

**Universidad Autónoma Metropolitana**

*Unidad Iztapalapa*

---

*Posgrado en Ingeniería Biomédica*

Imagenología por Resonancia Magnética por  
Detección Remota: Guías de ondas.

Tesis que presenta:

M. en C. Jaime Fabian Vázquez de la Rosa.

Para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Ingeniería Biomédica)

Asesor: Dr. Alfredo O. Rodríguez González

Diciembre de 2013.



**Casa abierta al tiempo**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
IZTAPALAPA

**IMAGENOLOGÍA POR RESONANCIA  
MAGNÉTICA POR DETECCIÓN REMOTA:  
GUÍAS DE ONDAS**

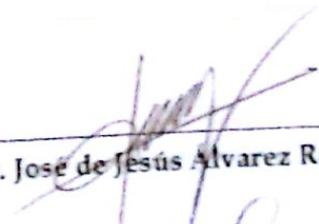
Tesis que presenta:

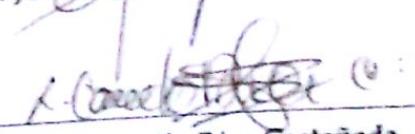
**M. en C. Jaime Fabian Vázquez de la Rosa**  
Para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias (Ingeniería Biomédica)**

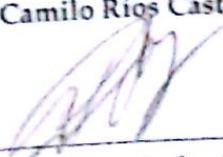
Asesor:

**Dr. Alfredo Odón Rodríguez González**

Jurado Evaluador:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Luis Camilo Ríos Castañeda

  
\_\_\_\_\_  
Dr. José Luis Hernández Poros

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Héctor Manuel Barragán Campo

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alfredo Rodríguez por haberme guiado y apoyado en todo este camino, por mostrarme todo lo que se puede lograr tanto académica como personalmente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por el apoyo con la beca para los estudios de maestría y doctorado.

A los revisores de la presente tesis: Dr. Marcos Ley, Dr. José Álvarez, Dr. Camilo Ríos, Dr. Héctor Barragán y Dr. Luis Hernández Pozos.

A mi padre, que solo resta darle gracias por todo lo que me brindó mientras estuvo con nosotros.

A mi madre, por todo el cariño que siempre me ha brindado.

A mis compañeros y amigos de laboratorio por su apoyo a lo largo de este camino Óscar Marrufo, Sergio Solís, Rodrigo Martín, David Flores y César Santamaría, saben que desde hace muchos años han sido mi familia.

A Laura Aguilar, por estar conmigo en los momentos más difíciles de esta etapa.

Al Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía Manuel Velasco Suárez, por permitirnos utilizar sus instalaciones y en especial al Dr. Óscar Marrufo por su apoyo en los experimentos.

Y nuevamente a Óscar, por creer en mis ideas y locuras, por involucrarse en ellas; y por los momentos inolvidables dentro y fuera del ámbito académico.

A la Facultad de Ciencias UNAM, a la Dra. Lucía Medina por la oportunidad de participar en proyectos en esta institución.

Al Dr. Antonio de los Reyes y al Dr. Gilberto Córdoba por su apoyo durante su gestión como Director y Secretario de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, respectivamente.

## RESUMEN

En la presente tesis se muestra la posibilidad de emplear guías de ondas, a campos magnéticos principales menores a 7 Tesla, como medio para transferir la información proveniente de la relajación de los espines nucleares en estudios de Imagenología por Resonancia Magnética (IRM), y ser detectadas a una distancia superior a 50cm de dónde se generaron. De igual forma se plantea un esquema novedoso que muestra que es posible generar imágenes con la antena de recepción fuera del imán empleando una guía de ondas de placas paralelas y obtener señales más allá de 150cm.

Se muestra que la introducción de este nuevo hardware no afecta el comportamiento normal de un sistema de IRM clínico y que la calidad de la imagen es comparable con la forma de adquisición convencional. El estado del arte indica una frecuencia mínima de 300MHz para una guía cilíndrica con un diámetro de por lo menos 58cm, lo que se obtiene únicamente con sistemas de IRM de cuerpo entero a 7Tesla, que se emplean solamente en investigación. Nuestro diseño no comparte la problemática de la frecuencia de corte, y con ello se plantea la posibilidad de experimentos multinucleares dentro de la misma guía de ondas. Utilizando las guías de ondas en IRM se puede generar un campo magnético homogéneo sobre la muestra. En este trabajo mostramos la homogeneidad del campo magnético obtenida por medio de una adquisición con la guía de ondas de placas paralelas.

Se construyeron dos prototipos de guías de ondas, el primero se utilizó para demostrar los conceptos mencionados anteriormente y tenía una longitud de 200cm. El segundo tuvo la finalidad de obtener imágenes *in vivo*. Se obtuvieron imágenes de una pierna de un voluntario; este prototipo tuvo una longitud de 60cm. Por medio del cálculo de la tasa de absorción específica (SAR, del Inglés Specific Absorption Rate) mostramos que es seguro el empleo de la guía de ondas de palcas paralelas en estudios de imagenología de extremidades.

---



## ÍNDICE

I.	INTRODUCCIÓN	a
II.	PRINCIPIOS DE IMAGNENOLOGÍA POR RESONANCIA MAGNÉTICA	1
	II.1. Resonancia Nuclear	1
	II.2. Volumen de Magnetización	3
	II.3. Condición de Resonancia	7
	II.4. Las ecuaciones de Bloch	9
	II.4.1. Precesión libre y relajación	10
	II.5. Ángulo del pulso de RF (Flip Angle)	11
	II.5.1. Relajación $T_1$	12
	II.5.2. Relajación $T_2$ , $T_2^*$ y Espín-Eco	13
	II.6. Ubicación espacial de la señal	16
	II.7. Espacio K	18
	II.8. Resolución y Campo de Visión	20
III.	DETECCIÓN REMOTA EN IRM	21
	III.1. Codificación remota	22
	III.2. Detección de la señal de RM	23
	III.3. Las guías de ondas (waveguides) en IRM	26
	III.4. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda	29
	III.5. Guías de onda sin frecuencia de corte	31
	III.5.1. Ondas viajeras en NMR sin frecuencia de corte	32
	III.5.2. Guía de ondas coaxial en IRM	35
	III.6. Otras aplicaciones de Guías de ondas en IRM	39
IV.	GUÍA DE ONDAS DE PLACAS PARALELAS PARA IRM	
	IV.1. Empleo de la guía de ondas de placas paralelas en sistemas de IRM de cuerpo entero	43
	IV.2. Guía de onda de placas paralelas para cualquier sistema de IRM	45
	IV.2.1. Modos Transversales Eléctricos (TE)	47
	IV.2.2. Modos Transversales Magnéticos (TM)	51
	IV.3. Diseño de la guía de placas paralelas	53
	IV.4. Cálculo del SAR para demostrar la viabilidad de experimentos con la guía de ondas de placas paralelas	55
	IV.5. Diseño del prototipo para IRM in vivo.	57

V.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	
	V.1. Separación de las placas	59
	V. 2. Simulaciones de la guía de ondas a diferentes frecuencias	60
	V.3. Simulaciones con fantoma humano	61
	V.4. Respuesta del Sistema (Point Spread Function)	63
	V.5. Antenas Circulares para los experimentos con la guía de ondas de placas paralelas	64
	V.6. Determinación de la detección remota en la guía de placas paralelas	65
	V.7. Cociente señal a ruido (SNR) de la guía de ondas de placas paralelas	67
	V.8. Mapa del campo $B_1$ para el sistema de guía de ondas de placas paralelas	69
	V.9. Resultados de los experimentos <i>in vivo</i>	69
VI.	CONCLUSIONES	75
VII.	REFERENCIAS	77
VIII.	ANEXOS	
	A.1. Principios Físicos de la IRM	i
	A.2. Teoría de Schrödinger del átomo de hidrógeno	ii
	A.2.1. La ecuación acimutal	iv
	A.2.2. La ecuación polar	v
	A.2.3. La ecuación radial	v
	A.3. El momento magnético del átomo de hidrógeno	vi
	A.4. Efectos de un Campo Magnético Externo (El efecto Zeeman)	viii
	A.4.1. El efecto Zeeman normal	xi
	A.5. El Espín	xi
	B. Distribución de Boltzman	xiii
	C. Polinomio de Legendre	xiv
	D. Polinomio de Laguerre	xv
	E. Simulaciones al variar la separación de las placas de la guía de ondas	xvi
	F. Comparación de esquema transmisión-recepción con diferentes tipos de antenas	xvi
	G. Imágenes para el cálculo de la PSF	xvii
	H. Parámetros S de las antena circular 2	xviii
	I. Histogramas para comparación cuantitativa de las imágenes obtenidas	xix
	J. Referencias de los anexos	xix

## INTRODUCCIÓN.

La Imagenología por Resonancia Magnética ha tomado auge como una herramienta de diagnóstico médico, pero también ha sido empleada en aplicaciones Biológicas, Antropológicas y Forenses, se considera como una técnica segura, debido a que la energía empleada no ioniza la materia. Además de que es capaz de brindar tanto información anatómica de las estructuras como información funcional en sus diversas vertientes (IRM funcional, Tractografía, Difusión, Angiografía, entre otras).

La intensidad del Campo Magnético Principal ha ido aumentando desde unos cuantos miliTesla en 1977 hasta los primeros reportes de imágenes a 8Tesla por el año de 1998. A partir de ahí se empezó a trabajar en emplear 7Tesla (con una frecuencia de operación alrededor de 300MHz) como una herramienta de diagnóstico debido a que ofrece resoluciones de hasta 0.5mm. La problemática en estos sistemas es que la longitud de onda es de 1m, con lo que es casi imposible obtener imágenes homogéneas de regiones grandes debido a la formación de nodos por parte de las ondas emitidas. Para solventar esta dificultad a partir de 2009 se propuso el empleo de guías de ondas cilíndricas. Sin embargo, las ventajas de cobertura y detección remota no se podían aplicar a intensidades de campo menor debido a la frecuencia de corte que poseen estas estructuras.

Se han propuesto formas alternativas de detección remota de la señal de Resonancia Magnética (RM) a intensidades de 3T y menores. Estos desarrollos comprenden la detección por Magnetómetros de Óptica Atómica, por Dispositivos Superconductores de Interferencia Cuántica (SQUIDS) e incluso por Antenas Inductivas. La característica que tienen todos ellos es que requieren una codificación especial de la señal, que tiene que ver con el medio que lleva la información desde donde se genera hasta dónde se hará la codificación y detección; por lo regular el medio empleado son gases hiperpolarizados. La codificación remota lleva inherentemente un retardo en la recepción.

En 2010 propusimos el uso de una guía de ondas de placas paralelas para realizar la detección remota de señales de RM sobre volúmenes grandes (extremidades inferiores). En la presente tesis se describe el desarrollo de esta aplicación. La tesis se divide en 6 capítulos principalmente. En el primero se describen los principios de la obtención de imágenes por RM. En el segundo capítulo se hace una revisión de los mecanismos de detección remota que se emplean actualmente, así como se revisa la inclusión de las guías de ondas cilíndrica y coaxial en IRM.

El tercer capítulo trata sobre las formas en las que se configuran los campos eléctrico y magnético al interior de una guía de ondas de placas paralelas y la forma en la que puede incluirse para RM a intensidades de 3T y menores.

El cuarto capítulo muestra los resultados de los estudios numéricos ejecutados sobre el diseño que se tenía contemplado construir a fin de observar la viabilidad del uso de la guía de placas y predecir las imágenes que obtendríamos. En este capítulo también se muestran los arreglos experimentales montados, los esquemas de los prototipos construidos y las imágenes obtenidas a 3T tanto *in vitro* como *in vivo*.

Las conclusiones obtenidas hasta el momento y el trabajo que se deberá realizar a futuro se listan en el capítulo cinco. Por último, en el sexto capítulo se listan las referencias que apoyaron la escritura de la presente tesis.

Adicionalmente, en el Anexo A se hace una revisión de los conceptos que han hecho posible el desarrollo de la experimentación en RM, se hace un enfoque desde la física moderna de los número cuánticos para el átomo de hidrógeno, de la Frecuencia de Larmor, Constante giromagnética, el Espín y el movimiento de precesión, energía emitida para conformar la señal de RM, número de espines paralelos y anti paralelos, por mencionar algunos.

## II. PRINCIPIOS DE IMAGENOLOGÍA POR RESONANCIA MAGNÉTICA

En el presente capítulo se abordarán los conceptos básicos de la formación de imágenes por RM. Para una consulta más detallada sobre el desarrollo físico, referirse al Anexo A de la presente Tesis.

### II.1. Resonancia Nuclear

En Resonancia Magnética Nuclear (RMN) se requiere la aplicación de un campo magnético externo  $B_0$  lo más homogéneo posible de tal forma que todos los espines en la muestra experimenten la misma frecuencia angular de Larmor  $\omega_0$  (ec. A42, Anexo A)[1]:

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (1)$$

donde  $\gamma$  es la constante giro-magnética que se determina por el cociente del momento magnético del núcleo entre el momento angular descrito por el giro sobre una trayectoria de forma arbitraria (ec. A29, Anexo A). En la tabla 1 se presentan los valores de esta constante para algunos núcleos.

Núcleo	Espín	Constante Giromagnética $\gamma$ (MHz/T)
$^1\text{H}$	$\frac{1}{2}$	42.58
$^{13}\text{C}$	$\frac{1}{2}$	10.71
$^{19}\text{F}$	$\frac{1}{2}$	40.05
$^{31}\text{P}$	$\frac{1}{2}$	11.26

Tabla 1. Valores de constante giromagnética para algunos núcleos susceptibles de magnetizarse.

La IRM en su forma más básica, puede ser entendida en términos de transferencia de energía. Durante la medición, el paciente o la muestra son expuestos a una energía a la frecuencia de radio adecuada para ser absorbida, es decir a  $\omega_0$ . Un tiempo después, esta energía es re-emitida, en ese instante la energía puede ser detectada y procesada [2]. Los protones susceptibles de magnetización al ser sometidos a un campo magnético estático sólo tienen dos posibilidades: se alinean en forma paralela o anti paralela al campo. Al excitar con pulsos de radio frecuencia (RF), los protones se energizan; al regresar a su estado estable liberan el excedente de energía que será la señal de RM que debe captarse para su posterior codificación para formar la imagen.

Una propiedad física de las partículas subatómicas es el giro o 'espín', lo cual hace que cada partícula tenga un momento angular. Se trata de una propiedad intrínseca de la partícula como lo es la masa y la carga eléctrica. El espín se puede entender como la rotación de un núcleo sobre su mismo eje.

Podemos tener tres casos para el espín  $I$ , dependiendo de la masa atómica y del número atómico:

- 1) Núcleos con masa impar tienen un espín fraccional
- 2) Núcleos con masa par y carga par tienen espín igual a cero
- 3) Núcleos con masa par y carga impar tienen espín entero

El núcleo más sencillo es el del hidrógeno, formado únicamente por un protón por lo cual tiene un espín  $I=1/2$  [3].

Como cualquier elemento cargado girando genera un campo magnético, los núcleos con espín diferente de cero también crean un campo magnético alrededor de ellos, éste se comporta de manera parecida a un imán, por lo cual se consideran como dipolos magnéticos (figura 1). Físicamente es representado por un vector  $\vec{\mu}$ , el cual es llamado *momento de dipolo magnético nuclear* o *momento magnético* [2]. Una relación fundamental en la física de partículas es que el vector del momento angular del espín ( $\vec{J}$ ) y el momento magnético están relacionados por:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J} \quad (1)$$

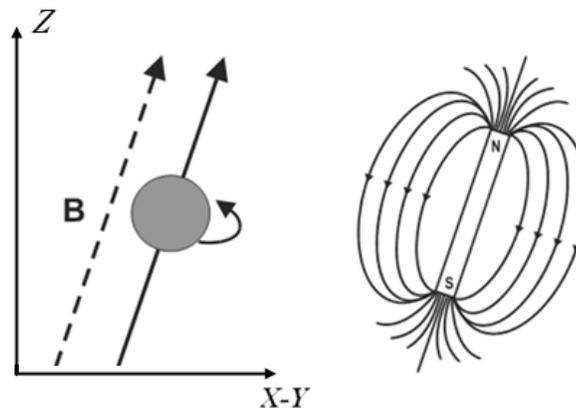


Figura 1. Precesión del núcleo a lo largo del eje del campo  $B$  y representación como un dipolo magnético.

La dirección del vector  $\vec{\mu}$  es completamente aleatoria si la muestra no es sometida a un campo magnético externo, esto es debido al movimiento térmico que también es aleatorio, pero esto no implica que en el equilibrio térmico exista un campo magnético neto alrededor de un objeto macroscópico. Para activar el vector neto de magnetización de la

muestra, es necesario alinear los vectores de los espines. Esto es logrado al exponer la muestra a campos magnéticos intensos [2]. Este campo magnético  $B_0$  por convención se considera que es aplicado en la dirección  $z$ .

Para describir el movimiento de  $\vec{\mu}$  cuando es puesto en un campo magnético externo, se considera que es un vector clásico de momento magnético sin interacciones mutuas. De acuerdo a los conceptos de la mecánica clásica el torque que  $\vec{\mu}$  experimenta por la fuerza del campo magnético externo está dado por  $\vec{\mu} \times B_0 \vec{k}$  (figura 2), que es igual a la velocidad de cambio de su momento angular, es decir

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \times B_0 \vec{k} \quad (2)$$

Por otro lado  $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ , entonces tenemos que

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times B_0 \vec{k} \quad (3)$$

es la ecuación para el movimiento de los espines aislados. La solución a la ecuación está dada de la siguiente forma [4]:

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{xy}(0)e^{-i\gamma B_0 t} \quad (4)$$

$$\mu_z(t) = \mu_z(0) \quad (5)$$

donde  $\mu_{xy}(0)$  y  $\mu_z(0)$  son los valores iniciales; las ecuaciones (4) y (5) describen el movimiento de precesión de  $\vec{\mu}$  alrededor del eje  $z$ , en este caso alrededor de la dirección del campo  $B_0$ , y es llamado *precesión nuclear*.

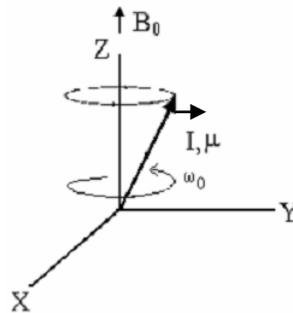


Figura 2. Torque producido por el campo magnético estático.

## II.2. Volumen de Magnetización

El momento magnético total  $\vec{M}$  de una muestra, también llamado magnetización, es la suma vectorial de los momentos magnéticos de los núcleos individuales. En ausencia de

un campo magnético externo los momentos magnéticos individuales se orientan aleatoriamente en el volumen y el momento magnético total es cero (figura 3). Si aplicamos un campo magnético externo  $B_0 = B_0 \hat{z}$ , podemos orientar el vector total de magnetización (figura 4), sólo una pequeña fracción de los dipolos que se alinea con el campo magnético externo ayudarán a crear una magnetización diferente de cero en la dirección  $z$  [5]. Debido a que los dipolos individuales están fuera de fase, la componente transversal  $M_{xy}$  de la magnetización es casi cero.

