



Casa abierta al tiempo

**MODELO DE MEDIO EFECTIVO PARA LA
TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN
AEROGENERADORES**

Tesis que presenta

Catherine Teresa Paéz García

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Energía y Medio Ambiente)



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

POSGRADO DE ENERGÍA Y MEDIO
AMBIENTE

**MODELO DE MEDIO EFECTIVO PARA LA
TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN
AEROGENERADORES**

TESIS

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
(ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE)**

PRESENTA:

Catherine Teresa Paéz García

Director:

Dr. Francisco José Valdés-Parada

México D.F., 10 de julio de 2015

Agradecimientos

La Maestría en Ciencias (Energía y Medio Ambiente) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, pertenece al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad del CONACyT y cuenta con apoyo del mismo Consejo con el convenio 003893; por lo que agradece la beca recibida, a través del convenio No. 303662 para el desarrollo de esta tesis.

*Existe algo mucho más grande que la energía,
mucho más grande que la entropía, y es el amor.*

*En este enorme Universo lleno de estrellas,
hay alguien a quién le importas.*

*Y mientras nos preocupemos unos por otros,
ese será nuestro punto de partida.*

-Jeffrey Wright-

Comité tutorial

Director:

Dr. Francisco José Valdés Parada. Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica.
División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad
Iztapalapa.

El jurado designado por la
Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente
de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

Catherine Teresa Paéz García

El día **22** de **mayo** del año **2015**

Miembros del Jurado

Dr. Alberto Soria López

Presidente

Dra. Elizabeth Salinas Barrios

Secretario

Dr. Carlos Alberto Aguilar Madera

Vocal



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00001

Matrícula: 2131800490

MODELO DE MEDIO EFECTIVO PARA LA TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN AEROGENERADORES.

En México, D.F., se presentaron a las 12:30 horas del día 22 del mes de mayo del año 2015 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ALBERTO SORIA LOPEZ
- DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA
- DRA. ELIZABETH MARITZA SALINAS BARRIOS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (ENERGIA Y MEDIO AMBIENTE)

DE: CATHERINE TERESA PAEZ GARCIA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



Catherine Teresa Paez Garcia
CATHERINE TERESA PAEZ GARCIA
ALUMNA

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA SASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. ALBERTO SORIA LOPEZ

VOCAL

DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA

SECRETARIA

DRA. ELIZABETH MARITZA SALINAS BARRIOS

Índice general

Resumen	1
Abstract	3
Introducción	5
1. Antecedentes	9
1.1. Evolución de la energía eólica	9
1.1.1. De molino de viento a aerogenerador	9
1.2. Finales del siglo XIX y principios del siglo XX	14
1.3. Aerogeneradores en la actualidad	16
1.3.1. Ventajas y desventajas de los aerogeneradores de eje horizontal y de eje vertical	19
1.3.2. Aerogeneradores fuera de la costa	21
1.4. Modelado matemático de aerogeneradores.	24
1.4.1. Teoría de Betz	24
1.5. Promedio volumétrico	28
1.5.1. Modelo de un dominio (ODA) y de dos dominios (TDA)	32
1.6. Generalidades de la turbulencia	33
1.7. Resumen	36
2. Pregunta de investigación y objetivos	37
2.1. Objetivo general	37
2.2. Objetivos particulares	37

3. Metodología	39
3.1. Definición del sistema	39
3.2. Desarrollo del modelo matemático para predecir el perfil de velocidades en aerogeneradores	40
3.3. Plantear el problema de cerradura asociado y calcular los coeficientes asociados de medio efectivo en regiones representativas del sistema en dos y tres dimensiones	41
3.3.1. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en 2D.	41
3.3.2. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en 3D.	42
3.4. Validación del modelo macroscópico mediante simulaciones numéricas directas . .	43
4. Deducción del modelo macroscópico	45
4.1. Modelo microscópico	45
4.2. Ecuación de continuidad	47
4.3. Ecuación de Navier-Stokes	48
4.4. Cerradura	51
4.5. Modelo macroscópico cerrado	56
4.5.1. Modelo macroscópico antes y después del aerogenerador	57
4.5.2. Simplificación hacia la teoría de Betz	59
4.6. Resumen	61
5. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en dos dimensiones	63
5.1. Plano xy	64
5.2. Plano zx	71
5.3. Resumen de resultados	73
6. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en tres dimensiones	77
6.1. Análisis para determinar las dimensiones del sistema	79
6.2. Análisis para determinar las dimensiones de la región de promediado	83
6.3. Resumen de resultados	87
7. Validación del modelo macroscópico	89
Conclusiones	99

Recomendaciones o Perspectivas	103
Referencias	105
Apéndice A	114
Apéndice B	117
Apéndice C	118
7.1. Plano xy	118
7.2. Plano zx	122
Apéndice D	126
Apéndice E	132
7.3. Plano xy	133
7.4. Plano zx	137
Apéndice F	145

Índice de figuras

1.	Esquema de la distribución energética global (Adaptado de REN21 (2014)).	6
2.	Producción y potencial eólico de la República Mexicana (Adaptado de (Lozano-Cardona, 2013)).	6
1.1.	Representación de molinos de viento de eje vertical y eje horizontal.	10
1.2.	Desarrollo de la tecnología eólica (Adaptado de Gash y Twele, 2012, pág. 24) . . .	11
1.3.	Esquema de los componentes eléctricos de un aerogenerador.	15
1.4.	Representación de aerogeneradores de eje horizontal [a)] y eje vertical [b)].	19
1.5.	Esquema de la evolución temporal de la dimensión de los rotores y la potencia entregada (Adaptado de Gash y Twele, 2012, pág. 1).	21
1.6.	Capacidad energética global instalada de turbinas eólicas fuera de la costa (Adaptado de Taylor, 2012, pág. 349).	23
1.7.	a)Representación esquemática del sistema de un dominio. b)Representación esquemática del sistema de dos dominios.	26
1.8.	Representación esquemática de túnel de viento y un aerogenerador.	30
1.9.	Esquema de un sistema macroscópico con su correspondiente dominio de promediado, así como una representación periódica de la microestructura de un medio poroso, incluyendo longitudes de escala características.	31
1.10.	Representación de los modelos de uno y dos dominios para un sistema con un aerogenerador.	32
3.1.	Esquema de cortes en los planos xy , zx de un sistema en 3D.	42
3.2.	Representación de los cambios de la región de promediado a lo largo de la dirección x para un sistema en 3D.	43

4.1. Representación de las condiciones de frontera en un sistema en 3D. y sus longitudes características.	46
4.2. Puntos arbitrarios a elegir a lo largo de líneas de corriente: a) antes y después del aerogenerador y b) a la entrada y salida del sistema.	61
5.1. Esquema de algoritmo para determinar el tamaño adecuado del sistema L_x, L_y y la región de promediado $r_{0,x}$	64
5.2. Ejemplo del esquema y componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β de un sistema en 2D, en el plano xy . $r_{0,x}$ indica el tamaño en la dirección x del volumen promediante, el cual está adimensionalizado con respecto al radio de giro del aerogenerador, así como L_x y L_y	68
5.3. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. b) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 5$. c) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 20$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	69
5.4. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 3$ y $L_y = 5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para un sistema de longitud $L_x = 40$ y $L_y = 20$. El aerogenerador está ubicado en $x^* = 5$. c) Comparación de J_{xxxx}^* con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, para una longitud de $L_x = 40$ y distintas longitudes en L_y . d) Porcentajes de error relativo con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, entre las longitudes L_y del inciso c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	70
5.5. Ejemplo del esquema y componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β de un sistema en 2D, en el plano zx . $r_{0,x}$ indica el tamaño en la dirección x del volumen promediante, el cual está adimensionalizado con respecto al radio de giro del aerogenerador, así como L_x y L_z	71

5.6. a) Región de promediado $r_{0,x}$ representativa para cada L_x . b) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para $L_x = 10$ y $L_z = 15$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. c) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para una longitud de sistema de $L_x = 10$ y $L_z = 15$. d) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para una longitud de sistema de $L_x = 10$ y $L_z = 20$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x 73

5.7. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 3$ y $L_z = 5$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 40$ y $L_z = 20$. El aerogenerador está ubicado en $x^* = 5$. c), e) Comparación de J_{xxxx}^* con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, para $L_x = 40$ y distintas L_z . d). f) Porcentajes de error relativo con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, entre las L_z del inciso c), d), respectivamente. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x 74

6.1. Representación de las condiciones de frontera en un sistema en 3D. 78

6.2. Análisis para determinar las dimensiones de un sistema en 3D. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_z = 14$ y variando L_y con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentaje de error relativo entre cada curva de a). c) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$ y variando L_z con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Porcentaje de error relativo entre cada curva de c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x 79

6.3.	Análisis para determinar las dimensiones de un sistema en 3D. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* , para un sistema de dimensiones $L_x = 60, L_z = 14$ y variando L_y con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentaje de error relativo entre cada curva de a). c) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* , para un sistema de dimensiones $L_x = 60, L_y = 14$ y variando L_z con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Porcentaje de error relativo entre cada curva de c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	80
6.4.	Componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β para un sistema en 3D con dimensiones $L_y = 14, L_z = 14$ y $L_x = 60$	81
6.5.	a) Tubos de corriente en las cercanías del aerogenerador. b) Tubos de corriente a lo largo del sistema. c) Tubos de corriente en la superficie de entrada. La barra de colores representa la magnitud de la velocidad v_x	82
6.6.	Esquema de los cortes transversales y longitudinales de un sistema en 3D.	84
6.7.	a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para regiones de promediado $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. Considerando un sistema de longitudes $L_y = 20, L_z = 20$ y $L_x = 40$	85
6.8.	Propuestas de la sección transversal de la región de promediado: a) Sección transversal circular, b) Sección transversal de elipse. Como puede apreciarse en el caso b) la capa límite de velocidades es mayormente capturada	86
6.9.	a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para regiones de promediado $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Considerando un sistema de longitudes $L_y = 20, L_z = 20$ y $L_x = 40$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	86
7.1.	Representación de las condiciones de frontera para un sistema en 3D, desde un enfoque macroscópico sin aerogenerador.	90

7.2.	a) Componente x de la velocidad puntual \mathbf{v}_β . b) Componente x de la velocidad macroscópica $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$. Ambos para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y una región de promediado de longitud $r_{0,x} = 14$	93
7.3.	a) Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y una longitud de $r_{0,x} = 14$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentajes de error relativo entre los promedios obtenidos mediante las DNS y la solución del modelo macroscópico. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	94
7.4.	Porcentajes de error relativo entre perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	94
7.5.	Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de un círculo y diferentes $r_{0,x}$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	96
7.6.	Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y diferentes $r_{0,x}$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x	97

Resumen

El aumento de la demanda energética mundial junto con la necesidad por reducir el impacto negativo al ambiente, llevan a la búsqueda de fuentes alternas de energía. Las energías renovables representan una opción prometedora para un desarrollo sustentable. Específicamente, la energía eólica ha tenido una evolución apreciable durante la última década, principalmente en investigaciones sobre perfiles alares y la ciencia de materiales. En particular, existe la necesidad por entender los flujos de aire a través de aerogeneradores a gran escala, con el fin de evitar el sobre-dimensionamiento de los parques eólicos. Más aún, existen dificultades por adquirir datos experimentales confiables. Además, en la práctica es necesario contar con predicciones macroscópicas más precisas que las aportadas por los modelos clásicos. Por ello, en años recientes se ha fomentado simular este tipo de sistemas a partir de la solución numérica de las ecuaciones locales instantáneas que gobiernan las transferencias de masa y cantidad de movimiento a escala microscópica¹, para posteriormente aportar información del sistema a escala macroscópica². Sin embargo, en la práctica, no toda la información obtenida por este método es útil. Más aún, los tiempos computacionales suelen ser elevados, evitando que se puedan estudiar los parques eólicos en su totalidad. Motivados por lo anterior, en este trabajo se desarrolla un modelo macroscópico a partir del método del promedio volumétrico que capture la información esencial del transporte de cantidad de movimiento en la escala microscópica. En este trabajo, la atención se centra en el estudio de un solo aerogenerador de alta potencia. El resultado del promediado es un modelo macroscópico que consiste en una ecuación que predice los cambios espaciales de la velocidad macroscópica. El modelo está expresado en términos de dos coeficientes de medio efectivo como funciones de la posición, éstos son: un coeficiente de Darcy-Forchheimer y un

¹En este contexto, escala microscópica se refiere a aquella en donde comienza a ser válida la hipótesis del continuo.

²En este contexto, escala macroscópica se refiere a la escala de campo. Es decir, la escala de un aerogenerador de alta potencia, alrededor de 100 m de altura.

coeficiente de inercia. Estos coeficientes pueden ser predichos mediante simulaciones numéricas. De esta forma, con una sola ecuación es posible describir el transporte de cantidad de movimiento antes, alrededor y después del aerogenerador. La validación del modelo macroscópico se llevó a cabo mediante la comparación de las predicciones de la velocidad promedio y el promedio de la velocidad resultante de las simulaciones numéricas directas. Se halló un porcentaje de error relativo entre ambas por debajo del 10%. Esto último muestra que los coeficientes de medio efectivo son capaces de contener la información esencial del transporte de cantidad de movimiento de un aerogenerador, motivando al modelado de más de un aerogenerador, lo cual se realizará en una investigación futura.

Abstract

The increase of world energetic demand along with the need to reduce the environment impact, lead to the search for alternative energy sources. Renewable energies represent a promising option for a sustainable development. Specifically, wind energy has had a noticeable evolution during the last decade, mainly on research about airfoil profiles and material science. Particularly, there is a necessity for understanding the air flow through large-scale wind turbines, with the aim of avoiding over-planning of wind farms. Moreover, there are difficulties for acquiring reliable experimental data. In addition, in practice it is necessary to have more precise macroscopic predictions than those provided by classical models. For this reason, in recent years there has been a motivation for simulating this type of systems from the numerical solution of the local instantaneous equations that govern mass and momentum transport at the micro-scale³, to later provide information of the system at the macro-scale⁴. Furthermore, the computational times are usually high, thus avoiding that wind farms can be entirely studied. Motivated by the above, in this work a macroscopic model that captures the microscopic-scale momentum transport essential information is derived using the volume averaging method. In this work, the attention is directed to the study of a single high-power wind turbine. The result of the averaging process is a macroscopic model that consists of an equation that predicts the spatial variations of the macroscopic velocity. The model is expressed in terms of two position-dependent effective medium coefficients, these are: a Darcy-Frochheimer coefficient and an inertial coefficient. These coefficients can be predicted from numerical simulations. In this way, with a single equation it is possible to predict momentum transport before, through and after the wind turbine. The validation of the macroscopic model was carried out by comparing

³In this context, the microscopic-scale refers to the one where the continuum hypothesis begins to be valid.

⁴In this context, the macroscopic-scale refers to the field-scale. It means, the scale of a high-power turbine, about 100 m.

the average velocity predictions with those resulting from direct numerical simulations. The relative error percent between both approaches was found to be less than 10%. The latter shows that effective medium coefficients are capable to capture the essential information about momentum transport through a wind turbine, thus motivating to model more than one wind turbine, which will be carried out in a future research.

Introducción

El crecimiento demográfico, aunado a las crecientes expectativas económicas, han llevado al aumento de la demanda energética mundial (Leggett, 1996); de esta manera, la dinámica de una sociedad consumista⁵ obliga a la búsqueda de fuentes alternas de energía. Aunado a esto, la reciente reforma energética ha conferido la obligación constitucional por parte del Estado de regular a las empresas productoras y distribuidoras de energía. En este contexto, los instrumentos legales que permiten la inversión en energías renovables fueron modificados con el objetivo de que las empresas productoras de energía garanticen la sustentabilidad energética. Es así, que la reforma energética intenta coadyuvar a la realización de la meta propuesta por la Secretaría de Energía, según la cual las energías renovables deben satisfacer el 35 % de la demanda energética nacional para el año 2024 (LAERFT, 2014).

Del abanico existente de las fuentes alternas de energía que se producen internacionalmente [ver Fig. 1], las energías renovables representan una opción viable para el desarrollo sostenible ecológicamente y económicamente según anuncia la ONU (1986). Es por ello, que estas fuentes han ido adquiriendo una posición importante en el abastecimiento de la energía eléctrica, con el 19 % de la producción anual. Debido a lo anterior, la energía eólica ha tenido un desarrollo significativo a lo largo de casi dos décadas. Desde el marco internacional, a partir del año 1996 hasta el año 2013, se han instalado cerca de 311 GW de potencia eólica (GWEC, 2014). Mientras que la producción nacional de energía renovable es alrededor del 16 %, según los estimados de Beltrán-Rodríguez (2014), sólo el 1.69 % es producido por parques eólicos. Sin embargo, el estudio antes citado, menciona que sólo se aprovecha el 5 % del potencial eólico en México [ver Fig. 2]. Dicho porcentaje es la suma de aerogeneradores utilizados en granjas eólicas, y se estima que la potencia instalada es alrededor de 1000 MW (SENER, 2014).

⁵La sociedad de consumo se define como la elevación del nivel de vida mediante una lógica de renovación precipitada de los bienes materiales (Lipovetsky, 2000).

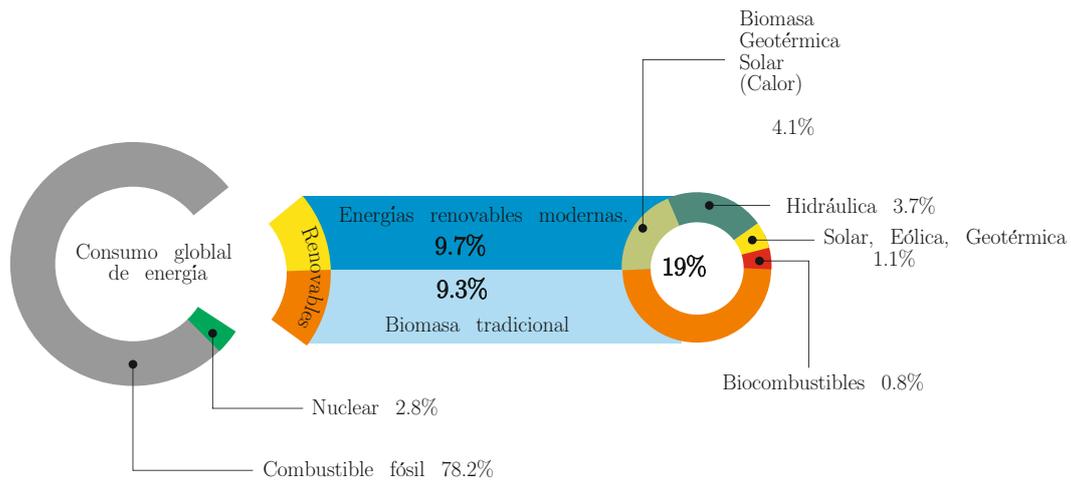


Figura 1. Esquema de la distribución energética global (Adaptado de REN21 (2014)).

Actualmente, el desarrollo de la tecnología eólica se ha centrado en el mejoramiento del diseño de los perfiles alares, así como en la sustentación y en la resistencia de los materiales (NASA, 2014; IIE, 2014; CENER, 2014). No obstante, las raíces del desarrollo de la energía eólica, así como el diseño de los parques eólicos, se han basado en la teoría de Betz (1920) y la metodología de Glauert (1935). Ambas, por supuesto, modificadas y acopladas para distintas herramientas de cálculo.



Figura 2. Producción y potencial eólico de la República Mexicana (Adaptado de (Lozano-Cardona, 2013)).

Por un lado, la teoría de Betz da un estimado de la máxima energía disponible del viento para ser transformada a energía eléctrica, mediante un *balance macroscópico de energía mecánica*⁶. La metodología de Glauert hace uso de la teoría de Betz y además realiza un análisis de las fuerzas que actúan sobre las palas del aerogenerador, lo que se traduce en una serie de ecuaciones que se resuelven iterativamente. Sin embargo, y hasta cierto grado, la simplicidad de la teoría de Betz y el carácter iterativo del método de Glauert, se pueden traducir en un sobre-dimensionamiento de los parques eólicos.

Por otro lado, el aumento en las capacidades computacionales, ha llevado a resolver numéricamente las ecuaciones puntuales⁷ que describen la conservación de masa y el movimiento de un fluido [ecs. de continuidad y de Navier-Stokes]. A pesar de ello, los tiempos de cómputo actuales siguen siendo costosos, además que, en la práctica, se requiere de información útil en la macroescala, es decir, a la escala de campo. Motivados por lo anterior, en este trabajo se desarrolla un modelo predictivo macroscópico de los perfiles de velocidad alrededor de un aerogenerador.

Para ello, la estructura del presente trabajo consiste en el desarrollo de seis capítulos, de los cuales, en el Capítulo 1 se lleva a cabo la revisión de los antecedentes de la producción de energía eólica. En el Capítulo 2 se plantea la pregunta de investigación y los objetivos del trabajo; para dar lugar al desarrollo de la metodología en el Capítulo 3. Posteriormente, en el Capítulo 4 se lleva a cabo la deducción del modelo macroscópico. En el Capítulo 5 y 6 se realiza el cálculo de los coeficientes de medio efectivo. En el Capítulo 7 se presenta la validación del modelo mediante la comparación con simulaciones numéricas directas. Finalmente se muestran las conclusiones, perspectivas del trabajo y los apéndices correspondientes.

⁶Dicho balance se lleva a cabo usando la ecuación de Bernoulli.

⁷Ecuaciones que describen la conservación de masa y el movimiento de un fluido a la escala del continuo o también llamada, microescala.

Capítulo 1

Antecedentes

No puede impedirse el viento. Pero pueden construirse molinos.

Proverbio holandés

En el presente capítulo se hará una breve revisión de la evolución de la energía eólica. Posteriormente, se revisarán las principales teorías alrededor de aerogeneradores más importantes que se han desarrollado hasta el momento, como la teoría de Albert Betz (1920), Glauert (1935) y la teoría del elemento de pala [ver Sección 1.4]. Además, se revisarán las características de los modelos de un dominio y dos dominios [ver Sección 1.5].

1.1. Evolución de la energía eólica

1.1.1. De molino de viento a aerogenerador

La energía obtenida a partir del viento es un recurso que se ha estado desarrollando desde hace cientos de años. Aunque no se ha podido precisar la fecha de construcción del primer molino de viento, se sabe que se construyeron por la necesidad de extraer agua de pozo, para el riego de cultivos y para la molienda de granos (Manwell *y col.*, 2009). La idea principal era contar con un sistema que aprovechara la energía del viento mediante una serie de configuraciones, con las cuales se pudiera generar un trabajo mecánico. Algunos de los sistemas desarrollados fueron sufriendo cambios importantes a lo largo del tiempo y alrededor del mundo, según su uso. El primer sistema data del año 1700 a.C., y se cree que este dispositivo fue creado para el bombeo

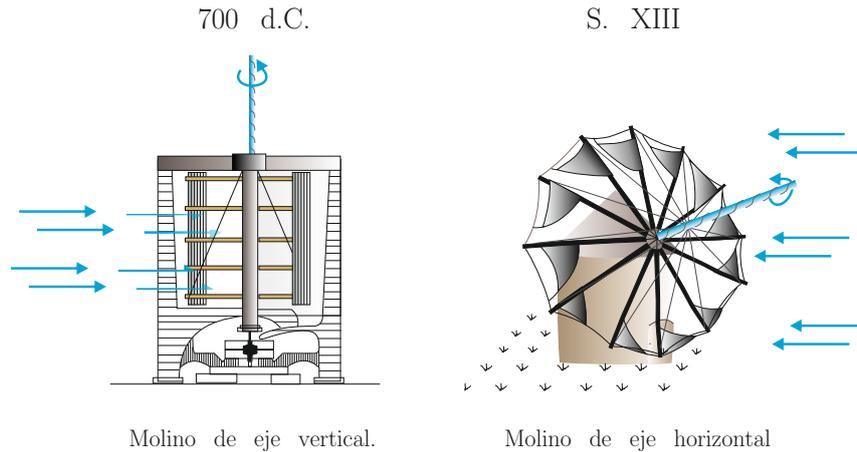


Figura 1.1. Representación de molinos de viento de eje vertical y eje horizontal.

de agua y riego de cultivos. Sin embargo, el primer sistema físico del que se tienen registros, es del siglo VIII d.C [ver Fig. 1.2 a)]. Este sistema constaba de dos pisos; en el piso superior se encontraban las piedras en donde se molían los granos. En el piso inferior se encontraba una rueda la cual era impulsada por una serie de esteras trenzadas que se adjuntaban al eje causando así la fuerza para inducir el movimiento (Gash y Twele, 2012). Se cree que este tipo de sistemas fueron inspirados por la rueda griega o nórdica estableciendo las bases para los llamados *molinos de viento* (Derry y Williams, 1960).

Los molinos de viento se dividían en dos grupos fundamentales; el primero se basaba en un diseño de eje vertical y el segundo en uno de eje horizontal [ver Fig. 1.1]. Los molinos de eje vertical, cuyo eje principal es perpendicular al suelo, se caracterizaban por aprovechar el flujo de aire discontinuo para mover una serie de palas que salían del eje principal. Esta característica era aprovechada para que el molino de viento se utilizara en el bombeo de agua o para el riego de cultivos. Este tipo de molinos, se utilizaron durante los siguientes cuatro siglos, hasta que en el siglo XI se pusieron en marcha los *molinos de eje horizontal*. Este tipo de molinos se caracterizaron por tener su eje paralelo al suelo y perpendicular al flujo de aire. Se basaban en la fuerza de elevación, también llamada de sustentación, por la cual podían aprovechar velocidades de viento mayores a las que se encuentran a la altura del suelo. Además, la forma y distribución de las aspas generaban una mayor cantidad de energía mecánica, debido a que tenían una mayor cantidad de superficie expuesta a la acción del viento (Porter, 1867). Esto último fue un cambio de paradigma para el uso de este tipo de molinos, ya que eran necesarios

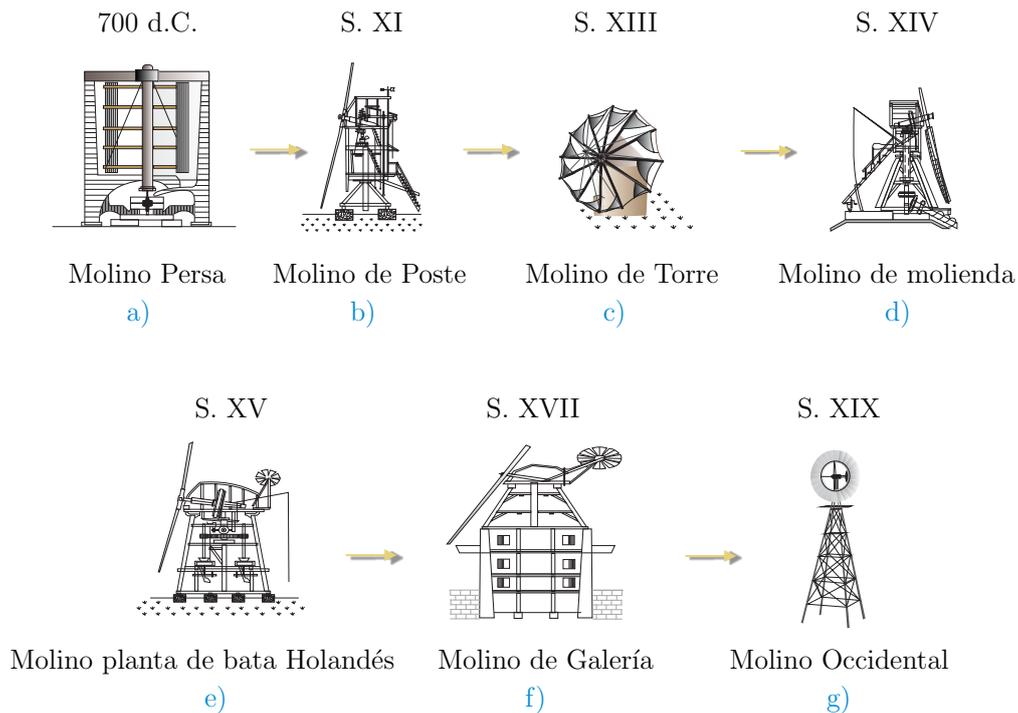


Figura 1.2. Desarrollo de la tecnología eólica (Adaptado de Gash y Twele, 2012, pág. 24)

en actividades con mayor demanda de energía mecánica como la molienda de maíz o para la extracción de cantidades considerables de agua de los pozos (Tangler, 2000).

Las tipologías de los molinos de viento, fueron diversas a lo largo del tiempo y presentaron diferencias en sus diseños según su ubicación. A pesar de ello, existieron molinos que no sólo fueron representativos en el tiempo sino que marcaron tendencias significativas en cuanto a la evolución del diseño y su maquinaria. El primer molino de viento de eje horizontal,¹ se conoció como *molino de poste* [ver Fig. 1.2 b)], estaba hecho principalmente de madera y toda su estructura, tanto las aspas (o velas) como la maquinaria, estaban fijas entre sí, lo que provocaba un mayor esfuerzo y desgaste. Incluso hacía imposible direccionar al molino de cara al viento. Por ello, en el siglo XIII, se implementó el *molino de torre* [ver Fig. 1.2 c)]. Este molino consistió en una piedra cilíndrica con un rotor de 7 u 8 velas. A diferencia del molino de poste, en éste sólo se movían las velas, lo que reducía el esfuerzo. Además, el cambio de materiales de la torre, por piedra o ladrillo, permitió que el molino de torre formara parte de la misma vivienda; ofreciendo mayor resistencia al viento sobre su estructura. Sin embargo, las necesidades por moler mayores cantidades de granos fueron creciendo, de tal manera que ya no era suficiente el espacio para

¹El primer molino de eje horizontal apareció en distintas partes del mundo; en Inglaterra alrededor de 1150, en Francia en 1180, en Alemania en 1222 y en Dinamarca en 1259.

almacenarlos. Esto provocó que se reordenara la estructura interna del molino. Por ejemplo, el *molino de molienda* [ver Fig. 1.2 d)], ya no permitía que se pudiese usar al mismo tiempo como vivienda, ya que éste contaba con que el espacio excedente se usara como almacén de grano; además en este tipo de molinos se implementaron nuevas formas de reorientar al molino con el viento. Versiones posteriores consistieron en tapas giratorias de madera y rotores de cuatro velas. Un ejemplo es el *molino planta de bata Holandés* [ver Fig. 1.2 e)]. Este molino es una versión modificada directamente del molino de torre y representó una nueva concepción de molino de viento. En este tipo de molino, el tamaño de la estructura giratoria, es decir, las aspas (velas) se redujo considerablemente, lo que permitió que por el centro del poste pudiera pasar un eje para mover de forma más eficiente la maquinaria interna. Por la ligereza de este molino, comparada con los anteriores, podía usarse para el drenado de agua de los pantanos. Otra variante de este tipo de molino, fue el *molino de Gallería* [ver Fig. 1.2 f)] llamado así por su poco uso. Este tipo de molino consistió en mantener una porción de su parte inferior por debajo del suelo, con el propósito de reforzar al molino contra la fuerza del viento. Debido a esto, las velas estaban relativamente más cerca del suelo, provocando que se desaprovechara el poder del viento de las zonas más altas.

Por más de tres siglos se implementaron diversas mejoras mecánicas para la captación del viento (Derry y Williams, 1960). Por ejemplo, se implementó un manubrio, primero simple y más tarde con engranajes, que podía fijarse a cualquiera de los postes que rodeaban la base del molino y que movían un par de ruedas por carriles; esto hacía que el manubrio funcionara como un timón. De esta manera, cuando el viento cambiaba de dirección, el timón rotaba y hacía que las ruedas se moviesen por los carriles, orientándose el molino en la dirección conveniente. Años más tarde, se implementó un dispositivo de control autoregulable. Este dispositivo consistió en regular el ángulo de las velas o las palas, de tal manera que si la fuerza del viento aumentaba y superaba una presión dada, las palas cambiarían de posición. Así pues, existieron otros tipos de dispositivos de control que prácticamente se basaron en el mismo principio, pero cambiando su distribución de aspecto como lo patentaron Johnson (1855), Johnson (1856). En general, las ventajas que ofrecían este tipo de dispositivos, fueron (Brewster, 1856):

- Podía ser reparado por cualquiera.
- Se podía utilizar en el bombeo de cualquier sustancia líquida.

- No se congelaba en invierno.
- Debido a su rotatoriedad, podía ser impulsado fácilmente por la fuerza del viento.

Además, debido al avance en el desarrollo de nuevos materiales de construcción y principalmente a la necesidad por abastecer de agua a ciudades, en el siglo XIX, se creó el *molino de viento occidental* [ver Fig. 1.2 g)], el cual a su vez, constituyó el último molino antiguo. Este molino se caracterizó por tener una roseta rotor con más de veinte láminas de chapa metálica sobre una torre de más de quince metros de altura, y con un sistema de orientación completamente automático para el control de tormentas (Gash y Twele, 2012; Manwell *y col.*, 2009). Con los avances de este tipo de molino, a lo largo del tiempo, se llegaron a tener 20,000 molinos de viento, tan sólo en Europa los cuales aportaban el 90% de la energía utilizada (Ackermann, 2005). Sin embargo, cuando en algunos lugares el molino de viento se usaba para moler granos o bombear agua, en otros lugares, ya se estaba empleando para bombear fluidos y generar depósitos para después ser utilizados en pequeñas turbinas de agua; o para dar movimiento a una máquinas de tejer, o telares (Porter, 1868); ya que un molino de viento podía proporcionar alrededor de 55 hp (Munn, 1887). Por otra parte, casi al mismo tiempo que la creación del molino de viento occidental, las necesidades del mundo también crecían y se transformaban. Un ejemplo de ello fue la necesidad por iluminar los hogares mediante el uso de bombillas (lámparas), en lugar de las lámparas de queroseno que se venían usando. Ya que las bombillas funcionaban con energía eléctrica, en 1882 se creó la primera central eléctrica comercial en la ciudad de Nueva York, con el sólo propósito de generar electricidad para iluminar 400 lámparas para 85 clientes. Tal fue la popularidad de este servicio que sólo dos años después se iluminaron 10,164 lámparas para 508 clientes (Josephson, 1959). Esta central eléctrica funcionaba con motores de vapor de pistones que movían un alternador para producir la energía eléctrica, los cuales proporcionaban alrededor de 175 caballos de fuerza (hp). Motivado por esto y por los avances en la tecnología de los molinos de viento, en 1887 el profesor James Blyth usó los principios del funcionamiento de los molinos y los aplicó a la producción de energía eléctrica (Taylor, 2012); surgiendo por primera vez el concepto de turbina de viento o *aerogenerador*. La diferencia entre un molino de viento y un aerogenerador radica, no sólo en su uso, sino en algunas modificaciones del diseño. Esto último se reduce a que un aerogenerador es un molino de viento al que se le añaden discos giratorios que generan un campo magnético,

de tal manera que la energía mecánica se convierte en energía eléctrica.

1.2. Finales del siglo XIX y principios del siglo XX

A finales del siglo XIX el profesor Paul LaCourt comenzó un proyecto sobre el desarrollo de un nuevo diseño de aerogeneradores. Basado en el molino occidental, se propuso, no sólo producir energía eléctrica, sino encontrar una forma para almacenarla. Para LaCourt era un hecho que los molinos de viento tenían que ser transformados, pues él tenía la idea de que “*una turbina debía girar con una suave brisa*” (Hansen, 1985). Con esta idea, y los avances en la aerodinámica de aviones, en 1896 comenzó los primeros experimentos en aerodinámica aplicados a aerogeneradores, los cuales además, estaban apoyados en los trabajos de Vogt y Irminger sobre sustentación (Derry y Williams, 1960). Estos experimentos fueron creados en la primera estación de prueba, Askiov en donde, posiblemente, se llevaron a cabo las primeras pruebas en túneles de viento, que él mismo había construido. Más tarde, en 1897, LaCourt creó una segunda estación de prueba, en donde además difundía el conocimiento, principalmente en el área eléctrica. Debido a que los experimentos de LaCourt fueron principalmente en el aspecto eléctrico, en 1903 se fundó la Asociación Danesa de viento Power Engineers (DVES), en donde se desarrollaron los avances más significativos en dispositivos de control (Akhmatov, 2003a).

Las conclusiones a las que llegó LaCourt fueron tan generales que hasta la fecha algunas siguen siendo aceptadas. Por ejemplo, mostró que, para producir un máximo de energía con una superficie alar dada, el número de las palas (álabes) debía ser a lo más cuatro. Además, mostró que debían tener un ángulo de ataque relativamente pequeño y su velocidad de rotación debía ser lo suficientemente rápida para producir la energía requerida. Sin embargo, cuando construyó su primer prototipo, éste resultó ser 7% más eficiente de lo que él había predicho. Años más tarde y tras varios prototipos hechos a prueba y error, se obtuvo que mientras más palas tuviera una turbina eólica, más eficiente era; lo cual podría contradecir a las observaciones de LaCourt. Sin embargo, cuando el número de palas excede de tres, el flujo de aire que pasa a través de ellas se vuelve más perturbado, de modo que aerodinámicamente interfieren entre sí. Por tanto, las turbinas tienden a ser menos eficientes cuando el número de palas aumenta; siendo las turbinas con tres palas las más eficientes (Tangler, 2000).

Años más tarde, con los trabajos de LaCourt, en 1908, se creó la primera empresa en donde

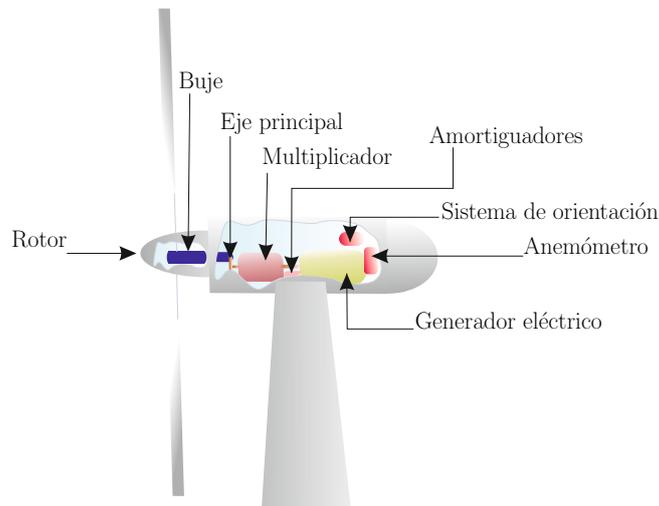


Figura 1.3. Esquema de los componentes eléctricos de un aerogenerador.

se construyeron alrededor de 72 aerogeneradores. Las principales características de estos fueron:

- Rotores con potencias de 10-35 kW.
- El diámetro de rotor de 20 m, con cuatro palas.
- La torre estaba hecha de acero de celosía.
- Dentro de la caja del generador eléctrico se implementó una caja de intercambios intermedios que permitía controlar las velocidades del rotor.
- La electricidad se hacía pasar por pequeñas rejillas aisladas hacia una batería amortiguadora.
- La eficiencia global era de alrededor del 22 %.

Debido al avance en el diseño y componentes de los aerogeneradores, aunado al incremento en los precios del combustible, provocado por la primera guerra mundial, la fabricación de aerogeneradores fue en aumento. Es así, que en 1918 cerca de 120 turbinas de viento se pusieron en funcionamiento (Akhmatov, 2003b). Por otro lado, en Dinamarca el uso de la corriente directa, motivó a que un aerogenerador pudiese conectarse en paralelo con las centrales de tipo diésel, acelerando aún más su crecimiento.

Para una mejor comprensión en los avances de los componentes eléctricos de un aerogenerador, en la Fig. 1.3 se ilustra la distribución de éstos. A grandes rasgos, la función que desempeña cada componente es la siguiente:

1. **Eje principal:** Es el eje que transporta la energía mecánica al generador eléctrico.
2. **Generador eléctrico:** Transforma la energía mecánica a energía eléctrica, mediante la inducción de un campo magnético.
3. **Buje:** Une las palas al eje principal del aerogenerador.
4. **Multiplicador:** Es utilizado para elevar la velocidad del eje principal hasta 50 veces más que la turbina.
5. **Sistema de orientación:** Permite la re-orientación tanto de la góndola como de las palas hacia la acción del viento
6. **Amortiguadores:** Se usan para reducir las vibraciones producidas por algunos de los componentes (como el multiplicador o generador eléctrico) hacia la torre.
7. **Anemómetro:** Mide la velocidad del viento y mediante una serie de configuraciones se acciona el sistema de orientación.

1.3. Aerogeneradores en la actualidad

Durante la segunda guerra mundial, el ingeniero Palmer Putman, diseñó la primer turbina conectada a la red eléctrica con 53 m de diámetro y una potencia de 1,250 kW. Consistió en un rotor a sotavento con regulación de paso variable. A lo largo de los cuatro años que duró la operación de esta turbina se notó que el costo de producción de la energía era 50 % mayor a la producida por fuentes convencionales (carbón e hidrocarburos) (Ackermann, 2005; Gash y Twele, 2012). A pesar de ello, se continuaron fundando empresas en las cuales, con la marcha, se hacían mejoras a las turbinas de viento. Por ejemplo, la empresa FL Smidth, comenzó con la construcción de aerogeneradores, llamándoles “Aeromotor” (Winter, 1987). El diseño comenzó mediante el desarrollo de una turbina de viento con un diámetro de rotor de 17.5 m y una potencia de salida de alrededor de 50 kW a una velocidad del viento de aproximadamente 11 m/s. El diseño aerodinámico del rotor consistió en dos palas del rotor perfiladas entre sí; las cuales estaban hechas de madera laminada como material óptimo para la sustentación. Además, la velocidad del rotor estaba limitada por un freno aerodinámico.

Por otra parte, desde el aspecto teórico, el físico Albert Betz (1920), desarrolló un modelo matemático para predecir el máximo de energía extraíble del viento (en la Sección 1.4.1 se presentan los detalles de esta teoría). Esto último, junto con los estudios del doctor Ulrich Hutter en 1942, sentó las bases teóricas para la construcción de turbinas modernas con dos y tres palas (álabes). Además, Hutter, en un sistema experimental, aplicó la aerodinámica moderna y la tecnología de la fibra óptica en la construcción de palas (WPED, 2010). Así mismo, al término de la segunda guerra mundial y por la demanda de energía, Johannes Juul (1957), diseñó una turbina con la idea de hacerla simple, pero con la capacidad de producir energía de manera autónoma y conectada a la red eléctrica (Gipe, 1995). Lo que la hizo diferente a la turbina de Putman fue que el rotor lo fabricó para conseguir que el flujo de aire, en un rango de viento fuerte (alrededor de 100 km/h), actuara pasivamente sobre las palas. Las puntas de estas palas tenían alerones que se activaban por fuerzas centrífugas al momento de una interrupción de la red. Además, debido a los avances en la energía eléctrica por Nicola Tesla (Cheney, 2001), al aerogenerador se le implementó un alternador que hacía que la corriente se transformara de energía directa a energía alterna. El primer aerogenerador de Juul, tuvo un diámetro de 24 m y una capacidad de 200 kW, el cual operó durante cinco años (1957-1962), proporcionando electricidad a la red SEAS. Sin embargo, los cálculos de Juul, junto con los de Putman, mostraron que la energía generada por el viento aún era demasiado costosa como para competir con la generación de energía fósil convencional (Hansen, 2008). A pesar de esto último, los aerogeneradores de Juul se dieron a conocer como los *pioneros en los aerogeneradores modernos*. Más aún, los generadores (para la producción de la energía eléctrica) se cambiaron, de síncronos a asíncronos, ya que son mucho más sencillos para conectarlos a la red. Además, el control por pérdida aerodinámica es también más simple que con un generador síncrono.

