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \bullet_k (\mathbf{x}', t') dt' dV, \quad (2.5-1)$$

en el cual, la región espacial donde se efectúa la integración, está referida a su centroide  $\mathbf{x}$ ; y en forma equivalente, la región temporal en la cual se promedia, está referida al punto medio del intervalo de tiempo  $t$ . Esta definición tiene la ventaja de que las dos regiones de integración son independientes, lo cual nos permite intercambiar el orden de integración sin ningún problema (Teorema de Fubini).

El promedio espacio-temporal de la función indicadora de fase (2.4-1), viene dado por:

$$\langle X_k \rangle = \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k dt dV \quad (2.5-2)$$

$$\langle X_k \rangle = \frac{V_k}{V} \quad (2.5-3)$$

o bien,

$$\langle X_k \rangle = \varepsilon_k . \quad (2.5-4)$$

Por otro lado, el promedio de (2.4-2), nos conduce al siguiente resultado importante:

$$\sum_{k=\gamma,\sigma} \langle X_k \rangle = \sum_{k=\gamma,\sigma} \varepsilon_k \equiv 1. \quad (2.5-5)$$

El promedio intrínseco de fase, se define como:

$$\langle \bullet_k \rangle^k (\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{V_k T} \iiint_{\mathcal{V}_k(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k (\mathbf{x}', t') \bullet_k (\mathbf{x}', t') dt dV . \quad (2.5-6)$$

El promedio de fase se define como:

$$\langle X_k \bullet_k \rangle (\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k \bullet_k (\mathbf{x}', t') dt dV , \quad (2.5-7)$$

sustituyendo la integral por medio de (2.5-6) y considerando (2.5-3) tenemos una relación entre el promedio de fase y el promedio intrínseco de fase,

$$\langle X_k \bullet_k \rangle = \varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k \quad (2.5-8)$$

donde:

$\varepsilon_k = \frac{V_k}{V}$ , representa la fracción volumen de la fase  $k$ ,

$\bullet_k$ , es cualquier propiedad termodinámica con carácter tensorial en general,

$k$ , indica la fase  $k : \{\gamma, \sigma\}$ .

## PROMEDIO PONDERADO EN LA MASA DEL CAMPO DE VELOCIDAD

Las variables utilizadas en los modelos promediados se definen en términos de promedios pesados. Las variables principales se pesan con la función indicadora de fase

$X_k$ , o promedios pesados en la masa, pesados por  $X_k \rho_k$  (entre éstas se encuentran la velocidad, la energía interna y la densidad de entropía). Otras variables son pesadas con la variable interface  $\nabla \cdot X_k$  (Drew y Lahey, 1993).

Como no estamos considerando efectos térmicos, el promedio ponderado en la masa, se reduce al campo de velocidad solamente.

Cuando se promedian las ecuaciones locales de continuidad y cantidad de movimiento, utilizando el promedio intrínseco de fase definido en (2.5-6); por ejemplo, la ecuación de continuidad para la fase compresible presenta un término fuente; teniéndose entonces al promediar la ecuación de conservación de masa, ahora una ecuación de balance de masa.

Es preferible mantener una ecuación de conservación, por lo que es conveniente reconsiderar el promedio del campo de velocidad. Para lo cual, remplazaremos el procedimiento convencional de promedio (2.5-6) para la variable velocidad por otro denominado, promedio ponderado en la masa, el cual resulta más adecuado al tratar con flujos compresibles (Cebeci y Smith, 1974).

El promedio ponderado en la masa, elimina el término  $\langle \tilde{\rho}_\gamma \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma$  en la ecuación de continuidad y otros términos en la ecuación de transporte de momento lineal, tales como  $\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \langle \tilde{\rho}_\gamma \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma$  y  $\langle \tilde{\rho}_\gamma \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma$ . Definimos una velocidad media ponderada en la masa como Cebeci y Smith (1974):

$$\{\mathbf{v}_k\}^k \equiv \frac{\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k}{\langle \rho_k \rangle^k}. \quad (2.5-9)$$

Es importante resaltar aquí, que para un fluido incompresible, el promedio de la velocidad ponderado en la masa (2.5-9), se reduce como caso particular al promedio intrínseco de fase de la velocidad,

$$\{\mathbf{v}_k\}^k = \langle \mathbf{v}_k \rangle^k. \quad (2.5-10)$$

## 2.6 DESCOMPOSICIÓN ESPACIO-TEMPORAL

Llamaremos descomposición espacio-temporal a la representación de una variable  $\bullet_k$  como la suma de un valor medio  $\langle \bullet_k \rangle^k$  y una fluctuación alrededor de ese valor  $\tilde{\bullet}_k$ :

$$\bullet_k = \langle \bullet_k \rangle^k + \tilde{\bullet}_k. \quad (2.6-1)$$

Con la condición de que todas las funciones promediadas en el espacio-tiempo varíen suavemente en él, siempre que, el promedio del promedio espacio-temporal sea igual al promedio, es decir:

$$\langle \langle \bullet_k \rangle^k \rangle \equiv \langle \bullet_k \rangle^k, \quad (2.6-2)$$

entonces, debe cumplirse que,

$$\langle \tilde{\bullet}_k \rangle^k \equiv \mathbf{0}. \quad (2.6-3)$$

Esta descomposición se propone, en forma similar a la descomposición espacial (Gray, 1975) y a la utilizada en el análisis del flujo turbulento (Bird y cols., 2001), pero con distinto significado, puesto que la descomposición espacial es un promedio en una región tridimensional a tiempo fijo, mientras que el segundo es un promedio temporal en un punto fijo, en tanto que en la descomposición espacio-temporal cambian las cuatro variables.

#### DESCOMPOSICIÓN PARA EL PROMEDIO PONDERADO EN LA MASA DEL CAMPO DE VELOCIDAD

La velocidad ponderada en la masa (2.5-9) se descompone, de acuerdo a Cebeci y Smith (1974), como

$$\mathbf{v}_k = \{ \mathbf{v}_k \}^k + \mathbf{v}_k', \quad (2.6-4)$$

donde  $\mathbf{v}_k'$  es la desviación alrededor del promedio de la velocidad ponderada en la masa.

Con la condición de que el promedio del promedio ponderado en la masa sea igual al promedio, es decir:

$$\langle \{ \mathbf{v}_k \}^k \rangle \equiv \langle \mathbf{v}_k \rangle^k, \quad (2.6-5)$$

entonces, debe cumplirse que,

$$\langle \mathbf{v}_k' \rangle^k \equiv \mathbf{0} \quad (2.6-6)$$

lo cual es equivalente a lo que se expresó en (2.6-2) y (2.6-3) para la descomposición espacio-temporal.

De (2.5-9) tenemos que:

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k, \quad (2.6-7)$$

del mismo modo, tenemos para el término de aceleración convectiva en la ecuación de movimiento, al utilizar (2.6-4),

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \}^k = \langle \rho_k \rangle^k \left\{ \left( \{ \mathbf{v}_k \}^k + \mathbf{v}_k' \right) \left( \{ \mathbf{v}_k \}^k + \mathbf{v}_k' \right) \right\}^k \quad (2.6-8)$$

efectuando los productos en (2.6-8),

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \left\{ \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k + \{ \mathbf{v}_k \}^k \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k \{ \mathbf{v}_k \}^k + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \right\}^k \quad (2.6-9)$$

desarrollando el promedio de cada uno de los términos, y utilizando (2.6-5) y (2.6-6), obtenemos finalmente:

$$\langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k = \langle \rho_k \rangle^k \left( \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k + \{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \}^k \right). \quad (2.6-10)$$

Esta expresión será de suma utilidad en la simplificación de las ecuaciones de movimiento de campo promedio.

## 2.7 TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA EL DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO

En el Apéndice A, se desarrollan los siguientes teoremas esenciales para promediar las ecuaciones en el espacio-tiempo.

Teorema generalizado de transporte,

$$\left\langle X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \Psi_k \rangle - \langle \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{k\ell} \delta_{k\ell} \Psi_k \rangle. \quad (2.7-1)$$

Teorema del promedio volumétrico,

$$\langle X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \rangle = \nabla \cdot \langle X_k \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle + \langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle. \quad (2.7-2)$$

El primer teorema, es equivalente al teorema generalizado de transporte (Gray, 1975; Whitaker, 1981; Slattery, 1999), y el segundo, representa una versión tridimensional de la regla de Leibniz para intercambiar diferenciación e integración. Este teorema, que se le conoce comúnmente como teorema del promedio volumétrico, fue derivado en forma independiente por Marle (1967) en un estudio acerca del flujo monofásico en un medio poroso, por Anderson y Jackson (1967) en el estudio de lechos fluidizados, por Slattery (1967) en el estudio de un flujo bifásico en un medio poroso, y por Whitaker (1967) en un estudio sobre la dispersión en medios porosos.

Desde 1967, se han presentado otras derivaciones por Whitaker (1969); Drew (1971); Bachmat (1972); Gray y Lee (1977); Whitaker (1985); Howes y Whitaker (1985); Soria y de Lasa (1991); Gray y cols. (1993); y Quintard y Whitaker (1994).

Estos dos teoremas, son esenciales para la obtención de las ecuaciones promediadas (Drew, 1983; Soria y de Lasa, 1991; Drew y Lahey, 1993).

Para simplificar el desarrollo del promediado de las ecuaciones locales instantáneas, obtendremos un tercer teorema, que aquí denominamos combinado, al sumar los dos anteriores para tener:

Teorema combinado,

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle^k \right) + \langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k \rangle, \quad (2.7-3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k \rangle &= \sum_{k\ell|k} \frac{S_{k\ell}}{V} \frac{1}{S_{k\ell} T} \iint_{\mathcal{S}_{k\ell}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k dt dS \\ &= \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \langle \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k \rangle_{k\ell} \end{aligned} \quad (2.7-4)$$

en (2.7-4), se ha introducido la definición del área interfacial específica  $a_{k\ell}$  (Soria y de Lasa, 1991):

$$a_{k\ell} = \langle \delta_{k\ell} \rangle = \frac{S_{k\ell}}{V}, \quad (2.7-5)$$

donde  $S_{k\ell}$  es el área que define la región superficial  $\mathcal{S}_{k\ell}$ .

Pueden obtenerse relaciones similares a (2.7-4), para los términos superficiales, representados por el segundo término del miembro derecho en los primeros dos teoremas.

En el Apéndice C, se obtienen a partir del promedio espacio-temporal definido en (2.5-1) los casos límite, correspondientes a promedio volumétrico y a promedio temporal.

En seguida, utilizaremos las definiciones y resultados obtenidos para promediar las ecuaciones de balance locales instantáneas de conservación de la masa y del momento lineal representadas en (2.3-1), en el modelo de dos fluidos.

## 2.8 ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO

Trabajaremos esta parte con la ecuación de transporte local instantánea general, (2.3-1); y a partir de ella obtendremos las ecuaciones de campo promedio de continuidad y movimiento.

Primero multiplicaremos (2.3-1) por la función indicadora de fase, con el fin de extender su dominio a toda la región espacial  $\mathcal{V}$ , después introduciremos la función indicadora de fase a los operadores derivadas, para finalmente promediar en el sentido de (2.5-1),

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) + \nabla \cdot \Phi_k - \rho_k \mathbf{f} \right) \right\rangle = \mathbf{0}. \quad (2.8-1)$$

Los primeros dos términos quedan de acuerdo con (2.7-3) y (2.7-4) como:

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle^k \right) + \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \langle \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k \rangle_{k\ell}. \quad (2.8-2)$$

El tercer término de (2.8-1) puede representarse en forma similar a (2.4-12),

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \langle \nabla \cdot (X_k \Phi_k) \rangle - \langle \nabla \cdot X_k \cdot \Phi_k \rangle, \quad (2.8-3)$$

aplicando (2.5-8) al primer término del miembro derecho y la descomposición espacio-temporal a  $\Phi_k$  en el segundo,

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \right) - \langle \nabla \cdot X_k \cdot \langle \Phi_k \rangle^k \rangle - \langle \nabla \cdot X_k \cdot \tilde{\Phi}_k \rangle. \quad (2.8-4)$$

$\langle \Phi_k \rangle^k$  puede salir del promedio en el segundo término del miembro derecho, al hacerle una expansión en serie de Taylor alrededor del centroide  $\mathbf{x}$  de la región espacial  $\mathcal{V}$ . La serie puede cortarse al primer término cuando  $(\ell_\gamma/r_0) \ll 1$  y  $(\ell_\sigma/r_0) \ll 1$ , que son las condiciones de escala requeridas al aplicar el método del promediado, (2.4-3) (Whitaker, 1999), con lo que tenemos:

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \right) - \nabla \cdot \langle X_k \rangle \cdot \langle \Phi_k \rangle^k - \langle \nabla \cdot X_k \cdot \tilde{\Phi}_k \rangle, \quad (2.8-5)$$

utilizando (2.5-4) en el segundo término del miembro derecho,

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \right) - \nabla \varepsilon_k \cdot \langle \Phi_k \rangle^k - \langle \nabla \cdot X_k \cdot \tilde{\Phi}_k \rangle \quad (2.8-6)$$

los dos primeros términos del miembro derecho en (2.8-6) pueden agruparse y utilizando (2.4-9) en el tercero, obtenemos:

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \Phi_k \rangle^k + \langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\Phi}_k \rangle. \quad (2.8-7)$$

Mediante un desarrollo similar al que se utilizó en la obtención de (2.7-4), el segundo término del miembro derecho en (2.8-7) puede reescribirse como:

$$\langle X_k \nabla \cdot \Phi_k \rangle = \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \Phi_k \rangle^k + \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\Phi}_k \rangle_{k\ell}. \quad (2.8-8)$$

El último término del miembro izquierdo de (2.8-1) se simplifica por el hecho de que el campo externo  $\mathbf{f}$  es constante y utilizando (2.5-8), se obtiene,

$$\langle X_k \rho_k \mathbf{f} \rangle = \langle X_k \rho_k \rangle \mathbf{f} = \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{f}. \quad (2.8-9)$$

De (2.8-2), (2.8-8) y (2.8-9) obtenemos finalmente el promedio de la ecuación local instantánea general de transporte (2.3-1):

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) + \nabla \cdot \Phi_k - \rho_k \mathbf{f} \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle^k \right) + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \Phi_k \rangle^k + \sum_{k\ell} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \left[ (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k + \tilde{\Phi}_k \right] \right\rangle_{k\ell} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{f} \quad (2.8-10)$$

Esta ecuación promedio general de transporte corresponde a los balances de masa y cantidad de movimiento en cada una de las dos fases.

Los balances específicos de masa y cantidad de movimiento pueden obtenerse al sustituir los términos de la Tabla 2.1.

### 2.8-1 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Para obtener la ecuación promedio de la masa, a partir de (2.8-10) de acuerdo a la Tabla 2.1, hacemos:  $\Psi_k = \rho_k$  y  $\Phi_k = \mathbf{f} = \mathbf{0}$  y aplicando la C.F.1 y C.F.4; que nos llevan a la cancelación del término de flux de masa en la interface, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k \right) = 0. \quad (2.8-11)$$

Esta ecuación implica que no existe material que cambie de fase; es decir, que el vapor no se absorbe en las partículas de catalizador, ni las partículas de catalizador se desgastan por sublimación en el vapor.

El promedio espacio-temporal del producto de la densidad y la velocidad de la fase  $k$ , puede sustituirse por un producto de cantidades promediadas al utilizar (2.6-7) para tener:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right) = 0. \quad (2.8-12)$$

Esta es la ecuación de campo promedio para la conservación de la masa de la fase  $k$ . Las fases pueden ser compresibles o incompresibles.

### 2.8-2 ECUACIÓN DE BALANCE DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento de la  $k$ -ésima fase se obtiene al sustituir,  $\Psi_k = \rho_k \mathbf{v}_k$ ,  $\Phi_k = \Pi_k$  y  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ , en (2.8-10),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \mathbf{\Pi}_k \rangle^k + \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \left[ \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \mathbf{v}_k + \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \right] \right\rangle_{k\ell} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.8-13)$$

aplicando la C.F.1 y C.F.4, el término de flux interfacial de cantidad de movimiento debido al cambio de fase,  $\sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \left[ \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \mathbf{v}_k \right] \right\rangle_{k\ell}$ , se cancela, quedando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \rangle^k \right) + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \mathbf{\Pi}_k \rangle^k + \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \right\rangle_{k\ell} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.8-14)$$

En esta ecuación, puede sustituirse el promedio del producto de la densidad por la diada de las velocidades de la fase  $k$ , por un producto de promedios, mediante el resultado encontrado anteriormente en (2.6-10), si además utilizamos nuevamente (2.6-7) en el primer término, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right) + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \mathbf{\Pi}_k \rangle^k + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \boldsymbol{\tau}_k^{(t)} \right) + \sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \right\rangle_{k\ell} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g} = \mathbf{0}' \quad (2.8-15)$$

en donde se ha definido,

$$\langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \equiv \boldsymbol{\tau}_k^{(t)}, \quad (2.8-16)$$

como los esfuerzos turbulentos, que pueden considerarse una generalización del concepto de los esfuerzos de Reynolds (Tennekes y Lumley, 1972).

Por lo tanto, las ecuaciones de campo promedio de masa y movimiento para la fase  $k$  resultan ser:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \right)}_{\text{Acumulación de masa}} + \underbrace{\nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right)}_{\text{Transporte convectivo de masa}} = \mathbf{0}, \quad (2.8-17)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right)}_{\text{Acumulación de cantidad de movimiento}} + \underbrace{\nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right)}_{\text{Transporte convectivo de cantidad de movimiento}} + \underbrace{\varepsilon_k \nabla \cdot \langle \mathbf{\Pi}_k \rangle^k}_{\text{Esfuerzos laminares totales}} + \underbrace{\nabla \cdot \left( \varepsilon_k \boldsymbol{\tau}_k^{(t)} \right)}_{\text{Transporte turbulento}} + \underbrace{\sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \right\rangle_{k\ell}}_{\text{Transporte interfacial de cantidad de movimiento}} - \underbrace{\varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g}}_{\text{Fuerzas volumétricas}} = \mathbf{0} \quad (2.8-18)$$

En (2.8-18), puede destacarse la importancia del área interfacial en la determinación de las interacciones entre las fases. Básicamente, los efectos geométricos de primer orden en el término de transporte interfacial, que son tomados en cuenta por la concentración de área interfacial,  $a_{k\ell}$ , de tal manera que la transferencia de cantidad de movimiento interfacial y en general de masa y energía se incrementa con  $a_{k\ell}$  hacia un equilibrio mecánico y térmico (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983).

La fracción volumen y el área interfacial específica, caracterizan la configuración geométrica de un flujo en dos fases (Soria y de Lasa, 1992).

Este sistema de ecuaciones no es cerrado. El promedio espacio-temporal ha generado muchos términos nuevos que deben analizarse para lograr una cerradura. Así, centraremos nuestra atención en las leyes de cerradura para los modelos de dos fluidos en flujos multifásicos.

Bouré (1987) cita las siguientes:

- leyes topológicas, que representan la estructura de la interface y su comportamiento dinámico, así como el patrón de flujo, las más importantes son: de fracción volumen y del área interfacial específica,
- ecuaciones de estado,
- funciones de correlación,
- leyes para el campo viscoso y términos de conducción,
- leyes de transferencia (masa, momento y densidades de flux de energía a través de las superficies de discontinuidad: interfaces, paredes).

Ya que todos los términos en el transporte interfacial involucran el área interfacial específica, el modelamiento de la concentración de área interfacial local es el primer paso que debe darse al desarrollar las relaciones de cerradura de un modelo de dos fluidos confiable (Ishii, 1990).

## **2.9 CERRADURA DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO**

Las ecuaciones de movimiento promediadas en el espacio-tiempo (2.8-18), presentan términos fuente que requieren ser cerrados para tener el modelo completo que gobierna al sistema de flujo vapor-catalizador. Modelaremos cada uno de estos términos por separado resaltando su importancia.

### **2.9-1 ÁREA INTERFACIAL ESPECÍFICA**

Primero analizaremos los términos superficiales en (2.8-18), y ya que consideraremos los efectos debidos a la pared del tubo elevador, tenemos dos tipos de superficies; la que

considera la presencia de la otra fase ( $a_{\gamma\sigma}$ ) y la que considera el efecto debido a la interacción de cada una de las fases con la pared del tubo ( $a_{kW}$ ),

$$\sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{k\ell} = a_{\gamma\sigma} \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{\gamma\sigma} + a_{kW} \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{kW} \quad (2.9-1)$$

en esta ecuación, las áreas interfaciales,  $a_{\gamma\sigma}$  y  $a_{kW}$ , pueden expresarse de acuerdo con (2.7-5) como:

$$a_{\gamma\sigma} = a_{\sigma\gamma} = \frac{S_{\sigma\gamma}}{V} \quad (2.9-2)$$

$$= \frac{S_{\sigma\gamma}}{V} \frac{V_\sigma}{V_\sigma} \quad (2.9-3)$$

$$= \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \cdot \quad (2.9-4)$$

Donde  $V_\sigma$ , es el volumen que ocupa una partícula;  $d_p$ , es el diámetro promedio de las partículas y  $\varepsilon_\sigma$  es la fracción volumen de sólidos. Esta ecuación muestra que el área interfacial específica es una función de la fracción volumen y del factor geométrico representado por el tamaño de la partícula.

Para modelar la otra superficie, partimos también de (2.7-5),

$$a_{kW} = \frac{S_{kW}}{V} = \frac{S_W}{V} \varepsilon_k \quad (2.9-5)$$

donde  $S_W/V$  es exactamente el inverso del radio hidráulico  $R_h$ , que se sustituye para tubos de diámetro interno  $D_t$  (constante), como:

$$a_{kW} = \frac{4}{D_t} \varepsilon_k \cdot \quad (2.9-6)$$

Como puede notarse claramente de (2.9-4) y (2.9-6) el área interfacial específica tiene dimensiones del inverso de la longitud.

Sustituyendo (2.9-4) y (2.9-6) en (2.9-1):

$$\sum_{k\ell|k} a_{k\ell} \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{k\ell} = \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{\gamma\sigma} + \frac{4}{D_t} \varepsilon_k \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{kW} \cdot \quad (2.9-7)$$

### 2.9-2 ESFUERZOS LAMINARES

Ya que las relaciones de comportamiento para el tensor de presiones tanto del sólido como del gas, presentan la misma ecuación, más no significado físico de las variables involucradas, podemos considerarlo en principio, en forma general como:

$$\mathbf{\Pi}_k = p_k \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k, \quad (2.9-8)$$

el promedio intrínseco de fase de esta ecuación, es:

$$\langle \mathbf{\Pi}_k \rangle^k = \langle p_k \rangle^k \mathbf{I} + \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle^k. \quad (2.9-9)$$

### 2.9-3 ESFUERZOS TURBULENTOS

El modelamiento de la estructura turbulenta del flujo gas-sólido, se hizo utilizando una relación de comportamiento similar a la de Newton de la viscosidad, debida a Boussinesq (1877).

En seguida se discute la forma en que se modeló la turbulencia en cada fase.

#### Modelamiento de la turbulencia en el vapor

La turbulencia en la fase vapor, representada por el término  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)})$ , se modela utilizando una de las expresiones más antiguas. Desarrollada de una manera análoga a la ley de Newton de la viscosidad (Boussinesq, 1877). La más sencilla y manejable es la viscosidad de remolino de Boussinesq, que para una sola fase compresible  $\gamma$ , está dada por (Slattery, 1999):

$$\boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} = -\mu_\gamma^{tur} \left[ \bar{\mathbf{D}}_\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_\gamma) \mathbf{I} \right], \quad (2.9-10)$$

donde,  $\bar{\mathbf{v}}_\gamma$  y  $\bar{\mathbf{D}}_\gamma$  son la velocidad de tiempo ajustado y el tensor de rapidez de deformación de tiempo ajustado, en la fase  $\gamma$  respectivamente. En este trabajo se postula en forma similar a (2.9-10) (Valencia, 2001),

$$\boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} = -\mu_\gamma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma) \mathbf{I} \right], \quad (2.9-11)$$

con,

$$\langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma = f \left( \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \right). \quad (2.9-12)$$

entonces, (2.9-11) queda como,

$$\boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} = -\mu_\gamma^{tur} \left[ \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma + \left( \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \right)^T - \frac{2}{3} \left( \nabla \cdot \{ \mathbf{v}_\gamma \} \right) \mathbf{I} \right]. \quad (2.9-13)$$

Tomando la divergencia del producto de  $\varepsilon_\gamma$  con (2.9-13), obtenemos:

$$\nabla \cdot \left( \varepsilon_\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} \right) = -\nabla \cdot \left\{ \varepsilon_\gamma \mu_\gamma^{tur} \left[ \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma + \left( \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \right)^T - \frac{2}{3} \left( \nabla \cdot \{ \mathbf{v}_\gamma \} \right) \mathbf{I} \right] \right\}, \quad (2.9-14)$$

donde  $\mu_\gamma^{tur}$  es un coeficiente constante de intercambio turbulento para el momentum (*viscosidad de remolino*), en analogía con la ley de viscosidad de Newton (Bird y cols., 2001). Sin embargo, es importante señalar que este coeficiente podría ser función de la densidad promediada del vapor,  $\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma$  y del módulo del gradiente de la velocidad promediada del vapor,  $\left\| \nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \right\|$ , si se considera análogo al modelo de longitud de mezcla de Prandtl para introducir información acerca del tamaño de los remolinos a través de la longitud de mezclado,  $l_{\sigma}$ . Este tipo de modelo hace que  $\mu_\gamma^{tur}$  dependa de la posición a lo largo del flujo (Tennekes y Lumley, 1972; Bird y cols., 2001); sin embargo, no se considerará aquí.

Theologos y Markatos (1993) proponen que  $\mu_\gamma^{tur}$  es del orden de  $1,000\mu_\gamma$ .

#### Modelamiento de la turbulencia en el sólido

Para modelar la turbulencia en las partículas sólidas, consideraremos que la turbulencia en el flujo gas-sólido, es causada por el elevado flujo de vapor solamente y que la energía turbulenta que se transfiere al sólido es transmitida en forma reversible por el vapor. Lo cual, es equivalente a igualar la rapidez de trabajo del vapor con la de los sólidos; es decir,

$$\underbrace{-\nabla \cdot \left[ \left( \varepsilon_\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} \right) \cdot \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \right]}_{\text{tasa de trabajo producido por los esfuerzos turbulentos del vapor sobre las partículas}} \approx \underbrace{-\nabla \cdot \left[ \left( \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\tau}_\sigma^{(t)} \right) \cdot \{ \mathbf{v}_\sigma \}^\sigma \right]}_{\text{tasa de trabajo recibido por las partículas}}. \quad (2.9-15)$$

Por otro lado, el número de Stokes indica la independencia del movimiento de los sólidos con respecto al movimiento turbulento del fluido. El número de Stokes es la razón de dos tiempos característicos (Yamamoto y cols., 2001):

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f}, \quad (2.9-16)$$

donde  $\tau_p$  es el tiempo de relajación de las partículas y  $\tau_f$  es una escala de tiempo característica de la turbulencia del fluido. Cuando el número de Stokes es cero, las partículas siguen completamente el movimiento del fluido como trazadores ideales, mientras que a

números de Stokes grandes ( $\tau_p > \tau_f$ ), las partículas se mueven independientemente de los remolinos turbulentos.

El tiempo de relajación, representa el tiempo que requieren las partículas para responder al fluido de los alrededores; es decir, el tiempo que tardan las partículas en moverse a la misma velocidad del fluido, y que puede estimarse por la siguiente expresión para flujo de Stokes (Yamamoto y cols., 2001):

$$\tau_p = \frac{\rho_s d_p^2}{18\mu_g}, \quad (2.9-17)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad de las partículas sólidas y  $\mu_g$  es la viscosidad del vapor de agua. Hay tres tiempos característicos asociados a la dinámica del sistema (Yamamoto y cols., 2001):

$$\tau_{fr} = \frac{\mu_g}{\rho_g (U_0 - v_s)^2}, \quad (2.9-18)$$

que indica el movimiento relativo de las partículas sólidas al flujo. El otro tiempo característico es:

$$\tau_{fe} = \frac{\rho_g l_e^2}{\mu_g}, \quad (2.9-19)$$

que indica el movimiento de las partículas en los remolinos turbulentos pequeños. Por último, el tercer tiempo característico es:

$$\tau_{fE} = \frac{\rho_g l_E^2}{\mu_g}, \quad (2.9-20)$$

que indica el movimiento de las partículas en los remolinos turbulentos grandes.

En estas ecuaciones,  $\rho_g$  es la densidad del vapor de agua;  $U_0 - v_s$ , es la velocidad relativa de las partículas sólidas a la velocidad de la mezcla con centro en el volumen  $U_0$ ,  $l_e$  y  $l_E$  son los tamaños característicos de la microescala y de la escala integral de la turbulencia, respectivamente. Los números de Stokes al considerar estos tres tiempos característicos son:  $St_r \approx 1.475$ ,  $St_e \approx 0.164$  y  $St_E \approx 1.5 \times 10^{-6}$ , obtenidos con datos característicos que se dan más adelante en este Capítulo.

El tener números de Stokes del orden de uno, nos indica que el sólido sigue el movimiento del gas, lo cual es consistente con la forma en la que se propone modelar la turbulencia en las partículas sólidas.

Modelando los esfuerzos viscosos turbulentos en la fase sólida como:

$$\boldsymbol{\tau}_\sigma^{(t)} = -\mu_\sigma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma) \mathbf{I} \right], \quad (2.9-21)$$

donde todo lo que no se conoce de la turbulencia del sólido, se atribuye al coeficiente de viscosidad turbulenta, que hay que determinar utilizando (2.9-14), (2.9-15) y (2.9-21),

$$-\varepsilon_\gamma \mu_\gamma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma) \mathbf{I} \right] \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma \approx -\varepsilon_\sigma \mu_\sigma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma) \mathbf{I} \right] \cdot \{\mathbf{v}_\sigma\}^\gamma. \quad (2.9-22)$$

Dividiendo por el módulo de la velocidad del gas  $\|\{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma\|$ ,

$$\varepsilon_\gamma \mu_\gamma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma) \mathbf{I} \right] \cdot \boldsymbol{\lambda}_\gamma \approx \varepsilon_\sigma \mu_\sigma^{tur} \left[ \langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma) \mathbf{I} \right] \cdot \boldsymbol{\lambda}_\sigma \quad (2.9-23)$$

donde,

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\{\mathbf{v}_k\}^k}{\|\{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma\|}; \quad k = \gamma, \sigma \quad (2.9-24)$$

son dos vectores adimensionales en las direcciones de los flujos de ambas fases.

Considerando que la dirección que toman los sólidos es la misma que la del vapor; es decir, los sólidos son arrastrados como trazadores por el vapor, se propone:

$$\boldsymbol{\lambda}_\sigma = \alpha \boldsymbol{\lambda}_\gamma. \quad (2.9-25)$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.9-23), se sigue que,

$$\varepsilon_\gamma \mu_\gamma^{tur} \approx \alpha \varepsilon_\sigma \mu_\sigma^{tur}. \quad (2.9-26)$$

Para encontrar  $\alpha$ , tomamos el producto escalar de (2.9-25) con  $\boldsymbol{\lambda}_\gamma$ ,

$$\alpha = \boldsymbol{\lambda}_\gamma \cdot \boldsymbol{\lambda}_\sigma, \quad (2.9-27)$$

al sustituir (2.9-24) tenemos,

$$\alpha = \frac{\{\mathbf{v}_\sigma\}^\sigma \cdot \{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma}{\|\{\mathbf{v}_\gamma\}^\gamma\|^2} \quad (2.9-28)$$

introduciendo esta expresión en (2.9-26) y resolviendo para  $\mu_\sigma^{tur}$  obtenemos finalmente:

$$\mu_{\sigma}^{tur} \approx \frac{\varepsilon_{\gamma}}{\varepsilon_{\sigma} \{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2 \mu_{\gamma}^{tur}. \quad (2.9-29)$$

El coeficiente de viscosidad turbulenta de la fase s3lida resulta ser mayor que el del gas, ya que:  $\frac{\varepsilon_{\gamma}}{\varepsilon_{\sigma} \{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2 > 1$ .

Tomando la divergencia del producto de  $\varepsilon_{\sigma}$  con (2.9-21), considerando (2.9-12) y sustituyendo (2.9-29), la turbulencia en la fase s3lida se modela como:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_{\sigma} \boldsymbol{\tau}_{\sigma}^{(t)}) = -\nabla \cdot \left\{ \mu_{\gamma}^{tur} \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \left[ \nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} + (\nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}) \mathbf{I} \right] \right\}. \quad (2.9-30)$$

Considerando la viscosidad turbulenta del vapor como constante, (2.9-14) da:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_{\gamma} \boldsymbol{\tau}_{\gamma}^{(t)}) = -\mu_{\gamma}^{tur} \left[ \varepsilon_{\gamma} \nabla^2 \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} + \nabla \varepsilon_{\gamma} \cdot \nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} + \nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \cdot \nabla \varepsilon_{\gamma} + \frac{1}{3} \varepsilon_{\gamma} \nabla (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}) \nabla \varepsilon_{\gamma} \right], \quad (2.9-31)$$

y del mismo modo (2.9-30) queda como:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_{\sigma} \boldsymbol{\tau}_{\sigma}^{(t)}) = -\mu_{\gamma}^{tur} \left[ \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \nabla^2 \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} + \nabla \left( \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \right) \cdot \nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} + \nabla \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \cdot \nabla \left( \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \right) + \frac{1}{3} \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \nabla (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}) \nabla \left( \varepsilon_{\gamma} \frac{\left\| \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma} \right\|^2}{\{ \mathbf{v}_{\sigma} \}^{\sigma} \cdot \{ \mathbf{v}_{\gamma} \}^{\gamma}} \right) \right]. \quad (2.9-32)$$

Esta forma de modelar la estructura turbulenta, nos conduce a mayor acoplamiento en el modelo hidrodinámico de dos fluidos, a diferencia de Batchelor (1988), que tiene partículas con movimientos aleatorios y que propone para la correlación de segundo orden de las fluctuaciones de velocidad de la fase dispersa (sólidos), que es proporcional a la concentración de sólidos por la velocidad promedio de los mismos.

Si el sólido presentara un movimiento autónomo, esto podría tomarse en cuenta en (2.9-25), al considerar una dependencia del ángulo que toman las partículas al desviarse de la trayectoria del vapor.

#### 2.9-4 ECUACIÓN DE ESTADO, PARA TOMAR EN CUENTA LOS EFECTOS DE LA COMPRESIBILIDAD DEL GAS

Como se está trabajando con una fase que es compresible, deben de tomarse en cuenta los efectos de la termostática, y por lo tanto es necesario tener una ecuación de estado. De acuerdo a las condiciones de presión y temperatura del sistema bajo consideración, se propone utilizar la ecuación del gas ideal:

$$p_\gamma = \frac{RT_0}{M} \rho_\gamma, \quad (2.9-33)$$

donde:

$p_\gamma$ , es el campo de presión para el vapor,

$\rho_\gamma$ , es el campo escalar de la densidad de la fase vapor,

$M$ , es el peso molecular del vapor de agua,

$R$ , es la constante universal de los gases,

$T_0$ , es la temperatura de operación.