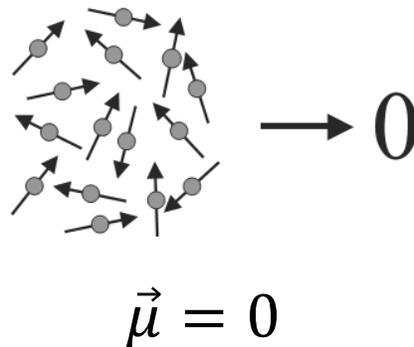


Figura 3. Representación de la suma vectorial de los momentos magnéticos de los núcleos individuales en ausencia de un campo magnético externo.

Entonces podemos representar el comportamiento de un sistema de espines de la siguiente forma:

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{N_s} \vec{\mu}_n \quad (6)$$

donde  $N_s$  es el número total de espines del objeto del cual se obtendrá la imagen.

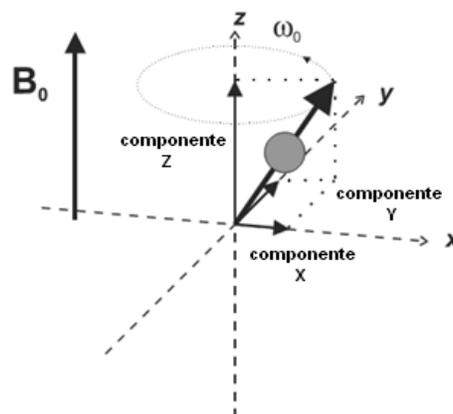


Figura 4. Cuando el protón es sometido a un campo magnético externo, precesa alrededor de un eje paralelo a la dirección de  $B_0$

En realidad, debido al movimiento de precesión de los núcleos, la componente de interés de los vectores de los espines es la proyección sobre z ya que esta componente no cambia de dirección ni de magnitud conforme los núcleos precesan; en cambio, las componentes x y y varían con respecto a  $\omega_0$ .

Si analizamos la magnetización  $\vec{M}$  para un sistema de espín igual a  $\frac{1}{2}$ , como es el caso del hidrógeno, nos encontramos con el caso de que los núcleos sólo pueden tomar una de dos posibles orientaciones con respecto al eje z: paralelos o anti-paralelos al campo externo [6]. Los espines orientados de diferente forma también tendrán una diferencia en cuanto a energías de interacción con el campo magnético externo  $\vec{B}_0$ . Específicamente, de acuerdo a la teoría cuántica (ec. A43):

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar m_I B_0 \quad (7)$$

donde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , con h como el valor conocido como constante de Planck ( $6.626 \times 10^{-34} J s$ )

Por lo tanto, para espines paralelos ( $m_I = \frac{1}{2}$ )

$$E_{\uparrow} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (8)$$

Y para espines anti-paralelos ( $m_I = -\frac{1}{2}$ )

$$E_{\downarrow} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (9)$$

De las ecuaciones anteriores podemos observar que los espines en sentido paralelo se encuentran en un estado de baja energía, mientras que los espines en sentido anti-paralelo se encuentran en un estado de alta energía [6]. La diferencia de energía entre los dos estados de los espines queda determinado como

$$\Delta E = E_{\downarrow} - E_{\uparrow} = \gamma \hbar B_0 \quad (10)$$

En la figura 5 se muestra esquemáticamente la diferencia de estados entre los protones alineados en sentido o en contra del campo.

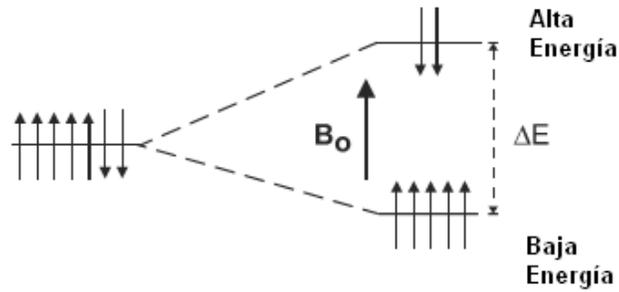


Figura 5. Efecto Zeeman. En ausencia de campo externo (lado izquierdo de la figura) no existe una orientación preferencial de los espines. Al lado derecho de la figura se muestra que en presencia de un  $B_0$ , los espines en sentido paralelo se encuentran en estado de baja energía y los anti-paralelos están en estado de alta energía.

El número exacto de protones en cada nivel de energía (Ver Anexo B) está determinado por la distribución de Boltzmann [7]:

$$\frac{N_{alta\ energía}}{N_{baja\ energía}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad (11)$$

donde  $N_{alta\ energía}$  y  $N_{baja\ energía}$  (figura 5) son el número de protones en los estados de alta y baja energía,  $k$  es la constante de Boltzmann igual a  $1.381 \times 10^{-23} JK^{-1}$ .

Debido a que la separación entre los niveles de energía  $\Delta E$  depende de  $B_0$ , el número de espines en cada estado también depende de la intensidad de  $B_0$ , incrementándose como se incrementa este; es por ello que a mayor intensidad de campo se espera una mayor señal.

Para un volumen de protones a la temperatura del cuerpo (310K) a 1.5T existe normalmente una diferencia de 3 en 1000000 protones en estado de baja energía con respecto a los que se alinean en dirección de alta energía [4]. Esta desigualdad en el número de protones en cada estado de energía significa que la suma vectorial será diferente de cero y se alineará en forma paralela a la dirección del campo magnético externo. En otras palabras, los tejidos se polarizarán o se magnetizarán en presencia de  $B_0$  con un valor de  $M_0$ , conocido como magnetización neta. La magnetización neta será en la misma dirección que  $B_0$  y no variará en el tiempo. Para los tejidos del cuerpo, la magnitud de  $M_0$  es proporcional a  $B_0$ :

$$M_0 = \chi B_0 \quad (12)$$

donde  $\chi$  es conocida como la susceptibilidad magnética.

### II.3. Condición de Resonancia

Recordando que la frecuencia de precesión que experimenta el núcleo, en presencia de un campo magnético externo  $B_0$  está dada por la ecuación (1), tenemos que la frecuencia de Larmor es la frecuencia natural de resonancia del sistema espines  $\vec{M}$ . Podemos observar que la frecuencia de resonancia es linealmente dependiente de la intensidad del campo externo y de la constante giromagnética. Esta relación es la base física para lograr la especificidad de los núcleos, es decir la diferencia en frecuencias de resonancia para los diferentes núcleos es la que permite obtener imágenes de alguno de ellos sin ruido ocasionado por otros núcleos que sean susceptibles de precesar.

En la práctica, un sistema de espines puede tener un intervalo de frecuencias de resonancia [2]. A cada grupo de espines que comparten la misma frecuencia de resonancia se le llama *isocromático*. Existen dos razones por las cuales un sistema espín magnetizado tiene múltiples isocromáticos: 1) por la existencia de inhomogeneidades en el campo  $B_0$ , y 2) por el efecto de corrimiento químico.

De la ecuación (1) se puede ver que si se aplica un campo  $B_0$  no homogéneo, espines con el mismo valor de  $\gamma$  tendrán diferentes frecuencias de Larmor en diferentes localizaciones espaciales. El desplazamiento químico es debido a que los núcleos en un sistema de espines están interactuando con diferentes medios químicos (moléculas) en una muestra heterogénea. Dado que cada núcleo de una molécula está rodeado por electrones orbitando, y estos electrones girando producen un campo magnético débil propio, que crea un “blindaje” para los núcleos en diferentes grados dependiendo de la posición del núcleo en la molécula. El campo magnético efectivo que el núcleo experimenta es

$$\widehat{B}_0 = B_0(1-\delta) \quad (13)$$

donde  $\delta$  es la constante de blindaje tomando valores positivos o negativos. Entonces la frecuencia de resonancia de los núcleos será:

$$\widehat{\omega}_0 = \omega_0 - \Delta\omega = \omega_0(1-\delta) \quad (14)$$

La ecuación (14) indica que los espines en diferentes ambientes químicos tendrán desplazamientos de sus frecuencias de resonancia aún cuando  $B_0$  sea perfectamente homogéneo (Tabla 2).

Compuesto	Frecuencia de Resonancia [Hz]	Desplazamiento $\delta$
Tetrametilsilano (TMS)	90 000 000	(referencia)
Bromuro de Metilo ( $CH_3Br$ )	90 000 237	230/90=2.63ppm
Dibromometano ( $CH_2Br_2$ )	90 000 441	441/90=4.90ppm
Bromoformo ( $CHBr_3$ )	90 000 614	614/90=6.82ppm

Tabla 2. Ejemplo de desplazamiento en frecuencia en estudios de RM de  $^1H$  a 2.11T (90MHz). El TMS se considera como la referencia con un desplazamiento igual a cero.

El efecto macroscópico al aplicar un campo magnético sobre una muestra de núcleos con espín diferente de cero, es la generación de un único vector que representa al volumen de magnetización  $\vec{M}$  y se orienta en la dirección del campo estático. A pesar de que existe una componente transversal microscópica para cada vector de momento magnético de cada uno de los núcleos, la componente macroscópica transversal de  $\vec{M}$  es prácticamente cero en el equilibrio porque los momentos magnéticos de precesión de cada núcleo tienen fases aleatorias, entonces existirá una diferencia de fase entre los núcleos de la muestra. El hecho de establecer una coherencia en cuanto a fases entre los espines precesando “aleatoriamente” en un sistema de espines magnetizado es conocido como *resonancia*.

La coherencia en fase se establece por la aplicación de una fuerza externa denotada como  $\vec{B}_1(t)$ , la energía que lleva esta radiación electromagnética con frecuencia  $\omega_{rf}$  es:

$$E_{rf} = \hbar\omega_{rf} \quad (15)$$

Cuando un protón es radiado con energía a la frecuencia adecuada ( $\omega_0$ ), este será excitado del estado de más baja energía al estado de más alta energía. Para generar una transición coherente de los espines de un estado a otro se debe cumplir el criterio conocido como *condición de resonancia*, de tal forma que la energía de la radiación debe ser igual a la diferencia de energía entre los estados del espín. Entonces, por la ley de Planck:

$$\hbar\omega_{rf} = \Delta E = \hbar\gamma B_0/2\pi = \hbar\omega_0 \quad (16)$$

por lo que:

$$\omega_{rf} = \omega_0 \quad (17)$$

La ecuación (17) muestra cuantitativamente la condición de resonancia, por lo tanto si se aplica una fuerza adicional  $\vec{B}_1(t)$  esta deberá oscilar a la frecuencia  $\omega_0$  para que se cumpla la condición de resonancia.  $B_1$  es un campo magnético, el cual es de corta duración y oscila en el intervalo de las radiofrecuencias, por ello también es conocido como pulso de RF, normalmente es aplicado por algunos micro o milisegundos. La expresión que describe a

este campo magnético transitorio se muestra en la ecuación (18). En comparación con  $B_0$ ,  $B_1$  es mucho más débil, por ejemplo  $B_1 = 50mT$  mientras  $B_0 = 1.5T$ .

Podemos describir matemáticamente un pulso de RF de la siguiente forma:

$$\vec{B}_1(t) = 2B_1^e(t) \cos(\omega_{rf}t + \varphi) \quad (18)$$

donde

$B_1^e(t)$ : Función envolvente del pulso

$\omega_{rf}$ : Frecuencia del pulso de RF

$\varphi$ : Ángulo de fase inicial

#### II.4. Las ecuaciones de Bloch

La razón de cambio del momento angular es igual al torque que actúa sobre el sistema (ecu. 3). Considerando la suma de todos los momentos magnéticos nucleares del volumen (ecu. 6) y tomando en consideración solo un isótopo,  $\gamma$  tendrá el mismo valor para todo el sistema, de tal modo que

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0 \quad (19)$$

Si el núcleo es puesto en un campo magnético estático  $B_0$ , en el equilibrio térmico la magnetización se alinearán con  $z$  y será [2]:

$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = M_0 = \chi B_0 \quad (20)$$

Cuando la componente de magnetización  $M_z$  no se encuentra en el equilibrio térmico, suponemos que regresa al equilibrio a una velocidad proporcional a la partida del valor del equilibrio:

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \quad (21)$$

donde  $T_1$  es conocido como el tiempo de relajación longitudinal.

Considerando la ecuación 21, la componente  $z$  de la ecuación de movimiento (ecu. 19), se expresa como

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(M \times B_0)_z + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \quad (22a)$$

La ecuación 83a nos dice que la magnetización total, además de precesar alrededor del campo magnético, también se relajará hacia el valor en equilibrio  $M_0$ .

De igual forma, las componentes transversales de la magnetización decaerán a cero para alcanzar el equilibrio. Podemos escribir las ecuaciones de la relajación transversal del siguiente modo:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(M \times B_0)_x - \frac{M_x}{T_2} \quad (22b)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma(M \times B_0)_y - \frac{M_y}{T_2} \quad (22c)$$

El conjunto de ecuaciones 83 es conocido como ecuaciones de Bloch. Estas ecuaciones no describen todos los fenómenos de espín, particularmente no aquellos en sólidos [2].

#### II.4.1. Precesión libre y relajación

Después de que un sistema de espines magnetizado ha sido sacado del equilibrio térmico por un pulso de RF, según las leyes de la termodinámica, regresará a su estado estable siempre que el tiempo sea suficiente para eliminar la fuerza externa. Este proceso es caracterizado por una precesión de  $\vec{M}$  alrededor del campo  $B_0$ , llamado *precesión libre*; una recuperación de la magnetización longitudinal  $M_z$ , llamada *relajación longitudinal*; y la destrucción de la magnetización transversal  $M_{xy}$ , llamada *relajación transversal*. Los fenómenos de relajación son causados por el intercambio de energía entre un espín y otro, y entre el espín y sus alrededores [8]. Estos tipos de interacciones son llamados *espín-espín* y *espín-red*, respectivamente.

La relajación espín-espín es debida a la interacción entre los momentos magnéticos nucleares. El campo magnético instantáneo que experimentan los núcleos está determinado por el campo magnético externo aplicado  $B_0$ . Sin embargo, existe también una contribución al campo magnético local de cualquier otro núcleo que pase cerca. Estas interacciones dipolo-dipolo causan que las velocidades de precesión de los núcleos individuales sean ligeramente diferentes. El resultado es una pérdida de coherencia en la fase, de tal forma que la componente de magnetización transversal decae progresivamente a cero (Figura 6). La constante de tiempo del decaimiento de  $M_{xy}$  está determinada por el tiempo  $T_2$ .

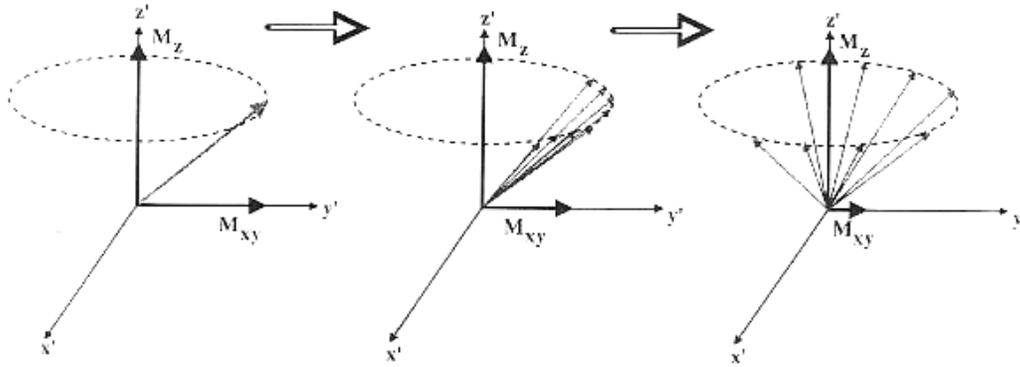


Figura 6. Inmediatamente después de aplicar un pulso de RF existe un valor de  $M_{xy}$ , el cual decae a medida que los núcleos, como se muestra esquemáticamente con los vectores, empiezan a tener diferentes velocidades de precesión, causando un comportamiento aleatorio, cuyo resultado es una suma vectorial cercana a cero.

La relajación espín-red causa que los momentos magnéticos precesando se reajusten gradualmente con  $B_0$ . Entonces la componente  $M_z$ , paralela al campo  $B_0$ , decae hacia su estado de equilibrio  $M_0$ , en un tiempo conocido como  $T_1$  (figura 7). Una vez que el vector de magnetización ha regresado al estado estable, ya no es posible que exista magnetización transversal. Así  $T_2$  es siempre menor o igual a  $T_1$  [8].

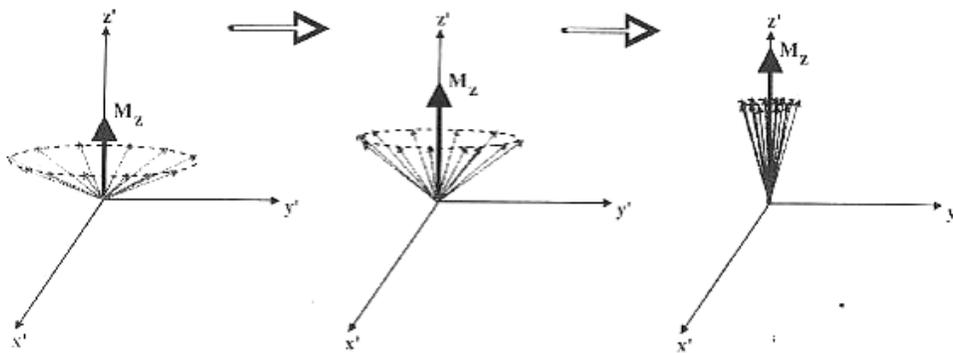


Figura 7. Debido a los intercambios de energía de cada espín con la red (que crean el resto de los espines), existe un decaimiento progresivo hacia el estado estable de la componente longitudinal de magnetización.

## II.5. Ángulo del pulso de RF (Flip Angle)

Como resultado de una precesión forzada por la aplicación temporal de un campo magnético adicional  $\vec{B}_1$ , el volumen de magnetización es puesto relativamente lejos del eje  $z$ , creando una componente transversal que puede ser medida; esto es debido a que el

pulso de RF es aplicado en dirección perpendicular al campo  $B_0$ . El ángulo de brinco  $\alpha$  es definido como el mínimo ángulo entre  $\vec{M}$  y el eje z.

Si un pulso de RF es capaz de rotar  $\vec{M}$  alrededor de la dirección del campo  $\vec{B}_1$ , es decir rotar la magnetización  $90^\circ$  es llamado  $\frac{\pi}{2}$ , si rota  $\vec{M}$   $180^\circ$  es un pulso  $\pi$ ; el ángulo  $\alpha$  puede tomar cualquier valor intermedio.

Cuando el transmisor del pulso de RF (Antena de Radiofrecuencia emisora) es apagado, los protones empiezan a re-alinearse y regresan a su orientación en equilibrio, con ello liberan energía a la frecuencia  $\omega_0$ . Si un arreglo de alambre (antena receptora) es puesto perpendicular al plano transversal, los protones inducen un voltaje en el alambre durante su precesión. Este voltaje inducido (señal de RM) es conocido como FID o Free Induction Decay (Figura 8). La magnitud de la señal FID depende del valor de  $M_0$  inmediatamente después de la aplicación del pulso de RF.