Una prueba de ello, fueron los aerogeneradores *Gedser* con potencia de 200 kW (Ackermann, 2005); cuyas principales características son:

- Turbina con tres palas.
- Rotor a barlovento.
- Rotor con orientación electromecánica.
- Generador asíncrono.

- Turbina con regulación por pérdida aerodinámica.
- Frenos aerodinámicos de emergencia en punta de pala.

Después de la primera crisis del petróleo de 1973 (Blinder, 1981), y basándose en el aerogenerador Gedser, muchos países despertaron su interés en la energía eólica (Taylor, 2012). En Dinamarca, las compañías de energía dirigieron inmediatamente su atención a la construcción de grandes aerogeneradores (alrededor de 500 kW), al igual que Alemania, Suecia, el Reino Unido y los EE.UU (Hau, 2006). Debido a esto, en 1979 se construyó el aerogenerador *Nibe* de eje horizontal con una capacidad de 630 kW, con regulación por cambio del ángulo de paso y con regulación por pérdida aerodinámica (Corten, 2001). Este tipo de aerogenerador resultó ser costoso en su producción, lo cual originó un aumento en el precio de la energía eléctrica. Esto último fue la clave para argumentar en contra de la energía eólica (Taylor, 2012), lo que desmotivó el financiamiento de la investigación en turbinas eólicas más eficientes. Para atender a esto último, la firma VESTAS implementó la producción de aerogeneradores de pequeña potencia con 15 m de diámetro y una potencia nominal de 55 kW (Maegaard, 2013).

Posteriormente, en los años ochentas, se creó la turbina *Riisager*, la cual utilizó componentes estándar que no resultaron costosos (por ejemplo: un motor eléctrico como generador, partes de un vehículo como multiplicador y freno mecánico). La turbina de Riisager resultó ser un éxito en muchos hogares particulares de Dinamarca, y su éxito proporcionó la inspiración para que los actuales fabricantes daneses de aerogeneradores empezasen a diseñar sus propios aerogeneradores de pequeña potencia (de 5 a 11 kW) (Maegaard, 2013).

Debido a esto último, se replanteó el diseño de un aerogenerador y se regresó a los aerogeneradores de eje vertical o VAWT², los cuales pueden trabajar con velocidades de viento relativamente bajas (a partir de 2 km/h) (Taylor, 2012). Tras varios experimentos, se encontró que el diseño comercialmente óptimo de VAWT es el llamado *Darrieus*; el cual tiene de dos a tres aspas que salen en forma de “C” del eje principal [ver Fig. 1.4 b)]. Las ventajas de este tipo de aerogeneradores sobre los de eje horizontal o HAWT³ [ver Fig. 1.4 a)] llevaron a cuestionarse sobre qué tipo de aerogenerador era más conveniente; lo cual se discutirá a continuación.

²por sus siglas en ingles *Vertical Axis Wind Turbine*.

³por sus siglas en ingles *Horizontal Axis Wind Turbine*.

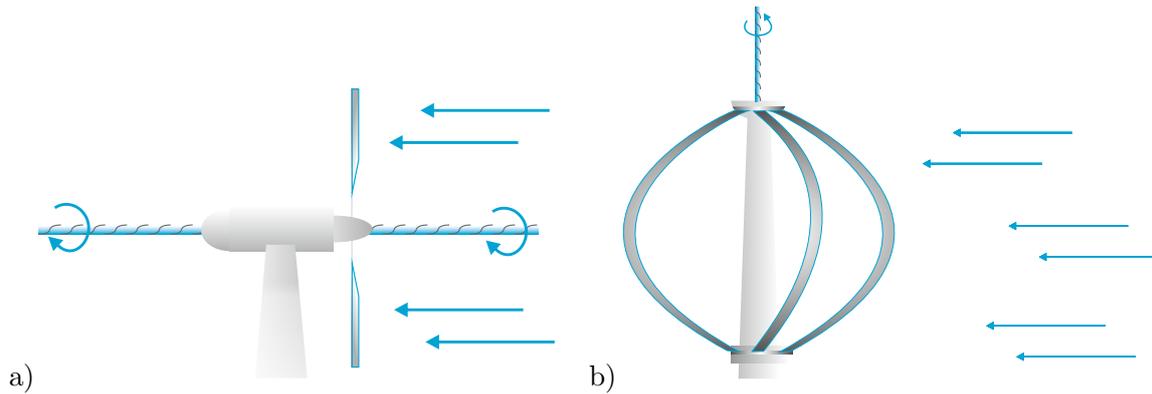


Figura 1.4. Representación de aerogeneradores de eje horizontal [a]) y eje vertical [b)].

1.3.1. Ventajas y desventajas de los aerogeneradores de eje horizontal y de eje vertical

Ventajas de los aerogeneradores de eje vertical

1. Los componentes eléctricos del aerogenerador se pueden situar en el suelo, por lo que puede no necesitar una torre para la máquina.
2. Aprovechan las velocidades de vientos que se presentan a la altura del suelo, pues su diseño logra aprovechar las irregularidades del terreno, que incrementan la velocidad del viento.
3. Son más resistentes a ráfagas de viento intensas.
4. No necesitan de mecanismos de orientación para girar el rotor a barlovento.
5. No requieren grandes inversiones porque sus dimensiones pueden ser reducidas.
6. Su alineación vertical recibe al viento desde cualquier dirección, por lo que no requieren sistemas de alineamiento del aerogenerador.

Desventajas de los aerogeneradores de eje vertical

1. La máquina no es de arranque automático es decir, necesitará un “empuje” antes de arrancar.
2. Debido al diseño, el aerogenerador puede necesitar de cables tensores que la sujeten, lo que incrementa los otros costos de instalación, dependiendo de la zona en donde se ubique.

3. En caso de revisión técnica, se necesita desmontar el rotor, tanto en las máquinas de eje horizontal como en las de eje vertical. En el caso de las últimas, implica que toda la máquina deberá ser desmontada.

Ventajas de los aerogeneradores de eje horizontal

1. El diseño de las puntas de pala permiten que tengan un ángulo de ataque óptimo a favor del viento.
2. La geometría de las palas permite que el ángulo de ataque sea ajustado y proporcione control, de modo que la turbina puede recoger la máxima cantidad de energía cinética del viento de cada día y estación.
3. Las altura de las torres permiten acceder a vientos más fuertes (alrededor de 70 km/h) en sitios con cizalladura⁴. Esto se debe a que en algunos lugares, cada 10 metros de altura, la velocidad del viento se incrementa un 20 %.

Desventajas de los aerogeneradores de eje horizontal

1. Tienen problemas para funcionar cerca del suelo, debido a las turbulencias generadas por las irregularidades del suelo.
2. Debido a las dimensiones de la torre y aspas, entre 50-100 m y 45-125 m, respectivamente, su transporte puede costar un 20 % del costo de equipamiento.
3. Exigen un control cuidadoso, de lo contrario, son propensas a la fatiga de material y daños estructurales.
4. Tienen que orientarse continuamente hacia el viento.

A pesar que el número de desventajas de las turbinas de eje horizontal están por encima de las de eje vertical, el diseño de las primeras logra entregar potencias mucho mayores en comparación con las turbinas de eje vertical, además de recuperar la inversión a un corto plazo (Gash y Twele, 2012). Esto se logra haciendo el rotor cada vez más grande en proporción con la altura de su torre [ver Fig. 1.5]. A pesar de ello, ambas tecnologías se usan actualmente y la

⁴Diferencia en la velocidad del viento o su dirección entre dos puntos.

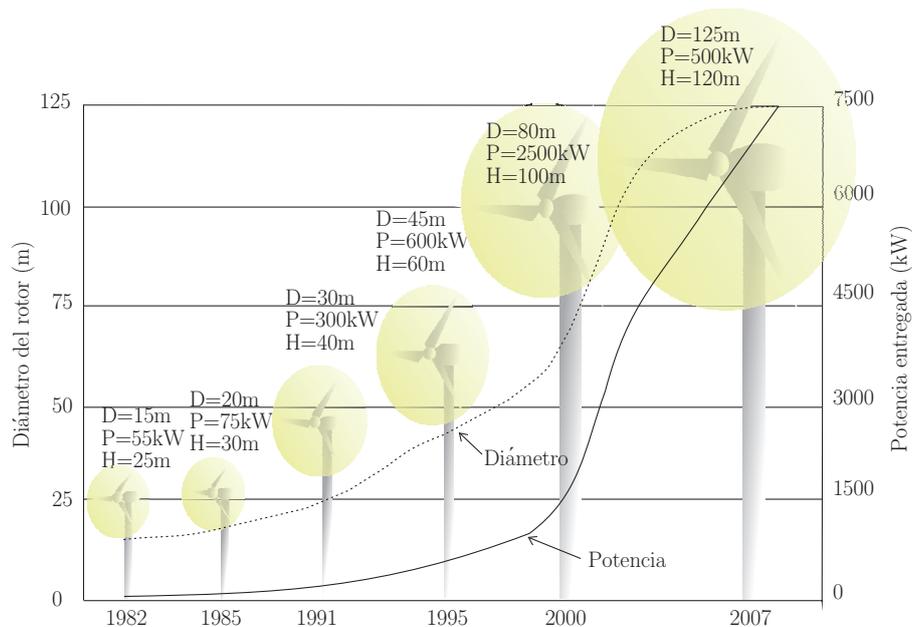


Figura 1.5. Esquema de la evolución temporal de la dimensión de los rotores y la potencia entregada (Adaptado de Gash y Twele, 2012, pág. 1).

elección entre una u otra radica en la potencia entregada, es decir, ambas tecnologías pueden ser usadas para los mismos usos como: bombeo de agua, iluminación eléctrica, molienda de granos, inter-conexión a la red eléctrica etc. Sólo que los aerogeneradores de eje horizontal pueden producir hasta 200 veces más potencia que los aerogeneradores de eje vertical. Esto último ha generado un mayor interés hacia los aerogeneradores de eje horizontal, así que su uso se ha expandido a zonas con mayor potencial eólico como las zonas costeras, como se describirá a continuación.

1.3.2. Aerogeneradores fuera de la costa

La creación del departamento de *Energía Eólica y de Física Atmosférica del Risoe National Laboratory* (el centro nacional de investigación nuclear) (Riso, 2014), actualmente, más conocido por sus trabajos en energía eólica, ha investigado las bases de la interacción entre la aerodinámica y la dinámica estructural en tecnología de aerogeneradores. Además ha llevado a cabo evaluaciones de los recursos eólicos tanto dentro como fuera de la costa. Los parques fuera de la costa son parques eólicos ubicados en plataformas marítimas. Actualmente, las distancias de la costa hacia mar adentro llegan hasta 20 km y la profundidad del lecho marítimo alcanza hasta los 18 m. Las primeras propuestas de parques eólicos fuera de la costa surgieron, en los

años setenta, debido al constante incremento de la población y a la falta de extensiones de tierra (Tillessen, 2010). Años después, tras varias pruebas fuera de la costa, la primer turbina de eje horizontal que se instaló fue en 1991 en Nogersud, mar Báltico, en Suecia, con una potencia de 220 kW. En consecuencia, el primer parque marítimo se realizó en Dinamarca en 1991, como una demostración del poder del viento fuera de las costas, comenzando su producción con once turbinas de 450 kW, de la marca danesa Bonus. Le siguieron Holanda, Suecia e Inglaterra, con parques destinados para la investigación y la exploración. Más tarde se creó el primer parque marítimo comercial en Middelgrunden Copenhague, Dinamarca, en 2001, con una capacidad de 40 MW. Tan sólo tres años después, se unieron Irlanda, China, Alemania y Estados Unidos; los cuales se han propuesto programas ambiciosos de instalación con los siguientes objetivos (Miloradovic, 2014):

1. Acercar los parques a regiones altamente consumidoras.
2. Disminuir problemas de transmisión y distribución interna dentro del país.

Cabe mencionar que la tecnología utilizada en los parques fuera de la costa no dista mucho de la tecnología utilizada en tierra, ya que ésta cambia sólo en los materiales, es decir, se necesitan estructuras con mayor rigidez y con mayor tolerancia al desgaste (EWEA, 2014; Miloradovic, 2014), así como en los perfiles alares. Ejemplos de ello, se encuentran en Dinamarca, con los *Horns Rey*, en la costa oeste de Jutlandia, y Nysted, con 160 y 158 MW, respectivamente (EWEA, 2014). Suponiendo que se alcancen los 13.5 TW de electricidad al año, se podría cubrir el 40% del consumo de este país, tan solo con los parques eólicos fuera de la costa (Maegaard, 2013). Enseguida se muestra una lista de las ventajas de los aerogeneradores fuera de la costa, sobre los de dentro de la costa, que han llevado a una mayor inversión en los últimos años (Rock y Parsons, 2010).

Ventajas de aerogeneradores fuera de la costa

1. No presentan limitaciones en cuanto al uso del suelo y de impacto visual, además de uso de espacios naturales para otras aplicaciones.
2. No hay problemas de impacto sonoro (ruido), por lo que pueden girar a mayor velocidad.
En aplicaciones terrestres, la velocidad del extremo de la pala se limita a 65 m/s, mientras

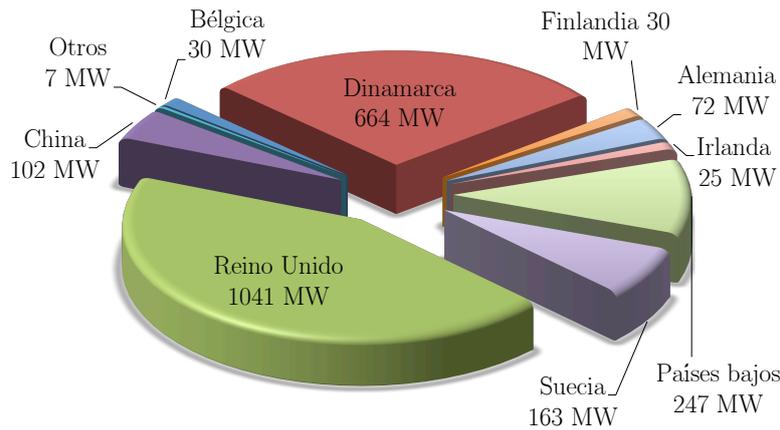


Figura 1.6. Capacidad energética global instalada de turbinas eólicas fuera de la costa (Adaptado de Taylor, 2012, pág. 349).

que en las marítimas alcanza entre 80 y 90 m/s.

3. La superficie marina está libre de obstáculos y presenta baja rugosidad superficial.
4. Debido a la menor rugosidad superficial y a la menor turbulencia, la velocidad del viento aumenta con la altura más rápidamente en comparación con la tierra, por lo que las torres de instalaciones marítimas pueden ser de menor altura que las terrestres, con la consiguiente disminución de los costos de inversión. Debido a esto, se compensa, en parte, el sobre-costo de la construcción en la plataforma marítima.
5. En general, la turbulencia del viento es mucho menor en el mar debido a la ausencia de obstáculos. De esto se derivan menores esfuerzos a la fatiga sobre el aerogenerador y un aumento de su vida útil.

Los costos de energía fuera de la costa son, en general, mucho mayores que dentro de la costa, debido principalmente a costos extra de instalación de las subestructuras y los materiales anti-corrosivos. Sin embargo, la potencia entregada es mucho mayor que dentro de la costa. Además, los resultados mostrados por *Tuno Knob* en Dinamarca, indicaron que la producción real de energía es 20-30% mayor que la estimada por modelos de predicción de velocidad del viento, más aún, la disponibilidad fue mayor en un 98% (Taylor, 2012). Esto último junto con las ventajas que las turbinas fuera de costa ofrecen, hace posible pensar en una reducción de los costos de energía a mediano y largo plazo (Willow y Valpy, 2011). En la actualidad, Europa es el líder mundial en instalación de turbinas fuera de la costa, con 1136, cerca de 2946

MW (EWEA, 2011a) y con futuras instalaciones de 140 GW (EWEA, 2011b). Tales son las ventajas de las turbinas eólicas fuera de costa, que, mundialmente la capacidad instalada es de 2,377 MW, con 54,813 MW en etapas de aprobación o construcción, y de acuerdo a la base de datos global de parques eólicos fuera de la costa *GOWFD*⁵ se tienen más de 900 parques eólicos marinos en 36 países alrededor de todo el mundo. [ver Fig. 1.6] (GOWFD, 2014). Esto lleva a pensar que la tecnología de los aerogeneradores de eje horizontal es la óptima para generar potencias mucho mayores (del orden de mega watts). Esto motiva el llevar a cabo investigación dedicada a mejorar este tipo de tecnología. Para ello, el modelado matemático es una herramienta fundamental para comprender el funcionamiento y potenciar mejoras no sólo en diseño sino además en optimización y control de los equipos y el proceso. Es por ello, que en los siguientes párrafos se detallarán brevemente los aspectos fundamentales del modelado de aerogeneradores.

1.4. Modelado matemático de aerogeneradores.

1.4.1. Teoría de Betz

Tras la realización de múltiples diseños de aerogeneradores (turbinas eólicas) con base en experimentos y en los avances en la aerodinámica, durante la primera guerra mundial se comenzaron a desarrollar teorías para describir el fenómeno de obtención de energía eléctrica a partir de turbinas eólicas. Lanchester en 1915 (van Kuik, 2007) postuló que, en general, una turbina eólica está expuesta a cuatro distintas formas de energía; la energía potencial gravitatoria, la presión termodinámica, la energía cinética y la energía térmica. Lanchester supuso que las energías gravitatoria y térmica tienen un efecto despreciable en el proceso de obtención de energía, y desde un punto de vista macroscópico⁶, el flujo de aire sobre la turbina eólica está a presión atmosférica. Además, si la presión es constante, entonces sólo se extrae energía cinética. Sin embargo, cerca de la turbina eólica la velocidad del aire es constante a medida que pasa a través del plano de la turbina eólica, esto es debido a que la turbina eólica junto con el aire son considerados como un sistema aislado, por tanto la masa de aire debe conservarse. Así mismo, el aire que pasa a través del rotor no puede reducir su velocidad, ya que

⁵por sus siglas en inglés *Global Offshore Wind Farm Database*

⁶nivel de escala de campo.

debe mantenerse al margen de la forma del aire detrás de él; así que la turbina eólica obtiene energía de la caída de presión. Cinco años después, Nikolai Zhukovsky Yegorovich y Albert Betz (1920) llegaron independientemente a las mismas observaciones; sin embargo, esta teoría se le acredita a Betz, ya que en su teoría logró proporcionar el límite máximo de eficiencia de una turbina eólica. Esta teoría se basó en representar al rotor de una turbina como un disco rotatorio; lo que llevó a no considerar las fuerzas que actúan sobre él, además de considerar las siguientes suposiciones:

1. El aire se considera un fluido newtoniano e incompresible en estado estacionario.
2. La turbina se considera como un disco rotatorio con una infinidad de álabes por lo que no existen fuerzas provocadas entre ellos y los detalles de los perfiles alares pasan a segundo término.
3. No se consideran los efectos viscosos producidos por el disco rotatorio.
4. Se considera que el cambio de presiones generado por efecto del disco corresponde a la fuerza producida sobre la superficie de éste.
5. Se impuso continuidad de velocidades alrededor del disco rotatorio.

Bajo estas suposiciones se hace uso de la ecuación de Bernoulli (Bird *y col.*, 2006), pues se considera que la turbina eólica se encuentra dentro de un túnel de viento. Con esto en mente, Betz aplica la ecuación de Bernoulli en dominios antes y después del disco rotatorio (turbina eólica ideal) (para más detalles, ver Paéz-García, 2012). A grandes rasgos, su metodología consiste en lo siguiente:

1. Aplicar la ecuación de Bernoulli en dominios antes y después del aerogenerador [ver Fig. 1.7 a)].
2. Aplicar la ecuación de Bernoulli en un dominio que incluya tanto las entradas y salidas del punto 1 como el aerogenerador [ver Fig. 1.7 b)].
3. Combinar los resultados de los dos puntos anteriores para deducir la relación entre la velocidad del viento y la velocidad de rotación de la turbina.

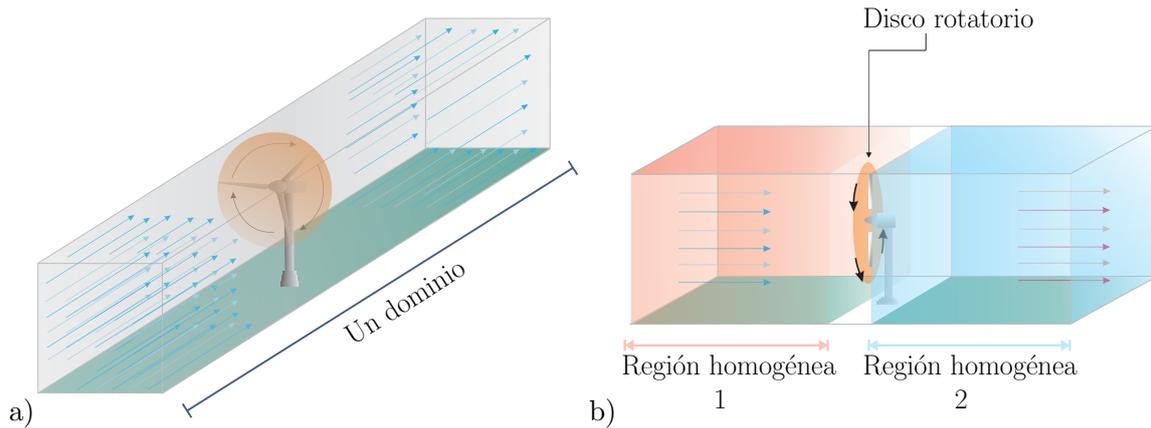


Figura 1.7. a) Representación esquemática del sistema de un dominio. b) Representación esquemática del sistema de dos dominios.

Bajo esta metodología y suposiciones, la teoría muestra que sólo el 59% de la energía que posee el viento, puede ser transformada a energía mecánica por una turbina eólica. Por otro lado, la teoría de Betz muestra que la velocidad del viento, una vez que pasó por la turbina, es $1/3$ de la velocidad de entrada (antes de pasar por el disco), y que la velocidad a la que gira el disco es la media aritmética de la velocidad de entrada y la velocidad de salida del viento. Se entiende como velocidad de entrada, a aquella cuyo valor ya no cambia con la posición; de igual forma, para la velocidad de salida del viento.

Debido a que el tratamiento matemático de esta teoría es relativamente simple, se ha utilizado para aproximar la potencia total para el diseño de parques eólicos. Sin embargo, el despreciar las características esenciales de una turbina eólica provoca que los diseños de los parques eólicos puedan llegar a sobre-dimensionarse (lo cual va de la mano con lograr satisfacer la suposición número 3), provocando pérdidas económicas.

Es por ello, que como corrección a la teoría de Betz, se han desarrollado otras teorías como el método de momento del elemento de pala (*BEM*)⁷ (Glauert, 1935; Kulunk, 2011) cuya base es considerar la geometría de las palas y las fuerzas que actúan sobre ellas, basándose en la *Teoría del elemento de pala* y la *Teoría de cantidad de movimiento*. Al combinar estas dos teorías, se generan una serie de ecuaciones acopladas que se resuelven iterativamente.

La teoría del elemento de pala es un proceso matemático diseñado originalmente por William Froude, David W. Taylor y Stefan Drzewiecki (Leishman, 2006; Hansen, 2008) para determinar las fuerzas que actúan sobre las hélices de un avión. Debido a la implementación de esta teoría,

⁷ por sus siglas en inglés *Blade Element Momentum Method*

el BEM consiste en fraccionar una hélice en varias partes pequeñas, y se considera que cada parte es igual a la otra, por lo tanto sólo se estudian las fuerzas en una porción. Estas fuerzas se integran a lo largo de toda la pala y en una vuelta del rotor, con el fin de obtener las fuerzas y momentos producidos por el conjunto de la hélice o el rotor. Así que esta teoría se basa en las siguientes suposiciones (Kulunk, 2011):

1. No se consideran las interacciones entre los diferentes elementos de pala.
2. Las fuerzas sobre los elementos de pala son determinadas por coeficientes de sustentación y resistencia.
3. No considera el efecto estela reversible.
4. Considera al sistema como bidimensional

Además, para resolver el BEM, se necesita de una serie de ecuaciones que se resuelven iterativamente, para ello se necesita partir de ciertas características del aerogenerador (Ingram, 2011), como:

1. El diámetro del rotor.
2. Número de palas.
3. Relación de velocidades.
4. Selección de un perfil alar.
5. Escoger los coeficientes de arrastre y sustentación, teniendo en cuenta que la pala cambia de perfil a lo largo de toda su envergadura.

Tomando en cuenta lo anterior, la solución no carecerá de sentido. Sin embargo, el proceso iterativo puede ser tedioso y requerir de un conocimiento especializado (Glauert, 1935; Ingram, 2011). Más aún, los primeros tres puntos mencionados arriba, deben tomarse de tablas que han sido elaboradas mediante métodos heurísticos. Por ello, que se ha recurrido a la elaboración de programas de cálculo que optimicen el tiempo y esfuerzo para llegar a la solución. Además del BEM se han propuesto otras teorías que requieren de herramientas computacionales más

sofisticadas, como *la teoría del medio continuo generalizado* (Cosserat, 1909) las cuales no se incluyen en esta revisión pues no están relacionadas con los desarrollos de este trabajo.

Por otro lado, en la práctica es necesario contar con predicciones macroscópicas más precisas que las aportadas por los modelos clásicos. Por ello, y debido a los avances computacionales, se ha recurrido a simulaciones numéricas directas *DNS*⁸ de las ecuaciones de cantidad de movimiento de un fluido a través de un aerogenerador. Sin embargo, en la práctica no toda la información obtenida a partir de este método es útil. Más aún, los tiempos computacionales suelen ser elevados, lo cual provoca que no se puedan estudiar los parques eólicos en su totalidad. Por tal motivo, los parques eólicos se suelen sobre-dimensionar reflejándose en pérdidas de potencia de entre 10 y 20 % (Barthelmie *y col.*, 2009; Churchfield *y col.*, 2012).

Motivados por lo anterior, en este trabajo se desarrolla un modelo macroscópico que capture la información esencial del transporte de cantidad de movimiento en la escala microscópica. Para cumplir con este objetivo, se utiliza el método del promedio volumétrico, con el cual se calculan las características esenciales del transporte en la micro-escala mediante coeficientes de medio efectivo. En particular, este trabajo se centra en el estudio de un solo aerogenerador de alta potencia (alrededor de 3000 kW). En la siguiente sección se abordará el método del promedio volumétrico, y particularmente, se hablará sobre modelado de un sólo dominio *ODA*⁹.

1.5. Promedio volumétrico

Para el desarrollo de un modelo macroscópico o también llamado modelo promedio, que permita considerar las características esenciales de la estructura de una turbina eólica, será necesario recurrir a un enfoque teórico, conocido como *suavizado espacial*. Existen diversas metodologías que engloban el suavizado espacial, como el método de homogenización (de la Cruz y Spanos, 1983) y el promedio volumétrico (Whitaker, 1999), en particular, en este trabajo se abordará el método del promedio volumétrico. Este método se usa para deducir ecuaciones que son válidas en la macro-escala¹⁰ a partir de ecuaciones puntuales válidas en la micro-escala. En este contexto, se entiende como microescala, la escala en donde comienza a ser válida la hipótesis del continuo. Esto sugiere que el promedio volumétrico, necesariamente, debe ser usado

⁸por sus siglas en inglés *Direct Numerical Simulation*

⁹por sus siglas en inglés *One Domain Approach*

¹⁰a la escala de campo.

en sistemas jerárquicos. En otras palabras, el transporte de una cierta propiedad en un nivel de escala inferior afecta el transporte de esa misma propiedad en los siguientes niveles de escala superiores. Dichos niveles de escala se asocian, generalmente, a longitudes que se caracterizan mediante los cambios en las propiedades¹¹ a lo largo del sistema. De esta forma, la esencia del método radica en un proceso de suavizado espacial que se aplica a ecuaciones puntuales para generar un nuevo continuo. Lo dicho anteriormente muestra que el método puede ser aplicado no sólo a medios porosos sino a sistemas que manifiesten una naturaleza jerárquica.

Matemáticamente, el suavizado espacial consiste en aplicar un operador de promediado en el espacio a cualquier función continua por tramos ψ .

$$\langle \psi \rangle_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi|_{\mathbf{r}} dV \quad (1.1)$$

Dicha expresión, estrictamente representa la sumatoria de una función ψ válida en la fase donde se aplicarán las ecuaciones de movimiento (arbitrariamente nombrada como β), dividida por una muestra representativa del sistema V , que contiene tanto fluido (fase- β) como sólido (fase- σ)

$$V = V_\beta + V_\sigma \quad (1.2)$$

Además, \mathbf{r} es un vector de posición que ubica cualquier punto de la fase β dentro de la muestra representativa; y \mathbf{x} es el vector de posición que localiza el centroide, el cual puede hallarse en la fase β o en la fase σ . Para medios porosos, se ha demostrado que la elección de la muestra representativa, denominada *volumen promediante* o *región de promediado*, debe satisfacer la siguiente restricción de escala:

$$\ell_\beta \ll r_0 \ll L \quad (1.3)$$

en donde r_0 representa la longitud característica de la región de promediado, la cual tiene que ser mucho menor a la longitud que caracteriza al sistema en la macroescala L , y mucho mayor a la longitud que caracteriza al sistema en la microescala ℓ_β (ver Fig. 1.8). No obstante, no hay que dejar de lado que las longitudes que se expresan arriba, son una representación espacial de los cambios de las propiedades como la velocidad o la presión a lo largo de un sistema. Con esto

¹¹Cabe mencionar, que cualquier propiedad no es la misma a diferentes escalas de un sistema puesto que la propiedad es una función distinta del espacio.

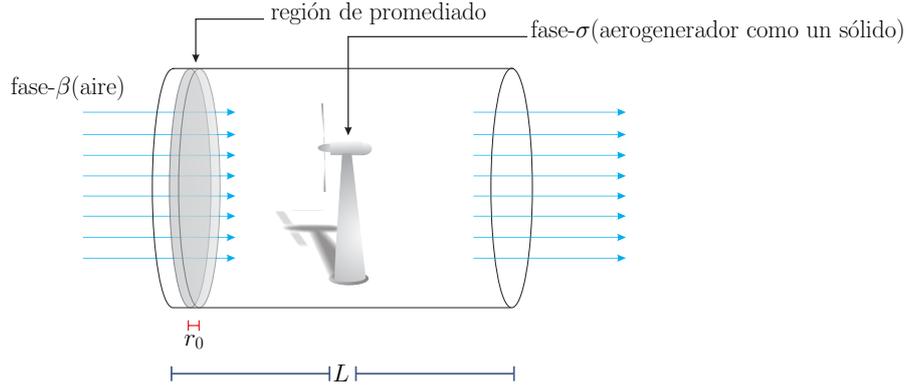


Figura 1.8. Representación esquemática de túnel de viento y un aerogenerador.

en mente, la restricción de escala (1.3) puede tener sólo un orden de magnitud de diferencia entre las longitudes, es decir:

$$\ell_\beta < r_0 < L \quad (1.4)$$

Además, dentro del método del promedio volumétrico, se hace uso de otras herramientas matemáticas como el *teorema general del transporte* (Whitaker, 1968a), y el *teorema del promediado espacial* (Slattery, 1967). Dichas herramientas permiten construir la forma del modelo macroscópico (también llamado modelo de medio efectivo). Así mismo, se necesita la intervención de condiciones de frontera interfaciales. Esto último influencia la forma del modelo de medio efectivo en dos niveles:

1. Como el camino para simplificar el modelo de medio efectivo.
2. Como fuentes en la generación del *problema de cerradura*.

En este sentido, el problema de cerradura es tan importante como el modelo de medio efectivo, ya que por él se hallan los coeficientes que estarán involucrados dentro del problema. El problema de cerradura se genera, en principio, por la siguiente expresión:

$$\psi|_{\mathbf{r}} = \langle \psi \rangle^\beta|_{\mathbf{r}} + \tilde{\psi}|_{\mathbf{r}} \quad (1.5)$$

donde $\tilde{\psi}$ son las desviaciones generadas entre la función puntual y la promedio; en otras palabras, muestra qué tanta información se pierde al promediar. Es por ello, que inherentemente, se incluyen las desviaciones de la función dentro del modelo macroscópico, identificadas como *filtros*. Ya que las desviaciones muestran qué tan lejos está la función promedio de la puntual,

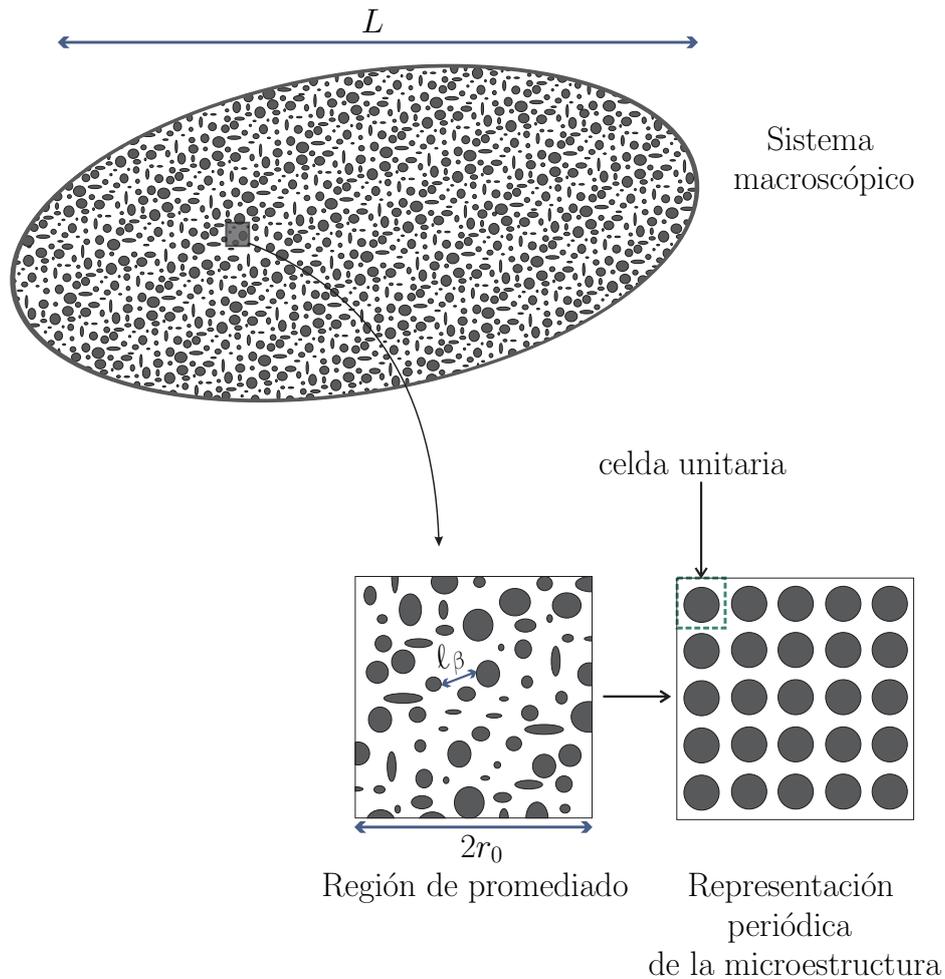


Figura 1.9. Esquema de un sistema macroscópico con su correspondiente dominio de promediado, así como una representación periódica de la microestructura de un medio poroso, incluyendo longitudes de escala características.

es necesario identificar las fuentes que hacen que el problema de las desviaciones no sea cero. Una vez identificadas las fuentes, se resuelve el problema de las desviaciones mediante el *método de superposición*, de tal manera que la solución queda en términos de *variables de cerradura*. Al final, estas variables se sustituyen en la ecuación macroscópica (ecuación promedio) para generar los coeficientes de medio efectivo y así *cerrar* el problema. Cabe mencionar que él/los problemas de cerradura no se resuelven en todo el dominio del sistema L , sino en *celdas representativas* y periódicas del sistema. Por ejemplo, en el seno¹² de un medio poroso, las celdas representativas de un sistema se modelan como se muestra en la Fig. 1.9. Sin embargo, para ciertos problemas, como el transporte de un fluido en una tubería (Wood, 2009), las celdas se convierten en la región de promediado como se muestra en la Fig. 1.8.

¹²En este contexto, seno se refiere a la región homogénea lejos de las fronteras de un medio poroso.

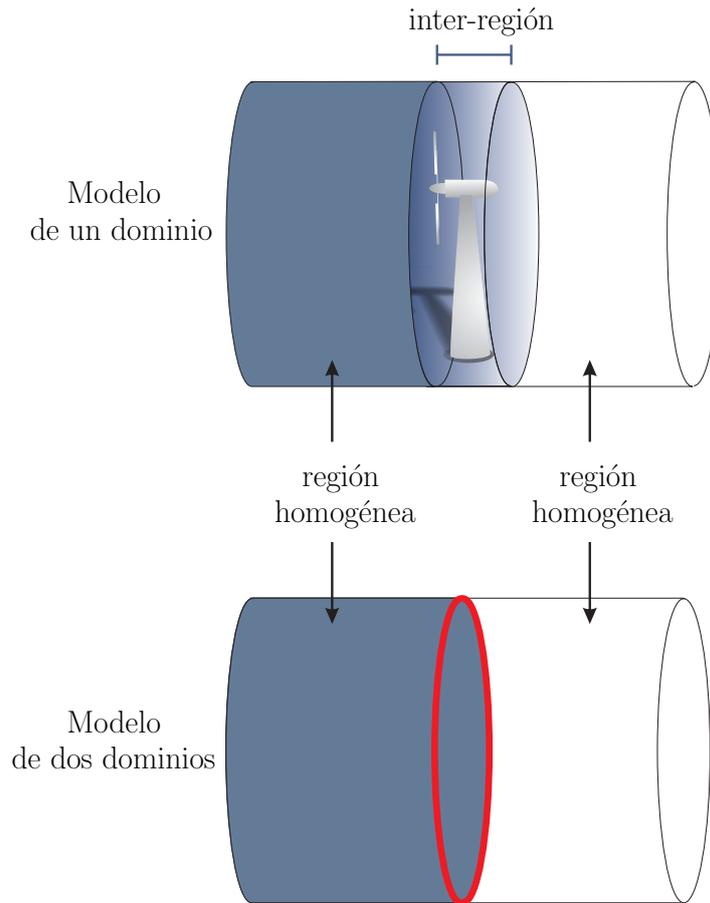


Figura 1.10. Representación de los modelos de uno y dos dominios para un sistema con un aerogenerador.

No obstante, con los avances computacionales, hoy en día es posible prescindir de resolver el problema de cerradura en una celda representativa y resolverlo en el dominio completo del sistema de longitud L , mediante simulaciones numéricas directas (DNS). La elección de ambas alternativas radica en la complejidad de los problemas y de la información que se quiera obtener. Específicamente, en este trabajo se hará uso de DNS.

1.5.1. Modelo de un dominio (ODA) y de dos dominios (TDA)

En el contexto del promedio volumétrico, existen dos alternativas de modelado al estudiar el transporte entre regiones homogéneas, una de ellas se conoce como modelo de un dominio (*ODA*) y la otra, como modelo de dos dominios (*TDA*)¹³. Cada tipo de modelado sugiere un tratamiento distinto al momento de aplicar la metodología del promedio volumétrico. Por ejemplo, el modelo de un solo dominio consiste en una ecuación cuya validez es en todo el sistema de estudio, ya

¹³ por sus siglas en inglés *Two Domain Approach*

que sus coeficientes involucrados son funciones de la posición dentro del sistema. Esto último permite que el modelo resultante no esté sujeto a restricciones de escala. Por otro lado, el modelo de dos dominios involucra dos ecuaciones cuyos coeficientes no son variables con la posición. Esto se debe a que cada ecuación describe los dominios homogéneos ¹⁴ del sistema [ver Fig. 1.10]. Las ecuaciones resultantes de cada dominio, se acoplan entre sí mediante condiciones de frontera que compactan la información en la zona de cambios entre los dominios homogéneos. Cabe mencionar que la deducción de condiciones de frontera requiere de la información de los cambios espaciales de los coeficientes del modelo de un dominio.

Como una primera opción de modelado, en este trabajo se utiliza el modelo de un sólo dominio para el estudio de los coeficientes de medio efectivo en un sólo aerogenerador y cómo cambian éstos con la posición. Con la información de este tipo de modelado, en posteriores trabajos se hará uso del modelo de dos dominios que permita el estudio de más de un aerogenerador. Por otro lado, los números de Reynolds que se manejan para este tipo de flujos en aerogeneradores, se encuentran dentro de un rango de 10^4 a 10^8 , lo que se considera como un flujo turbulento. Por tal motivo, para el cálculo de los coeficientes de medio efectivo, se necesitan resolver problemas bajo condiciones turbulentas. Por ello, para cerrar este capítulo, en la siguiente sección se presentan algunas generalidades sobre éste concepto y se especifica el modelo de turbulencia que se usará para llevar a cabo los cálculos.

1.6. Generalidades de la turbulencia

El concepto de turbulencia usualmente se asocia a un flujo caracterizado por tener mayor convección de cantidad de movimiento respecto a su difusión de momento. En otras palabras, en un flujo turbulento, los esfuerzos inerciales son mucho que los esfuerzos viscosos. Dicha relación se encuentra expresada mediante el número de Reynolds, el cual indica flujos turbulentos cuando su orden de magnitud es mayor a 10^4 (Reynolds, 1883).

Por otro lado, es bien sabido, que las ecuaciones que describen el transporte de cantidad de movimiento de un fluido, son las ecuaciones de Navier-Stokes, que a su vez son no lineales. Esto último supone resolver las ecuaciones de forma numérica; sin embargo, cuando un flujo se encuentra con una perturbación se generan remolinos, cuyo tamaño varía en función de la

¹⁴En este contexto, se entiende como homogéneo a aquella zona en donde las mediciones de las propiedades del medio no presentan cambios con la posición (Quintard y Whitaker, 1987)

perturbación. Cuando la perturbación ya no existe, los remolinos desaparecen y se disipan como calor (Hinze, 1975); esto último provoca inestabilidades al momento de resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes. Es así que las ecuaciones de Navier-Stokes no pueden ser resueltas numéricamente para altos números de Reynolds (del orden de 10^4 o más). Por esta razón, los modelos de turbulencia se suelen asociar con la energía cinética y la disipación de ésta.