Como el proceso es considerado isotérmico,  $\frac{RT_0}{M} \equiv a$  es una constante, y (2.9-33) se reescribe como:

$$p_\gamma = a\rho_\gamma. \quad (2.9-34)$$

Promediando en el espacio-tiempo esta ecuación, tenemos:

$$\langle p_\gamma \rangle^\gamma = a \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma. \quad (2.9-35)$$

#### 2.9-5 TÉRMINOS DE INTERACCIÓN CON LAS PAREDES DEL TUBO

Los esfuerzos promediados en la superficie de la pared del tubo están definidos por,

$$\langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_k \rangle_{kW} \equiv \mathbf{T}_{kW}. \quad (2.9-36)$$

Las expresiones que modelan los términos,  $\mathbf{T}_{\gamma W}$  y  $\mathbf{T}_{\sigma W}$  se toman de la cerradura de los modelos de flujo gas-sólido que utiliza Gidaspow (1994). Estos modelos para  $\mathbf{T}_{\gamma W}$  y  $\mathbf{T}_{\sigma W}$  son una generalización de la ecuación de Fanning comúnmente utilizada para el flujo en tubos,

$$\mathbf{T}_{kW} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} \rho_k \left\| \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right\|^2 f_{kF}, \quad (2.9-37)$$

donde  $\mathbf{e}_z$  es un vector unitario en la dirección axial ascendente del tubo,  $\left\| \langle \mathbf{v}_k \rangle^k \right\|^2$  y  $f_{kF}$  son, el módulo al cuadrado de la velocidad promedio y el factor de fricción, para la  $k$ -ésima fase, respectivamente.

Las expresiones de  $f_{kF}$  dependen del número de Reynolds, definido por (Gidaspow, 1994):

$$\text{Re}_g = \frac{D_t \rho_g \varepsilon_g v_g}{\mu_g}. \quad (2.9-38)$$

Para el flujo diluido, es razonable asumir que el factor de fricción se calcula como si sólo se tuviera gas. Por lo tanto, en la región laminar es,

$$f_{gF} = \frac{16}{\text{Re}_g}, \quad \text{para } \text{Re}_g < 2,100; \quad (2.9-39)$$

en el rango intermedio, se sigue la ecuación de Blasius,

$$f_{gF} = \frac{0.0791}{\text{Re}_g^{0.25}}, \quad \text{para } 2,100 \leq \text{Re}_g \leq 100,000; \quad (2.9-40)$$

y para números de Reynolds mayores a 100,000 se tiene la ecuación del factor de transmisión,

$$\frac{1}{\sqrt{f_{gF}}} = 2 \log \left( \text{Re}_g \sqrt{f_{gF}} \right) - 0.8. \quad (2.9-41)$$

Es importante señalar que no existe una sola forma de tratar la fricción debida a los sólidos. Una manera es la de relacionar la fricción debida a los sólidos a los esfuerzos normales y al ángulo interno de fricción (Gidaspow, 1994). Otra forma, más común en flujos en fase diluida, es utilizar la ecuación de Fanning para la fase sólida. En particular, para carbón, el libro de datos IGT-DOE (1982) recomienda el uso de la ecuación de Fanning con el factor de fricción dado en la correlación obtenida por Konno y Saito (1969) en sus experimentos:

$$2f_{sF} v_s = 5.7 \times 10^{-2} \sqrt{g D_t}. \quad (2.9-42)$$

## 2.9-6 MODELO DE CELDA UNITARIA SIMÉTRICA

Flujos en la micro estructura

Llamamos micro estructura, a la distribución de flujo que se tiene cerca de una partícula de catalizador (figura 2.2). En esta sección, se pretende usar la información de la micro estructura para derivar relaciones de comportamiento que sean utilizables en las ecuaciones promedio. Para tal fin, primero se calcula el número de Reynolds para el flujo alrededor de un grano de catalizador (esférico) a las condiciones de la región anterior a la inyección de gasóleo en el tubo elevador.

Determinación del número de Reynolds para la partícula

El número de Reynolds, basado en una partícula de catalizador se define como (Biesheuvel y Wijngaarden, 1984):

$$\text{Re}_p = \frac{d_p \rho_g (U_o - U_s)}{\mu_g}, \quad (2.9-43)$$

con

$$U_o = \varepsilon_s U_s + \varepsilon_g U_g, \quad (2.9-44)$$

donde intervienen las variables de operación del proceso (variables empíricas):

$U_s$ , es la velocidad promedio de una partícula de catalizador,

$U_g$ , es la velocidad promedio del vapor de agua,

$\varepsilon_s$  y  $\varepsilon_g$  son las fracciones volumétricas de sólidos y vapor respectivamente.

La densidad y la viscosidad del vapor, se evalúan a la temperatura y presión de operación en la zona ubicada antes de las boquillas de inyección de gasóleo, en el tubo elevador de una unidad de FCC comercial, Kellogg (1981): 930 K y 3 atm, aproximadamente.

**Tabla 2.2.** Valor de propiedades y condiciones de operación en la zona que se encuentra antes de las boquillas de inyección de gasóleo en el tubo elevador de una unidad de FCC comercial.

Flujo másico de vapor de agua*, $\dot{m}_g$	42,085 $\frac{\text{lb}_{\text{vap}}}{\text{h}} = 5.3027 \frac{\text{Kg}_{\text{vap}}}{\text{s}}$
Flujo másico de catalizador, $\dot{m}_s$	24.7 $\frac{\text{Ton}_{\text{cat}}}{\text{min}} = 411.67 \frac{\text{Kg}_{\text{cat}}}{\text{s}}$
Diámetro del tubo elevador, $D_t$	46 in = 1.1684 m
Diámetro medio de las partículas de catalizador, $d_p$	60 $\mu\text{m}$
Densidad del catalizador, $\rho_s$	1,300 $\frac{\text{Kg}_{\text{cat}}}{\text{m}^3}$
Densidad del vapor de agua, $\rho_g$	0.7065 $\frac{\text{Kg}_{\text{vap}}}{\text{m}^3}$
Viscosidad del vapor de agua, $\mu_g$	30 $\mu\text{Pa} \cdot \text{s}$

\* Este flujo másico contiene el vapor necesario para llevar el catalizador a la zona de inyección ( $7,725 \frac{\text{lb}_{\text{vap}}}{\text{h}} = 0.9734 \frac{\text{Kg}_{\text{vap}}}{\text{s}}$ ) y un flujo adicional de vapor para simular condiciones posteriores a la inyección de gasóleo.

Las condiciones de operación que se presentan en la Tabla 2.2 se adaptaron del manual de operaciones de Kellogg (1981); en tanto que las propiedades físicas del vapor de agua, se estimaron con la ayuda de las Tablas de vapor (Balzhiser y Samuels, 1977) y de las gráficas de propiedades reducidas (Bird y cols., 2001).

El flujo másico,  $\dot{m}_k$  ( $k = g, s$ ), está relacionado con la velocidad intersticial de la  $k$  – ésimas fase mediante la relación:

$$\varepsilon_k U_k = \left( \frac{\dot{m}_k}{\rho_k S_{st}} \right), \quad (2.9-45)$$

$S_{st}$  es el área de sección transversal del tubo elevador, que en este caso es de  $1.0722 \text{ m}^2$ .

En el Apéndice B se obtienen: la fracción volumen de sólidos junto con los valores de las velocidades intersticiales de las fases utilizando (2.9-45), obteniéndose que  $\varepsilon_s \simeq 0.04158$ ,  $U_s = 7.215 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $U_g = 7.3037 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Estos valores nos conducen a una velocidad de la mezcla con centro en el volumen de  $U_o = 7.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

En estas condiciones, el número de Reynolds de una partícula de catalizador en la zona que se encuentra antes del punto de inyección de carga fresca, se calcula a partir de (2.9-43) y de los valores obtenidos arriba, con el resultado,  $Re_p \approx 0.12$ , que corresponde a la región de flujo laminar.

El hecho de tener un flujo laminar cerca de las partículas en un flujo altamente turbulento, puede explicarse mediante las escalas de la turbulencia. En este sistema, los remolinos más grandes,  $l_E$  son de aproximadamente 50 cm de radio (en el orden de tamaño del radio del tubo) y los más pequeños,  $l_e$  de 1.5 mm aproximadamente (Gallardo, 2003), por lo que en los remolinos pequeños caben muchas partículas que se desplazan en ellos con flujo laminar. Entonces, en una zona cercana a las partículas de catalizador, dentro de un remolino turbulento, podemos utilizar la teoría de flujo reptante alrededor de una esfera para modelar los términos que requieren de cerradura.

Con fines de determinar la expresión del factor de fricción de Fanning que hemos de utilizar en (2.9-37) para el vapor, se calcula el número de Reynolds, basado en la velocidad del vapor, mediante (2.9-38), dando  $Re_g \approx 192,611$ . Esto corresponde al intervalo de aplicabilidad de la ecuación del factor de transmisión (2.9-41).

#### Modelo de celda unitaria simétrica con flujo reptante

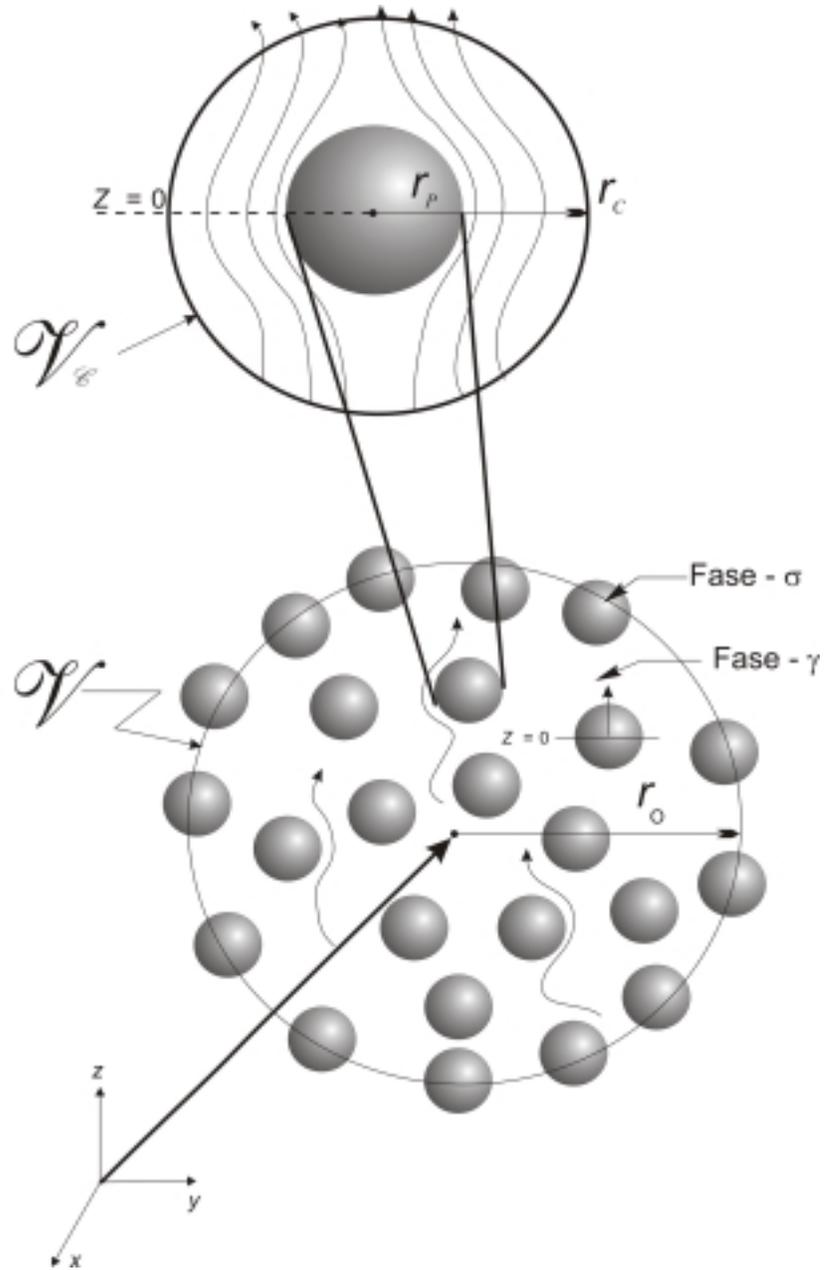
Se utiliza un modelo de celda unitaria simétrica, con flujo reptante para obtener información acerca de los términos que requieren de cerradura en las ecuaciones de movimiento de campo promedio. La solución del problema de flujo considerando una sola esfera en cada celda es una buena aproximación a la situación con muchas partículas, cuando las partículas están suficientemente separadas y no entran en contacto; es decir,

para flujos diluidos. Así, cada esfera se aísla en el sentido de que sólo interactúa con sus alrededores a través de campos promediados (Drew y Lahey, 1993).

Escogemos el radio de la celda, tal que,

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\frac{4}{3}\pi r_p^3}{\frac{4}{3}\pi r_c^3}, \quad \text{con} \quad r_p < r_c. \quad (2.9-46)$$

Asumimos que cada esfera tiene un radio  $r_p$ . La figura 2.2, ilustra la celda.



**Figura 2.2.** Celda unitaria simétrica con flujo reptante, donde se muestran las escalas utilizadas.

Los términos que se analizarán utilizando este método son:  $\langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma$ ,  $\langle p_\gamma \rangle^\gamma$ ,  $\langle p_\sigma \rangle^\sigma$ ,  $\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma}$  y  $\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma}$ .

### Solución de la microescala

Partiremos de la solución del problema de flujo reptante en estado estacionario de un fluido newtoniano incompresible alrededor de una esfera estacionaria, la cual es presentada en el Apéndice E (Bird y cols., 2001). En la cual  $p_{g0}$  es la presión en el plano  $z = 0$  alejado de la esfera (E.1), cuyo valor es constante para cada partícula (figura 2.2).

Como la solución de Stokes utilizada para los cálculos es estacionaria, los promedios espacio-temporales, son equivalentes a los promedios espaciales o volumétricos.

Las expresiones para los términos  $\langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma$ ,  $\langle p_\gamma \rangle^\gamma$ ,  $\langle p_\sigma \rangle^\sigma$ ,  $\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma}$  y  $\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma}$ , que se obtienen a partir del modelo de celda unitaria simétrica con flujo reptante, se listan a continuación.

- 1) Para evaluar  $\langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma$ ; se sabe que el promedio de un tensor es igual al promedio de sus componentes. Los esfuerzos viscosos del vapor promediados en el volumen son cero, debido a que intervienen integrales de funciones trigonométricas que se integran para toda la esfera y cuyo resultado es cero, por lo que:

$$\langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0}. \quad (2.9-47)$$

La interpretación física de este resultado, es que los esfuerzos viscosos del vapor se cancelan debido a la simetría del flujo.

- 2) La presión de la fase continua se evalúa con (E.1), y la transformación de la coordenada axial en coordenadas esféricas:  $z = r \cos \theta$ , obteniéndose:

$$\begin{aligned} \langle p_\gamma \rangle^\gamma &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi(r_c^3 - r_p^3)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_p}^{r_c} p_\gamma r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &= p_{g0} \end{aligned} \quad (2.9-48)$$

El modelo de celda fue consistente con la hipótesis, sobre un campo de presión donde no se distingue la presencia de una fase de la otra; es decir:

$$\langle p_\gamma \rangle^\gamma = \langle p_\sigma \rangle^\sigma. \quad (2.9-49)$$

- 3) Promediando los esfuerzos superficiales totales (de presión y viscosos) del vapor, en la superficie de la esfera en la celda; y promediando también, las condiciones de salto de masa y movimiento en la interface, a fin de establecer la relación entre

los esfuerzos superficiales en la interface, se obtuvieron los esfuerzos superficiales totales (Apéndice E),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} &= -\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma} \\ &= \left( \frac{1}{6} \rho_g g d_p + \frac{3}{d_p} \mu_g U_t \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.9-50)$$

(2.9-50), contiene dos contribuciones, la primera debida a la flotación, y la segunda, al arrastre interfacial causado por la fricción de forma y al arrastre viscoso. Es importante resaltar aquí, que esta ecuación cumple con la tercera ley de Newton.

El arrastre interfacial es el término más importante que determina el equilibrio entre las fuerzas de interacción entre las fases (Ishii y Kocamustafaogullari, 1983). Sin embargo, existen otros términos, como los de inercia inducida; debidos a la masa virtual y a las fuerzas de Basset, entre otros que deben evaluarse (Ishii, 1990).

Currie (1993) define la masa agregada o virtual como, “la masa del fluido que, si estuviera moviéndose con la misma velocidad que el cuerpo, tendría la misma energía cinética que todo el fluido”. En el caso de flujo potencial alrededor de una esfera, esta masa corresponde a la masa de fluido contenida en la mitad del volumen de la esfera.

Esta masa, que en muchos casos resulta ser de importancia, sobre todo en estudios de ondas (Lahey, 1991), no se considera en el flujo reptante, debido a que el concepto de masa virtual no puede extenderse al caso de flujo reptante alrededor de una esfera, ya que resulta ser infinita (Apéndice D), esto se debe a que el flujo es tan lento, que la esfera arrastra muchas capas de fluido, teniendo entonces una masa agregada muy grande.

La fuerza de Basset, que es el efecto de aceleración en el arrastre viscoso y en el desarrollo de la capa límite, toma en cuenta el efecto de historia del cambio de la fuerza viscosa, y para el caso más simple se expresa como una integral temporal (Ishii, 1990). Si se quisiera modelar mediante el modelo de celda, deberíamos de obtener la solución en la microescala del problema de flujo reptante en estado transitorio, pero esto queda fuera de los alcances de esta tesis.

Nótese que no evaluamos los esfuerzos turbulentos con este modelo, ya que éstos se dan en otra escala; es decir, la hipótesis de la solución de flujo reptante utilizada aquí, implica velocidades relativas muy bajas y consecuentemente la eliminación del término inercial en las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual es un término muy importante en la turbulencia; es por ello que al utilizar la teoría de flujo reptante en el modelo de celda unitaria, no deben evaluarse los esfuerzos turbulentos; a diferencia de cuando se utiliza la teoría de flujo potencial donde si se evalúan (Drew y Lahey, 1993).

Con estos resultados queda cerrado el modelo hidrodinámico de dos fluidos. En seguida analizaremos el conjunto de ecuaciones correspondiente al modelo compresible cerrado, se realizarán algunas simplificaciones al modelo y se proyectarán las ecuaciones vectoriales en la dirección axial del tubo. Por último, para cerrar este Capítulo y debido a su importancia como caso particular, se obtendrá el modelo incompresible correspondiente al modelo compresible unidimensional.

## 2.10 MODELO HIDRODINÁMICO COMPRESIBLE

### 2.10-1 ECUACIONES PROMEDIADAS Y CERRADAS PARA CADA FASE

Incorporando las cerraduras en la ecuación de balance de conservación de cantidad de movimiento (2.8-18). (No se sustituirá todavía la ecuación de estado para la fase compresible, ni los términos de turbulencia debido a su tamaño),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right) + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \{ \mathbf{v}_k \}^k \right) + \varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle^k + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \boldsymbol{\tau}_k^{(t)} \right) + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \left( \langle \mathbf{n}_k \tilde{p}_k \rangle_{k\sigma} + \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k \rangle_{k\sigma} \right) + \frac{4}{D_t} \varepsilon_k \mathbf{T}_{kW} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-1)$$

Esta ecuación puede reescribirse, al utilizar la ecuación de continuidad promedio (2.8-17), como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \left( \frac{\partial}{\partial t} + \{ \mathbf{v}_k \}^k \cdot \nabla \right) \{ \mathbf{v}_k \}^k + \varepsilon_k \nabla \langle p_k \rangle^k + \varepsilon_k \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_k \rangle^k + \nabla \cdot \left( \varepsilon_k \boldsymbol{\tau}_k^{(t)} \right) + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \left( \langle \mathbf{n}_k \tilde{p}_k \rangle_{k\sigma} + \langle \mathbf{n}_k \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k \rangle_{k\sigma} \right) + \frac{4}{D_t} \varepsilon_k \mathbf{T}_{kW} - \varepsilon_k \langle \rho_k \rangle^k \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-2)$$

Especializando esta ecuación para cada fase tenemos:

para el vapor,  $k = \gamma$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\gamma \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma \cdot \nabla \right) \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma + \varepsilon_\gamma \nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \varepsilon_\gamma \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma + \nabla \cdot \left( \varepsilon_\gamma \boldsymbol{\tau}_\gamma^{(t)} \right) + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \left( \langle \mathbf{n}_\gamma \tilde{p}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} + \langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} \right) + \frac{4}{D_t} \varepsilon_\gamma \mathbf{T}_{\gamma W} - \varepsilon_\gamma \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-3)$$

y para los sólidos,  $k = \sigma$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma \langle \rho_\sigma \rangle^\sigma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \{ \mathbf{v}_\sigma \}^\sigma \cdot \nabla \right) \{ \mathbf{v}_\sigma \}^\sigma + \varepsilon_\sigma \nabla \langle p_\sigma \rangle^\sigma + \varepsilon_\sigma \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_\sigma \rangle^\sigma + \nabla \cdot \left( \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\tau}_\sigma^{(t)} \right) + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \left( \langle \mathbf{n}_\sigma \tilde{p}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma} + \langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma} \right) + \frac{4}{D_t} \varepsilon_\sigma \mathbf{T}_{\sigma W} - \varepsilon_\sigma \langle \rho_\sigma \rangle^\sigma \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-4)$$

## 2.10-2 SIMPLIFICACIONES AL MODELO

En (2.10-4) puede despreciarse el término correspondiente a la divergencia del tensor de esfuerzos del sólido, ya que al ser considerado rígido, y sus esfuerzos ser constantes en cada partícula, no presenta ningún flujo de esfuerzos a través de su interior. Esta condición, implica que el término de divergencia es regular en su volumen (Biesheuvel y Wijngaarden, 1984), y permite reescribir la ecuación de movimiento para los sólidos como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma \langle \rho_\sigma \rangle^\sigma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \{ \mathbf{v}_\sigma \}^\sigma \cdot \nabla \right) \{ \mathbf{v}_\sigma \}^\sigma + \varepsilon_\sigma \nabla \langle p_\sigma \rangle^\sigma + \nabla \cdot ( \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\tau}_\sigma^{(t)} ) + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_\sigma \left( \langle \mathbf{n}_\sigma \tilde{p}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma} + \langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma} \right) + \frac{4}{D_t} \varepsilon_\sigma \mathbf{T}_{\sigma w} - \varepsilon_\sigma \langle \rho_\sigma \rangle^\sigma \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-5)$$

Otra simplificación que tomaremos es la de considerar que los campos promedio de velocidad son unidimensionales, con componente axial; es decir:

$$\{ \mathbf{v}_k \}^k = \{ v_k \mathbf{e}_z \}^k \quad (2.10-6)$$

Lo cual no es muy restrictivo en la descripción ondulatoria que nos interesa hacer, ya que la dirección más importante para el análisis de estabilidad lineal con la propagación de ondas es la ascendente en el tubo según demostró Chappellear (1966).

## 2.10-3 VARIABLES EMPÍRICAS

La asociación de las variables promedio y las que se obtienen de las mediciones en planta (variables empíricas), es como sigue:

$$\langle \bullet \rangle^k = \bullet_k, \quad (2.10-7)$$

$$\{ \mathbf{v}_k \}^k = \mathbf{v}_k, \quad (2.10-8)$$

$$U_k = v_k, \quad (2.10-9)$$

donde  $k = \sigma, \gamma$  y  $\sigma = s, \gamma = g$ .

Algo que resulta interesante resaltar aquí, es que la forma en que deben tomarse las mediciones, debe estar de acuerdo con la definición del promedio definido en (2.5-1).

## 2.10-4 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE DOS FLUIDOS

A continuación se presenta el conjunto cerrado de ecuaciones que gobiernan la hidrodinámica del tubo elevador antes de la sección de inyección de gasóleo (lecho fluidizado),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_g) + \nabla \cdot (\varepsilon_g \rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \quad (2.10-10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_g \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_g + \varepsilon_g \nabla p_g - \mu_g^{tur} \left[ \varepsilon_g \nabla^2 \mathbf{v}_g + \nabla \varepsilon_g \cdot \nabla \mathbf{v}_g + \nabla \mathbf{v}_g \cdot \nabla \varepsilon_g + \right. \\ \left. \frac{1}{3} \varepsilon_g \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_g) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}_g) \nabla \varepsilon_g \right] + \\ \frac{6}{d_p} \varepsilon_g \left( \frac{1}{6} \rho_g g d_p + \frac{3}{d_p} \mu_g U_t \right) \mathbf{e}_z + \frac{4}{D_t} \varepsilon_g \mathbf{T}_{gW} - \varepsilon_g \rho_g \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s) + \nabla \cdot (\varepsilon_s \rho_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (2.10-12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_s + \varepsilon_s \nabla p_s + \nabla \cdot (\varepsilon_s \boldsymbol{\tau}_s^{(t)}) - \frac{6}{d_p} \varepsilon_s \left( \frac{1}{6} \rho_g g d_p + \frac{3}{d_p} \mu_g U_t \right) \mathbf{e}_z + \frac{4}{D_t} \varepsilon_s \mathbf{T}_{sW} - \varepsilon_s \rho_s \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10-13)$$

donde,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_s \boldsymbol{\tau}_s^{(t)}) = -\mu_g^{tur} \left[ \nabla \mathbf{v}_g \cdot \nabla \left( \varepsilon_g \frac{\|\mathbf{v}_g\|^2}{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_g} \right) + \frac{1}{3} \varepsilon_g \frac{\|\mathbf{v}_g\|^2}{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_g} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_g) - \right. \\ \left. \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}_g) \nabla \left( \varepsilon_g \frac{\|\mathbf{v}_g\|^2}{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_g} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10-14)$$

aquí  $\|\mathbf{v}_g\|^2$  es el módulo al cuadrado de  $\mathbf{v}_g$  y,

$$U_t \equiv U_o - v_s, \quad (2.10-15)$$

es la velocidad terminal de las partículas sólidas (en un medio estancado, Apéndice E). Sustituyendo la velocidad de la mezcla  $U_o$  de (2.9-44), y reorganizando obtenemos:

$$U_t = \varepsilon_g (v_g - v_s). \quad (2.10-16)$$

Esta ecuación nos indica que la velocidad terminal es igual a la fracción volumen de gas, multiplicada por la velocidad relativa de los sólidos al gas. Esta cantidad es mayor que cero y tiene la dirección del vapor de arrastre.

A continuación, proyectaremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en la dirección axial del tubo.

## 2.10-5 MODELO UNIDIMENSIONAL

En esta sección se presenta el conjunto cerrado de ecuaciones que describe la hidrodinámica del flujo gas-sólido en la dirección axial del tubo elevador. Esta hipótesis permite visualizar los efectos ondulatorios en el sistema. En el Apéndice F se obtienen estas ecuaciones al proyectarlas en la dirección  $z$  con el resultado,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_g \rho_g v_g) = 0 \quad (2.10-17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_s \rho_s v_s) = 0 \quad (2.10-18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_g \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) v_g + \varepsilon_g \frac{\partial p_g}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) + \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_s \varepsilon_g (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_g \varepsilon_g v_g^2 f_{gF} + \rho_g g = 0 \end{aligned} \quad (2.10-19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) v_s + \varepsilon_s \frac{\partial p_s}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \left( \varepsilon_g \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_g \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_s \varepsilon_g (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_s \varepsilon_s v_s^2 f_{sF} + \varepsilon_s (\rho_s - \rho_g) g = 0 \end{aligned} \quad (2.10-20)$$

$$p_s = p_g \quad (2.10-21)$$

$$p_g = a \rho_g \quad (2.10-22)$$

$$\varepsilon_s + \varepsilon_g \equiv 1. \quad (2.10-23)$$

Es importante notar que en el caso límite en que  $\varepsilon_g = 1$  y  $\varepsilon_s = 0$ ; esto es, sólo el gas está presente, recuperamos las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido compresible, cerrado con la ecuación del gas ideal y un modelo tipo Boussinesq para la turbulencia.

## 2.10-6 MODELO CONSIDERANDO AMBAS FASES COMO INCOMPRESIBLES

Un caso particular importante del modelo obtenido, es el modelo incompresible; es decir, en donde las dos fases se consideran incompresibles.

En este caso, la densidad de las fases es constante y la velocidad ponderada en la masa se vuelve la velocidad promedio intrínseco de fase, de acuerdo con (2.5-10). Por otro lado, los resultados encontrados con el modelo de celda siguen siendo válidos, así como las otras definiciones y cerraduras propuestas.

La turbulencia sigue modelándose de la misma manera, a pesar de que en ella se utilizó una relación de comportamiento para el flujo compresible; esto se debe, a que en flujos multifásicos la ecuación de continuidad para un fluido incompresible toma la forma:

$$\nabla \cdot (\epsilon_g \mathbf{v}_g) = -\frac{\partial \epsilon_g}{\partial t}, \quad (2.10-24)$$

en tanto que, en el flujo monofásico incompresible es:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_g) = 0. \quad (2.10-25)$$

Las ecuaciones (2.10-17) y (2.10-18) se reducen a:

$$\frac{\partial \epsilon_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_g v_g) = 0, \quad (2.10-26)$$

$$\frac{\partial \epsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_s v_s) = 0, \quad (2.10-27)$$

(2.10-19) y (2.10-20) siguen siendo válidas, en tanto que la ecuación de estado (2.10-22) ya no se considera.

Este modelo servirá en todos los desarrollos posteriores, como base para la comparación con el modelo compresible.

## *CAPÍTULO III. DINÁMICA ONDULATORIA*

### 3. DINÁMICA ONDULATORIA

#### 3.1 Introducción

La teoría ondulatoria es una técnica muy poderosa para analizar flujos no estacionarios y respuestas transitorias. En algunos casos los cambios en el régimen de flujo pueden ser atribuidos a inestabilidades que resultan de la amplificación de ondas (Wallis, 1969; Batchelor, 1988; León y Liné, 2001).

Las ondas surgen como una respuesta que da un medio a un cambio, debido a que se sacó del equilibrio al sistema; es decir, cuando se provoca una perturbación. Las ondas tienden a propagar cambios continuamente en algunas variables a través del medio; si el cambio no se propaga continuamente, estas ondas se denominan ondas de choque.

Entre las clases de ondas más importantes, tenemos las ondas de continuidad y las ondas dinámicas. Las de continuidad ocurren cuando hay una diferencia de concentración en alguna propiedad del material; de tal manera que se establezca un flujo que ocasione una propagación ondulatoria. Matemáticamente, éstas surgen, por ejemplo de los balances de masa. Las ondas dinámicas, por otro lado, dependen para su propagación, de fuerzas que aceleren al material; es decir, estas ondas están asociadas al balance de cantidad de movimiento, ya que en éste, están consideradas las fuerzas que actúan en el material. Como es de esperarse, estos dos diferentes tipos de ondas pueden coexistir en un mismo medio, teniéndose una jerarquía de ondas; es decir, cuando ondas de diferentes órdenes aparecen en un mismo problema. Estas ondas interactúan en el material, logrando amplificarse o extinguirse, ya que las ondas son el resultado de una perturbación, que viaja en el sistema con ciertas velocidades de propagación. La interacción entre las diversas ondas determina cuál domina el movimiento y por lo tanto, gobierna la estabilidad del flujo (Wallis, 1969; Whitham, 1974).

Muchos fenómenos ondulatorios en dos fases, particularmente las ondas interfaciales, tienen un carácter bi- y tri- dimensionales. En esta tesis, por simplicidad abordaremos solamente los efectos ondulatorios en una dimensión.

Se dice que un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales parciales implica  $n$  ondas en general; sin embargo, éstas ecuaciones no son independientes, ya que puede obtenerse una ecuación unificada de orden superior que represente una perturbación en cualquier propiedad que aparezca como variable dependiente en el conjunto original de ecuaciones (Whitham, 1974; Bouré, 1988).

Cuando consideramos a las dos fases incompresibles; la presión se vuelve una variable mecánica, y se espera que las ondas de presión sean degeneradas y que viajen con velocidad infinita; matemáticamente, esto se entiende como una respuesta inmediata del material ante una perturbación, la cual se transmite con velocidad infinita a través de él; ejemplos de este tipo de comportamiento, los tenemos en procesos difusivos, que tienen ecuaciones parabólicas asociadas. En el caso de tener un proceso con un fluido incompresible, se pierde un grado de libertad, al no permitirle al fluido que se comprima o expanda para poder disipar la energía ocasionada por la perturbación producida. Aunque las ondas de presión, todavía retienen su importancia, se renuncia a cualquier posible acoplamiento entre las ondas de presión y las ondas de fracción volumen (Bouré, 1988).

En este trabajo, como se considera que una de las fases es compresible, deberemos ser capaces de describir ondas de presión.

En este Capítulo, se partirá del modelo hidrodinámico obtenido en el Capítulo II, que es un modelo cerrado, no lineal, de cuatro ecuaciones diferenciales parciales para las variables dependientes:  $\varepsilon_g$ ,  $p_g$ ,  $v_g$  y  $v_s$ . Para estudiar las ondas de fracción volumen y de presión se hace un análisis de estabilidad hidrodinámica lineal, a partir de las ecuaciones hidrodinámicas linealizadas.

### 3.2 LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS

Retomando el conjunto cerrado de ecuaciones (2.10-17)-(2.10-23) y con fines de simplificar la nomenclatura, de ahora en adelante denotaremos a,  $\varepsilon_g \equiv \varepsilon$  y  $p_s = p_g \equiv p$ . El sistema de ecuaciones (2.10-17)-(2.10-23) se puede reescribir como:

$$p \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) p + \varepsilon p \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0, \quad (3.2-1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon - (1 - \varepsilon) \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0, \quad (3.2-2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{p}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) v_g + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) + \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon (1 - \varepsilon) (v_g - v_s) + \frac{2}{a D_t} p \varepsilon v_g^2 f_{gF} + \frac{g}{a} p = 0 \end{aligned}, \quad (3.2-3)$$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) v_s + (1 - \varepsilon) \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \left( \varepsilon \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon (1 - \varepsilon) (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_s (1 - \varepsilon) v_s^2 f_{sF} + (1 - \varepsilon) \left( \rho_s - \frac{p}{a} \right) g = 0 \end{aligned}. \quad (3.2-4)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, se linealiza siguiendo un método bien conocido en estudios de análisis de estabilidad hidrodinámica lineal (Chandrasekhar, 1961). Este método consiste en descomponer cada una de las variables en un valor promedio en estado estacionario más una pequeña perturbación alrededor de éste. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\psi = \psi_{ss}(z) + \hat{\psi}(z, t), \quad (3.2-5)$$

en donde  $\psi$  puede ser  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $v_g$  ó  $v_s$ .