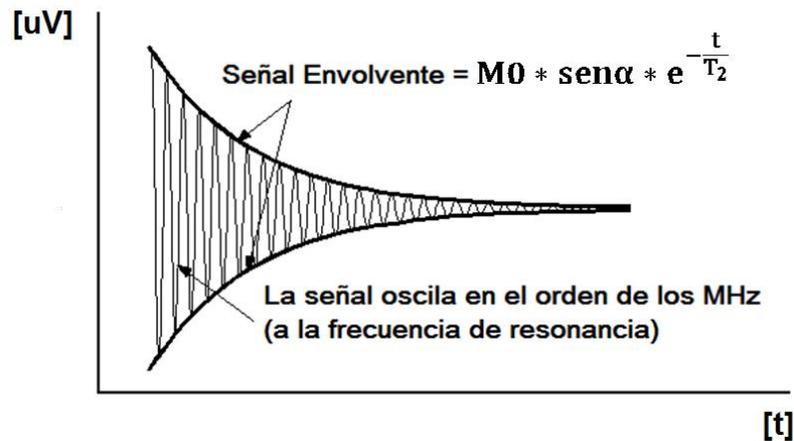


Figura 8. La señal FID decae a medida que los protones de la muestra se relajan.

### II.5.1. Relajación $T_1$

El tiempo de relajación  $T_1$  es el tiempo necesario para que la componente z de  $M$  regrese al 63% de su valor original antes de la aplicación del pulso de RF [9] (Figura 9). La relajación  $T_1$  es el mecanismo por el cual los protones liberan su energía para tomar su orientación inicial. Resolviendo la ecuación de Bloch (ecuación 22a), se obtiene la ecuación 23. La recuperación sigue un comportamiento exponencial creciente, con  $T_1$  como la constante de tiempo que caracteriza el crecimiento:

$$M(t) = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (23)$$

donde  $t$  es el tiempo que transcurre después de que se ha dejado de aplicar el pulso de RF. Después de que ha transcurrido tres veces el tiempo  $T_1$ ,  $M$  se habrá recuperado en un 95% del valor de  $M_0$ . Si normalizamos la ecuación (23) con respecto de  $M_0$ , tenemos el comportamiento de la figura 9, donde el valor máximo de la curva será 1.

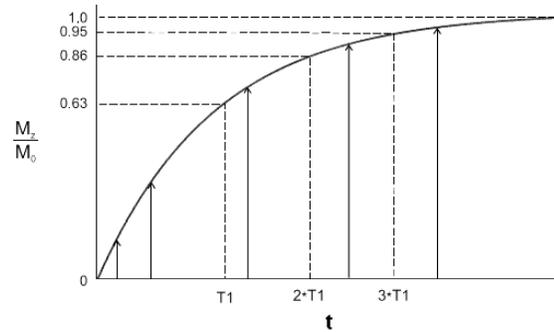


Figura 9. Recuperación de la magnetización longitudinal

## II.5.2. Relajación $T_2$ , $T_2^*$ y Espín-Eco

El tiempo de relajación  $T_2$  es el tiempo necesario para que la componente transversal de  $M$  decaiga en 37% de su valor inicial [9]( Figura 10). Es también conocido como decaimiento espín-espín o tiempo de relajación transversal.

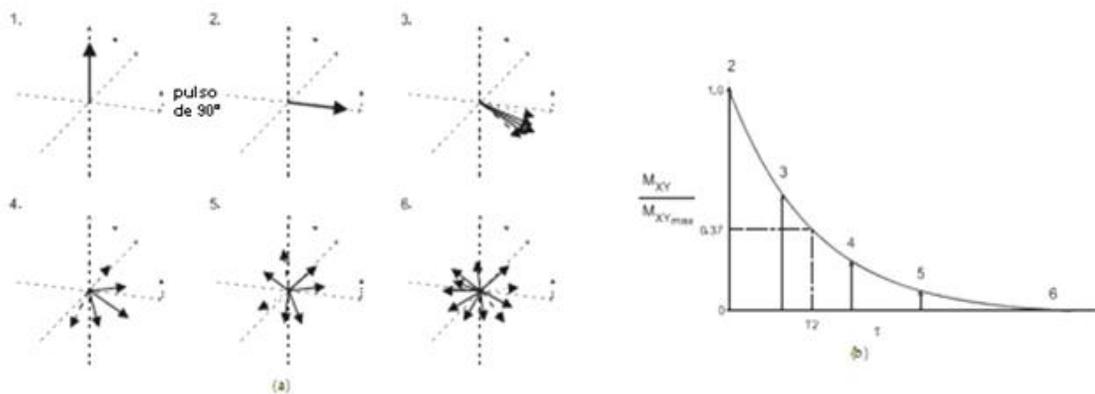


Figura 10. Existe una pérdida progresiva en la fase de los espines (a), que se refleja en un decaimiento de la magnetización transversal (b).

Existen varias causas para la pérdida de coherencia de la magnetización transversal. Una es el movimiento de los espines adyacentes debido a vibraciones moleculares o su rotación. Otra causa es que los protones nunca experimentan un campo 100% uniforme u homogéneo; dado que el protón precesa experimenta fluctuaciones del campo magnético local, causando variaciones en  $\omega_0$  y con ello perdiendo coherencia de fase en la magnetización transversal. La mala uniformidad del campo  $B_0$  proviene de tres fuentes:

1. Las inhomogeneidades en el campo magnético principal. Siempre existe algún grado de uniformidad en  $B_0$  debido a las imperfecciones en la fabricación del imán, la composición de los muros cercanos o alguna otra fuente metálica. Se puede considerar que estas distorsiones son constantes en el tiempo.
2. Inhomogeneidades inducidas por la muestra. Las diferencias en la susceptibilidad magnética o grado de magnetización de los tejidos cercanos (hueso, aire, etc.), pueden distorsionar el campo magnético local cerca de las interfaces entre los diferentes tejidos. Estas inhomogeneidades son de magnitud constantes y están presentes mientras el sujeto se encuentre dentro del imán.
3. Las antenas gradientes para producir la imagen. Para la codificación espacial de la señal se ocupa un disturbio en el campo magnético que también crea un desfaseamiento en los protones. Estas inhomogeneidades son transitorias durante la medición.

Un diseño adecuado de la secuencia de pulsos elimina a los gradientes de la imagen como fuentes de desfaseamiento. Las otras fuentes contribuyen con el tiempo total de relajación transversal  $T_2^*$ :

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{2M}} + \frac{1}{T_{2MS}} \quad (24)$$

donde  $T_{2MS}$  es el desfaseamiento debido a las inhomogeneidades del campo magnético principal y  $T_{2M}$  es el tiempo de desfaseamiento debido a las diferencias de susceptibilidad magnética. El decaimiento de la magnetización transversal después de que se ha aplicado un pulso de  $90^\circ$  (el FID) sigue un comportamiento exponencial con una constante de tiempo  $T_2^*$  que es más rápida que  $T_2$ :

$$M_{xy}(t) = M_{xyMáx} e^{-\frac{t}{T_2^*}} \quad (25)$$

donde  $M_{xyMáx}$  es la magnetización transversal inmediatamente después del pulso de excitación. Para la mayoría de los tejidos y líquidos, el factor principal en la determinación de  $T_2^*$  es  $T_{2M}$ , mientras que para tejidos con significantes depósitos de aire o cavidades llenas de aire  $T_{2MS}$  determina a  $T_2^*$ .

Algunas fuentes de desfaseamiento de los protones pueden ser minimizadas por la aplicación de pulsos de RF de  $180^\circ$ , como se muestra en la figura 11. El proceso general es:

1. Aplicación de un pulso de  $90^\circ$
2. Un corto lapso de tiempo  $t$
3. Aplicación de un pulso de  $180^\circ$
4. Un segundo lapso de tiempo  $t$

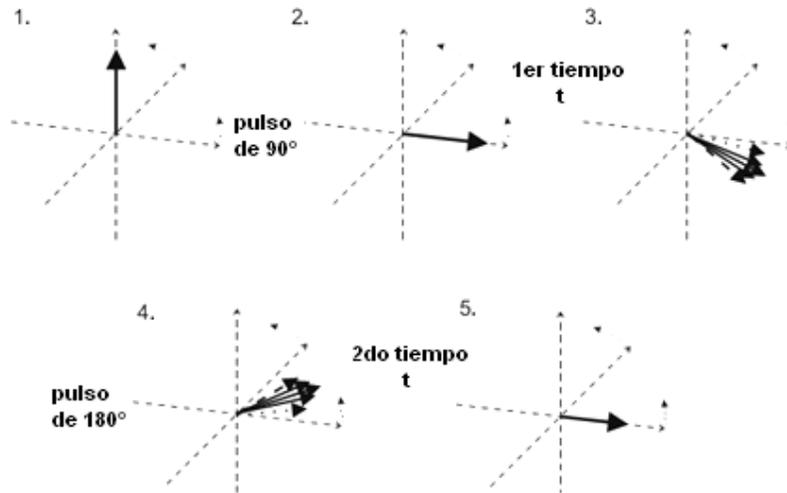


Figura 11. Generación de una señal eco por medio de la manipulación de la fase de los espines del volumen de magnetización.

El pulso inicial de  $90^\circ$  rota  $M_0$  al plano transversal. Durante el tiempo  $t$  el desfaseamiento de protones ocurre a través del proceso de relajación  $T_2^*$  y con ello se da la pérdida en la coherencia transversal. La aplicación del pulso de RF de  $180^\circ$  hace que los protones regresen en fase a la frecuencia de resonancia. La velocidad y la dirección de precesión para los protones no cambian, sólo sus fases relativas. Si transcurre otro tiempo  $t$  los protones recuperaran su coherencia transversal. Esta reformación en la coherencia de la fase induce otra señal en la antena receptora, conocida como espín-eco. Las fuentes de desfaseamiento que no cambian durante los dos intervalos de tiempo—las inhomogeneidades en el campo magnético principal y las diferencias en susceptibilidad magnética—son eliminadas debido a que los protones experimentan exactamente las mismas interacciones antes y después del pulso de RF de  $180^\circ$ . Esto quiere decir que la contribución de la relajación  $T_2^*$  de esas fuentes estáticas desaparecerá. Sólo la interacción espín-espín—no es afectada por el pulso de  $180^\circ$  a fin de que las pérdidas de coherencia en fase y la amplitud de la señal para un espín-eco sean debidas únicamente a la relajación  $T_2$ .

Una diferencia importante entre los tiempos de relajación  $T_1$  y  $T_2$  está en la influencia de  $B_0$ .  $T_1$  es muy sensible a  $B_0$ , con altos campos es factible medir tiempos  $T_1$  largos.  $T_2$  es relativamente insensible a  $B_0$ , sobre todo si se habla de altos campos como los que se utilizan en IRM. Solamente a bajas intensidades de campo (menores a  $0.05T$ ) existirían cambios significantes en  $T_2$ . Las otras componentes de  $T_2^*$  ( $T_{2M}$  y  $T_{2MS}$ ) tienen mayor contribución a altos campos. Una buena uniformidad en el campo magnético es más difícil de obtenerse a altos campos magnéticos, de tal forma que  $T_{2M}$  será más corto. Al incrementar  $B_0$  también se causan mayores diferencias en  $M_0$  entre dos tejidos con diferente susceptibilidad magnética, produciendo un  $T_{2MS}$  más corto. El resultado es que en la técnica de ponderación en  $T_2$  existirá poca sensibilidad a  $B_0$ , mientras que la técnica

de ponderación en  $T_2^*$  presentará mayores diferencias en cuanto a la señal entre más intenso sea  $B_0$ .

## II.6. Ubicación espacial de la señal

El paso inicial en la IRM es la localización de la excitación de los pulsos de RF en una región del espacio, esto es posible por el uso de una excitación selectiva en frecuencia en combinación con un gradiente conocido como gradiente de selección de rebanada ( $G_{SS}$ ). La intensidad del gradiente junto con la excitación por medio de pulsos de RF con ciertas características (amplitud, duración, contenido frecuencial), determinan el ancho y la posición de la rebanada.

En las secciones anteriores se ha descrito la relación entre la frecuencia de la energía que los protones absorben y la intensidad del campo magnético que éstos experimentan. La IRM utiliza esa dependencia de frecuencias con el campo para ubicar o codificar espacialmente las señales en diferentes regiones del espacio [11]. El campo magnético externo se puede hacer variar por la aplicación de gradientes de campo magnético. Estos gradientes son pequeñas perturbaciones que se añaden al campo  $B_0$  y que generalmente causan una perturbación total de menos del 1%. Dado que las perturbaciones son lineales, el campo magnético exacto es linealmente dependiente de la localización dentro del imán, y podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$B_i = B_0 + G_T \otimes r_i \quad (26)$$

donde  $B_i$  es el campo magnético en la localización  $r_i$  y  $G_T$  es la magnitud total del gradiente. Existen tres tipos de gradientes: el de selección de rebanada, el de codificación en fase y el de codificación en frecuencia (o de lectura); la orientación física de estos tres gradientes es, hasta cierto punto, arbitraria siempre y cuando se mantengan perpendiculares entre sí. En general, cada fabricante determina en qué dirección del plano cartesiano serán ubicados los gradientes y el manejo por medio de software que estos tendrán. Cada gradiente es aplicado en una sola dirección y durante un corto intervalo de tiempo, por ello pueden ser manejados como pulsos gradientes. La combinación de pulsos gradientes, pulsos de RF, periodos de muestreo de datos y el tiempo entre cada uno de ellos, es imprescindible para la adquisición de una imagen y es conocida como secuencia de pulsos.

Considerando la acción de los gradientes de campo magnético es necesario hacer un nuevo planteamiento de la expresión que define la frecuencia de Larmor dada por la ecuación (1), así tenemos:

$$\omega_i = \gamma(B_0 + G \cdot r_i) \quad (27)$$

donde  $\omega_i$  es la frecuencia de los protones en la posición  $r_i$  y  $G$  es un vector que representa la amplitud total del gradiente y su dirección. Las dimensiones de  $G$  son expresadas en mili tesla por metro ( $mT/m$ ) o gauss por centímetro ( $G/cm$ ), donde  $1G/cm=10mT/m$  [5].

Para una mejor comprensión de la ubicación espacial de las señales pongamos el caso de tres tubos que contienen diferentes volúmenes de agua, y son colocados en las posiciones  $x_1, x_2$  y  $x_3$  (figura 12a); en cada posición se experimentarán campos magnéticos diferentes:  $B_1, B_2$  y  $B_3$  respectivamente. Si se excitan las muestras con pulsos de RF a la frecuencia de resonancia (o de Larmor) del hidrógeno, los protones comenzarán a precesar a diferentes frecuencias  $\omega_1 = \gamma_H B_1, \omega_2 = \gamma_H B_2$  y  $\omega_3 = \gamma_H B_3$ , donde  $\gamma_H$  es la constante giromagnética del hidrógeno ( $42.58MHz/T$ ), teniendo así diferentes señales como se muestra en la figura 12b. Para conformar la imagen, cada una de las señales es interpretada aplicando la transformada de Fourier; considerando las componentes espectrales de las señales en diferentes ubicaciones espaciales de las muestras es posible digitalizar las señales. En el ejemplo de los tubos de agua se tienen tres tipos de frecuencias  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3$  cuyas amplitudes son  $A_1, A_2$  y  $A_3$ , respectivamente, las cuales representan el número de núcleos de hidrógenos de cada tubo (figura 12c) [5]. Así, conociendo la relación entre frecuencias y posición, y conociendo la amplitud tendremos una representación de una imagen unidimensional.

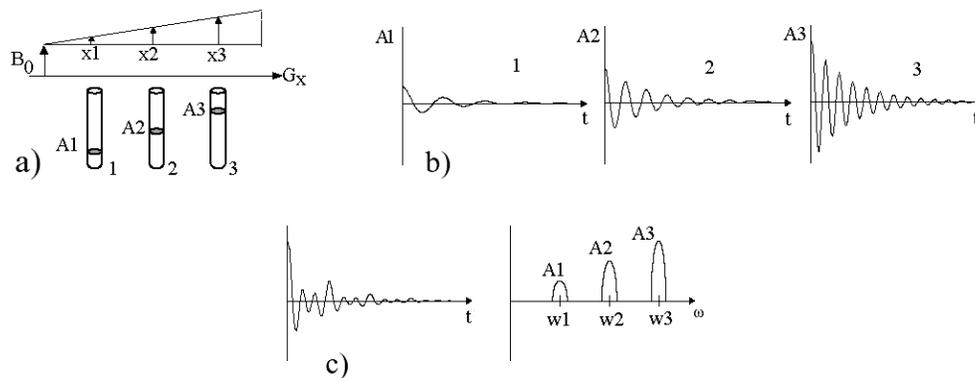


Figura 12. a) Dada la variación lineal del gradiente  $G_x$  las muestras en las posiciones  $x_1, x_2$  y  $x_3$  tendrán diferentes frecuencias de Larmor. b) Diferentes amplitudes y frecuencias para diferentes muestras en distintas posiciones. c) Señal total y sus componentes espectrales.

Un pulso de RF selectivo en frecuencia tiene dos componentes: Una frecuencia central y un intervalo o ancho de banda de frecuencias (típicamente 1-2 KHz). Cuando este pulso es transmitido en presencia de un gradiente de selección de rebanada, una región estrecha del tejido alcanza la condición de resonancia (ecuación 17) y absorbe la energía de RF. Debido a que la frecuencia central  $\omega_i$  del pulso determina la localización particular de la región, se puede cambiar o elegir diferentes posiciones  $z_i$  de la rebanada cambiando la frecuencia central (figura 13). El grosor de la rebanada es determinado por la intensidad (o

amplitud) del gradiente  $G_{SS}$  y el ancho de banda de frecuencias  $\Delta\omega$  incluidas en el pulso de RF:

$$\Delta\omega = \gamma\Delta(G_{SS} * \Delta z) \quad (28)$$

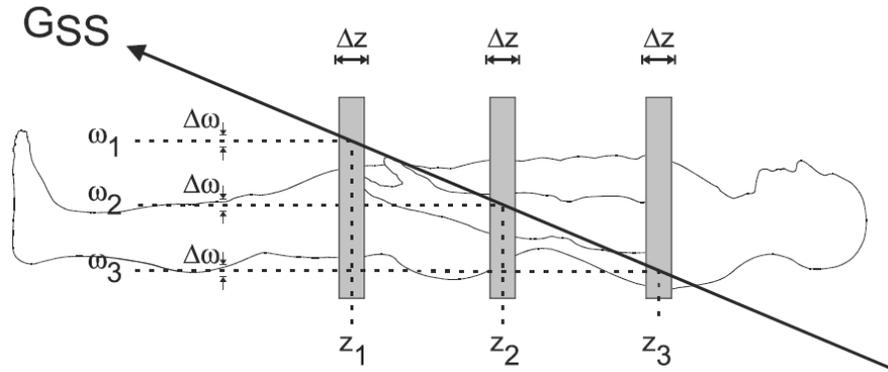


Figura 13. La selección de rebanada es posible gracias al pulso de RF de ancho de banda limitado y a la aplicación del gradiente  $G_{SS}$ .