De acuerdo a lo anterior, un flujo turbulento es aquel flujo predominantemente inercial cuyo comportamiento es desordenado tanto en el espacio como en el tiempo. Para abordar un problema de turbulencia se suavizan en el tiempo las inestabilidades de las ecuaciones de Navier Stokes, lo cual se consigue al promediar en el tiempo dichas ecuaciones. El resultado es el siguiente (ver detalles en Whitaker (1968b)):

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right] = -\nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot (-\rho \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}') \quad (1.6)$$

en donde $\bar{\mathbf{v}}$ representa el promedio temporal de la velocidad y se define mediante el siguiente operador:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{v} dt \quad (1.7)$$

Se observa que la Ec. (1.6) mantiene una estructura semejante a la ecuación de Navier-Stokes, no obstante, la diferencia entre ambas ecuaciones es el último término de la Ec. (1.6). Dicho término se conoce como el *transporte de esfuerzos turbulentos* y ha generado una amplia línea de investigación, pues hasta el momento, ese término es la razón por la cual no puede cerrarse la Ec. (1.6). En general, los estudios se han centrado en hallar directamente la velocidad promedio en el tiempo. Una de las alternativas sugiere realizar aproximaciones a dicho término, específicamente a $-\rho \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}'$, conocido como el *tensor de esfuerzos de Reynolds*. Para ello, Boussinesq (1877) propuso que dicho tensor se relacione con la velocidad de deformación de los remolinos y su energía cinética:

$$-\rho \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' = \mu_t [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \quad (1.8)$$

De esta manera, la viscosidad turbulenta, μ_t , que produce la deformación de los remolinos se convierte en una interrogante más junto con la energía cinética, k . Como primera aproximación, Prandtl (1925) desarrolló una expresión para calcular la viscosidad turbulenta, dejando de lado

la energía cinética, mediante la *longitud de mezclado*. En ella, se hace uso de la teoría de la cinética de gases para relacionar la deformación de los remolinos con la distancia característica de recorrido del remolino y su velocidad. Sin embargo, esta aproximación fue útil sólo para ciertos problemas como el transporte de un fluido en una tubería (ver, por ejemplo, Whitaker, 1968b). Para atender a esto se comenzaron a realizar aproximaciones cada vez más sofisticadas no sólo para la viscosidad turbulenta sino para el cálculo de la energía cinética. De tal forma que, se desarrollaron los modelos que actualmente se conocen como *modelos turbulentos de una ecuación* (Spalart y Allmaras, 1992) y *modelos turbulentos de dos ecuaciones* (Menter, 1994). Los modelos turbulentos de una ecuación, son aquellos que usan la Ec. (1.6) más una ecuación para la energía cinética (para más detalles, ver de Lemos, 2006). Por otro lado, los modelos turbulentos de dos ecuaciones usan una ecuación extra que tiene que ver con la energía disipativa, ya que los remolinos van perdiendo su energía al dejar de estar en contacto con la perturbación. De esta manera, los modelos turbulentos de dos ecuaciones son los que se acercan más a la realidad y por tal motivo son los más usados.

Dentro de los modelos de dos ecuaciones, existen diferentes propuestas, como son el modelo Spalart y Allmaras (1992), k-epsilon (Shih *y col.*, 1994), k-omega (Menter, 1994), SST (Menter *y col.*, 2003), etc. Todos ellos mantienen el mismo número de ecuaciones a resolver, pero varían en el número de variables adicionales que resuelven, el significado de cada una de ellas y, por supuesto, de la complejidad de los problemas (para más detalles, ver Arbaláez y Lopez, 2011). En este trabajo, específicamente se ha usado el modelo SST, que, a diferencia de los demás, conjunta las ventajas de cada tipo de modelo. Es decir, hace uso del modelo k-epsilon para resolver las ecuaciones en una corriente de fluido libre y usa el modelo k-omega para resolver las ecuaciones cerca de las paredes de un obstáculo. De tal forma que, el modelo SST resuelve las ecuaciones desde la capa límite de un obstáculo, comprendiendo tanto la región laminar como la región completamente turbulenta (Menter *y col.*, 2003). De esta manera, en este trabajo, se usará el modelo SST incluido en el software Comsol Multiphysics para resolver los problemas de cerradura asociados al ODA.

1.7. Resumen

En este capítulo se abordaron brevemente los antecedentes de la energía eólica, dentro de los cuales se trataron temas como el desarrollo tecnológico, los distintos tipos de aerogeneradores y las teorías matemáticas que se usaron para ello. Además, para propósitos de este trabajo, se explicó el método del promedio volumétrico así como los modelos de uno y dos dominios. Así mismo, se añadió una sección sobre las generalidades de la turbulencia.

Capítulo 2

Pregunta de investigación y objetivos

¿El modelo de un sólo dominio capturará las características esenciales del transporte de cantidad de movimiento alrededor de un aerogenerador a escala macroscópica?

2.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo matemático macroscópico para predecir el perfil de velocidades en aerogeneradores.

2.2. Objetivos particulares

1. Desarrollar el modelo de un sólo dominio a partir del promediado de las ecuaciones que gobiernan el transporte en la microescala.
2. Plantear el problema de cerradura asociado e identificar los coeficientes de medio efectivo.
3. Determinar las dimensiones de la región de promediado en un sistema bi-dimensional
4. Calcular los coeficientes asociados de medio efectivo en regiones representativas del sistema en dos y tres dimensiones.
5. Validar el modelo macroscópico mediante su comparación con simulaciones numéricas directas.

Capítulo 3

Metodología

Con base en los objetivos planteados, se describe la metodología, la cual se divide en tres principales secciones. En la primer sección, se desarrolla el modelo macroscópico de un dominio e identifican los coeficientes de medio efectivo. En la segunda sección, se calculan los coeficientes de medio efectivo en sistemas de dos y tres dimensiones. Mientras que en la tercer sección, se resuelve el modelo macroscópico desarrollado en la primer sección. En este último paso, se hace además la validación del modelo con simulaciones numéricas directas.

3.1. Definición del sistema

En primer lugar, se define el sistema en donde será válido el modelo de un dominio. Dicho sistema contiene las dimensiones que corresponden a un aerogenerador con potencia de alrededor de 3 MW, el cual cuenta con una altura de 100 m y un diámetro de rotor de 80 m. La elección de las dimensiones del aerogenerador se encuentran dentro del rango de aplicación de aerogeneradores de alta potencia (Gash y Twele, 2012).

Como se mencionó en la Sección 1.5, para aplicar el método del promedio volumétrico, el sistema debe ser jerárquico. Por tal motivo, las dimensiones del sistema deben cumplir con la siguiente restricción de escala:

$$\ell_\beta \ll r_0 \ll L \quad (3.1)$$

en donde ℓ_β es la longitud característica de la escala microscópica, y se asocia a la longitud de

un corte transversal de una pala de aerogenerador. Por otro lado, L , es la longitud de la escala macroscópica y se asocia a la longitud del sistema. Así mismo, la región de promediado r_0 se asocia al radio de giro del aerogenerador que debe ser mucho menor a L . Una explicación más detallada del sistema y sus dimensiones puede encontrarse en el Capítulo 5.

3.2. Desarrollo del modelo matemático para predecir el perfil de velocidades en aerogeneradores

El desarrollo del modelo de un dominio parte de las ecuaciones que gobiernan el transporte de cantidad de movimiento en la escala microscópica, es decir, de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes. De acuerdo con lo mencionado en la Sección 1.5, el proceso de promediado consiste en diferentes pasos de los cuales los principales se listan enseguida:

- 1 Se elige un operador de promediado que se aplica a las ecuaciones de conservación de masa y transporte de cantidad de movimiento. En este paso se suele usar el teorema general del transporte y el teorema del promediado espacial.
- 2 Posteriormente, se lleva a cabo la descomposición espacial para las funciones puntuales de la ecuación resultante del paso 1. El resultado de este paso es una ecuación en función de las desviaciones de la velocidad y presión. Esta ecuación se conoce como *ecuación promedio no cerrada*.
- 3 Para cerrar dicha ecuación, se plantea y resuelve formalmente el problema de valor a la frontera de las desviaciones de la velocidad y presión (problema de cerradura). Dicha solución relaciona a estos campos con sus contrapartes promediadas.
- 4 Se sustituye la solución del problema de cerradura en la ecuación del paso 2. A esta ecuación se le conoce como ecuación macroscópica cerrada e involucra coeficientes de medio efectivo dependientes de la posición.

La aplicación de estos pasos puede consultarse en el Capítulo 4.

3.3. Plantear el problema de cerradura asociado y calcular los coeficientes asociados de medio efectivo en regiones representativas del sistema en dos y tres dimensiones

El objetivo de los problemas de cerradura es calcular los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo involucrados en el modelo macroscópico. En general estos problemas se resuelven en celdas unitarias periódicas para medios homogéneos lejos de las fronteras [ver por ejemplo: Lasseux *y col.* (2011)], que en este caso son análogas a la región de promediado. Por otro lado, cerca de la frontera entre una región y otra (inter-región), se utiliza la metodología propuesta por Valdés-Parada *y col.* (2009), en la que se presentan diferentes tipos de celdas unitarias que capturen los cambios espaciales en la inter-región (en este caso, la región comprendida por el aerogenerador). No obstante, la naturaleza de este trabajo no permite el uso de una celda periódica ni de la metodología anterior, por las siguientes razones:

- El sistema no es periódico en todas las direcciones.
- No se conocen todas las condiciones de frontera en una celda unitaria para poder aplicar la metodología antes citada.
- Más aún, la fuente involucrada en la ecuación diferencial de los problemas de cerradura es función de la posición, lo cual complica la solución por los métodos arriba mencionados.

Para atender a esto, el cálculo de los coeficientes de medio efectivo se lleva a cabo al resolver el problema puntual de cantidad de movimiento, tomando como referencia las definiciones de la solución formal. La consecuencia inmediata de esto, es que el modelo de un dominio ya no está sujeto a las suposiciones de los problemas de cerradura, como se había hecho en trabajos previos (Valdés-Parada *y col.*, 2009). Los detalles del cálculo de los coeficientes de medio efectivo en 2D y 3D se describen en el Capítulo 5.

3.3.1. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en 2D.

Una de las apremiantes para el cálculo de los coeficientes de medio efectivo, es la elección del tamaño del sistema. Es por ello que, como primera aproximación, se propone realizar un análisis paramétrico en un sistema en dos dimensiones esbozado a partir de un sistema en tres

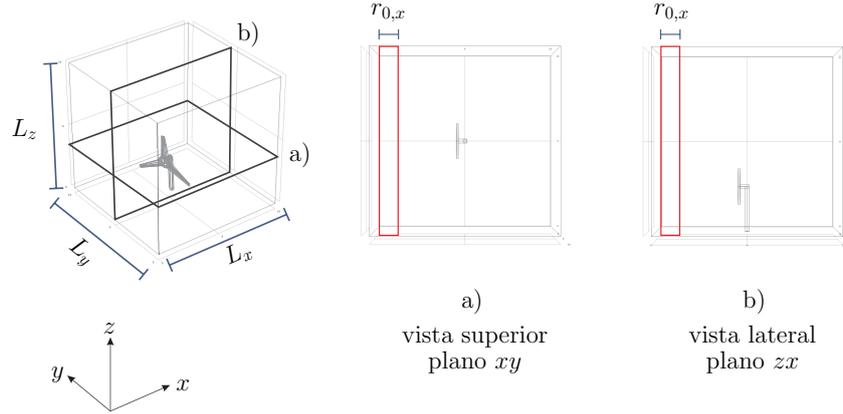


Figura 3.1. Esquema de cortes en los planos xy , zx de un sistema en 3D.

dimensiones [ver Fig. 3.1]. Lo que da lugar a una vista superior (plano xy) y una vista lateral (plano zx). Los detalles del análisis del sistema se muestran en el Capítulo 5.

3.3.2. Cálculo de coeficientes de medio efectivo en 3D.

Una vez obtenidas las dimensiones del sistema mediante el análisis en 2D, se procede a esbozar el sistema en tres dimensiones. No obstante, para verificar si las dimensiones del sistemas son adecuadas, se evalúan las longitudes L_x y L_y alrededor de las longitudes obtenidas en dos dimensiones y se calculan los porcentajes de error relativos. Además, como primera aproximación, en este trabajo se modela la geometría de los álabes del aerogenerador como un disco rotatorio.

En el caso particular de 3D, las dimensiones de la sección transversal de la región de promediado no necesariamente tienen que ser del mismo tamaño que las dimensiones del sistema. De hecho, si este fuera el caso, se tendría el tamaño máximo de la región de promediado y se puede correr el riesgo de perder información valiosa del aerogenerador. Por ello, se llevará a cabo un análisis para determinar el tamaño mínimo de la región de promediado que cumpla con el objetivo de calcular la información esencial del aerogenerador. Bajo esta idea, la región de promediado se propone que no sea más grande que la propia capa límite en las tres direcciones [ver Fig. 3.2]. Una vez definidas las dimensiones de la región de promediado, se proporcionarán las funciones que ajusten los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo involucrados en el modelo macroscópico.

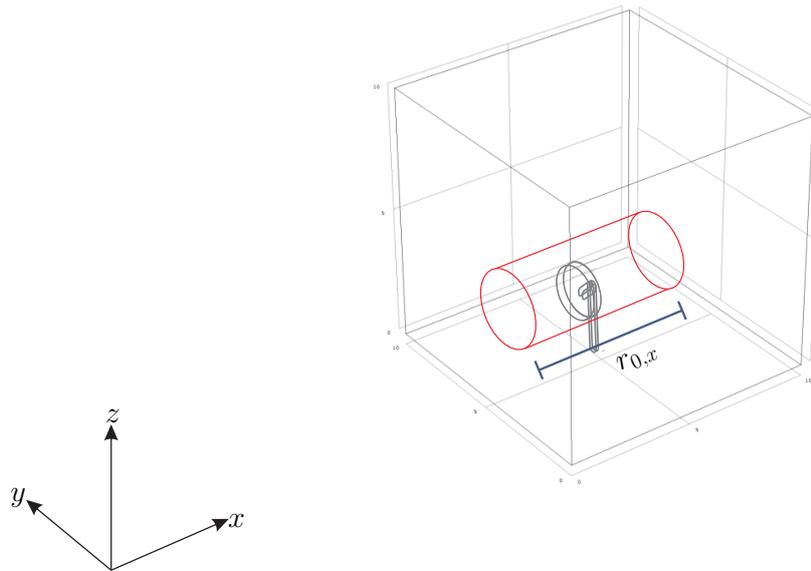


Figura 3.2. Representación de los cambios de la región de promediado a lo largo de la dirección x para un sistema en 3D.

3.4. Validación del modelo macroscópico mediante simulaciones numéricas directas

Una vez definido el tamaño de la región de promediado y definidas las funciones de los coeficientes de medio efectivo, es pertinente probar la validez del modelo macroscópico. La primera prueba que debe superar la propuesta es que reproduzca satisfactoriamente los perfiles de velocidad promedio resultantes de llevar a cabo simulaciones numéricas directas. La ventaja que tiene este tipo de análisis es que se cuenta *a priori* con dicha información, pues se usó para determinar los valores de los coeficientes de medio efectivo, como se explicó anteriormente. Más aún, la comparación con simulaciones numéricas directas permitirá verificar si la elección de las dimensiones de la región de promediado es pertinente. Para ello, se plantea comparar los perfiles de la velocidad macroscópica resultantes de utilizar otras formas y dimensiones de la región de promediado. Cabe agregar que en este trabajo se considera como aceptable una comparación que involucre porcentajes de error relativo inferiores al 10%. Los resultados de este análisis pueden consultarse en el Capítulo 7.

Capítulo 4

Deducción del modelo macroscópico

4.1. Modelo microscópico

De acuerdo con lo mencionado en la Sección 1.5, para generar el modelo macroscópico deseado, se parte de las ecuaciones que gobiernan el transporte de masa y de cantidad de movimiento en la micro-escala. Es decir, se parte de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (4.1a)$$

$$\underbrace{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta}_{\text{esfuerzos inerciales}} = \underbrace{-\nabla p_\beta}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta}_{\text{esfuerzos viscosos}} \quad (4.1b)$$

Las cuales están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\mathbf{v}_\beta = v_{\beta, in} \mathbf{n}_e \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta e} \quad (4.2a)$$

$$p_\beta \mathbf{n}_s = p_{atm} \mathbf{n}_s \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta s} \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{n}_{AL} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta AL} \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (4.2d)$$

$$\mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta p} \quad (4.2e)$$

$$\zeta_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta = v_\omega \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (4.2f)$$

Como se muestra en la Fig. 4.1, las ecuaciones (4.2a), (4.2b), (4.2c), representan las condiciones de frontera de entrada, salida y superficies laterales, respectivamente; en donde $v_{\beta, in}$ indica la velocidad no perturbada a la entrada del sistema. Como primera aproximación, no se

considerarán direcciones de entrada de viento diferentes a la dirección x , por lo que $v_{\beta,in}$ se considera una constante. Las ecuaciones (4.2d) y (4.2f) representan las componentes de la velocidad en la superficie del aerogenerador en donde la componente normal del vector velocidad es cero (Ec. 4.2d), mientras que la componente tangencial ($\varsigma_{\beta\sigma}$) se aproxima como la velocidad de giro del aerogenerador, v_ω (Ec. 4.2f). Dado que no se consideran pérdidas exógenas al sistema, se puede considerar que el aerogenerador extrae la máxima potencia del viento. De tal manera, que la velocidad de giro de éste, es 2/3 la velocidad de entrada de acuerdo con la teoría de (Betz, 1920).

Además, en las superficies del piso y el poste se impone la condición de no deslizamiento (Ec. 4.2e). En este trabajo, se ha nombrado como fase β al aire y como fase σ al aerogenerador. De esta forma, se define a la densidad y viscosidad del aire como ρ_β y μ_β . Por último, se ha hecho la suposición de flujo en estado estacionario, Newtoniano e incompresible.

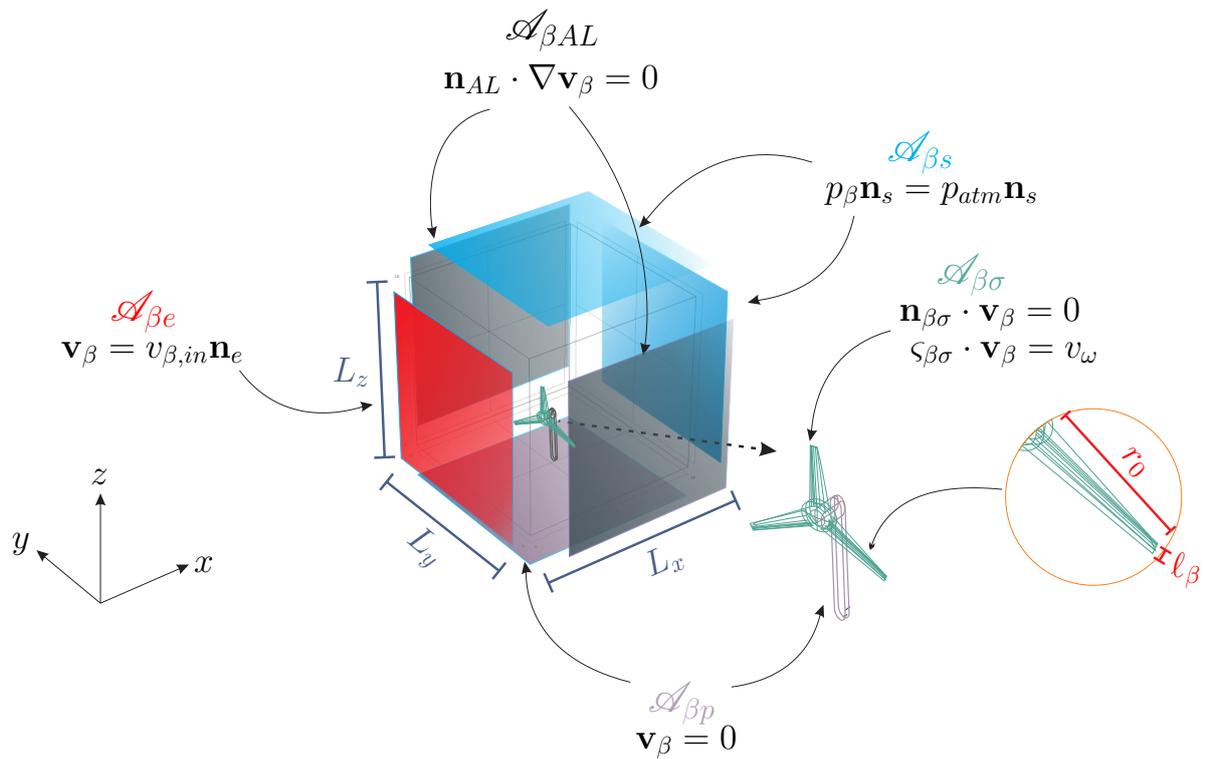


Figura 4.1. Representación de las condiciones de frontera en un sistema en 3D. y sus longitudes características.

Para comenzar el proceso de promediado, se define un operador de promediado superficial (Whitaker, 1999) tanto para la velocidad como la presión

$$\langle \psi \rangle|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi|_{\mathbf{r}} dV; \quad \psi = p_\beta, v_\beta \quad (4.3)$$

en donde la función promediada estará evaluada en el centro de la muestra, el cual se localiza mediante el vector \mathbf{x} ; mientras que el vector \mathbf{r} localiza puntos del sistema ocupados por el aire. Además, V es el volumen de la muestra y \mathcal{V}_β es la región de integración ocupada por el aire.

4.2. Ecuación de continuidad

Aplicando el operador de promediado a la ecuación de continuidad (Ec. 4.1a) resulta la siguiente expresión:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (4.4)$$

Para intercambiar diferenciación por integración, se utiliza el teorema del promediado espacial (Howes y Whitaker, 1985)

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \psi dA \quad (4.5)$$

y se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = -\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

en donde se ha usado la relación entre el promedio superficial y el promedio intrínseco $\langle \psi \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta \langle \psi \rangle^\beta|_{\mathbf{x}}$; ε_β indica la fracción volumétrica de la fase β contenida en el volumen de muestra, es decir:

$$\varepsilon_\beta = \frac{V_\beta}{V} \quad (4.7)$$

La Ec.(4.6) es la forma buscada de la ecuación de continuidad promedio. Enseguida se dirige la atención a la ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

4.3. Ecuación de Navier-Stokes

Aplicando el operador de promediado a la ecuación de Navier-Stokes (4.1b), y suponiendo constantes los cambios de la densidad ρ_β y la viscosidad μ_β dentro de la región de promediado, resulta la siguiente expresión

$$\rho_\beta \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = -\langle \nabla p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} \varepsilon_\beta + \mu_\beta \langle \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

donde se ha usado la ecuación de continuidad en el término inercial. Aplicando el teorema del promediado espacial al término inercial y usando la condición de frontera (4.2d), resulta:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) \quad (4.9)$$

Mientras que el resultado de aplicar el teorema del promediado espacial al término de esfuerzos superficiales, es:

$$\langle \nabla p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \langle p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA \quad (4.10)$$

O bien, en términos del promedio intrínseco de la presión:

$$\langle \nabla p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} - p_\beta \right) dA \quad (4.11)$$

Para llegar a este resultado, se utilizó la siguiente identidad

$$\nabla \varepsilon_\beta = -\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \quad (4.12)$$

que resulta de aplicar el teorema del promediado espacial para $\psi = 1$.

Análogo al término del esfuerzo superficial, el término del esfuerzo viscoso queda de la siguiente forma:

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \left[\nabla \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\beta dA}_a \right] + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA}_b \quad (4.13)$$

Con el fin de simplificar el resultado anterior, es conveniente estimar los órdenes de magnitud de los términos “a” y “b”:

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_{\beta} dA \right] = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_{\beta} \rangle^{\beta}}{L \ell_{\beta}} \right) \quad (4.14a)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\beta} dA = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_{\beta} \rangle^{\beta}}{\ell_{\beta}^2} \right) \quad (4.14b)$$

Note que en estos estimados, se supuso que el orden de magnitud de la velocidad es el mismo que el de la velocidad promedio, lo cual es razonable con base en las condiciones de frontera del problema puntual. De esta forma, se puede despreciar la primera integral respecto a la segunda con base en la siguiente restricción de escala

$$\ell_{\beta} \ll L \quad (4.15)$$

Desarrollando la derivada del primer término de la Ec. (4.13), da lugar a la siguiente expresión:

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_{\beta} \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_{\beta} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot \left[(\nabla \varepsilon_{\beta}) \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\nabla \mathbf{v}_{\beta} - \nabla \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} \right) dA \quad (4.16)$$

donde se tomó en cuenta la identidad dada en la Ec. (4.12).

Sustituyendo las expresiones (4.9), (4.11) y (4.16) en la Ec. (4.8), resulta:

$$\begin{aligned} \rho_{\beta} \nabla \cdot \left(\varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} \right) &= -\varepsilon_{\beta} \nabla \langle p_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} + \rho_{\beta} \mathbf{g} \varepsilon_{\beta} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(\langle p_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} - p_{\beta} \right) dA \\ &+ \mu_{\beta} \varepsilon_{\beta} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} + \mu_{\beta} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} \right) \\ &+ \frac{\mu_{\beta}}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(-\nabla \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} + \nabla \mathbf{v}_{\beta} \right) dA \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sin embargo, en esta ecuación aún se muestran cantidades puntuales. Para atender a esto, se hace uso de la siguiente definición, la cual expresa a una cantidad puntual en términos de su

promedio más desviaciones (Gray, 1975).

$$\psi|_{\mathbf{r}} = \langle \psi \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} + \tilde{\psi} \Big|_{\mathbf{r}} \quad (4.18)$$

Después de sustituir esta expresión en la Ec. (4.17), y reordenando los términos semejantes, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left[\varepsilon_\beta \left(\left\langle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle + \left\langle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle + \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle \right] &= -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \\ + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla \cdot \left[(\nabla \varepsilon_\beta) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} - \tilde{p}_\beta \right) dA \\ + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right) dA \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hasta este punto es considerable expresar la Ec. (4.19) en términos de variables promedio evaluadas únicamente en \mathbf{x} . Para ello, se invoca la restricción de escala

$$\ell_\beta \ll r_0 \ll L \quad (4.20)$$

la cual permite suponer que

$$\langle \psi \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \approx \langle \psi \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}} \quad (4.21)$$

los detalles de esta simplificación pueden consultarse en el libro de Whitaker (1999). Bajo estas condiciones, se puede suponer que las cantidades promedio se mantienen constantes dentro de los operadores de integración. Un corolario de esta simplificación es la siguiente restricción para los campos de las variables de desviación

$$\langle \tilde{\psi} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (4.22)$$

De esta forma, la Ec. (4.19) puede reducirse a

$$\begin{aligned}
& \rho_\beta \varepsilon_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \rho_\beta \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \\
& - \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} \varepsilon_\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\
& + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA
\end{aligned} \tag{4.23}$$

o dividiendo entre la fracción volumétrica

$$\begin{aligned}
& \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \rho_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \\
& - \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\
& + \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Hasta este punto, se ha generado el modelo macroscópico o de medio efectivo de un sólo dominio *no cerrado*, ya que aún no se conocen las desviaciones de la velocidad y presión. Como se mencionó anteriormente, los coeficientes de medio efectivo serán los encargados de capturar las características esenciales de la geometría del aerogenerador. Esto último se refleja en las integrales de las desviaciones de la velocidad y la presión a las cuales se les denomina *filtros* (Whitaker, 1999). En la siguiente sección se trabajará en la deducción y solución formal del problema de las desviaciones espaciales de la velocidad y presión.

4.4. Cerradura

Se observa que la ecuación promedio [Ec. (4.24)] está escrita en términos de cantidades que no se conocen, que son las desviaciones. Para atender a esto, en esta sección se deduce el problema de valor a la frontera que gobierna los campos de las desviaciones. Tomando en cuenta la descomposición espacial dada por la Ec. (4.18), para obtener la ecuación gobernante de las desviaciones de la velocidad, se resta la ecuación de continuidad promedio (4.6) a la ecuación de continuidad puntual (4.1a), dando lugar a la ecuación de continuidad de las desviaciones:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \tag{4.25}$$

análogo a lo anterior, la ecuación de movimiento para las desviaciones resulta de restar la Ec. (4.24) a la Ec. (4.1b), dando lugar a:

$$\begin{aligned}
& \rho_\beta \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) - \rho_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\
& - \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\
& - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA
\end{aligned} \tag{4.26}$$

La Ec. (4.26) se puede simplificar tomando en cuenta las siguientes identidades:

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \tag{4.27a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) = \tilde{\mathbf{v}}_\beta \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tag{4.27b}$$

tomando en cuenta la Ec. (4.25) y que $\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0$, se tiene

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \tag{4.28a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) = \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tag{4.28b}$$

realizando un análisis de órdenes de magnitud de las expresiones de arriba, así como de los otros dos términos de lado izquierdo de la Ec. (4.26), se obtienen los siguientes estimados:

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0} + \frac{\langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \tag{4.29a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta} \right) \tag{4.29b}$$

$$\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0} \right) \tag{4.29c}$$

$$\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \tag{4.29d}$$

y usando la restricción de escala en (4.20), se puede suponer que:

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right), \quad \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{v}}_\beta |_{\mathbf{r}} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right), \quad \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \ll \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) \tag{4.30}$$

Analizando ahora los órdenes de magnitud del segundo y tercer término en el lado derecho de la Ec. (4.26), se obtienen los siguientes estimados:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta^2} \right) \quad (4.31a)$$

$$\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{Lr_0} + \frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0^2} \right) \quad (4.31b)$$

y tomando en cuenta las siguientes restricciones de escala

$$\ell_\beta^2 \ll Lr_0 \quad \ell_\beta^2 \ll r_0^2 \quad (4.32)$$

se puede suponer que

$$\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \ll \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (4.33)$$

Tomando en cuenta las expresiones (4.30) y (4.33), la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para las desviaciones, se reduce a

$$\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \quad (4.34a)$$

Además, las condiciones de frontera están expresadas por las siguientes ecuaciones en la superficie del aerogenerador:

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } A_{\beta\sigma} \quad (4.34b)$$

$$\varsigma_{\beta\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = v_\omega - \varsigma_{\beta\sigma} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } A_{\beta\sigma} \quad (4.34c)$$

Las cuales resultan de sustituir la descomposición espacial (Ec. 4.18) en las condiciones de frontera (4.2d) y (4.2f). Sin embargo, las condiciones de frontera de entradas y salidas de la región representativa, no se conocen lo cual genera una dificultad para resolver los problemas de cerradura asociados. Para atender a esto, en el Capítulo 5, se propone una alternativa para el cálculo de los coeficientes de medio efectivo. A pesar de ello, para definir adecuadamente los coeficientes de medio efectivo y ser consistentes con lo reportado en la literatura, se desarrolla el esquema de cerradura mediante el método de superposición y se identifican las fuentes del

problema de las desviaciones como: $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ y v_ω . De esta manera, se propone la siguiente solución:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{s}v_\omega \quad (4.35a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{m} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta r v_\omega \quad (4.35b)$$

a la cual se le suele denominar *solución formal*, en donde las variables de cerradura \mathbf{M} , \mathbf{m} están asociadas a los cambios macroscópicos de la velocidad y \mathbf{s} , r están asociadas a la velocidad de giro del aerogenerador.

Sustituyendo la solución formal en el problema de valor a la frontera de las desviaciones [ecs. (4.34)] se generan problemas en términos de variables de cerradura para cada fuente. Es decir, un problema en términos de \mathbf{M} , \mathbf{m} y otro en términos de \mathbf{s} , r . No obstante, al realizar un análisis mediante órdenes de magnitud, se estima que v_ω es al menos un orden de magnitud menor que el promedio de la velocidad $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}$. Es decir: $v_\omega = \mathbf{0} (0.1 \|\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta\|)$ (para más detalles, ver Apéndice 7); de esta manera, sólo se genera el siguiente problema de cerradura para \mathbf{M} , \mathbf{m} :

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (4.36a)$$

$$\frac{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta}{\mu_\beta} \cdot \nabla \mathbf{M} = -\nabla \mathbf{m} + \nabla^2 \mathbf{M} + \varepsilon_\beta \mathbf{H}^{-1} \quad (4.36b)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{I} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (4.36c)$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (4.36d)$$

$$\langle \mathbf{m} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (4.36e)$$

en donde

$$\varepsilon_\beta \mathbf{H}^{-1} = -\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I} \mathbf{m} + \nabla \mathbf{M}) dA \quad (4.37)$$

Con el fin de hallar el sentido físico del coeficiente \mathbf{H}^{-1} propuesto y ser lo más consistentes posible con lo reportando en la literatura, es pertinente descomponer el problema de cerradura en dos problemas. En el primer problema se pretende recuperar la ley de Darcy (1856) para medios porosos, para la cual se desprecia el término inercial. De esta manera se genera un coeficiente de medio efectivo que sólo depende de la geometría del medio poroso, en este caso un coeficiente dependiente de la geometría del aerogenerador. En el segundo problema se conserva

el término inercial de donde se obtiene la ecuación de Forchheimer (1901) y de la cual se obtiene un coeficiente de medio efectivo que depende tanto de la geometría del aerogenerador como de los efectos inerciales. De esta forma, se propone la siguiente descomposición:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (4.39)$$

la cual reemplaza a la solución formal dada por las ecs. (4.35), por la siguiente:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (4.40a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \mathbf{c} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (4.40b)$$

De este modo, al sustituir las ecs. (4.40) en el problema de valor a la frontera para las desviaciones, se obtienen los siguientes dos problemas de cerradura:

Problema I

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.41a)$$

$$0 = -\nabla \mathbf{b} + \nabla^2 \mathbf{B} + \varepsilon_\beta \mathbf{K}^{-1} \quad (4.41b)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{I} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (4.41c)$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle^\beta = 0 \quad (4.41d)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle^\beta = 0 \quad (4.41e)$$

Problema II

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (4.42a)$$

$$\frac{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \mathbf{B} + \nabla \mathbf{C}) = -\nabla \mathbf{c} + \nabla^2 \mathbf{C} - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I} \mathbf{c} + \nabla \mathbf{C}) dA \quad (4.42b)$$

$$\mathbf{C} = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (4.42c)$$

$$\langle \mathbf{C} \rangle^\beta = 0 \quad (4.42d)$$

$$\langle \mathbf{c} \rangle^\beta = 0 \quad (4.42e)$$

Debido a la naturaleza de ambos problemas, se han definido los siguientes coeficientes de medio efectivo:

$$\varepsilon_\beta \mathbf{K}^{-1} = -\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\mathbf{b} + \nabla \mathbf{B}) dA \quad (4.43)$$

$$\varepsilon_\beta \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = -\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\mathbf{c} + \nabla \mathbf{C}) dA \quad (4.44)$$

en donde \mathbf{K}^{-1} depende sólo de la geometría del aerogenerador, mientras que \mathbf{F} depende tanto de la geometría del aerogenerador como de los efectos inerciales producidos por éste. De esta forma, el coeficiente \mathbf{H}^{-1} definido para el problema de cerradura de \mathbf{M} , \mathbf{m} , representa una combinación de ambos coeficientes, de la siguiente forma (Whitaker, 1996):

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{F}) \quad (4.45)$$

Los coeficientes \mathbf{K} y \mathbf{F} se conocen en la literatura de transporte en medios porosos como los coeficientes de permeabilidad intrínseca y el coeficiente de Forchheimer, respectivamente (Bear, 1988). El coeficiente de permeabilidad ha sido predicho y medido experimentalmente en varios trabajos y su sentido físico está relacionado con el efecto que tiene la geometría sobre el flujo de fluidos a través de un medio poroso. Mientras que el coeficiente de Forchheimer está relacionado con los efectos causados por la inercia y la geometría y ha sido predicho recientemente a partir de la solución del problema de cerradura dado en las ecs. (4.42) por Lasseux *y col.* (2011).

4.5. Modelo macroscópico cerrado

Con los resultados de la sección anterior, se sustituye la solución formal [ecs. (4.35)] en la ecuación macroscópica no cerrada [Ec. (4.24)], dando lugar a:

$$\underbrace{\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right)}_{\text{esfuerzos inerciales}} = \underbrace{-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} \quad (4.46)$$

$$+ \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1er corrección de Brinkman}} + \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right)}_{\text{2da corrección de Brinkman}} - \underbrace{\varepsilon_\beta \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{Darcy-Forchheimer}}$$

que corresponde a la *ecuación macroscópica cerrada*. Cabe señalar que la estructura del modelo macroscópico se asemeja a la de su contraparte microscópica [Ec. (4.1b)], con la diferencia de que en la Ec. (4.46) se incluyen dos términos al final del lado derecho que son resultado del proceso de promediado. Más aún, en la literatura del transporte en medios porosos, al término de esfuerzos viscosos macroscópicos se le conoce como primera corrección de Brinkman (Bear, 1988), mientras que el penúltimo término en el lado derecho de la Ec. (4.46) es sólo diferente de cero si la fracción volumétrica exhibe cambios importantes en el dominio de solución macroscópico y se conoce como segunda corrección de Brinkman (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b).

Cabe destacar que el modelo macroscópico contiene dos coeficientes de medio efectivo: \mathbf{H}^{-1} y \mathbf{J} . El coeficiente \mathbf{J} , el cual es un tensor de cuarto orden, agrupa los términos inerciales de la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = \mathbf{H} + \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle_{\mathbf{x}}^{\beta} \quad (4.47)$$

y el coeficiente \mathbf{H}^{-1} [ver Ec. (4.37)], es un tensor de segundo orden que agrupa tanto los esfuerzos inerciales como los esfuerzos viscosos producidos por el aerogenerador.

4.5.1. Modelo macroscópico antes y después del aerogenerador

Hasta este punto se ha desarrollado una ecuación macroscópica de un dominio en función de coeficientes de medio efectivo dependientes de la posición, los cuales representan las características esenciales del transporte de cantidad de movimiento en la micro-escala. Es importante mencionar que la ecuación macroscópica obtenida no es exclusiva para un diseño específico de aerogenerador, ya que en ningún momento del desarrollo se comprometió el análisis con algún perfil alar. Por tal motivo, la Ec. (4.46) es una forma general de modelar macroscópicamente el transporte de cantidad de movimiento alrededor de un aerogenerador. Con el fin de ilustrar lo antes mencionado, se demuestra que la Ec. (4.46) se puede reducir a la ecuación de Navier-Stokes macroscópica para cuando la región de promediado no incluye al aerogenerador (es decir, antes y después de él). Por un lado, esto lleva a que la fracción volumétrica ε_{β} sea la unidad, por lo que $\nabla \varepsilon_{\beta} = 0$, de tal forma que la segunda corrección de Brinkman es igual a cero. Por otro lado, al no haber un aerogenerador $\mathcal{A}_{\beta\sigma} = 0$ y por lo tanto, con base en la Ec. (4.37), \mathbf{H}^{-1} , es cero. Resultando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right)}_{\text{esfuerzos inerciales}} &= \underbrace{-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} \\
&+ \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1er corrección de Brinkman}}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Además, al sólo haber una fase en la región de promediado, las desviaciones de la velocidad $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ y de la presión \tilde{p}_β son cero. Por lo que el coeficiente \mathbf{J} [ver Ec. (4.47)], queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} \tag{4.49}$$

usando esta última ecuación, en la Ec. (4.48), se obtiene la versión macroscópica de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right)}_{\text{esfuerzos inerciales}} &= \underbrace{-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} \\
&+ \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1er corrección de Brinkman}}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Cabe recalcar que la ecuación anterior es válida cuando la región de promediado no incluye al aerogenerador, siendo una versión simplificada de la ecuación macroscópica dada por la Ec. (4.46). Es decir, la Ec. (4.50) sea plica en dominios suficientemente lejos (antes y después) del aerogenerador. Entendiendo como “lejos”, las zonas en donde los efectos producidos por el aerogenerador en el aire ya no se aprecian. De hecho, la formulación de la teoría de Betz parte de los supuestos que sustentan a la ecuación anterior, junto con la suposición de que los esfuerzos viscosos (primera corrección de Brinkman) pueden despreciarse respecto a los esfuerzos inerciales, esto es:

$$\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \ll \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \tag{4.51}$$

Para comprender cuándo esta suposición es válida, es conveniente llevar a cabo un análisis de orden de magnitud en ambos lados de la desigualdad anterior, lo cual lleva a la siguiente

restricción para el flujo:

$$1 \ll \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta L}{\mu_\beta} = Re_L \quad (4.52)$$

donde $\langle v_\beta \rangle^\beta$ denota el estimado de orden de magnitud de $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}}$ y L es la longitud característica asociada a los cambios espaciales de la velocidad en las regiones que no contienen al aerogenerador. Bajo estas condiciones, se puede asociar a L con la longitud más pequeña del sistema macroscópico y la Ec. (4.50) se reduce a la forma macroscópica de la ecuación de Euler:

$$\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \quad (4.53)$$

Sin embargo, cuando la región de promediado si contiene al aerogenerador, es de esperarse que el estimado anterior y las suposiciones que llevan a la Ec. (4.53) no sean válidas. Por lo que en el resto de este trabajo se utilizará la Ec. (4.46).

4.5.2. Simplificación hacia la teoría de Betz

Con el fin de mostrar la generalidad de la ecuación macroscópica Ec. (4.46), en este apartado se muestra cómo a partir de la ecuación de Euler (4.53) se obtiene la ecuación de Bernoulli que es la base de la teoría de Betz. Esto se puede ver al extraer la componente tangencial a la dirección del flujo de la Ec. (4.53). Para ello, se define el vector unitario en la dirección del flujo, de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = v\lambda \quad (4.54)$$

en donde v es la magnitud de la velocidad del vector \mathbf{v} . Además, por simplicidad y para fines demostrativos, se realizan los siguientes cambios de variable:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad \langle p_\beta \rangle^\beta = p \quad \rho_\beta = \rho \quad (4.55)$$

Llevando a cabo el producto punto de la Ec. (4.53) con el vector unitario tangencial y usando las ecs. (4.54), se llega a lo siguiente:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho} + \varphi + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0 \quad (4.56)$$

en donde

$$\lambda \cdot \nabla = \frac{d}{ds} \quad (4.57)$$

si se integra dicha ecuación de un punto 1 a un punto 2 sobre una línea de corriente, se obtiene:

$$\frac{p_2}{\rho} + \varphi_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{p_1}{\rho} + \varphi_1 + \frac{1}{2}v_1^2 \quad (4.58)$$

Esto último indica que $\frac{p}{\rho} + \varphi + \frac{1}{2}v^2$ es una cantidad constante a lo largo de cualquier línea de corriente para la cual la Ec. (4.53) representa una aproximación aceptable de las ecuaciones de Navier-Stokes. Es así que la forma general de la ecuación de Bernoulli (Bird *y col.*, 2006; Whitaker, 1968a) queda como:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 = C_s \quad (4.59)$$

en donde C_s es una constante asociada a una línea de corriente en particular y al escogerse un sistema coordenado φ suele denotarse como $\varphi = gz$. Para llegar a los resultados de la teoría de Betz, es necesario seguir los pasos descritos en la Sección 1.4.1, de donde resulta la potencia máxima extraíble del viento así como la velocidad de giro del aerogenerador, entre otros.

Por último, cabe señalar que la Ec. (4.58) puede obtenerse a partir de la ecuación de energía mecánica (Bird *y col.*, 2006):

$$\frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \underbrace{\left(\Delta \hat{U} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \right)}_{\text{pérdidas por fricción}} = \underbrace{\frac{\dot{W}_f}{\dot{m}}}_{\text{trabajo de flecha}} \quad (4.60)$$

cabe notar que la Ec. (4.60) puede reducirse a la ecuación de Bernoulli, si se desprecian tanto el trabajo de flecha producido por el aerogenerador como las pérdidas por fricción. Con respecto a lo anterior, tanto la ecuación de la energía mecánica como de la ecuación de Bernoulli están

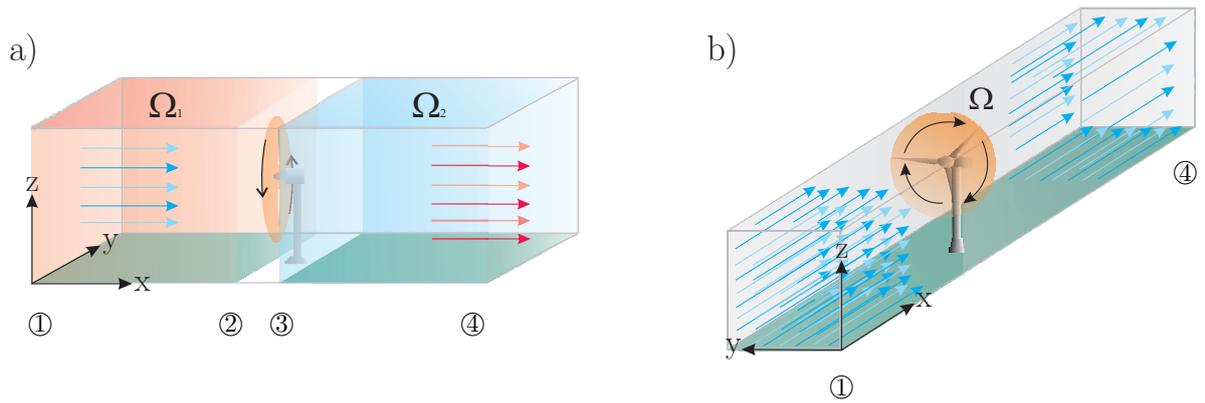


Figura 4.2. Puntos arbitrarios a elegir a lo largo de líneas de corriente: a) antes y después del aerogenerador y b) a la entrada y salida del sistema.

referidos a lo largo de dos puntos cualquiera sobre una línea de corriente. No obstante, si la pareja de puntos se elige sobre una línea de corriente antes del aerogenerador (1 y 2) o después de él (3 y 4), la Ec. (4.60) se reduce a que los cambios de energía cinética son correlativos a los cambios de la presión [ver Fig. 4.2 a)]. Por otra parte, si el par de puntos se elije lo suficientemente lejos del aerogenerador, uno a la entrada y otro a la salida (1 y 4) [ver Fig. 4.2 b)]; la Ec. (4.60) se reduce a que los cambios de la energía cinética son cero. Lo antes mencionado se demuestra en el Capítulo 6 a partir de la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el transporte de un fluido, mostrando las líneas de corriente alrededor de un aerogenerador.