Aplicando (3.2-5) a las ecuaciones (3.2-1)-(3.2-4) y reteniendo sólo los términos de primer orden en  $\hat{\psi}$  se obtiene, después de un desarrollo laborioso (Apéndice G), las ecuaciones,

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.2-6)$$

(3.2-6) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, para saber si este sistema es hiperbólico, el discriminante debe ser mayor que cero, y ya que sólo tenemos un término de segundo orden (en la dirección  $z$ ), y ningún término de segundo orden en otra dirección espacial, o en otra variable. Por otra parte, no hay términos de segundo orden con derivada cruzada. Por lo que el discriminante resulta ser igual a cero (Carrier y Pearson, 1988; Arfken, 1995), y entonces (3.2-6) no es hiperbólico sino parabólico.

Las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , de tamaño  $4 \times 4$  y funciones de  $z$ , están definidas en el Apéndice G. El vector  $\mathbf{u}$  está definido como,  $\mathbf{u} = (\hat{\varepsilon} \quad \hat{p} \quad \hat{v}_g \quad \hat{v}_s)^T$ .

Si se considera un estado uniforme; esto es,  $\psi_{ss} = \psi_0$ , donde  $\psi_0 : \{\varepsilon_0, p_0, v_{g0}, v_{s0}\}$  es constante, podemos reducir significativamente (3.2-6) al eliminar todos los términos  $\frac{d\psi_{ss}}{dz}$  que aparecen en las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , para obtener:

$$\mathbf{A}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.2-7)$$

en donde las matrices  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{C}_0$  y  $\mathbf{D}_0$ , ahora son constantes. Dichas matrices, también se definen en el Apéndice G.

### 3.3 ECUACIONES DE ONDA DE FRACCIÓN VOLUMEN Y DE PRESIÓN

Partiendo de las ecuaciones linealizadas (3.2-7), obtendremos las ecuaciones de onda que caracterizan la propagación de las perturbaciones en la fracción volumen y la presión de la fase vapor en el lecho, alrededor de un estado uniforme.

Primero, derivamos (3.2-7) con respecto a  $z$  :

$$\mathbf{A}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z \partial t} + \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + \mathbf{D}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0}. \quad (3.3-1)$$

Por otra parte, si tomamos de este sistema la ecuación de continuidad del vapor y resolvemos en ella para la tercera derivada espacial de la velocidad, con el fin de poder eliminarla en desarrollos posteriores, se sigue que:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^3 \hat{v}_g}{\partial z^3} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} + v_{g0} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} + v_{g0} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) \hat{p} \\
&= \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} + v_{g0} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) \left( \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} + \frac{\hat{p}}{p_0} \right)
\end{aligned} \tag{3.3-2}$$

Sustituyendo de las ecuaciones de continuidad (3.2-7) las derivadas espaciales de la velocidad del vapor y del catalizador junto con (3.3-2) en las ecuaciones de movimiento de (3.3-1) (últimas dos ecuaciones) y después de un desarrollo algebraico laborioso (Apéndice H) se obtienen las ecuaciones de onda:

para el vapor,

$$\begin{aligned}
&-K_{g\lambda 2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + K_{g\lambda 3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} - K_{g\lambda 1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* - \\
&K_{gc2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g2}^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g2}^- \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* + K_{gc3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} - K_{gc1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0
\end{aligned} \tag{3.3-3}$$

y para el catalizador,

$$\begin{aligned}
&K_{s\lambda 2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s2} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + K_{s\lambda 3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + K_{s\lambda 1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* + \\
&K_{sc2} \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + K_{sc3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{s3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + K_{sc1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0
\end{aligned} \tag{3.3-4}$$

donde las variables dependientes en estas ecuaciones, se adimensionalizaron utilizando:

$$\hat{\varepsilon}^* = \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad \hat{p}^* = \frac{\hat{p}}{p_0}, \tag{3.3-5}$$

con el fin de tener las perturbaciones normalizadas.

Considerando el conjunto de parámetros de la Tabla 3.1 para el estado uniforme, se obtienen los coeficientes y velocidades de propagación de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4). Tablas 3.2 y 3.3, respectivamente.

Las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4) están acopladas y son de tercer orden, tanto en la fracción volumen, como en la presión. En estas ecuaciones encontramos velocidades de propagación de las ondas, de primero, segundo y tercer orden (Tabla 3.3), las cuales se analizarán más adelante.

**Tabla 3.1.** Valores de constantes y de los parámetros en el estado uniforme.

Constante/Parámetro	Valor
$a$	429,472.66 m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
$d_p$	60 μm
$D_t$	1.1684 m
$f_{gF}$	0.01576
$f_{sF}$	0.0134
$g$	9.81 ms <sup>-2</sup>
$L$	27.6 m
$p_0$	3 atm = 303,990Kg <sub>m</sub> (m·s <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
$v_{g0}$	7.3037 ms <sup>-1</sup>
$v_{s0}$	7.215 ms <sup>-1</sup>
$\epsilon_0$	0.95842
$\mu_g$	30μ Kg <sub>m</sub> (m·s) <sup>-1</sup>
$\mu_g^{tur}$	30,000μ Kg <sub>m</sub> (m·s) <sup>-1</sup>
$\rho_s$	1,300 Kg <sub>m</sub> m <sup>-3</sup>

**Tabla 3.2.** Coeficientes de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4).

Coef. $i$	1	2	3
$K_{g\lambda i}$ (3.3-3)	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}$	$\frac{p_0}{a}$	$\frac{4}{3} \mu_g^{tur}$
$K_{gci}$ (3.3-3)	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-\epsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}$	$\frac{p_0}{a}$	$\frac{4}{3} \mu_g^{tur}$
$K_{s\lambda i}$ (3.3-4)	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0}$	$\rho_s$	$\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}}$
$K_{sci}$ (3.3-4)	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-\epsilon_0)$	$\frac{1-\epsilon_0}{\epsilon_0} p_0$	$\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}}$

**Tabla 3.3.** Velocidades de propagación ( $v_p$ ) de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4), así como su estimación en el estado uniforme utilizado.

$i$ $v_p$	1	2	3
$\lambda_{gi}$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g \left[ \varepsilon_0 (v_{g0} - v_{s0}) + v_{s0} \right] + \frac{2f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}^2$ $\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}$ $= 7.3 \frac{m}{s}$	$v_{g0}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$	$v_{g0}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$
$c_{gi}$	$v_{g0} - \frac{\frac{2f_{gF} p_0}{aD_t} v_{g0}^2 + \frac{gp_0}{a\varepsilon_0}}{\frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}}$ $= 7.3019 \frac{m}{s}$	$v_{g0} \pm \sqrt{a}$ $c_{g2}^+ = 662.65 \frac{m}{s}$ $c_{g2}^- = -648.04 \frac{m}{s}$	$v_{g0}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$
$\lambda_{si}$	$\frac{\frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0}^2 - \left( \rho_s - \frac{p_0}{a} \right) g + \frac{18}{d_p^2} \mu_g \left[ v_{s0} + \varepsilon_0 (v_{g0} - v_{s0}) \right]}{\frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g}$ $= 7.2047 \frac{m}{s}$	$v_{s0}$ $= 7.215 \frac{m}{s}$	$v_{g0}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$
$c_{si}$	$v_{g0} - \frac{gp_0 d_p^2}{18\mu_g \varepsilon_0 a}$ $= 7.30365 \frac{m}{s}$	<p style="text-align: center;">—————</p>	$v_{g0}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$

Con el fin de analizar (3.3-3) y (3.3-4) como ecuaciones de jerarquía de ondas o procesos de interacción de ondas, resaltaremos la información física contenida en los coeficientes y la relacionaremos con los parámetros físicos del proceso de fluidización (Liu, 1982).

### 3.3-1 COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES DE ONDA

Analizando cada uno de los coeficientes, en el orden en que aparecen en (3.3-3) y (3.3-4),

$$\frac{K_{g\lambda 2}}{K_{gc1}} \text{ y } \frac{K_{gc2}}{K_{gc1}}. \quad (3.3-6)$$

Los numeradores de estos parámetros (correspondientes al primer coeficiente de (3.3-3) y (3.3-4)), en sí mismos no son muy significativos; pero el cociente expresado en (3.3-6), representa tiempos de relajación del proceso ondulatorio (Liu, 1982).

Los coeficientes,  $K_{g\lambda 3} = K_{gc3}$ , son simplemente la viscosidad efectiva de la fase vapor. Notamos que los efectos viscosos, en las derivadas de mayor orden en las ecuaciones de onda, tienden a difundir las señales en la dirección axial ( $z$ ) del tubo. Y ya que un operador Laplaciano esta actuando en una onda de primer orden, puede interpretarse como un efecto de dispersión de la onda de primer orden (Liu, 1982).

La fase compresible (vapor), tiende a propagar las señales de presión en la dirección  $z$  a la velocidad del sonido  $\sqrt{a}$ , como se indica en las velocidades de propagación de segundo orden en la presión en la ecuación de onda correspondiente a la fase continua (3.3-3).

El primero de los términos en los coeficientes  $K_{g\lambda 1}$  y  $K_{gc1}$ , en las ondas de primer orden de la fase continua, refleja el arrastre interfacial ejercido por el vapor en los sólidos y el segundo, la interacción por parte del vapor con las paredes del tubo.

El análisis de los coeficientes para la fase dispersa (3.3-4), es equivalente al de la fase continua; por lo que, nos limitaremos a discutir sólo los que tienen una interpretación diferente.

Los coeficientes  $\left(\frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0}\right)K_{s\lambda 3} = \left(\frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0}\right)K_{sc3}$ , corresponden al coeficiente de viscosidad efectiva de los sólidos, modelado en la sección 2.9-3, ecuación (2.9-29).

En forma similar a la del vapor, en los coeficientes  $K_{s\lambda 1}$  y  $K_{sc1}$  está contenido, el arrastre interfacial ejercido por el vapor en los sólidos y la interacción por parte del catalizador con las paredes del tubo, que se refleja en una disipación de energía.

### 3.3-2 VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN ASOCIADAS A LAS ECUACIONES DE ONDA

A continuación analizaremos las velocidades de propagación que intervienen en el proceso ondulatorio, representado por las ecuaciones (3.3-3) y (3.3-4).

La onda de continuidad de primer orden del vapor,  $\lambda_{g1}$ , viaja a una velocidad muy cercana a la del vapor de arrastre en el estado base (Tabla 3.3); en tanto que, la onda de continuidad de primer orden del catalizador,  $\lambda_{s1}$ , viaja aproximadamente a la velocidad del catalizador en el estado uniforme (Tabla 3.3).

La onda de presión de primer orden del vapor,  $c_{g1}$ , viaja aproximadamente a la velocidad del vapor en el estado uniforme; en tanto que, la onda de presión de primer orden del catalizador,  $c_{s1}$ , viaja muy cercanamente a la velocidad del vapor en el estado uniforme (Tabla 3.3).

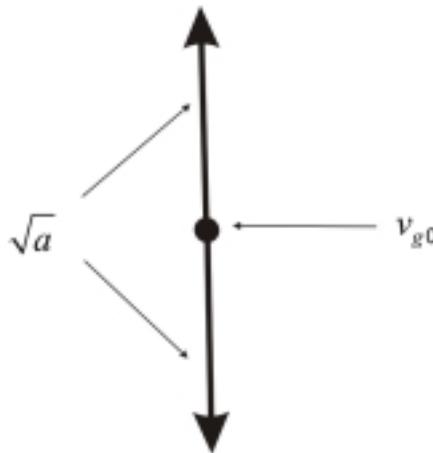
Tanto las ondas de fracción volumen de segundo orden, como las de tercer orden del vapor, viajan a la velocidad del estado uniforme del vapor,  $\lambda_{g2} = \lambda_{g3} = v_{g0}$ ; en tanto que, la

onda de continuidad de segundo orden de los sólidos,  $\lambda_{s2}$ , viaja a la velocidad de los sólidos en el estado base (Tabla 3.3).

Puede verse que en las ondas de presión de segundo orden,  $c_{g2}^{\pm} = v_{g0} \pm \sqrt{a}$ , está presente la velocidad del sonido,  $\sqrt{a}$  (c. fr. Gidaspow, 1994).

Mediante las Tablas de vapor, se estimó la velocidad del sonido en el vapor a las condiciones del tubo elevador (en la sección anterior a la inyección de gasóleo), encontrándose que es de aproximadamente  $731 \frac{m}{s}$ ; la cual, es comparable a la obtenida con el modelo (Tabla 3.3).

Esta onda, tiene una interpretación física sencilla, si pensamos que viajamos a la velocidad del vapor en el estado uniforme, veríamos que la señal de presión se difunde en ambas direcciones a la velocidad del sonido, como se muestra en la figura 3.1.



**Figura 3.1** Interpretación esquemática de la velocidad de la onda de presión de segundo orden.

Las ondas de tercer orden en las ecuaciones (3.3-3) y (3.3-4) tienen la estructura de un operador de onda de primer orden aplicado a una segunda derivada espacial de la variable  $(\hat{p}^*, \hat{\varepsilon}^*)$ , que representa un proceso difusivo viajando en la onda de primer orden. En los cuatro términos de tercer orden, las velocidades resultan ser la velocidad del vapor en el estado base, por lo cual estos términos representan procesos de dispersión de la onda de primer orden que viaja a la velocidad del vapor.

El hecho de que todas las ondas de tercer orden tengan la misma interpretación y valor, se debe al acoplamiento impuesto en la modelación de la estructura turbulenta del flujo gas-sólido.

Ahora obtendremos la ecuación de onda para la fracción volumen asociada al modelo incompresible, siguiendo la misma metodología utilizada para obtener las ecuaciones de onda para la fracción volumen y presión.

### 3.4 ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN EN EL MODELO INCOMPRESIBLE

#### 3.4-1 LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS

Partiendo de las ecuaciones de continuidad para el modelo incompresible, (2.10-26) y (2.10-27), junto con las ecuaciones de movimiento del modelo compresible (2.10-19) y (2.10-20); las cuales, como ya se dijo en el Capítulo II, siguen siendo válidas en el modelo incompresible, y sustituyendo en este sistema de ecuaciones (2.10-21) y (2.10-23), el sistema completo, puede reescribirse como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \varepsilon \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0, \quad (3.4-1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon - (1 - \varepsilon) \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0, \quad (3.4-2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) v_g + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) + \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon (1 - \varepsilon) (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_g \varepsilon v_g^2 f_{gF} + \rho_g g = 0 \end{aligned} \quad (3.4-3)$$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) v_s + (1 - \varepsilon) \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \left( \varepsilon \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon (1 - \varepsilon) (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_s \varepsilon v_s^2 f_{sF} + (1 - \varepsilon) (\rho_s - \rho_g) g = 0 \end{aligned} \quad (3.4-4)$$

Aplicando el método de linealización descrito en la sección 3.2, ecuación (3.2-5), a las ecuaciones (3.4-1)-(3.4-4) y reteniendo sólo los términos de primer orden en  $\hat{\psi}$ , se obtiene después de un desarrollo laborioso (Apéndice I), las ecuaciones,

$$\mathbf{A}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_{in} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.4-5)$$

El sistema (3.4-5) análogamente al (3.2-6) no es hiperbólico, sino parabólico. Las matrices  $\mathbf{A}_{in}$ ,  $\mathbf{B}_{in}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}_{in}$ , de tamaño  $4 \times 4$  y funciones de  $z$ , están definidas en el Apéndice I. El vector  $\mathbf{u}$  está definido como,  $\mathbf{u} = (\hat{\varepsilon} \quad \hat{p} \quad \hat{v}_g \quad \hat{v}_s)^T$ .

Considerando un estado uniforme, obtenemos (Apéndice I):

$$\mathbf{A}_{in0} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{in0} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_{in0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.4-6)$$

en donde las matrices  $\mathbf{A}_{in0}$ ,  $\mathbf{B}_{in0}$  y  $\mathbf{D}_{in0}$ , ahora son constantes y están definidas en el Apéndice I, y la matriz  $\mathbf{C}_0$ , es la misma que en el modelo compresible, por lo que está definida en el Apéndice G.

### 3.4-2 ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN

Partiendo de las ecuaciones linealizadas (3.4-6), obtendremos la ecuación de onda que caracteriza la propagación de las perturbaciones en la fracción volumen de la fase vapor en el lecho, alrededor de un estado uniforme. Para tal efecto, primero derivamos (3.4-6) con respecto a  $z$ :

$$\mathbf{A}_{in0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z \partial t} + \mathbf{B}_{in0} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + \mathbf{D}_{in0} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad (3.4-7)$$

de aquí, las ecuaciones de movimiento para el vapor y el catalizador son:

$$\begin{aligned} & \rho_g \varepsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \varepsilon_0 \frac{\partial^3 \hat{v}_g}{\partial z^3} + d_{310} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} + \\ & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4 \rho_g f_{gF}}{D_t} \varepsilon_0 v_{g0} \right] \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} - \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} = 0 \end{aligned}, \quad (3.4-8)$$

$$\begin{aligned} & \rho_s (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} + (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_0 v_{g0}}{v_{s0}} \frac{\partial^3 \hat{v}_g}{\partial z^3} - d_{410} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} - \\ & \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} (1 - \varepsilon_0) v_{s0} \right] \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} = 0 \end{aligned}, \quad (3.4-9)$$

podemos eliminar la presión entre estas dos ecuaciones, al multiplicar (3.4-8) por  $\varepsilon_0^{-1}$  y (3.4-9) por  $-(1 - \varepsilon_0)^{-1}$  y sumar los resultados obtenidos. Además, si sustituimos las derivadas espaciales de la velocidad del vapor y del catalizador de las ecuaciones de continuidad de (3.4-6), simplificamos algebraicamente y agrupamos términos, finalmente obtenemos:

$$K_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* - K_3 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + K_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* = 0, \quad (3.4-10)$$

los valores de los coeficientes y velocidades de propagación de las ondas, se dan en la Tabla 3.4.

**Tabla 3.4.** Valor de los coeficientes ( $K_i$ ) y velocidades de propagación ( $\lambda_i$ ) de la ecuación de onda (3.4-10).

$i$	1	2	3
$K_i$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_g f_{gF}}{D_t} v_{g0} + \frac{4\varepsilon_0}{D_t} (\rho_s f_{sF} v_{s0} - \rho_g f_{gF} v_{g0})$	$\frac{\rho_s \varepsilon_0 + \rho_g (1 - \varepsilon_0)}{\rho_g (1 - \varepsilon_0)}$	$\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{s0} - \varepsilon_0 (v_{g0} + v_{s0})}{v_{s0}}$
$\lambda_i$	(3.4-11)	(3.4-12)	$\frac{(1 - \varepsilon_0) v_{g0} v_{s0} - \varepsilon_0 v_{g0}^2}{v_{s0} - \varepsilon_0 (v_{g0} + v_{s0})}$ $= 7.3037 \frac{m}{s}$

donde,

$$\lambda_1 = \frac{\frac{2}{D_t} \varepsilon_0 (\rho_s f_{sF} v_{s0}^2 - \rho_g f_{gF} v_{g0}^2) + \frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} v_{g0}^2 - g\varepsilon_0 (\rho_s - \rho_g) + \frac{18}{d_p^2} \mu_g [\varepsilon_0 (v_{g0} - v_{s0}) + v_{s0}]}{\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_g f_{gF}}{D_t} v_{g0} + \frac{4\varepsilon_0}{D_t} (\rho_s f_{sF} v_{s0} - \rho_g f_{gF} v_{g0})},$$

$$= 7.2087 \frac{m}{s} \tag{3.4-11}$$

y,

$$\lambda_2^\pm = \frac{\rho_s \varepsilon_0 v_{s0} + \rho_g (1 - \varepsilon_0) v_{g0} \pm i (v_{g0} - v_{s0}) \sqrt{\rho_s \rho_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0)}}{\rho_s \varepsilon_0 + \rho_g (1 - \varepsilon_0)}, \tag{3.4-12}$$

o bien,

$$\lambda_2^\pm = V_o \pm i \frac{(v_{g0} - v_{s0}) \sqrt{\frac{\rho_s \rho_g}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0)}}}{\rho_s / (1 - \varepsilon_0) + \rho_g / \varepsilon_0}, \tag{3.4-13}$$

con,

$$V_o = \frac{\rho_s v_{s0} / (1 - \varepsilon_0) + \rho_g v_{g0} / \varepsilon_0}{\rho_s / (1 - \varepsilon_0) + \rho_g / \varepsilon_0}, \tag{3.4-14}$$

sustituyendo valores en el estado uniforme,

$$\lambda_2^\pm = 7.2150 \pm (0.00043) i. \tag{3.4-15}$$

Se observa que al considerar a la presión como variable mecánica, las ondas se desacoplan, teniéndose sólo una ecuación de onda para la fracción volumen.

Resulta interesante analizar las velocidades de propagación de (3.4-10).

### 3.4-3 VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN ASOCIADAS A LA ECUACIÓN DE ONDA

La onda de primer orden viaja aproximadamente a una velocidad intermedia a la del vapor de arrastre y el catalizador; en tanto que, la onda de tercer orden viaja a la velocidad del vapor de arrastre en el estado base.

El hecho de tener velocidades de propagación de segundo orden complejas conjugadas (3.4-15), refleja el hecho de que el sistema no es hiperbólico; así como también, manifiesta la rigidez de origen físico en el modelo, que también está presente en el modelo compresible; sólo que ahí la rigidez se relaja con la ecuación de estado. Esta rigidez, en los modelos hidrodinámicos de lechos fluidizados, es de origen físico, al no tener cerraduras con derivadas en el modelo, ya que la masa agregada no es importante a diferencia de los modelos para columnas de burbujeo (Biesheuvel y Wijngaarden, 1984; Biesheuvel y Gorissen, 1990; Lahey, 1991; León y Liné, 2001).

En este modelo no se utilizó una condición topológica sino un sólo campo de presión para ambas fases. Esto es más sencillo que utilizar una ecuación topológica con la forma de una ecuación diferencial para la fracción volumen de gas, como la cerradura de "fracción volumen-deriva" (void-drift) propuesta por Bouré (1988). O bien una ecuación diferencial parcial de segundo orden para la fracción volumen, como la propuesta por Soria y de Lasa (1992).

## 3.5 DISCUSIÓN PRELIMINAR

Es muy importante resaltar que en los términos de primer orden en las ecuaciones de onda, tanto en los coeficientes como en las velocidades de propagación, en los modelos compresible e incompresible, está contenida la información del arrastre interfacial; es decir, en este término se refleja el tipo de cerradura utilizada en el modelamiento del flujo gas-sólido, que tendrá una incidencia directa en la estabilidad lineal del sistema, de acuerdo con el criterio de estabilidad que se verá más adelante (Wallis, 1969; Whitham, 1974) en la sección 3.9-1 de este Capítulo. Esto nos indica como la estabilidad del modelo del lecho fluidizado es muy sensible a la cerradura.

Como ya se vió, las ondas de fracción volumen y de presión están acopladas debido a la compresibilidad; mientras que en el modelo incompresible, sólo se tiene una ecuación para la fracción volumen. Bouré (1988) de sus estudios en columnas de burbujeo, señala que estas ondas están desacopladas, debido a que las ondas de fracción volumen viajan a velocidades que difieren en aproximadamente dos órdenes de magnitud de las de presión. En este estudio correspondiente a un lecho fluidizado, puede apreciarse este comportamiento si vemos la Tabla 3.3, y comparamos las velocidades de propagación de segundo orden en la presión con las demás velocidades de propagación.

Para estudiar la estabilidad del lecho fluidizado, es necesario contar con un modelo de una sola ecuación de onda; o bien para la fracción volumen o para la presión, de tal

manera que intervengan velocidades de propagación con propiedades de las dos fases y no de cada fase por separado, como en (3.3-3) y (3.3-4). Por lo tanto, centraremos ahora nuestra atención en generar un modelo de una ecuación de onda, para la fracción volumen y/o para la presión.

### 3.6 MODELO DE UNA ECUACIÓN DE ONDA

#### 3.6-1 MODELO SIMPLIFICADO

El modelo de dos ecuaciones de onda, representado en (3.3-3) y (3.3-4), para las variables dependientes  $\hat{\varepsilon}^*$  y  $\hat{p}^*$ , está íntimamente acoplado. Eliminar una de estas dos variables entre estas dos ecuaciones, para poder obtener el modelo de una ecuación de onda, es sumamente difícil, sino es que imposible. Una forma de obtener un modelo aproximado de una ecuación de onda, es a partir de un análisis de órdenes de magnitud. Para tal efecto, se procede a adimensionalizar (3.3-3) y (3.3-4), utilizando las siguientes variables adimensionales:

$$\tau = \frac{vt}{L^2}, \quad (3.6-1)$$

$$\zeta = \frac{z}{L}, \quad (3.6-2)$$

siendo  $L$  la longitud del lecho fluidizado y  $\nu$  la viscosidad cinemática del vapor. También definimos un número de Reynolds de onda como,

$$\text{Re}_{k_i} = \frac{L}{\nu} k_i, \quad (3.6-3)$$

donde  $k_i$  es una velocidad de propagación. Utilizando (3.6-1)-(3.6-3) en (3.3-3) y (3.3-4) y reteniendo los términos del orden de  $10^{-4}$  o mayores (Apéndice J), obtenemos, el siguiente modelo simplificado de (3.3-3) y (3.3-4):

$$-a_1 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial \zeta^2} - a_2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \hat{\varepsilon}^* - b_1 \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial \zeta^2} - b_2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \hat{p}^* = 0, \quad (3.6-4)$$

$$a_3 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial \zeta^2} + a_4 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \hat{\varepsilon}^* + b_3 \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial \zeta^2} + b_4 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \hat{p}^* = 0, \quad (3.6-5)$$

donde los coeficientes de estas ecuaciones, están dados en la Tabla 3.5.

**Tabla 3.5.** Valor de los coeficientes de las ecuaciones de onda (3.6-4) y (3.6-5).

Coef. \ $i$	1	2	3	4
$a_i$	$p_0 \frac{v_{g0}^2}{a}$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}$	$\rho_s v_{s0}^2$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0}$
$b_i$	$\frac{p_0}{a} (v_{g0}^2 - a)$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}$	$p_0 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$	$\frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0)$

Con las ecuaciones (3.6-4) y (3.6-5), procederemos a obtener primero, una ecuación de onda para la fracción volumen de vapor y posteriormente una ecuación de onda para la presión.

### 3.6-2 ECUACIÓN DE ONDA PARA LA FRACCIÓN VOLUMEN DE VAPOR

Con fines de obtener una ecuación de onda para la fracción volumen de vapor, eliminaremos la segunda derivada espacial de la presión entre (3.6-4) y (3.6-5), para lo cual sumaremos el producto de (3.6-4) y (3.6-5) por  $1/b_1$  y  $1/b_3$  respectivamente, para tener:

$$\left( \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_1}{b_1} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + \left( \frac{a_4}{b_3} - \frac{a_2}{b_1} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\frac{a_4}{b_3} \lambda_{s1} - \frac{a_2}{b_1} \lambda_{g1}}{\frac{a_4}{b_3} - \frac{a_2}{b_1}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* + \left( \frac{b_4}{b_3} - \frac{b_2}{b_1} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\frac{b_4}{b_3} c_{s1} - \frac{b_2}{b_1} c_{g1}}{\frac{b_4}{b_3} - \frac{b_2}{b_1}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (3.6-6)$$

simplificando obtenemos:

$$(a_3 b_1 - a_1 b_3) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + (a_4 b_1 - a_2 b_3) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_4 b_1 \lambda_{s1} - a_2 b_3 \lambda_{g1}}{a_4 b_1 - a_2 b_3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* + (b_1 b_4 - b_2 b_3) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{b_1 b_4 c_{s1} - b_2 b_3 c_{g1}}{b_1 b_4 - b_2 b_3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (3.6-7)$$

resolver esta ecuación para la presión, o para su derivada espacial o temporal; es tarea difícil; sin embargo, el trabajo se facilita considerablemente si cambiamos el sistema coordinado de referencia a uno que viaje a la velocidad de la onda de presión de primer orden en (3.6-7); es decir, cambiar del sistema de laboratorio o Euleriano ( $e$ ) a un sistema Lagrangiano ( $l$ ) mediante una transformación de Galileo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_l = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_e + v_{srl1} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_e, \quad (3.6-8)$$

donde se selecciona la velocidad del sistema de referencia Lagrangiano, como la velocidad de la onda de presión para poder eliminar esta variable; es decir:  $v_{srl1} = \frac{b_1 b_4 c_{s1} - b_2 b_3 c_{g1}}{b_1 b_4 - b_2 b_3}$ .

La relación entre las derivadas espaciales en ambos sistemas coordinados, a tiempo fijo es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_l = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_e, \quad (3.6-9)$$

de ahora en adelante, por simplicidad no utilizaremos los subíndices que nos definen el sistema de referencia en el que nos encontramos; esperando que esto no cause alguna confusión y teniendo cuidado en el manejo de las ecuaciones. Aplicando estas dos reglas de transformación en (3.6-7), y resolviendo para la derivada temporal Lagrangiana de la presión, obtenemos:

$$(b_1 b_4 - b_2 b_3) \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial t} = (a_1 b_3 - a_3 b_1) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + (a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_4 b_1 \lambda_{s1} - a_2 b_3 \lambda_{g1}}{a_4 b_1 - a_2 b_3} - v_{srl1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^*. \quad (3.6-10)$$

A fin de tener un sistema de dos ecuaciones independientes expresados en el mismo sistema de referencia, aplicaremos (3.6-8) y (3.6-9) en (3.6-5),

$$a_3 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + a_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_{s1} - v_{srl1}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* + b_3 \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + b_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (c_{s1} - v_{srl1}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0. \quad (3.6-11)$$

Tomando la derivada temporal Lagrangiana de (3.6-11), y multiplicando el resultado por  $(b_1 b_4 - b_2 b_3)$  e introduciendo (3.6-10), obtenemos finalmente una ecuación de onda para la fracción volumen de vapor en el sistema de referencia Lagrangiano,

$$\begin{aligned}
& a_3 (b_1 b_4 - b_2 b_3) \frac{\partial^3 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2 \partial t} + a_4 (b_1 b_4 - b_2 b_3) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_{s1} - v_{sr1}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \hat{\varepsilon}^*}{\partial t} + b_3 (a_1 b_3 - a_3 b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + \\
& b_3 (a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_4 b_1 \lambda_{s1} - a_2 b_3 \lambda_{g1}}{a_4 b_1 - a_2 b_3} - v_{sr1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + \\
& b_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (c_{s1} - v_{sr1}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left\{ (a_1 b_3 - a_3 b_1) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + (a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_4 b_1 \lambda_{s1} - a_2 b_3 \lambda_{g1}}{a_4 b_1 - a_2 b_3} - v_{sr1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.6-12}$$

regresando al sistema de referencia original (Euleriano) utilizando (3.6-8) y (3.6-9), reagrupando y simplificando algebraicamente, finalmente obtenemos:

$$\left\{ \begin{aligned}
& (a_1 b_3 - a_3 b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \\
& (a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1 b_4 c_{s1} - a_3 b_2 c_{g1} + a_2 b_3 \lambda_{g1} - a_4 b_1 \lambda_{s1}}{a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{\varepsilon}^* = 0, \\
& (a_2 b_4 - a_4 b_2) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Sigma \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \Pi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \right\} \hat{\varepsilon}^* = 0, \tag{3.6-13}$$

donde,

$$\Sigma \equiv \frac{a_2 b_4 (c_{s1} + \lambda_{g1}) - a_4 b_2 (c_{g1} + \lambda_{s1})}{a_2 b_4 - a_4 b_2}, \tag{3.6-14}$$

$$\Pi \equiv \frac{a_2 b_4 (c_{s1} \lambda_{g1}) - a_4 b_2 (c_{g1} \lambda_{s1})}{a_2 b_4 - a_4 b_2}. \tag{3.6-15}$$

La onda de segundo orden, correspondiente al último término en (3.6-13), puede reescribirse como:

$$\left\{ \begin{aligned}
& (a_1 b_3 - a_3 b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \\
& (a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1 b_4 c_{s1} - a_3 b_2 c_{g1} + a_2 b_3 \lambda_{g1} - a_4 b_1 \lambda_{s1}}{a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{\varepsilon}^* = 0, \\
& (a_2 b_4 - a_4 b_2) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right)
\end{aligned} \right\} \hat{\varepsilon}^* = 0, \tag{3.6-16}$$

$$\text{donde, } l_2^\pm = \frac{\Sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma}{2}\right)^2 - \Pi}.$$

### 3.6-3 ECUACIÓN DE ONDA PARA LA PRESIÓN

A continuación, mediante un procedimiento análogo al desarrollado anteriormente, obtendremos una ecuación de onda para la presión. Para lo cual, eliminaremos la segunda derivada espacial de la fracción volumen de vapor entre (3.6-4) y (3.6-5), sumando los productos de (3.6-4) y (3.6-5) por  $1/a_1$  y  $1/a_3$  respectivamente, para tener:

$$\left(\frac{a_4 - a_2}{a_3 - a_1}\right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\frac{a_4 \lambda_{s1} - a_2 \lambda_{g1}}{a_3 - a_1}}{\frac{a_4 - a_2}{a_3 - a_1}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon} + \left( \frac{b_3 - b_1}{a_3 - a_1} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + \left( \frac{b_4 - b_2}{a_3 - a_1} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\frac{b_4 c_{s1} - b_2 c_{g1}}{a_3 - a_1}}{\frac{b_4 - b_2}{a_3 - a_1}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (3.6-17)$$

simplificando obtenemos:

$$(a_1 a_4 - a_2 a_3) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1 a_4 \lambda_{s1} - a_2 a_3 \lambda_{g1}}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + (a_1 b_4 - a_3 b_2) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1 b_4 c_{s1} - a_3 b_2 c_{g1}}{a_1 b_4 - a_3 b_2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (3.6-18)$$

En forma similar, en este caso la transformación de Galileo es la misma que (3.6-8), pero la velocidad del sistema de referencia Lagrangiano ahora es la de la onda de fracción volumen; ya que al hacer esto, podremos eliminar esta variable en el resto del desarrollo:

$$v_{srl2} = \frac{a_1 a_4 \lambda_{s1} - a_2 a_3 \lambda_{g1}}{a_1 a_4 - a_2 a_3}.$$

Utilizando las transformaciones definidas en (3.6-8) y (3.6-9) en (3.6-18), y resolviendo para la derivada temporal Lagrangiana de la fracción volumen de vapor, obtenemos:

$$(a_1a_4 - a_2a_3) \frac{\partial \hat{\varepsilon}^*}{\partial t} = (a_3b_1 - a_1b_3) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + (a_3b_2 - a_1b_4) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1b_4c_{s1} - a_3b_2c_{g1}}{a_1b_4 - a_3b_2} - v_{sr12} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^*.$$

(3.6-19)

Con la finalidad de tener un sistema de dos ecuaciones independientes expresados en el mismo sistema de referencia, aplicaremos (3.6-8) y (3.6-9) en (3.6-5),

$$a_3 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + a_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_{s1} - v_{sr12}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\varepsilon}^* + b_3 \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + b_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (c_{s1} - v_{sr12}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* = 0,$$

(3.6-20)

tomando la derivada temporal Lagrangiana de (3.6-20), y multiplicando el resultado por  $(a_1a_4 - a_2a_3)$  e introduciendo (3.6-19), obtenemos finalmente una ecuación de onda para la presión en el sistema de referencia Lagrangiano,

$$\begin{aligned} & a_3 (a_3b_1 - a_1b_3) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \hat{p}^* + a_3 (a_3b_2 - a_1b_4) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1b_4c_{s1} - a_3b_2c_{g1}}{a_1b_4 - a_3b_2} - v_{sr12} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + \\ & a_4 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_{s1} - v_{sr12}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left\{ (a_3b_1 - a_1b_3) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + (a_3b_2 - a_1b_4) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1b_4c_{s1} - a_3b_2c_{g1}}{a_1b_4 - a_3b_2} - v_{sr12} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* \right\} + \\ & b_3 (a_1a_4 - a_2a_3) \frac{\partial^3 \hat{p}^*}{\partial z^2 \partial t} + b_4 (a_1a_4 - a_2a_3) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (c_{s1} - v_{sr12}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

(3.6-21)

regresando al sistema de referencia original, agrupando y simplificando algebraicamente, finalmente obtenemos:

$$\left\{ \begin{aligned} & (a_1b_3 - a_3b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \\ & (a_1b_4 - a_3b_2 + a_2b_3 - a_4b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1b_4c_{s1} - a_3b_2c_{g1} + a_2b_3\lambda_{g1} - a_4b_1\lambda_{s1}}{a_1b_4 - a_3b_2 + a_2b_3 - a_4b_1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\ & (a_2b_4 - a_4b_2) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Sigma \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \Pi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \hat{p}^* = 0,$$

(3.6-22)

donde,  $\Sigma$  y  $\Pi$  están definidos en (3.6-14) y (3.6-15).