Normalmente,  $\Delta\omega$  es de un valor fijo de tal forma que el grosor de la rebanada se cambia variando la amplitud de  $G_{SS}$ . Rebanadas más delgadas requieren de un  $G_{SS}$  más intenso.

## II.7. Espacio K

Una vez determinada la región de la que se quiere obtener imagen, será necesario codificar la información que proviene de dicha región, con ello se genera un espectro en 2D o 3D, este espectro es conocido como espacio K. Para realizar el llenado de este espacio se necesitan un par de gradientes más. Normalmente se identifican como gradiente de codificación en fase ( $G_{PE}$ ) en la dirección 'x' de la imagen, y gradiente de codificación en frecuencia ( $G_{FE}$ ) para la dirección 'y'. Estas orientaciones pueden cambiar dependiendo el tipo de corte que se requiera adquirir (axial, sagital o coronal). La figura 14 (izquierda) muestra cómo estaría codificada una imagen en 2D en el espacio K. Según el teorema de la rebanada central de Fourier en 2D, si tomamos la transformada de Fourier de un perfil de línea extraído de una función en 2D (imagen), obtendremos el mismo resultado que si ejecutamos la transformada de Fourier en 2D a la imagen y posteriormente sacamos el perfil de línea de la transformada. Con este análisis, es claro que si el espacio K es una colección de señales (perfiles de línea) del objeto, obtendremos como resultado una imagen si aplicamos la TF en 2D a los perfiles.

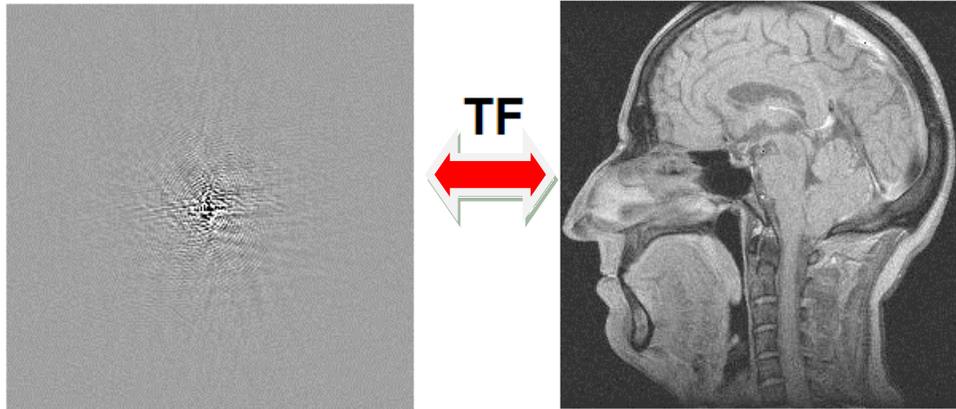


Figura 14. Izquierda, espacio K llenado por medio de la codificación en fase y frecuencia de las señales. Al aplicar la Transformada de Fourier (TF) en 2D obtenemos la imagen final; para regresar nuevamente a los datos del espacio K, se aplicará la TF inversa.

Al momento de llenar el espacio K es necesario muestrear los datos, de tal forma que en dirección de codificación en frecuencia tendremos un muestreo en tiempo, es decir deberemos de cumplir con el teorema de Nyquist. En la dirección de codificación en fase se debe variar la amplitud del gradiente aplicado para llenar cada renglón del espacio K, esto se hará en pasos determinados por el llamado tiempo de repetición (TR) de las secuencias de pulsos (Figura 15). Para llenar una matriz de 128x128 debemos muestrear 128 datos en dirección de frecuencia y aplicar 128 valores diferentes de gradiente de codificación en fase, lo cual implicará 128 periodos de tiempo de repetición. Así, si la matriz de la imagen requiere 256 píxeles en  $y$  y mantenemos el mismo TR, el tiempo de adquisición sería el doble de una imagen con 128 píxeles.

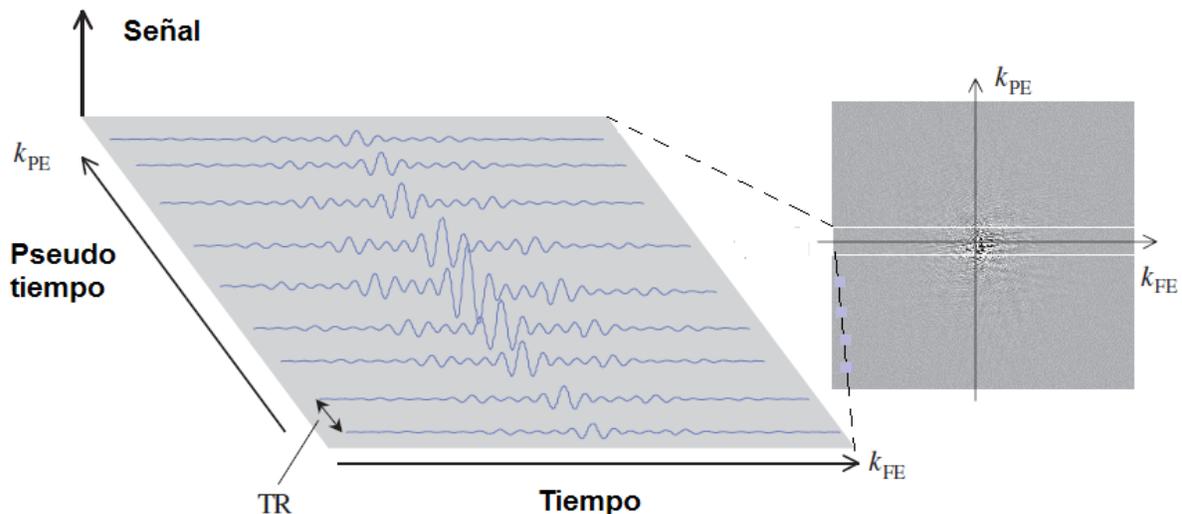


Figura 15. Acercamiento a las líneas de espacio K y la forma de llenado.

## II.8. Resolución y Campo de Visión

En una adquisición completa la señal se muestrea  $M$  veces en intervalos  $\Delta t$  en dirección de codificación en frecuencia, y la secuencia se repite  $N$  veces incrementando cada vez el gradiente  $G_{PE}$  de la siguiente forma

$$G_{PE}(n) = \Delta G * n \text{ para } n = -\frac{N}{2} \text{ a } \frac{N}{2} - 1 \quad (29)$$

El tamaño de la matriz de adquisición es  $M \times N$ . La máxima resolución está determinada por el tamaño del píxel, que a su vez depende de la intensidad del gradiente y del número de puntos o adquisiciones en una determinada dirección:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma G_{FE} M \Delta t} \text{ y } \Delta y = \frac{1}{\gamma \Delta G N \tau} \quad (30)$$

donde  $\tau$  es la duración del  $G_{PE}$ . El tamaño de una imagen o el campo de visión (FOV), está determinado por el inverso del mínimo paso de frecuencia espacial

$$FOV_{FE} = \frac{1}{\gamma G_{FE} \Delta t} \text{ y } FOV_{PE} = \frac{1}{\gamma \Delta G \tau} \quad (31)$$

Para incrementar la resolución para un FOV fijo (disminuir el tamaño del píxel) se pueden realizar tres acciones: Incrementar la intensidad de los gradientes, disminuir el tamaño de la matriz o incrementar el tiempo de muestreo (solo para codificación en frecuencia). Para disminuir el FOV manteniendo el tamaño de la matriz se puede incrementar la intensidad de los gradientes o incrementar el tiempo de muestreo (solamente en dirección de frecuencia).

### III. DETECCIÓN REMOTA EN IRM

En la generación y recepción de la señal de Resonancia Magnética (RM) se utilizan antenas de RF, que deben colocarse lo más cerca posible a la muestra. Para alimentar las antenas y para transmitir la señal captada por ellas hacia los preamplificadores se utilizan cables coaxiales, cuya longitud se ve limitada por el valor de  $\frac{1}{4}\lambda$ , es decir un cuarto de la longitud de onda a la cual se está trabajando. En contra parte, el manejo de cables coaxiales de gran longitud afecta el desempeño de la antena, esto es debido a la atenuación intrínseca de cada cable proporcionada por el fabricante, viéndose reflejado en una disminución de la ganancia de la antena, así como del factor de calidad. En muchos otros casos, por la interacción del cable consigo mismo, es decir que llegara a presentarse una curvatura, lo que representa un nuevo circuito resonante, cuyos armónicos pueden estar muy cerca de la frecuencia de resonancia de la antena o sobreponerse a ésta. En el caso más desafortunado, alguno de los armónicos del cable, aún encontrándose completamente rígido, se puede llegar a traslapar a la frecuencia de resonancia.

Como una alternativa para solucionar los problemas mencionados anteriormente, se emplean los comúnmente llamados “baluns” (acrónimo del inglés, balance to unbalance) que no son otra cosa que circuitos que acoplan impedancias. Estos tienen la desventaja de que además necesitan ser alimentados por una corriente, y la adición de componentes al circuito de la antena y al cable coaxial hace que el factor de calidad del dispositivo generado sea pobre. Uno de los balanceadores es la llamada “bazuca”, que requiere un recubrimiento metálico de longitud igual a  $\frac{1}{4}\lambda$  y cortocircuita con el blindaje de la línea (figura 16). Eléctricamente la impedancia de entrada en el extremo no cortocircuitado de la línea de transmisión, será muy grande (idealmente infinita) [12].

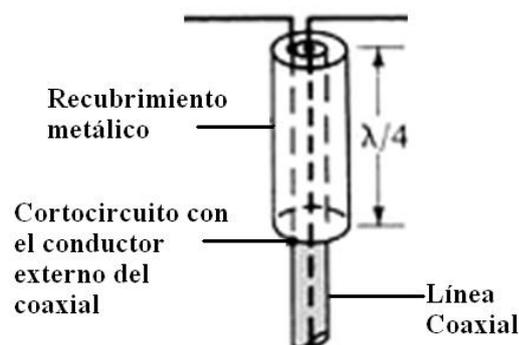


Figura 16. Balanceo de circuito por medio de la configuración “bazuca”.

Una vez que se ha logrado el balance de impedancias del diseño de antena a la línea de transmisión, es necesario emplear filtros de respuesta rápida, lo que implica un mayor costo de desarrollo y que la señal requiera de etapas de pre-amplificación para no perder la información almacenada en ella.

Se han hecho esfuerzos por obtener señales de RM de tal forma que se libere la pérdida de señal que intrínsecamente presenta el fenómeno de inducción magnética, principalmente a campos bajos, es decir a campos magnéticos estáticos del orden de mili Tesla [13]. Esto ha llevado consigo el desarrollo de dispositivos capaces de adquirir de forma remota la señal de RM, a estos dispositivos se les dio el nombre de magnetómetros. Lo anterior con la finalidad de lograr diseñar equipos portátiles de RM.

En sistemas donde el imán es de bajo campo no se requiere el sistema de enfriamiento que utilizan los sistemas superconductores, lo que hace que se pueda reducir el tamaño y peso del imán; también se reducen los costos de fabricación y mantenimiento, y se puede tener un acceso para muestras más grandes comparado con los sistemas de alto campo, todo esto a expensas del cociente señal a ruido (CSR) y a la resolución [13]. Esto requiere una alta sensibilidad en el sistema de recepción; además se necesita una codificación particular, debido a que se separan la etapa de codificación y detección.

### **III.1. Codificación remota**

En el equilibrio todos los espines nucleares son alineados en la dirección del campo magnético estático. Un pulso selectivo excita los espines de acuerdo a su localización espacial. La fase de los espines en el plano transversal debe ser guardada a lo largo de la dirección longitudinal, de tal forma que sólo se verá afectada por la relajación T1. Dado que T1 es mucho más grande que el tiempo de relajación transversal T2\*, los espines pueden fluir hacia el detector antes de que exista una pérdida de señal [13]. En la etapa de detección, la lectura de la magnetización guardada provee información acerca de la fase, que a su vez proporciona la descripción completa del estado de los espines (como en la RMN tradicional). Debido a que el detector (magnetómetro) tiene un volumen mucho menor que el de la muestra, se necesitan varios pulsos para detectar completamente la magnetización codificada. Esto resulta en una curva que varía con respecto al tiempo, que mide el 'tiempo de vuelo' (TOF, time of flight) de los espines codificados al detector. Debido a que los primeros espines que llegan no están codificados, la señal tiene un valor máximo. A medida que los espines codificados se mezclan con los espines no codificados, se causa una disminución en la señal total que puede ser observada como un valle en la curva TOF (figura 17). A medida que los espines codificados se alejan del detector, la señal se recupera. La resolución espacial que se tiene en la codificación convencional no se puede alcanzar con este método ya que la antena usada manipula la magnetización pero la codificación debe ser realizada

punto por punto. En la codificación remota, los puntos a lo largo de la señal FID (Free Induction Decay), que es la señal proveniente de la relajación de los protones, son registrados midiendo el tiempo de retraso entre el almacenamiento y los pulsos de detección.

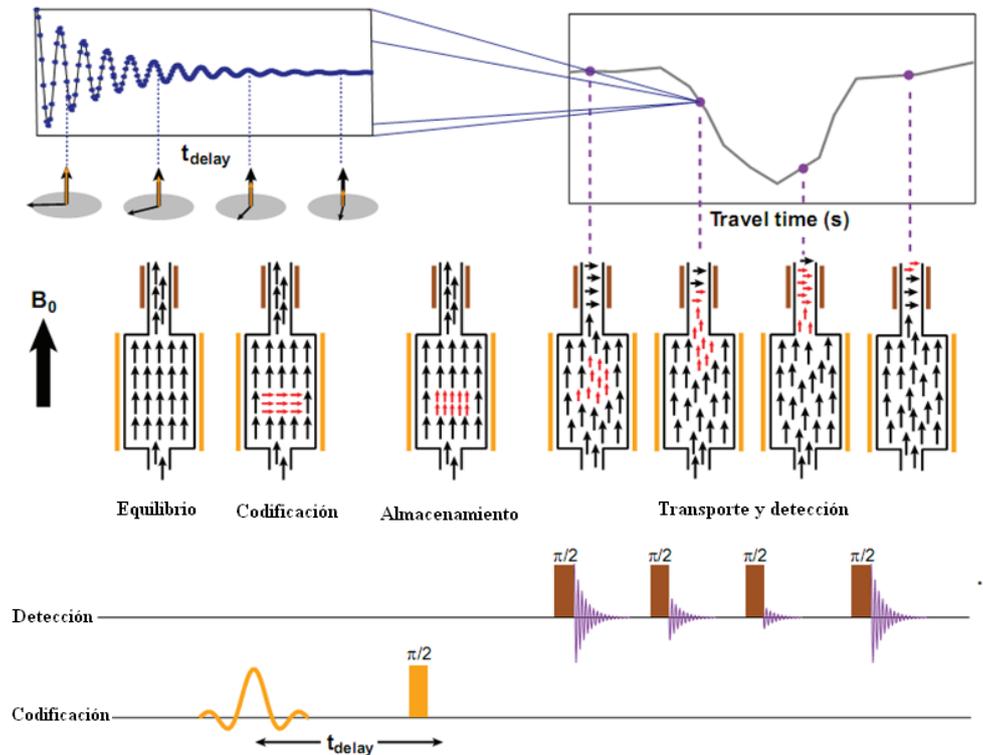


Figura 17. Detección remota. Después de excitar la región de interés, se guarda la fase de los espines; a medida que los espines se acercan al detector se leen por medio de pulsos no selectivos y se colocan en un punto en la curva TOF (arriba a la derecha).

Cada punto en la curva viajera contribuye con un punto al interferograma indirecto (FID) creado por la repetición de los experimentos remotos, cada vez con un punto indirecto diferente.

### III.2. Detección de la señal de RM

Se puede incrementar la sensibilidad de la técnica de RMN por medio de la detección remota de la señal como lo han reportado [14, 15], principalmente con la aplicación de los dispositivos conocidos como magnetómetros. Existe una vertiente que trabaja en la obtención de señales de resonancia magnética, principalmente para espectroscopia, por medio del campo magnético de la tierra (0.05mT). Esto debido a que el campo de la tierra es extremadamente homogéneo comparado con la homogeneidad que se puede tener en cualquier sistema superconductor.

Se han reportado métodos para obtener señales de RM sin la necesidad de usar los grandes escáneres que se tienen disponibles hoy en día para tal utilidad; más aún, se ha llegado a pensar en sistemas de IRM portátiles (figura 18). Desafortunadamente, la codificación espacial de la señal tiene sus desventajas debido a que se obtiene una señal FID indirecta limitando la resolución tanto espacial como temporal.

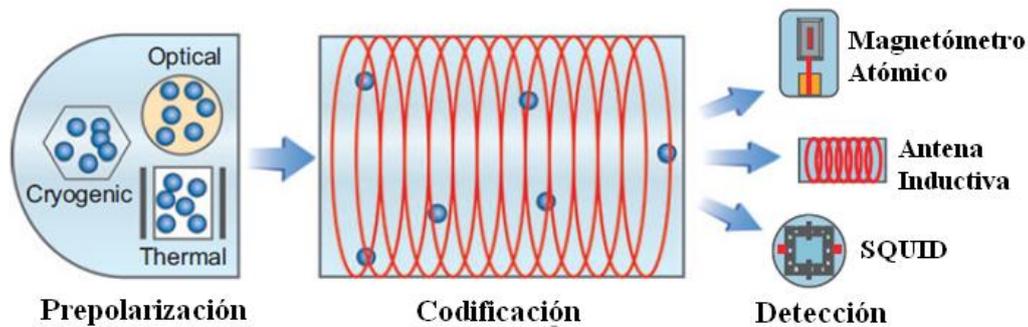


Figura 18. Diagrama de Sistema de RMN a bajos campos. Se requiere una prepolarización con un campo más intenso que el de la etapa de codificación.

El diseño supone una pre-excitación o pre-polarización con una intensidad de 1T lo que significa que se trabajaría con señales en la banda de las audio frecuencias, en donde la variedad de ruido que puede ser añadido a la señal de información es mayor.

La resolución mínima que se ha alcanzado con este sistema es un vóxel de  $50mm^3$ , lo que limita mucho sus aplicaciones [13].

Para este proyecto se extrae el análisis de la forma en que actúan los receptores, pensando en la necesidad de generar dispositivos que reciban una amplitud de señal relativamente grande y que sean inalámbricos. Dentro de la tecnología existente de las formas de detección tenemos:

*Detección por antenas inductivas.* Es la forma convencional de detección de la señal, el campo magnético generado por la señal induce una corriente sobre la antena por la ley de Faraday. Se puede decir que cuenta con una limitada sensibilidad ya que la recepción es proporcional a la intensidad del campo, entonces para bajos campos la amplitud de la señal recibida es pobre.

Una antena puede ser ideal para la codificación pero su sensibilidad es muy pobre cuando la región de interés es pequeña comparada con la antena [16].