4.6. Resumen

En este capítulo, se desarrolló el modelo de un dominio, o ecuación macroscópica, a partir las ecuaciones que gobiernan el transporte de un fluido a la escala microscópica. Así mismo se dedujeron las restricciones de escala que definen el dominio de validez del modelo. Además, se identificaron los coeficientes de medio efectivo asociados al modelo macroscópico, los cuales se definieron en términos de variables de cerradura. Cabe mencionar que debido a la complejidad de los problemas de cerradura éstos no se resolverán para el cálculo de los coeficientes; por lo que se propone resolver las ecuaciones puntuales de cantidad de movimiento microscópicas alrededor del aerogenerador. Posteriormente, se realizó una discusión del modelo macroscópico en la que se demuestra que dada la generalidad de dicho modelo, se puede reducir a la ecuación de Euler para cuando no hay aerogenerador (es decir para las regiones antes y después del aerogenerador). Esto último llevó a la comparación del modelo macroscópico con la teoría de

Betz, demostrando que el modelo es capaz de contener a la ecuación de Bernoulli (del cual se basa la teoría de Betz) bajo ciertas suposiciones como el despreciar los esfuerzos viscosos producidos por el aerogenerador. Dicha suposición se hizo más notable cuando se realizó la comparación con la ecuación de la energía mecánica. Por todo lo anterior, se reconoce la generalidad de la ecuación macroscópica, pero más aún, se reconoce la importancia por conservar los términos de la Ec. (4.46) que contienen los coeficientes de medio efectivo para predecir las características esenciales del transporte de cantidad de movimiento alrededor de un aerogenerador. Es por ello, que en los capítulos 5 y 6 se evalúan los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo en un sistema representativo, para sistemas en dos y tres dimensiones.

Capítulo 5

Cálculo de coeficientes de medio efectivo en dos dimensiones

En el capítulo anterior se dedujo el modelo macroscópico a usar en este trabajo [ver Ec.(4.46)], el cual está escrito en términos de dos coeficientes de medio efectivo los cuales deben ser determinados. Además, se dedujeron los problemas de cerradura que podrían ser usados para predecir dichos coeficientes. Sin embargo, la complejidad de estos problemas los hace imprácticos para los fines de este trabajo; por ello se propone una alternativa basada en la solución numérica de las ecuaciones puntuales de conservación en un sistema representativo tri-dimensional que contenga al aerogenerador. Con este fin, resulta conveniente llevar a cabo primero un análisis en dos planos del sistema y así obtener estimados de las dimensiones del sistema tridimensional. En específico, el análisis se dirige a una vista superior (plano xy) y a una vista lateral (plano zx) del sistema. Los resultados de este capítulo sentarán las bases para el capítulo siguiente y llevar a cabo el análisis en tres dimensiones.

Para llevar a cabo el cálculo de los coeficientes de medio efectivo a lo largo de un sistema que contenga un aerogenerador, se realiza el análisis que se describe en el algoritmo de la Fig. 5.1. En él se analizan las longitudes del sistema tanto para la vista superior como para la vista lateral. Para la vista superior, el algoritmo comienza al fijarse la longitud del sistema en la dirección y , usando la longitud L_y más pequeña (es decir, $L_{y1}=5$). Para esa L_{y1} se calculan los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxxx}^* para cada tamaño de L_x . Posteriormente, se determina el tamaño adecuado de la región de promediado $r_{0,x}$, para cada L_x , mediante un análisis de resultados. De

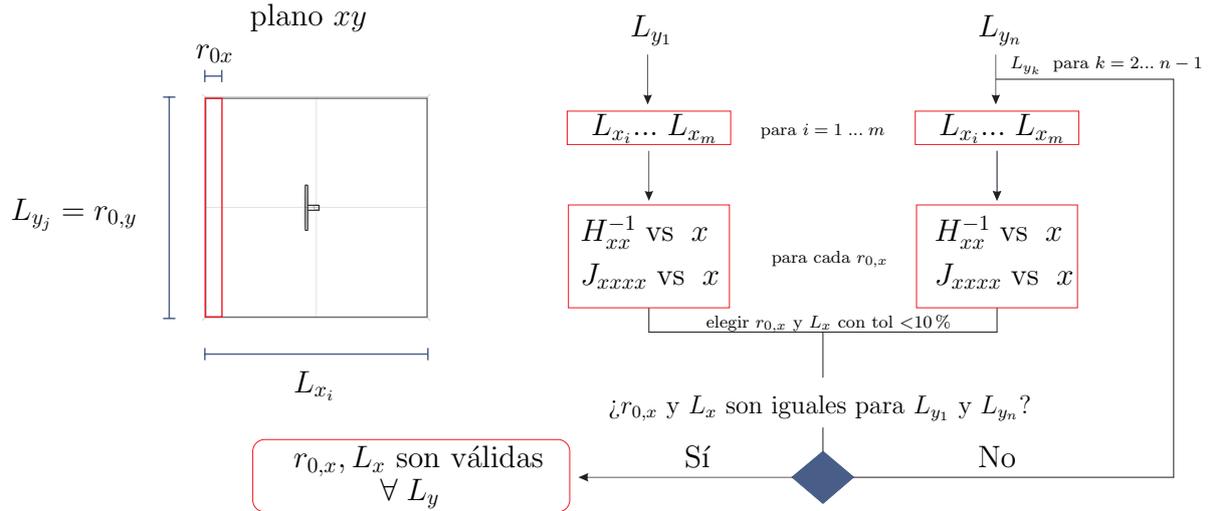


Figura 5.1. Esquema de algoritmo para determinar el tamaño adecuado del sistema L_x , L_y y la región de promediado $r_{0,x}$

esta forma, para cada L_x se obtiene un valor de $r_{0,x}$ representativo.

Así mismo, se fija la longitud en y más grande (es decir $L_{y_n}=20$) y para cada L_x se obtiene una $r_{0,x}$. Posteriormente, si los valores de $r_{0,x}$ y L_x (para L_{y_1} y L_{y_n}) son los mismos, entonces se concluye que los valores de $r_{0,x}$ y L_x son válidos para toda L_y . De lo contrario, se repite el procedimiento para las L_y restantes (es decir L_{y_2} hasta $L_{y_{n-1}}$) hasta no encontrar cambios significativos entre la L_y última y la L_y anterior. Este mismo algoritmo aplica a la vista lateral.

5.1. Plano xy

En esta sección se resuelven numéricamente las ecuaciones puntuales de cantidad de movimiento alrededor de un sistema representativo que contenga a un aerogenerador. Dichas ecuaciones, para el plano xy adimensionales son las siguientes:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad (5.1a)$$

$$\text{Re} \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* p_\beta^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = v_{\beta,in}^* \mathbf{n}_e \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta e} \quad (5.1c)$$

$$p_{\beta}^* \mathbf{n}_s = p_{atm}^* \mathbf{n}_s \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta s} \quad (5.1d)$$

$$\mathbf{v}_{\beta}^*(\mathbf{r}_{\beta} + \ell_i) = \mathbf{v}_{\beta}^*(\mathbf{r}_{\beta}), \quad p_{\beta}^*(\mathbf{r}_{\beta} + \ell_i) = p_{\beta}^*(\mathbf{r}_{\beta}) \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta AL} \quad (5.1e)$$

$$\mathbf{v}_{\beta}^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta p} \quad (5.1f)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_{\beta}^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.1g)$$

$$\zeta_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_{\beta}^* = v_{\omega}^* \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.1h)$$

en donde se ha tomado como referencia para la adimensionalización, a la velocidad de entrada del sistema $v_{\beta,in}$ y el radio de giro del aerogenerador ℓ_R . Las definiciones adimensionales son:

$$p_{\beta}^* = \frac{\ell_R p_{\beta}}{\mu_{\beta} v_{\beta,in}}; \quad v_{\beta}^* = \frac{v_{\beta}}{v_{\beta,in}}; \quad Re = \frac{\rho_{\beta} \ell_R v_{\beta,in}}{\mu_{\beta}}; \quad \nabla^* = \ell_R \nabla \quad (5.2)$$

Para definir el sistema es necesario especificar los valores de algunos parámetros como son la longitud adimensional estimada de la góndola ℓ_g^* ; la altura adimensional del poste h^* ; y el estimado del espesor de las aspas ℓ_a^* . Para un aerogenerador típico de alta potencia, el radio de giro de las aspas $R = 40 \text{ m} = \ell_R$ (Gash y Twele, 2012); por lo que los valores de los parámetros adimensionales del aerogenerador son:

$$h^* = \frac{h}{R} = \frac{100\text{m}}{40\text{m}} = 2.5 \quad (5.3a)$$

$$\ell_a^* = \frac{\ell_a}{R} = \frac{4\text{m}}{40\text{m}} = 0.1 \quad (5.3b)$$

$$\ell_g^* = \frac{\ell_g}{R} = \frac{4.5\text{m}}{40\text{m}} = 0.1125 \quad (5.3c)$$

$$R^* = \frac{\ell_R}{R} = 1 \quad (5.3d)$$

Además, se ha tomado como velocidad de entrada $v_{\beta,in} = 14 \text{ m/s}$; la velocidad del aerogenerador, v_{ω} , como $2/3$ la velocidad de entrada; y la viscosidad cinemática, ν , como $1.44 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. De tal forma que $v_{\beta,in}^* = 1$ y $v_{\omega}^* = 2/3$. Así mismo, el número de Reynolds es del orden de $Re = 10^8$.

Dirigiendo la atención a la solución formal del problema de cerradura deducida en el capítulo anterior:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (5.4a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{m} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (5.4b)$$

y bajo la suposición de que el flujo macroscópico del viento se da principalmente en la dirección x , se tienen las siguientes expresiones para las componentes de las variables de cerradura en esta dirección en términos de la velocidad y presión adimensionales:

$$\mathbf{M}_{xx}^* = \frac{\tilde{v}_{\beta,x}^*}{\langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta} = \frac{v_{\beta,x}^* - \langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta}{\langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta} \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{m}_x^* = \frac{\tilde{p}_\beta^*}{\langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta} = \frac{p_\beta^* - \langle p_\beta^* \rangle^\beta}{\langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta} \quad (5.5b)$$

donde se utilizó la descomposición espacial dada por la Ec. 4.18. En el capítulo anterior se dedujeron las siguientes expresiones de los coeficientes de medio efectivo \mathbf{H}^{-1} y \mathbf{J} en términos de las variables de cerradura

$$\mathbf{H}^{-1} = - \frac{1}{\varepsilon_\beta V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I} \mathbf{m} + \nabla \mathbf{M}) dA \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (5.6b)$$

Sustituyendo las ecs. 5.6 en las componentes en la dirección x de los coeficientes de medio efectivo, resultan las siguientes expresiones adimensionales.

$$H_{xx}^{*-1} = \frac{1}{\varepsilon_\beta^2 V \langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \left[n_x \left(p_{\beta,x}^* - \langle p_{\beta,x}^* \rangle^\beta \right) - n_x \frac{\partial v_{\beta,x}^*}{\partial x^*} - n_y \frac{\partial v_{\beta,x}^*}{\partial y^*} \right] dA \quad (5.7a)$$

$$J_{xxxx}^* = 1 + \frac{\left\langle \left(v_{\beta,x}^* - \langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta \right)^2 \right\rangle^\beta}{\left(\langle v_{\beta,x}^* \rangle^\beta \right)^2} \quad (5.7b)$$

Una vez definidos los coeficientes para un sistema en 2D, se resuelven las ecs. (5.1) para sistemas de longitud $L_x \times L_y$ mediante las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} L_{y1} &= 5 \quad \text{para} \quad L_x = 10, 15, 20, 30, 40 \\ &\vdots \\ L_{yn} &= 20, \quad \text{para} \quad L_x = 10, 15, 20, 30, 40 \end{aligned}$$

La dimensión de la región de promediado se evalúa para $r_{0,x}=0.75$ hasta $r_{0,x}=5.5$, con espaciamentos de 0.5. Las simulaciones numéricas se llevaron a cabo en los programas COMSOL Multiphysics y Matlab [los detalles se muestran en los apéndices 7.1 y 7.2].

Dadas las dimensiones del aerogenerador, las simulaciones numéricas para los planos xy y zx se realizan para números de Reynolds que indiquen turbulencia, según lo reportado por Hong *y col.* (2014). Específicamente, en este trabajo, se utiliza un número de Reynolds de 10^8 . En la Fig. 5.2 se muestra un ejemplo de las soluciones de las ecs. (5.1) en el plano xy . En el lado derecho de la figura se muestra el perfil de velocidades adimensional. Se observa que, antes del aerogenerador, el perfil de velocidades se ve influenciado principalmente por los esfuerzos viscosos. Posteriormente, se observa que la velocidad sufre una aceleración en las puntas de las aspas, dando lugar lo que se conoce en la literatura como efecto estela (Schlichting y Gersten, 2003). Pasando el aerogenerador, el perfil de velocidades ya no presenta cambios significativos respecto al frente del aerogenerador. A simple vista, esto último sugiere que el flujo de aire a la salida se encuentra totalmente desarrollado. Sin embargo, siguiendo el algoritmo descrito en la metodología [ver Fig. 5.1], se evalúan los coeficientes de medio efectivo para cada combinación de sistemas [ver Apéndice 7.2].

Una vez obtenidos los campos puntuales de la velocidad y la presión, se calculan los diferentes valores de los promedios intrínsecos a lo largo del sistema y se sustituyen en las expresiones (5.7), para así calcular los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo. En este momento, cabe recordar que el coeficiente J_{xxx}^* representa, en su mayoría, los esfuerzos inerciales, este coeficiente debe capturar la información tanto antes del aerogenerador como después de él. Lo anterior motiva a afirmar, que el coeficiente J_{xxx}^* va a determinar la longitud máxima de influencia del aerogenerador en los esfuerzos inerciales en el viento y el coeficiente H_{xx}^{*-1} (que en su mayoría, representa los esfuerzos viscosos producidos por el aerogenerador) la cota mínima.

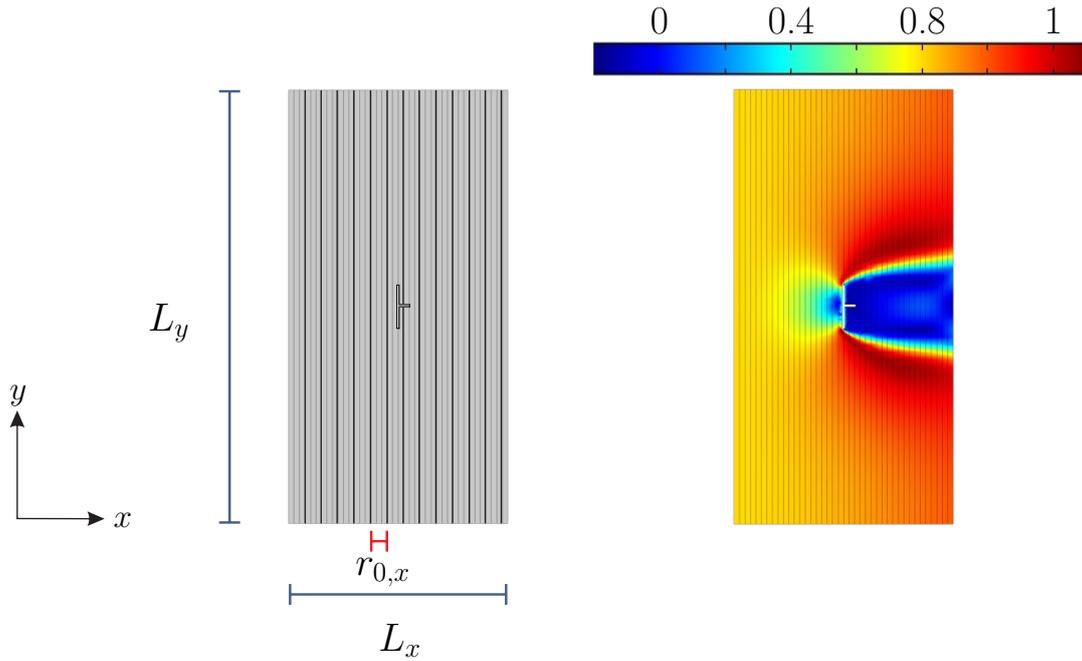


Figura 5.2. Ejemplo del esquema y componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β de un sistema en 2D, en el plano xy . $r_{0,x}$ indica el tamaño en la dirección x del volumen promediante, el cual está adimensionalizado con respecto al radio de giro del aerogenerador, así como L_x y L_y .

En la Fig. 5.3 a) se reportan los cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para diferentes valores de $r_{0,x}$. Se observa que los cambios en las curvas del coeficiente H_{xx}^{*-1} , dejan de ser significativos a partir de $r_{0,x} = 2.5$. Para tener un criterio de decisión cuantitativo se calcularon los promedios aritméticos de cada curva de la Fig. 5.3 a), y la curva resultante se graficó en la Fig. 5.3. Estos resultados pueden ajustarse mediante la siguiente función logística

$$\bar{H}_{xx}^{*-1} = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^P} \quad (5.8)$$

Con la cual se busca el valor de la asíntota cuando $r_{0,x}$ tiende a infinito. Con ello, se muestra que los porcentajes del error relativo para cada región de promediado están por debajo del 10% [ver Fig. 5.3 b)]. De esta manera, la región de promediado puede ser representativa a partir de 2.5 veces la longitud de una aspa para las longitudes del sistema $L_x = 10$ y $L_y = 5$. De acuerdo al algoritmo propuesto en la metodología, se deben llevar a cabo cálculos para la cota máxima de L_y ($L_y = 20$). En este caso, la curva de \bar{H}_{xx}^{*-1} y los porcentajes de error respecto a la asíntota resultante del modelo logístico se muestran en la Fig. 5.3 c), donde se aprecia que en este caso los porcentajes de error son todos por debajo del 1%. Otro criterio de evaluación es determinar

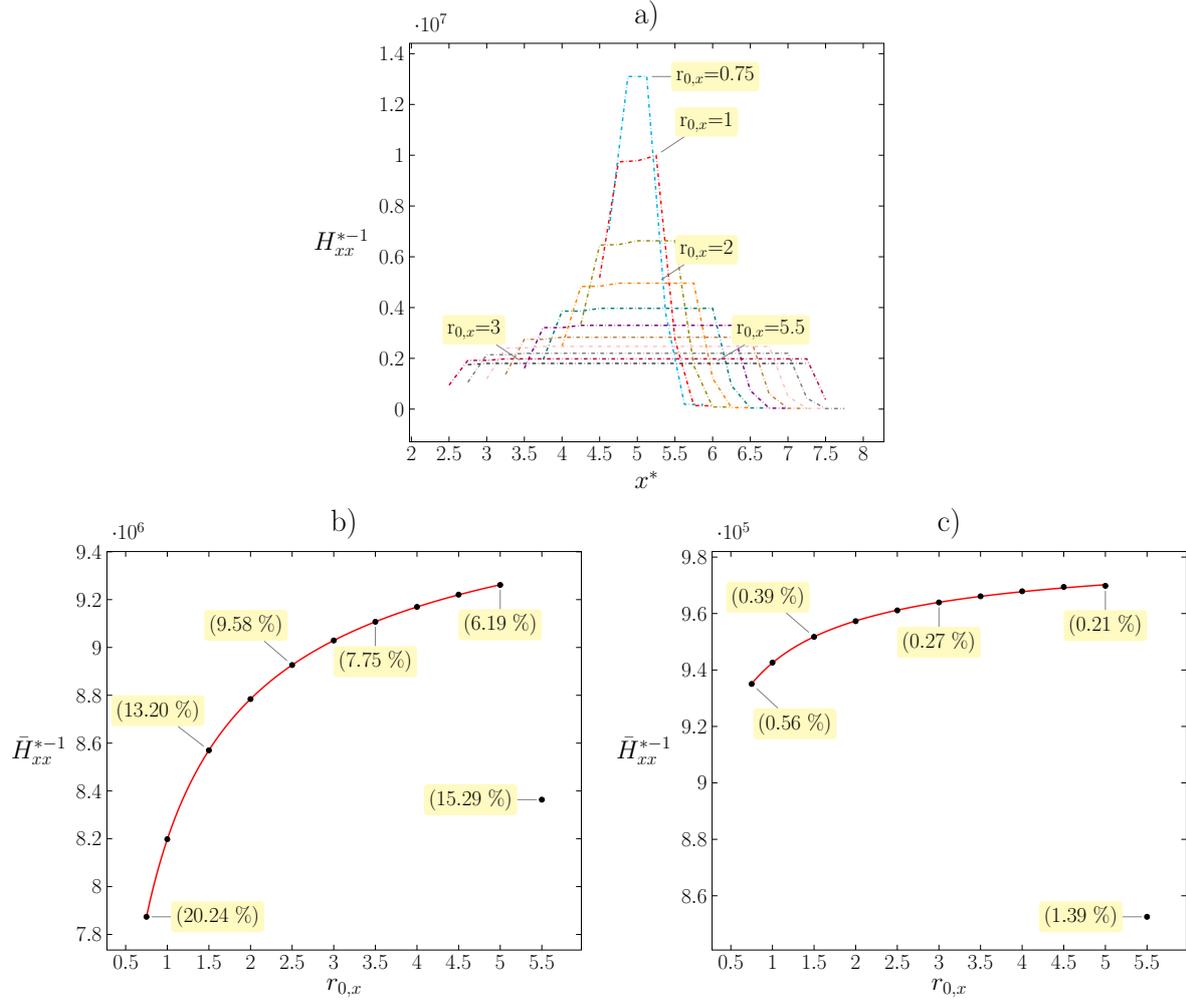


Figura 5.3. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. b) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 5$. c) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para un sistema de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 20$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

el máximo de cada curva y compararlos entre sí. Lo dicho anteriormente se presenta en la Fig. 5.4 a), en donde se observa que, para un sistema de $L_x = 3$ y $L_y = 5$, el coeficiente J_{xxxx}^* aún no se encuentra completamente desarrollado, más aún, el número de regiones de promediado no puede ser tan amplia debido al tamaño reducido de L_x . En cambio, para un sistema de longitud $L_x = 40$, se puede apreciar que el coeficiente J_{xxxx}^* , comienza a recuperar su valor de entrada [ver Fig. 5.4 b)]. Esto último reduce los grados de libertad, quedando por determinar sólo la longitud L_y y las dimensiones de la región de promediado. Para ello, se comparó el coeficiente J_{xxxx}^* con respecto a cada tamaño de región de promediado y distintas L_y [ver Fig. 5.4 c)] y se determinó el porcentaje de error relativo entre cada curva [ver Fig. 5.4 d)], arrojando como

resultado que entre $L_y = 15$ y $L_y = 20$ el porcentaje de error es menor al 10 %.

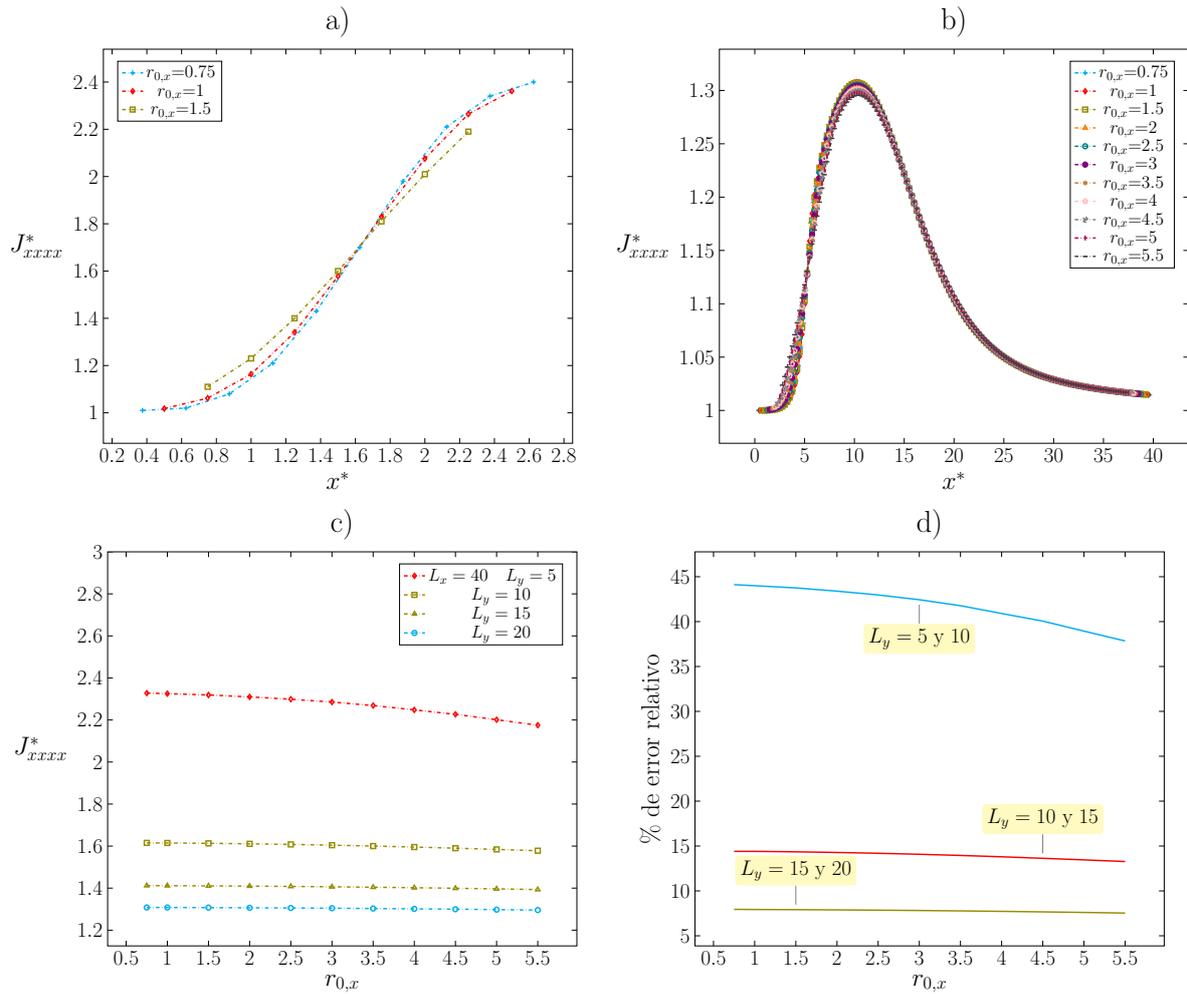


Figura 5.4. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 3$ y $L_y = 5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para un sistema de longitud $L_x = 40$ y $L_y = 20$. El aerogenerador está ubicado en $x^* = 5$. c) Comparación de J_{xxxx}^* con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, para una longitud de $L_x = 40$ y distintas longitudes en L_y . d) Porcentajes de error relativo con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, entre las longitudes L_y del inciso c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

5.2. Plano zx

Con respecto a la sección anterior, el procedimiento para el plano zx es el mismo. Sin embargo, el modelo puntual no lo es, puesto que cambian las condiciones de frontera. El modelo adimensional, es el siguiente:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad (5.9a)$$

$$\text{Re} \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* p_\beta^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* \quad (5.9b)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = v_{\beta, in}^* \mathbf{n}_e \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta e} \quad (5.9c)$$

$$p_\beta^* \mathbf{n}_s = p_{atm}^* \mathbf{n}_s \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta s}, \quad \mathcal{A}_{\beta AL} \quad (5.9d)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta p} \quad (5.9e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.9f)$$

$$\zeta_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta^* = v_\omega^* \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.9g)$$

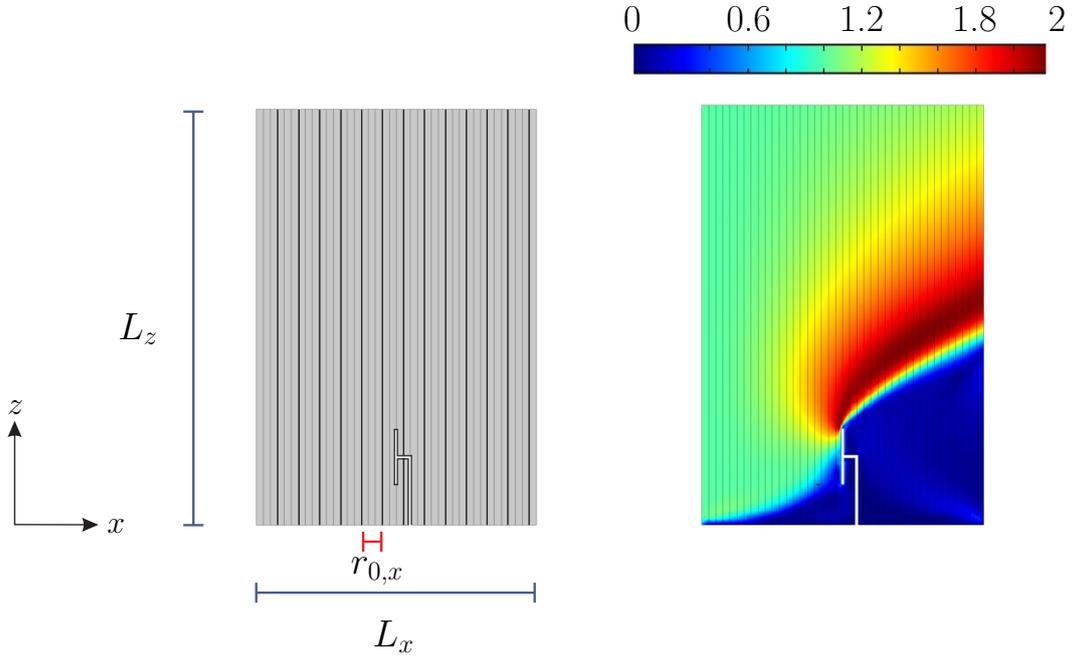


Figura 5.5. Ejemplo del esquema y componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β de un sistema en 2D, en el plano zx . $r_{0,x}$ indica el tamaño en la dirección x del volumen promediante, el cual está adimensionalizado con respecto al radio de giro del aerogenerador, así como L_x y L_z .

En la Fig. 5.5, se muestra un ejemplo del campo de velocidades, en donde, a diferencia del plano en xy , en éste el perfil de velocidades se ve influenciado tanto por efecto del piso como del aerogenerador. Esto genera que la aceleración de la velocidad se lleve a cabo solo en la punta de la pala superior aumentando aún más la capa límite en esa zona. Por su parte, los efectos del piso como del mismo aerogenerador provocan una zona de velocidad aproximadamente igual a cero, justo detrás de éste. Esto último podría provocar que las dimensiones del sistema fueran mayores con respecto a las obtenidas para el plano xy .

Análogo a la sección anterior, en la Fig. 5.6, se muestran los resultados que se obtuvieron mediante el análisis del coeficiente H_{xx}^{*-1} . Específicamente, en la Fig. 5.6 a) se muestra que la región de promediado $r_{0,x}$ es igual a cinco veces la longitud de la pala del aerogenerador, a partir de $L_x = 20$ hasta $L_x = 40$, para $L_z = 15$ y $L_z = 20$. A diferencia del plano xy , en el plano zx no son representativas las longitudes desde $L_z = 5$ hasta $L_z = 10$ [ver Apéndice 7.2].

En la Fig. 5.6 b) se grafican los perfiles del coeficiente H_{xx}^{*-1} para diferentes valores de $r_{0,x}$. Se observa que los cambios para cada $r_{0,x}$ son más suaves pues se ven compensados por las discontinuidades tanto a la entrada del aerogenerador como a la salida (la posición del aerogenerador comienza en $x^* = 5$). Esto último se comprueba con los porcentajes de error relativo de \bar{H}_{xx}^{*-1} para cada región de promediado, los cuales, están por debajo del 10% [ver Fig. 5.6 c)]. De esta manera, la región de promediado puede ser representativa a partir de 0.75 veces la longitud de una aspa para las longitudes $L_x = 10$ y $L_z = 15$; y se puede llegar a la misma conclusión para el caso en que $L_z = 15$ [ver Fig. 5.6 b)]

El análisis de las dimensiones del sistema, con respecto de J_{xxxx}^* , se muestra en la Fig. 5.7. Específicamente, en la Fig. 5.7 a), se observa que, para un sistema de $L_x = 3$ y $L_z = 5$, el coeficiente J_{xxxx}^* aún no se encuentra completamente desarrollado, más aún, el número de regiones de promediado no puede ser tan amplio debido al tamaño reducido de L_x . En cambio, para un sistema de longitud $L_x = 40$, se puede apreciar que el coeficiente J_{xxxx}^* , comienza a recuperar su valor de entrada [ver Fig. 5.7 b)]. Esto último reduce los grados de libertad, quedando sólo la longitud L_z y el largo de la región de promediado por determinar. Para ello, se comparó el coeficiente J_{xxxx}^* con respecto a cada tamaño de región de promediado y distintas L_z [ver Fig. 5.7 c), e)] y se determinó el porcentaje de error relativo entre cada curva [ver Fig. 5.7 d), f)], arrojando como resultado que, entre $L_z = 15$ y $L_z = 20$, el porcentaje de error es alrededor del 24%. A pesar, de que se impuso una tolerancia del 10% de error, en este caso en

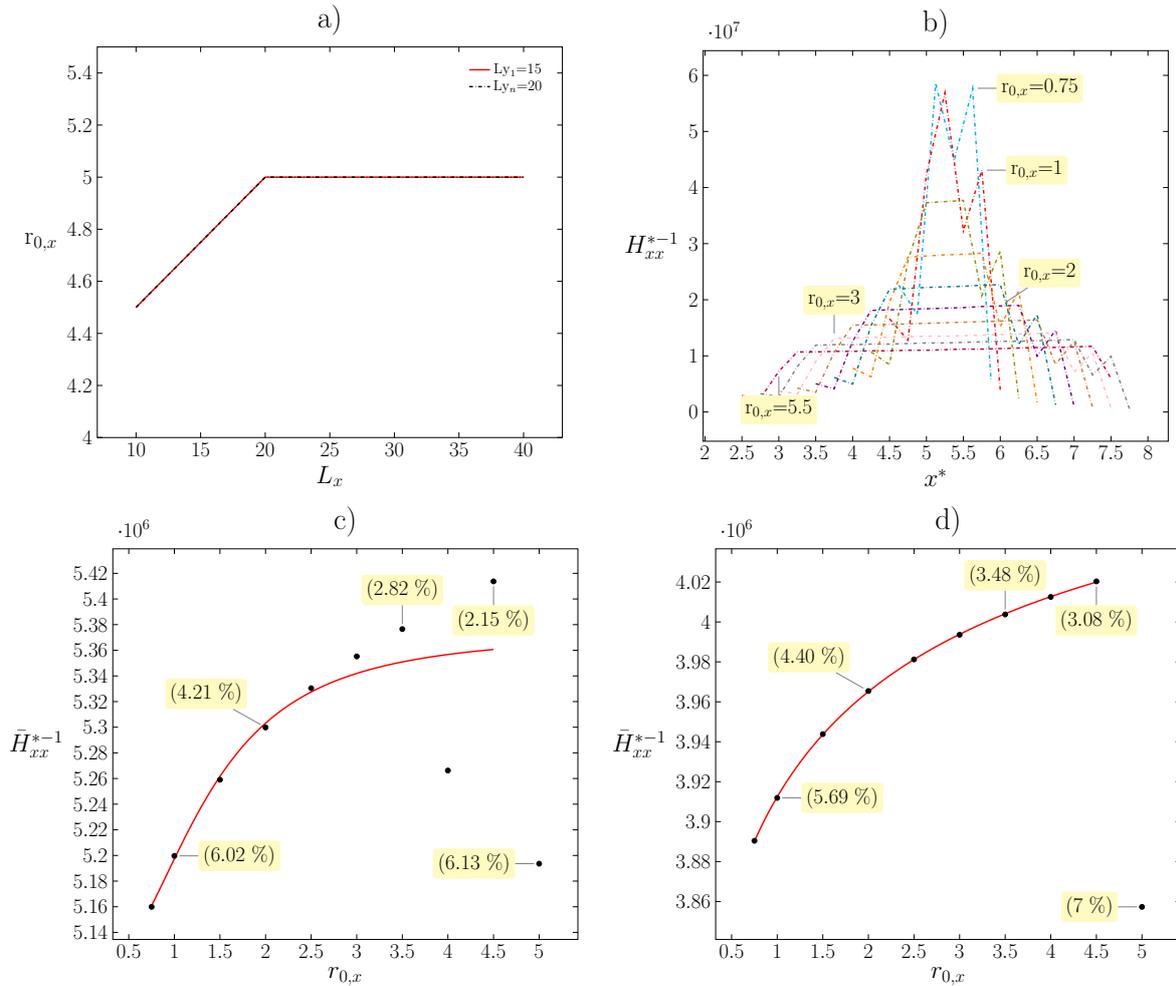


Figura 5.6. a) Región de promediado $r_{0,x}$ representativa para cada L_x . b) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, para $L_x = 10$ y $L_z = 15$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. c) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para una longitud de sistema de $L_x = 10$ y $L_z = 15$. d) Estimación del error relativo mediante \bar{H}_{xx}^{*-1} , para una longitud de sistema de $L_x = 10$ y $L_z = 20$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

particular, se toma dicho error como válido, ya que si se extendiera más la longitud en L_z , esto llevaría a analizar la capa límite atmosférica, lo cual estaría en contradicción con las condiciones frontera impuestas.

5.3. Resumen de resultados

En este capítulo, se resolvieron numéricamente las ecuaciones que gobiernan el transporte del viento alrededor de un aerogenerador de alta potencia para dos planos del sistemas tridimensional. Para la vista superior, las simulaciones se llevaron a cabo para distintos tamaños

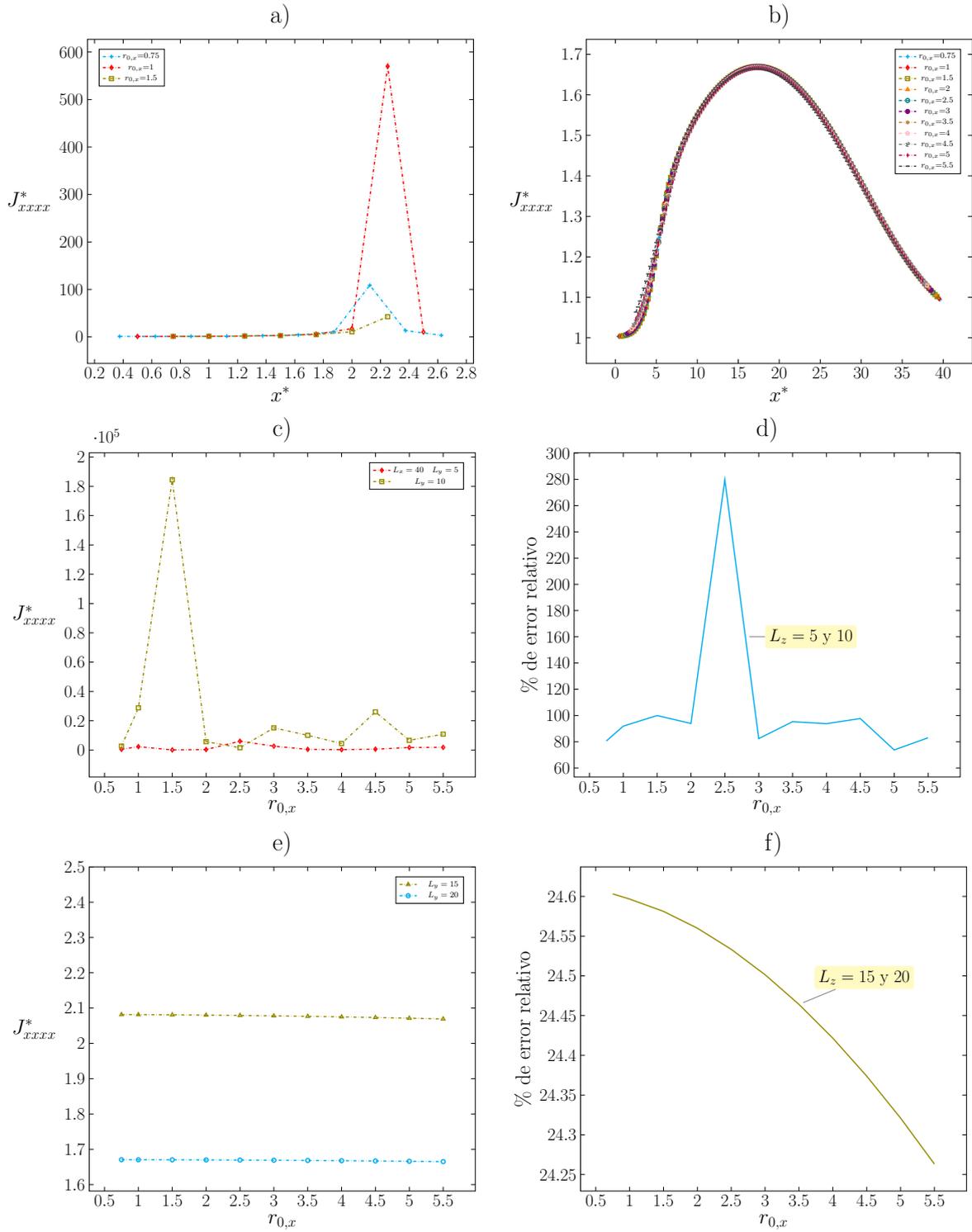


Figura 5.7. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 3$ y $L_z = 5$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para distintas longitudes de promediado $r_{0,x}$, con $L_x = 40$ y $L_z = 20$. El aerogenerador está ubicado en $x^* = 5$. c), e) Comparación de J_{xxxx}^* con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, para $L_x = 40$ y distintas L_z . d). f) Porcentajes de error relativo con respecto de la región de promediado $r_{0,x}$, entre las L_z del inciso c), d), respectivamente. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

de sistema ($L_x \times L_y$) y distintas longitudes de la región de promediado $r_{0,x}$. De forma análoga, para la vista lateral, se llevaron a cabo simulaciones para distintos tamaños de sistema ($L_z \times L_x$) y distintas longitudes de la región de promediado $r_{0,x}$. Mediante el cálculo de los coeficientes de medio efectivo se determinaron las longitudes del sistema, tomando como cota mínima las resultantes del análisis del coeficiente \mathbf{H}^{-1} y como cota máxima los resultados del análisis del coeficiente \mathbf{J} . De esta forma, se encontró que la región de promediado, $r_{0,x}$, debe ser al menos, 2.5 veces el tamaño de la pala del aerogenerador elegido. Así mismo, las dimensiones del sistema, deben ser al menos $L_x = 40$, $L_y = 15$, $L_z = 15$. Con base en estos resultados, en el siguiente capítulo se esboza un sistema en tres dimensiones y se determinan los coeficientes de medio efectivo \mathbf{H}^{-1} y \mathbf{J} , en una región de promediado r_0 representativa.