La onda de segundo orden, correspondiente al último término en (3.6-22), puede reescribirse como,

$$\left[ \begin{aligned} & (a_1 b_3 - a_3 b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \\ & (a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{a_1 b_4 c_{s1} - a_3 b_2 c_{g1} + a_2 b_3 \lambda_{g1} - a_4 b_1 \lambda_{s1}}{a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{p}^* = 0, \\ & (a_2 b_4 - a_4 b_2) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] \hat{p}^* = 0, \quad (3.6-23)$$

que es el mismo operador diferencial de (3.6-16), aplicado a la presión. Entonces podemos concluir que, en general,

$$\left[ K_{M4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + K_{M3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + C_{M3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_{M2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}^* = 0, \quad (3.6-24)$$

donde:  $\psi^* = \varepsilon^*, p^*, v_g^*, v_s^*$ , con  $v_g^* = \frac{v_g}{v_{g0}}$ ,  $v_s^* = \frac{v_s}{v_{s0}}$ , y  $l_2^\pm = \frac{L_2^\pm}{K_{M2}}$ . Los coeficientes y velocidades de propagación, se presentan en la Tabla 3.6.

**Tabla 3.6.** Valor de los coeficientes ( $K_{Mi}$ ) y velocidades de propagación ( $C_{Mi}$ ) de la ecuación de onda (3.6-24).

<i>i</i>	2	3	4
$K_{Mi}$	$a_2 b_4 - a_4 b_2$	$a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1$	$a_1 b_3 - a_3 b_1$
$C_{Mi}$	$\frac{\Sigma}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\Sigma}{2} \right)^2 - \Pi}$ $l_2^+ = 7.3055 \frac{m}{s}$ $l_2^- = -26.02 \frac{m}{s}$	$\frac{a_1 b_4 c_{s1} - a_3 b_2 c_{g1} + a_2 b_3 \lambda_{g1} - a_4 b_1 \lambda_{s1}}{a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1}$ $= 7.2110 \frac{m}{s}$	—

Resulta interesante resaltar la información física contenida en los coeficientes y en las velocidades de propagación en donde intervienen las propiedades de las dos fases.

El coeficiente del término de cuarto orden en la ecuación de onda (3.6-24),

$$\begin{aligned} K_{M4} &= a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ &= \frac{p_0}{a} (1 - \varepsilon_0) v_{g0}^2 - \rho_s v_{s0}^2 \frac{\varepsilon_0}{a} (v_{g0}^2 - a), \end{aligned} \quad (3.6-25)$$

manifiesta la compresibilidad de la fase vapor dada por el cuadrado de la velocidad del sonido,  $a$ . El coeficiente de la onda de segundo orden,

$$\begin{aligned} K_{M2} &= a_2 b_4 - a_4 b_2 \\ &= -\frac{72}{D_t d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_0}{a} f_{gF} v_{g0} + \frac{1 - \varepsilon_0}{p_0} \rho_s f_{sF} v_{s0} \right) - \frac{16 f_{sF} f_{gF}}{a D_t^2} \varepsilon_0 \rho_s v_{s0} v_{g0}, \end{aligned} \quad (3.6-26)$$

representa la importancia de la fricción en la pared del tubo. El coeficiente del término de tercer orden,  $K_{M3}$ :

$$\begin{aligned} K_{M3} &= a_1 b_4 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_1 \\ &= \frac{18}{d_p^2} \mu_g \left[ 1 - \frac{1}{a} (\varepsilon_0 v_{g0})^2 - \frac{\rho_s v_{s0}^2}{p_0} \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \right] + \\ &\quad \frac{4 f_{gF}}{a D_t} p_0 v_{g0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\rho_s v_{s0}^2}{p_0} \right) \varepsilon_0 \right] - \frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} \frac{\varepsilon_0}{a} v_{s0} (v_{g0}^2 - a) \end{aligned} \quad (3.6-27)$$

considera efectos de interacción entre las fases, además de los efectos de fricción en la pared del tubo.

Como puede notarse del análisis de los coeficientes en (3.6-25)-(3.6-27), resultan de importancia los efectos de la pared del tubo en la ecuación de onda (3.6-24), enseguida analizaremos el caso particular que se obtiene al despreciar dichos efectos, en la ecuación de onda.

### 3.7 ECUACIÓN DE ONDA DESPRECIANDO LOS EFECTOS DE PARED

Un caso particular importante es en el cual no se consideran los efectos de pared:  $f_{kF} = 0$ , para  $k = g, s$  con lo cual, los coeficientes definidos en la Tabla 3.5 se simplifican:

$$a_2 = a_4 = a_2^* = \frac{18}{d_p^2} \mu_g \quad \text{y} \quad b_2 = b_4 = b_2^* = \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0), \quad \text{y (3.6-23) se reduce a:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (a_1 b_3 - a_3 b_1) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \\ & \left[ b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{b_2^* (a_1 c_{s1} - a_3 c_{g1}) + a_2^* (b_3 \lambda_{g1} - b_1 \lambda_{s1})}{b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1)} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\ & a_2^* b_2^* \left[ (c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{c_{s1} \lambda_{g1} - c_{g1} \lambda_{s1}}{(c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1})} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \hat{\psi}_s^* = 0. \quad (3.7-1)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \begin{aligned} & (a_1 b_3 - a_3 b_1) \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \\ & \left[ b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{b_2^* (a_1 c_{s1} - a_3 c_{g1}) + a_2^* (b_3 \lambda_{g1} - b_1 \lambda_{s1})}{b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1)} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} + \\ & a_2^* b_2^* \left[ (c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{c_{s1} \lambda_{g1} - c_{g1} \lambda_{s1}}{(c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1})} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \hat{\psi}_s^* = 0, \quad (3.7-2)$$

o bien,

$$\left\{ \begin{aligned} & (a_1 b_3 - a_3 b_1) \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \\ & \left[ b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{b_2^* (a_1 c_{s1} - a_3 c_{g1}) + a_2^* (b_3 \lambda_{g1} - b_1 \lambda_{s1})}{b_2^* (a_1 - a_3) + a_2^* (b_3 - b_1)} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{\partial}{\partial z} + \\ & a_2^* b_2^* \left[ (c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{c_{s1} \lambda_{g1} - c_{g1} \lambda_{s1}}{(c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1})} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \hat{\psi}_s^* = f(t). \quad (3.7-3)$$

Agrupando análogamente a (3.6-24), en coeficientes y velocidades de propagación (3.7-3), tenemos:

$$\left[ K_{M4} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + K_{M2s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2^s \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} + K_{M1s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}_s^* = f(t), \quad (3.7-4)$$

con:

$$K_{M2s} = b_2^*(a_1 - a_3) + a_2^*(b_3 - b_1), \quad (3.7-5)$$

$$K_{M1s} = a_2^* b_2^* \left[ (c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1}) \right], \quad (3.7-6)$$

$$v_2^s = \frac{b_2^*(a_1 c_{s1} - a_3 c_{g1}) + a_2^*(b_3 \lambda_{g1} - b_1 \lambda_{s1})}{b_2^*(a_1 - a_3) + a_2^*(b_3 - b_1)}, \quad (3.7-7)$$

$$v_1 = \frac{c_{s1} \lambda_{g1} - c_{g1} \lambda_{s1}}{(c_{s1} + \lambda_{g1}) - (c_{g1} + \lambda_{s1})}. \quad (3.7-8)$$

Cuando en (3.7-4),  $f(t)$  y  $b_2^*(a_1 - a_3) + a_2^*(b_3 - b_1)$ , son iguales a cero, obtenemos la forma de una ecuación de Korteweg-de Vries linealizada; la cual es una ecuación ampliamente estudiada en la mecánica de fluidos asociada con fenómenos ondulatorios (Whitham, 1974; Lighthill, 1978; Brekhovskikh y Goncharov, 1994).

### 3.8 RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LAS ECUACIONES DE ONDA

En esta sección, retomamos y discutimos brevemente los resultados más sobresalientes hasta el momento, resaltándolos en la siguiente Tabla.

**Tabla 3.7.** Resumen de los principales resultados obtenidos al generar una ecuación de onda para los procesos considerados incompresible y compresible.

M O D E L O	E C U A C I Ó N D E O N D A
INCOMPRESIBLE (3.4-10)	$\left[ K_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right) - K_3 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}^* = 0$
COMPRESIBLE CON EFECTOS DE PARED (3.6-24)	$\left[ K_{M4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + K_{M3} \left( \frac{\partial}{\partial t} + C_{M3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_{M2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^+ \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + l_2^- \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}^* = 0$
COMPRESIBLE SIN EFECTOS DE PARED (3.7-4)	$\left[ K_{M4} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + K_{M2s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2^s \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} + K_{M1s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}^*_s = f(t)$

Las coeficientes y velocidades de propagación de estas ecuaciones se muestran en las Tablas 3.4 y 3.6, así como en las ecuaciones (3.7-5)-(3.7-8).

Es muy importante resaltar el hecho de tener una ecuación de onda unificada, que represente la propagación de una pequeña perturbación en cualquier variable hidrodinámica del lecho fluidizado; es decir, que a nivel ondulatorio, no es necesario distinguir entre las variables perturbadas, debido a que todas se propagan de la misma manera.

Nótese que la ecuación de onda del modelo compresible, representada en el segundo renglón de la Tabla 3.7, es una ecuación de onda superior de cuarto orden; en donde, el cuarto orden corresponde a un elemento de la traza de un operador biarmónico, que no tiene una velocidad de propagación asociada. Además, esta ecuación de onda, no tiene onda de primer orden, a diferencia de (3.3-4) y (3.3-5); por otro lado, en esta ecuación, si hay onda de segundo orden completa y tercer orden, en forma equivalente a (3.3-3) y (3.3-4).

Observe en la Tabla 3.7, como los efectos de pared influyen en la estructura de la ecuación de onda del modelo compresible; concretamente, en el orden del modelo de una ecuación. Su consideración lleva a un modelo de cuarto orden y al despreciarlos a uno de tercero. Además, este modelo resulta incompleto ya que falta el término temporal de segundo orden, y como consecuencia la onda de segundo orden se vuelve degenerada.

Resulta de interés calcular y comparar los tiempos de relajación ( $t_R$ ) de los procesos ondulatorios incompresible y compresible. Estos pueden obtenerse a partir del coeficiente del término temporal de segundo orden.

El tiempo de relajación del modelo incompresible se calcula como:

$$t_{RI} = \left| \frac{K_2}{K_1} \right|, \quad (3.8-1)$$

por otro lado, el tiempo de relajación del modelo compresible puede calcularse con:

$$t_{RC} = \left| L^2 \frac{K_{M2}}{K_{M3}} \right|. \quad (3.8-2)$$

Al sustituir valores de la Tabla 3.1, obtenemos que  $t_{RI} \approx 8.3 \text{ ms}$  y  $t_{RC} \approx 44.2 \text{ ms}$ , debido a que el orden de magnitud del tiempo de relajación del proceso ondulatorio asociado al modelo incompresible es un orden de magnitud mayor que el del compresible, reafirmamos lo que habíamos dicho al inicio del Capítulo, acerca de como la respuesta del medio incompresible ante la perturbación es inmediata debido a que se transmite en él con velocidad infinita; en tanto que, en el proceso compresible, se requiere de un tiempo mayor para que el medio alcance el equilibrio; es decir, la información debida a la perturbación provocada, se transmite en el medio con velocidad finita.

Podemos decir que la compresibilidad es una propiedad que tiende a restaurar el equilibrio, por lo que decimos que favorece a la estabilidad, en forma similar a la elasticidad del medio en un sistema mecánico.

En la siguiente sección se presenta un análisis de estabilidad lineal de los modelos obtenidos de una ecuación de onda, considerando los efectos de pared y despreciándolos.

### 3.9 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

Existen diversos criterios para analizar la estabilidad de un sistema. En esta sección adoptaremos el análisis de las velocidades de propagación en la sección 3.9-1, el asociado a la relación de dispersión en la 3.9-2 y finalmente en la 3.9-3 se considerará la solución analítica de la ecuación de onda del modelo compresible.

Las inestabilidades en un sistema son producto de la interacción entre las ondas que se dan en él. Mediante el análisis de las velocidades de propagación puede representarse esto en forma gráfica.

#### 3.9-1 ANÁLISIS DE LAS VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN

El criterio de estabilidad más utilizado es el de Wallis (1969) y Whitham (1974), que surge de proponer estabilidad exponencial, este criterio establece que si la velocidad de propagación de la onda de primer orden se encuentra acotada entre las dos velocidades de propagación de las ondas de segundo orden, el sistema es estable; esto es,  $C_{2M}^- < C_{1M} < C_{2M}^+$ , en caso contrario el sistema es inestable. Sin embargo, en el presente trabajo tenemos ondas de segundo y tercer orden, ecuación (3.6-24) Tabla 3.7. En analogía al criterio antes mencionado, en esta sección analizaremos si hay intersecciones en el plano fase entre las ondas de segundo orden y la onda de tercer orden.

Con el propósito de hacer un análisis de estabilidad lineal, se graficarán las velocidades de propagación de la Tabla 3.6 considerando y despreciando los efectos de pared, manteniendo una velocidad superficial de vapor fija de  $7 \frac{m}{s}$  (resultado del estado uniforme utilizado) y partículas de catalizador de un diámetro medio de  $60 \mu m$ . Para no alterar mucho la estructura turbulenta, se varió la cantidad de sólidos que circulan en el lecho fluidizado en vez de aumentar el flujo de vapor para producir diversos valores de  $\epsilon_s$ . La principal utilidad de las gráficas, es que nos permiten determinar si las ondas en los modelos (3.6-24) y (3.7-4) interaccionan, esto sucede si sus gráficas en el espacio fase presentan intersecciones.

Para los diversos estados uniformes, se provocan pequeñas perturbaciones variando la tasa superficial de gas alrededor del estado uniforme utilizado en todo el trabajo y definido en los valores de la Tabla 3.1; es decir, disminuyendo y aumentando la velocidad superficial del vapor a  $6 \frac{m}{s}$  y  $8 \frac{m}{s}$ , respectivamente.

VELOCIDADES DE LAS ONDAS vs LA FRACCIÓN VOLUMEN DE SÓLIDOS, MANTENIENDO UNA VELOCIDAD SUPERFICIAL DE VAPOR DE  $7 \frac{m}{s}$

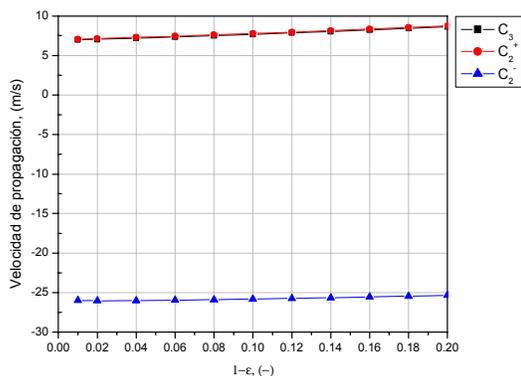


Fig. 3.2a

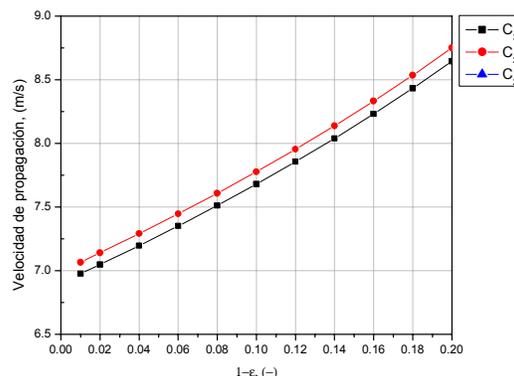


Fig. 3.2b

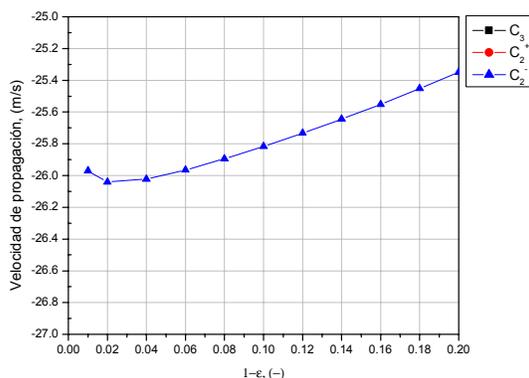


Fig. 3.2c

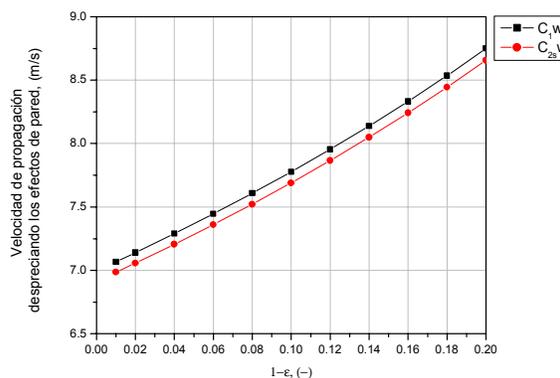


Fig. 3.2d

Figura 3.2. (a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado.

VELOCIDADES DE LAS ONDAS vs LA FRACCIÓN VOLUMEN DE SÓLIDOS, MANTENIENDO UNA VELOCIDAD SUPERFICIAL DE VAPOR DE  $6 \frac{m}{s}$

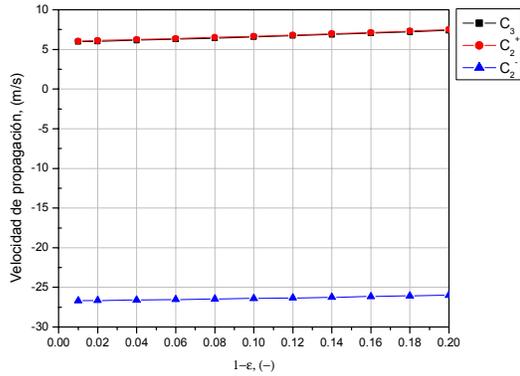


Fig. 3.3a

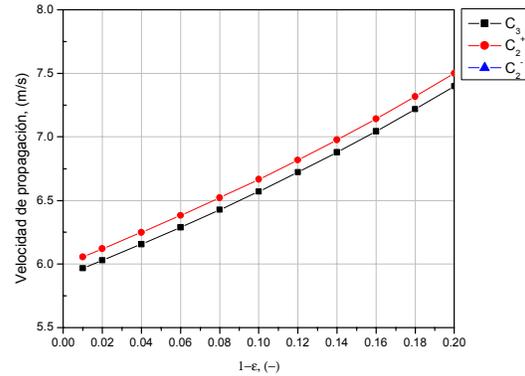


Fig. 3.3b

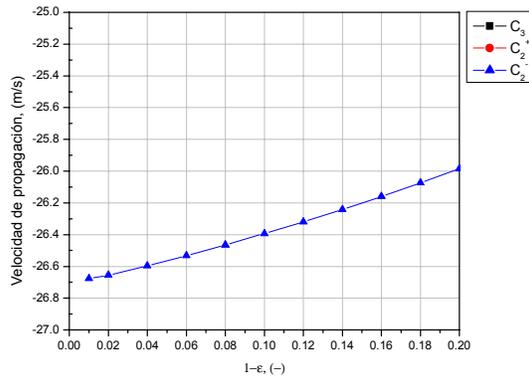


Fig. 3.3c

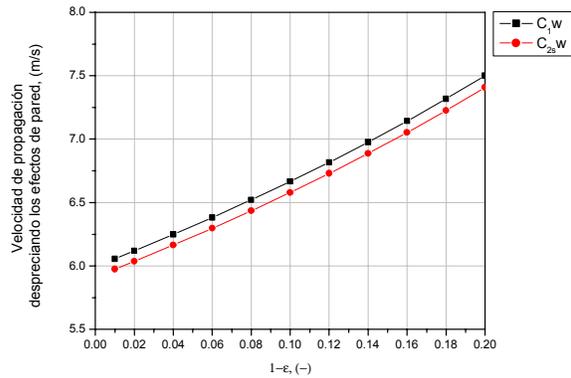


Fig. 3.3d

**Figura 3.3.** (a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado.

VELOCIDADES DE LAS ONDAS vs LA FRACCIÓN VOLUMEN DE SÓLIDOS, MANTENIENDO UNA VELOCIDAD SUPERFICIAL DE VAPOR DE  $8 \frac{m}{s}$

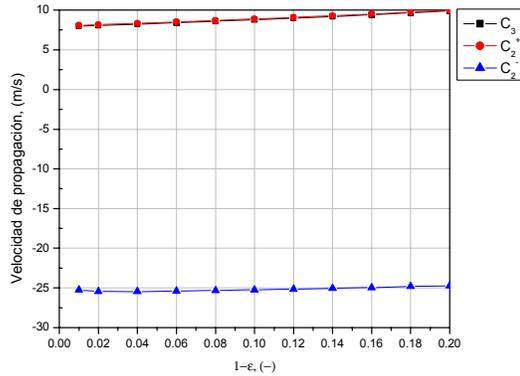


Fig. 3.4a

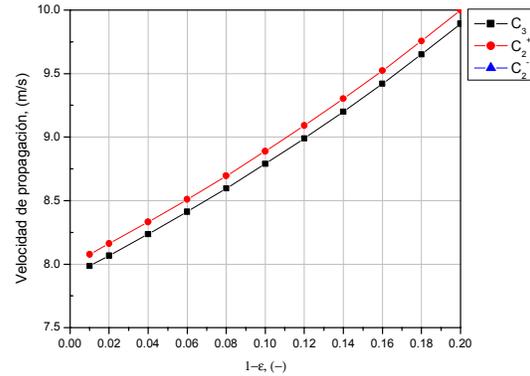


Fig. 3.4b

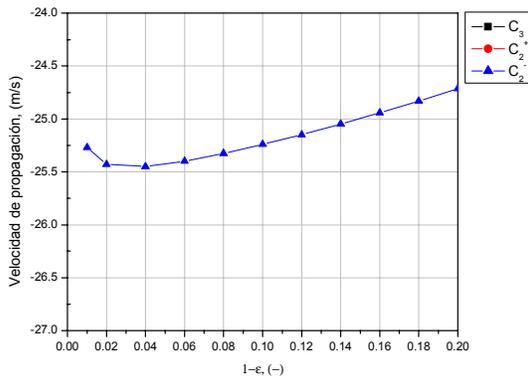


Fig. 3.4c

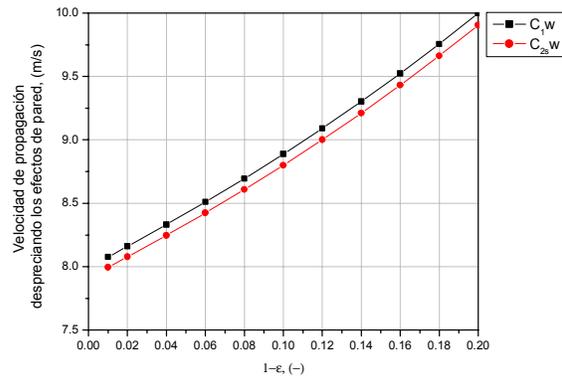


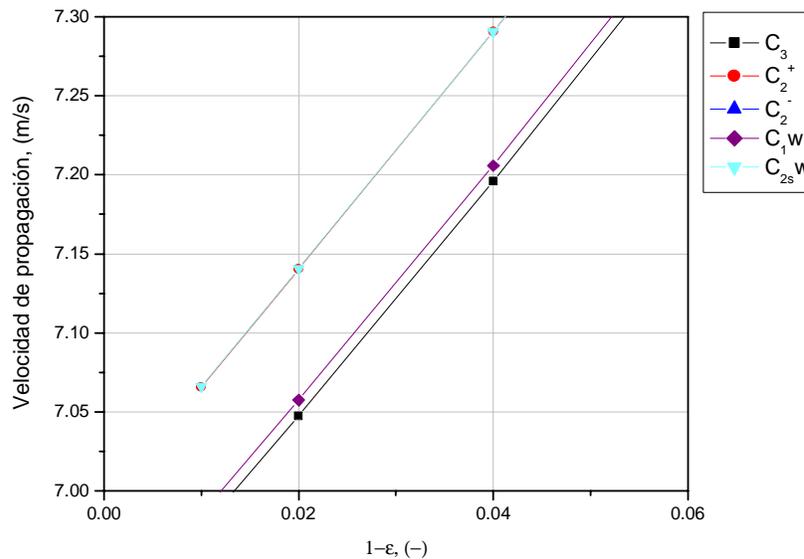
Fig. 3.4d

Figura 3.4. (a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado.

Nótese que en las figuras 3.2b, 3.3b y 3.4b la onda de tercer orden, siempre está por debajo de la onda mayor de segundo orden, y como puede apreciarse en las figuras 3.2a, 3.3a y 3.4a también la onda de tercer orden está acotada por abajo con la onda menor de segundo orden; es decir, las ondas de tercer y segundo orden no interactúan, sería interesante poder aplicar el criterio de estabilidad discutido anteriormente, pero en este caso no es aplicable, puesto que no tenemos onda de primer orden.

Las velocidades de las ondas son iguales al considerar los efectos de pared y despreciarlos, como puede verse en las figuras 3.2b-3.2d, 3.3b-3.3d y 3.4b-3.4d, debido a que el orden de magnitud del término de arrastre viscoso es cinco y dos órdenes mayor al de los efectos de pared del gas y sólido, respectivamente lo cual hace que el arrastre sea un factor dominante.

La figura 3.5, muestra un acercamiento en la superposición de las gráficas con y sin efectos de pared, notándose que no hay una separación apreciable entre las velocidades de propagación al considerar y despreciar los efectos de pared. Sin embargo, la estructura de la ecuación de onda es sensible a este efecto como ya se discutió anteriormente.



**Figura 3.5.** Superposición de las gráficas con y sin efectos de pared, para una velocidad superficial de gas de  $7 \frac{m}{s}$ .

Cuando se desprecian los efectos de pared, la onda de segundo orden pierde el término temporal de segundo orden; teniéndose, una onda de primer orden actuando en una primera derivada espacial, a dicha onda le llamamos onda degenerada de segundo orden, y que viaja con una velocidad ( $C_{2s}$ ). De aquí se sigue que al despreciar los efectos de pared, no podemos seguir hablando de estabilidad bajo este mismo criterio.

Otra forma de analizar y determinar si un sistema es estable o no, es mediante la relación de dispersión, como en seguida se aborda.

## 3.9-2 RELACIÓN DE DISPERSIÓN Y CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Consideremos ahora las propiedades matemáticas de las ondas no hiperbólicas, denominadas “dispersivas”; para las cuales, se reconoce la existencia de soluciones elementales en la forma de trenes de onda sinusoidales (Whitham, 1974),

$$\hat{\psi}^*(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3.9-1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $A$  es una constante llamada la amplitud compleja (Landau y Lifshitz, 1959):  $A = a e^{i\alpha}$ , con constantes reales  $a$  y  $\alpha$ , por lo que (3.9-1) puede expresarse como:

$$\hat{\psi}^*(\mathbf{x}, t) = a e^{i(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha)}. \quad (3.9-2)$$

La constante  $a$  es la amplitud de la onda, y el argumento que multiplica a la parte imaginaria en la exponencial ( $\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha$ ) es la “fase”. Sea  $\mathbf{n}_\omega$  un vector unitario en la dirección de propagación. El vector

$$\mathbf{\kappa} = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \mathbf{n}_\omega, \quad (3.9-3)$$

es el “vector número de onda”, y donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

Al sustituir (3.9-1) en una ecuación de onda, nos lleva a una relación algebraica entre las variables  $\omega$  y  $\mathbf{\kappa}$  conocida como la relación de dispersión de esa onda, y que contiene toda la información de la ecuación de onda; de tal manera, que a partir de ella puede obtenerse la ecuación de onda y viceversa.

Al tener una ecuación algebraica entre  $\omega$  y  $\mathbf{\kappa}$  tenemos un grado de libertad; es decir, si fijamos  $\omega$  real obtenemos valores de  $\mathbf{\kappa}$  complejos; del mismo modo, si fijamos  $\mathbf{\kappa}$  reales obtenemos valores de  $\omega$  complejos. En el primer caso podemos analizar la estabilidad en el espacio a tiempo fijo, y en el segundo, estabilidad en el tiempo en un punto fijo; es decir, si pensamos en el espacio tridimensional, donde las coordenadas sean:  $\omega$  ó  $\mathbf{\kappa}$ ,  $z$  y  $t$  y graficamos la relación de dispersión, generaremos un volumen; para interpretar el caso de la estabilidad en una posición fija, nos movemos en el plano  $(\omega$  ó  $\mathbf{\kappa})-t$ , observando una superficie, por otro lado, si nos desplazamos en el plano  $(\omega$  ó  $\mathbf{\kappa})-z$ , analizaremos la estabilidad espacial a tiempo fijo. Estos dos análisis son equivalentes debido a que las dos superficies corresponden al mismo volumen de la representación tridimensional de la relación de dispersión.

Asumiremos que la relación de dispersión puede resolverse en la forma de raíces reales

$$\omega = W(\mathbf{\kappa}). \quad (3.9-4)$$

Definiremos un concepto que es muy importante al hablar de ondas dispersivas, que es la velocidad de fase  $c_f$ , representada por:

$$\mathbf{c}_f = \left( \frac{\omega}{\kappa} \right) \mathbf{n}_\omega. \quad (3.9-5)$$

Si para algún modo de vibración particular  $\omega = W(\boldsymbol{\kappa})$ , la velocidad de fase es una función de  $\kappa$ , la onda es dispersiva; y en caso contrario, la onda no es dispersiva. En particular, para la ecuación de onda hiperbólica:  $\partial^2 \hat{\psi}^* / \partial t^2 = c_s^2 \nabla^2 \hat{\psi}^*$ , cuya velocidad de fase es independiente de  $\kappa$  y además es igual a la velocidad de propagación, tenemos ondas no dispersivas. Por tal razón, se excluye el caso de  $\mathbf{c}_f$  constante de las ondas dispersivas.

Por otra parte, para garantizar que la onda en estudio sea dispersiva, restringiremos el término dispersivo por las siguientes dos condiciones (Whitham, 1974):

$$W(\boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}, \text{ y } \det \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j} \right| \neq 0, \quad (3.9-6)$$

para problemas unidimensionales, la segunda condición se reduce a:

$$W''(\kappa) \neq 0. \quad (3.9-7)$$

En ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes del tipo,

$$P \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \hat{\psi}^* = 0, \quad (3.9-8)$$

donde  $P$  es un polinomio, la correspondencia entre la ecuación de onda y la relación de dispersión (Whitham, 1974) se encuentra al sustituir (3.9-1) en la ecuación. Cada  $\partial/\partial t$  produce un factor  $-i\omega$ , y cada  $\partial/\partial x_j$  produce un factor  $i\kappa_j$ ; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_j} \leftrightarrow i\kappa_j. \quad (3.9-9)$$

De acuerdo con esto, la relación de dispersión para (3.9-8) debe ser:

$$P(-i\omega, i\kappa_1, i\kappa_2, i\kappa_3) = 0. \quad (3.9-10)$$

En nuestro caso particular, en (3.9-1)  $\mathbf{x} = z \mathbf{e}_z$  y entonces  $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} = \kappa_z$  o simplemente  $\kappa$ , lo cual quiere decir que las ondas viajan en la dirección ascendente del tubo elevador, lo cual es consistente con todo nuestro desarrollo.

Utilizando el resultado expresado en (3.9-9), las relaciones de dispersión de las ecuaciones de onda, sin efectos de pared (3.7-4) y con efectos de pared (3.6-24) son; respectivamente,

$$\kappa^3 + \left( -\frac{K_{M2s}V_2^s}{K_{M4}} i \right) \kappa^2 + \left( -\frac{K_{M1s}V_1}{K_{M4}} + \frac{K_{M2s}\omega}{K_{M4}} i \right) \kappa + \left( \frac{K_{M1s}}{K_{M4}} \omega \right) = 0, \quad (3.9-11)$$

$$\kappa^4 + \left( -\frac{K_{M3}C_{M3}}{K_{M4}} i \right) \kappa^3 + \left( -\frac{K_{M2}l_2^+l_2^-}{K_{M4}} + \frac{K_{M3}\omega}{K_{M4}} i \right) \kappa^2 + \left( \frac{K_{M2}l_2^+\omega}{K_{M4}} + \frac{K_{M2}l_2^-\omega}{K_{M4}} \right) \kappa + \left( -\frac{K_{M2}\omega^2}{K_{M4}} \right) = 0. \quad (3.9-12)$$

(3.9-11) es de tercer grado en  $\kappa$  y de primero en  $\omega$ ; en tanto que, (3.9-12) es de cuarto grado en  $\kappa$  y de segundo en  $\omega$ . Ahora obtendremos las raíces de las ecuaciones (3.9-11) y (3.9-12).

### RAÍCES DE LAS RELACIONES DE DISPERSIÓN

Es posible obtener en forma analítica las raíces de (3.9-11) y (3.9-12); sin embargo, debido a que los coeficientes dependen de otros coeficientes y los últimos de los parámetros físicos del lecho fluidizado, es muy engorroso y además laborioso obtenerlos así, aunque sería deseable, ya que al tener las raíces en términos de los parámetros del lecho fluidizado, de ellas se desprenden condiciones de estabilidad que deben evaluarse de acuerdo a la física del sistema en consideración (tubo elevador de una unidad de FCC).

En este estudio, nos contentaremos solamente con obtener numéricamente las raíces de (3.9-11) y (3.9-12).