*Detección por Dispositivos Superconductores de Interferencia Cuántica (SQUIDS).* Están basados en la oscilación de un voltaje de un alambre superconductor. Esta oscilación es función del flujo magnético a través del alambre. El dispositivo actúa como un transductor flujo-voltaje, donde un

pequeño cambio en el flujo  $\phi$  genera un cambio significativo en el voltaje  $V$  (figura 19); es capaz de obtener señales de RM en campos magnéticos bajos. La sensibilidad es independiente de la intensidad del campo magnético.

Se puede obtener una mayor amplitud de la señal de RM utilizando métodos como obtención de la señal por medio de gases nobles hiperpolarizados tales como el  $^3\text{He}$  o  $^{129}\text{Xe}$  [17, 18], debido a su alta densidad, se tiene el tiempo para codificar la información por medio de detección remota [19].

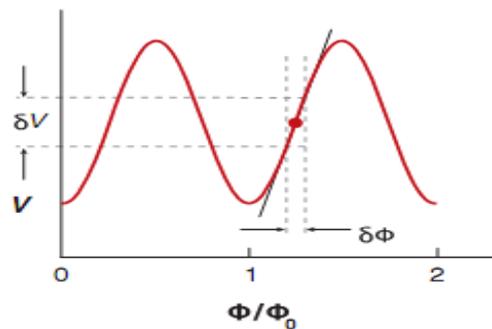


Figura 19. Transducción SQUID, un cambio en el flujo magnético ocasiona un cambio en el voltaje.

La desventaja es que se está hablando de un alambre superconductor, que necesita ser enfriado por criogénicos. Los SQUIDS operan inmersos en helio líquido a la temperatura de 4.2K.

*Magnetómetro de Óptica Atómica.* Utiliza la interacción magneto-óptica entre un haz de láser y vapor de álcali. El haz incidente, que tiene una frecuencia de resonancia cercana a la de la transición electrónica del álcali, genera un estado de coherencia en el vapor de álcali contenido en una celda de vidrio. Los átomos coherentes del álcali interactúan con un haz de prueba (que puede provenir de la misma fuente láser), resultando en una rotación óptica de la polarización del láser o en un espectro de absorción dispersiva. El efecto magneto-óptico depende de la intensidad del campo magnético proveniente de la muestra a medirse. La detección del campo magnético depende de la detección de fotones, los cuales pueden ser medidos con alta sensibilidad por algún detector óptico.

La señal captada por estos magnetómetros requiere de la codificación remota. Xu et al. [20] mostraron imágenes de flujo detectadas por un magnetómetro óptico (figura 20).

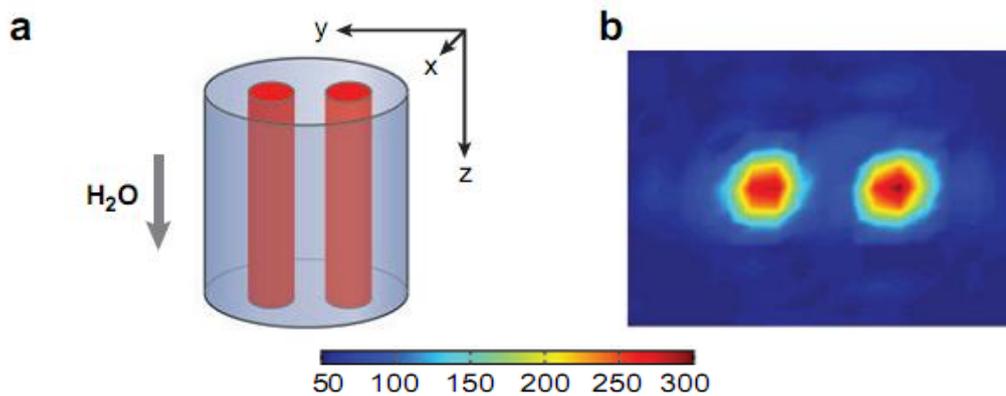


Figura 20. a) Arreglo de capilares inmersos en agua, b) imagen obtenida, corte axial.

### III.3. Las guías de ondas (waveguides) en IRM

A últimas fechas se ha explorado la posibilidad de emplear dispositivos que sean capaces de transmitir la señal de RM sobre una distancia relativamente grande comparada con la que lo hacen los cables coaxiales y que cubran un volumen importante de la muestra, estos dispositivos conocidos como “guías de ondas” son básicamente cilindros de algún metal no-magnético que permiten que la onda electromagnética viaje por su interior sin sufrir pérdidas significativas [21, 22], sus aplicaciones se han centrado hasta el momento en el campo de las comunicaciones.

El concepto de guías de onda fue directamente tomado de la teoría de transmisión de las microondas, debido a que en el mundo de la IRM las intensidades de campo cada vez son mayores, las frecuencias de los protones (frecuencia de Larmor) ya se encuentran en este intervalo del espectro electromagnético.

A pesar de que la guía de ondas permite tener una distancia grande entre el receptor y la muestra, no se han explorado ampliamente en RMN, esto debido a que en los arreglos cilíndricos tradicionales la formación de ondas viajeras a las frecuencias de la RMN es suprimida por las estructuras que rodean la muestra, como las antenas de gradiente, criostatos y blindajes de RF. Las paredes conductoras de las guías de ondas permiten la transmisión de las ondas sólo por encima de alguna frecuencia de corte, que es inversamente proporcional al diámetro del imán.

En los diseños propuestos hasta el momento se han planteado una serie de restricciones relacionadas con las dimensiones e intensidad de campo de los sistemas, poniendo como condición que la implementación sólo es posible en un sistema para humanos. Siendo que se reporta que es necesario utilizar sistemas de 7 Tesla en adelante para trabajar a las altas frecuencias que manejan las guías de onda; pasando con ello a la otra restricción que especifica que es necesario contar con un sistema de un

diámetro del imán grande (mayor a 58cm) [23] para trabajar cerca de la frecuencia de corte de la guía (figura 21).

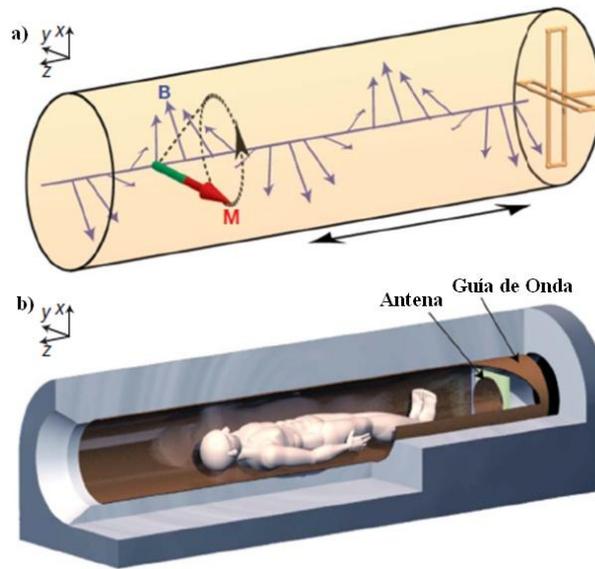


Figura 21. Guía de onda, a) propagación longitudinal (z) del campo magnético dentro de la guía, que parte de la antena y que se refleja posteriormente hacia ella (flecha negra bidireccional), b) esquema de la aplicación para IRM de cuerpo completo.

No obstante la relativamente sencilla implementación o utilización de las guías de ondas para sistemas de cuerpo entero a 7T, los resultados que han mostrado en estudios de extremidades, han abierto el panorama sobre las potencialidades de estos dispositivos en IRM. La resolución espacial que muestran los estudios obtenidos por Brunner et al. [23] es superior a la obtenida con una antena diseñada para alguna aplicación específica (figura 22), a pesar de que el cociente señal a ruido es menor al obtenido con la adquisición convencional.



Figura 22. Comparación entre imágenes obtenidas, a) con la guía de onda, b) con una antena convencional.

En otros experimentos [24] se han obtenido resultados que muestran que la región de la cual se pueden obtener imágenes es notablemente superior empleando guías de onda que utilizando antenas e incluso arreglos de antenas, con estos dispositivos el campo de visión está limitado por las dimensiones de las antenas. Además, el diseño de antenas a 7T posee la importante desventaja de la restricción en cuanto a dimensiones ya que se prefieren antenas pequeñas para obtener un campo local aceptable en cuanto a homogeneidad. Para mostrar los resultados de experimentos sobre regiones grandes ha sido necesario el uso de herramientas computacionales (figura 23); los sistemas de IRM aún no cuentan con algoritmos de reconstrucción específicos, de tal modo que se colecte la señal de toda la región y posteriormente se reconstruya como una sola toma.

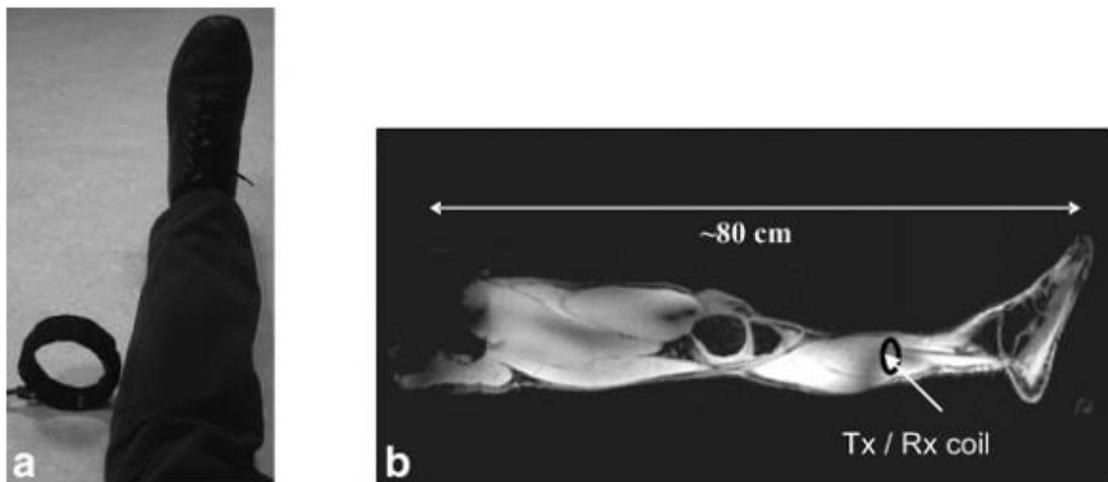


Figura 23. a) Diseño de experimento para obtener imágenes sobre regiones grandes, b) imagen que muestra una cobertura sobre una región de 80cm, obtenida en dos tomas.

El empleo de guías de onda en Resonancia Magnética no solo ha mostrado resultados considerables en el área de imagen, los resultados obtenidos en cuanto a espectroscopia localizada son también prometedores. Los espectros obtenidos por medio de guías de onda muestran calidad aceptable (figura 24), de tal modo que los metabolitos en una sección de músculo pueden ser identificados.

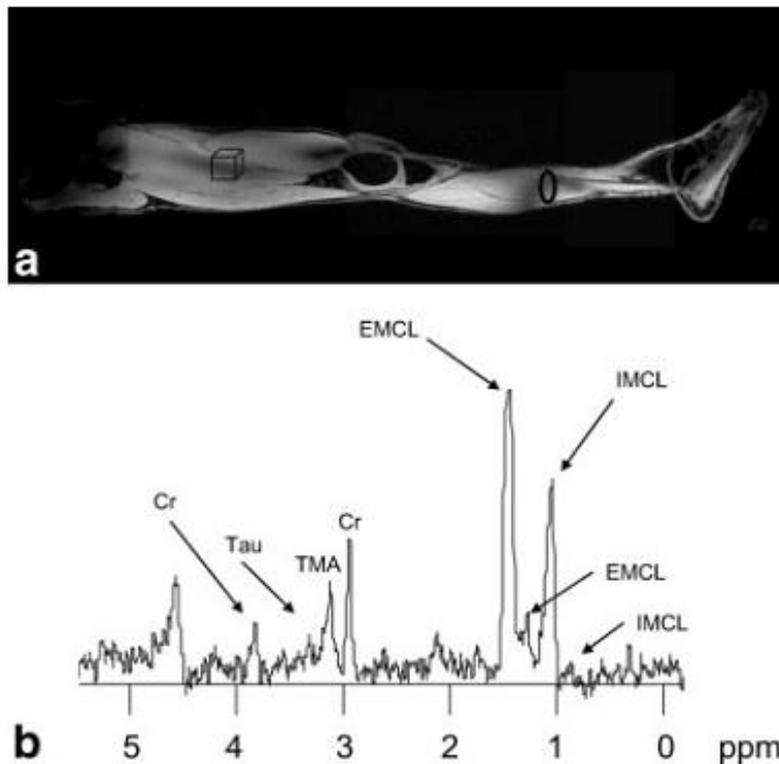


Figura 24. a) Definición de vóxel para espectroscopia localizada, en la imagen se muestra como un cubo. b) Espectro obtenido con el receptor a 30cm de la ubicación del vóxel.

En la figura 24b se muestra el espectro obtenido de un voluntario rastreado en un resonador a 7T de intensidad de campo magnético. En el espectro podemos observar las diversas concentraciones de lípido intramiocelular (IMCL), lípido extramiocelular (EMCL), creatina (Cr), trimetilamonio (TMA) y taurina (Tau), característicos de un espectro de músculo.

### III.4. Propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de onda.

Las guías de onda propagan ondas dentro de un intervalo determinado por su geometría y dimensiones. Para que exista propagación debe de haber una cierta configuración de los campos magnético y eléctrico; a esas configuraciones se les llama modos. Los modos se determinan según la dirección de los campos de las ondas electromagnéticas con respecto a la dirección de propagación. Existen los modos transversales electromagnéticos (TEM) donde tanto el campo eléctrico como el magnético son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Los modos soportados por una guía de ondas circular son los modos transversales magnéticos (TM) donde solo el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación, y los modos transversales eléctricos (TE) donde solo el campo eléctrico es perpendicular a la dirección en que se propaga la onda.

Resolviendo las ecuaciones de Maxwell en forma cilíndrica y considerando las condiciones de contorno para un conductor perfecto, se pueden obtener la constante de propagación  $\beta$  y las distribuciones de campo para cada modo TE y TM dentro de la guía. La constante de propagación, para los modos TE se puede escribir en función de las raíces  $\chi'_{mn}$  de la derivada de la función de Bessel de primer orden [25]. El resultado es:

$$\beta_{mn} = \begin{cases} \sqrt{\beta^2 - \beta_p^2}, & \beta > \beta_p \\ 0, & \beta = \beta_p = \beta_c \\ -j\sqrt{\beta_p^2 - \beta^2}, & \beta < \beta_p \end{cases} \quad (32)$$

donde  $\beta_p = \frac{\chi'_{mn}}{D}$ , con  $D$  como el diámetro de la guía de onda. En (32),  $\beta_c$  es la llamada constante de propagación de corte. Dado que  $\beta_c = \omega_c \sqrt{\epsilon\mu}$ , siendo  $\mu$  la permeabilidad magnética y  $\epsilon$  la permitividad eléctrica, el resultado para los modos TE se escribe como:

$$f_{c\,mn} = \frac{\chi'_{mn}}{\pi D \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (33)$$

La frecuencia de corte  $f_c$  de una guía de ondas es la mínima frecuencia de operación que posee una guía. Las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte no serán propagadas por la guía de ondas. La propagación será con baja pérdida si la longitud de onda de corte de la guía de ondas es mayor a la longitud de onda a transmitir.

Para cada modo de propagación existe una frecuencia o longitud de onda de corte. En la guía de onda circular el límite está determinado por el diámetro interno. En una guía circular el modo con la frecuencia de corte más baja que se transmitirá es el modo 'transversal eléctrico 1,1' ( $TE_{1,1}$ ) y se le denomina 'modo dominante'.

En la siguiente tabla se resumen los valores de corte para algunos modos de la guía de onda circular:

Modos	$\lambda_c$	$f_c$
$TE_{1,1}$	1.71*D	$\frac{c}{1.71xD}$
$TM_{0,1}$	1.31*D	$\frac{c}{1.31xD}$
$TE_{2,1}$	1.03*D	$\frac{c}{1.03xD}$

Tabla 3. Longitudes de onda y frecuencias de corte en función del diámetro  $D$  para una guía de ondas circular ( $f_c = \frac{c}{\lambda_c}$ ), donde  $c = \text{velocidad de la luz} = 3 \times 10^8 \text{m/s}$

Se puede ver que para la frecuencia de  $300\text{MHz}$  (frecuencia del hidrógeno a  $7T$ ), la longitud de onda a la que se trabaja está alrededor de  $1\text{m}$ ; con ello necesitaríamos un diámetro del imán de por lo menos  $58\text{cm}$  para transmitir el modo dominante  $TE_{1,1}$ . En IRM se han popularizado las guías de ondas circulares ya que el escáner presenta esta geometría; en muchos casos los blindajes del propio sistema actúan como guías. La desventaja más importante al utilizar guías de ondas circulares es el gran diámetro requerido.

En esta propuesta se plantea realizar un dispositivo que sirva como guía de ondas para sistemas fijos de IRM con campos magnéticos menores a  $7T$ , conociendo que con ello se pueden obtener imágenes con un campo de visión mayor aún que el obtenido con arreglos de antenas receptoras de 16 elementos. Los resultados de estos experimentos serán presentados en el Capítulo 4, mostrando que es posible obtener imágenes a distancia con buena calidad, tanto de elementos de prueba (phantoms) como de voluntarios humanos. En experimentos recientes los arreglos de antenas trasmisoras han llamado en gran medida la atención, debido a que generan una excitación uniforme sobre volúmenes grandes; el hecho de que la onda no se atenúe al viajar dentro de la guía hace pensar en que de igual forma se puede excitar a la muestra de una manera uniforme. Al poner la antena transmisora a una distancia grande de la muestra también reduce el riesgo de un exceso de energía entregado a la muestra por la proximidad de las antenas. Debido a que es necesario salvaguardar la integridad del sujeto en cuanto a energía suministrada, en IRM se emplea como criterio el valor de la Tasa de Absorción Específica (SAR, Specific Absorption Rate) [26], en este diseño es un parámetro que se contempló en el diseño y desarrollo de la guía de ondas.

### **III.5. Guías de onda sin frecuencia de corte**

Se han publicado un par de trabajos que emplean configuraciones de guía de ondas que son capaces de transmitir el modo TEM, es decir, la frecuencia de corte de estos dispositivos es cero. Sin embargo, estos dos dispositivos fueron publicados a partir de 2011 y, un año después de que nuestro grupo de investigación propusiera utilizar un esquema de guía de ondas que no dependiera de una intensidad de campo magnético en particular ni de un diámetro de imán en específico [27].

Los trabajos mencionados, basan su estudio en la conversión de una guía de ondas circular convencional en una línea de transmisión coaxial. Es de principal importancia hacer notar que la configuración de un conductor central no es una buena alternativa para IRM ya que en los resultados presentados, la pérdida de señal al centro de las imágenes es considerable.

### III.5.1. Ondas viajeras en NMR sin frecuencia de corte

En este modelo de guía de ondas se propone utilizar un conductor central dentro de la guía de ondas, de tal forma que esta se convierta en una línea de transmisión. También se propone que la guía de onda puede ser introducida en un sistema con diámetro pequeño.