Capítulo 6

Cálculo de coeficientes de medio efectivo en tres dimensiones

En este capítulo, se resuelven numéricamente las ecuaciones adimensionales de conservación de masa [Ec. (6.1a)] y cantidad de movimiento [Ec. (6.1)], para un sistema en tres dimensiones que contenga un aerogenerador:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad (6.1a)$$

$$\text{Re} \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* p_\beta^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* \quad (6.1b)$$

En la Fig. 6.1 se esquematizan las condiciones de frontera que se han extraído de los problemas bidimensionales del capítulo anterior.

$$\mathbf{v}_\beta^* = v_{\beta, in}^* \mathbf{n}_e \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta e} \quad (6.2a)$$

$$p_\beta^* \mathbf{n}_s = p_{atm}^* \mathbf{n}_s \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta s} \quad (6.2b)$$

$$\mathbf{n}_{AL} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta AL} \quad (6.2c)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta p} \quad (6.2d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (6.2e)$$

$$\zeta_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta^* = v_\omega^* \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (6.2f)$$

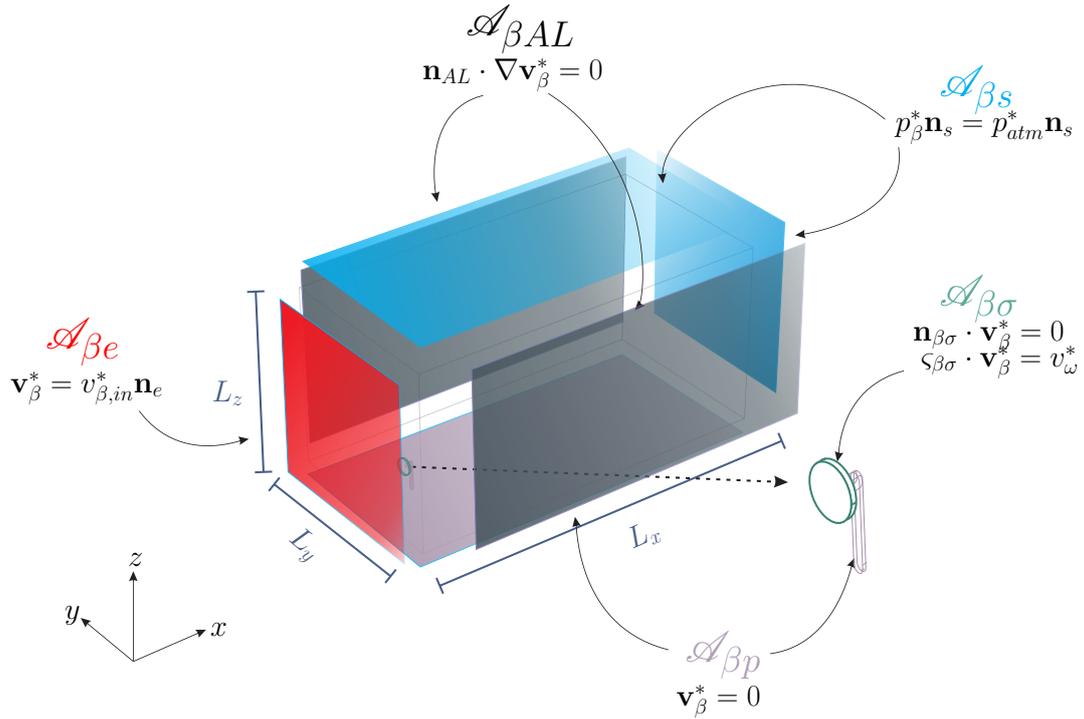


Figura 6.1. Representación de las condiciones de frontera en un sistema en 3D.

El capítulo se compone de dos secciones; en la primera sección se realiza un análisis para determinar únicamente las dimensiones del sistema, mediante el cálculo de los coeficientes de medio efectivo. Mientras que, en la segunda sección se determina la forma y tamaño de la región de promediado. Los resultados de esta sección sirven para definir el sistema y los valores adecuados de los coeficientes de medio efectivo cuya validación se llevará a cabo en el siguiente capítulo. Por consistencia, las ecs. (6.2) han sido adimensionalizadas bajo las mismas definiciones presentadas en el capítulo anterior [ver ecs. (5.2)]. Como primera aproximación, en este trabajo se ha modelado un aerogenerador cuyas aspas se representen mediante un cilindro rotatorio. Es así que, las dimensiones del aerogenerador se han esbozado mediante los cortes de los planos xy y zx , utilizando los parámetros adimensionales considerados en el capítulo anterior (Ec. 5.3). Además el procedimiento para el cálculo de los coeficientes de medio efectivo será el mismo que se describió al inicio del capítulo anterior.

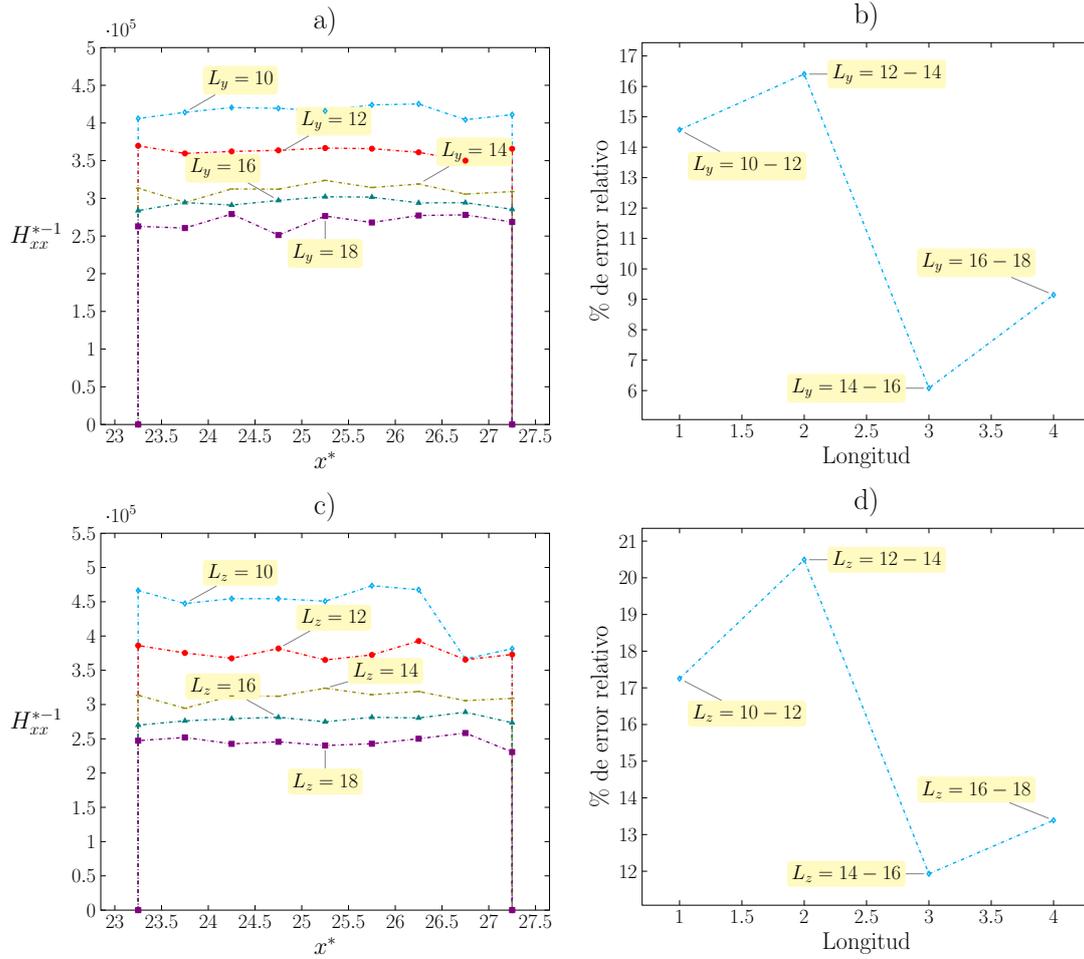


Figura 6.2. Análisis para determinar las dimensiones de un sistema en 3D. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_z = 14$ y variando L_y con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentaje de error relativo entre cada curva de a). c) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$ y variando L_z con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Porcentaje de error relativo entre cada curva de c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

6.1. Análisis para determinar las dimensiones del sistema

Una vez definidos los coeficientes de medio efectivo, se resuelven numéricamente las ecs. (6.1) para un sistema de longitud $L_x = 60$, $L_y = 15$ y $L_z = 15$ ¹. No obstante, para garantizar que dichas dimensiones sean las adecuadas en la solución de un sistema en 3D, se realiza un análisis de las dimensiones del sistema alrededor de las encontradas en 2D. Es decir, para las combinaciones de longitudes $L_y = 10, 12, 14, 16, 18$ y $L_z = 10, 12, 14, 16, 18$. Para ello, se fijó el tamaño de la región de promediado en $r_{0,x} = 5$, siendo consistentes con lo reportado en 2D.

¹A diferencia del sistema en 2D, en éste la longitud L_x es más grande pues el aerogenerador se ubicó más alejado de la entrada del sistema, con el fin de garantizar que la entrada afecte lo menos posible al perfil de velocidades cerca del aerogenerador.

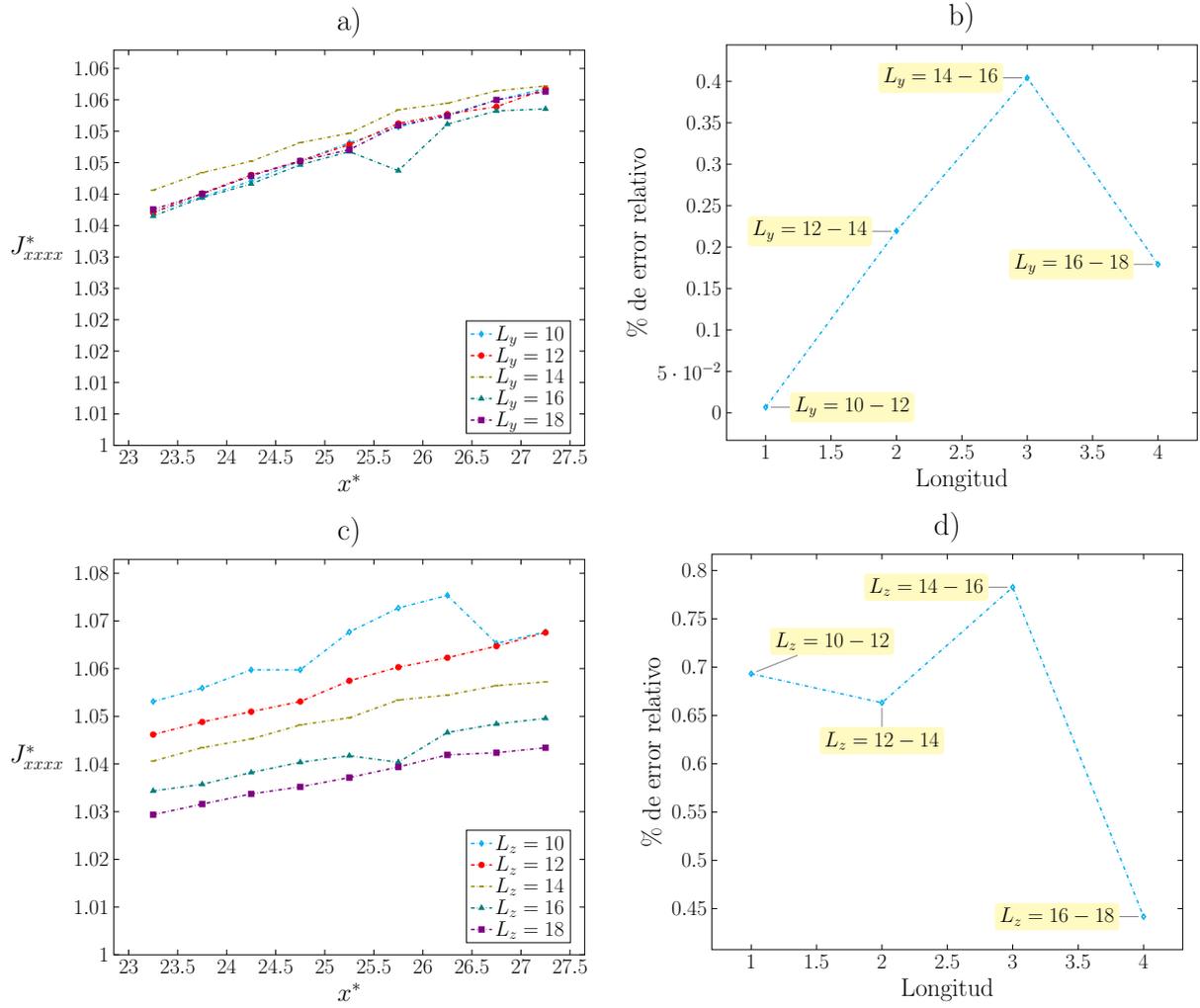


Figura 6.3. Análisis para determinar las dimensiones de un sistema en 3D. a) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_z = 14$ y variando L_y con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentaje de error relativo entre cada curva de a). c) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* , para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$ y variando L_z con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Porcentaje de error relativo entre cada curva de c). x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

Los resultados de dicho análisis se presenta en las fig. 6.2 y 6.3, en donde se muestran los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo, H_{xx}^{*-1} [Fig. 6.2] y J_{xxxx}^* [Fig. 6.3] a lo largo de la dirección x . En la Fig. 6.2 se muestra el análisis de la componente xx del coeficiente \mathbf{H}^{-1} , en la que se han fijado dos de las tres dimensiones del sistema y se ha dejado libre la tercera. En la Fig. 6.2 a), se dejó libre la longitud en y generando las curvas que se observan para cada L_y . Para determinar qué longitud en y es la adecuada, se calcularon los promedios aritméticos de cada curva y se evaluó el error relativo entre cada una de ellas. Dando como resultado una longitud de $L_y = 14$, con un error relativo por debajo del 10% [ver Fig. 6.2 b)].

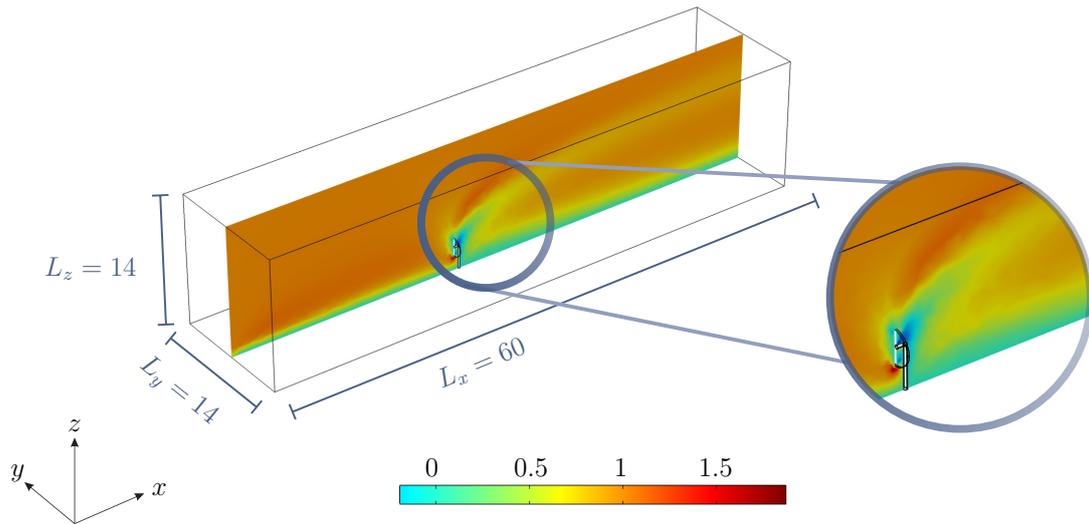


Figura 6.4. Componente x del vector velocidad \mathbf{v}_β para un sistema en 3D con dimensiones $L_y = 14$, $L_z = 14$ y $L_x = 60$.

Así mismo, en la Fig. 6.2 c) se dejó libre la longitud en z y el cálculo del error relativo muestra que, para una longitud de $L_z = 14$, se tiene un porcentaje de error relativo del 12% [ver Fig. 6.2 d)].

El mismo análisis se realizó para la componente $xxxx$ del coeficiente \mathbf{J} [ver Fig. 6.3]. En este caso se halló que para cualquier combinación de $L_y = 10, 12, 14, 16, 18$ y $L_z = 10, 12, 14, 16, 18$ se puede esbozar un sistema en 3D teniendo porcentajes de error por debajo, incluso, del 1%.

Del análisis anterior se deduce que las dimensiones adecuadas del sistema en 3D. son: $L_x = 60$, $L_y = 14$ y $L_z = 14$; en la Fig. 6.4, se muestra el campo de velocidades para este sistema. En la figura se observa que el perfil de velocidades se ve influenciado sólo en las cercanías del aerogenerador. A diferencia de lo reportado en 2D, en esta ocasión, la influencia del piso antes del aerogenerador (sobre el perfil de velocidades) no se encuentra por encima de éste, lo que sugiere una distribución de esfuerzos viscosos en las tres direcciones. Esto último provoca una aceleración de la velocidad en la parte inferior del aerogenerador, así como en la parte superior, llegando al doble de la velocidad de entrada. Por otro lado, después del aerogenerador, se observa el efecto estela que da pie a las dimensiones máximas en la dirección x que debe comprender la región de promediado, y así capturar las perturbaciones provocadas por el aerogenerador en el aire. Ante esto último, en las figs. 6.5 se presentan los tubos de corriente con los cuales se muestra un cambio en la separación de éstos que se atribuye a un cambio de área [ver Fig. 6.5 a)] y por lo tanto a un consumo de energía cinética por parte del aerogenerador. Además, en

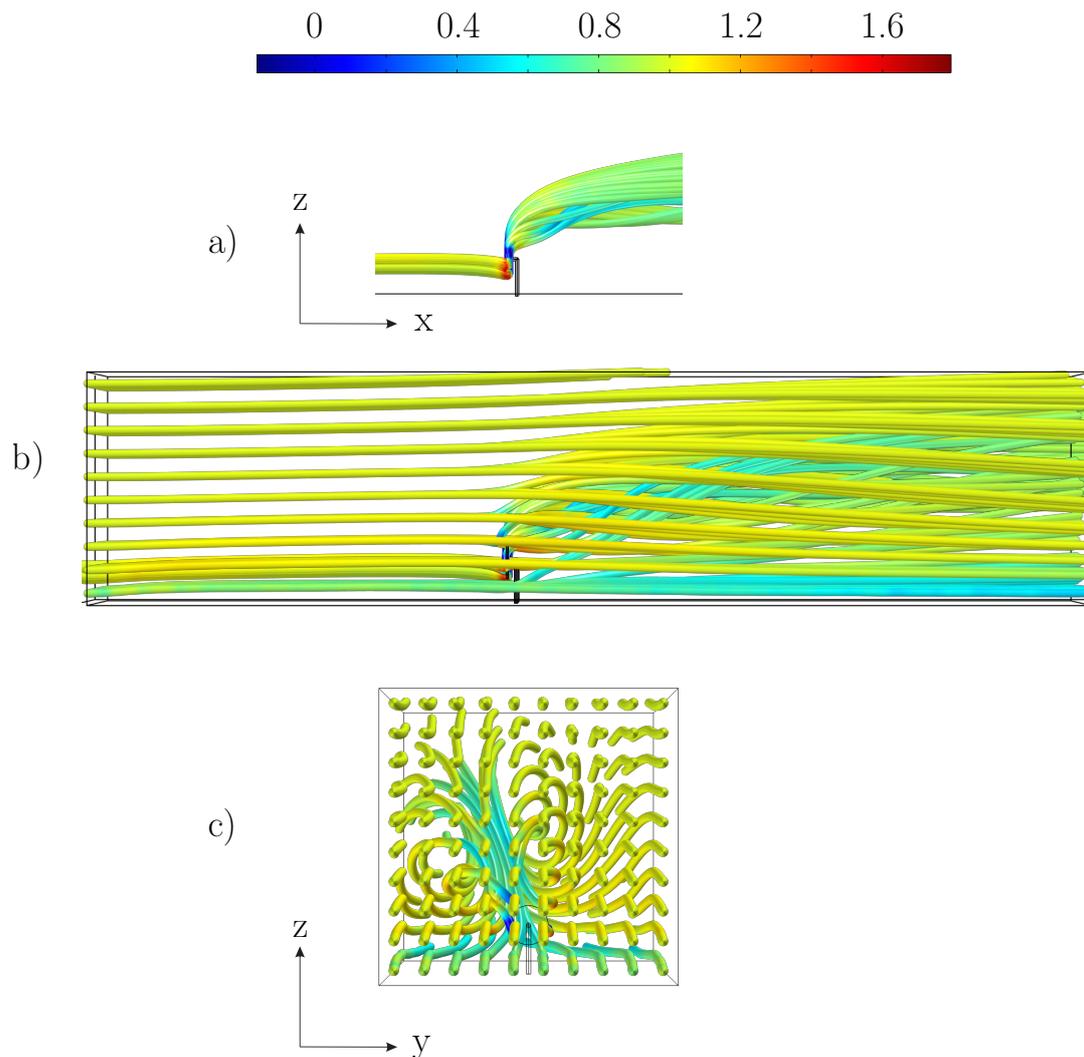


Figura 6.5. a) Tubos de corriente en las cercanías del aerogenerador. b) Tubos de corriente a lo largo del sistema. c) Tubos de corriente en la superficie de entrada. La barra de colores representa la magnitud de la velocidad v_x .

la Fig. 6.5 b) se observa que a la salida lejos del aerogenerador, los tubos de corriente tienden a recuperar su forma inicial (antes del aerogenerador). Esto último, en términos energéticos, indica que la energía cinética extraída por el aerogenerador tiende a recuperarse. No obstante, para un túnel de viento como el que se muestra en la figura citada, la energía cinética a la salida será siempre menor que a la entrada pero mayor a la energía extraída del viento. De tal manera que, para un sistema real (sin fronteras físicas) la energía cinética del viento a la salida si puede ser igual a la energía cinética del viento a la entrada como lo supone la teoría de Betz.

6.2. Análisis para determinar las dimensiones de la región de promediado

Con el fin de explorar el tamaño y forma de la región de promediado, en esta sección, se evalúan los coeficientes de medio efectivo para regiones cuyas dimensiones contemplen, por lo menos, la capa límite alrededor del aerogenerador. Para ello, no sólo se analizan dichas dimensiones, sino la geometría de la sección transversal de la región de promediado.

Como primera aproximación, se propone que la región de promediado sea un prisma de sección transversal circular cuya ubicación sea lo suficientemente cercana a la capa límite ocasionada por el aerogenerador [ver Fig. 6.6]. Una vez definida la sección transversal, se calculan los coeficientes de medio efectivo para longitudes de $r_{0,x} = 4, 5, 6, 10, 12, 14$. En la Fig. 6.7, se presenta el análisis de los cambios espaciales de los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxx}^* . Específicamente, en la Fig. 6.7 a) se muestran los cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para cada longitud de $r_{0,x}$. En dicha figura se observa que, antes del aerogenerador, los esfuerzos viscosos que captura el coeficiente H_{xx}^{*-1} son iguales a cero, pues no hay aerogenerador. Sin embargo, cuando la región de promediado comienza a contener al aerogenerador, el coeficiente H_{xx}^{*-1} tiende a un valor siete órdenes de magnitud mayor. Además, cuando la longitud de la región de promediado $r_{0,x}$ se hace más grande, la zona de cambios que contiene al aerogenerador también aumenta. De tal manera que, los cambios entre cada curva comienzan a ser insignificantes para $r_{0,x} = 12$ y $r_{0,x} = 14$, con respecto a los cambios de las primeras longitudes de $r_{0,x}$. Esto último se comprueba de la siguiente manera:

- Se calculan los promedios aritméticos de cada curva de H_{xx}^{*-1} , identificándolos como \bar{H}_{xx}^{*-1} .
- Se grafican los promedios aritméticos y se ajustan mediante una función que los satisfaga.

En este caso es una función logística del tipo:

$$H_{xx}^{*-1} = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^P} \quad (6.3)$$

- Se calculan los porcentajes de error relativo entre cada valor de \bar{H}_{xx}^{*-1} con respecto a la asíntota de la función logística.

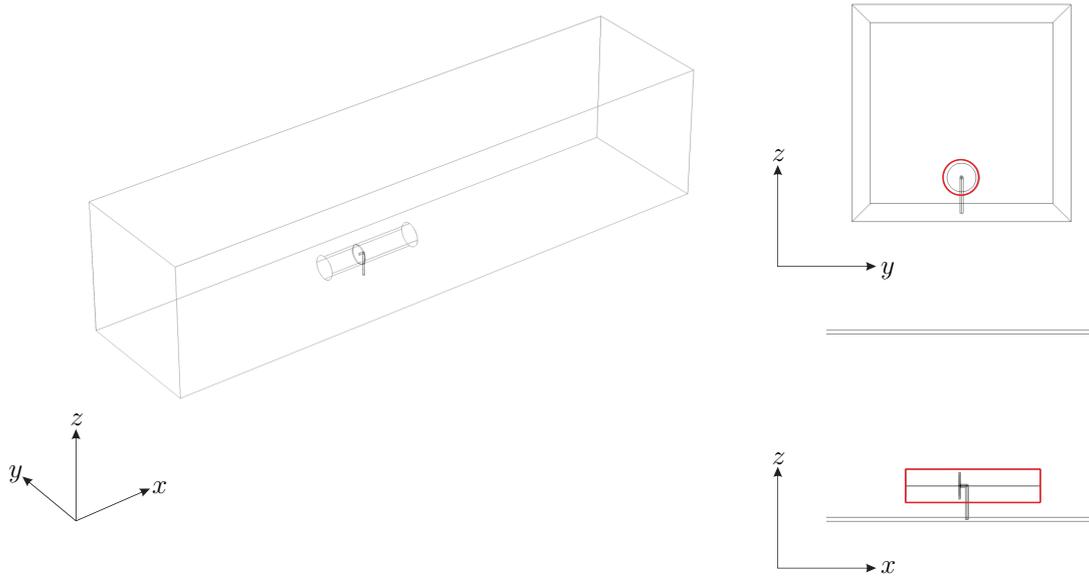


Figura 6.6. Esquema de los cortes transversales y longitudinales de un sistema en 3D.

De esta manera, se genera la Fig. 6.7 b), en donde se muestra que los porcentajes de error aún para longitudes de $r_{0,x} = 14$ no satisfacen la tolerancia impuesta del 10% de error relativo, estando por arriba del 60%. Así mismo, en la Fig. 6.7 c), se presentan los cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para cada longitud de $r_{0,x}$. En dicha figura se observa que el mínimo valor que puede tener J_{xxxx}^* es uno cuando éste captura sólo la zona del fluido libre, es decir, sin aerogenerador. Posteriormente, van tendiendo a un valor aproximadamente del 50% más que en la entrada, cuando la longitud de $r_{0,x} = 4$. De modo que, cuando la longitud de $r_{0,x}$ aumenta, la información de los cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* se difumina, representando una aportación del 10% con respecto al fluido libre. Para determinar, la longitud de $r_{0,x}$ adecuada, en la Fig. 6.7 d) se muestra que los porcentajes de error relativo entre cada valor de \bar{J}_{xxxx}^* y la asíntota de la función logística, están por debajo de la tolerancia para longitudes de $r_{0,x} = 12, 14$.

Si bien, se logró una convergencia en los cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* , para una longitud de $r_{0,x} = 12$. Para el coeficiente H_{xx}^{*-1} aún se está lejos de la convergencia. Esto último, se debe a la capa limite generada en la parte superior del aerogenerador, en donde la información de éste se encuentra fuera de la región comprendida por $r_{0,x}$ [ver Fig. 6.8 a)].

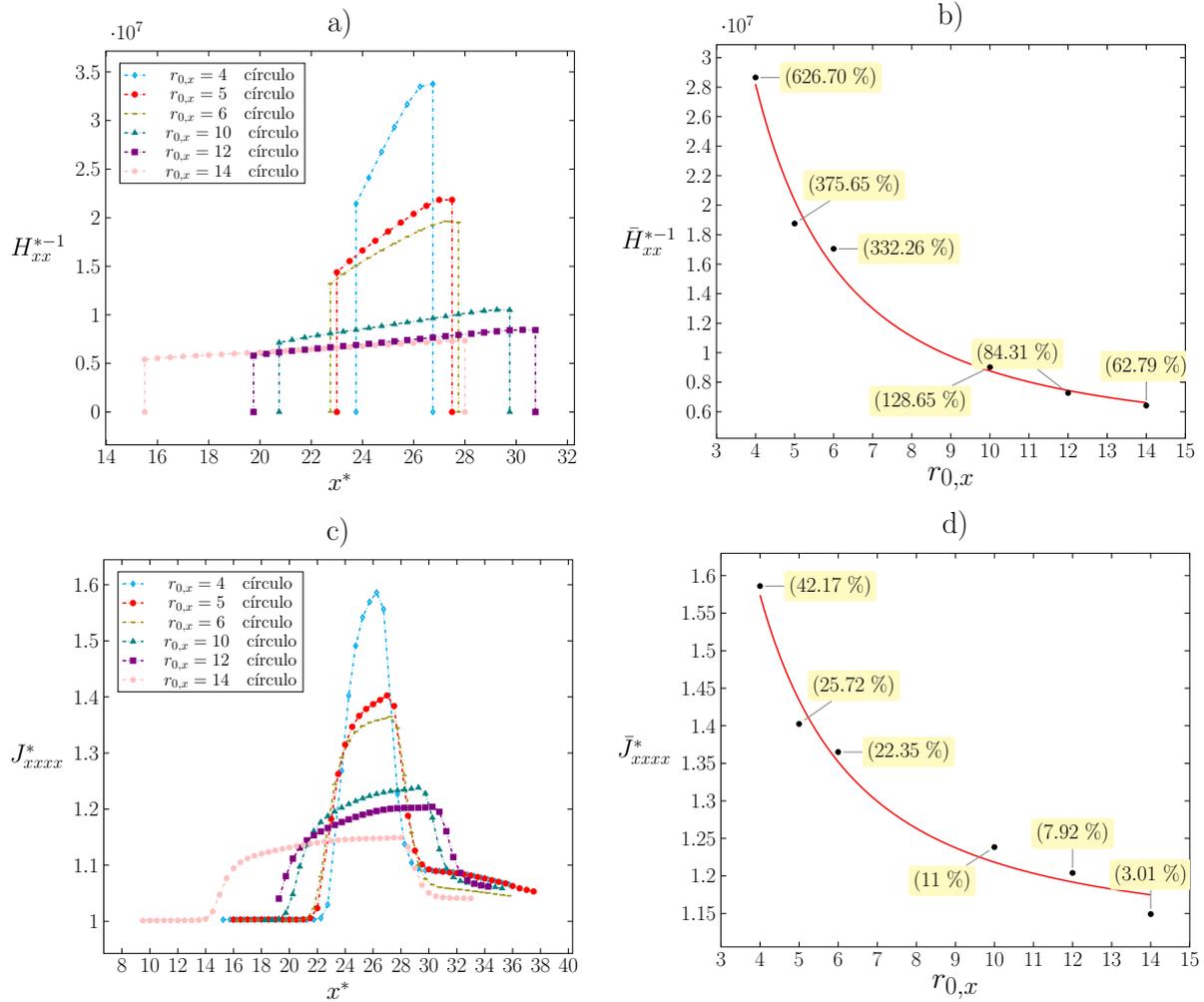


Figura 6.7. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para regiones de promediado $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 5$. Considerando un sistema de longitudes $L_y = 20, L_z = 20$ y $L_x = 40$.

Por tal motivo, se sugiere un cambio en la geometría de la sección transversal de la región de promediado que contenga la información de la capa límite, mediante una elipse, como se muestra en la Fig. 6.8 b). Con esta nueva propuesta se determinaron los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo para longitudes de $r_{0,x} = 4, 5, 6, 10, 12, 14$ como se muestran en la Fig. 6.9. El análisis para determinar la longitud de $r_{0,x}$ es equivalente al realizado en el análisis anterior. No obstante, en las fig. 6.9 b) y d) se muestra que ambos coeficientes logran una convergencia para una longitud de $r_{0,x} = 14$ con un error relativo por debajo del 10%.

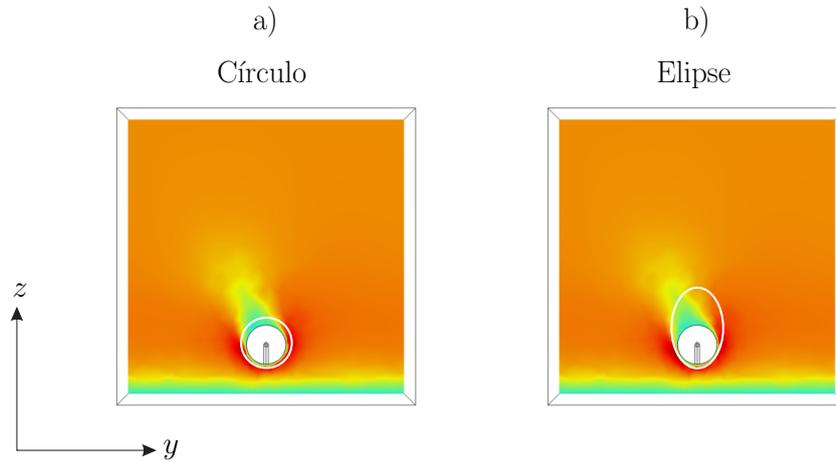


Figura 6.8. Propuestas de la sección transversal de la región de promediado: a) Sección transversal circular, b) Sección transversal de elipse. Como puede apreciarse en el caso b) la capa límite de velocidades es mayormente capturada.

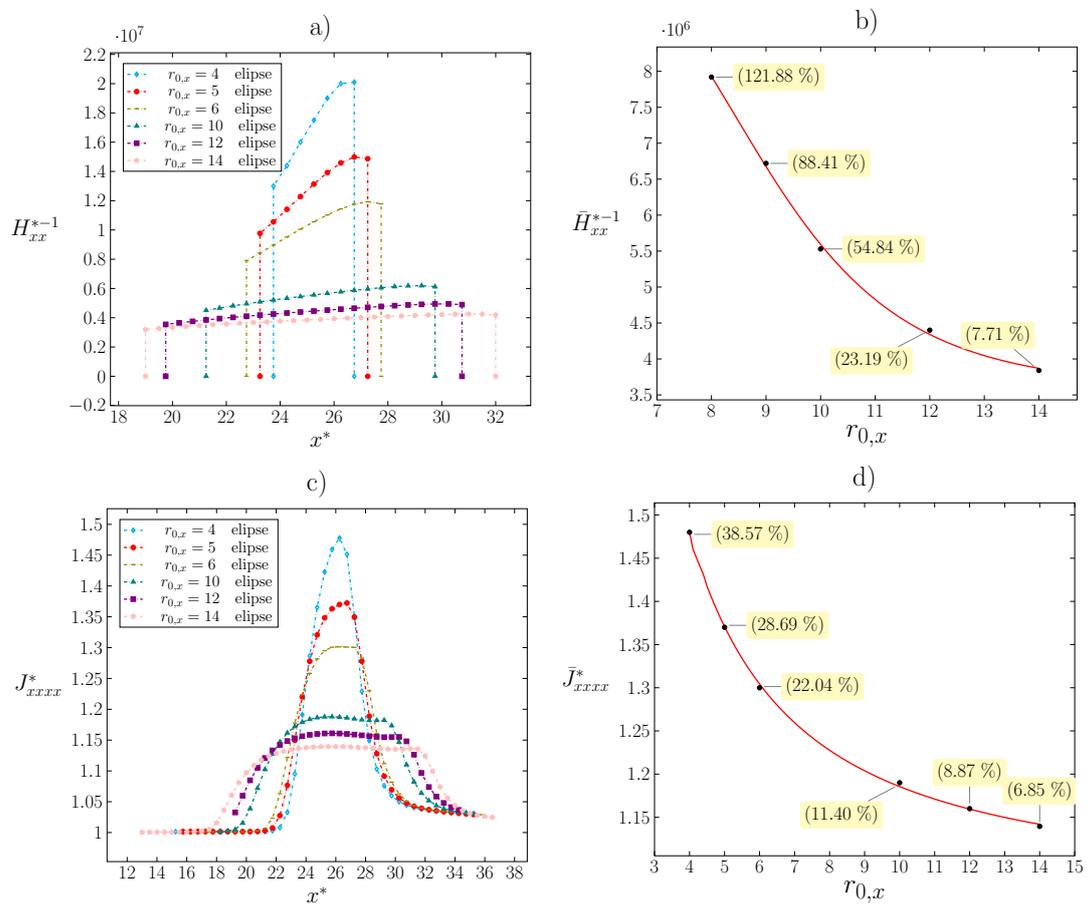


Figura 6.9. a) Cambios espaciales del coeficiente H_{xx}^{*-1} para regiones de promediado $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Cambios espaciales del coeficiente J_{xxxx}^* para $r_{0,x} = 10.5, 11.5, 12.5$ con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. Considerando un sistema de longitudes $L_y = 20, L_z = 20$ y $L_x = 40$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

De esta forma, las funciones que describen los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo \mathbf{H}^{-1} y \mathbf{J} en la dirección x , se presentan en las tablas 6.1 y 6.2, respectivamente. Cabe mencionar que para ambos coeficientes el coeficiente de correlación de las funciones utilizadas estuvo por encima de 0.99. En el caso específico del coeficiente \mathbf{J} , se reporta la función generada por $\langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta|_{\mathbf{x}}$, ya que \mathbf{J} es la suma de los esfuerzos inerciales en el fluido libre (es decir, sin aerogenerador) más los esfuerzos inerciales producidos por el efecto del aerogenerador:

$$\mathbf{J} = \mathbf{II} + \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

Tabla 6.1. Función del coeficiente H_{xx}^{*-1} con sus respectivos valores.

H_{xx}^{*-1}			
$f = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$			
$A = 1.57361 \times 10^6$	$B = 474.31198$	$C = 7380.96835$	$D = -149.56544$

Tabla 6.2. Función del coeficiente J_{xxxx}^* con sus respectivos valores, antes durante y después del aerogenerador.

$J_{xxxx}^* - 1$		
Antes	Durante	Después
$f_1 = A_1 e^{\frac{-x}{t_1}} + y_0$	$f_2 = A_2 + B_2 x + C_2 x^2 + D_2 x^3$	$f_3 = A_3 + B_3 x + C_3 x^2 + D_3 x^3$
$A_1 = 6.51464 \times 10^{-13}$	$A_2 = -2.61702$	$A_3 = 50.03451$
$t_1 = -0.7515$	$B_2 = 0.30085$	$B_3 = -4.1037$
$y_0 = -1.41447 \times 10^{-4}$	$C_2 = -0.01085$	$C_3 = 0.11227$
	$D_2 = 1.29188 \times 10^{-4}$	$D_3 = -0.00102$

6.3. Resumen de resultados

Este capítulo se dividió en dos partes, en la primera se validaron las dimensiones del sistema en 3D, a partir del cálculo de los coeficientes de medio efectivo para longitudes cercanas a las obtenidas en 2D. Con ello, se redujo el número de grados de libertad, por lo que en la segunda parte se realizó un análisis para determinar el tamaño y geometría de la región de promediado. Dicho análisis se llevó a cabo mediante el cálculo de los coeficientes de medio efectivo a lo largo del sistema en la dirección x . Los resultados mostraron que, para un sistema de longitudes $L_x = 60$, $L_y = 14$ y $L_z = 14$, las dimensiones de la región de promediado son $r_{0,x} = 14$ con una sección transversal de una elipse. Esto último demuestra la importancia de los esfuerzos

viscosos alrededor del aerogenerador que dan lugar a la capa límite. Además, se halló que la interacción del piso afecta al desarrollo de ésta, provocando una aceleración en la parte superior del aerogenerador a casi el doble de la velocidad de entrada. Por último, se determinaron las funciones encargadas de capturar las características esenciales del aerogenerador para los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxxx}^* que serán fundamentales para la solución del modelo macroscópico y su validación en el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Validación del modelo macroscópico

En este capítulo se realiza la validación del modelo macroscópico mediante su comparación con simulaciones numéricas directas. Los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo en el modelo macroscópico son predichos mediante las funciones de ajuste encontradas en el capítulo anterior. Cabe mencionar que el análisis no se restringe únicamente al tamaño y geometría idónea de la región de promediado encontrada anteriormente (sección transversal en forma de elipse); sino que, además, se comparan los resultados provenientes de considerar una región de promediado de sección transversal circular. Para llevar a cabo lo antes mencionado, se resuelve numéricamente el modelo macroscópico deducido en el Capítulo 4:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right)}_{\text{esfuerzos inerciales}} &= \underbrace{-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} \\
 + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1ra corrección de Brinkman}} &+ \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right)}_{\text{2da corrección de Brinkman}} - \underbrace{\varepsilon_\beta \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{Darcy-Forchheimer}} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera, las cuales son idénticas a las usadas para determinar los coeficientes de medio efectivo [ver Fig. 7.1].

$$\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle = v_{\beta, in}^* \mathbf{n}_e \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta e} \quad (7.2a)$$

$$\langle p_\beta^* \rangle \mathbf{n}_s = p_{atm}^* \mathbf{n}_s \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta s} \quad (7.2b)$$

$$\mathbf{n}_{AL} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta AL} \quad (7.2c)$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta p} \quad (7.2d)$$

Cabe recordar que la deducción del modelo macroscópico así como la deducción de los coeficientes de medio efectivo, se realizó con el fin de modelar al dominio del sistema como una región homogénea. Lo que implica que no haya aerogenerador y que en su lugar se le describa mediante la información de los coeficientes de medio efectivo. Por tal motivo, en la Fig. 7.1 se muestra sólo una parte del poste del aerogenerador, misma que no capturaron los coeficientes de medio efectivo en el análisis del capítulo anterior.