Analizaremos los dos tipos de estabilidad que pueden estudiarse con la relación de dispersión: estabilidad en la dirección axial del tubo elevador a tiempo fijo y estabilidad en el tiempo en un punto fijo del tubo elevador.

#### Estabilidad en la dirección axial del tubo elevador

En las Tablas 3.8 y 3.9 están las raíces de las relaciones de dispersión (3.9-11) y (3.9-12) respectivamente, obtenidas al evaluar en el estado uniforme todos los parámetros de estas ecuaciones y considerar diferentes frecuencias típicas en un lecho fluidizado.

**Tabla 3.8.** Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda con efectos de pared, (3.9-12) obtenidos al dar valores reales de  $\omega$ .

FRECUENCIA $\omega$ , (Hz)	RAÍZ $\kappa$ , ( $m^{-1}$ )
1	$-0.1387 + (16.565)i$ $0.1387 - (0.00114)i$ $-0.0054 - (0.0047)i$ $0.0054 + (0.0062)i$
10	$1.3684 + (16.6763)i$ $1.3684 - (0.1123)i$ $-0.017 - (0.0163)i$ $0.017 + (0.0178)i$
20	$2.6426 + (16.9754)i$ $2.6426 - (0.4114)i$ $-0.0241 - (0.0234)i$ $0.0241 + (0.0249)i$
50	$-5.7094 + (18.3413)i$ $5.7094 - (1.7773)i$ $-0.0381 - (0.0374)i$ $0.0381 + (0.0389)i$
80	$-7.9867 + (19.7876)i$ $7.9867 - (3.2236)i$ $-0.0482 - (0.0474)i$ $0.0482 + (0.04895)i$
100	$-9.25096 + (20.6986)i$ $9.25096 - (4.1346)i$ $-0.0539 - (0.0531)i$ $0.0539 + (0.05464)i$

150	$-11.8904 + (22.7725)i$ $11.8904 - (6.2085)i$ $-0.066 - (0.065243)i$ $0.066 (0.06675)i$
200	$-14.0706 (24.6091)i$ $14.0706 - (8.04502)i$ $-0.0762 - (0.075452)i$ $0.0762 (0.07696)i$

**Tabla 3.9.** Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda sin efectos de pared, (3.9-11) obtenidos al dar valores reales de  $\omega$ .

FRECUENCIA $\omega$ , (Hz)	RAÍZ $\kappa$ , ( $m^{-1}$ )
1	$-0.1385 (16.5419)i$ $0.1385 - (0.0011364)i$ $3.20092 \times 10^{-7} + (0.001934)i$
10	$1.3665 + (16.6528)i$ $1.3665 (0.11211)i$ $3.20152 \times 10^{-8} + (0.001934)i$
20	$2.63894 + (16.9515)i$ $2.63894 (0.4108)i$ $1.60076 \times 10^{-8} + (0.001934)i$
50	$5.7015 + (18.3156)i$ $5.7015 - (1.7748)i$ $6.4031 \times 10^{-9} + (0.001934)i$
80	$-7.9756 + (19.7599)i$ $7.97564 - (3.2192)i$ $4.00191 \times 10^{-9} + (0.001934)i$

100	$-9.2381 + (20.6696)i$ $9.2381 - (4.1289)i$ $3.20152 \times 10^{-9} + (0.001934)i$
150	$-11.8739 + (22.7406)i$ $11.8739 - (6.1999)i$ $2.13435 \times 10^{-9} + (0.001934)i$
200	$-14.051 + (24.5746)i$ $14.051 - (8.0339)i$ $1.60076 \times 10^{-9} + (0.001934)i$

Algo que podemos observar en las Tablas 3.8 y 3.9, es que los valores absolutos de las raíces se hacen más grandes al incrementar la frecuencia. Para analizar si el sistema es estable o no, debemos sustituir estas raíces en (3.9-1). Con fines de simplificar el análisis, haremos que,

$$\kappa_l = \kappa_{r_l} + \kappa_{i_l}i, \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (3.9-13)$$

sustituyendo (3.9-13) en (3.9-1), y considerando que  $\mathbf{x} = z \mathbf{e}_z$ , obtenemos al simplificar el resultado:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^*(z, t) &= \sum_{l=1}^4 A_l e^{-\kappa_{i_l} z + i(\kappa_{r_l} z - \omega t)} \\ &= \sum_{l=1}^4 A_l e^{-\kappa_{i_l} z} \left[ \cos(\kappa_{r_l} z - \omega t) + i \sin(\kappa_{r_l} z - \omega t) \right], \end{aligned} \quad (3.9-14)$$

donde el resultado expresado en (3.9-14), es la combinación lineal de la solución (3.9-1) para cada una de las raíces. Como podemos notar en (3.9-14), el sistema será estable ante pequeñas perturbaciones si  $\kappa_{i_l} > 0$ , e inestable si  $\kappa_{i_l} < 0$ .

En el caso donde hay efectos de pared, Tabla 3.8, vemos que de las cuatro raíces, dos tienen parte imaginaria positiva y dos negativa; y entonces, en la combinación lineal el sistema es inestable.

#### Estabilidad temporal en el tubo elevador

Si por otra parte, ahora fijamos un valor real del número de onda  $\kappa$ , dando los valores de la parte real de  $\kappa$  obtenidos en el análisis anterior, obtenemos valores de  $\omega$  complejos. En el caso particular de la ecuación con efectos de pared, (3.9-12), se obtienen

dos raíces complejas de  $\omega$ . En la Tabla 3.10, se presentan sólo algunos valores de las raíces.

**Tabla 3.10.** Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda con efectos de pared, (3.9-12), obtenidos al dar los primeros dos valores reales de  $\kappa$  del análisis anterior.

NÚMERO DE ONDA $\kappa$ , ( $\text{m}^{-1}$ )	RAÍZ $\omega$ , (Hz)
-14.0706	$364.658 - (3.40947 \times 10^6)i$ $-101.452 + (86.1793)i$
-11.8904	$308.157 - (2.43477 \times 10^6)i$ $-85.7324 + (61.5425)i$
-9.25096	$239.751 - (1.47379 \times 10^6)i$ $-85.7324 + (61.5425)i$
-7.9867	$206.987 - (1.0985 \times 10^6)i$ $-57.5859 + (27.7662)i$
-5.7094	$147.967 - (561369)i$ $-41.1661 + (14.1893)i$
-2.6426	$68.4864 - (120261)i$ $-19.0536 + (3.0396)i$
-1.3684	$35.4633 - (32245.9)i$ $-9.8663 + (0.815)i$
-0.13867	$3.594 - (331.169)i$ $-0.99987 + (0.00819)i$
0.13867	$0.99987 + (0.00819)i$ $-3.594 - (331.169)i$

1.3684	$9.8663 + (0.815)i$ $-35.4633 - (32245.9)i$
2.6426	$19.0536 + (3.0396)i$ $-68.4864 - (120261)i$
5.7094	$41.1661 + (14.1893)i$ $-147.967 - (561369)i$
7.9867	$57.5859 + (27.7662)i$ $-206.987 - (1.0985 \times 10^6)i$
9.25096	$66.7012 + (37.2522)i$ $-239.751 - (1.47379 \times 10^6)i$
11.8904	$85.7324 + (61.5425)i$ $-308.157 - (2.43477 \times 10^6)i$
14.0706	$101.452 + (86.1793)i$ $-364.658 - (3.40947 \times 10^6)i$

Para simplificar el análisis, escribiremos  $\omega$  en forma general como:

$$\omega_l = \omega_{rl} + \omega_{il}i, \quad l = 1, 2 \quad (3.9-15)$$

sustituyendo (3.9-15) en (3.9-1), obtenemos al simplificar el resultado:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^*(z, t) &= \sum_{l=1}^2 A_l e^{\omega_l t + i(\kappa z - \omega_l t)} \\ &= \sum_{l=1}^2 A_l e^{\omega_{rl} t} \left[ \cos(\kappa z - \omega_{rl} t) + i \sin(\kappa z - \omega_{rl} t) \right] \end{aligned} \quad (3.9-16)$$

donde (3.9-16), es la combinación lineal de la solución (3.9-1) para cada una de las raíces. Como podemos observar en (3.9-16), el sistema será estable ante pequeñas perturbaciones

si  $\omega_{il} < 0$ , e inestable si  $\omega_{il} > 0$ . En la figura 3.6, se presenta la superposición de las dos raíces, en donde se distinguen las zonas de estabilidad, mediante este criterio.

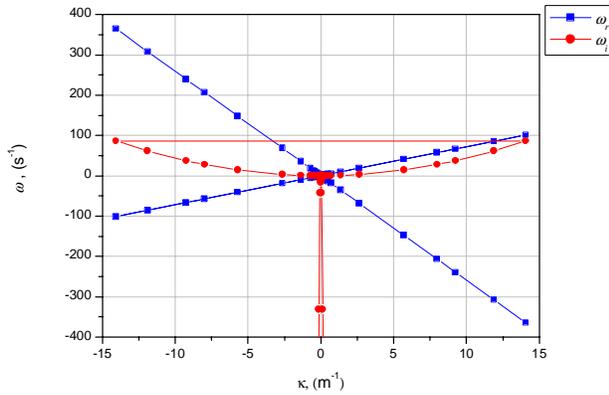


Fig. 3.6a

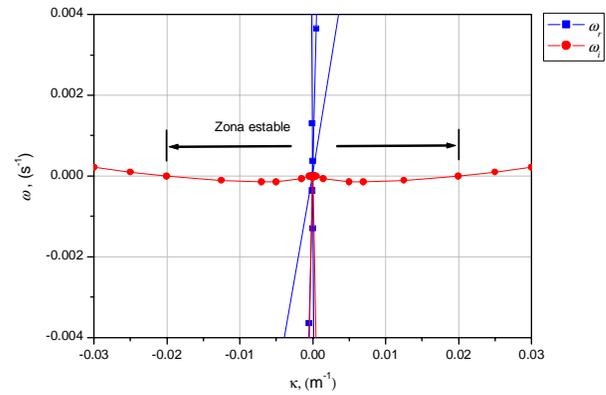


Fig. 3.6b

**Figura 3.6.** (a) parte real y parte imaginaria de las dos raíces de  $\omega$  obtenidas a partir de la ecuación (3.9-12). (b) acercamiento al origen para poder diferenciar zonas de estabilidad que no se distinguen en la figura 3.6a.

La zona estable que se aprecia en la figura 3.6b abarca el siguiente intervalo de números de onda:  $0.02 > \kappa > -0.02$ , fuera de esos valores de  $\kappa$ , habrá inestabilidad temporal en el tubo elevador.

A continuación se obtiene la solución analítica de las ecuaciones de onda, con y sin efectos de pared.

### 3.9-3 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Ahora analizaremos la solución analítica de las ecuaciones de onda con y sin efectos de pared.

#### Solución de la ecuación de onda con efectos de pared

Para obtener la solución de la ecuación de onda con efectos de pared, propondremos lo siguiente:

$$\hat{\psi}^* = \Theta(\xi), \tag{3.9-17}$$

donde  $\xi = z - V_G t$ , con esta transformación la ecuación diferencial parcial se vuelve ordinaria,

$$K_{M4}\Theta^{IV} + K_{M3}(C_{M3} - V_G)\Theta^{III} + K_{M2}(l_2^+ - V_G)(l_2^- - V_G)\Theta^{II} = 0 \quad (3.9-18)$$

y tiene la siguiente ecuación característica asociada:

$$K_{M4}m^4 + K_{M3}(C_{M3} - V_G)m^3 + K_{M2}(l_2^+ - V_G)(l_2^- - V_G)m^2 = 0, \quad (3.9-19)$$

cuyas raíces son:

$$m_1 = m_2 = 0 \quad (3.9-20)$$

$$m_{3,4} = \frac{-K_{M3}(C_{M3} - V_G) \pm \sqrt{[K_{M3}(C_{M3} - V_G)]^2 - 4K_{M2}K_{M4}(l_2^+ - V_G)(l_2^- - V_G)}}{2K_{M4}}. \quad (3.9-21)$$

El tipo de solución, dependerá de que las raíces en (3.9-21) sean reales iguales, reales diferentes o complejas conjugadas ( $a \pm bi$ ), en los siguientes tres casos:

$$\hat{\psi}^* = A_1 + A_2\xi + A_3e^{m_3\xi} + A_4\xi e^{m_3\xi}, \quad (3.9-22)$$

$$\hat{\psi}^* = B_1 + B_2\xi + B_3e^{m_3\xi} + B_4e^{-m_4\xi}, \quad (3.9-23)$$

$$\hat{\psi}^* = C_1 + C_2\xi + e^{a\xi} [C_3 \sin(b\xi) + C_4 \cos(b\xi)], \quad (3.9-24)$$

donde, de la selección de  $V_G$  dependerá el tipo de solución que se tenga; este valor se toma de acuerdo al discriminante  $\Delta$  de (3.9-21), en forma análoga a un oscilador armónico en mecánica; es decir:

Caso1) Si  $\Delta = 0$ , entonces  $V_G = 7.26306 \frac{m}{s}$  ó  $V_G = 7.15804 \frac{m}{s}$ , y tenemos la solución (3.9-22), el sistema está "críticamente amortiguado" y se mueve hacia el equilibrio en la forma monótona más rápida.

Caso2) Si  $\Delta > 0$ , entonces  $V_G > 7.26306 \frac{m}{s}$ , y la solución es (3.9-23), se dice que el sistema está "sobreamortiguado" y se dirige lentamente hacia su posición de equilibrio.

Caso 3) Si  $\Delta < 0$ , entonces:  $7.26306 \frac{m}{s} > V_G > 7.15804 \frac{m}{s}$ , la solución es (3.9-24), el sistema está "subamortiguado" y oscila alrededor de su estado de equilibrio con una amplitud cada vez menor.

Solución de la ecuación de onda despreciando los efectos de pared

Considerando  $f(t) = 0$  en (3.7-4),

$$\left[ K_{M4} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + K_{M2s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_2^s \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} + K_{M1s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \hat{\psi}_s^* = 0. \quad (3.9-25)$$

Para obtener la solución de la ecuación de onda despreciando los efectos de pared, propondremos lo siguiente:

$$\hat{\psi}_s^* = \Theta_s(\xi), \quad (3.9-26)$$

donde  $\xi = z - Ct$ , con esto la ecuación diferencial parcial se vuelve ordinaria,

$$K_{M4} \Theta_s''' + K_{M2s} (v_2^s - C) \Theta_s'' + K_{M1s} (v_1 - C) \Theta_s' = 0 \quad (3.9-27)$$

la ecuación característica asociada a (3.9-27) es:

$$K_{M4} n^3 + K_{M2s} (v_2^s - C) n^2 + K_{M1s} (v_1 - C) n = 0, \quad (3.9-28)$$

cuyas raíces son:

$$n_1 = 0 \quad (3.9-29)$$

$$n_{2,3} = \frac{-K_{M2s} (v_2^s - C) \pm \sqrt{[K_{M2s} (v_2^s - C)]^2 - 4K_{M1s} K_{M4} (v_1 - C)}}{2K_{M4}}. \quad (3.9-30)$$

El tipo de solución, dependerá del tipo de raíces que se obtengan de (3.9-30) al igual que en (3.9-21), en los casos (3.9-22)-(3.9-24) con  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , iguales con cero y  $m_j = n_{j-1}$  con  $j = 3, 4$ . Nuevamente, de la selección de  $C$  dependerá el tipo de solución que se tenga,

Caso1) Si  $\Delta = 0$ , entonces  $C = 7.21573 \frac{m}{s}$ , y tenemos la solución (3.9-22), el sistema está "críticamente amortiguado" y se mueve hacia el equilibrio en la forma monótona más rápida.

Caso2) Si  $\Delta > 0$ , entonces  $C > 7.21573 \frac{m}{s}$ , y la solución es (3.9-23), se dice que el sistema está "sobreamortiguado" y se dirige lentamente hacia su posición de equilibrio.

Caso 3) Si  $\Delta < 0$ , entonces:  $C < 7.21573 \frac{m}{s}$ , la solución es (3.9-24), el sistema está "subamortiguado" y oscila alrededor de su estado de equilibrio con una amplitud cada vez menor.

A continuación analizaremos como se comparan las tres formas de estudiar la estabilidad que hemos revisado: con las velocidades de propagación, con la relación de dispersión y con la solución de las ecuaciones de onda.

### 3.10 CONCLUSIONES DE LOS DISTINTOS ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En esta sección se presentan las conclusiones de los distintos análisis de estabilidad, representados en forma sintética en la Tabla 3.11.

**Tabla 3.11.** Conclusiones de los distintos análisis de estabilidad.

Análisis de las velocidades de propagación	Relación de dispersión	Solución analítica
<p>Las velocidades de propagación de segundo y tercer orden no presentan intersecciones en el plano fase, al considerar una velocidad superficial de vapor constante de 7, 6 y 8 m/s.</p> <p>Los resultados numéricos son iguales al considerar y depreciar los efectos de pared.</p>	<p>La parte imaginaria de la solución de la relación de dispersión es la que da el criterio de estabilidad de la ecuación de onda con y sin efectos de pared (3.6-24) y (3.7-4), respectivamente. En el caso de dar valores reales de <math>\omega</math>, se obtienen valores complejos de <math>\kappa</math>, teniendo estabilidad espacial si la parte imaginaria de <math>\kappa</math> es mayor que cero, e inestable si es menor que cero.</p> <p>En el caso con efectos de pared, de las cuatro raíces complejas, dos raíces nos conducen a estabilidad y dos a inestabilidad.</p> <p>Por otro lado, al dar valores reales de <math>\kappa</math> se obtuvieron valores complejos de <math>\omega</math>, teniendo estabilidad temporal si la parte imaginaria de <math>\omega</math> es menor que cero, e inestable en caso contrario. También se distinguió con la ayuda de las gráficas presentadas en la figura 3.6 una zona de estabilidad temporal correspondiente a <math> \kappa  &lt; 0.02</math>.</p>	<p>De las tres soluciones en un sistema de referencia no inercial (Lagrangiano) que se obtuvieron de las ecuaciones de onda con y sin efectos de pared, en forma análoga a un oscilador armónico, se encontró estabilidad en una parte de la solución, la cual tiene tres posibles casos, difiriendo entre ellos en la forma en que se acercan al equilibrio, al ser críticamente amortiguado, sobreamortiguado y subamortiguado; pero finalmente inestable, debido a la superposición con la otra parte de la solución que resultó ser una recta.</p>

## ***CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS***

## **4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS**

### **4.1 Introducción**

En este Capítulo se retoman los resultados más sobresalientes obtenidos durante la tesis, con el fin de resaltar las contribuciones que surgen de este trabajo.

### **4.2 CONCLUSIONES**

Con fines de ser sistemáticos, puntualizaremos las conclusiones, separándolas por Capítulos.

#### **4.2-1 CAPÍTULO II**

- Se desarrolló un modelo hidrodinámico, que considera a las partículas de catalizador que son arrastradas por vapor de agua. Este modelo se obtuvo bajo ciertas hipótesis, las cuales se enuncian con claridad al inicio del Capítulo II, el modelo toma en cuenta la compresibilidad del vapor, ya que en los puntos de inyección está aproximadamente a 11 atm y se expande a 3 en el tubo elevador; considera la turbulencia ocasionada por los flujos de vapor en el régimen de fluidización rápida, así como los efectos debidos a la interacción de las fases con la pared del tubo, en el lecho fluidizado. Este modelo, que se obtuvo al promediar las ecuaciones locales instantáneas de masa y cantidad de movimiento mediante un operador promedio espacio-temporal, está constituido para las fases catalizador y vapor, por las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, así como una ecuación de estado que nos relaciona la densidad con la presión, junto con las condiciones iniciales y de frontera correspondientes.

El modelo que se obtuvo, se desarrolló en forma sencilla y sin mucha extensión en hojas, a diferencia de como hubiese ocurrido; por ejemplo, si hubiéramos utilizado la técnica del promedio volumétrico (Whitaker, 1999); además, tendríamos que haber promediado temporalmente el resultado obtenido con el promedio volumétrico. El promedio espacio-temporal simplifica estas operaciones al tomar simultáneamente los dos promedios espacial y temporal utilizando un procedimiento que parece ser menos complicado y extenso que el promedio volumétrico (Drew, 1983).

Este modelo nos permite estudiar el efecto de la compresibilidad del vapor en la dinámica ondulatoria que se lleva a cabo dentro del tubo elevador.

- Se evaluó la importancia de incorporar la masa agregada, encontrándose que no es necesario incluirla cuando se trabaja con flujo reptante, ya que resulta ser infinita; lo que quiere decir, que la partícula esférica utilizada en su obtención, pone en movimiento muchas capas de fluido debido al flujo tan lento en el flujo reptante.

- Se modeló la turbulencia de los sólidos, considerando que son arrastrados como trazadores por el vapor; de acuerdo al valor del número de Stokes que resultó ser del orden de uno.
- Se utilizó un modelo de celda unitaria con flujo reptante en la obtención de leyes de cerradura para el modelo hidrodinámico, obteniéndose expresiones para los términos de intercambio interfacial.
- Se obtuvieron como casos asintóticos del promedio espacio-temporal, los casos correspondientes al promedio volumétrico y al promedio temporal.

#### 4.2-2 CAPÍTULO III

- Se obtuvo el modelo hidrodinámico linealizado correspondiente alrededor de un estado estacionario, que posteriormente se consideró uniforme para los demás desarrollos.
- Se obtuvo un modelo de una ecuación de onda, para la fracción volumen y para la presión, en la forma de ecuación diferencial parcial de cuarto orden.
- Se observa que al considerar a la presión como variable mecánica, en el modelo incompresible, las ondas se desacoplan, teniéndose sólo una ecuación de onda para la fracción volumen.
- Se demostró que ambos modelos de una ecuación, realmente son uno sólo; es decir, el conjunto de cuatro ecuaciones para las perturbaciones en las cuatro variables dependientes, puede ser representado por un modelo de onda unificado, para cualquiera de las cuatro variables perturbadas. Lo cual, quiere decir, que las perturbaciones en cualquier propiedad del sistema, se propagan de la misma forma.
- Se vió la importancia que tienen los efectos de pared en el orden del modelo de una ecuación de onda; ya que, al considerarlos el modelo es de cuarto orden, y de tercero cuando no se consideran.
- Mediante gráficas de velocidades de propagación de este modelo de una ecuación de onda, contra la fracción volumen de sólidos, se encontró que las ondas no interactúan.
- Se analizó la relación de dispersión de las ecuaciones de onda, con y sin efectos de pared, para obtener estabilidad espacial y temporal.
- Se obtuvo una solución analítica de la ecuación de onda considerando los efectos de pared y despreciándolos.

Como ya se explicó en la definición del problema, el proceso de FCC es muy complejo, es por eso que en este estudio nos centramos en uno de los efectos importantes en este sistema, que es la compresibilidad del vapor de arrastre. El modelo hidrodinámico que se obtuvo en esta tesis puede utilizarse para describir los procesos que tienen lugar en

el tubo elevador en el régimen de fluidización rápida considerando este importante efecto. Por otra parte, se hizo un estudio de estabilidad hidrodinámica en este régimen, ya que hasta donde sabemos no hay estudios de estabilidad hidrodinámica en él; sin embargo, existen estudios de modelado en este régimen con teoría cinética que consideran la formación de cúmulos y que al resolverlos numéricamente pueden describir su formación en el tubo elevador (Neri y Gidaspow, 2000), también existen muchos otros estudios de estabilidad hidrodinámica en lechos fluidizados en el régimen de fluidización uniforme (sección 1.7 del Capítulo I); así como en columnas de burbujeo (Biesheuvel y Wijngaarden, 1984; Biesheuvel y Gorissen, 1990; Lahey, 1991; León y Liné, 2001).

El régimen de fluidización rápida es de importancia industrial debido a que en ese régimen operan muchos procesos industriales; sin embargo, hasta donde sabemos no se ha reportado algún estudio de estabilidad hidrodinámica en el régimen de fluidización rápida y que además considere la compresibilidad de una de las fases. Lo cual fue una motivación para realizar este trabajo.

### **4.3 PERSPECTIVAS**

El sistema que se intentó representar, es el tubo elevador de un reactor de desintegración catalítica en medio fluido (FCC), pero como ya se dijo en la definición del problema, este sistema es muy complejo, y aunque el estudio realizado ayudará en su comprensión, todavía falta mucho por hacer al respecto; por ejemplo, a continuación se listan los siguientes aspectos.

- Tomar en cuenta los efectos de temperatura, al considerar el balance de energía.
- Tomar en cuenta cúmulos de partículas (Gallardo, 2003).
- Considerar el segundo coeficiente de viscosidad; el cual, puede llegar a ser muy importante en la propagación de ondas al considerar los efectos debidos a la compresibilidad.
- Incluir al gasóleo como la tercera fase (Valencia, 2001).
- Considerar la reacción en el balance de masa y de energía.
- Para partículas más grandes, o flujos menores de vapor, dar un movimiento autónomo al catalizador en la modelación de la estructura turbulenta de los sólidos, al tomar en cuenta el ángulo de desviación que toman los sólidos de la trayectoria del vapor (2.9-25); lo cual puede ser recomendable para desacoplar las ondas de tercer orden.
- Utilizar un modelo más sofisticado para la turbulencia, tal es el caso del modelo  $\kappa - \varepsilon$ .
- Generar las ecuaciones de onda considerando un estado estacionario no uniforme.

- Tomar la solución de Stokes para el flujo reptante transitorio de un fluido newtoniano compresible, con el fin de incluir las fuerzas de Basset, y tener cerraduras más precisas con el modelo de celda unitaria.
- Hacer un análisis de estabilidad no lineal de las ecuaciones de onda.
- Hacer un estudio de las ondas en dos y tres dimensiones.
- Extender los resultados de este trabajo, en forma adecuada a columnas de burbujeo.
- Hacer un estudio de hidrodinámica fluctuante en el lecho fluidizado, con el fin de obtener correlaciones para la fracción volumen-presión en el tubo elevador, las cuales nos darán información sobre la forma en que cambia la fracción volumen en una posición del tubo elevador, debido a que en otra posición tenía otro valor.
- Hacer estudios experimentales en este régimen, a fin de recabar datos experimentales que puedan compararse con la teoría desarrollada.

# APÉNDICES

- A.* TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA EL DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO.
- B.* EVALUACIÓN DE LA FRACCIÓN VOLUMEN DE SÓLIDOS Y VELOCIDADES INTERSTICIALES DE VAPOR Y SÓLIDOS.
- C.* EL PROMEDIO VOLUMÉTRICO Y EL PROMEDIO TEMPORAL COMO CASOS ASINTÓTICOS DEL PROMEDIO ESPACIO-TEMPORAL.
- D.* ANÁLISIS DE LA MASA VIRTUAL UTILIZANDO LA TEORÍA DE FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA.
- E.* EVALUACIÓN DE LOS ESFUERZOS SUPERFICIALES TOTALES, MEDIANTE EL MODELO DE CELDA UNITARIA SIMÉTRICA CON FLUJO REPTANTE.
- F.* ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA Y DE BALANCE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO PROMEDIO UNIDIMENSIONALES.
- G.* ECUACIONES HIDRODINÁMICAS LINEALIZADAS: “MODELO COMPRESIBLE”.
- H.* OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ONDA DE FRACCIÓN VOLUMEN Y DE PRESIÓN.
- I.* ECUACIONES HIDRODINÁMICAS LINEALIZADAS “MODELO INCOMPRESIBLE”.
- J.* ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ONDA DEL MODELO COMPRESIBLE.

## APÉNDICE A

### A. TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA EL DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO

Los teoremas fundamentales para la obtención de las ecuaciones promediadas en el espacio-tiempo, surgen al aplicar el operador (2.5-1) a las ecuaciones (2.4-13) y (2.4-14),

$$\left\langle X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (X_k \Psi_k) - \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{k\ell} \delta_{k\ell} \Psi_k \right\rangle, \quad (\text{A.1})$$

$$\left\langle X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot (X_k \mathbf{v}_k \Psi_k) + \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k \right\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Como el operador promedio (2.5-1), tiene una representación en términos de integrales, entonces es lineal y el promedio de una suma, es la suma de los promedios de los sumandos. Por lo que, (A.1) y (A.2) pueden reescribirse como:

$$\left\langle X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (X_k \Psi_k) \right\rangle - \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{k\ell} \delta_{k\ell} \Psi_k \right\rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$\left\langle X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot (X_k \mathbf{v}_k \Psi_k) \right\rangle + \left\langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k \right\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Ya que se está integrando en la región espacial, con centroide en  $\mathbf{x}$ ; lo que se tiene, es una región fija. Además, se está integrando en la región temporal, centrada en el punto medio del intervalo de tiempo, en  $t$ ; por lo que conmutan los operadores derivada temporal y divergencia con el operador promedio, en el primer término del miembro derecho de las ecuaciones (A.3) y (A.4) para obtener:

$$\left\langle X_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \Psi_k \right\rangle - \left\langle \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{w}_{k\ell} \delta_{k\ell} \Psi_k \right\rangle, \quad (\text{A.5})$$

$$\left\langle X_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right\rangle = \nabla \cdot \left\langle X_k \mathbf{v}_k \Psi_k \right\rangle + \left\langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{v}_k \Psi_k \right\rangle, \quad (\text{A.6})$$

que son los dos teoremas esenciales para la obtención de las ecuaciones promediadas, (Drew, 1983; Soria y de Lasa, 1991; Drew y Lahey, 1993).

Ahora bien, podría obtenerse un tercer teorema, que denominamos combinado, al sumar los dos anteriores para tener:

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \Psi_k \right\rangle + \nabla \cdot \left\langle X_k \mathbf{v}_k \Psi_k \right\rangle + \left\langle \delta_{k\ell} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{k\ell}) \Psi_k \right\rangle \quad (\text{A.7})$$

aquí, se ha tenido cuidado en el agrupamiento de términos, al considerar que  $\Psi_k$  puede ser un tensor, utilizando (2.5-8), obtenemos:

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle^k) + \langle \delta_{kl} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Analizando más a detalle el término fuente correspondiente al último término de (A.8), en donde la función de distribución delta de Dirac, sirve de filtro a la integral, que se anula a menos de que se esté en la interface,

$$\begin{aligned} \langle \delta_{kl} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k \rangle &\equiv \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta_{kl} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k dt dV \\ &= \sum_{k\ell|k} \frac{1}{VT} \iint_{\mathcal{S}_{kl}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k dt dS \end{aligned}, \quad (\text{A.9})$$

donde se ha introducido el producto  $VT$  a la sumatoria, debido a que es constante para la misma. La suma en el término (A.9) debe leerse como: “suma sobre todas las interfaces del tipo  $k\ell$  tal que la fase  $k$  esté presente” (Soria y de Lasa, 1991).

En (A.9), la región superficial  $\mathcal{S}_{kl}$  define el área  $S_{kl}$ . Este ecuación, puede reescribirse con el fin de formar un promedio superficial intrínseco de fase, como:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{kl} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k \rangle &= \sum_{k\ell|k} \frac{S_{kl}}{V} \frac{1}{S_{kl}T} \iint_{\mathcal{S}_{kl}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k dt dS \\ &= \sum_{k\ell|k} a_{kl} \langle \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k \rangle_{kl} \end{aligned}, \quad (\text{A.10})$$

en esta ecuación, hemos introducido la definición del área interfacial específica  $a_{kl}$  (Soria y de Lasa, 1991):

$$a_{kl} = \langle \delta_{kl} \rangle = \frac{S_{kl}}{V}, \quad (\text{A.11})$$

con lo que (A.8) queda como:

$$\left\langle X_k \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Psi_k) \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \langle \mathbf{v}_k \Psi_k \rangle^k) + \sum_{k\ell|k} a_{kl} \langle \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_{kl}) \Psi_k \rangle_{kl}. \quad (\text{A.12})$$

Pueden obtenerse expresiones similares a la (A-10) para los términos superficiales, representados por el segundo término del miembro derecho en los primeros dos teoremas.

## APÉNDICE B

### B. EVALUACIÓN DE LA FRACCIÓN VOLUMEN DE SÓLIDOS Y VELOCIDADES INTERSTICIALES DE VAPOR Y SÓLIDOS

Con los flujos de vapor y catalizador dados en la Tabla 2.2, calculamos las velocidades superficiales ( $U_{sk}$ ) mediante la expresión (2.9-45),

$$U_{Sg} = \varepsilon_g U_g = \frac{5.3027 \frac{\text{kg}_{\text{vap}}}{\text{s}}}{\left(0.7065 \frac{\text{kg}_{\text{vap}}}{\text{m}^3}\right) \cdot (1.0722 \text{ m}^2)} \simeq 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (\text{B.1})$$

$$U_{Ss} = \varepsilon_s U_s = \frac{411.67 \frac{\text{Kg}_{\text{cat}}}{\text{s}}}{\left(1300 \frac{\text{Kg}_{\text{cat}}}{\text{m}^3}\right) \cdot (1.0722 \text{ m}^2)} \simeq 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (\text{B.2})$$

resolviendo en (B.2) para la fracción volumen de sólidos,

$$\varepsilon_s = \frac{U_{Ss}}{U_s}. \quad (\text{B.3})$$

Luego, con la velocidad de la mezcla con centro en el volumen  $U_o$  definida en (2.9-44), y la velocidad terminal (Bird y cols., 2001) de sedimentación de una partícula sólida en un remolino turbulento de la microescala de la turbulencia. Gallardo (2003) reporta que en estos sistemas es de aproximadamente 1.5 mm, por lo que caben muchas partículas en ellos:

$$U_o = \varepsilon_s U_s + \varepsilon_g U_g = U_{Ss} + U_{Sg}, \quad (\text{B.4})$$

$$U_t = U_o - U_s = \frac{d_p^2 (\rho_s - \rho_g) g}{18\mu_g}. \quad (\text{B.5})$$

con los datos de la Tabla 2.2, obtenemos una velocidad terminal  $U_t$  de aproximadamente  $0.085 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Resolviendo para  $U_s$  de (B.5),

$$U_s = U_o - U_t. \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo (B.4) en (B.6) y el resultado a su vez en (B.3), tenemos:

$$\varepsilon_s = \frac{U_{sS}}{U_{gS} + U_{sS} - U_t}. \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo valores de (B.1), (B.2) y la velocidad terminal, obtenemos que  $\varepsilon_s \simeq 0.04158$ , la cual está dentro del rango de operación de la fluidización rápida: 0.02–0.2, según reportan Grace y cols. (1997).

Con esta fracción, determinamos las velocidades intersticiales de vapor y sólidos, mediante las expresiones (B.1) y (B.2) obteniendo que  $U_g = 7.3037 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $U_s = 7.215 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

## APÉNDICE C

### C. EL PROMEDIO VOLUMÉTRICO Y EL PROMEDIO TEMPORAL COMO CASOS ASINTÓTICOS DEL PROMEDIO ESPACIO-TEMPORAL

Dos casos especiales del promedio espacio-temporal, definido en (2.5-1), son el promedio volumétrico (Whitaker, 1983) y el promedio tipo Reynolds o temporal (Whitaker, 1981).