La principal ventaja que tiene este diseño es convertirse en una sonda que pueda ser empleada en experimentos de espectroscopia multinuclear, esto debido a que la frecuencia de corte de la sonda es cero. Esto implica que el modo de propagación dominante es el TEM. En la figura 25, se puede observar que el campo magnético generado (línea punteada) circula alrededor del conductor central, perpendicularmente a la dirección de propagación [28]. Esto trae consigo la restricción en las dimensiones de los objetos que pueden introducirse para estudios de NMR, además de que se puede observar que la región cercana al centro de la línea no generará señal.

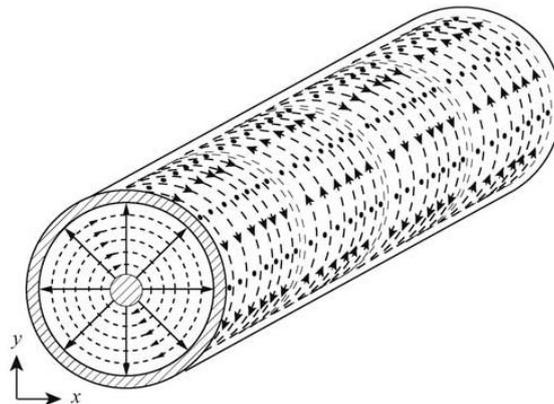


Figura 25. Configuración de campo magnético (líneas punteadas) y campo eléctrico (línea continua) dentro de una línea de transmisión coaxial.

En la figura 26, se observa el arreglo experimental de la línea de transmisión introducida dentro de un espectrómetro de 9.4T y 89mm de diámetro. La muestra, es un tubo en el cual se contiene la mezcla para obtener el espectro y este a su vez tiene que rodear al conductor central, posteriormente es forrado por cobre para formar el conductor exterior de la sonda coaxial.

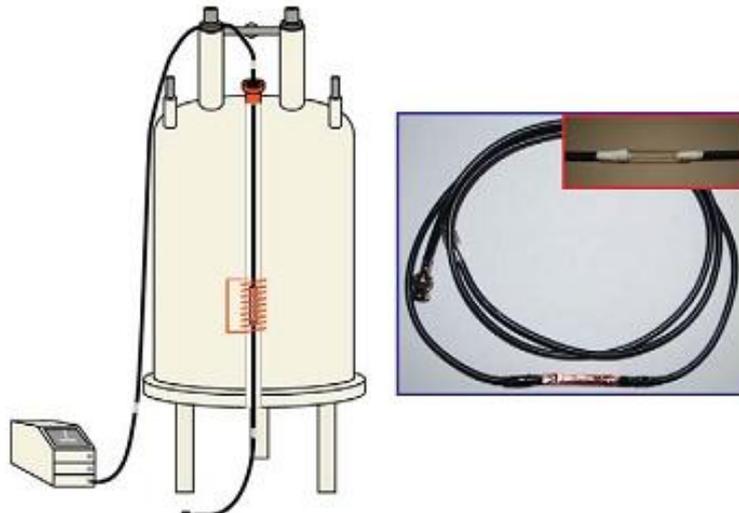


Figura 26. Arreglo experimental de la línea de transmisión coaxial. A la izquierda se muestra dentro de un espectrómetro vertical, a la derecha se observa el arreglo coaxial con el tubo que contiene la mezcla de la que se obtendrá el espectro.

A pesar de que el arreglo experimental de esta sonda coaxial tiene un costo de fabricación bajo y una relativa versatilidad al poder extraer e inyectar la mezcla, es poco útil en la práctica ya que siempre quedan residuos en las paredes del tubo de los compuestos de las mezclas introducidas, además de que el conductor central se degrada con la interacción de diversos compuestos. Otro aspecto a considerar es la permitividad de las mezclas, la cual será diferente para cada caso, lo que hace que la impedancia de la sección de la muestra de la línea de transmisión se vea modificada y necesite hacerse un ajuste para cada mezcla. Además se requeriría trabajar en la realización de tablas de permitividad para compuestos.

Con esta sonda también se pueden realizar experimentos de imagen (Figura 27 c, d y e) [28]. Los resultados son cuestionables en cuanto a calidad, esto debido a que para una intensidad de campo de 9.4T se esperaría una mejor resolución. La pérdida de señal al centro de la imagen es considerable. Sin embargo, estas limitaciones pueden no ser de gravedad para esta aplicación, ya que el principal aporte de este diseño se centra en la espectroscopia por RM.

En la figura 27b, se hace una anotación adicional que indica que el espectro tuvo que ser amplificado por un factor de 3.35, para poder ser comparado con el obtenido con la sonda del fabricante.

Para experimentos de espectroscopia multinuclear, los resultados muestran que la guía de ondas coaxial, puede obtener señales tanto de  $^1H$  como de  $^{31}P$  (figura 28), sin necesidad de cambiar de sensor ni de reajustar la antena [28], como se hace convencionalmente, así como tampoco necesita que exista más de una antena, lo que disminuye el espacio de las muestras que pueden ser introducidas, esto es un aporte importante de la sonda coaxial, ya que el espacio libre que se tiene en un espectrómetro

vertical es reducido, y si se introduce un mayor número de componentes de hardware, este se verá reducido sustancialmente.

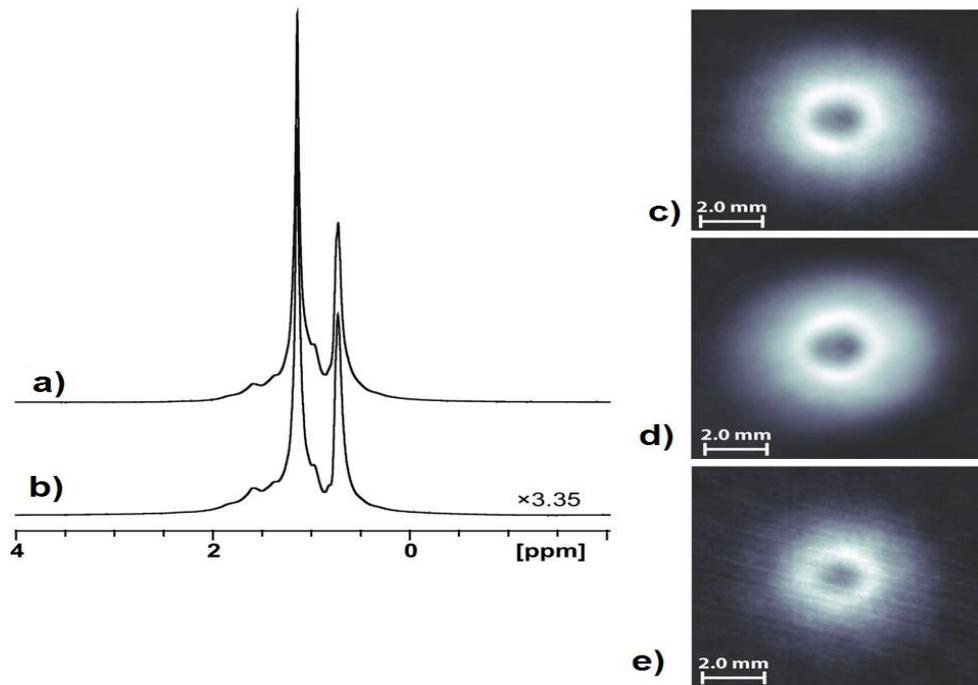


Figura 27. Experimentos utilizando la sonda coaxial. a) y b) Espectro obtenido de aceite mineral con la sonda del equipo (Bruker) y con la sonda coaxial. c), d) y e) son imágenes obtenidas con la sonda coaxial con los casos de una terminación de 50 Ohms, circuito abierto y terminada en corto, respectivamente.

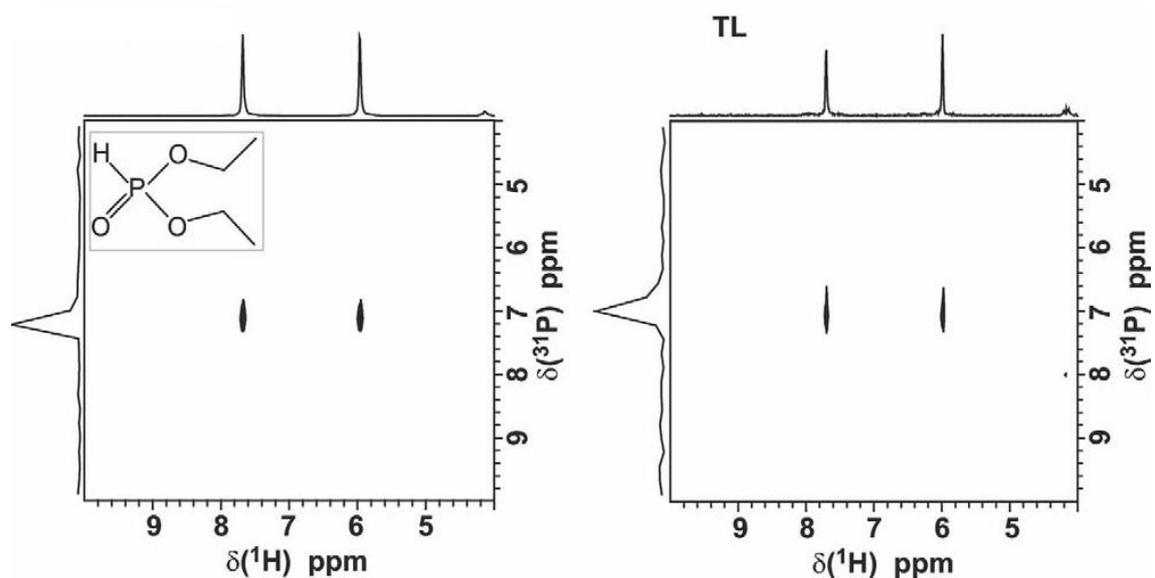


Figura 28. Experimento multinuclear  $^1H - ^{31}P$  con fosfito de dietilo. Del lado izquierdo con la sonda del equipo, del lado derecho con la línea de transmisión coaxial. En el eje horizontal se muestra el experimento con  $^1H$  y en el eje vertical el espectro de  $^{31}P$ .

### III.5.2. Guía de ondas coaxial en IRM

Otra aportación que habla del empleo de guías de ondas sin frecuencia de corte, con miras a utilizarse en Imagenología como principal aplicación, y que plantea que puede ser utilizada a intensidades de campo menores a 7T (1.5T y 3T), también se basa en un arreglo coaxial [29]. Las principales características son que emplea un espacio de muestra (Image Gap, IG) que puede ser variado y ajustado a las dimensiones de la muestra; además de que el SAR es menor en las regiones de las cuales no se requiere obtener imagen, esto en contraste con el trabajo de Bruner et al. [23], en donde toda la muestra(sujeto) es expuesto, y la absorción de energía en todo el cuerpo es considerable.

En la figura 29 se muestra el prototipo de guía de onda coaxial para IRM, se puede observar que del lado izquierdo se maneja un sistema de transmisión-recepción, mientras que en el extremo distal la guía tiene una terminación para acoplamiento de impedancias, de tal forma que se elimina la reflexión de las ondas por el cambio de impedancia de la onda con respecto al medio. Las tiras de cobre a lo largo de la estructura se superponen a la que le sigue, teniendo un dieléctrico entre ellas que hace que se forme una capacitancia, que puede servir para mantener la impedancia constante a lo largo de toda la estructura.

Esta última configuración hace que la denominación de guía de ondas sea un tanto controvertida para este prototipo, ya que se puede ver claramente que se trata de una línea de transmisión formada por segmentos equivalentes, y que en un sentido más estricto, no es una estructura continua, por lo cual no guía, solo transmite la señal de un segmento a otro.

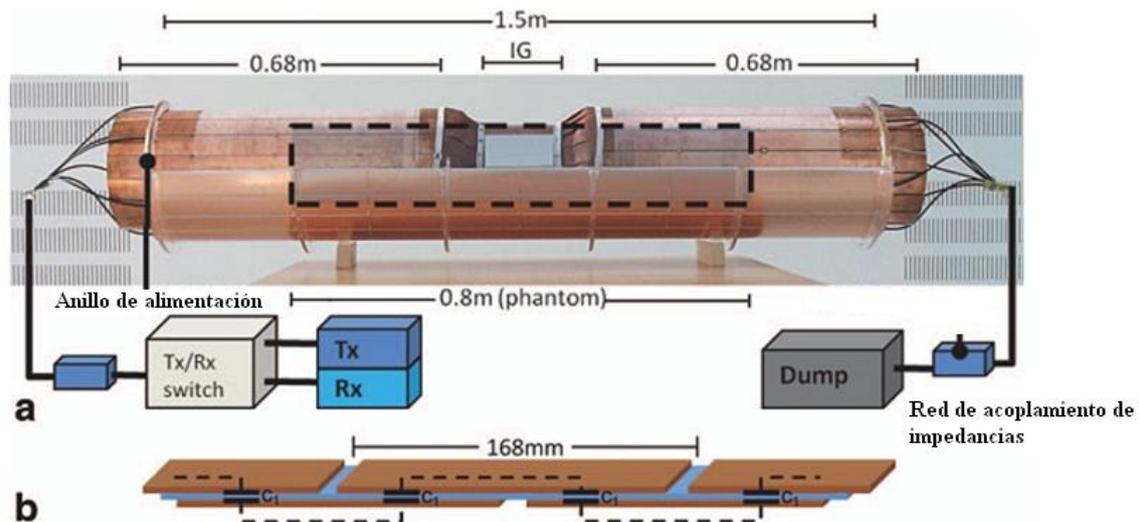


Figura 29. Prototipo de guía de onda coaxial para IRM. a) se muestra la guía formada por un conductor exterior que está compuesto por una serie de tiras de cobre que cubren el diámetro de la guía. b) las tiras de cobre que conforman la guía, en la dirección longitudinal son traslapadas una con otra, pero conteniendo una capa de dieléctrico, lo que forma una serie de capacitores que mantienen la impedancia a lo largo de la guía.

En la figura 30, se muestra como se ejecutan los experimentos cuando la muestra es un fantoma y cómo se ejecutaría un experimento cuando se trate de un sujeto. Es importante hacer notar que la inclusión de un conductor exterior y un conductor central, al ya de por sí reducido túnel en un sistema de IRM, hace que el espacio libre para el sujeto se reduzca aún más, convirtiéndose en una aplicación limitada ya que para sujetos que sufren de ansiedad o claustrofobia, no sería una opción. La excitación se logra por medio de 6 puntos distribuidos radialmente sobre el conductor central. El espacio del cual se obtiene imagen (IG), crea una discontinuidad en el conductor central, mientras que el conductor exterior envuelve tanto al central como a la muestra.

La figura 31 muestra las imágenes obtenidas a 7T [29]; en el corte transversal se puede apreciar que existe una pérdida importante de señal, que es inherente a este prototipo ya que el campo magnético se distribuye en forma radial, adicionalmente se puede ver que el conductor exterior funciona a manera de blindaje que impide que exista ruido en la imagen. Para el corte coronal la imagen central debería ser desechada, a diferencia de lo que ocurre con cualquier otra forma de obtención de imágenes de RM, donde el corte central generalmente es el de mejor calidad.

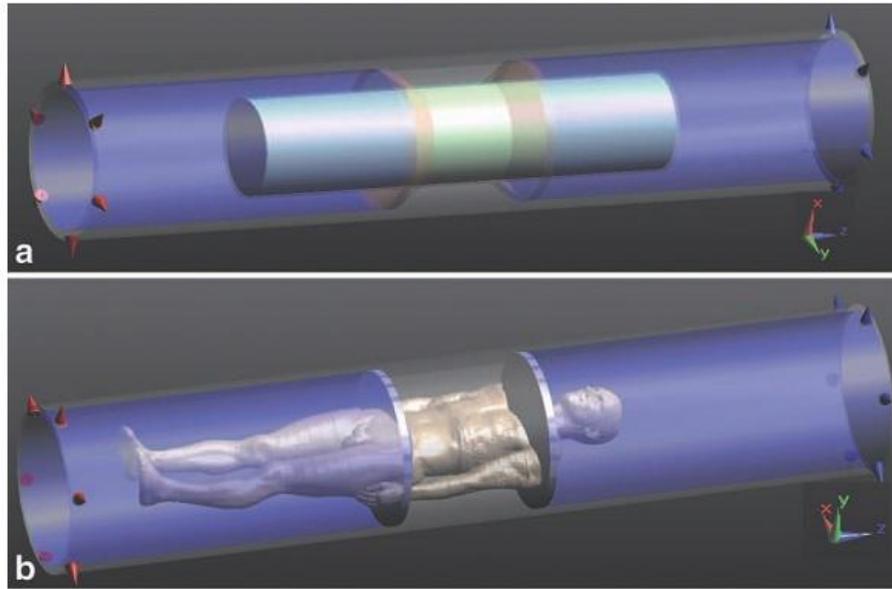


Figura 30. Arreglo experimental de la implementación de la guía de onda coaxial, a) un fantoma forma parte del conductor central, mientras que el conductor exterior deja un espacio descubierto que es el IG; b) el conductor central puede ser conformado por un sujeto.

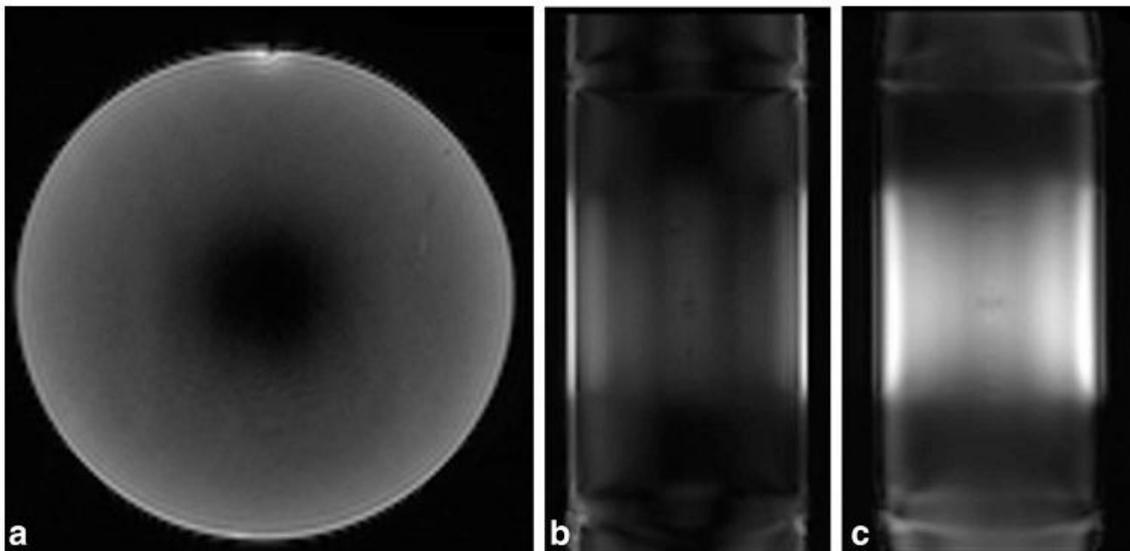


Figura 31. Imágenes obtenidas a 7T con la guía de ondas coaxial, a) corte transversal que muestran la ausencia de señal en el centro del fantoma; b) y c) cortes coronales, donde el primero es obtenido al centro del fantoma y el otro a 40mm fuera del centro.