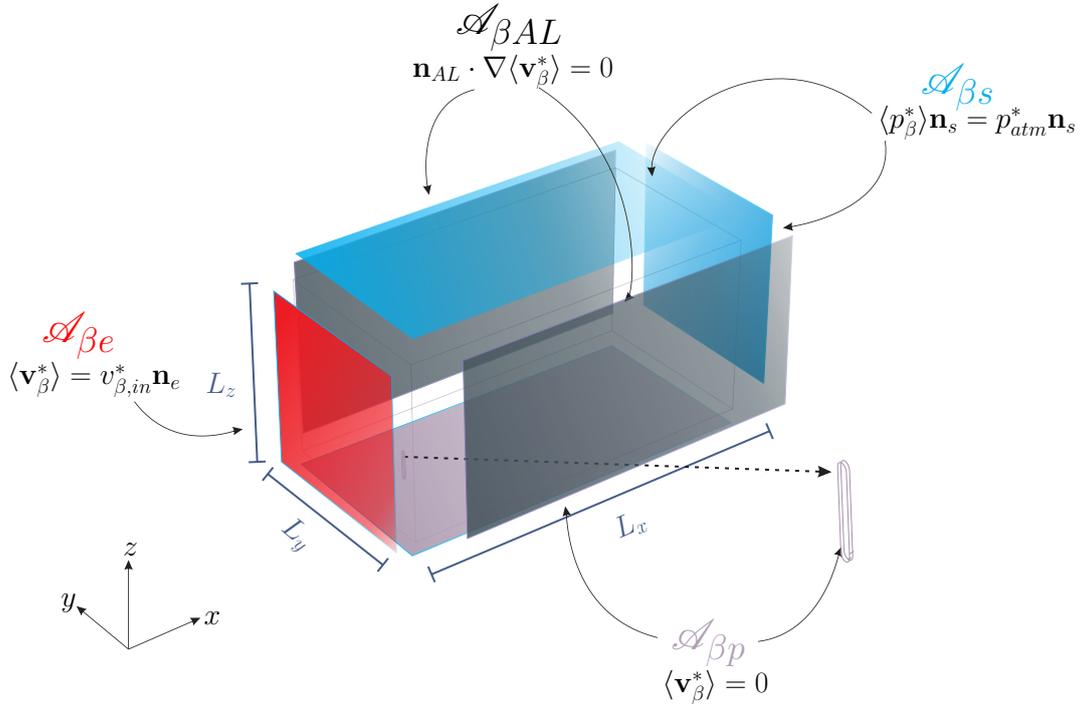


Figura 7.1. Representación de las condiciones de frontera para un sistema en 3D, desde un enfoque macroscópico sin aerogenerador.

Antes de resolver el problema macroscópico, éste se hace adimensional respetando las definiciones adimensionales usadas para las condiciones de frontera:

$$p_\beta^* = \frac{\ell_{RP\beta}}{\mu_\beta v_{\beta,in}}; \quad v_\beta^* = \frac{v_\beta}{v_{\beta,in}}; \quad \text{Re} = \frac{\rho_\beta \ell_R v_{\beta,in}}{\mu_\beta} \quad (7.3)$$

Para tener orden en el desarrollo de la ecuación macroscópica adimensional, se trata la ecuación por partes. Enseguida se desarrolla el lado izquierdo de la Ec. (7.1), partiéndolo acorde la

siguiente definición:

$$\mathbf{J} = \mathbf{II} + \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.4)$$

resultando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) &= \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \\ &+ \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Desarrollando el primer término del lado derecho de la ecuación de arriba, se tiene:

$$\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) = \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \quad (7.6)$$

haciendo uso de la ecuación de continuidad, la Ec. (7.6) se reduce a:

$$\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) = \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.7)$$

Además, pasando los promedios de la velocidad intrínseca a promedios superficiales, mediante la siguiente expresión:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.8)$$

y sustituyendo el resultado de la Ec. (7.7) en la Ec. (7.5), resulta:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) &= \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \\ &+ \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

De la misma forma, del lado derecho de la Ec. (7.1), se transforma el promedio intrínseco de la

velocidad al promedio superficial, dando lugar a:

$$\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mu_\beta \nabla^2 \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \quad (7.10a)$$

$$\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left[\nabla \varepsilon_\beta \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right] \quad (7.10b)$$

$$-\varepsilon_\beta \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.10c)$$

Finalmente, sustituyendo las ecs.(7.9), (7.10a)-(7.10c) en la Ec. (7.1), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\ &+ \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left[\nabla \varepsilon_\beta \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right] - \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} - \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

sobre esta ecuación se usan las relaciones adimensionales dadas por la Ec. (7.3). Sin embargo, es razonable suponer que los cambios de la fracción volumétrica ε_β a lo largo del sistema macroscópico son una función constante ya que dichos valores son cercanos a la unidad. Por tal motivo, la Ec. (7.11) se reduce a:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \\ &- \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} - \rho_\beta \left(\nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Finalmente, la ecuación macroscópica adimensional puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} Re \langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla^* \langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} &= -\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla^{*2} \left(\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\ &- \mathbf{H}^{*-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} - Re \left(\nabla^* \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{M}^{*T} \mathbf{M}^* \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

en donde $\mathbf{H}^{*-1} = \ell_R^2 \mathbf{H}^{-1}$. La Ec. (7.13) con sus condiciones de frontera (ecs. 7.2) se resolvió para un sistema de longitudes $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, una región de promediado $r_{0,x} = 14$ y con sección transversal elíptica. Además la ecuación macroscópica se resolvió para números de Reynolds del orden de 10^8 . Ya que este orden de magnitud indica turbulencia, el modelo se resolvió usando el modelo de turbulencia SST del programa COMSOL Multiphysics.

Por otro lado, los valores de los coeficientes de medio efectivo se usaron de las tablas reportadas en el capítulo anterior (tablas 6.1 y 6.2). En la Fig. 7.2 a) se muestra el campo de velocidades puntual. En dicha figura se ha resaltado la región en donde se calcularon los coeficientes de medio efectivo. Dicha zona es igual para la solución del modelo macroscópico, ya que el aerogenerador se sustituye por la información que capturaron los coeficientes del de medio efectivo. A pesar de que visualmente los campos de velocidad no son parecidos entre si, se busca con el escalamiento que los coeficientes de medio efectivo sean capaces de capturar en promedio la información contenida en los perfiles de velocidad puntual. Para probar lo anterior, se calculan los promedios de la velocidad puntual de las simulaciones numéricas directas y la velocidad promedio del modelo macroscópico [ver Fig. 7.3]. Al calcular los porcentajes de error relativo entre ambas curvas, se observa que los errores entre ambos modelos están por debajo del 10%.

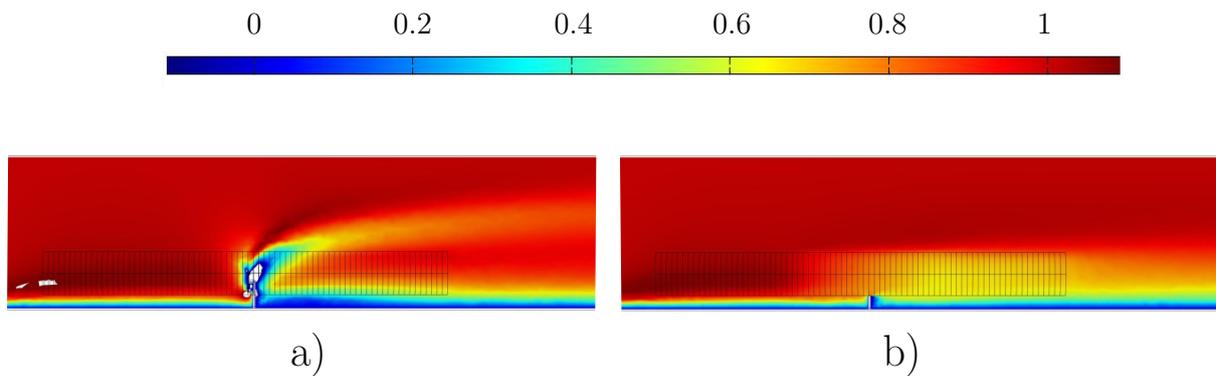


Figura 7.2. a) Componente x de la velocidad puntual \mathbf{v}_β . b) Componente x de la velocidad macroscópica $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$. Ambos para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y una región de promediado de longitud $r_{0,x} = 14$.

Además de lo anterior, se quiso explorar diferentes longitudes de regiones de promediado para secciones transversales de elipse, círculo y la combinación entre ambas¹. La razón de ello, es observar el comportamiento de los perfiles de la velocidad del modelo macroscópico con respecto a la puntual alrededor del aerogenerador. Los resultados de este análisis se muestran en la Fig. 7.4, en donde se muestran los porcentajes de error relativo entre el DNS y el modelo macroscópico, para las regiones antes, durante y después del aerogenerador. Se observó que, efectivamente, una región de promediado cuya sección transversal es elíptica captura de manera

¹En este caso, se combinaron círculos y elipses alrededor del aerogenerador. De manera que, los círculos se colocaron antes y durante el aerogenerador y a la salida de éste se colocaron elipses. Esto con el fin de capturar la capa límite generada a la salida.

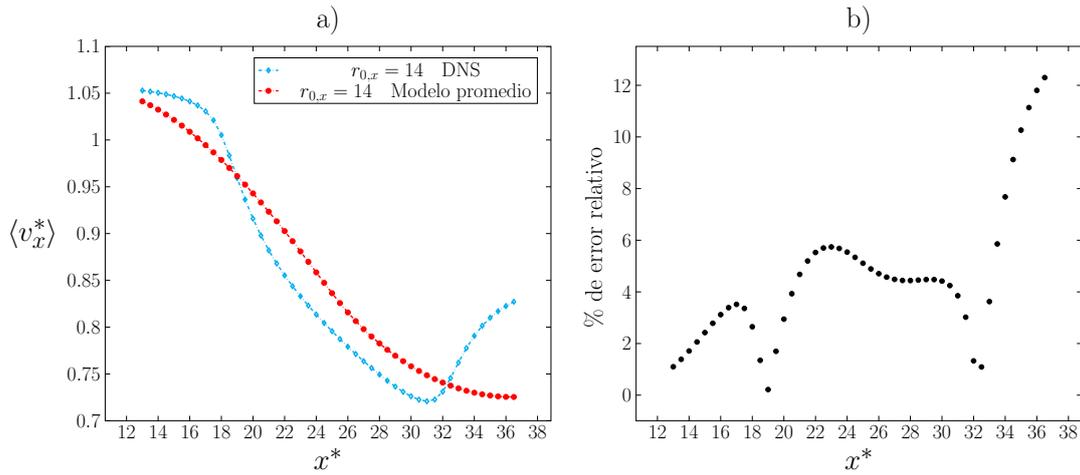


Figura 7.3. a) Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y una longitud de $r_{0,x} = 14$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. b) Porcentajes de error relativo entre los promedios obtenidos mediante las DNS y la solución del modelo macroscópico. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

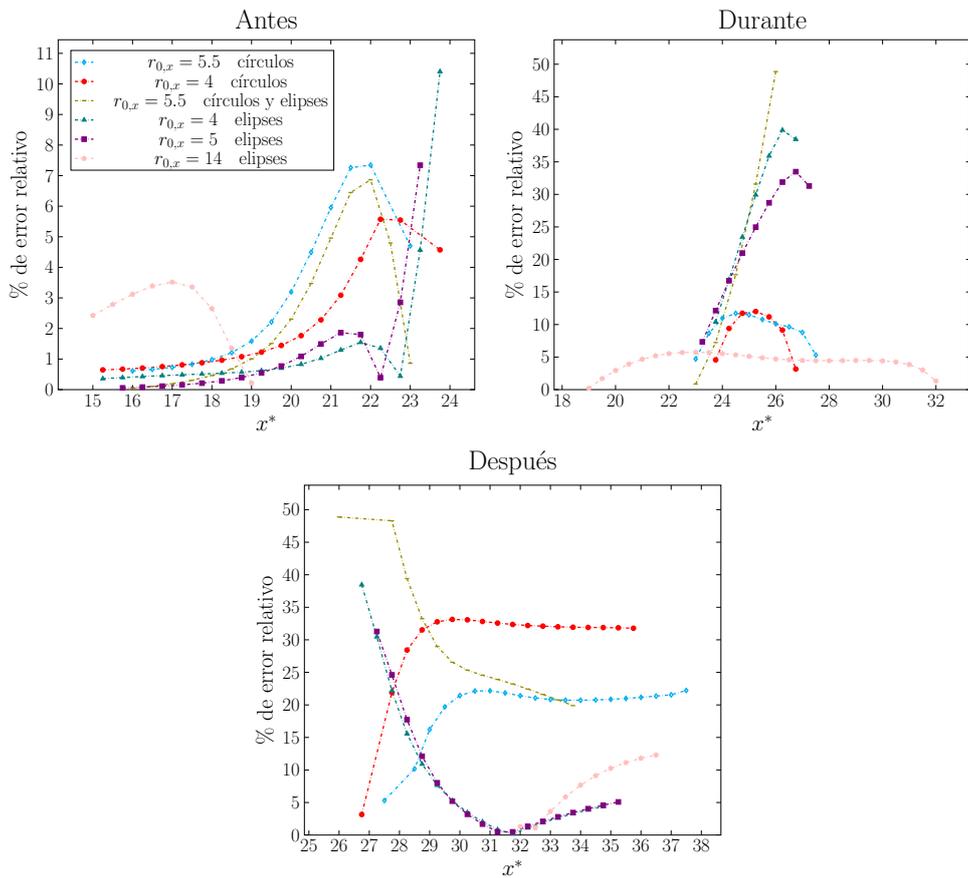


Figura 7.4. Porcentajes de error relativo entre perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

más adecuada las características esenciales del transporte de cantidad de movimiento alrededor de un aerogenerador. Así mismo, se añaden las figuras de la comparación entre el DNS y el modelo macroscópico para regiones de promediado con la sección transversal de un círculo, que demuestran las marcadas diferencias entre el DNS y el modelo macroscópico, especialmente durante y a la salida del aerogenerador [ver Fig. 7.5]. De igual modo, en la Fig. 7.6 se presenta la comparación entre el DNS y el modelo macroscópico para elipses. Específicamente, a partir de la Fig. 7.6 d), las diferencias entre el DNS y el modelo macroscópico comienzan a reducirse apreciablemente. Esto motiva a pensar que, si la dimensión de la región de promediado se hace más grande, se llegará al punto en el que ambas gráficas no tengan errores entre si. Sin embargo, observando los valores de los promedios de la velocidad, esto sólo pasará si el promedio de la velocidad tiende a 1, lo cual ya no representa el efecto del aerogenerador sobre los perfiles de velocidad. De lo anterior se puede concluir que el tamaño y forma de la región de promediado propuestas en el capítulo anterior son las más adecuadas de las alternativas exploradas en este trabajo en función de su comparación con simulaciones numéricas directas. Cabe agregar que este tipo de comparación es tan sólo el primer paso de la validación del modelo macroscópico y no excluye la necesidad de llevar a cabo comparaciones con datos experimentales. Los resultados de este capítulo y el anterior permiten responder de forma positiva a la pregunta de investigación formulada en el Capítulo 2.

Círculo

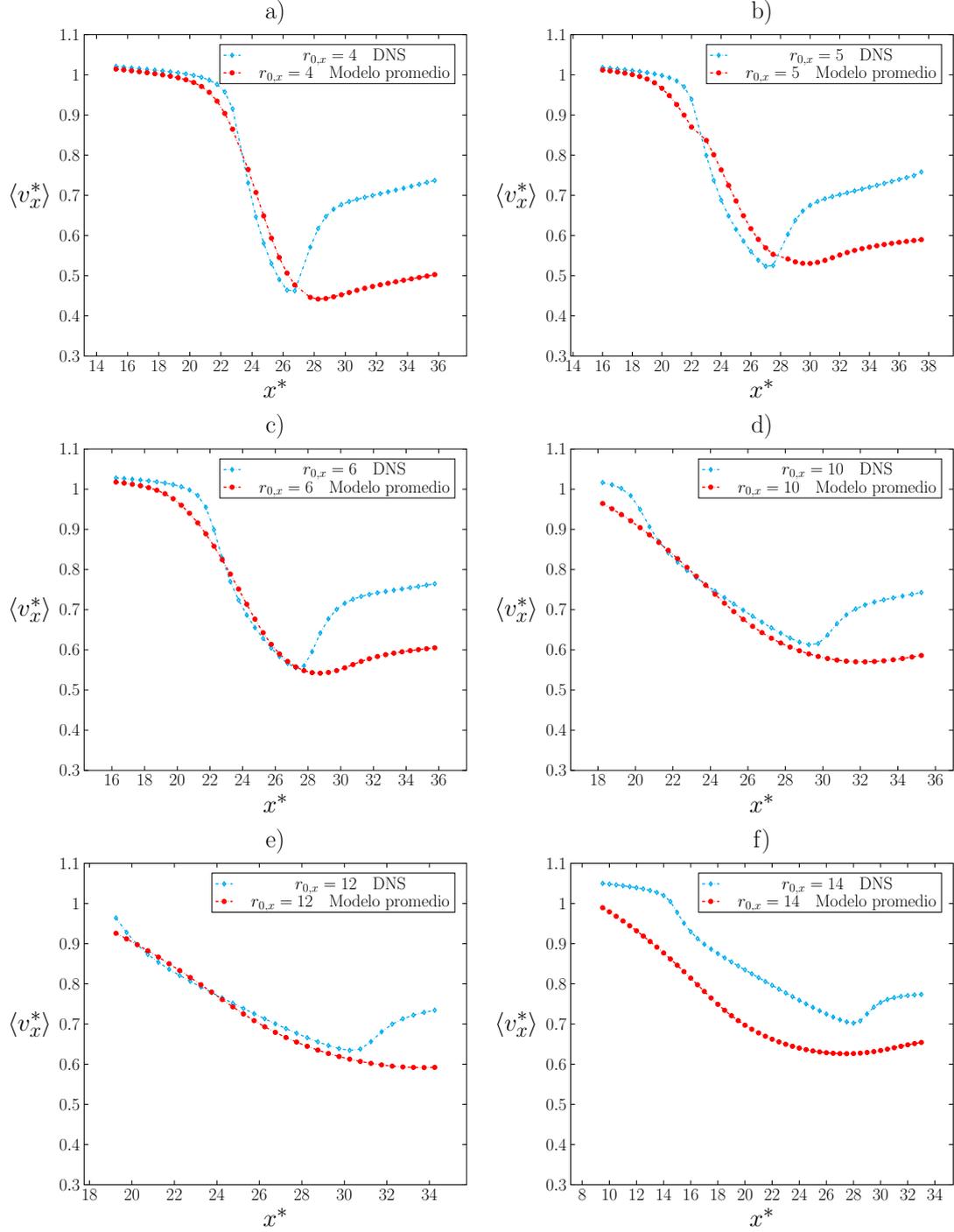


Figura 7.5. Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de un círculo y diferentes $r_{0,x}$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. x^* indica la posición del centroide de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

Elipse

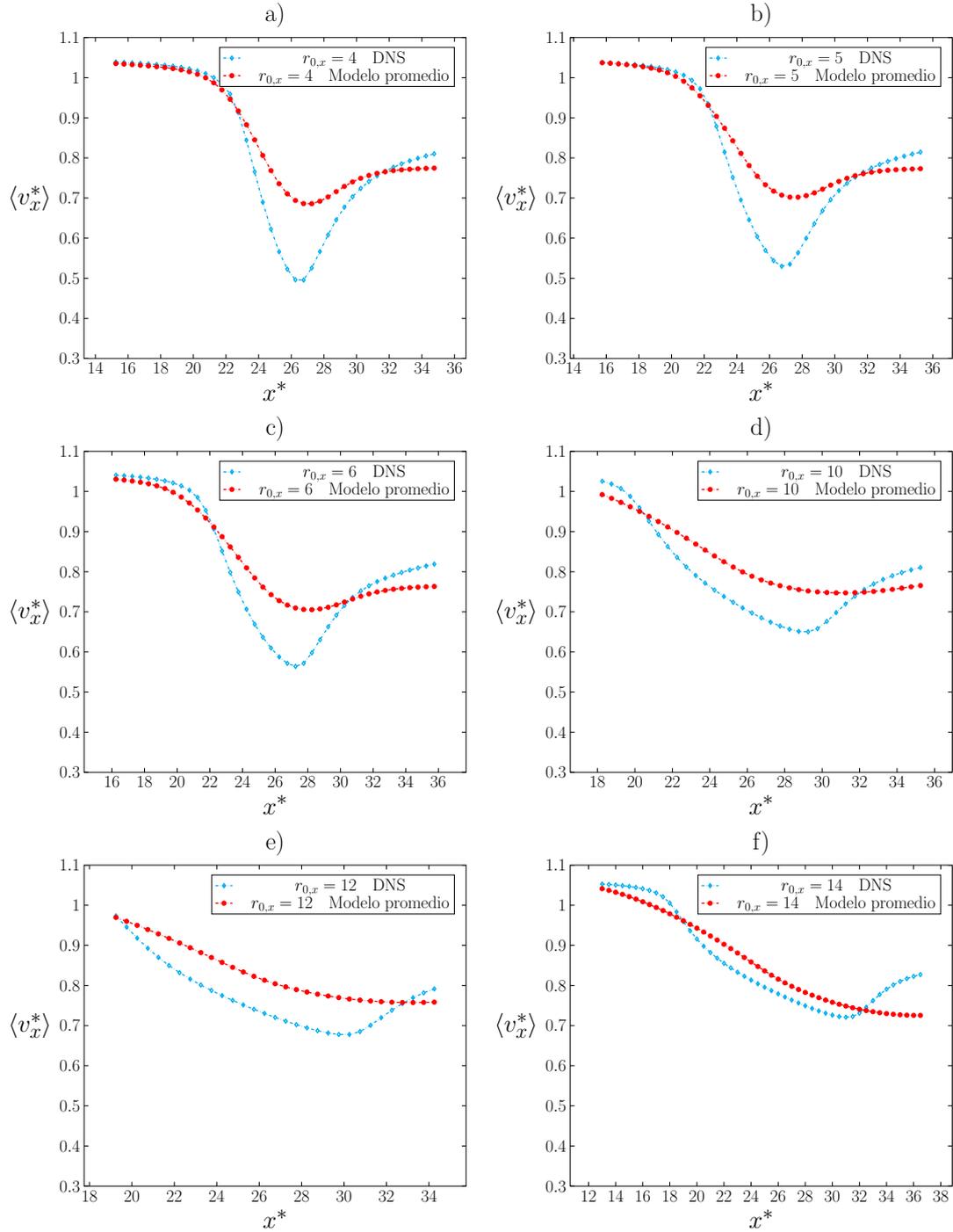


Figura 7.6. Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante DNS y la solución del modelo macroscópico para un sistema de dimensiones $L_x = 60$, $L_y = 14$, $L_z = 14$, con sección transversal de una elipse y diferentes $r_{0,x}$. Con el aerogenerador ubicado en $x^* = 25$. x^* indica la posición del centrode de la región de promediado $r_{0,x}$ a lo largo de la dirección x .

Conclusiones

En este trabajo se dedujo un modelo macroscópico de un sólo dominio para un sistema que incluye un aerogenerador. Además, se llevaron a cabo simulaciones numéricas en dos dimensiones para determinar las dimensiones de un sistema en tres dimensiones. Así mismo, se realizó un análisis para determinar la forma y tamaño de la región de promediado para calcular los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo asociados en el modelo macroscópico. Los principales resultados de este trabajo se listan enseguida:

- Un modelo de un sólo dominio permite capturar las características esenciales del transporte de cantidad de movimiento en un aerogenerador.
- Dicho modelo es válido para un sistema bajo las siguiente restricción de escala: $\ell_\beta \ll r_0 \ll L$.
- La nueva metodología basada en simulaciones numéricas directas, permitió calcular los coeficientes de medio efectivo. Los cuales se identificaron como **H** y **J**. El primero engloba, en general, los esfuerzos viscosos; el segundo engloba, en general, los esfuerzos inerciales.
- En un sistema en 2D, el cálculo de los coeficientes de medio efectivo expuso que **H** determina las mínimas dimensiones que debe tener el sistema para ser representativo. Ya que éste representa una función escalonada y simétrica alrededor del aerogenerador. Esto se debe a que dicho coeficiente es la combinación entre los efectos producidos meramente por la geometría, recuperando la ley de Darcy; y por los efectos inerciales expresados por el coeficiente de Forchheimer.
- Así mismo, se halló que el coeficiente **J** determina las máximas dimensiones que debe tener el sistema, representando una función suave que decae lentamente a la salida del

aerogenerador. Esto se debe a que dicho coeficiente representa, en su mayoría, los esfuerzos inerciales macroscópicos.

- Se observó que para el plano zx , la longitud L_z debe relacionarse de alguna manera con los efectos atmosféricos que ocurren a esas alturas.
- Las dimensiones halladas en un sistema en 2D, permitieron esbozar un sistema en 3D. En él se identificó el efecto estela mediante los esfuerzos inerciales. Dicho efecto, tiene presencia en el sistema bi-dimensional, hasta seis veces la distancia de entrada.
- Esto último sienta las bases para el dimensionamiento de un túnel de viento. Ya que se determinaron las dimensiones que debe tener el sistema para que las condiciones de frontera no afecten el desarrollo de los perfiles de velocidad alrededor del aerogenerador.
- Además, el cálculo de los coeficientes de medio efectivo permitió definir la forma y tamaño adecuado de la región de promediado. Tomando en cuenta la capa límite generada alrededor del aerogenerador, se propuso que la región de promediado fuera un prisma de sección transversal elíptica.
- Por último, el modelo macroscópico es una representación válida del transporte de cantidad de movimiento en la micro escala con un porcentaje de error relativo a simulaciones numéricas directas, menor al 10 %. Estos resultados, sólo pudieron obtenerse con la configuración geométrica descrita en el punto anterior.

Cabe recalcar que la validez del modelo desarrollado está sujeto a las siguientes suposiciones y restricciones de escala:

1. Fluido newtoniano e incompresible
2. Flujo en estado estacionario
3. La velocidad angular multiplicada por el radio de giro del aerogenerador se considera mucho menor a la velocidad del viento.

Con respecto al cálculo de los coeficientes de medio efectivo, en las simulaciones numéricas directas se estableció como parámetro de entrada a la velocidad de giro del aerogenerador, con lo cual indirectamente supone conocer a la potencia de éste. Sin embargo, si se requiere que

la potencia del aerogenerador sea un parámetro de salida, se recurriría a realizar un proceso iterativo en donde se supondrían distintas velocidades de giro del aerogenerador hasta converger a la potencia deseada.

Perspectivas

Con base en los resultados obtenidos, se recomienda se exploren los siguientes puntos como perspectivas del trabajo:

- Tomar en cuenta la rugosidad de la superficie del suelo.
- Determinar el coeficiente de potencia mediante el modelo obtenido y compararlo con datos proporcionados por la literatura, o en el caso de no existir éstos, compararlo con DNS.
- Generar una base de funciones de los coeficientes de medio efectivo según la geometría del perfil alar del aerogenerador.
- Tomar en cuenta la interacción entre la altura del sistema y la capa límite atmosférica.
- Además, los cálculos de este trabajo pueden servir para deducir la condiciones de frontera en el modelo de dos dominios y así estudiar sistemas lo más cercanos a la realidad.

Nomenclatura

\mathcal{A}_{AL}	superficies laterales del sistema
$\mathcal{A}_{\beta e}$	superficie de entrada del sistema
$\mathcal{A}_{\beta p}$	superficie del poste del sistema
$\mathcal{A}_{\beta s}$	superficie de salida del sistema
$\mathcal{A}_{\beta\sigma}$	interface del aerogenerador con el aire
F	tensor de segundo orden de Forchheimer
h	altura del poste del aerogenerador, m
H ⁻¹	tensor de segundo orden Darcy-Forchheimer, m ²
\bar{H}_{xx}^{*-1}	componente xx del tensor adimensional de segundo orden de Darcy-Forchheimer
I	tensor unitario
J	tensor de cuarto orden que agrupa los esfuerzos inerciales
J_{xxxx}^*	componente $xxxx$ del tensor de cuarto orden que agrupa los esfuerzos inerciales
K ⁻¹	tensor de segundo orden de la ley de Darcy, m ⁻²
ℓ_β	longitud característica de la región β , m
ℓ_R	longitud característica del radio de giro del aerogenerador, m
l_a	longitud del álabe del aerogenerador, m
l_g	longitud de la góndola, m
L	longitud característica del sistema macroscópico, m
L_x	longitud del sistema macroscópico en la dirección x , m
L_y	longitud del sistema macroscópico en la dirección y , m
m	vector que representa la variable de cerradura definida en la (4.35), m ⁻¹
m_{xx}^*	componente xx del vector de variable de cerradura previamente definido
M	tensor de segundo orden definido en la Ec.(4.35)
M_{xx}^*	componente xx del tensor de segundo orden previamente definido
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector unitario dirigido de la fase- β a la fase- σ
\mathbf{n}_e	vector unitario en la superficie de entrada
\mathbf{n}_s	vector unitario en la superficie de salida
p_β	presión puntual en la fase- β , Pa

\tilde{p}_β	desviaciones de la presión en la fase- β , Pa
p_β^*	presión adimensional puntual en la fase- β
$p_{\beta,x}^*$	componente x de la presión adimensional puntual en la fase- β
p_{atm}	presión atmosférica, Pa
$\langle p_\beta \rangle _{\mathbf{x}}$	promedio superficial de la presión en la fase- β , Pa
$\langle p_\beta \rangle^\beta _{\mathbf{x}}$	promedio intrínseco de la presión en la fase- β , Pa
r_0	longitud de la región de promediado, m
$r_{0,x}$	longitud de la región de promediado en la dirección x , m
R	radio del aerogenerador, m
$\varsigma_{\beta\sigma}$	vector unitario tangencial dirigido de la fase- β a la fase- σ
\mathcal{V}_β	volumen promediante a la escala macroscópica
V_β	volumen de la fase- β contenido en el volumen promediante, m ³
V	volumen promediante total, m ³
\mathbf{v}_β	vector de velocidad en la fase- β , $\frac{m}{s}$
$\tilde{\mathbf{v}}_\beta$	desviaciones del vector velocidad en la fase- β , $\frac{m}{s}$
\mathbf{v}_β^*	vector de velocidad adimensional en la fase- β
$v_{\beta,x}^*$	componente x de la velocidad adimensional en la fase fase- β
$v_{\beta,in}$	velocidad de entrada en la fase- β , $\frac{m}{s}$
v_ω	velocidad de giro del aerogenerador, $\frac{m}{s}$
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle _{\mathbf{x}}$	promedio superficial del vector velocidad, $\frac{m}{s}$
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta _{\mathbf{x}}$	promedio intrínseco del vector velocidad, $\frac{m}{s}$

Letras griegas

β	fase correspondiente al aire
ε_β	fracción volumétrica correspondiente a la fase- β
μ_β	coeficiente de viscosidad de la fase- β , Pa·s
ψ	función indicadora de cantidades puntuales en la fase- β , $\frac{m}{s}$ o Pa
ρ_β	densidad en la fase- β , $\frac{m}{m^3}$
σ	fase correspondiente al obstáculo

Referencias

- Ackermann, T. (2005). *Wind Power in Power Systems*. John Wiley and Sons, Ltd, Inglaterra.
- Akhmatov, V. (2003a). *Analysis of Dynamic Behaviour of Electric Power Systems with Large Amount of Wind Power*. Tesis de maestría. Technical University of Denmark. Denmark.
- Akhmatov, V. (2003b). Variable-speed wind turbines with doubly-fed induction generators, part iii: model with the back-to-back converters. *Wind Engineering* **27**, 79–91.
- Arbaláez, D., Lopez, O. (2011). Comparación de Diferentes Modelos de Turbulencia en Aplicaciones Aerodinámicas, en: *VIII CONGRESO COLOMBIANO DE MÉTODOS NUMÉRICOS: Simulación en Ciencias y Aplicaciones Industriales*, Universidad EAFIT.
- Barthelmie, R., Hansen, K., Frnadsen, S., Rathmann, O., Schepers, J., Schlez, W., Phillips, J., Rados, K., Zervos, A., Politis, E., Chaviaropoulos, P. (2009). Modeling and Measuring Flow and Wind Turbine Wakes in Large Wind Farms Offshore. *Wind Energy* **12**, 431–444.
- Bear, J. (1988). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover.
- Beltrán-Rodríguez, L. (2014). Mercado Eólico en México. Planeación del Sector Renovable a Largo Plazo, Secretaria de Energía.
- Betz, A. (1920). Das maximum der theoretisch möglichen ausnutzung des windes durch windmotoren. *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen* **26**, 307–309.
- Bird, R., Stewart, W., Lightfoot, E. (2006). *Transport Phenomena*. Wiley, EUA. segunda edición.
- Blinder, A.S. (1981). Economic policy and the great stagflation. *Academic Press* **24**, 229.

- Boussinesq, J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences XXIII* **1**, 1–680.
- Brewster, J. (1856). Improved self-regulating wind mills. *Scientific American* **11**, 324.
- CENER (2014). Análisis y diseño de aerogeneradores. www.cener.com; consultada en el mes de agosto, 2014.
- Cheney, M. (2001). *Tesla: Man Out of Time*. Simon and Schuster.
- Churchfield, M., Lee, S., Moriarty, P., Martinez, L., Leonardi, S., Vijayakumar, G., Brasseur, J. (2012). Large-Eddy Simulation of Wind-Plant Aerodynamics, en: *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. (AIAA), Nashville, Tennessee.
- Corten, G.P. (2001). *Flow Separation on Wind Turbine Blades*. Tesis de doctorado. Universidad de Utrecht. Neerlandia.
- Cosserat, E. (1909). *Théorie des Corps Déformables*. A. Hermann et Fils, Paris.
- de la Cruz, V., Spanos, T. (1983). Mobilization of oil ganglia. *AIChE Journal* **29**.
- Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, París.
- Derry, T., Williams, T. (1960). Desde la antigüedad hasta 1750. Siglo veintiuno de España editores. capítulo ocho.
- EWEA (2011a). List of operational wind farms end 2010. European Wind Energy Association.
- EWEA (2011b). The european offshore wind industry - key trends and statistics. European Wind Energy Association.
- EWEA (2014). Offshore wind. www.ewea.org/policy-issues/offshore/; consultada el mes de febrero, 2014.
- Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. *Zeitschrift des Verines Deutscher Ingenieure* **45**, 1782–1788.
- Gash, R., Twele, J. (2012). *Wind Power Plants: Fundamentals, Design and Construction*. Springer, Berlin. segunda edición.

- Gipe, P. (1995). *Wind Energy Comes of Age*. Wiley and Sons, USA.
- Glauert, H. (1935). Airplane Propellers. Springer Verlag. capítulo XI, Aerodynamic Theory.
- GOWFD (2014). Global offshore wind farm database. www.4coffshore.com/offshorewind/; consultada el mes de octubre, 2014.
- Gray, W. (1975). A derivation of the equations for multi-phase transport. *Chemical Engineering Science* **30**, 229–233.
- GWEC (2014). Global wind energy council: Wind power. <http://www.gwec.net/windpower-2013-2/>; consultado el mes de octubre, 2014.
- Hansen, C. (1985). *Poul la Cour, grundtvigianer, opfinder og folkeoplyser*. Tesis de maestría. Technical University of Denmark.
- Hansen, M. (2008). *Aerodynamics of Wind Turbines*. Earthscan, U.S.A. second edición.
- Hau, E. (2006). *Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics*. Springer, Alemania. segunda edición.
- Hinze, J. (1975). *Turbulence*. McGrawHill.
- Hong, J., Toloui, M., Chamorro, L., Guala, M., Howard, K., Riley, S., Tucker, J., Sotiropoulos, F. (2014). Natural Snowfall Reveals Large-Scale Flow Structures in the Wake of a 2.5-mw Wind Turbine. *Nature Communications* **5**, 431–444.
- Howes, F., Whitaker, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science* **40**, 1387–1392.
- IIE (2014). Energía eólica. www.iie.org.mx; consultada en el mes de agosto, 2014.
- Ingram, G. (2011). Wind turbine blade analysis using the blade element momentum method. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License.
- Johnson, F. (1855). Improvement in windmills. *Scientific American* **11**, 20.
- Johnson, F. (1856). Improved wind mill. *Scientific American* **11**, 236.

- Josephson, M. (1959). Edison. McGraw Hill, Nueva York. Número OCLC 485621 en ISBN 0070330468, p. 255.
- van Kuik, G. (2007). The Lanchester Betz Joukowski limit. *Wind Energy* **10**, 289–291.
- Kulunk, E. (2011). Fundamental and Advanced Topics in Wind Power. InTech. capítulo Aerodynamics of Wind Turbines.
- LAERFT (2014). Aprovechamiento de Energías Renovables y el Financiamiento de la Transición Energética. Diario Oficial de la Federación.
- Lasseux, D., Abbasian, A., Ahmadi, A. (2011). On the Stationary Macroscopic Inertial Effects for One Phase Flow in Ordered and Disordered Porous Media. *Physics of Fluids* **23**, 1–19.
- Leggett, J. (1996). *El calentamiento del planeta: Informe de green peace*. Fondo de cultura económica. primera edición.
- Leishman, J. (2006). Principles of Helicopter Aerodynamics. Cambridge University Press. segunda edición. p. 751.
- de Lemos, M.J. (2006). *Turbulence in Porous Media: Modeling and Applications*. Elsevier, Gran Bretaña. primera edición.
- Lipovetsky, G. (2000). *El imperio de lo efímero*. Anagrama, París. décima edición.
- Lozano-Cardona, W. (2013). Energías renovables: Unidad de Inteligencia de Negocios. Secretaria de Energía: Pro México Inversión y Comercio.
- Maegaard, P. (2013). The Rise of Modern Wind Energy: Wind Power for the World. Taylor and Francis Group. capítulo siete: From Energy Crisis to Industrial Adventure: A Chronicle.
- Manwell, J., MCGowan, J., Rogers, A. (2009). *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*. Wiley, Great Britain. segunda edición.
- Menter, F. (1994). Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA* **32**, 1598–1605.

- Menter, F., Kuntz, M., Langtry, R. (2003). Ten Years of Industrial Experience with the sst Turbulence Model, en: *Turbulence, Heat and Mass Transfer IV*, International Centre for Heat and Mass Transfer. ICHMT.
- Miloradovic, T. (2014). *Wind in Power: 2013 European Statistics*. Reporte técnico. The European Wind Energy Association.
- Munn, O. (1887). A great windmill. *Scientific American* **24**, 9675.
- NASA (2014). Wind energy. www.nasa.gov; consultada en el mes de agosto, 2014.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and homogeneous fluid - i. theoretical development. *International Journal Heat Mass Transfer* **38**.
- ONU (1986). Declaración sobre el derecho al desarrollo, Organización de las naciones unidas.
- Paéz-García, C. (2012). Simulaciones numéricas directas de la transferencia de cantidad de movimiento en aerogeneradores y su comparación con la teoría de Betz.
- Porter, R. (1867). Improved wind mill. *Scientific American* **16**, 261.
- Porter, R. (1868). Wind wheels: Some of their adaptations. *Scientific American* **18**, 377.
- Prandtl, L. (1925). Investigations on Turbulent Flow. *ZAMM* **5**.
- Quintard, M., Whitaker, S. (1987). Écoulement monophasique en milieu poreux: effet des hétérogénéités locales. *Journal de Mécanique théorique et appliquée* **6**, 691–726.
- REN21 (2014). *Renewables Global Futures Report*. Reporte técnico. Renewable Energy Policy Network for the 21st Century.
- Reynolds, O. (1883). *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous : and of the law of resistance in parallel channels*. Royal Society of London.
- Riso (2014). European wind resources over open sea. www.dtu.dk; consultada el mes de febrero, 2014.

- Rock, M., Parsons, L. (2010). *Environmental and Energy Study Institute: Offshore Wind Energy*.
Reporte técnico. Advancing Innovative Solutions Since 1984.
- Schlichting, H., Gersten, K. (2003). *Boundary-Layer Theory*. Springer, Berlin. octava edición.
- SENER (2014). Prospectivas energéticas. www.sener.gob.mx; consultada en el mes de agosto, 2014.
- Shih, T.H., Liou, W., Shabbir, A., Yang, Z., Zhu, J. (1994). A new k-[epsilon] Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows Model Development and Validation. Institute for Computational Mechanics in Propulsion and Center for Modeling of Turbulence and Transition. Lewis Research Center.
- Slattery, J. (1967). Flow of viscoelastic fluids through porous media. *A.I.Ch.E.J.* **13**, 1066–1071.
- Spalart, P., Allmaras, S. (1992). A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows, en: *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, American Institute of Aeronautics and Astronautics. AIAA. pp. 1–22.
- Tangler, J. (2000). The evolution of rotor and blade design, en: *American Wind Energy Association, WindPower*.
- Taylor, D. (2012). *Renewable Energy: Power for a Sustainable Future*. OXFORD. capítulo siete.
- Tillessen, T. (2010). High demand for wind farm installation vessels. *Hansa International Maritime Journal* **147**, 170–171.
- Valdés-Parada, F., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J. (2009). Computation of Jump Coefficients for Momentum Transfer Between a Porous Medium and a Fluid Using a Closed Generalized Transfer Equation. *Transport Phenomena in Porous Media* **78**, 439–457.
- Whitaker, S. (1968a). Introduction to fluid mechanics. Prentice Hall, Florida. capítulo The Transport Theorem.
- Whitaker, S. (1968b). Introduction to fluid mechanics. Prentice Hall, Florida. capítulo Turbulent Flow.

- Whitaker, S. (1996). The Forchheimer equation: A theoretical development. *Transport Phenomena in Porous Media* **25**, 27–61.
- Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publisher, U.S.A.
- Willow, C., Valpy, B. (2011). Offshore Wind: Forecasts of future costs. BVG Associates for Renewable UK.
- Winter, J. (1987). *Wasserstoff als Energieträger*. Springer-Verlag.
- Wood, B. (2009). Taylor-Aris dispersion an explicit example for understanding multiscale analysis via volume averaging. *Chemical Engineering Education* **43**, 29–38.
- WPED (2010). Wind Power: Engineering and Development. www.windpowerengineering.com/; consultado el mes de Abril, 2014.