- Para recuperar el promedio volumétrico

Se aplica la condición,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle X_k \bullet_k \rangle(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t') \bullet_k(\mathbf{x}', t') dt' dV. \quad (C.1)$$

#### **Demostración.**

Aplicando (2.5-8) y reagrupando el miembro derecho:

$$\varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} f_T(\mathbf{x}', t) dV, \quad (C.2)$$

donde,

$$f_T(\mathbf{x}', t) \equiv \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t') \bullet_k(\mathbf{x}', t') dt', \quad (C.3)$$

resultaría interesante poder introducir el límite bajo el signo integral; para lo cual, analicemos la función  $f_T(\mathbf{x}', t)$  en el límite cuando  $T$  tiende a cero, y pensemos que si transcurre un intervalo infinitesimal de tiempo ( $T$  es muy pequeño) y la región  $k$  se mueve también una distancia infinitesimal; de tal modo que, el punto que seleccionamos (que no este en la superficie de la región  $k$ ) permanecerá en el interior o exterior de  $k$ , dependiendo de donde lo hayamos seleccionado; y entonces, como el intervalo de integración es  $[t - \frac{1}{2}T, t + \frac{1}{2}T]$  y para  $t'$  muy cerca de  $t$ ; es decir,  $T$  tiende a cero y  $\mathbf{x}'$  en el interior (no en la superficie), se tiene que:  $X_k(\mathbf{x}', t') = X_k(\mathbf{x}', t)$ , quedando:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_T(\mathbf{x}', t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t) \bullet_k(\mathbf{x}', t) dt', \quad (C.4)$$

y entonces  $X_k(\mathbf{x}', t)$ , ya no depende de la variable de integración, ni de la variable con respecto a la cual se esta tomando el límite, por lo que  $X_k(\mathbf{x}', t)$  puede salir de la integral y del límite para tener:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_T(\mathbf{x}', t) = X_k(\mathbf{x}', t) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \bullet_k(\mathbf{x}', t') dt', \quad (\text{C.5})$$

Si  $\bullet_k$  es continua; entonces es Riemann integrable, de tal suerte que podemos aplicar el *teorema fundamental del cálculo* en (C.5), para obtener:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_T(\mathbf{x}', t) = X_k(\mathbf{x}', t) \bullet_k(\mathbf{x}', t), \quad (\text{C.6})$$

el resultado expresado en (C.6), es válido en todos los puntos de la región  $k$ , excepto en un conjunto de medida cero, el cual está constituido por los puntos de la superficie de esa región.

Podemos introducir el límite a la integral en (C.2), si existe una función  $g_1$ , Lebesgue integrable que acote el valor absoluto del promedio temporal de  $\bullet_k(\mathbf{x}', t')$ , y que además sea finita; es decir,

$$|f_T(\mathbf{x}', t)| \leq g_1(\mathbf{x}') \quad \text{y} \quad \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} g_1(\mathbf{x}') dV < \infty. \quad (\text{C.7})$$

En el caso particular de que  $\bullet_k = \rho_k$ , y  $\rho_k = p_k/a$  para el caso de un gas ideal, y si por ejemplo, en nuestro caso particular ese gas es vapor de agua ( $a = 429,472.66 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ) que se inyecta en un tubo a 11 atm ( $1'114,630 \frac{\text{Kg}_m}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$ ) y se expande a 3 ( $303,990 \frac{\text{Kg}_m}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$ ) en él. Si tomamos como cota superior el valor de la presión a la entrada, y lo utilizamos para obtener  $g_1$ , tendremos:

$$\left| \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \rho_k(\mathbf{x}', t') dt' \right| \leq \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} 2.5953 dt', \quad (\text{C.8})$$

$$\leq 2.5953 \text{ Kg}_m/\text{m}^3$$

donde la función constante  $g_1 = 2.5953 \text{ Kg}_m/\text{m}^3$ , es un valor que acota a la densidad en todo el intervalo de operación; puesto que a 3 atm la densidad será menor.

Si se cumplen las condiciones establecidas en (C.7), podemos utilizar el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* (Stromberg, 1980), para tener:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} f_T(\mathbf{x}', t) dV = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \lim_{T \rightarrow 0} f_T(\mathbf{x}', t) dV, \quad (\text{C.9})$$

siempre que el  $\lim_{T \rightarrow 0} f_T(\mathbf{x}', t)$  converja en todos los puntos, excepto en un conjunto de medida cero de  $\mathbf{x}'$ , como ocurre en nuestro caso en (C.6). Sustituyendo (C.6) en (C.9), obtenemos:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} f_T(\mathbf{x}', t) dV = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} X_k(\mathbf{x}', t) \bullet_k(\mathbf{x}', t) dV . \quad (\text{C.10})$$

utilizando la definición de la función indicadora de fase, (2.4-1):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} f_T(\mathbf{x}', t) dV = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'_k(t)} \bullet_k(\mathbf{x}', t) dV \quad (\text{C.11})$$

o bien, sustituyendo (C.11) en (C.1),

$$\varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'_k(t)} \bullet_k(\mathbf{x}', t) dV . \quad (\text{C.12})$$

Ahora, analizaremos lo que pasa con  $\varepsilon_k$ , aplicándole el límite también a (2.5-2),

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \langle X_k \rangle(\mathbf{x}, t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_k(\mathbf{x}, t) \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} \left( \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t') dt' \right) dV , \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

al igual que en (C.7),  $\left| \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t') dt' \right| \leq g_2(\mathbf{x}')$ ; efectuando la integración, se obtiene que,

$1 \leq g_2(\mathbf{x}')$ , aplicamos nuevamente el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* en (C.13) y por los mismos argumentos sobre la región  $k$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'_k(\mathbf{x})} dV \\ &= \frac{V_k}{V} , \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

sustituyendo (C.14) en el miembro izquierdo de la igualdad en (C.12), obtenemos finalmente:

$$\langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_k} \iiint_{\mathcal{V}'_k(\mathbf{x})} \bullet_k(\mathbf{x}', t) dV , \quad (\text{C.15})$$

que es justamente el operador promedio volumétrico intrínseco de fase.

- Para recuperar el promedio temporal

Definimos una región  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , cuyo volumen  $\delta_V$  es muy pequeño, y se aplica la condición,

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} \langle X_k \bullet_k \rangle(\mathbf{x}, t) = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} \frac{1}{VT} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}', t') \bullet_k(\mathbf{x}', t') dt' dV \quad (\text{C.16})$$

cuando  $\delta_V \rightarrow 0$ .

**Demostración.**

Primero, aplicamos (2.5-8) en el primer miembro e intercambiamos el orden de integración en el segundo, para tener:

$$\varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f_V(\mathbf{x}, t') dt' \quad (\text{C.17})$$

donde,

$$f_V(\mathbf{x}, t') \equiv \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} X_k(\mathbf{x}', t') \bullet_k(\mathbf{x}', t') dV, \quad (\text{C.18})$$

si analizamos lo que tendríamos al introducir el límite a la integral, y analizamos la función  $f_V(\mathbf{x}, t')$ , en el límite cuando la región de integración  $\mathcal{V}$  tiende a  $\mathcal{D}$ , y pensamos que para una posición fija, la probabilidad de que en un intervalo de tiempo  $T$ ,  $\mathbf{x}'$  esté en la superficie de una partícula, es cero; esto es, que si tomamos una fotografía instantánea en el tiempo  $t$  para una posición  $\mathbf{x}'$  dentro de una región  $\mathcal{D}$  que se colapsa a un punto  $\mathbf{x}$ , el vector  $\mathbf{x}'$  seguirá estando en  $\mathcal{V}$ ; de tal manera que,  $X_k(\mathbf{x}', t') = X_k(\mathbf{x}, t')$ , excepto en un conjunto de valores de  $t'$  de medida cero, entonces:

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} f_V(\mathbf{x}, t') = X_k(\mathbf{x}, t') \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} \bullet_k(\mathbf{x}', t') dV. \quad (\text{C.19})$$

Si  $\bullet_k$  es continua; entonces es Riemann integrable, de tal suerte que podemos aplicar el *teorema del valor medio para integrales* en (C.19), para obtener:

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} f_V(\mathbf{x}, t') = X_k(\mathbf{x}, t') \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}} \frac{1}{V} \bullet_k(\mathbf{x}'', t') \cdot V, \quad (\text{C.20})$$

donde  $\bullet_k(\mathbf{x}'', t')$  está evaluada en un punto  $\mathbf{x}''$  que está en  $\mathcal{V}$ ; es decir,  $\mathbf{x}'' \in \mathcal{V}$ , y en el límite cuando la región  $\mathcal{V}$  se colapse a  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{x}''$  tenderá a  $\mathbf{x}$ , con lo que se obtiene,

$$\lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{G}} f_V(\mathbf{x}, t') = X_k(\mathbf{x}, t') \bullet_k(\mathbf{x}, t'), \quad (\text{C.21})$$

excepto en un conjunto de valores de  $t'$  de medida cero.

Nótese que el teorema del valor medio para integrales no puede aplicarse directamente en (C.18) porque  $X_k(\mathbf{x}', t')$  no es continua en  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ .

Puede aplicarse el límite bajo el signo integral si existe una función  $g_2$ , Lebesgue integrable y que además sea finita, que acote el valor absoluto del promedio en el volumen de  $\bullet_k(\mathbf{x}', t')$ ; es decir,

$$|f_V(\mathbf{x}, t')| \leq g_2(t') \quad \text{y} \quad \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} g_2(t') dt' < \infty. \quad (\text{C.22})$$

Si se cumplen estas condiciones, podemos utilizar nuevamente el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue*, para tener:

$$\lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{G}} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f_V(\mathbf{x}, t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{G}} f_V(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (\text{C.23})$$

Siguiendo con el caso particular de la densidad,  $\bullet_k = \rho_k$ , y con  $\rho_k = p_k/a$ , y tomamos como cota superior el valor de la presión a la entrada, para obtener  $g_2$ , tenemos:

$$\left| \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} \rho_k(\mathbf{x}', t') dV \right| \leq \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} 2.5953 dV, \quad (\text{C.24})$$

$$\leq 2.5953 \text{ Kg}_m/\text{m}^3$$

que tiene la misma interpretación que (C.8).

Sustituyendo (C.21) en (C.23) y posteriormente en (C.17), se obtiene que,

$$\varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}, t') \bullet_k(\mathbf{x}, t') dt', \quad (\text{C.25})$$

utilizando la definición de la función indicadora de fase, (2.4-1):

$$\varepsilon_k \langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \sum_i \int_{t-\frac{T_i}{2}}^{t+\frac{T_i}{2}} \bullet_k(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (\text{C.26})$$

Analizando lo que pasa con  $\varepsilon_k$ , aplicándole el límite también a (2.5-2),

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{Q}} \langle X_k \rangle(\mathbf{x}, t) &= \lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{Q}} \varepsilon_k(\mathbf{x}, t) \\ &= \lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{Q}} \frac{1}{VT} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} X_k(\mathbf{x}', t') dV dt', \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

al igual que en (C.22),  $\left| \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}'(\mathbf{x})} X_k(\mathbf{x}', t') dV \right| \leq g_2(t')$ ; o bien,  $1 \leq g_2(t')$ , aplicamos nuevamente el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* en (C.27) y por los mismos argumentos sobre la región  $k$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{Q}} \varepsilon_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_k(\mathbf{x}, t') dt', \\ &= \frac{\sum_i T_{k_i}}{T}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

que es una fracción temporal, y puede interpretarse como la fracción de  $T$  en que  $i$  elementos de la fase  $k$ , pasaron por un punto determinado  $\mathbf{x}$ .

Sustituyendo (C.28) en el miembro izquierdo de la igualdad en (C.25), y simplificando el resultado obtenemos finalmente:

$$\langle \bullet_k \rangle^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sum_i T_{k_i}} \sum_i \int_{t-\frac{T_{k_i}}{2}}^{t+\frac{T_{k_i}}{2}} \bullet_k(\mathbf{x}, t') dt', \quad (\text{C.29})$$

en donde la región temporal  $T_{k_i}$  indica el tiempo en el que la fase  $k_i$  está presente; es decir, si pensamos en que  $k$  representa partículas de catalizador,  $T_{k_i}$  sería el tiempo en el que  $i$  partículas pasaron por un punto dado.

(C.29), corresponde a un operador del tipo promedio temporal en un medio multifásico.

### C.1 CASOS ASINTÓTICOS DEL PROMEDIO ESPACIO-TEMPORAL PONDERADO EN LA MASA DEL CAMPO DE VELOCIDAD

Es de interés para este trabajo, ya que se considera la compresibilidad de una de las fases, verificar la ocurrencia de los casos asintóticos anteriores para el promedio ponderado en la masa del campo de velocidad definido en (2.5-9), para ello utilizaremos los resultados encontrados anteriormente en (C.15) y (C.29) para los casos asintóticos del promedio espacio-temporal, al definir a  $\bullet_k$  como  $\rho_k$  y  $\rho_k \mathbf{v}_k$ , entonces en el límite cuando  $T$  tiende a cero:

$$\{\mathbf{v}_k\}^k = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k}{\langle \rho_k \rangle^k}(\mathbf{x}, t) = \frac{\iiint_{\mathcal{V}_k(\mathbf{x})} \rho_k \mathbf{v}_k(\mathbf{x}', t) dV}{\iiint_{\mathcal{V}_k(\mathbf{x})} \rho_k(\mathbf{x}', t) dV}, \quad (\text{C.30})$$

que es un operador promedio volumétrico intrínseco de fase ponderado en la masa del campo de velocidad. También, en el límite cuando la región  $\mathcal{V}$  tiende a  $\mathcal{D}$  y el volumen de ésta, tiende a su vez a cero, obtenemos:

$$\{\mathbf{v}_k\}^k = \lim_{\mathcal{D} \rightarrow 0} \frac{\langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle^k}{\langle \rho_k \rangle^k}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_i \int_{t-\frac{T_{ki}}{2}}^{t+\frac{T_{ki}}{2}} \rho_k(\mathbf{x}, t') \mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t') dt'}{\sum_i \int_{t-\frac{T_{ki}}{2}}^{t+\frac{T_{ki}}{2}} \rho_k(\mathbf{x}, t') dt'}, \quad (\text{C.31})$$

que es, justamente un operador promedio temporal (multifásico) ponderado en la masa del campo de velocidad de la  $k$ -ésima fase.

## APÉNDICE D

### D. ANÁLISIS DE LA MASA VIRTUAL UTILIZANDO LA TEORÍA DE FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA

Partiremos en nuestro desarrollo de la definición de masa virtual que da Currie (1993).

“La masa aparente o virtual de un fluido  $m'$ , se define como la masa del fluido que, si se estuviera moviendo con la misma velocidad del cuerpo, tendría la misma energía cinética que todo el fluido”. Esto es:

$$\frac{1}{2}m'u_{\infty}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f) dV, \quad (\text{D.1})$$

donde  $u_{\infty}$  es la velocidad de aproximación del fluido al cuerpo y  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ .

De la solución del problema de flujo reptante de un fluido newtoniano incompresible alrededor de una esfera en estado estacionario (Bird y cols., 2001):

$$\frac{\mathbf{u}_f}{u_{\infty}} = \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \mathbf{e}_{\theta}, \quad (\text{D.2})$$

donde  $r_p$ , es el radio del cuerpo (sólido esférico). Como en el cálculo de la masa virtual, la esfera debe moverse en un fluido estancado, debemos restarle a esta velocidad, la cual está referida a un sistema coordenado Lagrangiano, la velocidad del fluido que se aproxima a la esfera; es decir:

$$\frac{\mathbf{u}_f}{u_{\infty}} = \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \mathbf{e}_{\theta} - \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.3})$$

escribiendo el vector unitario  $\mathbf{e}_z$  en coordenadas esféricas y simplificando, obtenemos:

$$\frac{\mathbf{u}_f}{u_{\infty}} = \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \mathbf{e}_r + \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \mathbf{e}_{\theta}, \quad (\text{D.4})$$

tomando el producto escalar de (D.4) consigo misma, se obtiene:

$$\frac{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f}{u_{\infty}^2} = \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right]^2 \cos^2 \theta + \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 \right]^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{D.5})$$

desarrollando los binomios al cuadrado:

$$\frac{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f}{u_\infty^2} = \left[ \frac{9}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \cos^2 \theta + \left[ \frac{9}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \sin^2 \theta \quad (\text{D.6})$$

introduciendo esta ecuación en (D.1), e integrando de la superficie de la esfera hasta una distancia muy lejos de ella,

$$m' = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_p}^\infty \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{9}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \cos^2 \theta + \\ \left[ \frac{9}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \sin^2 \theta \end{array} \right\} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{D.7})$$

$$= \rho \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_p}^x \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{9}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \cos^2 \theta + \\ \left[ \frac{9}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{r_p}{r} \right)^6 \right] \sin^2 \theta \end{array} \right\} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

(D.7) es una integral impropia, que converge si el límite existe, y entonces el valor de la integral impropia es ese límite.

Integrando y agrupando términos obtenemos:

$$m' = \pi \rho \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{2} \left( \frac{x}{r_p} \right) + \left( \frac{r_p}{x} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{r_p}{x} \right)^3 - \frac{16}{3} \right] r_p^3, \quad (\text{D.8})$$

tomando el límite en cada término,

$$m' = \pi \rho \left[ \frac{9}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{r_p} \right) - \frac{16}{3} \right] r_p^3, \quad (\text{D.9})$$

lo cual nos da que:

$$m' \rightarrow \infty, \quad (\text{D.10})$$

por lo tanto, la integral impropia diverge. Esto físicamente no es posible, por lo que concluimos que el concepto de masa agregada o virtual utilizable en la teoría de flujo potencial, no es compatible con la teoría de flujo reptante.

## APÉNDICE E

### E. EVALUACIÓN DE LOS ESFUERZOS SUPERFICIALES TOTALES, MEDIANTE EL MODELO DE CELDA UNITARIA SIMÉTRICA CON FLUJO REPTANTE

#### E.1 SOLUCIÓN DE LA MICROESCALA

Partiendo de la solución del problema de flujo reptante en estado estacionario de un fluido newtoniano incompresible alrededor de una esfera estacionaria (Bird y cols., 2001):

$$p_g = p_{g0} - \rho_g g z - \frac{3 \mu_g U_t}{2} \frac{r_p}{r_p} \left( \frac{r_p}{r} \right)^2 \cos \theta, \quad (\text{E.1})$$

donde el perfil de velocidad está dado por (D.2), con  $u_\infty = U_t$ , debido a que en la solución de Stokes, el sistema coordenado se ancla en el centro de la esfera; y la esfera está estacionaria en un flujo que se acerca muy lejos con una velocidad  $u_\infty$ ; de tal modo, que desde la esfera vemos que el fluido se aproxima con esa velocidad. En el caso de la celda, figura 2.2, la esfera ya no está estacionaria, sino que se mueve con la velocidad del sólido,  $v_s$ , y lejos de ella se acerca la mezcla con velocidad  $U_0$ , y ya que  $U_0 > v_s$ , al movernos con la esfera, observamos que la velocidad de aproximación es  $U_0 - v_s$ , que es justamente la velocidad terminal de los sólidos esféricos en un medio estancado. Utilizando el perfil de velocidad (D.2), evaluamos las componentes del tensor de esfuerzos viscosos, obteniendo:

$$\tau_{rr} = 3\mu_g U_t \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 - \left( \frac{r_p}{r} \right) \right] \cos \theta, \quad (\text{E.2})$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} = -\frac{3}{2} \mu_g U_t \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r_p}{r} \right)^3 - \left( \frac{r_p}{r} \right) \right] \cos \theta, \quad (\text{E.3})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{3}{2} \frac{\mu_g U_t}{r_p} \left( \frac{r_p}{r} \right)^4 \sin \theta. \quad (\text{E.4})$$

#### E.2 ESFUERZOS NORMALES

##### E.2-1 FUERZA NORMAL DEBIDA AL CAMPO DE PRESIÓN DEL VAPOR, PROMEDIADA EN LA SUPERFICIE DE LA ESFERA

A continuación evaluaremos  $\langle \mathbf{n}_\gamma \tilde{p}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma}$ . En este caso,  $\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{e}_r$ , y al expresarlo en coordenadas rectangulares, nos conduce a:

$$\langle \mathbf{n}_\gamma \tilde{p}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} = -\frac{1}{4\pi r_p^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \begin{array}{c} (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_x + (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_y + \\ (\cos \theta) \mathbf{e}_z \end{array} \right] \left( p_\gamma - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) r_p^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (\text{E.5})$$

con lo que obtenemos:

$$\langle \mathbf{n}_\gamma \tilde{p}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} = \left( \begin{array}{c} \frac{\rho_g r_p}{3} + \frac{\mu_g U_t}{2r_p} \\ \text{Flotación} \quad \text{Fricción de forma} \end{array} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{E.6})$$

## E.2-2 FUERZA NORMAL A LA SUPERFICIE DEBIDA A LOS ESFUERZOS VISCOSOS DEL VAPOR, PROMEDIADOS EN LA SUPERFICIE DE LA ESFERA

Ahora evaluaremos  $\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma}$ , y ya que  $\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{e}_r$ , sólo necesitamos evaluar dos componentes:  $-\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{rj\gamma} \mathbf{e}_j \rangle_{\gamma\sigma} = -\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{rr\gamma} \mathbf{e}_r \rangle_{\gamma\sigma} - \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta\gamma} \mathbf{e}_\theta \rangle_{\gamma\sigma}$ :

$$\begin{aligned} -\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{rr} \mathbf{e}_r \rangle_{\gamma\sigma} &= -\frac{1}{4\pi r_p^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \begin{array}{c} (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_x + (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_y + \\ (\cos \theta) \mathbf{e}_z \end{array} \right] \left( \tau_{rr} - \langle \tau_{rr\gamma} \rangle^\gamma \right) r_p^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

y,

$$\begin{aligned} -\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta} \mathbf{e}_\theta \rangle_{\gamma\sigma} &= -\frac{1}{4\pi r_p^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \begin{array}{c} (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_x + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_y + \\ (-\sin \theta) \mathbf{e}_z \end{array} \right] \left( \tau_{r\theta} - \langle \tau_{r\theta\gamma} \rangle^\gamma \right) r_p^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -\left( \frac{\mu_g U_t}{r_p} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

y entonces, finalmente obtenemos:

$$\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} = \left( \begin{array}{c} \frac{\mu_g U_t}{r_p} \\ \text{Arrastre viscoso} \end{array} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{E.9})$$

### E.3 ESFUERZOS SUPERFICIALES EN LA FASE CONTINUA

Al sumar (E.6) y (E.9), tenemos para el vapor:

$$\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} = \left( \frac{\rho_g r_p}{3} + \frac{3 \mu_g U_t}{2 r_p} \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{E.10})$$

y ya que  $\langle \boldsymbol{\tau}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0}$  y  $\langle p_\gamma \rangle^\gamma = p_{g0}$ . Podemos escribir (E.10) como:

$$\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{\Pi}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} = \left( \underbrace{\frac{\rho_g r_p}{3}}_{\text{Flotación}} + \underbrace{\frac{3 \mu_g U_t}{2 r_p}}_{\text{Arrastre viscoso}} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{E.11})$$

#### E.3-1 ESFUERZOS SUPERFICIALES TOTALES

Por último, necesitamos obtener:  $\langle \mathbf{n}_\sigma \tilde{p}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma}$  y  $\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\sigma \rangle_{\sigma\gamma}$ .

Los términos de transferencia interfacial deben obedecer las condiciones de salto en la interface, y éstas pueden obtenerse al promediar las condiciones de salto locales (Ishii, 1990). La condición de salto de masa, sólo nos indica que no hay transporte de masa en la interface; por ello, utilizaremos la condición de salto de momentum, que a nivel local tenemos (Aris, 1962):

$$-\mathbf{n}_k \cdot [\mathbf{\Pi}_\gamma - \mathbf{\Pi}_\sigma] = \sigma_m \kappa_m \mathbf{n}_k, \quad (\text{E.12})$$

donde:

$\sigma_m$ , es la tensión interfacial, considerada constante,

$\kappa_m$ , es el radio de curvatura medio, medido desde el interior de la fase  $k$ .

Tomando el promedio superficial intrínseco de fase en la interface de (E.12), se obtiene:

$$-\langle \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{\Pi}_\gamma - \mathbf{\Pi}_\sigma) \rangle_{\gamma\sigma} = \langle \sigma_m \kappa_m \mathbf{n}_k \rangle_{\gamma\sigma}. \quad (\text{E.13})$$

Considerando el efecto de tensión interfacial pequeño, despreciamos el segundo miembro de (E.13), para tener:

$$\langle \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma \rangle_{\gamma\sigma} = \langle \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{\Pi}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma}, \quad (\text{E.14})$$

y ya que  $\mathbf{n}_\gamma = -\mathbf{n}_\sigma$ , (E.14) se reescribe como,

$$\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma \rangle_{\gamma\sigma} = -\langle \mathbf{n}_\gamma \cdot \mathbf{\Pi}_\gamma \rangle_{\gamma\sigma} \quad (\text{E.15})$$

y entonces, por (E.11) encontramos para el sólido:

$$\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma \rangle_{\gamma\sigma} = -\left( \frac{\rho_g r_p}{3} + \frac{3 \mu_g U_t}{2 r_p} \right) \mathbf{e}_z, \quad (\text{E.16})$$

que es equivalente a,

$$\langle \mathbf{n}_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_\sigma \rangle_{\gamma\sigma} = -\left( \frac{\rho_g r_p}{3} + \frac{3 \mu_g U_t}{2 r_p} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{E.17})$$

## APÉNDICE F

### F. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA Y DE BALANCE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO PROMEDIO UNIDIMENSIONALES

#### F.1-1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA DE CAMPO PROMEDIO UNIDIMENSIONALES

Las ecuaciones promediadas de la masa (2.8-17), pueden reescribirse al considerar (2.10-6) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_k \rho_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k v_k \mathbf{e}_z) = 0, \quad (\text{F.1})$$

al hacer la contracción de índices en el segundo término, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_g \rho_g v_g) = 0, \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_s \rho_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_s \rho_s v_s) = 0. \quad (\text{F.3})$$

#### F.2-2 PROYECCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BALANCE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE CAMPO PROMEDIO

Tomando el producto escalar de la ecuación de movimiento de la fase vapor (2.10-11) con un vector unitario en la dirección  $z$  tendremos, al analizar término a término:

$$\left[ \varepsilon_g \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \mathbf{e}_z \cdot \nabla \right) v_g \mathbf{e}_z \right] \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_g \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) v_g \quad (\text{F.4})$$

$$\varepsilon_g \nabla p_g \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_g \frac{\partial p_g}{\partial z} \quad (\text{F.5})$$

$$\mu_g^{tur} \left[ \varepsilon_g \nabla^2 (v_g \mathbf{e}_z) + \nabla \varepsilon_g \cdot \nabla (v_g \mathbf{e}_z) + \nabla (v_g \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \varepsilon_g + \frac{1}{3} \varepsilon_g \nabla (\nabla \cdot (v_g \mathbf{e}_z)) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot (v_g \mathbf{e}_z)) \nabla \varepsilon_g \right] \cdot \mathbf{e}_z = \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{6}{d_p} \varepsilon_s \left[ \frac{1}{6} \rho_g g d_p + \frac{3}{d_p} \varepsilon_g \mu_g (v_g - v_s) \right] \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_s \rho_g g + \frac{18}{d_p^2} \varepsilon_s \varepsilon_g \mu_g (v_g - v_s), \quad (\text{F.7})$$

de acuerdo con (2.9-37),

$$\frac{4}{D_t} \mathbf{T}_{gW} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{2}{D_t} \rho_g \varepsilon_g v_g^2 f_{gF} \quad (\text{F.8})$$

$$\varepsilon_g \rho_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_g \rho_g g \cos \theta, \quad (\text{F.9})$$

ya que  $\theta = \pi$ ; entonces tenemos:

$$\varepsilon_g \rho_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = -\varepsilon_g \rho_g g. \quad (\text{F.10})$$

Por lo que la ecuación de movimiento promedio para la fase vapor, proyectada en el eje  $z$  queda como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g \rho_g \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) v_g + \varepsilon_g \frac{\partial p_g}{\partial z} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial z} \right) + \\ \frac{18}{d_p^2} \varepsilon_s \varepsilon_g \mu_g (v_g - v_s) + \frac{2}{D_t} \rho_g \varepsilon_g v_g^2 f_{gF} + \rho_g g = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Analizando del mismo modo, la ecuación de movimiento para la fase sólida (2.10-13) y (2.10-14), obtenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z} \right) v_s + \varepsilon_s \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \left( \varepsilon_g \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_g \frac{v_g}{v_s} \right) \frac{\partial v_g}{\partial z} \right] - \frac{18}{d_p^2} \varepsilon_s \varepsilon_g \mu_g (v_g - v_s) + \\ \frac{2}{D_t} \rho_s \varepsilon_s v_s^2 f_{sF} + \varepsilon_s (\rho_s - \rho_g) g = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Entonces; (F.2), (F.3), (F.11) y (F.12) son las ecuaciones de balance de conservación de campo promedio unidimensionales.

## APÉNDICE G

### G.1 ECUACIONES HIDRODINÁMICAS LINEALIZADAS: “MODELO COMPRESIBLE”

Aplicaremos la descomposición (3.2-5) a las ecuaciones (3.2-1)-(3.2-4) y sólo retendremos los términos de primer orden en  $\hat{\psi}$ .

Empezaremos con (3.2-1),

$$(p_{ss} + \hat{p}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{gss} + \hat{v}_g) \frac{\partial}{\partial z} \right] (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) + (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{gss} + \hat{v}_g) \frac{\partial}{\partial z} \right] (p_{ss} + \hat{p}) + (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})(p_{ss} + \hat{p}) \frac{\partial}{\partial z} (v_{gss} + \hat{v}_g) = 0 \quad (G.1)$$

simplificando tenemos finalmente:

$$p_{ss} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{gss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\epsilon} + \epsilon_{ss} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{gss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} + \epsilon_{ss} p_{ss} \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \hat{\epsilon} \frac{d}{dz} (p_{ss} v_{gss}) + \hat{p} \frac{d}{dz} (\epsilon_{ss} v_{gss}) + \hat{v}_g \frac{d}{dz} (\epsilon_{ss} p_{ss}) + \frac{d}{dz} (\epsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}) = 0 \quad (G.2)$$

Ahora seguiremos con (3.2-2):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{sss} + \hat{v}_s) \frac{\partial}{\partial z} \right] (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) - [1 - (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})] \frac{\partial}{\partial z} (v_{sss} + \hat{v}_s) = 0 \quad (G.3)$$

desarrollando y agrupando, se obtiene:

$$-\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{sss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\epsilon} + (1 - \epsilon_{ss}) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} - \hat{\epsilon} \frac{dv_{sss}}{dz} - \hat{v}_s \frac{d\epsilon_{ss}}{dz} + \frac{d}{dz} [(1 - \epsilon_{ss}) v_{sss}] = 0. \quad (G.4)$$

Trabajando ahora (3.2-3) y analizando por separado cada uno de sus términos:

$$\frac{1}{a} (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})(p_{ss} + \hat{p}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{gss} + \hat{v}_g) \frac{\partial}{\partial z} \right] (v_{gss} + \hat{v}_g) = \frac{\epsilon_{ss} p_{ss}}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{gss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{v}_g + \frac{1}{a} (p_{ss} v_{gss} \hat{\epsilon} + \epsilon_{ss} v_{gss} \hat{p} + \epsilon_{ss} p_{ss} \hat{v}_g + \epsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}) \frac{dv_{gss}}{dz} \quad (G.5-1)$$

$$(\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial z} (p_{ss} + \hat{p}) = \varepsilon_{ss} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\varepsilon} \frac{dp_{ss}}{dz} + \varepsilon_{ss} \frac{dp_{ss}}{dz} \quad (\text{G.5-2})$$

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (v_{gss} + \hat{v}_g) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial z} (v_{gss} + \hat{v}_g) \right] = \\ -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_{ss} \frac{\partial^2 \hat{v}_g}{\partial z^2} + \hat{\varepsilon} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \varepsilon_{ss} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \frac{dv_{gss}}{dz} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.5-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{18}{d_p^2} \mu_g (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon}) [1 - (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon})] [(\hat{v}_g - \hat{v}_s) + (v_{gss} - v_{sss})] = \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \left[ (1 - 2\varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) \hat{\varepsilon} + \varepsilon_{ss} (1 - \varepsilon_{ss})(\hat{v}_g - \hat{v}_s) + \varepsilon_{ss} (1 - \varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.5-4})$$

$$\frac{2f_{gF}}{aD_t} (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon})(p_{ss} + \hat{p})(v_{gss} + \hat{v}_g)^2 = \frac{2f_{gF}}{aD_t} (p_{ss} v_{gss}^2 \hat{\varepsilon} + \varepsilon_{ss} v_{gss}^2 \hat{p} + 2\varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss} \hat{v}_g + \varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}^2) \quad (\text{G.5-5})$$

$$\frac{g}{a} (p_{ss} + \hat{p}) = \frac{g}{a} \hat{p} + \frac{g}{a} p_{ss} \quad (\text{G.5-6})$$

Por último, linealizaremos (3.2-4) del mismo modo que (3.2-3),

$$\begin{aligned} \rho_s [1 - (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon})] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{sss} + \hat{v}_s) \frac{\partial}{\partial z} \right] (v_{sss} + \hat{v}_s) = \rho_s (1 - \varepsilon_{ss}) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{sss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{v}_s + \\ \rho_s [(1 - \varepsilon_{ss}) \hat{v}_s - v_{sss} \hat{\varepsilon} + (1 - \varepsilon_{ss}) v_{sss}] \frac{dv_{sss}}{dz} \end{aligned} \quad (\text{G.6-1})$$

$$[1 - (\varepsilon_{ss} + \hat{\varepsilon})] \frac{\partial}{\partial z} (p_{ss} + \hat{p}) = (1 - \varepsilon_{ss}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \frac{dp_{ss}}{dz} \hat{\varepsilon} + (1 - \varepsilon_{ss}) \frac{dp_{ss}}{dz} \quad (\text{G.6-2})$$

El término correspondiente al transporte turbulento queda como:

$$-\frac{4}{3}\mu_g^{tur} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] \hat{\epsilon} + \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial z} + \\ & \left[ \frac{\epsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon_{ss}}{v_{sss}} \right) \right] \hat{v}_g + \left[ \frac{\epsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \\ & \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \frac{\partial^2 \hat{v}_g}{\partial z^2} - \left[ \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \right) \right] \hat{v}_s - \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} + \\ & \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (G.6-3)$$

El arrastre interfacial queda del mismo modo que en (G.5-4). Finalmente, los últimos dos términos de (3.2-4) quedan como,

$$\frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} [1 - (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})] (v_{sss} + \hat{v}_s)^2 = \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} [2(1 - \epsilon_{ss}) v_{sss} \hat{v}_s - v_{sss}^2 \hat{\epsilon} + (1 - \epsilon_{ss}) v_{sss}^2], \quad (G.6-4)$$

$$[1 - (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})] \left[ \rho_s - \frac{1}{a} (p_{ss} + \hat{p}) \right] g = (1 - \epsilon_{ss}) \left( \rho_s - \frac{p_{ss}}{a} \right) g - \left( \rho_s - \frac{p_{ss}}{a} \right) g \hat{\epsilon} - \frac{g}{a} (1 - \epsilon_{ss}) \hat{p}. \quad (G.6-5)$$

El sistema de ecuaciones linealizado, se expresa en forma matricial como:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (G.7-1)$$

donde,

$$\mathbf{u} = (\hat{\epsilon} \quad \hat{p} \quad \hat{v}_g \quad \hat{v}_s)^T \quad (G.7-2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{ss} & \epsilon_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_{ss} p_{ss}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_s (1 - \epsilon_{ss}) \end{pmatrix} \quad (G.7-3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -v_{sss} & 0 & 0 & (1-\varepsilon_{ss}) \\ p_{ss} v_{gss} & \varepsilon_{ss} v_{gss} & \varepsilon_{ss} p_{ss} & 0 \\ -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{dv_{gss}}{dz} & \varepsilon_{ss} & \left( \frac{\varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}}{a} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \right) & 0 \\ -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} \right) & (1-\varepsilon_{ss}) & -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] & \left[ \rho_s (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \frac{dv_{gss}}{dz} \right] \end{pmatrix} \quad (\text{G.7-4})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \varepsilon_{ss} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left( -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.7-5})$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{dv_{sss}}{dz} & 0 & 0 & -\frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \\ \frac{d}{dz}(p_{ss} v_{gss}) & \frac{d}{dz}(\varepsilon_{ss} v_{gss}) & \frac{d}{dz}(\varepsilon_{ss} p_{ss}) & 0 \\ D_{31} & \left[ \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{a} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{2f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_{ss} v_{gss}^2 + \frac{g}{a} \right] & \left[ \frac{\varepsilon_{ss} p_{ss}}{a} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss} \right] & \left[ -\frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) \right] \\ -D_{41} & -(1-\varepsilon_{ss}) \frac{g}{a} & -\left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \right) \right) \right] & D_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{G.7-6})$$

$$D_{31} = \left[ \frac{v_{gss} p_{ss}}{a} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{dp_{ss}}{dz} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-2\varepsilon_{ss}) (v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2f_{gF}}{aD_t} p_{ss} v_{gss}^2 - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} \right] \quad (G.7-7)$$

$$D_{41} = \left\{ \begin{array}{l} \rho_s v_{sss} \frac{dv_{sss}}{dz} + \frac{dp_{ss}}{dz} + \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{sss}^2 + \left( \rho_s - \frac{p_{ss}}{a} \right) g + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] + \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-2\varepsilon_{ss}) (v_{gss} - v_{sss}) \end{array} \right\} \quad (G.7-8)$$

$$D_{44} = \left\{ \begin{array}{l} \rho_s (1-\varepsilon_{ss}) \frac{dv_{sss}}{dz} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss} + \\ \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (G.7-9)$$

$$\mathbf{h} = \left( \begin{array}{c} \frac{d}{dz} [(1-\varepsilon_{ss}) v_{sss}] \\ \frac{d}{dz} (\varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}) \\ \left[ \frac{\varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}}{a} \frac{dv_{gss}}{dz} + \varepsilon_{ss} \frac{dp_{ss}}{dz} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_{ss} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \frac{dv_{gss}}{dz} \right) + \right. \\ \left. \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) (v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_{ss} p_{ss} v_{gss}^2 + \frac{g}{a} p_{ss} \right] \\ \left[ \rho_s (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss} \frac{dv_{sss}}{dz} + (1-\varepsilon_{ss}) \frac{dp_{ss}}{dz} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] - \right. \\ \left. \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) (v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss}^2 + (1-\varepsilon_{ss}) \left( \rho_s - \frac{p_{ss}}{a} \right) g \right] \end{array} \right) \cdot \quad (G.7-10)$$

Las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son de tamaño 4×4 y son funciones de  $z$ . Nótese que la matriz **h** corresponde al estado estacionario de este sistema de ecuaciones.