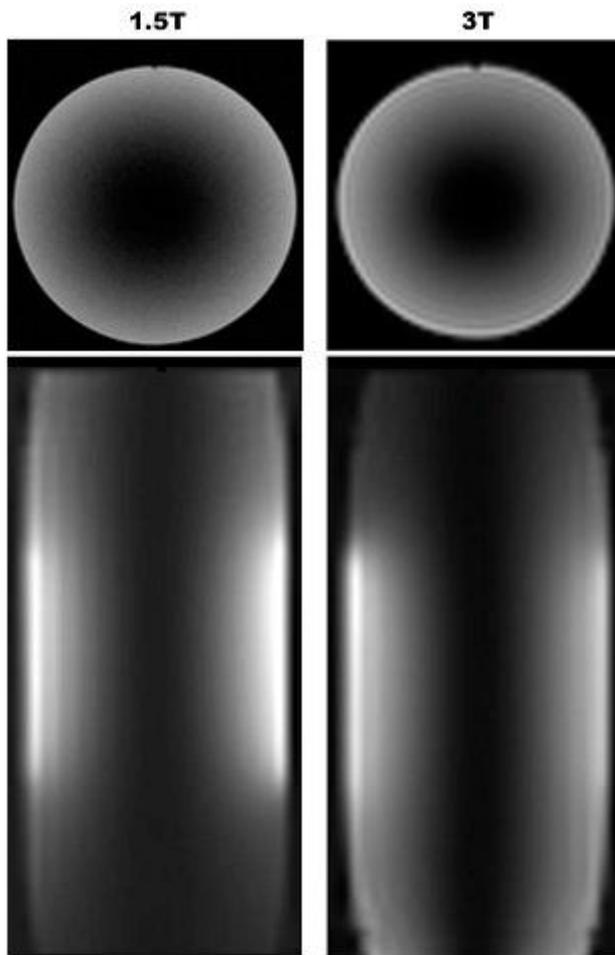


Figura 34. Principal aplicación de la guía de ondas coaxial, ya que es capaz de obtener imágenes a intensidades de campo menores a 7T. Se puede observar que para 1.5T y 3T el comportamiento de la guía es el mismo que para 7T. A pesar de que es una guía de onda sin frecuencia de corte y puede ser utilizada en experimentos multinucleares, la pérdida de señal en todos los casos es considerable.

Una de las principales ventajas que provee esta guía de ondas es que puede ser empleada en experimentos multinucleares, de igual forma debido a que no tiene la restricción de una frecuencia de corte, puede guiar señales de resonancia magnética casi para cualquier intensidad de campo. En la figura 32, notamos que a pesar de que el comportamiento es similar para 1.5T, 3T y 7T, siempre existirá la pérdida de señal para la región central. Entonces, podríamos decir que los cortes transversales no son de utilidad, mientras que en los cortes sagitales o coronales tendría que desecharse siempre el corte central, lo cual hace que sus aplicaciones se centren en la imagenología de extremidades, dejando todavía mucho trabajo por hacer para convertirla en una herramienta para obtener imágenes del cráneo. A diferencia de los trabajos publicados para 7T, esta guía no amplía el FOV del cual se pueden obtener imágenes.

Las pruebas de caracterización de esta guía, se centran en el campo magnético B1 y el SAR, en la figura 33 tenemos las simulaciones presentadas para estos dos parámetros; al igual que en los resultados experimentales, el campo magnético en el centro de la imagen es muy pobre, por ello en la figura 33b, se muestra un perfil de intensidad que parte del centro hacia la perifería. Estos resultados dicen que efectivamente el campo es homogéneo en la sección transversal de la guía a excepción de la región central. El efecto del IG se observa en la figura 33a, donde vemos un perfil de intensidad de

campo en dirección longitudinal ( $z$ ). El campo fuera del IG es muy bajo, siendo considerablemente más intenso en la región del IG, se puede observar un ligero desbalance del campo generado, ya que es posible que la terminación de la guía en la parte más distal al transmisor no sea óptima.

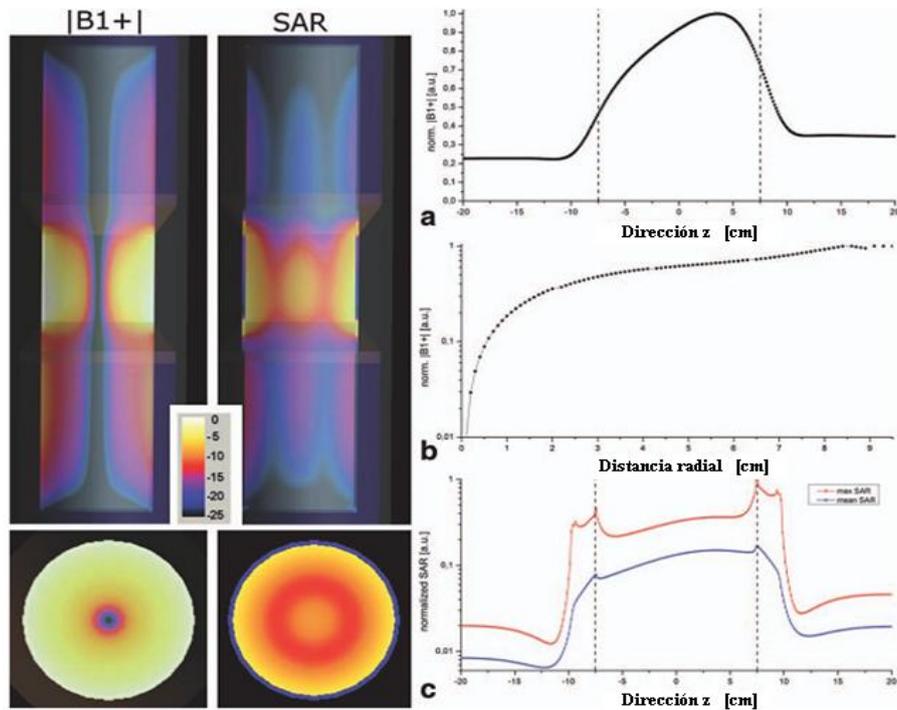


Figura 33. Simulaciones de campo magnético y SAR. a) y b) son perfiles de campo magnético en dirección longitudinal y transversal, respectivamente. c) en rojo se muestra el máximo valor de SAR y en azul el valor promedio.

Los resultados de SAR muestran que la absorción de energía es muy similar en toda la muestra, teniendo los máximos de energía en la periferia de la muestra. Esto quiere decir que el volumen de la muestra no es sometido a un valor excesivo de energía de RF y que además no existen zonas potencialmente peligrosas que absorban mayor energía, debido a la homogeneidad de campos generados por el arreglo coaxial.

### III.6. Otras aplicaciones de Guías de ondas en IRM

Una de las aplicaciones a seguir es la de la neuroimagen a ultra altos campos (Ultra-High Field UHF), que actualmente se realiza con antenas de volumen como transmisoras y para recibir la señal se emplean arreglos en fase de numerosos elementos de tamaño reducido cada uno.

La aplicación publicada por Mallow et al. [30] se centra en la imagenología *in vivo* de primates, mostrando la fiabilidad del concepto de ondas viajeras en IRM para ser empleado en neuroimagen de humanos; además se trata principalmente la excitación homogénea por medio de las guías de ondas de todo el volumen de la muestra (figura 34). Algunos autores [31, 32 y 33], han publicado sobre las ventajas de los arreglos en fase para excitación, destacando como principal característica la excitación homogénea sobre el volumen que cubre el arreglo; las guías de ondas son capaces de obtener una excitación con dicha característica sobre todo el volumen, siendo más fácil su implementación que el desarrollo de arreglos en fase de varios canales. En la figura 34 observamos que el campo generado en la región de interés es homogéneo para el caso de una antena jaula de pájaro en configuración pasa-banda como en el caso de una guía de ondas circular, sin embargo para este segundo caso el campo magnético es más intenso sobre todo el volumen.

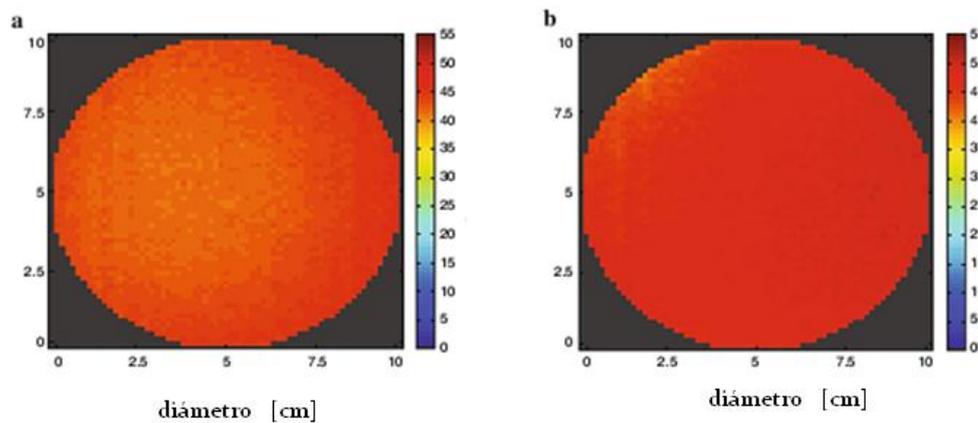


Figura 34. Mapa de campo  $B_1^+$  obtenido sobre una ROI de 10 cm, en a) con una antena jaula de pájaro híbrida, y en b) con una guía de ondas circular.

La figura 35 nos muestra los resultados *in vivo* obtenidos con una guía de ondas circular; la excitación se realizó con una antena de parche o 'patch' al igual que lo hicieron Brunner et al. [23]; esta antena tiene las mismas limitantes de diseño que las guías de ondas, es decir, las dimensiones crecen conforme disminuye la frecuencia, además de que depende del sustrato sobre el que se construya [34], de tal modo que una antena construida sobre polimetilmetacrilato (PPMA) a 7T requiere un diámetro del parche de 44cm, apenas utilizable en sistemas de cuerpo entero.

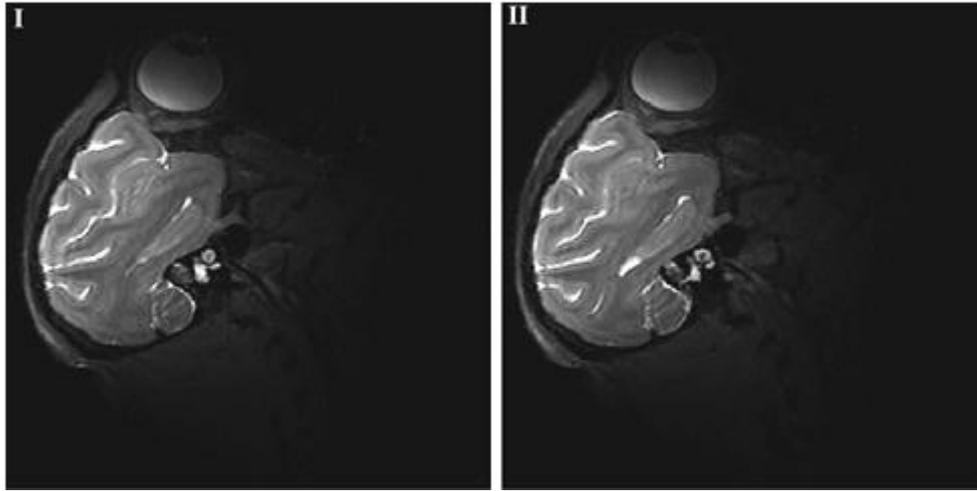


Figura 35. Dos cortes sagitales *in vivo* de un macaco hembra. Se observa todo el cerebro con un buen contraste entre materia blanca y materia gris. Los parámetros de la secuencia fueron: 3D turbo spin echo (TSE), TR=4,000 ms, TE=200 ms, matriz=320x320, FOV=150x150 mm, grosor del corte=0.5 mm, numero de cortes=160.

En este experimento la recepción se realizó con un arreglo de antenas de 3 elementos, que fue suficiente para obtener imágenes de todo el cerebro del macaco. Cabe destacar que las imágenes mostradas en la figura 35, son solamente de la región de la que obtiene señal el arreglo en fase, sin embargo la excitación con el esquema de guías de ondas se genera sobre todo el volumen.



## IV. GUÍA DE ONDAS DE PLACAS PARALELAS PARA IRM

### IV.1. Empleo de la guía de ondas de placas paralelas en sistemas de IRM de cuerpo entero.

Debido a que la frecuencia de corte de las guías de ondas circulares se encuentra determinada por su diámetro, y se requeriría un diámetro muy grande para trabajar alrededor de las frecuencias de 130MHz a 300MHz (3T y 7T respectivamente), se debe buscar que la propagación de las ondas a las frecuencias de IRM sea posible por medio de otras configuraciones. En este caso se ha pensado en la posibilidad de emplear las guías de ondas de placas paralelas (figura 36), esto debido a que la frecuencia de corte para los modos TM y TE de estas guías está determinada por las propiedades dieléctricas del medio que llena el espacio entre las placas, hablando del cuerpo humano la permitividad relativa ( $\epsilon_r$ ) de los tejidos tiene valores grandes con lo cual se reduce sustancialmente la frecuencia de corte para los modos TE o TM; esto nos permite trabajar a frecuencia inferiores a los 300MHz. Como una característica adicional, tenemos que la guía de placas permite guiar el modo TEM, de tal forma que sus aplicaciones no tienen restricción en cuanto a una frecuencia de corte para este modo en particular. Además la guía de ondas de placas paralelas puede considerarse como la forma más simple de estos dispositivos, lo que conlleva a una implementación relativamente sencilla. Con este tipo de guía de ondas podemos ajustar la guía, de ser necesario, al volumen de la muestra.

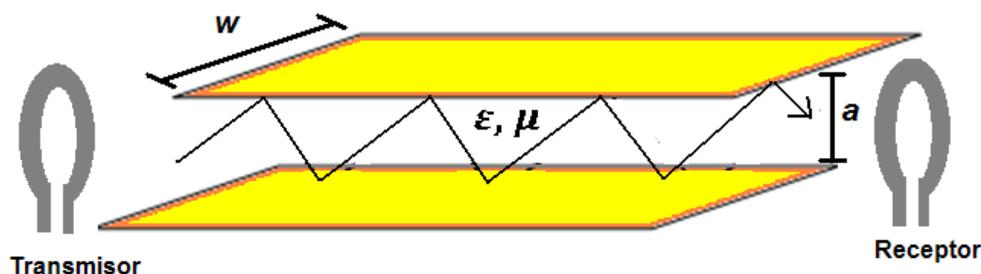


Figura 36. Guía de ondas de placas paralelas. Los modos de propagación se encuentran determinados por la separación de las placas de la guía ( $a$ ) y por las propiedades dieléctricas ( $\mu, \epsilon$ ) del medio contenido por ellas.

Adicionalmente, en este trabajo proponemos una forma alternativa de llevar a cabo los experimentos de detección remota con guías de onda en IRM. Esto es, tener en un extremo de la guía la excitación y en el otro extremo la recepción, lo que implica que las ondas efectivamente tendrán que viajar desde un punto de la guía hasta el otro extremo.

Para realizar las pruebas de detección de señal será necesario diseñar un par de antenas circulares, que se colocaran en los extremos opuestos de la guía de ondas, de tal forma que se reciba la mayor cantidad de información. El diseño de antenas se ajustará a un diámetro interior de 12cm y tendrán que estar sintonizadas en frecuencia a 128MHz y ajustadas en impedancia a 50Ohms, que es la impedancia característica de los instrumentos en RF. Se espera que exista una contribución de ondas que viajen en la dirección de propagación, además de que existirá una cierta cantidad de señales que se reflejaran debido al cambio de impedancias que experimentarán al pasar de un medio de baja permitividad (aire) a un medio de alta permitividad como lo son los tejidos del cuerpo humano. Por esta razón sería conveniente pensar que al momento de ejecutar la reconstrucción de la imagen, podría emplearse un esquema de SENSE (Sensitivity Encoding) y el par de antenas sería considerado como un arreglo en fase.

El esquema presentado en la figura 37 muestra la forma de implementar los experimentos de guías de ondas en IRM, en esta representación la guía de ondas de placas paralelas se encuentra representado por las condiciones de frontera  $x = 0$  y  $x = a$ ; en un esquema de guía de ondas circular esta es constituida por el blindaje de los gradientes que rodea a la antena de cuerpo entero. La diferencia con respecto a Brunner et al. [23] es que ellos emplean únicamente el blindaje de los gradientes como guía de ondas circular, la fuente de excitación es la misma que la de recepción, es decir que el esquema de ondas viajeras, como lo han llamado, es un tanto ambiguo debido a que se espera que haya ondas que viajen para excitar la muestra, y que posteriormente existan ondas que viajen de regreso, conteniendo la información de las señales emitidas por la muestra; dicho esquema muestra que en algún momento habrá interferencia destructiva de las ondas. En el caso de Alt et al. [29], tienen la desventaja de que la guía de ondas coaxial, necesita tener una transformación de impedancias, esto debido a que por su naturaleza es una línea de transmisión desbalanceada, es decir, que no circula la misma corriente por el conductor central que por el exterior. Otra complicación con la guía coaxial es que necesita ajustarse cada vez que la muestra cambie, de tal forma que sus aplicaciones aún se encuentran restringidas a sistemas puramente de experimentación.

Más aún, el diseño de antenas puede ser simplificado ya que no necesariamente se tendría que considerar la carga dieléctrica sobre la muestra porque la antena se encuentra relativamente lejana a la muestra. Las antenas amplían sus modelos y diseños porque ahora se puede pensar en diseñar antenas específicamente para excitar modos de las guías, como la antena de parche [23, 30].