Apéndice A

En este apéndice se realiza un estimado de órdenes de magnitud de la ecuación macroscópica cerrada, tomando en cuenta la solución formal de las desviaciones. El objetivo es determinar las circunstancias bajo las cuales es razonable despreciar los últimos términos de dicha solución, que están asociados a la velocidad de giro del aerogenerador v_ω . Para ello, se comienza sustituyendo la solución formal, dada por las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{s}v_\omega \quad (\text{A-1a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{m} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta r v_\omega \quad (\text{A-1b})$$

en la ecuación macroscópica no cerrada (ver Ec. (4.24)), resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A-2}) \\ + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) &- \varepsilon_\beta \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \\ - \rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \left\langle \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \mathbf{s}v_\omega + \mathbf{s}v_\omega \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{s}v_\omega \mathbf{s}v_\omega \right\rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) & \\ + \frac{\mu_\beta v_\omega}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-r\mathbf{l} + \nabla \mathbf{s}) dA & \end{aligned}$$

Para comenzar a realizar el estimado de órdenes de magnitud, enseguida se muestran los problemas de cerradura que satisfacen a las variables de cerradura \mathbf{M} , \mathbf{m} y \mathbf{s} , r , respectivamente:

Problema de cerradura para \mathbf{M} , \mathbf{m}

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (\text{A-3a})$$

$$\frac{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta}{\mu_\beta} \cdot \nabla \mathbf{M} = -\nabla \mathbf{m} + \nabla^2 \mathbf{M} + \varepsilon_\beta \mathbf{H}^{-1} \quad (\text{A-3b})$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{l} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A-3c})$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A-3d})$$

$$\langle \mathbf{m} \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A-3e})$$

Problema de cerradura para \mathbf{s} , r

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (\text{A-4a})$$

$$\frac{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta}{\mu_\beta} \cdot \nabla \mathbf{s} = -\nabla r + \nabla^2 \mathbf{s} - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-r \mathbf{l} + \nabla \mathbf{s}) dA \quad (\text{A-4b})$$

$$\zeta_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{s} = 1 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A-4c})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A-4d})$$

$$\langle \mathbf{s} \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A-4e})$$

$$\langle r \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A-4f})$$

De las ecs. (A-3) y (A-4), se puede estimar que el orden de magnitud de las variables de cerradura \mathbf{M} y \mathbf{s} es $\mathbf{O}(1)$. Así mismo, se estima que el orden de magnitud de \mathbf{m} y r es $\mathbf{O}(\ell_\beta^{-1})$. Con esto en mente, se realiza el estimado de órdenes de magnitud para la Ec. A-2; además, se toma en cuenta que:

$$\mathbf{J} = \mathbf{II} + \langle \mathbf{M}^T \mathbf{M} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A-5})$$

por lo que el orden de magnitud de \mathbf{J} es $\mathbf{O}(1)$. Así, el lado izquierdo de la Ec. (A-2) queda de la siguiente forma:

$$\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \quad (\text{A-6})$$

Así mismo, el lado derecho de la Ec. (A-2), queda como:

$$\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \quad (\text{A-7a})$$

$$\rho_\beta \mathbf{g} = \mathbf{O}(\rho_\beta g) \quad (\text{A-7b})$$

$$\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L^2} \right) \quad (\text{A-7c})$$

$$\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0 L} + \frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0^2} \right) \quad (\text{A-7d})$$

$$\varepsilon_\beta \mu_\beta \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta^2} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{A-7e})$$

$$\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \left\langle \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right|_{\mathbf{x}} \mathbf{s} v_\omega + s \mathbf{v}_\omega \mathbf{M} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{s} v_\omega \mathbf{s} v_\omega \right)^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{L} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{L} + \frac{\rho_\beta v_\omega^2}{L} \right) \quad (\text{A-7f})$$

$$\frac{\mu_\beta v_\omega}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-r \mathbf{l} + \nabla \mathbf{s}) dA = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta v_\omega}{\ell_\beta^2} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{A-7g})$$

Por un lado, comparando el término (A-7g) con (A-7e), suponiendo que (A-7g) \ll (A-7e), se tiene:

$$\mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta v_\omega}{\ell_\beta^2} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{\ell_\beta} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta^2} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{A-8})$$

para que esto suceda, se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$v_\omega \ll \langle v_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A-9})$$

Por otro lado, comparando el término (A-7f) con el término y suponiendo que éste es mucho mayor (A-6):

$$\mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{L} + \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta v_\omega}{L} + \frac{\rho_\beta v_\omega^2}{L} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \quad (\text{A-10})$$

de igual forma, para que esto suceda se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$v_\omega \ll \langle v_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A-11})$$

De hecho, esta es una suposición razonable ya que la velocidad del viento a la entrada del aerogenerador es mucho menor que la velocidad de giro del aerogenerador. Esto es, porque muchas veces la velocidad del viento es tan alta (100 km/hr), que el aerogenerador tiene un dispositivo de seguridad para mantener una velocidad de giro constante.

Apéndice B

En este apéndice se demuestra que de la Ec. (4.46) se puede llegar a la ley de Darcy (1856) o a la ecuación de Forchheimer (1901) para medios porosos. Para ello, se suelen despreciar los esfuerzos inerciales macroscópicos, ya que se considera que no son tan importantes con respecto a los esfuerzos inerciales microscópicos.

Además, en el seno de un medio poroso los cambios espaciales de la fracción volumétrica ε_β son constantes, lo que provoca que la segunda corrección de Brinkman no se tome en cuenta, resultando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 0 = & \underbrace{-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta}_{\text{esfuerzos superficiales}} \Big|_{\mathbf{x}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{1er corrección de Brinkman}} \Big|_{\mathbf{x}} \\
 & - \underbrace{\mu_\beta \mathbf{K}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{ley de Darcy de la permeabilidad}} \Big|_{\mathbf{x}} - \underbrace{\mu_\beta \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{corrección de Forchheimer}} \Big|_{\mathbf{x}}
 \end{aligned} \tag{B-1}$$

en donde se ha usado la Ec. (4.45) para descomponer el coeficiente \mathbf{H}^{-1} en los últimos dos términos de la ecuación. Así mismo, la Ec. (B-1) puede ser re-arreglada de la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{\mathbf{K}^{-1}}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} - \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{1er corrección de Brinkman}} \right) - \underbrace{\mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{corrección de Forchheimer}} \tag{B-2}$$

Finalmente, con base en la restricción de escala $\ell_\beta \ll L$, se desprecia la primera corrección de Brinkman con respecto al promedio superficial de la velocidad, con la finalidad de obtener la ecuación de Forchheimer:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{\mathbf{K}^{-1}}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) - \underbrace{\mathbf{F} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{corrección de Forchheimer}} \tag{B-3}$$

Más aún, si desde la micro-escala se considera que los esfuerzos inerciales son despreciables con respecto a los viscosos, entonces la corrección de Forchheimer no se toma en cuenta en la ecuación macroscópica, y se recupera la ley de Darcy:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{\mathbf{K}^{-1}}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) \tag{B-4}$$

Apéndice C

7.1. Plano xy

Enseguida se describen los pasos para el modelado en el programa COMSOL Multiphysics 4.4. En este programa se resuelven las ecuaciones de cantidad de movimiento que gobiernan el transporte en la micro-escala para un sistema en 2D. en el plano xy .

- Model Wizard

1. Vaya a la ventana **Model Wizard**>**2D**
2. En **Select Physics** elija **Fluid Flow**>**Single-PhaseFlow**>**Turbulent Flow (SST)**, y añadalo.
3. Presione **Study**, escoja **Stationary with Initialization** y presione **Done**.

- Global Definitions

1. Haga click derecho en **Global**>**Definitions** y elija **Parameters**.
2. En la ventana de parameters escriba los siguientes datos:

NAME	EXPRESSION
L_x	10
L_y	5
dx	0.25
n	L_x/dx

- Geometry

Rectángulo 1

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: 4/40 y 80/40 respectivamente.
3. Localice **Position**>**Base** y seleccione **Center**. Posteriormente, inserte los valores: $L_x/2$, $L_y/2$ para x , y respectivamente.
4. Seleccione el botón **Build Selected**.

Rectángulo 2

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: 20/40 y 4.5/40 respectivamente.
3. Localice **Position**>**Base** y seleccione **Corner**. Posteriormente, inserte los valores: $L_x/2 + 4/80$, $L_y/2$ para x , y respectivamente.
4. Seleccione el botón **Build Selected**.

Rectángulo 3

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: dx y L_y respectivamente.
3. Seleccione el botón **Build Selected**.

Arreglo

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Transforms**>**Array**.
2. En **Input** seleccione **r3**.
3. Localice **Size** y en x,y inserte los valores: $n,1$ respectivamente.
4. Localice **Displacement** y en x inserte dx .
5. Seleccione el botón **Build Selected**.

Diferencia

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Boolean and Partitions**;>**Difference**.
2. En **Objects to add** seleccione todos los rectángulos del arreglo, excepto **r1** y **r2**.
3. En **Objects to subtract** , seleccione **Activate Selection** y seleccione los rectángulos **r1** y **r2**.
4. Seleccione el botón **Build All**.

- Flujo turbulento (SST)

1. Vaya a **Turbulent Flow, SST** y localice **Physical Model>Compressibility** y elija **Incompressible Flow**.

Fluid Properties

1. Haga click derecho en **Fluid Properties**, localice **Density**, **Dinamic viscosity** e inserte $1e8$ y 1 respectivamente.

Entrada

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Inlet**.
2. Seleccione únicamente las fronteras **1**.
3. Localice **Velocity** e inserte el valor de 1 .

Salida

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST**, elija **Outlet** y seleccione la frontera **138**.
2. Localice **Pressure Condition** e inserte el valor de $2.01e10$.

Periodic Flow Condition

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST**, elija **Periodic Flow Condition**. Localice **Paste Selection** e introduzca los siguientes valores **2-3, 5-6, 8-9, 11-12, 14-15, 17-18, 20-21, 23-24, 26-27, 29-30, 32-33, 35-36, 38-39, 41-42, 44-45, 47-48, 50-51, 53-54, 56-57, 59-60, 65, 69, 75, 79, 81, 85, 88-89, 91-92, 94-95, 97-98, 100-101, 103-104, 106-107, 109-110, 112-113, 115-116, 118-119, 121-122, 124-125, 127-128, 130-131, 133-134, 136-137**

Pared

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Wall**.
2. Seleccione las fronteras **61, 70 y 72**.
3. Localice **Boundary Condition** y elija **Moving Wall**. En x , y inserte 0 , 0.66 respectivamente.

Pared 2

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Wall**.
 2. Seleccione las fronteras **62, 63,66** y **68**.
 3. Localice **Boundary Condition** y elija **Moving Wall**. En x , y inserte 0.66, 0 respectivamente.
 4. Por último, vaya a **Wall 1** y asegúrese que estén seleccionadas las fronteras **71, 73, 76, 78, 82, 84, 86**.
- Malla
 1. Haga click derecho en **Mesh 1** y elija **Free Triangular**.
 2. Enseguida haga click derecho en **Free Triangular** y active **Element size>Costum**.
 3. Localice **Element Size Parameters** y en **Maximum element size** escriba 0.3.
 - Study 1
 1. Fianlmente haga click derecho en **Study 1** y seleccione **Compute**.

7.2. Plano zx

Enseguida se describen los pasos para el modelado en el programa COMSOL Multiphysics 4.4. En este programa se resuelven las ecuaciones de cantidad de movimiento que gobiernan el transporte en la micro-escala para un sistema en 2D. en el plano zx .

- Model Wizard

1. Vaya a la ventana **Model Wizard**>**2D**
2. En **Select Physics** elija **Fluid Flow**>**Single-PhaseFlow**>**Turbulent Flow (SST)**, y añadalo.
3. Presione **Study**, escoja **Stationary with Initialization** y presione **Done**.

- Global Definitions

1. Haga click derecho en **Global**>**Definitions** y elija **Parameters**.
2. En la ventana de parameters escriba los siguientes datos:

NAME	EXPRESSION
L_x	10
L_z	5
dx	0.25
n	L_x/dx

- Geometry

Rectángulo 1

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: 4/40 y 80/40 respectivamente.
3. Localice **Position**>**Base** y seleccione **Center**. Posteriormente, inserte los valores: $L_x/2$, 2.5-4.5/40+4.5/80 para x , y respectivamente.
4. Seleccione el botón **Build Selected**.

Rectángulo 2

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: 20/40 y 4.5/40 respectivamente.
3. Localice **Position**>**Base** y seleccione **Corner**. Posteriormente, inserte los valores: $L_x/2+4/80$, $2.5-4.5/40$ para x , y respectivamente.
4. Seleccione el botón **Build Selected**.

Rectángulo 3

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: 4.5/40 y 100/40 respectivamente.
3. Localice **Position**>**Base** y seleccione **Corner**. Posteriormente, inserte los valores: $L_x/2+(4/40-4.5/40)/2+20/40$, $100/80$ para x , y respectivamente.
4. Seleccione el botón **Build Selected**.

Rectángulo 4

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Rectangle** .
2. En la ventana **Settings**, localice **Width** y **Height** e inserte los valores: dx y L_z respectivamente.
3. Seleccione el botón **Build Selected**.

Arreglo

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Transforms**>**Array**.
2. En **Input** seleccione **r4**.
3. Localice **Size** y en x,y inserte los valores: n,1 respectivamente.
4. Localice **Displacement** y en x inserte dx.
5. Seleccione el botón **Build Selected**.

Diferencia

1. Haga click derecho en **Geometry** y elija **Boolean and Partitions**¿**Difference**.

2. En **Objects to add** seleccione todos los rectángulos del arreglo, excepto **r1**, **r2** y **r3**.
 3. En **Objects to subtract** , seleccione **Activate Selection** y seleccione los rectángulos **r1**, **r2** y **r3**.
 4. Seleccione el botón **Build All**.
- Flujo turbulento (SST)
 1. Vaya a **Turbulent Flow, SST** y localice **Physical Model>Compressibility** y elija **Incompressible Flow**.

Fluid Properties

1. Haga click derecho en **Fluid Properties**, localice **Density**, **Dinamic viscosity** e inserte $1e8$ y 1 respectivamente.

Entrada

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Inlet**.
2. Seleccione únicamente las fronteras **1**.
3. Localice **Velocity** e inserte el valor de 1 .

Salida

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST**, elija **Outlet** y seleccione las fronteras **[3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 69, 79, 84, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138-139]**
2. Localice **Pressure Condition** e inserte el valor de $2.01e10$.

Periodic Flow Condition

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST**, elija **Periodic Flow Condition**. Localice **Paste Selection** e introduzca los siguientes valores **2-3, 5-6, 8-9, 11-12, 14-15, 17-18, 20-21, 23-24, 26-27, 29-30, 32-33, 35-36, 38-39, 41-42, 44-45, 47-48, 50-51, 53-54, 56-57, 59-60, 65, 69, 75, 79, 81, 85, 88-89, 91-92, 94-95,**

97-98, 100-101, 103-104, 106-107, 109-110, 112-113, 115-116, 118-119,
121-122, 124-125, 127-128, 130-131, 133-134, 136-137

Pared

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Wall**.
2. Seleccione las fronteras **61, 70 y 72**.
3. Localice **Boundary Condition** y elija **Moving Wall**. En x, y inserte 0, 0.66 respectivamente.

Pared 2

1. Haga click derecho en **Turbulent Flow, SST** y elija **Wall**.
2. Seleccione las fronteras **62, 63,66 y 68**.
3. Localice **Boundary Condition** y elija **Moving Wall**. En x, y inserte 0.66, 0 respectivamente.
4. Por último, vaya a **Wall 1** y asegúrese que estén seleccionadas las fronteras [**2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 65, 71, 73, 75-76, 78, 80-81, 83, 85-87, 89, 92, 95, 98, 101, 104, 107, 110, 113, 116, 119, 122, 125, 128, 131, 134, 137**].

■ Malla

1. Haga click derecho en **Mesh 1** y elija **Free Triangular**.
2. Enseguida haga click derecho en **Free Triangular** y active **Element size>Costum**.
3. Localice **Element Size Parameters** y en **Maximum element size** escriba 0.3.

■ Study 1

1. Fianlmente haga click derecho en **Study 1** y seleccione **Compute**.

Apéndice D

Enseguida se muestra el código en Matlab que se desarrolló para el cálculo de los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxx}^* en 2D para el corte xy . En general el programa consiste en encontrar las superficies en las que se dividió el sistema. Una vez calculadas dichas superficies, se especifican las fronteras en las que se ubica el aerogenerador, dependiendo del tamaño del sistema en x . Y por último se calculan la integrales de superficie y de línea. El código para el corte zx sólo cambia en cuanto a las fronteras del obstáculo, las cuales se pueden obtener del programa que se muestra en el Apéndice 7.2.

```
1 clear; close all; clc;
2 format long
3
4 Lx= 20;
5 Ly= 20;
6 dx= 0.25;
7 bx=5;
8
9 lx= 5;
10
11 %model = limpio3por10(Lx, Ly, dx);
12 %model = limpio5por5(Lx, Ly, dx);
13 model = limpio20por5(Lx, Ly, dx);
14
15
16 mphgeom(model);
17
18 ntot = round(Lx/dx+2);
19 nrect= round(bx/dx); % no. de rectángulos en la región de promediado
20
21 n=nrect+3; % no. de centroides
22
23
24 pivote = round(lx/dx); %el primer rectángulo donde está el obstaculo
25
26 continf=pivote-nrect+1; % Es el número inicial del Límite inferior
27 paso= nrect-1;
28
29 i=continf;
30
31 for k= 1:3 % los tres primeros
32
33     Li(k)= i;
34     Ls(k)=i+k+paso-1;
35     i=i+1;
36
37 end
38
39 for k=4: nrect % los de en medio
40     Li(k)=Li(k-1)+1;
41     Ls(k)=Ls(k-1)+1;
42 end
```

```

43
44
45
46     k=nrect;
47     kk=k+1;
48     for i= pivote+1:2:pivote+5
49
50         k=k+1;
51         if i+kk > round(Lx/dx)+2
52             break
53         end
54         Li(k)= i;
55         Ls(k)= Li(k)+kk;
56         kk=kk-1;
57
58     end
59
60     %%ANTES DEL PIVOTE, ESTO SIRVE PARA J%%
61
62     infJ=pivote-nrect+1;
63     for j=1:infJ-1
64         Lja(j)=j;
65         Lsa(j)=j+paso;
66     end
67
68     %%DESPUES DEL PIVOTE, ESTO SIRVE PARA J%%
69
70
71
72
73     for j=1:ntot-nrect+1
74
75         if pivote+6+paso > round(Lx/dx)+2
76             break
77         end
78
79         Lid(j)=pivote+6;
80         Lsd(j)=Lid(j)+paso;
81         pivote=pivote+1;
82     end
83
84
85     %%AQUI TERMINA CÁLCULO DE FRONTERAS PARA LAS INTEGRALES DE SUPREFICIE
86
87     disp(Li)
88     disp(Ls)
89
90     V= bx*Ly;
91     Vb= zeros(n,1);
92     Vba= zeros(n,1);
93     Vbd= zeros(n,1);
94     eb= zeros(n,1);
95     pav= zeros(n,1);
96     vav= zeros(n,1);
97     J= zeros(n,1);
98     Ja= zeros(n,1);
99     Jd= zeros(n,1);
100    intsupp= zeros(n,1);
101    intsupv= zeros(n,1);
102    intsupJ= zeros(n,1);
103    intsupJa= zeros(n,1);
104    intsupJd= zeros(n,1);
105    sumaint= zeros(n,1);
106    vava= zeros(n,1);
107    vavd= zeros(n,1);
108    Hml= zeros(n,1);
109
110    %%CÁLCULO DE FRONTERAS DEL OBSTÁCULO
111
112    %%%PARA model = limpio3x5(Lx, Ly, dx, lx); %%%
113    % if bx == 0.75
114    %     A1= 19:21;
115    %     A2= [A1, 24, 26, 28:31];
116    %     A3= [A2, 34, 36];
117    %     A4= [24, 26, 28:31, 34, 36, 40, 42, 44];
118    %     A5= [34, 36, 40, 42, 44];
119    %     A6= [40, 42, 44];
120    % end
121    %
122    % if bx == 1
123    %     A1= 19:21;
124    %     A2= [A1, 24, 26, 28:31];
125    %     A3= [A2, 34, 36];
126    %     A4= [A3, 40, 42, 44];

```

```

127 % A5= [24, 26, 28:31, 34, 36, 40, 42, 44];
128 % A6= [34, 36, 40, 42, 44];
129 % A7= [40, 42, 44];
130 % end
131 % if bx == 1.5
132 % A1= 19:21;
133 % A2= [A1, 24, 26, 28:31];
134 % A3= [A2, 34, 36];
135 % A4= [A3, 40, 42, 44];
136 % A5= A4;
137 % A6= A4;
138 % A7= [24, 26, 28, 29:31, 34, 36, 40, 42, 44];
139 % end
140 %%%PARA model = limpio5por5(Lx, Ly, dx); %%%
141
142 % if bx == 0.75
143 % A1= 31:33;
144 % A2= [A1, 36, 38, 40:43];
145 % A3= [A2, 46, 48];
146 % A4= [36, 38, 40:43, 46, 48, 52, 54, 56];
147 % A5= [46, 48, 52, 54, 56];
148 % A6= [52, 54, 56];
149 % end
150 %
151 % if bx == 1
152 % A1= 31:33;
153 % A2= [A1, 36, 38, 40:43];
154 % A3= [A2, 46, 48];
155 % A4= [A3, 52, 54, 56];
156 % A5= [36, 38, 40:43, 46, 48, 52, 54, 56];
157 % A6= [46, 48, 52, 54, 56];
158 % A7= [52, 54, 56];
159 % end
160 % if bx == 1.5
161 % A1= 31:33;
162 % A2= [A1, 36, 38, 40:43];
163 % A3= [A2, 46, 48];
164 % A4= [A3, 52, 54, 56];
165 % A5= A4;
166 % A6= A4;
167 % A7= [36, 38, 40:43, 46, 48, 52, 54, 56];
168 % A8=[46, 48, 52, 54, 56];
169 % A9=[52, 54, 56];
170 % end
171 % if bx == 2
172 % A1= 31:33;
173 % A2= [A1, 36, 38, 40:43];
174 % A3= [A2, 46, 48];
175 % A4= [A3, 52, 54, 56];
176 % A5= A4;
177 % A6= A4;
178 % A7= A4;
179 % A8= A4;
180 % A9= [36, 38, 40:43, 46, 48, 52, 54, 56];
181 % A10=[46, 48, 52, 54, 56];
182 % A11=[52, 54, 56];
183 % end
184
185 %%%PARA model = limpio10por5(Lx, Ly, dx); %%%
186
187 if bx == 0.75
188 A1= 61:63;
189 A2= [A1, 66, 68, 70:73];
190 A3= [A2, 76, 78];
191 A4= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
192 A5= [76, 78, 82, 84, 86];
193 A6= [82, 84, 86];
194 end
195
196 if bx == 1
197 A1= 61:63;
198 A2= [A1, 66, 68, 70:73];
199 A3= [A2, 76, 78];
200 A4= [A3, 82, 84, 86];
201 A5= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
202 A6= [76, 78, 82, 84, 86];
203 A7= [82, 84, 86];
204 end
205 if bx == 1.5
206 A1= 61:63;
207 A2= [A1, 66, 68, 70:73];
208 A3= [A2, 76, 78];
209 A4= [A3, 82, 84, 86];
210 A5= A4;

```

```

211     A6= A4;
212     A7= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
213     A8=[76, 78, 82, 84, 86];
214     A9=[82, 84, 86];
215 end
216 if bx == 2
217     A1= 61:63;
218     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
219     A3= [A2, 76, 78];
220     A4= [A3, 82, 84, 86];
221     A5= A4;
222     A6= A4;
223     A7= A4;
224     A8= A4;
225     A9= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
226     A10=[76, 78, 82, 84, 86];
227     A11=[82, 84, 86];
228 end
229
230 if bx == 2.5
231     A1= 61:63;
232     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
233     A3= [A2, 76, 78];
234     A4= [A3, 82, 84, 86];
235     A5= A4;
236     A6= A4;
237     A7= A4;
238     A8= A4;
239     A9= A4;
240     A10=A4;
241     A11= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
242     A12=[76, 78, 82, 84, 86];
243     A13=[82, 84, 86];
244 end
245
246 if bx == 3
247     A1= 61:63;
248     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
249     A3= [A2, 76, 78];
250     A4= [A3, 82, 84, 86];
251     A5= A4;
252     A6= A4;
253     A7= A4;
254     A8= A4;
255     A9= A4;
256     A10=A4;
257     A11=A4;
258     A12=A4;
259     A13= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
260     A14=[76, 78, 82, 84, 86];
261     A15=[82, 84, 86];
262 end
263 if bx == 3.5
264     A1= 61:63;
265     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
266     A3= [A2, 76, 78];
267     A4= [A3, 82, 84, 86];
268     A5= A4;
269     A6= A4;
270     A7= A4;
271     A8= A4;
272     A9= A4;
273     A10=A4;
274     A11=A4;
275     A12=A4;
276     A13=A4;
277     A14=A4;
278     A15= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
279     A16=[76, 78, 82, 84, 86];
280     A17=[82, 84, 86];
281 end
282
283 if bx == 4
284     A1= 61:63;
285     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
286     A3= [A2, 76, 78];
287     A4= [A3, 82, 84, 86];
288     A5= A4;
289     A6= A4;
290     A7= A4;
291     A8= A4;
292     A9= A4;
293     A10=A4;
294     A11=A4;

```

```

295     A12=A4;
296     A13=A4;
297     A14=A4;
298     A15=A4;
299     A16=A4;
300     A17= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
301     A18=[76, 78, 82, 84, 86];
302     A19=[82, 84, 86];
303 end
304
305 if bx == 4.5
306     A1= 61:63;
307     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
308     A3= [A2, 76, 78];
309     A4= [A3, 82, 84, 86];
310     A5= A4;
311     A6= A4;
312     A7= A4;
313     A8= A4;
314     A9= A4;
315     A10=A4;
316     A11=A4;
317     A12=A4;
318     A13=A4;
319     A14=A4;
320     A15=A4;
321     A16=A4;
322     A17=A4;
323     A18=A4;
324     A19= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
325     A20=[76, 78, 82, 84, 86];
326     A21=[82, 84, 86];
327 end
328
329 if bx == 5
330     A1= 61:63;
331     A2= [A1, 66, 68, 70:73];
332     A3= [A2, 76, 78];
333     A4= [A3, 82, 84, 86];
334     A5= A4;
335     A6= A4;
336     A7= A4;
337     A8= A4;
338     A9= A4;
339     A10=A4;
340     A11=A4;
341     A12=A4;
342     A13=A4;
343     A14=A4;
344     A15=A4;
345     A16=A4;
346     A17=A4;
347     A18=A4;
348     A19=A4;
349     A20=A4;
350     A21= [66, 68, 70:73, 76, 78, 82, 84, 86];
351     A22=[76, 78, 82, 84, 86];
352     A23=[82, 84, 86];
353 end
354
355
356
357
358
359 for i=1:numel(Li)
360     %CÁLCULO DE INTEGRALES DE SUPERFICIE
361     Vb(i)= mphint2(model, 'l', 'surface', 'selection', Li(i):Ls(i));
362     eb(i)= Vb(i)/V;
363     pav(i)= mphint2(model, 'p', 'surface', 'selection', Li(i):Ls(i))/Vb(i);
364     vav(i)= mphint2(model, 'u', 'surface', 'selection', Li(i):Ls(i))/Vb(i);
365
366     intsupJ(i)= mphint2(model, 'u*u', 'surface', 'selection', ...
367         (Li(i):Ls(i))/Vb(i)-mphint2(model, '2*u', 'surface', ...
368         'selection', Li(i):Ls(i))*vav(i)/Vb(i)+mphint2(model, ...
369         'l', 'surface', 'selection', Li(i):Ls(i))*vav(i)^2/Vb(i);
370
371
372     %CÁLCULO DE INTEGRALES DE LÍNEA
373     intsupp(i)= mphint2(model, 'nx*p', 'line', 'selection', ...
374         eval(sprintf('A%d',i)))-mphint2(model, 'nx', 'line',...
375         'selection', eval(sprintf('A%d',i)))*pav(i);
376     intsupv(i)= mphint2(model, '-nx*ux-ny*uy', 'line', 'selection',...
377         eval(sprintf('A%d',i)));
378

```

```

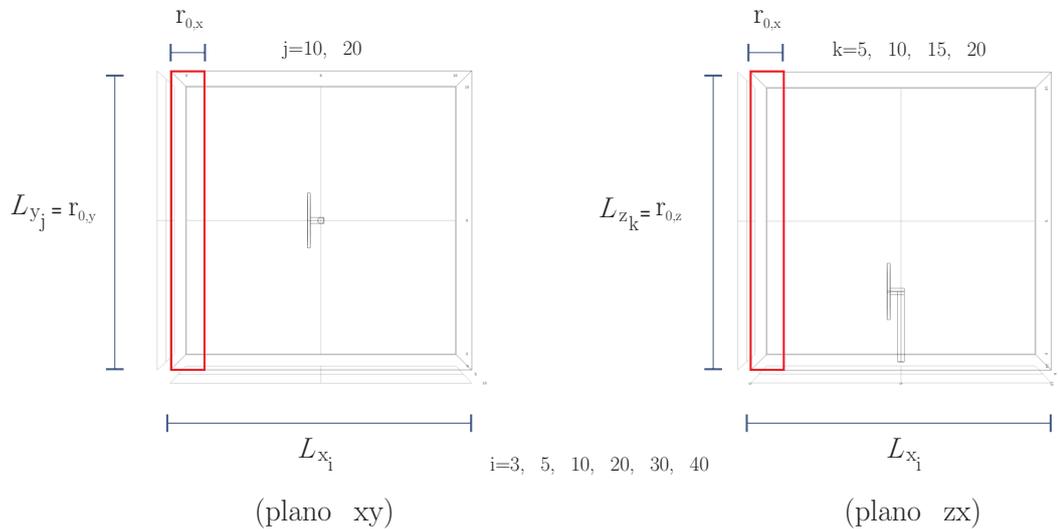
379
380
381     sumaint(i)= (intsupp(i)+intsupv(i))/vav(i);
382
383     %CÁLCULO DE Hm1
384     Hm1(i)=sumaint(i)/(eb(i)*Vb(i));
385
386
387     %CÁLCULO DE J
388     J(i)=1+intsupJ(i)/(vav(i)*vav(i));
389
390
391
392
393
394     end
395
396     for j=1:numel(Lia);
397         %PARA J ANTES DE LA TURBINA
398         %CÁLCULO DE INTEGRALES DE SUPERFICIE
399         Vba(j)= mphint2(model, '1', 'surface', 'selection', Lia(j):Lsa(j));
400         vava(j)= mphint2(model, 'u', 'surface', 'selection', Lia(j):Lsa(j)...
401             /Vba(j);
402
403
404
405         intsupJa(j)= mphint2(model, 'u*u', 'surface', 'selection', ...
406             Lia(j):Lsa(j)/Vba(j)-mphint2(model, '2*u', 'surface', ...
407             'selection', Lia(j):Lsa(j))*vava(j)/Vba(j)+mphint2(model, ...
408             '1', 'surface', 'selection', Lia(j):Lsa(j))*vava(j)^2/Vba(j);
409         Ja(j)=1+intsupJa(j)/vava(j)^2;
410
411
412
413     end
414
415     for j=1:numel(Lid)
416         %PARA J DESPUÉS DE LA TURBINA
417         %CÁLCULO DE INTEGRALES DE SUPERFICIE
418         Vbd(j)= mphint2(model, '1', 'surface', 'selection', Lid(j):Lsd(j));
419         vavd(j)= mphint2(model, 'u', 'surface', 'selection', Lid(j):Lsd(j))/...
420             Vbd(j);
421
422
423
424         intsupJd(j)= mphint2(model, 'u*u', 'surface', 'selection', ...
425             Lid(j):Lsd(j)/Vbd(j)-mphint2(model, '2*u', 'surface', ...
426             'selection', Lid(j):Lsd(j))*vavd(j)/Vbd(j)+ mphint2(model, ...
427             '1', 'surface', 'selection', Lid(j):Lsd(j))*vavd(j)^2/Vbd(j);
428         Jd(j)=1+intsupJd(j)/vavd(j)^2;
429
430
431
432     end
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462

```

Apéndice E

En este apéndice se exponen los resultados de resolver numéricamente las ecuaciones puntuales de cantidad de movimiento en un sistema que contiene un aerogenerador. Las figuras representan los cambios espaciales de los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxxx}^* a lo largo de la dirección x , para los planos xy y zx , como se muestra en la figura de abajo. Para el plano xy , se varía tanto la longitud L_x como L_y , y $r_{0,x}$. Para el plano zx , se varían las longitudes L_x , L_z , y $r_{0,x}$. Esto último, con el fin de mostrar que para cada L_y , L_z y L_x existe una región de promediado que es capaz de representar satisfactoriamente (es decir con errores por debajo del 10 %) los coeficientes de medio efectivo.

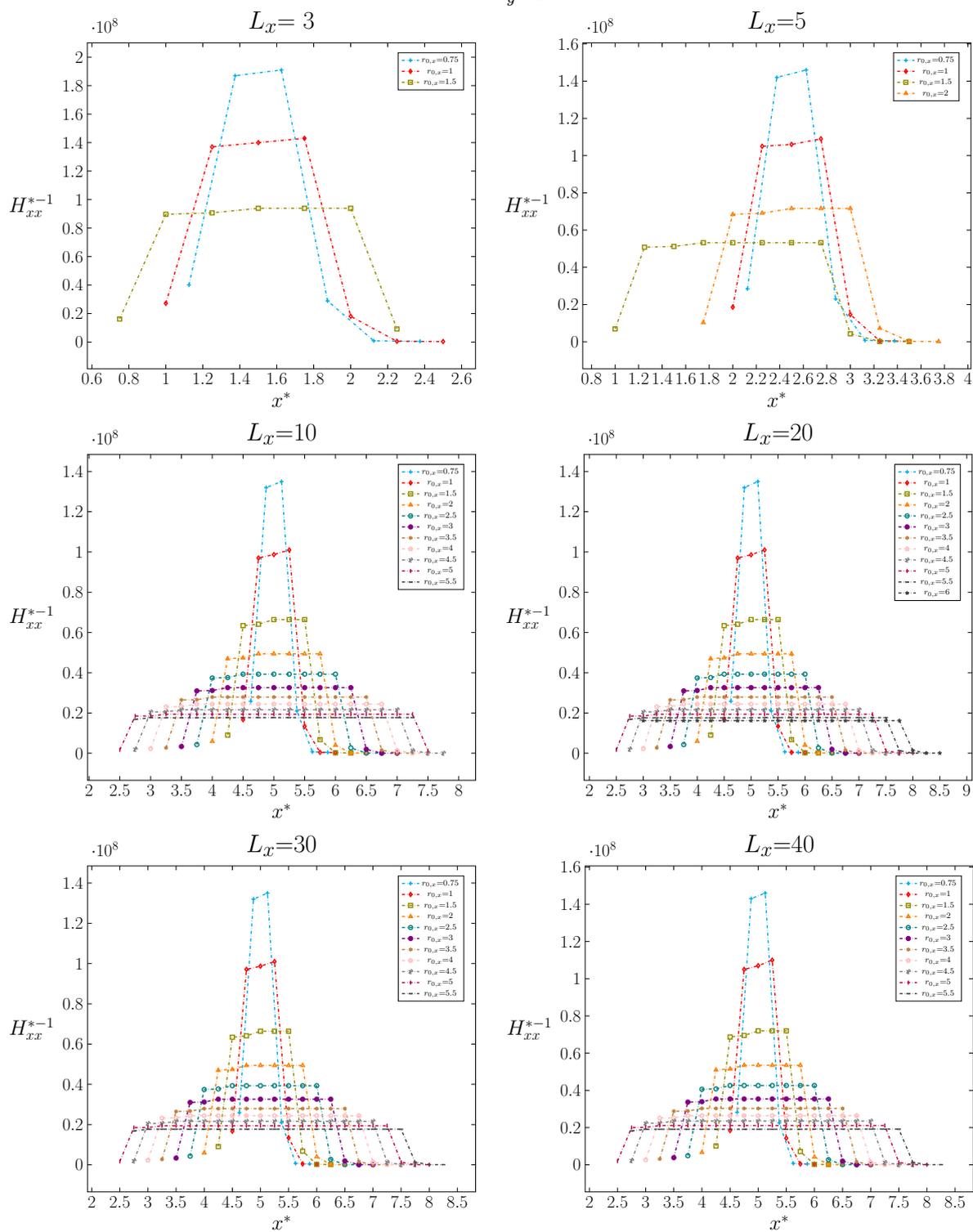
En el plano xy se muestran los coeficientes sólo para $L_y = 5$ y $L_y = 20$, ya que entre ambas longitudes el porcentaje de error está por debajo del 10 %. Para el plano zx , se muestran los coeficientes desde $L_y = 5$ hasta $L_y = 20$, en donde se puede observar que para $L_y = 5$ y $L_y = 10$, los coeficientes aún no presentan alguna convergencia entre sí. Sin embargo, para $L_y = 15$ y $L_y = 20$, el porcentaje de error, al menos para el coeficiente H_{xx}^{*-1} , está por debajo del 10 %. Para el coeficiente J_{xxxx}^* , está alrededor del 24 % y la explicación ante esto se encuentra en la sección de resultados (5.2).



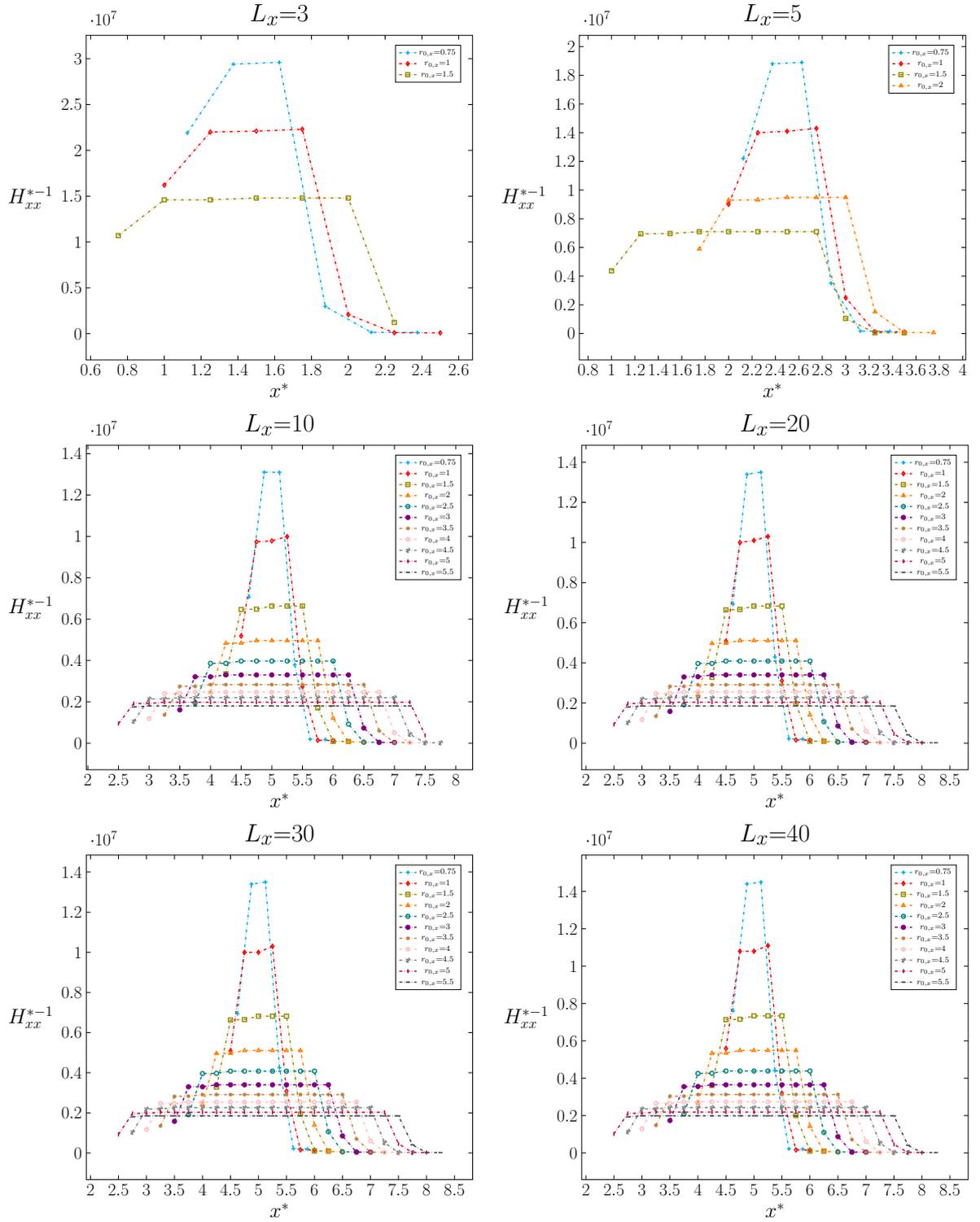
7.3. Plano xy

$$H_{xx}^{*-1}$$

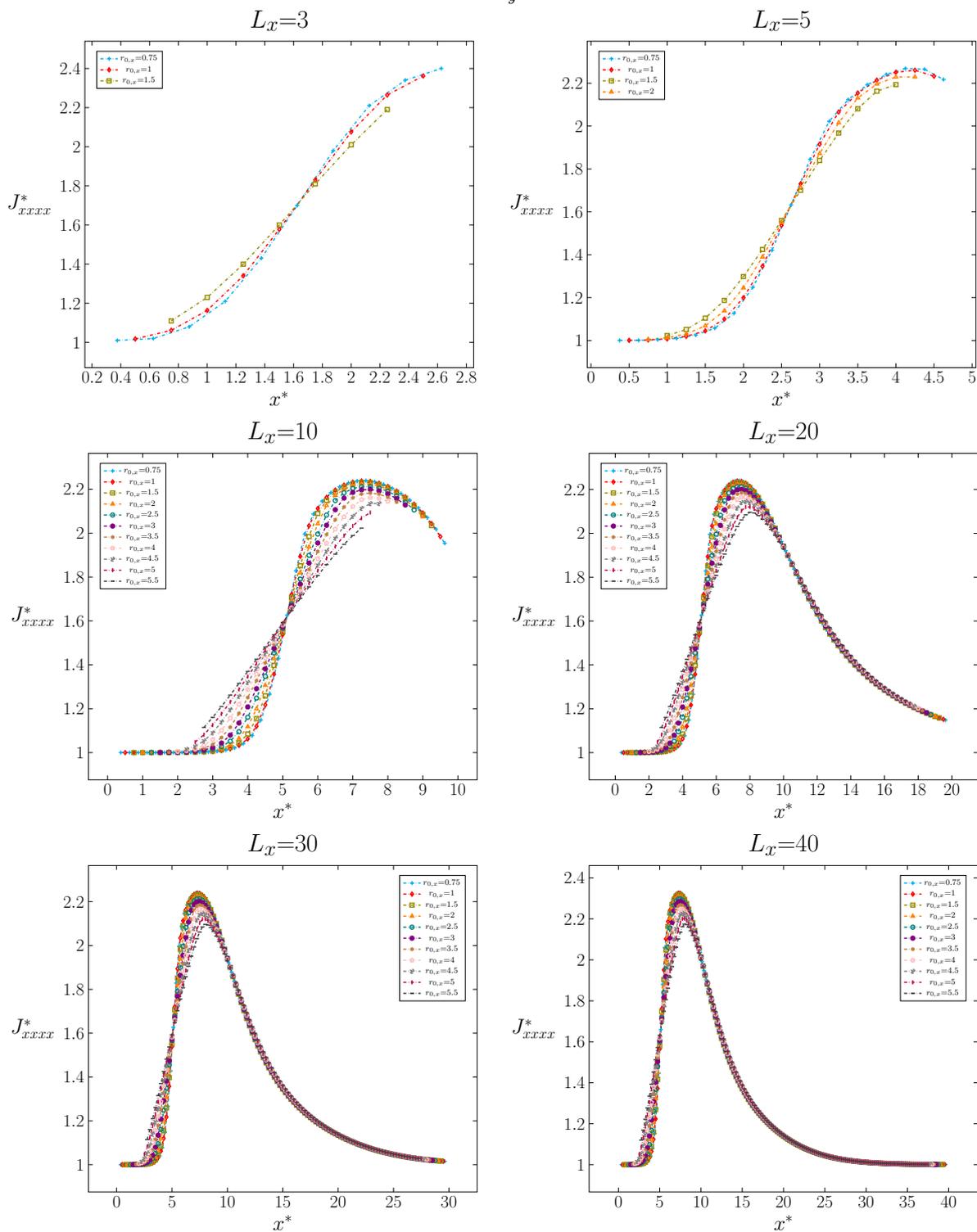
Para $L_y=5$



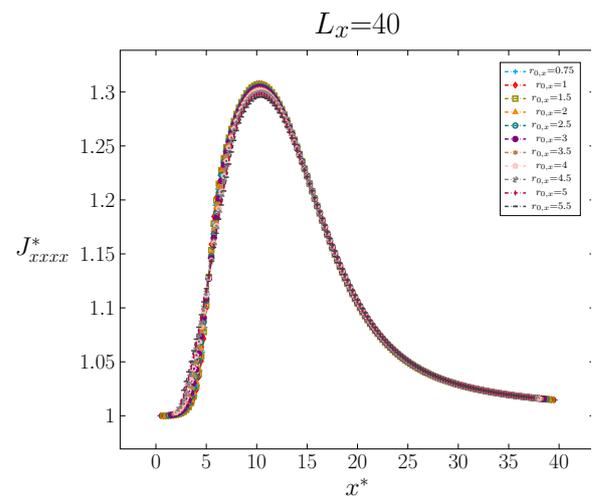
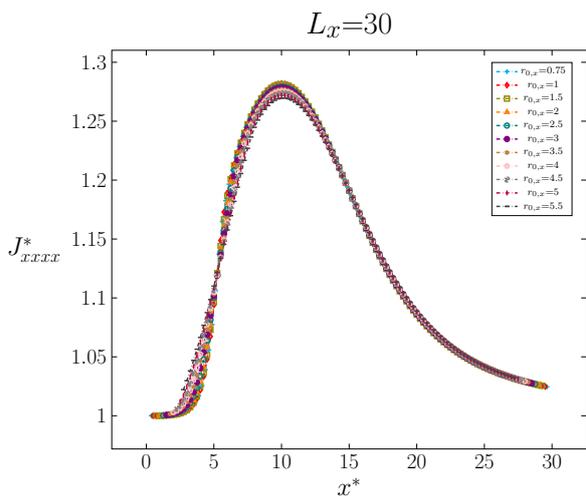
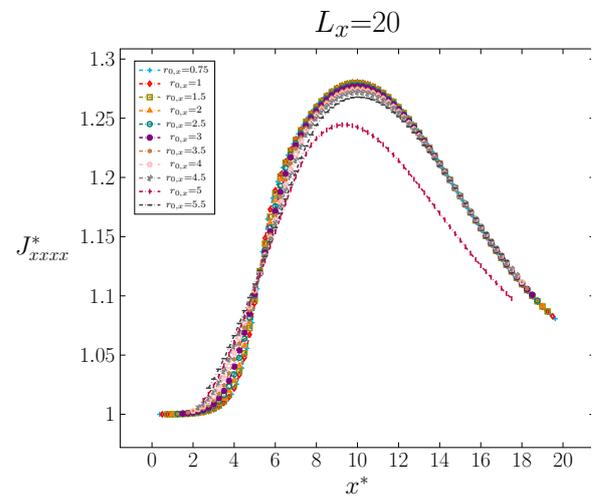
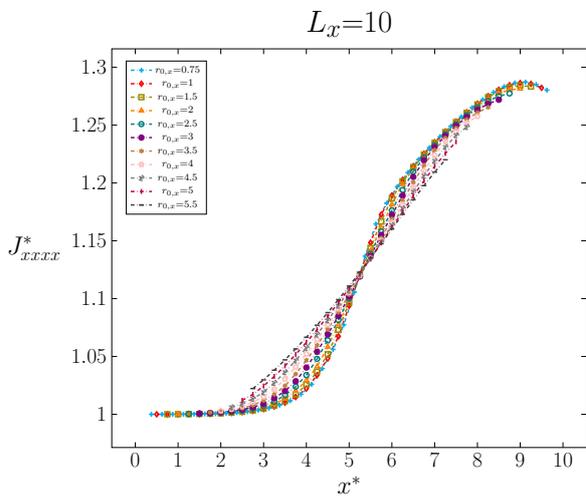
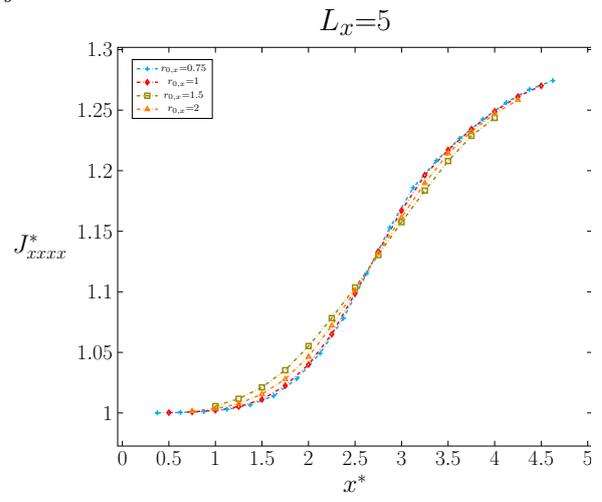
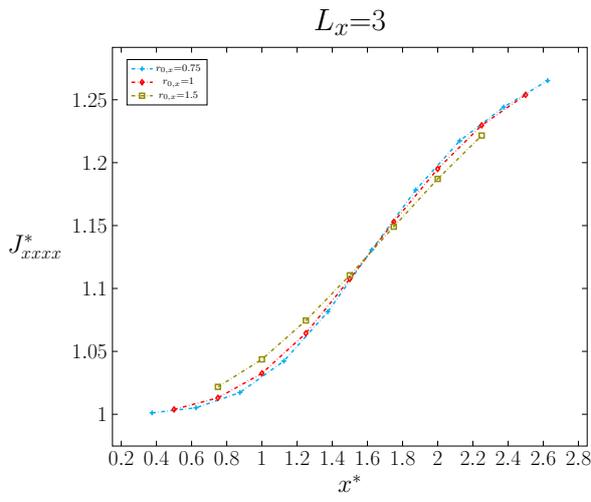
H_{xx}^{*-1}
Para $L_y=20$