Ahora, obtendremos las ecuaciones que representen las perturbaciones de las variables  $\psi$ ; para lo cual, debemos restar el estado estacionario ( $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ) a las ecuaciones linealizadas (G.7-1), con lo que se obtiene:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (\text{G.8})$$

(G.8) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, para saber si este sistema es hiperbólico, el discriminante debe ser mayor que cero, y ya que sólo tenemos un término de segundo orden (en la dirección  $z$ ), y ningún término de segundo orden en otra dirección espacial, o en otra variable. Por otra parte, no hay términos de segundo orden con derivada cruzada. Por lo que el discriminante resulta ser igual a cero (Carrier y Pearson, 1988; Arfken, 1995), y entonces (G.8) no es hiperbólico sino parabólico.

A partir del sistema de ecuaciones para las perturbaciones de las variables dependientes  $\psi$ , representado en (G.8), pueden obtenerse las ecuaciones de onda de fracción volumen y de presión.

## G.2 ESTADO UNIFORME

Puede obtenerse un caso particular importante, al considerar que el estado estacionario es constante (mejor conocido como estado uniforme); es decir,  $\psi_{ss} = \psi_0$ , donde  $\psi_0 : \{\varepsilon_0, p_0, v_{g0}, v_{s0}\}$  es constante, con lo que (G.8) se reduce significativamente al eliminar todos los términos  $\frac{d\psi_{ss}}{dz}$ , para obtener:

$$\mathbf{A}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\text{G.9-1})$$

ahora las matrices que premultiplican a las derivadas son constantes, y en donde

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_0 & \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0 p_0}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_s (1 - \varepsilon_0) \end{pmatrix} \quad (\text{G.9-2})$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -v_{s0} & 0 & 0 & (1 - \varepsilon_0) \\ p_0 v_{g0} & \varepsilon_0 v_{g0} & \varepsilon_0 p_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & \left( \frac{\varepsilon_0 p_0 v_{g0}}{a} \right) & 0 \\ 0 & (1 - \varepsilon_0) & 0 & [\rho_s (1 - \varepsilon_0) v_{s0}] \end{pmatrix} \quad (\text{G.9-3})$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{4}{3}\mu_g^{tur}\varepsilon_0\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{4}{3}\mu_g^{tur}\frac{\varepsilon_0 v_{g0}}{v_{s0}}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.9-4})$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{310} & \left[\frac{2f_{gF}}{aD_t}\varepsilon_0 v_{g0}^2 + \frac{g}{a}\right] & \begin{bmatrix} \frac{18}{d_p^2}\mu_g\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)+ \\ \frac{4f_{gF}}{aD_t}\varepsilon_0 p_0 v_{g0} \end{bmatrix} & -\left[\frac{18}{d_p^2}\mu_g\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)\right] \\ -D_{410} & -(1-\varepsilon_0)\frac{g}{a} & -\left[\frac{18}{d_p^2}\mu_g\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)\right] & \begin{bmatrix} \frac{18}{d_p^2}\mu_g\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)+ \\ \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t}(1-\varepsilon_0)v_{s0} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{G.9-5})$$

$$D_{310} = \left[\frac{18}{d_p^2}\mu_g(1-2\varepsilon_0)(v_{g0} - v_{s0}) + \frac{2f_{gF}}{aD_t}p_0 v_{g0}^2\right] \quad (\text{G.9-6})$$

$$D_{410} = \left[\frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t}v_{s0}^2 + \left(\rho_s - \frac{p_0}{a}\right)g + \frac{18}{d_p^2}\mu_g(1-2\varepsilon_0)(v_{g0} - v_{s0})\right]. \quad (\text{G.9-7})$$

## APÉNDICE H

### H.1 OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ONDA DE FRACCIÓN VOLUMEN Y DE PRESIÓN

Partiendo de las ecuaciones de movimiento de (3.3-1),

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 p_0}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \varepsilon_0 \frac{\partial^3 \hat{v}_g}{\partial z^3} + D_{310} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} + \left[ \frac{2f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_0 v_{g0}^2 + \frac{g}{a} \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \\ \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_0 p_0 v_{g0} \right] \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} - \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (H.1)$$

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} + (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_0 v_{g0}}{v_{s0}} \frac{\partial^3 \hat{v}_g}{\partial z^3} + d_{310} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} - (1 - \varepsilon_0) \frac{g}{a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} (1 - \varepsilon_0) v_{s0} \right] \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (H.2)$$

Iniciaremos el desarrollo con la primera de estas dos ecuaciones, sustituyendo las derivadas espaciales del vapor y del catalizador de (3.2-7), junto con (3.3-2) en (H.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} - \frac{\varepsilon_0 p_0}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} \right] + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + \\ \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \varepsilon_0 \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} + v_{g0} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} + v_{g0} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) \hat{p} \right] + D_{310} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} + \left[ \frac{2f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_0 v_{g0}^2 + \frac{g}{a} \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \\ \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} \varepsilon_0 p_0 v_{g0} \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} \right] - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (H.3)$$

simplificando algebraicamente y agrupando términos, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{p_0}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} - \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* - \\
 & \frac{p_0}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{g0} + \sqrt{a}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{g0} - \sqrt{a}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} - \\
 & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0
 \end{aligned} \tag{H.4-1}$$

donde,

$$\lambda_{g1} = \frac{\frac{18}{d_p^2} \mu_g [\varepsilon_0 (v_{g0} - v_{s0}) + v_{s0}] + \frac{2f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}^2}{\frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0}} \tag{H.4-2}$$

$$c_{g1} = v_{g0} - \frac{p_0 \left( \frac{2f_{gF}}{D_t} \varepsilon_0 v_{g0}^2 + g \right)}{a \varepsilon_0 \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right]}. \tag{H.4-3}$$

(H.4-1), puede reescribirse al utilizar las variables adimensionales (3.3-5), como:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{p_0}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} - \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* - \\
 & \frac{p_0}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{g0} + \sqrt{a}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{g0} - \sqrt{a}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{p}^* + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} - \\
 & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0
 \end{aligned} \tag{H.4-4}$$

Desarrollando un procedimiento similar al anterior para la fase sólida, (H.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon} + (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_0 v_{g0}}{v_{s0}} \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} \right] \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}}{\partial z^2} + \\ d_{310} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial z} - (1 - \varepsilon_0) \frac{g}{a} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} \right] + \\ \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 + \frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (H.5)$$

simplificando algebraicamente y agrupando términos, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}}{\partial z^2} + \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon} + \\ (1 - \varepsilon_0) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_0 v_{g0}}{p_0 v_{s0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + \frac{18}{p_0 d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p} = 0 \end{aligned} \quad (H.6-1)$$

donde,

$$\lambda_{s1} = \frac{\frac{2 \rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0}^2 - \left( \rho_s - \frac{p_0}{a} \right) g + \frac{18}{d_p^2} \mu_g [v_{s0} + \varepsilon_0 (v_{g0} - v_{s0})]}{\frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g} \quad (H.6-2)$$

$$c_{s1} = v_{g0} - \frac{g p_0 d_p^2}{18 \mu_g \varepsilon_0 a} \quad (H.6-3)$$

reescribiendo (H.6-1) con (3.3-5), obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{s0} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \hat{\varepsilon}^* + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4 \rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* + \\ \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} p_0 \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0 \end{aligned} \quad (H.6-4)$$

que es una expresión de la misma forma que (H.4-4). Las ecuaciones (H.4) y (H.6), están expresadas en forma de ecuaciones de onda para la fracción volumen y para la presión.

## APÉNDICE I

### I.1 ECUACIONES HIDRODINÁMICAS LINEALIZADAS “MODELO INCOMPRESIBLE”

Aplicaremos la descomposición (3.2-5) a las ecuaciones (3.4-1)-(3.4-4) y sólo retendremos los términos de primer orden en  $\hat{\psi}$ .

Las ecuaciones de conservación de la masa (3.4-1) y (3.4-2), quedan como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{gss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\epsilon} + \epsilon_{ss} \frac{\partial \hat{v}_g}{\partial z} + \hat{v}_g \frac{d\epsilon_{ss}}{dz} + \hat{\epsilon} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{d}{dz} (\epsilon_{ss} v_{gss}) = 0, \quad (1.1)$$

$$-\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{sss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\epsilon} + (1 - \epsilon_{ss}) \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial z} - \hat{v}_s \frac{d\epsilon_{ss}}{dz} - \hat{\epsilon} \frac{dv_{sss}}{dz} + \frac{d}{dz} [(1 - \epsilon_{ss}) v_{sss}] = 0. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones de movimiento, las analizaremos nuevamente término a término,

$$\begin{aligned} \rho_g (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (v_{gss} + \hat{v}_g) \frac{\partial}{\partial z} \right] (v_{gss} + \hat{v}_g) = \rho_g \epsilon_{ss} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{gss} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{v}_g + \rho_g v_{gss} \frac{dv_{gss}}{dz} \hat{\epsilon} + \\ \rho_g \epsilon_{ss} \frac{dv_{gss}}{dz} \hat{v}_g + \rho_g \epsilon_{ss} v_{gss} \frac{dv_{gss}}{dz} \end{aligned} \quad (1.3-1)$$

$$(\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) \frac{\partial}{\partial z} (p_{ss} + \hat{p}) = \epsilon_{ss} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\epsilon} \frac{dp_{ss}}{dz} + \epsilon_{ss} \frac{dp_{ss}}{dz}. \quad (1.3-2)$$

La turbulencia y el arrastre interfacial, quedan linealizados del mismo modo que en (G.5-3), (G.5-4) y (G.6-3).

El término de interacción de la fase vapor con las paredes del tubo queda un poco diferente, debido a que ahora la densidad es constante:

$$\frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon}) (v_{gss} + \hat{v}_g)^2 = \frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} (v_{gss}^2 \hat{\epsilon} + 2\epsilon_{ss} v_{gss} \hat{v}_g + \epsilon_{ss} v_{gss}^2). \quad (1.3-3)$$

El último término en (3.4-3), correspondiente al efecto de la gravedad en la fase vapor; es constante, y por lo tanto queda igual.

La ecuación de movimiento para los sólidos (3.4-4), queda casi igual que la analizada en (1.3), con excepción del último término, que ahora queda como:

$$[1 - (\epsilon_{ss} + \hat{\epsilon})] (\rho_s - \rho_g) g = -(\rho_s - \rho_g) g \hat{\epsilon} + (\rho_s - \rho_g) g (1 - \epsilon_{ss}) \quad (1.4)$$

y entonces, el modelo incompresible linealizado, puede expresarse en forma matricial como:

$$\mathbf{A}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_{in} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{h}_{in} = \mathbf{0}, \quad (1.5-1)$$

donde el vector solución es el mismo que el dado en (G.7-2).

$$\mathbf{A}_{in} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_g \varepsilon_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_s (1 - \varepsilon_{ss}) \end{pmatrix} \quad (1.5-2)$$

$$\mathbf{B}_{in} = \begin{pmatrix} -v_{sss} & 0 & 0 & (1 - \varepsilon_{ss}) \\ v_{gss} & 0 & \varepsilon_{ss} & 0 \\ -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{dv_{gss}}{dz} & \varepsilon_{ss} & \left( \rho_g \varepsilon_{ss} v_{gss} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \right) & 0 \\ -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} \right) (1 - \varepsilon_{ss}) & -\frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] & \left[ \frac{\rho_s (1 - \varepsilon_{ss}) v_{sss} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \frac{dv_{gss}}{dz} \right] \end{pmatrix} \quad (1.5-3)$$

$$\mathbf{D}_{in} = \begin{pmatrix} -\frac{dv_{sss}}{dz} & 0 & 0 & -\frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \\ \frac{dv_{gss}}{dz} & 0 & \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} & 0 \\ d_{31} & 0 & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1 - \varepsilon_{ss}) + \frac{4\rho_g f_{gF}}{D_i} \varepsilon_{ss} v_{gss} \right] & -\left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1 - \varepsilon_{ss}) \right] \\ -d_{41} & 0 & -\left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1 - \varepsilon_{ss}) + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss}}{v_{sss}} \right) \right) \right] & d_{44} \end{pmatrix} \quad (1.5-4)$$

$$d_{31} = \left[ \rho_g v_{gss} \frac{dv_{gss}}{dz} + \frac{dp_{ss}}{dz} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-2\varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} v_{gss}^2 - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} \right] \quad (1.5-5)$$

$$d_{41} = \left\{ \begin{array}{l} \rho_s v_{sss} \frac{dv_{sss}}{dz} + \frac{dp_{ss}}{dz} + \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{sss}^2 + (\rho_s - \rho_g) g + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] + \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-2\varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) \end{array} \right\} \quad (1.5-6)$$

$$d_{44} = \left\{ \begin{array}{l} \rho_s (1-\varepsilon_{ss}) \frac{dv_{sss}}{dz} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss}) + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss} + \\ \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}^2} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (1.5-7)$$

$$\mathbf{h}_{in} = \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dz} [(1-\varepsilon_{ss}) v_{sss}] \\ \frac{d}{dz} (\varepsilon_{ss} v_{gss}) \\ \left[ \rho_g \varepsilon_{ss} v_{gss} \frac{dv_{gss}}{dz} + \varepsilon_{ss} \frac{dp_{ss}}{dz} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left( \varepsilon_{ss} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{d\varepsilon_{ss}}{dz} \frac{dv_{gss}}{dz} \right) + \right. \\ \left. \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} \varepsilon_{ss} v_{gss}^2 + \rho_g g \right] \\ \left[ \rho_s (1-\varepsilon_{ss}) v_{sss} \frac{dv_{sss}}{dz} + (1-\varepsilon_{ss}) \frac{dp_{ss}}{dz} - \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \left[ \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \frac{d^2 v_{gss}}{dz^2} + \frac{dv_{gss}}{dz} \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_{ss} v_{gss}}{v_{sss}} \right) \right] - \right. \\ \left. \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_{ss} (1-\varepsilon_{ss})(v_{gss} - v_{sss}) + \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} (1-\varepsilon_{ss}) v_{gss}^2 + (1-\varepsilon_{ss})(\rho_s - \rho_g) g \right] \end{array} \right) \cdot \quad (1.5-8)$$

Ahora obtendremos las ecuaciones que representen las perturbaciones de las variables  $\psi$ ; para lo cual, debemos restar el estado estacionario ( $\mathbf{h}_{in} = \mathbf{0}$ ) a las ecuaciones linealizadas (1.5-1); para obtener:

$$\mathbf{A}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{in} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_{in} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

A partir del sistema de ecuaciones (I.6) puede obtenerse una ecuación de onda para la propagación de pequeñas perturbaciones de la fracción volumen del vapor en el lecho fluidizado.

## I.2 ESTADO UNIFORME

Si el estado estacionario es uniforme;  $\psi_{ss} = \psi_0$ , donde  $\psi_0 : \{\varepsilon_0, p_0, v_{g0}, v_{s0}\}$  es constante, y entonces podemos reducir significativamente (I.6) al eliminar todos los términos  $\frac{d\psi_{ss}}{dz}$ , para obtener:

$$\mathbf{A}_{in0} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{in0} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{D}_{in0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.7-1)$$

donde la matriz  $\mathbf{C}_0$  queda igual que en (G.9-4). Ahora las matrices que premultiplican a las derivadas en (1.7-1) son constantes, y se definen como:

$$\mathbf{A}_{in0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_g \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_s (1 - \varepsilon_0) \end{pmatrix} \quad (1.7-2)$$

$$\mathbf{B}_{in0} = \begin{pmatrix} -v_{s0} & 0 & 0 & (1 - \varepsilon_0) \\ v_{g0} & 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & \rho_g \varepsilon_0 v_{g0} & 0 \\ 0 & (1 - \varepsilon_0) & 0 & \rho_s (1 - \varepsilon_0) v_{s0} \end{pmatrix} \quad (1.7-3)$$

$$\mathbf{D}_{in0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{310} & 0 & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4\rho_g f_{gF}}{D_t} \varepsilon_0 v_{g0} \right] & - \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \right] \\ -d_{410} & 0 & - \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) \right] & \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} (1 - \varepsilon_0) v_{s0} \right] \end{pmatrix} \quad (1.7-4)$$

$$d_{310} = \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - 2\varepsilon_0) (v_{g0} - v_{s0}) + \frac{2\rho_g f_{gF}}{D_t} v_{g0}^2 \quad (1.7-5)$$

$$d_{410} = \frac{2\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0}^2 + (\rho_s - \rho_g) g + \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - 2\varepsilon_0) (v_{g0} - v_{s0}) \quad (1.7-6)$$

## APÉNDICE J

### J.1 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ONDA DEL MODELO COMPRESIBLE

Utilizando las variables adimensionales, (3.6-1)-(3.6-3) en las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4), obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{c} -\frac{p_0}{a} \left( \frac{v}{L^2} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{g2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v}{L^4} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{g3}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \\ \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right) \frac{v}{L^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{g1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{array} \right] \hat{\varepsilon}^{*+} \quad (J.1)$$

$$\left[ \begin{array}{c} -\frac{p_0}{a} \left( \frac{v}{L^2} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{g2}^+} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{g2}^-} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \\ \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v}{L^4} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{g3}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \\ \frac{v}{L^2} \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-\varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{g1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{array} \right] \hat{p}^* = 0$$

y,

$$\left[ \begin{array}{c} \rho_s \left( \frac{v}{L^2} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{s2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}} \frac{v}{L^4} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{s3}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \\ \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} \right) \frac{v}{L^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{\lambda_{s1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{array} \right] \hat{\varepsilon}^{*+} \quad (J.2)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{p_0}{L^2} \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{4}{3} \mu_g^{tur} \frac{v_{g0}}{v_{s0}} \frac{v}{L^4} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{s3}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \\ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1-\varepsilon_0) \frac{v}{L^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{Re}_{c_{s1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{array} \right] \hat{p}^* = 0$$

### J.2 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS Y ANÁLISIS DE LOS ÓRDENES DE MAGNITUD DE LAS ECUACIONES (J.1) Y (J.2)

Utilizando los datos del estado uniforme descritos en la Tabla 3.1, junto con la viscosidad cinemática del vapor; la cual, se evalúa de la siguiente manera:

$$v = \frac{\mu_g}{\rho_g|_{3 \text{ atm}}} = \frac{30\mu \frac{\text{Kg}_m}{\text{m} \cdot \text{s}}}{0.7065 \frac{\text{Kg}_m}{\text{m}^3}} \approx 4.2463 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

y entonces,

$$\frac{v}{L^2} = \frac{4.2463 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{(27.6 \text{ m})^2} \approx 5.5743 \times 10^{-8} \frac{1}{\text{s}},$$

se evaluaron los coeficientes de las ecuaciones de onda adimensionales (J.1) y (J.2), obteniéndose:

$$\left[ \begin{array}{l} -(2.199 \times 10^{-15}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (2.088 \times 10^{-8}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) - \\ (4.957 \times 10^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (2.927 \times 10^{-12}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \\ (1.39 \times 10^{-5}) \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} - (8.3615 \times 10^{-3}) \frac{\partial}{\partial \tau} - (3.967 \times 10^4) \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{array} \right] \hat{\varepsilon}^* +$$

$$\left[ \begin{array}{l} -(2.199 \times 10^{-15}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (2.089 \times 10^{-8}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \\ (399.02) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (2.927 \times 10^{-12}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \\ (1.39 \times 10^{-5}) \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} - (3.512 \times 10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \tau} - (1666.84) \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{array} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (\text{J.3})$$

$$\left[ \begin{array}{l} (4.039 \times 10^{-12}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (3.789 \times 10^{-5}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \\ (88.84) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (2.963 \times 10^{-12}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \\ (1.407 \times 10^{-5}) \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (8.3854 \times 10^{-3}) \frac{\partial}{\partial \tau} + (3.927 \times 10^4) \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{array} \right] \hat{\varepsilon}^* +$$

$$\left[ \begin{array}{l} (17.5) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (2.963 \times 10^{-12}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + (1.407 \times 10^{-5}) \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + \\ (3.512 \times 10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \tau} + (1.667 \times 10^3) \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{array} \right] \hat{p}^* = 0 \quad (\text{J.4})$$

Todos los términos en estas ecuaciones, tienen las unidades de  $\frac{\text{Kg}_m}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2}$ .

Mediante un análisis de órdenes de magnitud de las ecuaciones (J.3) y (J.4), podemos descartar los términos más pequeños para quedarnos, con los términos de orden más elevado ( $10^{-4}$ ), para tener:

$$-\frac{p_0}{a} v_{g0}^2 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} - \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* - \frac{p_0}{a} (v_{g0}^2 - a) \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} - \left[ \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) + \frac{4f_{gF}}{aD_t} p_0 v_{g0} \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0 \quad , \quad (\text{J.5})$$

$$\rho_s v_{s0}^2 \frac{\partial^2 \hat{\varepsilon}^*}{\partial z^2} + \left( \frac{18}{d_p^2} \mu_g + \frac{4\rho_s f_{sF}}{D_t} v_{s0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\varepsilon}^* + p_0 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial z^2} + \frac{18}{d_p^2} \mu_g (1 - \varepsilon_0) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_{s1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{p}^* = 0 \quad , \quad (\text{J.6})$$

que es un modelo simplificado de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4).

# *NOTACIÓN*

# NOTACIÓN

En esta sección, definimos las variables que aparecen durante la tesis, e indicamos las dimensiones que tienen, mediante la simbología;  $M$  (masa),  $L$  (longitud),  $t$  (tiempo),  $T$  (temperatura). Las variables en negritas, indican carácter vectorial o tensorial. Salvo que se indique otra cosa, los números entre paréntesis se refieren a las ecuaciones en las que aparecen los símbolos por primera vez o se da su definición.

## NOMENCLATURA

$a \equiv RT_0/M$	grupo de constantes en la ecuación de estado del gas ideal (2.9-34), $L^2t^{-2}$ .
$a_1, a_2, a_3, a_4$	grupo de constantes en las ecuaciones de onda reducidas, (3.6-4) y (3.6-5), definidas en la Tabla 3.5.
$a_2^* = a_4$	constante $a_2$ modificada debido a que se desprecian los efectos de pared, definidas en la página 78.
$\sqrt{a}$	velocidad del sonido en el vapor, $Lt^{-1}$ .
$a_{k\ell}$	área interfacial específica, formada por las fases $k$ y $\ell$ , $L^{-1}$ .
$a_{\gamma\sigma} = a_{\sigma\gamma}$	área interfacial específica, entre el vapor y el catalizador, $L^{-1}$ .
$a_{kW} = a_{Wk}$	área interfacial de la fase $k$ -ésima con la pared del tubo, $L^{-1}$ .
<b>A</b>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (G.7-3).
<b>A</b> <sub>0</sub>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (G.9-2).
<b>A</b> <sub>in</sub>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (I.5-2).
<b>A</b> <sub>in0</sub>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (I.7-2).
$A_1, A_2, A_3, A_4$	constantes arbitrarias, asociadas a la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, en el caso particular en que las dos raíces de la ecuación característica son reales e iguales, (3.9-22).
$b_1, b_2, b_3, b_4$	grupo de constantes en las ecuaciones de onda reducidas, (3.6-4) y (3.6-5), definidas en la Tabla 3.5.
$b_2^* = b_4$	constante $b_2$ modificada debido a que se desprecian los efectos de pared, definidas en la página 78.
<b>B</b>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (G.7-4).
<b>B</b> <sub>0</sub>	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (G.9-3).

$\mathbf{B}_{in}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (I.5-3).
$\mathbf{B}_{in0}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (I.7-3).
$B_1, B_2, B_3, B_4$	constantes arbitrarias, asociadas a la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, en el caso particular en que las dos raíces de la ecuación característica son reales y diferentes, (3.9-23).
$C$	velocidad de un sistema de referencia Lagrangiano utilizada en una transformación de Galileo, (3.9-27).
$\mathbf{C}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (G.7-5).
$\mathbf{C}_0$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (G.9-4).
$c_{g1}, c_{g2}^+, c_{g2}^-, c_{g3}$	velocidades de propagación a la ecuación de onda (3.3-3), definidas en la Tabla 3.3.
$c_{s1}, c_{s3}$	velocidades de propagación asociadas a la ecuación de onda (3.3-4), definidas en la Tabla 3.3.
$C_1, C_2, C_3, C_4$	constantes arbitrarias, asociadas a la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, en el caso particular en que las dos raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, (3.9-24).
$C_{M3}$	velocidad de propagación asociada a la ecuación de onda (3.6-24), definida en la Tabla 3.6.
CFB	Circulating Fluidized Bed (lecho fluidizado circulante).
CFBC	Circulating Fluidized Bed Combustion (combustor en lecho fluidizado circulante).
$\mathbf{D}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (G.7-6)-(G.7-9).
$\mathbf{D}_0$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (G.9-5)-(G.9-7).
$\mathbf{D}_{in}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definida en (I.5-4)-(I.5-7).
$\mathbf{D}_{in0}$	matriz de $4 \times 4$ , cuyos elementos son constantes, definida en (I.7-4)-(I.7-6).
$\mathbf{D}_\gamma$	tensor de rapidez de deformación de la fase continua, $\gamma, t^{-1}$ .
$\bar{\mathbf{D}}_\gamma$	tensor de rapidez de deformación de tiempo ajustado del vapor $\gamma$ , (2.9-10), $t^{-1}$ .

$D_t$	diámetro del tubo elevador, considerado constante, $L$ .
$d_p$	diámetro promedio de las partículas de catalizador, $L$ .
$e$	sistema coordinado de referencia Euleriano.
$\mathbf{e}_r$	vector unitario en la dirección $r$ , adimensional.
$\mathbf{e}_z$	vector unitario en la dirección $z$ , adimensional.
$f$	funcionalidad de $\langle \mathbf{D}_\gamma \rangle^\gamma$ con $\nabla \{ \mathbf{v}_\gamma \}^\gamma$ , (2.9-12).
$\mathbf{f}$	suministro externo de $\Psi_k$ por unidad de masa, (2.3-1).
$f(t)$	una función del tiempo desconocida, (3.7-3).
$f_{kF}$	factor de fricción asociado a la fase $k$ (2.9-37), adimensional.
$f_{gF}$	factor de fricción asociado a la fase vapor, adimensional.
$f_{sF}$	factor de fricción asociado a la fase sólida, adimensional.
FCC	Fluid Catalytic Cracking (Desintegración catalítica en medio fluido).
$\mathbf{g}$	aceleración gravitacional, $L/t^2$ .
$g$	aceleración gravitacional, $L/t^2$ .
$\mathbf{h}$	vector columna de $1 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definido en (G.7-10).
$\mathbf{h}_{in}$	vector columna de $1 \times 4$ , cuyos elementos dependen de $z$ , definido en (I.5-8).
$\mathbf{I}$	tensor unitario o tensor métrico.
IGT-DOE	Institute of Gas Technology.
$k$	indica fase $k$ – ésima.
$K$	energía cinética, (1.3-1).
K	grados Kelvin, $T$ .
$k_i$	es una velocidad de propagación (3.6-3), $L/t$ .
$K_1, K_2, K_3$	coeficientes de la ecuación de onda (3.4-10), definidos en la Tabla 3.4.
$K_{M2}, K_{M3}, K_{M4}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.6-24), definidos en la Tabla 3.6.
$K_{M1s}, K_{M2s}, K_{M3s}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.7-4), definidos en (3.7-5)-(3.7-8).
$K_{g\lambda 1}, K_{g\lambda 2}, K_{g\lambda 3}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.3-3), definidos en la Tabla 3.2.

$K_{gc1}, K_{gc2}, K_{gc3}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.3-3), definidos en la Tabla 3.2.
$K_{s\lambda1}, K_{s\lambda2}, K_{s\lambda3}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.3-4), definidos en la Tabla 3.2.
$K_{sc1}, K_{sc2}, K_{sc3}$	coeficientes de la ecuación de onda (3.3-4), definidos en la Tabla 3.2.
KdV	Korteweg-de Vries.
$L$	longitud del lecho fluidizado, $L$ .
$\mathcal{L}$	operador general local instantáneo (2.4-5).
$L_s$	longitud característica de la estructura de flujo, $L$ .
$l$	sistema coordenado de referencia Lagrangiano.
$l_{\infty}$	longitud de mezclado, $L$ .
$l_\gamma$	longitud característica de la fase continua (figura 2.1), $L$ .
$l_\sigma$	longitud característica de la fase dispersa (figura 2.1), $L$ .
$l_2^+, l_2^-$	velocidades de propagación de segundo orden en (3.6-16) y que están definidas en la Tabla 3.6, $L/t$ .
$m_1, m_2, m_3, m_4$	raíces de la ecuación característica (3.9-19).
$m'$	masa agregada, aparente o virtual (D.1), $M$ .
$\dot{m}_k$	flujo másico de la fase $k$ (2.9-45), $M/t$ .
$M$	peso molecular del vapor de agua (2.9-33).
$Ma$	Número de Mach: $v_k/\sqrt{a}$ , adimensional.
$n_1, n_2, n_3$	raíces de la ecuación característica (3.9-28).
$\mathbf{n}_k$	vector normal unitario que apunta hacia fuera de la fase $k$ , adimensional.
$\mathbf{n}_\omega$	vector unitario en la dirección de la propagación de la onda, adimensional.
$P$	energía potencial (1.3-1), o un polinomio (3.9-8).
$p_k = P$	campo de presión de la fase $k$ , $ML^{-1}t^{-2}$ .
$p_0$	campo de presión evaluado en un estado estacionario uniforme, $ML^{-1}t^{-2}$ .
$p_{g0}$	presión del fluido en el plano $z = 0$ alejado de la esfera (E.1), $ML^{-1}t^{-2}$ .
$r_p$	radio promedio de una esfera sólida (figura 2.2) (partícula de catalizador), $L$ .
$r_C$	radio de la celda unitaria simétrica (figura 2.2), $L$ .

---

$r_0$	radio del volumen promediante $V$ (figura 2.1), $L$ .
$R$	constante universal de los gases (2.9-33), $ML^2/t^2T \text{ mol}$ .
$R_h$	radio hidráulico, $L$ .
$Re_g$	número de Reynolds referido al gas (2.9-38), adimensional.
$Re_p$	número de Reynolds referido a una partícula de catalizador (2.9-43), adimensional.
$Re_{ki}$	número de Reynolds de onda (3.6-3), adimensional.
$S_{st}$	área de sección transversal del tubo (constante) (2.9-45), $L^2$ .
$S_{kW}$	área interfacial entre la fase $k$ y la pared del tubo elevador, $L^2$ .
$S_{\gamma\sigma} = S_{\sigma\gamma}$	área interfacial entre el vapor y el catalizador, $L^2$ .
$S_{k\ell}$	área interfacial entre las fases $k$ y $\ell$ , $L^2$ .
$St$	número de Stokes (2.9-16), adimensional.
$St_e$	número de Stokes basado en un remolino turbulento de la microescala, adimensional.
$St_E$	número de Stokes basado en un remolino turbulento de la escala integral, adimensional.
$St_r$	número de Stokes basado en el movimiento relativo de las partículas sólidas al flujo, adimensional.
$\mathcal{S}_{k\ell}$	región superficial en $\mathbb{R}^2$ , definida por las fases $k$ y $\ell$ (2.7-4), $L^2$ .
$\mathcal{S}_{ke}$	entradas y salidas de la fase $k$ en la frontera de la región espacial $\mathcal{V}$ , $L^2$ .
$\mathcal{S}_{\gamma\sigma}$	región interfacial, entre la fase continua $\gamma$ y la dispersa $\sigma$ , $L^2$ .
$\mathcal{S}_{kW}$	región interfacial, entre la fase $k$ y la pared del tubo elevador, $L^2$ .
$t$	escala de tiempo en el nivel de descripción promediado o global, $t$ .
$t'$	escala de tiempo en el nivel de descripción local instantáneo, $t$ .
$t_R$	tiempo de relajación del proceso ondulatorio, $t$ .
$t_{RC}$	tiempo de relajación del proceso ondulatorio compresible (3.8-2), $t$ .
$t_{RI}$	tiempo de relajación del proceso ondulatorio incompresible (3.8-1), $t$ .
$t_1$ y $t_2$	región de integración en el principio variacional de Hamilton, (1.3-1), $t$ .
$T$	región temporal de integración en el promedio espacio-temporal, $t$ .

---

---

$T_0$	temperatura de operación del lecho fluidizado, $T$ .
$\mathbf{T}_{kW}$	término que contempla los esfuerzos promediados en la superficie de la pared del tubo (2.9-36).
$\mathbf{u}$	vector columna de $1 \times 4$ , de variables perturbadas dependientes en (3.2-6).
$\mathbf{u}_f$	velocidad del fluido en el flujo reptante alrededor de una esfera (D.1), $L/t$ .
$u_\infty$	velocidad de aproximación del fluido en el flujo reptante alrededor de una esfera (D.1), $L/t$ .
$u_c$	velocidad superficial del gas a la cual la desviación estándar de las fluctuaciones de presión alcanzan un máximo, $L/t$ .
$u_{mb}$	velocidad superficial del gas a partir de la cual, las burbujas empiezan a aparecer en el lecho fluidizado, $L/t$ .
$u_{mf}$	velocidad superficial mínima de fluidización, $L/t$ .
$U_0$	velocidad de la mezcla con centro en el volumen (2.9-44), $L/t$ .
$U_g$	velocidad promedio del vapor de agua (2.9-44), $L/t$ .
$U_s$	velocidad promedio de una partícula de catalizador (2.9-43), $L/t$ .
$U_{Sk}$	velocidad superficial de la fase $k$ , $L/t$ .
$U_{Sg}$	velocidad superficial del gas, $L/t$ .
$U_{Ss}$	velocidad superficial de las partículas sólidas, $L/t$ .
$U_t$	velocidad terminal de las partículas en un medio estancado (2.10-15), $L/t$ .
$\mathbf{v}_k$	velocidad de flujo de la fase $k$ dentro de $\mathcal{V}$ (2.3-1), $L/t$ .
$\tilde{\mathbf{v}}_k$	desviación del campo de velocidad de la fase $k$ con respecto a un promedio espacio-temporal de la velocidad, $L/t$ .
$\mathbf{v}_k'$	desviación de la velocidad de la fase $k$ con respecto a un promedio ponderado en la masa de la velocidad (2.6-4), $L/t$ .
$\bar{v}_\gamma$	velocidad de tiempo ajustado de la velocidad de la fase vapor (2.9-10), $L/t$ .
$v_k$	velocidad promedio de la fase $k$ , $L/t$ .
$v_{g0}$	velocidad promedio del vapor en un estado estacionario uniforme, $L/t$ .
$v_{s0}$	velocidad promedio del catalizador en estado estacionario uniforme, $L/t$ .

---

$v_1$	velocidad de la onda de primer orden de la ecuación (3.8-4), y que está definida en (3.8-8), $L/t$ .
$v_2^s$	pseudo velocidad de la onda de segundo orden en la ecuación (3.7-4), y que está definida en (3.7-7), $L/t$ .
$v_{srl_i}$	velocidad del sistema de referencia Lagrangiano $i$ , $i = 1, 2$ (3.6-8), $L/t$ .
$V_G$	velocidad de la transformación de Galileo utilizada en la ecuación (3.9-18), $L/t$ .
$\mathbf{V}$	vector que representa las propiedades termodinámicas en $\mathcal{V}$ , (2.4-5).
$V$	volumen promediante, definido por la región tridimensional $\mathcal{V}$ , $L^3$ .
$V_k$	volumen ocupado por la fase $k$ en $V$ , $L^3$ .
$\mathcal{V}$	región en $\mathbb{R}^3$ (figura 2.1), $L^3$ .
$\mathcal{V}_k$	región ocupada por la fase $k$ en $\mathcal{V}$ ; es decir, $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}$ , $L^3$ .
$\mathcal{V}_e$	región en $\mathbb{R}^3$ donde se encuentra la celda unitaria simétrica (figura 2.2), $L^3$ .
$\mathbf{w}_{k\ell}$	velocidad de la interface $k\ell$ , $L/t$ .
$\mathbf{w}_{\gamma\sigma} = \mathbf{w}_{\sigma\gamma}$	velocidad de la interface vapor-catalizador, $L/t$ .
$W$	trabajo virtual, (1.3-1).
$x$	variable auxiliar utilizada para evaluar la integral impropia (D.7), $L$ .
$\mathbf{x}$	vector de posición al centroide de la región $\mathcal{V}$ , $L$ .
$\mathbf{x}'$	vector de posición dirigido a cualquier punto de la región $\mathcal{V}$ , $L$ .
$\mathbf{x}'_k$	es un vector de posición característico de la escala de descripción local instantánea, dirigido desde el sistema coordenado de referencia a un punto de la fase $k$ en la región espacial $\mathcal{V}$ , definida en la figura 2.1, $L$ .
$X_k(\mathbf{x}', t')$	función indicadora de fase o función generalizada, (2.4-1).
$z$	Dirección axial en el tubo elevador, $L$ .

### Símbolos griegos

$\alpha$	constante de proporcionalidad en (2.9-25), adimensional.
$\gamma$	fase continua (vapor).

---

$\delta$	representa la variación sobre un espacio apropiado de funciones, (1.3-1).
$\delta_{k\ell}$	representa la distribución delta de Dirac, asociada a la interface $k\ell$ , en el contexto de las funciones generalizadas, adimensional.
$\varepsilon_k$	fracción volumen de la fase $k$ , adimensional.
$\varepsilon = \varepsilon_g$	fracción volumen de la fase continua, adimensional.
$\varepsilon_s$	fracción volumen de la fase sólida, adimensional.
$\varepsilon_0$	fracción volumen de la fase continua, evaluada en el estado estacionario uniforme, adimensional.
$\zeta$	variable adimensional de longitud (3.6-2).
$\theta$	ángulo formado entre el vector gravedad y la dirección axial ascendente en el tubo dada por el vector unitario $\mathbf{e}_z$ , radianes.
$\Theta$	variable utilizada en la solución de la ecuación de onda considerando los efectos de pared, (3.9-17).
$\Theta_s$	variable utilizada en la solución de la ecuación de onda despreciando los efectos de pared (3.9-26).
$\kappa$	número de onda, $L^{-1}$ .
$\mathbf{\kappa}$	número de onda (3.9-1), $L^{-1}$ .
$\kappa_m$	radio de curvatura medio, medido desde el interior de la fase $k$ –ésima (E.12), $L$ .
$\lambda_\gamma$	segundo coeficiente de viscosidad de la fase continua, $ML^{-1}t^{-1}$ .
$\lambda_k$	vector en la dirección del flujo de la fase $k$ (2.9-24), adimensional.
$\lambda_1, \lambda_2^+, \lambda_2^-, \lambda_3$	velocidades de propagación asociadas a la ecuación de onda (3.4-10), y que se definen en la Tabla 3.4, $L/t$ .
$\lambda_{g1}, \lambda_{g3}$	velocidades de propagación asociadas a la ecuación de onda (3.3-3), y que se definen en la Tabla 3.3, $L/t$ .
$\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \lambda_{s3}$	velocidades de propagación asociadas a la ecuación de onda (3.3-4), y que se definen en la Tabla 3.3, $L/t$ .
$\mu_\gamma = \mu_g$	viscosidad dinámica de la fase continua, $ML^{-1}t^{-1}$ .
$\mu_k^{tur}$	coeficiente de viscosidad turbulenta de la fase $k$ (2.9-11) y (2.9-21), $ML^{-1}t^{-1}$ .

---

$\nu$	viscosidad cinemática del vapor, $L^2t^{-1}$ .
$\xi$	variable de la transformación de Galileo (3.9-17), $L$ .
$\Pi_k$	tensor de presiones de la fase $k$ (2.9-8), $M/Lt^2$ .
$\rho$	densidad del fluido que repta por una esfera (D.1), $M/L^3$ .
$\rho_k$	densidad de la fase $k$ , $M/L^3$ .
$\rho_g$	densidad del vapor de agua, $M/L^3$ .
$\rho_s$	densidad de las partículas, $M/L^3$ .
$\tilde{\rho}_k$	desviación de la densidad de la fase $k$ con respecto a un promedio espacio-temporal de la densidad, $L/t$ .
$\sigma$	fase dispersa (catalizador).
$\sigma_m$	tensión interfacial, considerada constante (E.12).
$\Sigma$	grupo de constantes en (3.6-13), que se define en (3.6-14).
$\sum_{k=\gamma,\sigma}$	suma sobre las dos fases, vapor y catalizador.
$\sum_{k\ell k}$	suma sobre todas las interfaces del tipo $k\ell$ tal que la fase $k$ este presente.
$\tau$	tiempo adimensional (3.6-1).
$\tau_f$	escala de tiempo característica de la turbulencia del fluido (2.9-16), $t$ .
$\tau_p$	tiempo de relajación de las partículas (2.9-16), $t$ .
$\tau_k$	tensor de esfuerzos viscosos de la fase $k$ (2.9-8), $M/Lt^2$ .
$\tau_{\sigma_0 i}$	tensor de esfuerzos de la fase sólida, que son constantes en cada una de las $i$ partículas de catalizador, $M/Lt^2$ .
$\tau_k^{(t)}$	tensor de esfuerzos turbulentos de la fase $k$ (2.8-16), $M/Lt^2$ .
$\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{\phi\phi}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$	componentes en coordenadas esféricas del tensor de esfuerzos viscosos del vapor (E.2)-(E.4), $M/Lt^2$ .
$\Phi_k$	flux de $\Psi_k$ dentro de $\mathcal{V}_k$ , (2.3-1).
$\psi$	cualquier variable dependiente del modelo hidrodinámico obtenido en el Capítulo 2; es decir, $\psi = \varepsilon, p, v_g, v_s$ .
$\psi_s$	cualquier variable dependiente del modelo obtenido en el Capítulo 2, pero sin efectos de pared.

$\Psi_k$	densidad volumétrica de una cantidad termodinámica de interés, (2.3-1).
$\omega$	frecuencia, Hz.
•	representa cualquier propiedad termodinámica, con carácter tensorial en general.

### Símbolos matemáticos

$\hat{a}^*$	valor de $a$ perturbado y adimensional.
$\ \mathbf{a}\ $	módulo de $\mathbf{a}$ .
$c: \{a, b, c\}$	conjunto $c$ integrado por los elementos $a, b$ y $c$ .
$\in$	indica la pertenencia, que asocia a una determinada colección de objetos adimensional.
$\subset$	“que es un subconjunto de”.
$\mathbb{R}^2$	representa algo en dos dimensiones; por ejemplo una superficie.
$\mathbb{R}^3$	representa algo en tres dimensiones; por ejemplo un cuerpo, un volumen.
$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$	representa algo en cuatro dimensiones; por ejemplo, en el espacio y tiempo simultáneos.
$x, y, z$	coordenadas rectangulares, $L$ .
$r, \theta, \phi$	coordenadas esféricas.

### Líneas superiores

$\wedge$	valor perturbado.
$\sim$	valor desviado respecto de su valor promedio.

### Subíndices

$\gamma, g$	correspondiente a la fase vapor.
$\sigma, s$	correspondiente a la fase sólida.
$k$	correspondiente a la fase $k$ .
$ss$	correspondiente al estado estacionario.

**Superíndices**

$T$	transpuesto.
,	asociado al nivel de descripción local instantáneo.
*	valor adimensional.

**Operadores matemáticos**

$\langle \rangle$	operador promedio integral.
$\langle \rangle_{kl}$	operador promedio de superficie intrínseco (2.7-4).
$\langle \rangle_{\gamma\sigma} = \langle \rangle_{\sigma\gamma}$	operador promedio intrínseco en la superficie de las partículas de catalizador.
$\langle \rangle_{kW}$	operador promedio intrínseco en la superficie del tubo elevador.
$\langle \bullet_k \rangle$	promedio espacio-temporal de $\bullet_k$ , (2.5-1).
$\langle \bullet_k \rangle^k$	promedio intrínseco de fase, (2.5-6).
$\langle X_k \bullet_k \rangle$	promedio de fase, (2.5-7).
$\{ \mathbf{v}_k \}^k$	promedio ponderado en la masa del campo de velocidad, (2.5-9).
$\frac{D_{kl}}{Dt}$	derivada material moviéndonos con la interface $kl$ , (2.4-10), $t^{-1}$ .
$\frac{\partial}{\partial t}$	derivada temporal a posición fija, $t^{-1}$ .

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla		Página
2.1	Variables termodinámicas utilizadas en las ecuaciones de conservación que corresponden a las ecuaciones locales instantáneas .....	25
2.2	Valores de propiedades y condiciones de operación en la zona que se encuentra antes de las boquillas de inyección de gasóleo en el tubo elevador de una unidad de FCC comercial .....	48
3.1	Valores de constantes y de los parámetros en el estado uniforme .....	63
3.2	Coeficientes de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4) .....	63
3.3	Velocidades de propagación ( $v_p$ ) de las ecuaciones de onda (3.3-3) y (3.3-4), así como su estimación en el estado uniforme utilizado .....	64
3.4	Valor de los coeficientes ( $K_i$ ) y velocidades de propagación ( $\lambda_i$ ) de la ecuación de onda (3.4-10) .....	69
3.5	Valor de los coeficientes de las ecuaciones de onda (3.6-4) y (3.6-5) ..	72
3.6	Valor de los coeficientes ( $K_{Mi}$ ) y velocidades de propagación ( $C_{Mi}$ ) de la ecuación de onda (3.6-24) .....	77
3.7	Resumen de los principales resultados obtenidos al generar una ecuación de onda para los procesos considerados incompresible y compresible .....	80
3.8	Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda con efectos de pared, (3.9-12) obtenidos al dar valores reales de $\omega$ .....	90
3.9	Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda sin efectos de pared, (3.9-11) obtenidos al dar valores reales de $\omega$ .....	91
3.10	Raíces de la relación de dispersión para la ecuación de onda con efectos de pared, (3.9-12) obtenidos al dar los primeros dos valores reales de $\kappa$ .....	93
3.11	Conclusiones de los distintos análisis de estabilidad .....	98

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura		Página
1.1	Patrones de flujo en un lecho fluidizado gas-sólido (Grace, 1986) .....	4
2.1	Región espacial $\mathcal{V}$ para desarrollar el modelo de dos fluidos, tomada en la sección 1 del tubo elevador, correspondiente a la zona que se encuentra antes de las boquillas de inyección de gasóleo de una unidad de FCC comercial [Valencia, (2001)] .....	24
2.2	Celda unitaria simétrica con flujo reptante, donde se muestran las escalas utilizadas .....	50
3.1	Interpretación esquemática de la velocidad de la onda de presión de segundo orden .....	66
3.2	(a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado .....	83
3.3	(a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado .....	84
3.4	(a) interacción de las tres ondas en el lecho. (b) un acercamiento a la zona donde se dan las ondas de tercer orden y la mayor de segundo orden con efectos de pared. (c) un acercamiento a la onda menor de segundo orden. (d) interacción de la onda de primer orden con una onda degenerada de segundo orden, obtenidas al despreciar los efectos de pared en el lecho fluidizado .....	85
3.5	Superposición de las gráficas con y sin efectos de pared, para una velocidad superficial de gas de $7 \frac{m}{s}$ .....	86
3.6	(a) parte real y parte imaginaria de las dos raíces de $\omega$ obtenidas a partir de la ecuación (3.9-12); (b) acercamiento al origen para poder diferenciar zonas de estabilidad que no se distinguen en la figura 3.6a. ....	95

## ***REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS***

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A continuación se citan las referencias bibliográficas utilizadas durante la tesis.

Abrahamsen, A. R., y Geldart, D. (1980). *Behaviour of gas-fluidized beds of fine powders, Part I. Homogeneous expansion*. Powder Technol. **26**. pp. 35-46.

Anderson, K., Sundaresan, S., y Jackson, R. (1995). *Instabilities and the formation of bubbles in fluidized beds*. J. Fluid Mech. **303**. pp. 327-366.

Anderson, T. B., y Jackson, R. (1967a). *Hydrodynamic stability of a fluidized bed. I & EC Fundamentals*. **6**. p. 478.

Anderson, T. B., y Jackson, R. (1967b). *A fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion. I & EC Fundamentals*. **6**. No. 4. pp. 527-538.

Anderson, T. B., y Jackson, R. (1968). *Fluid mechanical description of fluidized beds. Stability of the state of uniform fluidization. I & EC Fundamentals*. **7**. No. 1. pp. 12-21.

Anderson, T. B., y Jackson, R. (1969). *A fluid mechanical description of fluidized beds. Comparison of theory and experiment. I & EC Fundamentals*. **8**. No. 1. pp. 137-144.

Arfken, G. B., y Weber, H. J. (1995). *Mathematical Methods for Physicists*. 4<sup>a</sup>. Ed. Academic Press. E.U.A.

Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Arnold, G. S., Drew, D. A., y Lahey (Jr), R. T. (1990). *An assessment of multiphase flow models using the second law of thermodynamics*. Int. J. of Multiphase Flow. **16**. No. 3. pp. 481-494.

Bachmat, Y. (1972). *Spatial macroscopization of processes in heterogeneous systems*. Israel J. Tech. **10**. pp. 391-402.

Balzhiser, R. E., y Samuels, M. R. (1977). *Termodinámica para Ingenieros*. pHI. Colombia.

Batchelor, G. K. (1988). *A new theory of the instability of a uniform fluidized bed*. J. Fluid Mech. **193**. pp. 75-110.

Batchelor, G. K. (1993). *Secondary instability of a gas-fluidized bed*. J. Fluid Mech. **257**. pp. 359-371.

Batchelor, G. K., y Nitsche, J. M. (1991). *Instability of stationary unbounded stratified fluid*. J. Fluid Mech. **227**. pp. 357-391.

Bedford, A., y Drumheller, D. S. (1978). *A variational theory of immiscible mixtures*. Arch. Ration. Mech. Anal. **68**. pp. 37-51.

- Bi, H. T., Ellis, N., Abba, I. A., y Grace, J. R. (2000). *A state-of-the-art review of gas-solid turbulent fluidization*. Chem. Eng. Sci. **55**. pp. 4789-4825.
- Biesheuvel, A., y Wijngaarden, L. Van. (1984). *Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid*. J. Fluid Mech. **148**. pp. 301-318.
- Biesheuvel, A., y Gorissen, W. C. M. (1990). *Void fraction disturbances in a uniform bubbly fluid*. Int. J. Multiphase Flow. **16**. No. 2. pp. 211-231.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., y Lightfoot E. N. (2001). *Transport Phenomena*. 2ª. Ed. John Wiley. E.U.A.
- Bouré, J. A. (1987). *Two-phase flow models: The closure issue*. Multiphase Science and Technology. **3**. (Editado por Hewitt, G. F., Delhaye, J. M., y Zuber, N.). Hemisphere Publishing Corporation. pp. 3-29.
- Bouré, J. A. (1988). *An alternative strategy for the development of averaged two-phase flow models*. Seminar on Theoretical Aspects of Multiphase Flow Phenomena. Ithaca., N. Y., Oct 22-25.
- Boussinesq, T. V. (1877). *Mém. Prés. Acad. Sci*. 3ª. Ed. París. XXIII. 46.
- Brekhovskikh, L. M., y Goncharov, V. (1994). *Mechanics of Continua and Wave Dynamics (Wave Phenomena)*. 2ª. Ed. Springer-Verlag. Alemania.
- Carrier, George F., y Pearson, Carl E. (1988). *Partial Differential Equations-Theory and Technique*. 2ª. Ed. Academic Press. pp. 75-90. E.U.A.
- Cebeci, T., y Smith, A. M. O. (1974). *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Academic Press. E.U.A.
- Clift, R., Grace, J. R., y Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, New York.
- Currie, I. G. (1993). *Fundamental Mechanics of Fluids*. 2ª. Ed. McGraw-Hill. pp. 164-168. E.U.A.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hidromagnetic Stability*. Dover. E. U. A.
- Chappellear, J. E. (1966). *Hydrodynamic stability of a fluidized bed*. I & EC Fundamentals. **5**. No. 4. pp. 576-578.
- Davidson, J. F. (1961). Trans. Instn. Chem. Engrs. **39**. p. 230.
- Davidson, J. F., Paul, R. C., Smith, M. J. S., y Duxbury, H. A. (1959). Trans. Instn. Chem. Engrs. **37**. p. 323.
- Davies, R. M., y Taylor, G. I. (1950). Proc. Roy. Soc. **A200**. p. 375.
- Didwania, A. K., y Homsy, G. M. (1981). *Flow regimes and flow transitions in liquid fluidized beds*. Int. J. of Multiphase Flow. **7**. pp. 563-580.

- Ding, J., y Gidaspow, D. (1990). *A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow*. AIChE J. **36**. No. 4. pp. 523-538.
- Drew, D. A. (1971). *Averaged field equations for two-phase media*. Studies in Applied Mathematics. **L**. No. 2. pp. 133-166.
- Drew, D. A. (1983). *Mathematical modeling of two-phase flow*. Ann. Rev. Fluid Mech. **15**. pp. 261-291. E.U.A.
- Drew, D. A., y Lahey (Jr), R. T. (1993). *Analytical modeling of multiphase flow*. Particulate two-phase flow. (Editado por Roco, M. C.). Butterworth-Heinemann Series in Chemical Engineering. pp. 509-569. E.U.A.
- Drew, D. A., y Segel, L. A. (1971). *Analysis of fluidized beds and foams using average equations*. Studies in Applied Mathematics. **L**. No. 3. pp. 233-257.
- Drumheller, D. S., y Bedford, A. (1980). *A thermomechanical theory for reacting immiscible mixtures*. Arch. Ration. Mech. Anal. **73**. pp. 257-284.
- El-Kaissy, M. M., y Homsy, G. M. (1976). *Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds I. Experiments*. Int. J. of Multiphase Flow. **2**. pp. 379-395.
- Estrada, R., y Kanwal, R. P. (1980). *Applications of distributional derivatives to wave propagation*. J. Inst. Maths. Applics. **26**. pp. 39-63.
- Faeth, G. M. (1983). *Evaporation and Combustion of Spray*. Prog. Energy Combust. Sci. **9**. pp. 1-76.
- Furukawa, J., y Ohmae, T. (1958). *Liquidlike properties of fluidized systems*. Ind. Eng. Chem. **50**. No. 5. pp. 821-828.
- Gallardo-Rivera, C. T. (2003). Tesis de maestría. *Balances de población de cúmulos en un reactor de lecho fluidizado para FCC con técnicas multiescala en promedios volumétricos*. Dirigida por el Doctor Alberto Soria López. UAM-Iztapalapa. México.
- Garg, S. K., y Pritchett, J. W. (1975). *Dynamics of gas-fluidized beds*. J. of Applied Physics. **46**. No. 10. pp. 4493-4500.
- Gel'fand, I. M., y Shilov, G. E. (1964). *Generalized Functions. Properties and Operations*. Vol. 1. Academic Press, N.Y.
- Geldart, D. (1986). *Gas Fluidization Technology*. J. Wiley. Reino Unido.
- Gidaspow, Dimitri. (1994). *Multiphase Flow and Fluidization Continuum and Kinetic Theory Descriptions*. Academic Press. E.U.A.
- Gidaspow, D., Rukmini, B., y Ding, J. (1992). May 3-8 Brisbane. Australia. *Fluidization VII Proceedings of the Seventh Engineering Foundation Conference on Fluidization*. Hydrodynamics of Circulating Fluidized Beds: Kinetic Theory Approach. Ed. Engineering Foundation. New York, NY. E.U.A.

- Göz, M. F. (1992). *On the origin of wave patterns in fluidized beds*. J. Fluid Mech. **240**. pp. 379-404.
- Göz, M. F., y Sundaresan, S. (1998). *The growth, saturation, and scaling behaviour of one- and two-dimensional disturbances in fluidized beds*. J. Fluid Mech. **362**. pp. 83-119.
- Grace, J. R. (1986). *Contacting modes and behaviour classification of gas-solid and other two-phase suspensions*. Can. J. of Chem. Eng. **64**. pp. 353-363.
- Grace, J. R., Avidan, A. A., y Knowlton, T. M. (1997). *Circulating Fluidized Beds*. Blackie Academic & Professional. Gran Bretaña.
- Gray, W. G. (1975). *A derivation of the equations for multiphase transport*. Chem. Engng. Sci. **30**. pp. 229-233.
- Gray, W. G., y Lee, P. C. Y. (1977). *On the theorems for local volume averaging of multiphase systems*. Int. J. Multiphase Flow. **3**. pp. 333-342.
- Gray, W. G., Leijnse, A., Kolar, R. L., y Blain, C. A. (1993). *Mathematical tools for changing spatial scales in the analysis of physical systems*. CRC Press, Boca Ratón, Florida.
- Harris, S. E., y Crighton, D. G. (1994). *Solitons, solitary waves, and voidage disturbances in gas-fluidized bed*. J. Fluid Mech. **266**. pp. 243-276.
- Harrison, D., Davidson, J. F., y de Kock, J. W. (1961). Trans. Instn. Chem. Engrs. **39**. pp. 202.
- Hirschfelder, J. O., Curtis, F., y Bird, R. B. (1954). *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley, N.Y.
- Homsy, G. M., El-Kaissy, M. M., y Didwania, A. (1980). *Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds II. Comparison with theory*. Int. J. of Multiphase Flow. **6**. pp. 305-318.
- Howes, F. A., y Whitaker, S. (1985). *The spatial averaging theorem revisited*. Chem. Engng. Sci. **40**. pp. 1387-1392.
- Institute of Gas Technology (IGT). (1982). *Coal Conversion Systems Technical Data Book*. U. S. Department of Energy. PETC Grant No. DE-FG22-84PC70057. National Technical Information Service. [citado en Gidaspow (1994)].
- Ishii, M. (1975). *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*. Eyrolles. París. (también Scientific and Medical Publication of France, N.Y.).
- Ishii, M. (1981). *Foundation of various two-phase flow models and their limitations*. NRC-EPRI Conf. on Simulation Methods for Nuclear Power Systems. EPRIWS-81-212. pp. 3-47.
- Ishii, M. (1990). *Two-fluid model for two-phase flow*. Multiphase Science and Technology. Vol. 5. (Editado por Hewitt, G. F., Delhay, J. M., y Zuber, N.). Hemisphere Publishing Corporation. pp. 1-63.

- Ishii, M. y Kocamustafaogullari, G. (1983). *Two-phase models and their limitations*. Advances in Two-Phase Flow and Heat Transfer. Vol. 1. Ed. Nato ASI Series.
- Jackson, R. (1963a). *The mechanics of fluidized beds. Part I: The stability of the state of uniform fluidization*. Trans. Instn. Chem. Engrs. **41**. pp. 13-21.
- Jackson, R. (1963b). *The mechanics of fluidized beds. Part II: The motion of fully developed bubbles*. Trans. Instn. Chem. Engrs. **41**. pp. 22-28.
- Jackson, R. (1985). *Hydrodynamic stability of fluid-particle systems*. Fluidization. 2ª. Ed. (Editado por Davidson, J. F., Clift, R., y Harrison, D.). Capítulo 2. Academic Press.
- Johri, J., y Glasser, B. J. (2002). *Connections between density waves in fluidized beds and compressible flows*. AIChE J. **48**. No. 8. pp. 1645-1664.
- Karim, S. M., y Rosenhead, L. (1952). *The second coefficient of viscosity of liquids and gases*. Rev. of Mod. Phys. **24**. No. 2. pp. 108-116.
- Kellogg Company M. W. (1981). *Manual de Operación de la Planta Catalítica: Refinería Salina Cruz Oax.* The Kellogg Company Pullman Incorporated.
- Konno, H., y S. Saito. (1969). *Pneumatic conveying of solid through straight pipes*. J. Chem. Eng. of Japan. **2** (2). pp. 211-217. [citado en Gidaspow (1994)].
- Kunii, D., y Levenspiel, O. (1991). *Fluidization Engineering*. 2ª. Ed. Butterworth-Heinemann Series in Chemical Engineering. E.U.A.
- Lahey (Jr), R. T. (1991). *Void wave propagation phenomena in two-phase flow (Kern Award Lecture)*. AIChE J. **37**. No. 1. pp. 123-135.
- Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1959). *Fluid Mechanics*. Pergamon Press. Londres.
- León-Becerril, E., y Liné, A. (2001). *Stability analysis of a bubble column*. Chem. Eng. Sci. **56**. pp. 6135-6141.
- Lighthill, J. (1978). *Waves in Fluids*. Cambridge University Press. Gran Bretaña.
- Liu, J. T. C. (1982). *Note on a wave-hierarchy interpretation of fluidized bed instabilities*. Proc. Roy. Soc. **A380**. pp. 229-239.
- Liu, J. T. C. (1983). *Nonlinear unstable wave disturbances in fluidized beds*. Proc. Roy. Soc. **A389**. pp. 331-347.
- Marle, C. M. (1967). *Écoulements monophasique en milieu poreux*. Rev. Inst. Français du Pétrolé. **22**. No. 10. pp. 1471-1509.
- Matheson, G. L., Herbst, W. A., y Holt (Jr), P. H. (1949). *Characteristics of fluid-solid systems*. I & EC. **41**. No. 6. pp. 1099-1104.
- Maximov, V. V., Molevich, N. E., Zabershinsky, I. P., y Zubarev, A. P. (1998). *Influence of the second viscosity on the flow propagation*. Physics.

- Murray, J. D. (1965a). *On the mathematics of fluidization. Part I: Fundamental equations and wave propagation*. J. Fluid Mech. **21**. pp. 465-493.
- Murray, J. D. (1965b). *On the mathematics of fluidization. Part II: Steady motion of fully developed bubbles*. J. Fluid Mech. **22**. pp. 57-80.
- Needham, D. J., y Merkin, J. H. (1983). *The propagation of a voidage disturbance in a uniformly fluidized bed*. J. Fluid Mech. **131**. pp. 427-454.
- Needham, D. J., y Merkin, J. H. (1984). *The evolution of a two-dimensional small-amplitude voidage disturbance in a uniformly fluidized bed*. J. Engng. Maths. **18**. pp. 119-132.
- Neri, Augusto y Gidaspow, Dimitri. (2000). *Riser hydrodynamics: Simulation using kinetic theory*. AIChE J. **46**. No. 1. pp. 52-67.
- Nikuni, T., y Griffin, A. (2001). *Landau-Khalatnikov two-fluid hydrodynamics of a trapped Bose gas*. Phys. Rev. A. **6303**. No. 3. pp. 3608.
- Pigford, R. L., y Baron, T. (1965). *Hydrodynamic stability of a fluidized bed. I & EC Fundamentals*. **4**. No. 1. pp. 81-87.
- Quintard, M., y Whitaker, S. (1994). *Transport in ordered and disordered porous media II. Generalized volume averaging, transport in Porous media*. **14**. pp. 179-206.
- Rice, W. J., y Wilhelm, R. H. (1958). AIChE J. **4**. p. 423.
- Slattery, J. C. (1967). *Flow of viscoelastic fluids through porous media*. AIChE J. **13**. No. 6. pp. 1066-1071.
- Slattery, J. C. (1999). *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press. E.U.A.
- Soria, A. (1985). *Ecuaciones de balance y de conservación para mezclas bifásicas*. Cuadernos de Ingeniería Química. Vol. 1, No. 2, Otoño. Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica. UAM-Iztapalapa. México.
- Soria, A. (1991). *Kinematic waves and governing equations in bubble columns and three-phase fluidized beds*. Ph. D. Thesis. The University of Western Ontario.
- Soria, A., y de Lasa H. I. (1991). *Averaged Transport Equations for Multiphase Systems with Interfacial effects*. Chem. Eng. Sci. **46**. pp. 2093-2111.
- Soria, A., y de Lasa H. I. (1992). *Averaged topological equations for dispersed two-phase flows*. Int. J. Multiphase Flow. **18**. pp. 943-964.
- Stromberg, Karl R. (1981). *Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth International Group. E.U.A.
- Tennekes H., y Lumley, J. L. (1972). *A First Course in Turbulence*. The MIT Press E.U.A.
- Theologos, K. N., y Markatos, N. C. (1993). *Advanced Modeling of Fluid Catalytic Cracking Riser-Type Reactors*. AIChE J. **39**. No. 6. pp. 1007-1017.

Truesdell, C., y Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. Handbuch der Physik. Vol. III/1. pp. 226-793. (Editado por Flügge, S.). Springer-Verlag. Berlín, Göttingen, Heidelberg., Alemania.

Valencia-Martínez, O. (2001). Tesis de maestría. *Modelo hidrodinámico para el tubo elevador de una unidad de FCC con evaporación de gasóleo*. Dirigida por los Doctores Alberto Soria López y Elizabeth Salinas Barrios. UAM-Iztapalapa. México.

Wace, P. F., y Burnett, S. J. (1961). Trans. Instn. Chem. Engrs. **39**. p. 168.

Wallis, G. B. (1969). *One-dimensional Two-Phase Flow*. McGraw-Hill. E.U.A.

Whitaker, S. (1967). *Diffusion and dispersion in porous media*. AIChE, J. **13**. pp. 420-427.

Whitaker, S. (1969). *Advances in the theory of fluid motion in porous media*. Ind. Eng. Chem. **61**. pp. 14-28.

Whitaker, S. (1981). *Introduction to Fluid Mechanics*. R. E. Krieger Pub. Co., Malabar, Florida.

Whitaker, S. (1983). *Diffusion and reaction in a micropore-macropore model of a porous medium*. Lat. Am. J. Chem. Engng. Appl. Chem. **13**. pp.143-183.

Whitaker, S. (1985). *A simple geometrical derivation of the spatial averaging theorem*. Chem. Engr. Edu. **19**. pp.18-21 y 50-52.

Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publishers. E.U.A.

Whitham, G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley. E.U.A.

Wilhelm, R. H., y Kwauk M. (1948). *Fluidization of solid particles*. Chem. Eng. Prog. **44**. No. 3. pp. 201-218.

Yamamoto, Y., Potthoff, M., Tanaka, T., Kajishima, T., y Tsuji, Y. (2001). *Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering Inter-particle collisions*. J. Fluid Mech. **442**. pp. 303-334.

Yasui, G., y Johanson, L. N. (1958). AIChE J. **4**. p. 445.

Yerushalmi, J., y Cankurt, N. T. (1979). *Further studies of the regimes of fluidization*. Powder Technol. **35**. pp. 143-150.

Zemanian, A. H. (1965). *Distribution Theory and Transform Analysis, An Introduction to Generalized Functions with Applications*. Dover E.U.A.