J_{xxxx}^*
Para $L_y=5$



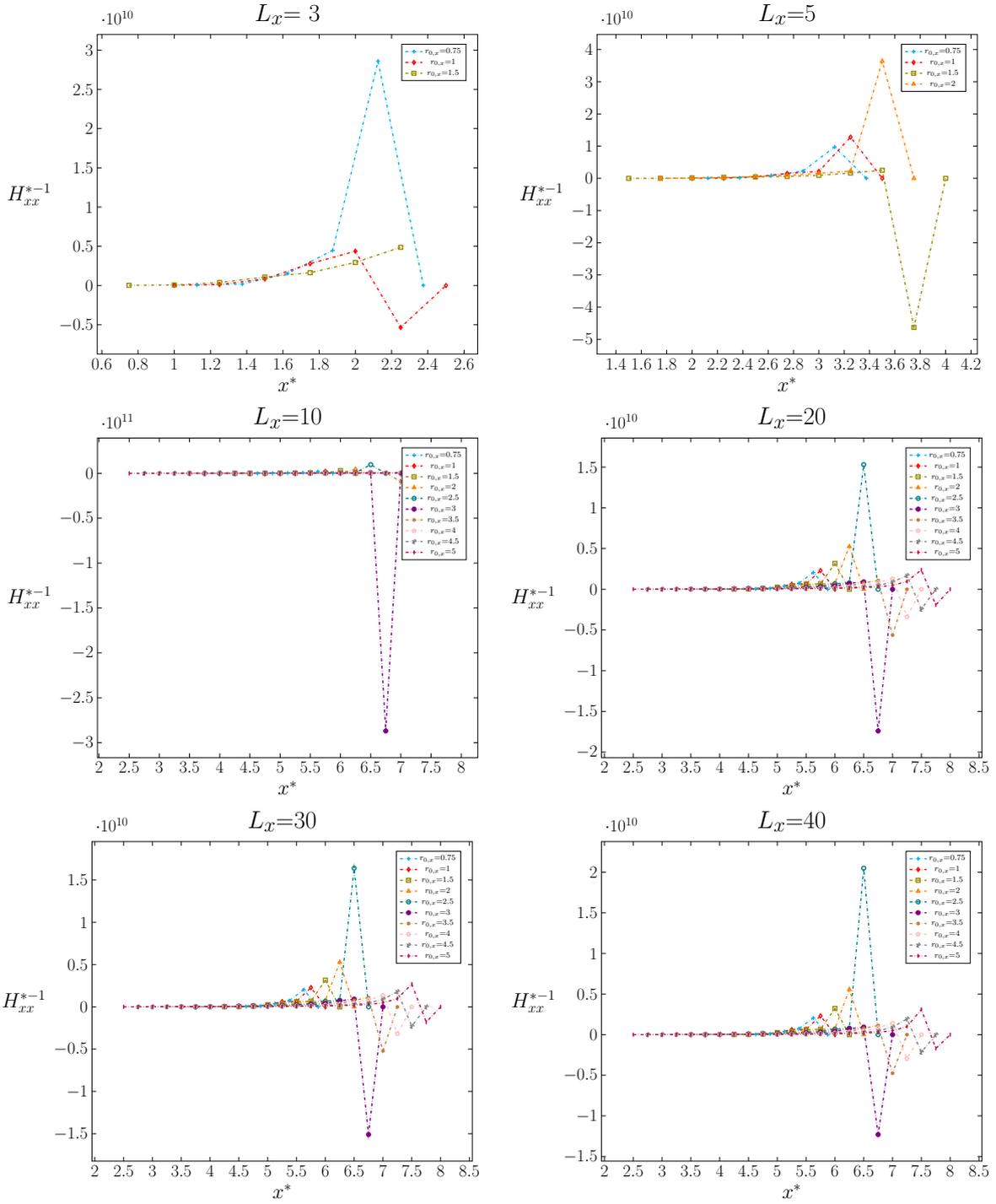
J_{xxx}^*
Para $L_y=20$



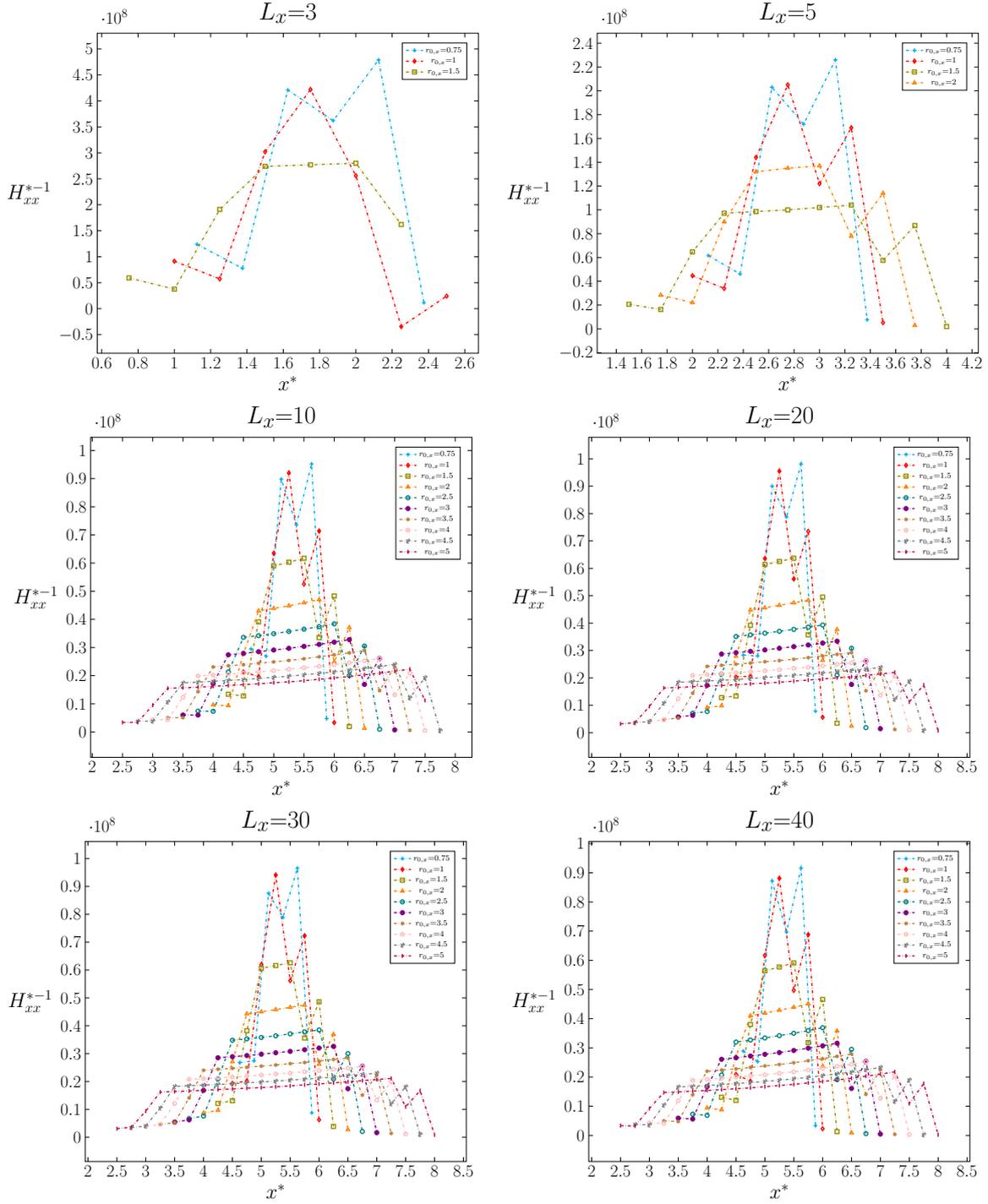
7.4. Plano zx

$$H_{xx}^{*-1}$$

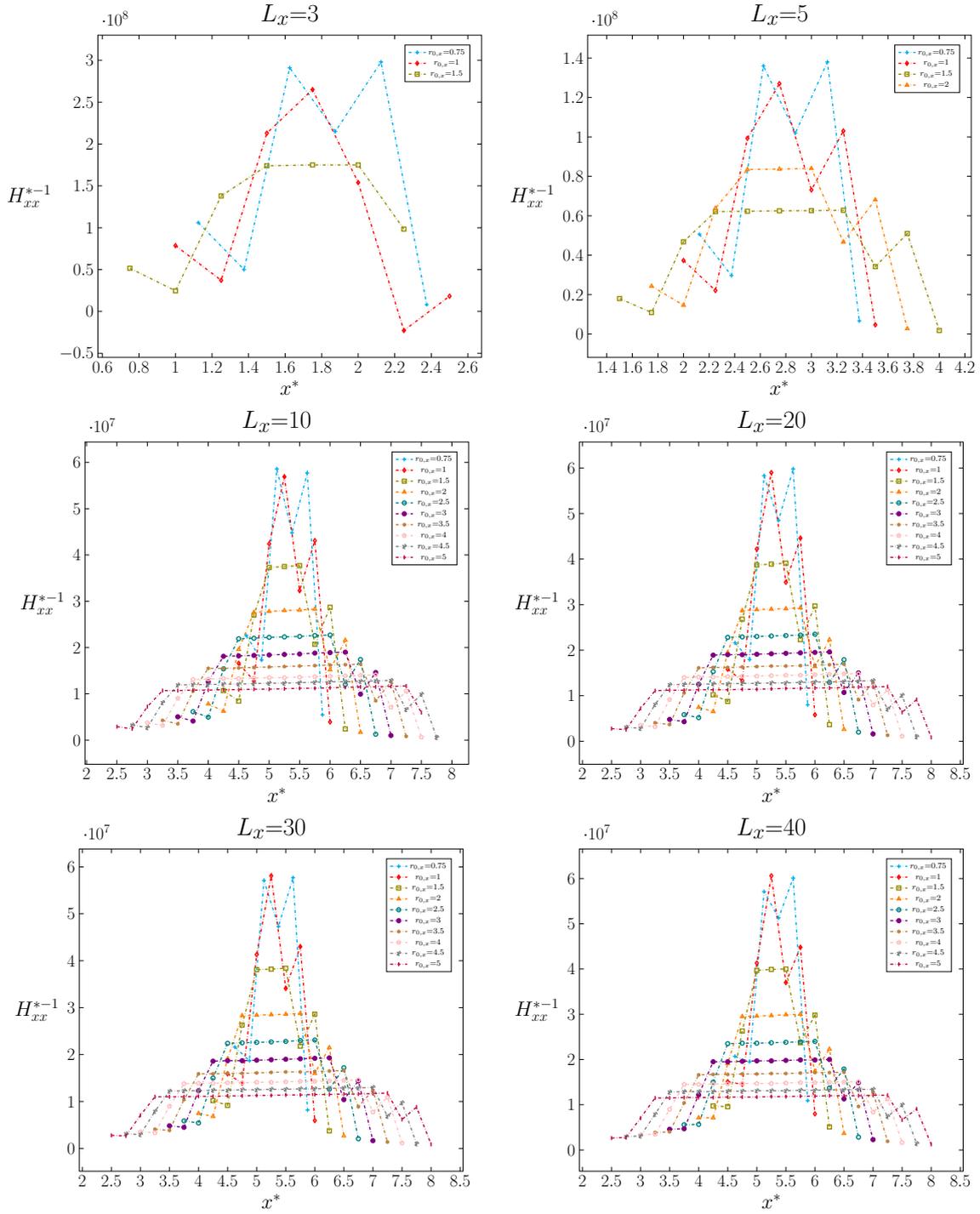
Para $L_z=5$



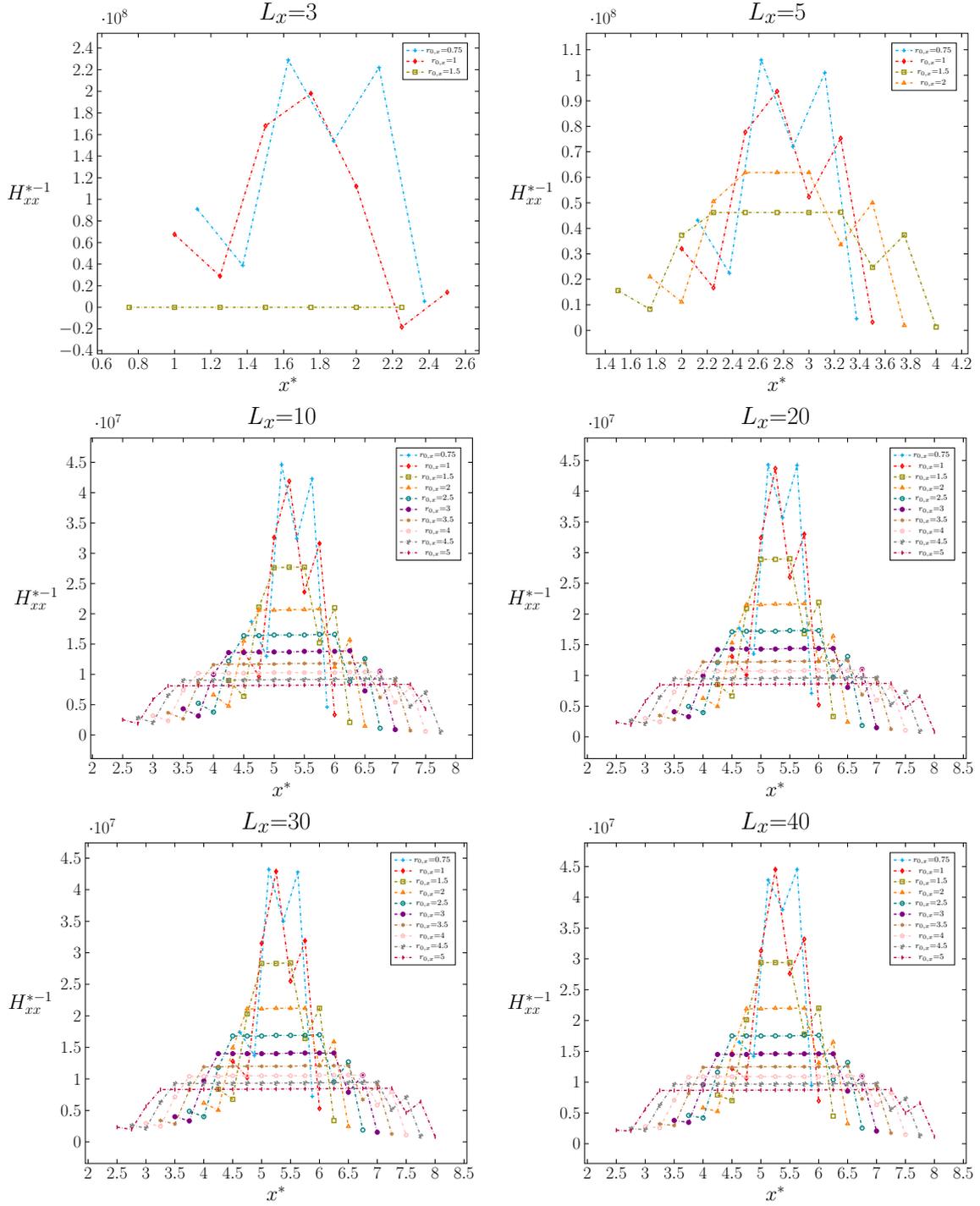
H_{xx}^{*-1}
Para $L_z=10$



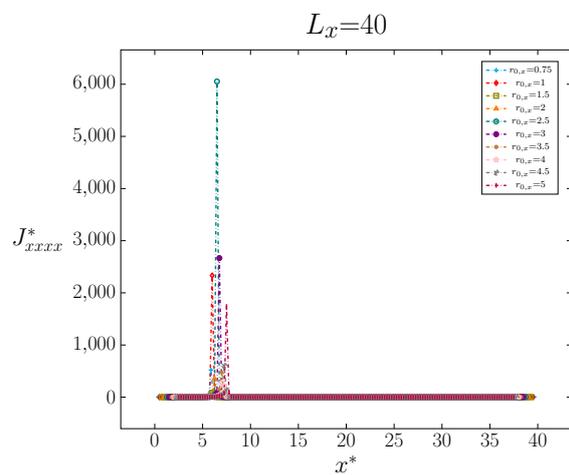
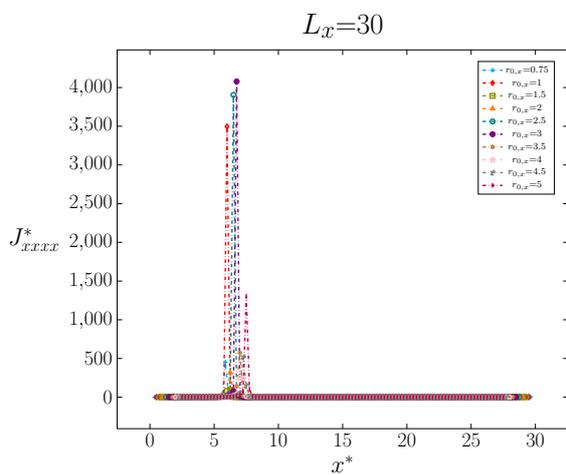
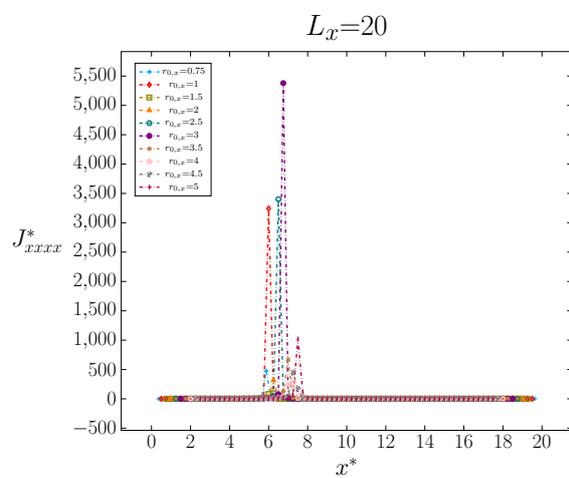
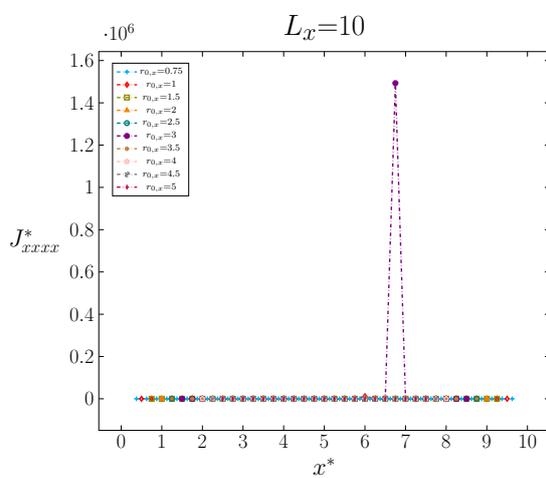
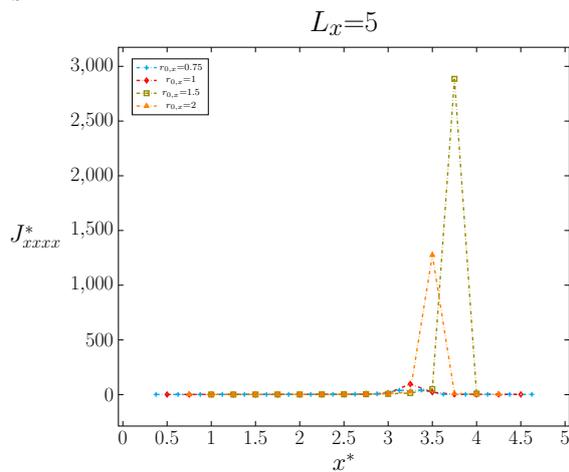
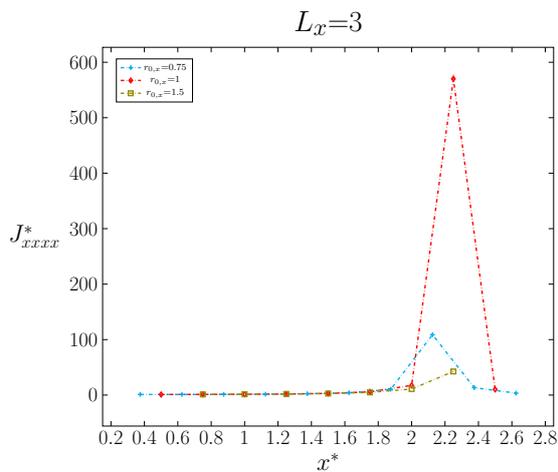
H_{xx}^{*-1}
Para $L_z=15$



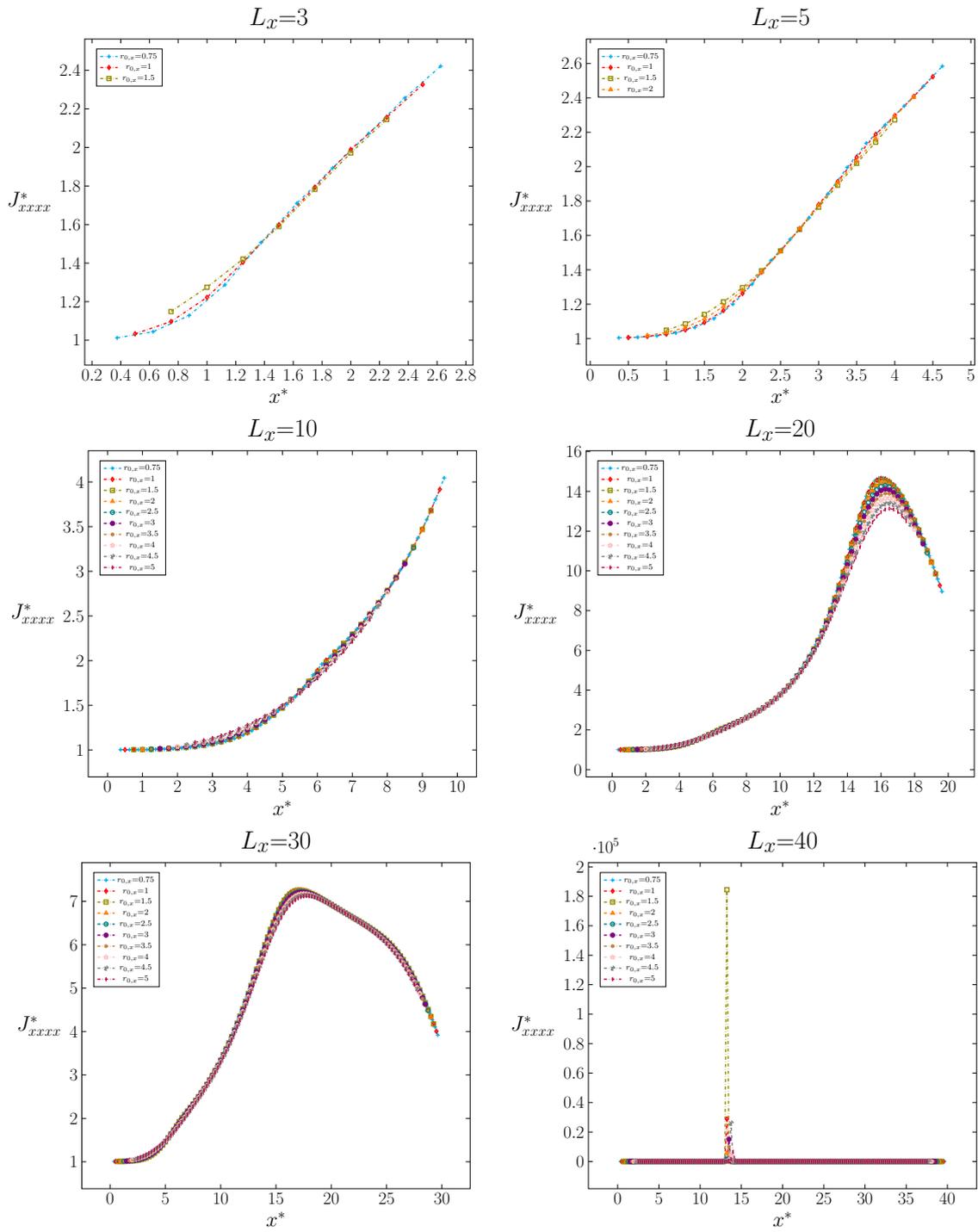
H_{xx}^{*-1}
Para $L_z=20$



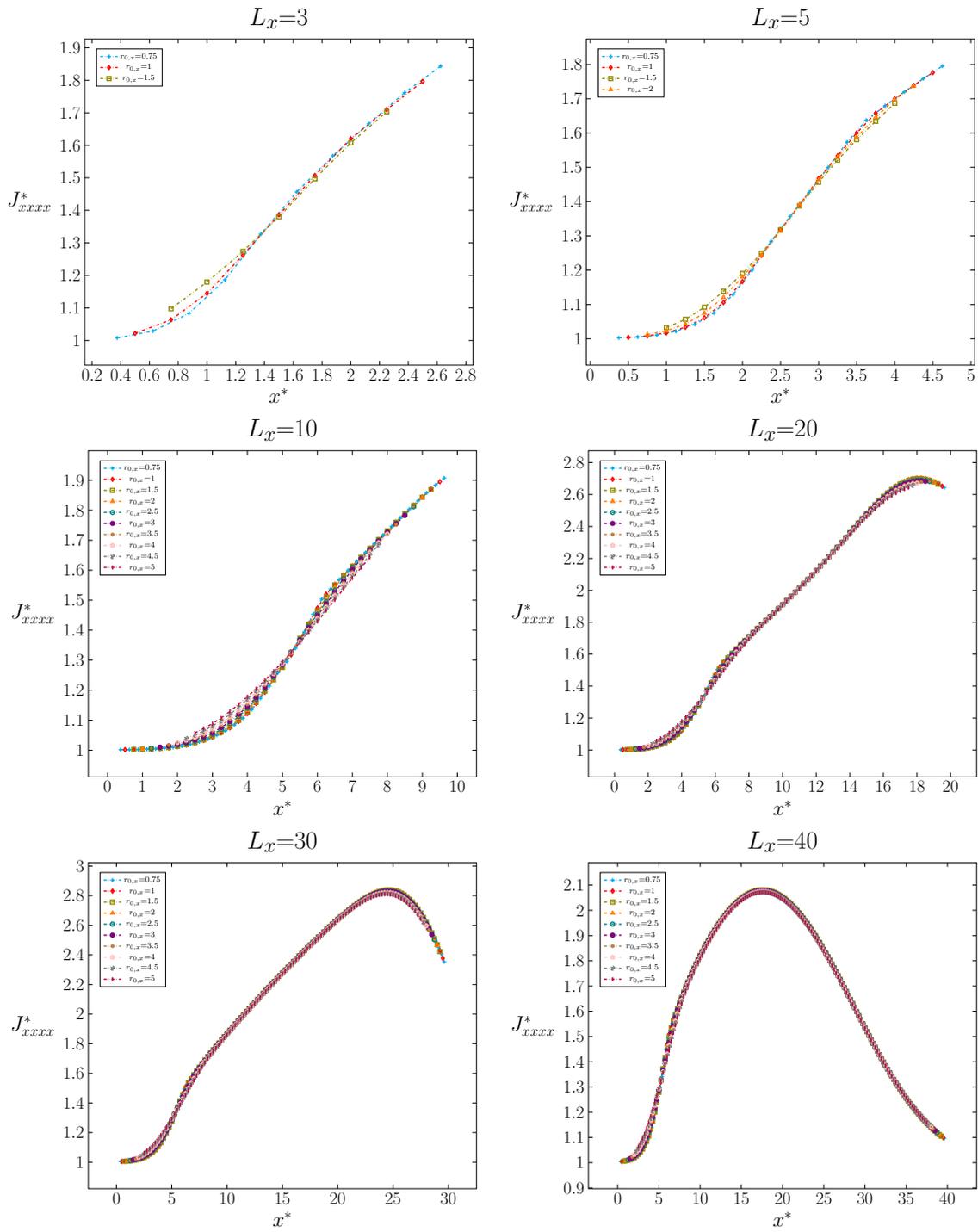
J_{xxxx}^*
Para $L_z=5$



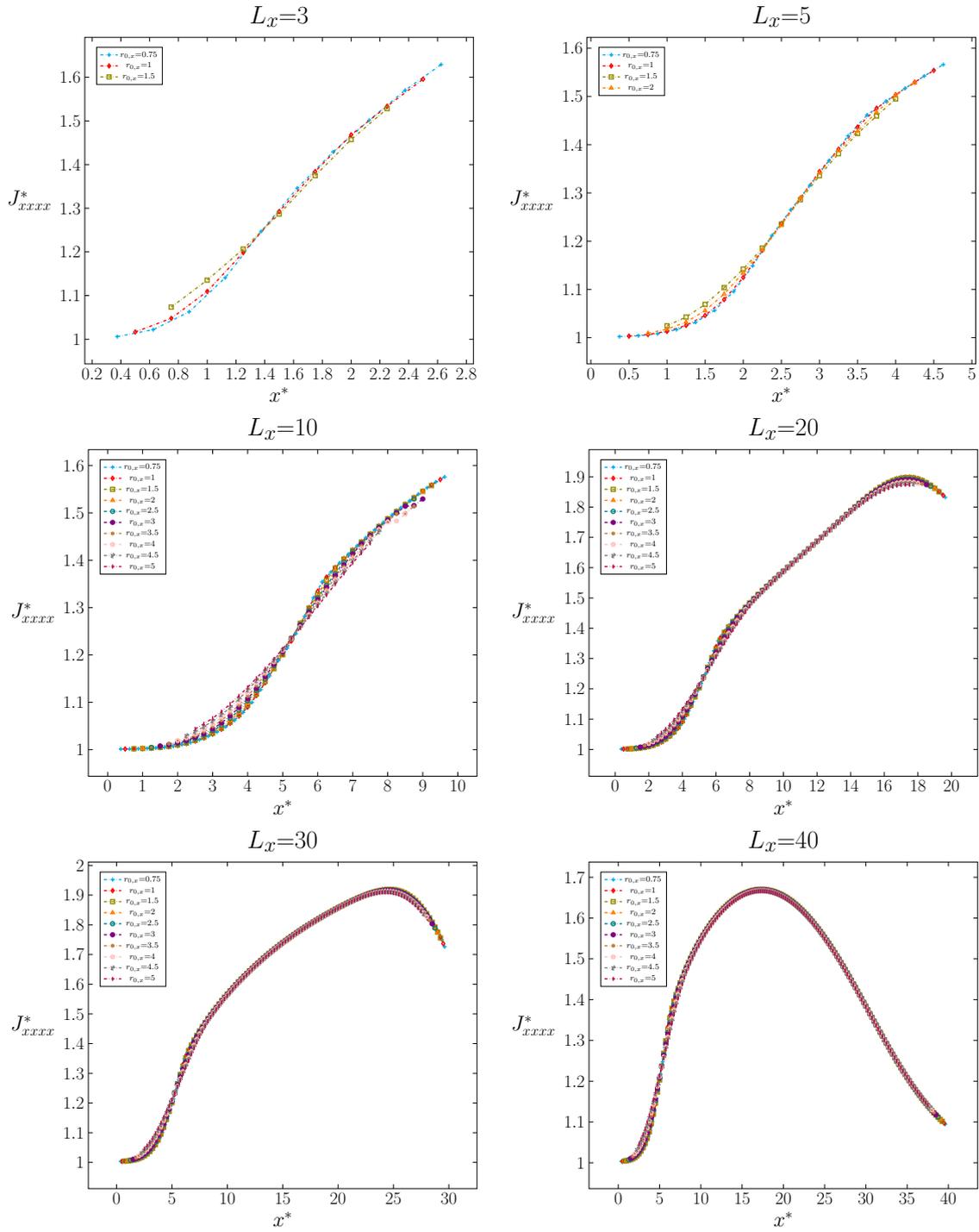
J_{xxxx}^*
Para $L_z=10$



J_{xxxx}^*
Para $L_z=15$



J_{xxxx}^*
Para $L_z=20$



Apéndice F

Enseguida se muestra el código en Matlab que se desarrolló para el cálculo de los coeficientes H_{xx}^{*-1} y J_{xxxx}^* en un sistema en tres dimensiones. En general, el programa consiste en extraer los campos de la velocidad y la presión de un programa en Comsol. Una vez hecho esto, se calcula la porosidad mediante una función de fase. Posteriormente, se calculan los promedios superficiales tanto de la velocidad como de la presión para finalmente calcular las integrales de línea.

```
1      clear; close all; clc; format long;
2
3      model=limpio3Dcubodividido;
4
5
6
7      pobst=2;
8      espesor= 0.5;
9
10     xmin=2.5;
11     xmax= 2.75;
12     deltaA= 0.25;
13
14     na= round( (xmax-xmin)/deltaA+1);
15
16     A= linspace(xmin, xmax, na);
17
18     B=zeros(na,1);
19     for i=1:na
20         B(i)= A(i)+espesor;
21     end
22
23     %%fronteras del aerogenerador
24     A1=15:23;
25     A2=19:23;
26
27     J= zeros(na,1);
28     Hm1=zeros(na,1);
29     porosidad=zeros(na,1);
30     promU=zeros(na,1);
31     promUU=zeros(na,1);
32     promP=zeros(na,1);
33     intsupp=zeros(na,1);
34     intsupv=zeros(na,1);
35     sumaint=zeros(na,1);
36
37
38     nx=30; %núm de nodos en x
39     ny=30; %núm de nodos en y
40     nz=30;
41
42     c=0;
43     d=5;
44     e=0;
45     f=5;
46     y0=linspace(c,d,ny);
47     z0=linspace(e,f,nz);
48
49     for m=1:na
50         tic
```

```

51
52
53     a=A(m);
54     b=B(m);
55
56     x0=linspace(a,b,nx);
57
58
59     u= zeros(nx,ny,nz);
60     p= zeros(nx,ny,nz);
61
62
63     %se extraen los valores de la velocidad
64     for k=1:nz
65         for j=1:ny
66
67             for i=1:nx
68                 xx= [x0(i),y0(j),z0(k)]';
69                 u(i,j,k)= mphinterp(model, 'u', 'coord',xx);
70                 p(i,j,k)= mphinterp(model, 'p', 'coord',xx);
71             end
72         end
73     end
74
75
76     u(find(isnan(u)))=0;
77     p(find(isnan(p)))=0;
78     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
79     %%%%%%%%%% FUNCIÓN INDICADORA DE FASE PARA CALCULAR LA POROSIDAD %%%%%%%%%%
80     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
81
82     psi=zeros(nx,ny,nz);
83     for k=1:nz
84         for j=1:ny
85             for i=1:nx
86
87                 if u(i,j,k) ~= 0
88                     psi(i,j,k)= 1;
89                 else
90                     psi(i,j,k)=0;
91                 end
92             end
93         end
94     end
95
96     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
97     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
98     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
99
100
101
102     gpsi=zeros(ny,nz);
103     g=zeros(ny,nz);
104     gUU=zeros(ny,nz);
105     gP=zeros(ny,nz);
106     Hpsi=zeros(nz,1);
107     H=zeros(nz,1);
108     HUU=zeros(nz,1);
109     HP=zeros(nz,1);
110     %primer ciclo de la sumatoria
111     for k=1:nz
112
113         for j=1:ny
114             sumaxpsi=0;
115             sumax=0;
116             sumaxUU=0;
117             sumaxP=0;
118             for i=2:nx-1
119                 sumaxpsi=sumaxpsi+2*psi(i,j,k);
120                 sumax=sumax+2*u(i,j,k);
121                 sumaxUU=sumaxUU+2*u(i,j,k)^2;
122                 sumaxP=sumaxP+2*p(i,j,k);
123             end
124             intxpsi= psi(1,j,k)+sumaxpsi+psi(nx, j, k);
125             intx=u(1,j,k)+sumax+u(nx,j, k);

```

```

126         intxUU=u(1,j,k)^2+sumaxUU+u(nx,j, k)^2;
127         intxP=p(1,j,k)+sumaxP+p(nx,j,k);
128
129         gpsi(j,k)=intxpsi;
130         g(j,k)=intx;
131         gUU(j,k)=intxUU;
132         gP(j,k)=intxP;
133     end
134
135
136     end
137
138     %segundo ciclo
139     for k=1:nz
140         sumaypsi=0;
141         sumay=0;
142         sumayUU=0;
143         sumayP=0;
144         for j=2:ny-1
145             sumaypsi=sumaypsi+2*gpsi(j,k);
146             sumay=sumay+2*g(j,k);
147             sumayUU=sumayUU+2*gUU(j,k);
148             sumayP=sumayP+2*gP(j,k);
149         end
150         intypsi=gpsi(1,k)+sumaypsi+gpsi(ny,k);
151
152         inty=g(1,k)+sumay+g(ny,k);
153         intyUU=gUU(1,k)+sumayUU+gUU(ny,k);
154         intyP=gP(1,k)+sumayP+gP(ny,k);
155         Hpsi(k)=intypsi;
156         H(k)=inty;
157         HUU(k)=intyUU;
158         HP(k)=intyP;
159     end
160     %tercer ciclo
161     sumazpsi=0;
162     sumaz=0;
163     sumazUU=0;
164     sumazP=0;
165     for k=2:nz-1
166         sumazpsi=sumazpsi+2*Hpsi(k);
167         sumaz=sumaz+2*H(k);
168         sumazUU=sumazUU+2*HUU(k);
169         sumazP=sumazP+2*HP(k);
170     end
171
172
173     porosidad(m)= (Hpsi(1)+sumazpsi+Hpsi(nz)) / (8*(nx-1)*(ny-1)*(nz-1));
174     promU(m)= (H(1)+sumaz+H(nz)) / (8*(nx-1)*(ny-1)*(nz-1)*porosidad(m));
175     promUU(m)= (HUU(1)+sumazUU+HUU(nz)) / (8*(nx-1)*(ny-1)*(nz-1)*...
176         porosidad(m));
177     promP(m)= (HP(1)+sumazP+HP(nz)) / (8*(nx-1)*(ny-1)*(nz-1)*...
178         porosidad(m));
179
180     J(m)=promUU(m)/(promU(m)^2);
181
182
183     %CÁLCULO DE INTEGRALES DE LÍNEA
184     intsupp(m)= mphint2(model, 'nx*p', 'surface', 'selection', ...
185         eval(sprintf('A%d',m)))-...
186         mphint2(model, 'nx', 'surface', 'selection', ...
187         eval(sprintf('A%d',m)))*promP(m);
188     intsupv(m)= mphint2(model, '-nx*ux-ny*uy-nz*uz', 'surface', ...
189         'selection', eval(sprintf('A%d',m)));
190
191     sumaint(m)= (intsupp(m)+intsupv(m))/ promU(m);
192
193     %CÁLCULO DE Hm1
194     Hm1(m)=sumaint(m)/( porosidad(m)*(espesor*d*f));
195     disp(Hm1(m))
196
197     disp(porosidad(m))
198     toc
199     |
200 end

```