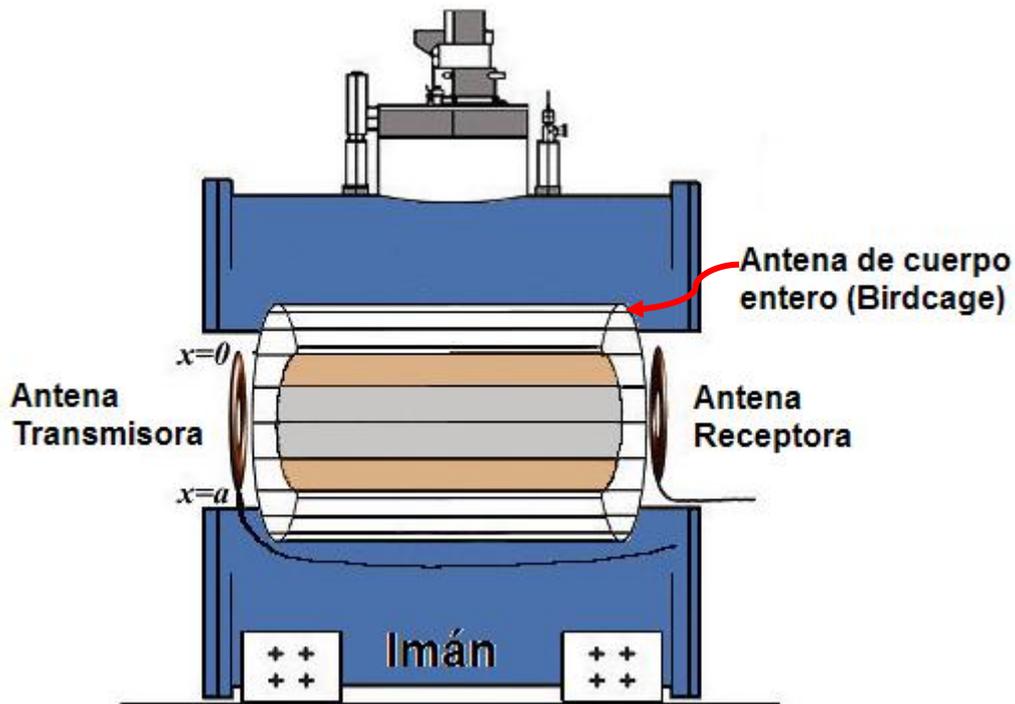


Figura 37. Diagrama de la detección remota propuesta, por medio de guía de ondas. Los resultados que se han obtenido con guías de onda circulares podrían verse mejorados empleando este esquema, debido a que minimiza la interferencia destructiva de las señales.

#### IV.2. Guía de onda de placas paralelas para cualquier sistema de IRM

Una de las principales ventajas de la guía de onda de placas paralelas es que puede guiar señales prácticamente a cualquier frecuencia, lo cual hace que pueda ser utilizada en sistemas de IRM tanto experimentales como del ambiente clínico. Esta ventaja, muestra que las aplicaciones de este dispositivo en IRM pueden ser extensas, comparado con la guía de onda cilíndrica empleada para intensidades de campo iguales o mayores a 7 Tesla. Los experimentos de adquisición multinuclear pueden ser posibles sin necesidad de hacer ajustes a la guía.

Estas propiedades de la guía de ondas de placas paralelas están determinadas por el hecho de que posee como modo dominante al modo  $TM_0$  o TEM, es decir que la configuración de campos implica que el campo eléctrico y el campo magnético son simultáneamente perpendiculares a la dirección de propagación. Las ondas dentro de una guía de placas paralelas se comportan como ondas planas.

Para el análisis de los modos de propagación en una guía de ondas de placas paralelas nos ayudaremos de la figura 38.

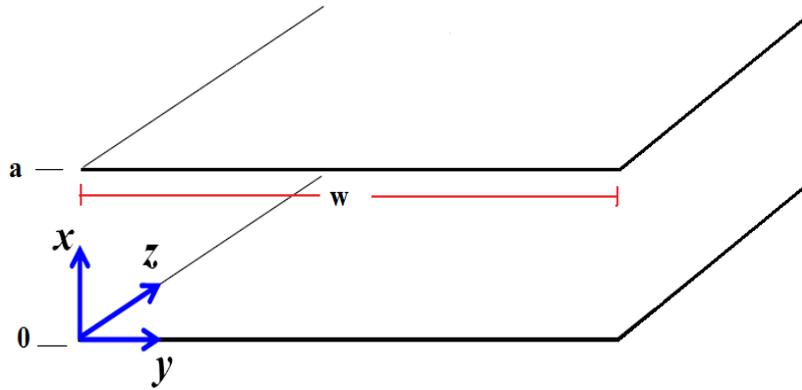


Figura 38. Arreglo de coordenadas para el problema de la propagación de ondas en una guía de ondas de placas paralelas.

Se considera que la distribución de las ondas en dirección  $y$  es uniforme, con lo cual las derivadas parciales con respecto de  $y$  son cero. También se considera que la propagación de las ondas sigue la dirección  $z$ .

Los modos de propagación dentro de una guía de ondas están descritos por las soluciones a las ecuaciones de Maxwell.

De las ecuaciones de Maxwell tenemos que  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ , desarrollando tenemos el siguiente conjunto de expresiones

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -j\omega\mu H_x \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -j\omega\mu H_y \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -j\omega\mu H_z \quad (36)$$

La ecuación de onda para el campo magnético nos dice que  $\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$ , con lo cual tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z = j\omega\epsilon E_y \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x = j\omega\epsilon E_z \quad (39)$$

Si aplicamos  $\frac{\partial}{\partial z}$  a (34) y  $\frac{\partial}{\partial x}$  a (36), considerando que la parcial con respecto a  $y$  es cero, y sumamos estas dos ecuaciones resultantes, tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y = j\omega\mu \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \quad (40)$$

Observando (40), podemos ver que el término entre paréntesis del lado derecho de la igualdad es la ecuación (38), con lo cual

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y = -\omega^2 \mu \epsilon E_y \quad (40a)$$

Esta es la ecuación de onda que describe la propagación de los modos Transversales Eléctricos (TE).

Si calculamos la  $\frac{\partial}{\partial z}$  a (37) y  $\frac{\partial}{\partial x}$  a (39), considerando que la parcial con respecto a  $y$  es cero, y sumamos las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y = -j\omega\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z\right) \quad (41)$$

Observando el lado derecho de la igualdad, podemos ver que el término entre paréntesis corresponde a (35), con lo que llegamos a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y = -\omega^2 \mu \epsilon H_y \quad (41a)$$

Esta ecuación describe la propagación de los modos Transversales Magnéticos (TM) dentro de una guía de onda de placas paralelas.

Para describir la forma en que se propagan las ondas dentro de la guía, debemos encontrar las soluciones a las ecuaciones para determinados modos, para ello es necesario considerar las condiciones de frontera adecuadas.

#### IV.2.1. Modos Transversales Eléctricos (TE)

Las condiciones de frontera para nuestro problema, según la Figura 38 son:  $E_y = 0$ , cuando  $x = 0$  y  $x = a$ . Una solución que satisface estas condiciones es [35]

$$E_y = j \frac{E_0}{2} (e^{-j\beta_x x} - e^{j\beta_x x}) e^{-j\beta_z z} = E_0 \text{sen}(\beta_x x) e^{-j\beta_z z} \quad (42)$$

donde  $E_0$  es una constante arbitraria.

Tomando las condiciones de frontera para un conductor eléctrico perfecto, en  $x = 0$  el campo  $E_y = 0$ , y en  $x = a$  tenemos que para que (42) se haga igual a cero se debe cumplir que  $\text{sen}(\beta_x a) = 0$ , con lo cual

$$\beta_x a = m\pi, \text{ para } m = 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

No existe una solución con  $m = 0$ , lo cual indicaría que el campo eléctrico es uniforme y tangente a las placas.

Recordando que el campo en dirección  $y$  es uniforme, la constante de propagación de las ondas queda definida como

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (44)$$

De (43) se obtiene el valor de  $\beta_x$ , y la constante de propagación en dirección z queda determinada por

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad (45)$$

Esta ecuación nos dice que existirá propagación de las ondas dentro de la guía de onda de placas paralelas, en dirección longitudinal, cuando  $\beta_z$  sea diferente de cero. Cuando  $\beta_z > 0$ , existirá propagación de las ondas a lo largo de la guía; pero cuando  $\beta_z < 0$ , las ondas tendrán un decaimiento (atenuación) muy rápido, con lo cual no se alcanzarán a propagar a lo largo de la guía, a estos modos se les conoce como evanescentes.

De (45) podemos determinar cuál es la frecuencia mínima que debe tener una onda para poderse propagar a lo largo de la guía, esta condición la obtenemos cuando  $\beta_z = 0$  y se le conoce como frecuencia de corte

$$f_c = \frac{m}{2a\sqrt{\epsilon\mu}}, \text{ para cada modo } m \quad (46)$$

En la figura 39, podemos observar la configuración de campos magnético y eléctrico dentro de la guía de ondas de placas paralelas para el modo TE; observamos que las componentes del campo eléctrico solo existen en forma perpendicular a la dirección de propagación, a diferencia de lo que sucede con el campo magnético, el cual si tiene componentes en la dirección de propagación.

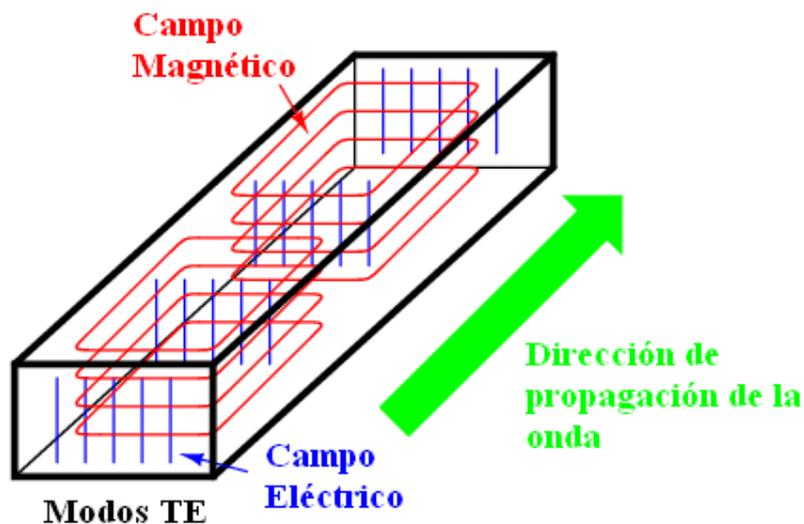


Figura 39. Configuración del campo magnético y del campo eléctrico para los modos Transversales Eléctricos.

A fin de entender las configuraciones de campo dentro de la guía de placas, realizamos simulaciones de los campos electromagnéticos; nos ayudamos de la herramienta COMSOL Multiphysics 3.2, que resuelve los problemas electromagnéticos por medio del Método de Elemento Finito (FEM) para estructuras y geometrías prácticamente arbitrarias desarrolladas en el ambiente gráfico del software por medio del Diseño Asistido por Computadora (CAD). Las características de la guía son: un ancho de placas de 60cm, una separación entre ellas de 60cm y una longitud total de 150cm. Se emplearon condiciones de frontera de conductor eléctrico perfecto (PEC) para las placas y los extremos de la guía se consideraron como puertos, solo en uno de ellos se tomó como fuente (excitación).

La simulación del campo eléctrico (figura 40) en la guía de placas, muestra que el campo (flechas), apuntan perpendicularmente a las caras de las placas, variando el sentido de las flechas, lo que muestra que el campo eléctrico es periódico dentro de la guía, es decir que tiene un comportamiento senoidal. La simulación muestra que no existe campo eléctrico en la dirección de propagación, solo en la sección transversal, lo que define a este modo.

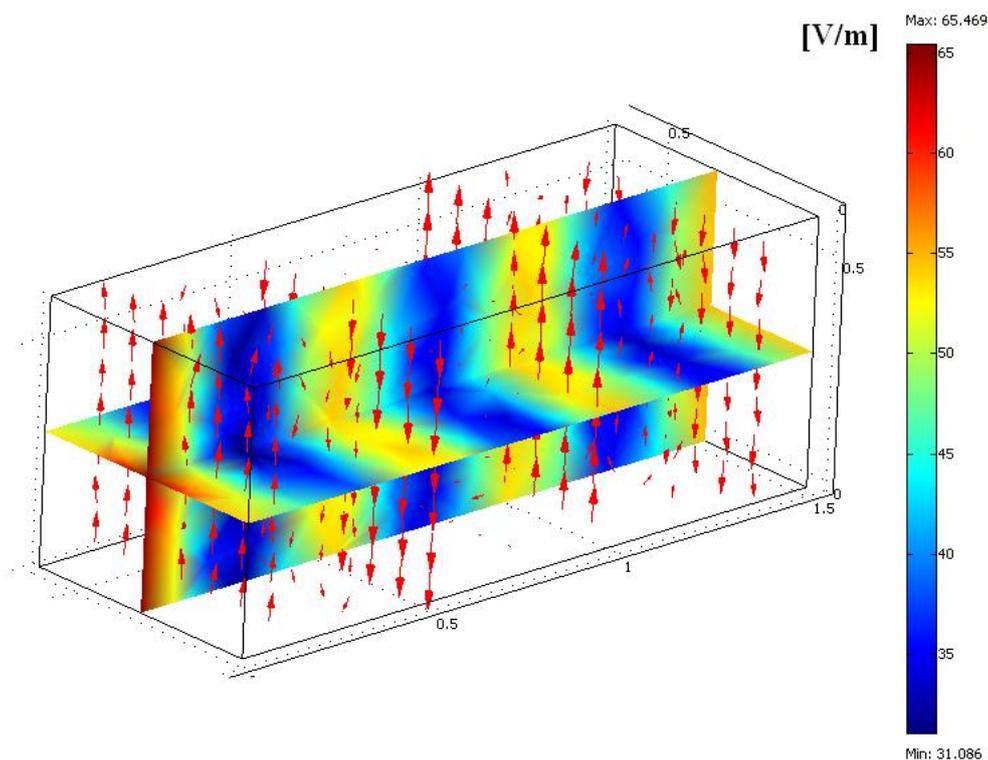


Figura 40. Campo eléctrico en una guía de ondas de placas paralelas para el modo TE<sub>1,0</sub> a 300MHz.

En la figura 41a, se muestra el campo magnético, las flechas que representan a dicho campo son perpendiculares a la dirección del campo eléctrico. Se puede observar que existe una contribución del campo magnético en la dirección de propagación, que es de menor intensidad a la de las secciones transversales que se muestran.

En la figura 41b, se nota una mayor contribución del campo magnético a lo largo de la guía de ondas cuando se aumenta la frecuencia de operación. Además se puede observar que existen trayectorias cerradas similares a las presentadas por el esquema de la figura 39. Esto es debido a que las condiciones de contorno para el problema permiten que las componentes magnéticas tangenciales a las placas sean continuas, cuando no existe una densidad de corriente aplicada a la frontera [36], en este caso a las placas. A medida que se incrementa la frecuencia, la longitud de onda disminuye y el número de ciclos que podemos observar aumenta en el mismo espacio.

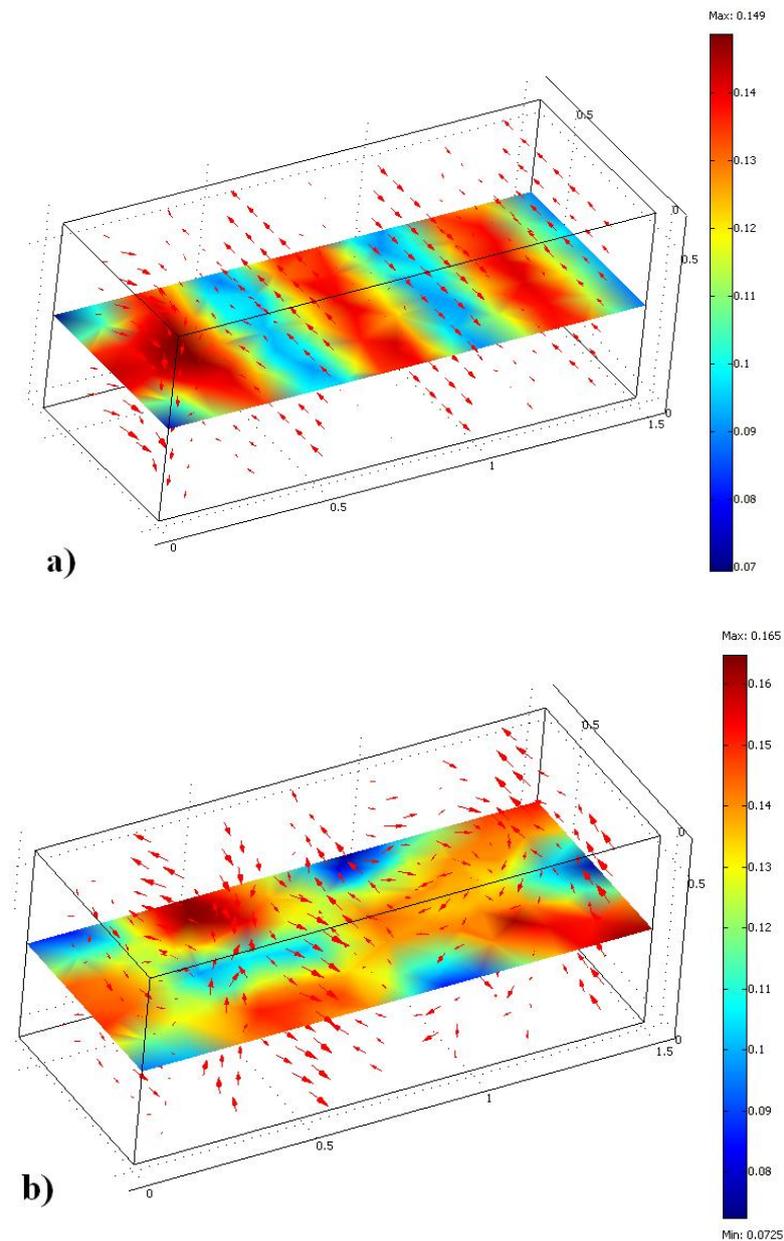


Figura 41. Campo magnético en una guía de ondas de placas paralelas para el modo TE<sub>1,0</sub>. a) a 300MHz donde se observa que el campo es tangencial a las placas, b) a 500MHz donde se puede observar con mayor claridad los 'anillos' formados por el campo.

#### IV.2.2. Modos Transversales Magnéticos (TM)

En la figura 42, se observa el concepto del modo TM, donde el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación, y que se muestra como secciones transversales a lo largo de la guía, donde las componentes tangenciales al campo son continuas en la interfaz dieléctrico-conductor, siempre y cuando no se aplique una densidad de corriente a este último. La componente normal del campo magnético es discontinua en la frontera, lo que forma las trayectorias circulares transversales. La única componente en la dirección de propagación es la del campo eléctrico.

Para los modos transversales magnéticos una solución que satisface las condiciones de frontera es

$$H_y = \frac{H_0}{2} (e^{-j\beta_x x} + e^{j\beta_x x}) e^{-j\beta_z z} = H_0 \cos(\beta_x x) e^{-j\beta_z z} \quad (47)$$

donde  $H_0$  es una constante arbitraria.

Tomando las condiciones de frontera en las placas metálicas, tenemos que en  $x = 0, H_y = H_0$  y en  $x = a, \cos(\beta_x a) = 1$ , con lo cual

$$\beta_x a = m\pi, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

Para este caso el modo  $m = 0$  es aceptable, ya que indica una distribución de campo magnético uniforme y tangencial a las placas metálicas. Este modo es el TEM, dado que existe tanto campo eléctrico como campo magnético, ambos perpendiculares a la dirección de propagación. Si sustituimos el valor del modo  $m = 0$  en (46) podemos ver que para el modo TEM la frecuencia de corte es igual a cero.

El modo TM<sub>0</sub> o TEM es el modo dominante en la guía de ondas de placas paralelas, es decir, aquel que tiene la frecuencia de corte más baja ( $f_c = 0$ ). Esto significa que la propagación de ondas con este tipo de guías sucede a cualquier frecuencia.

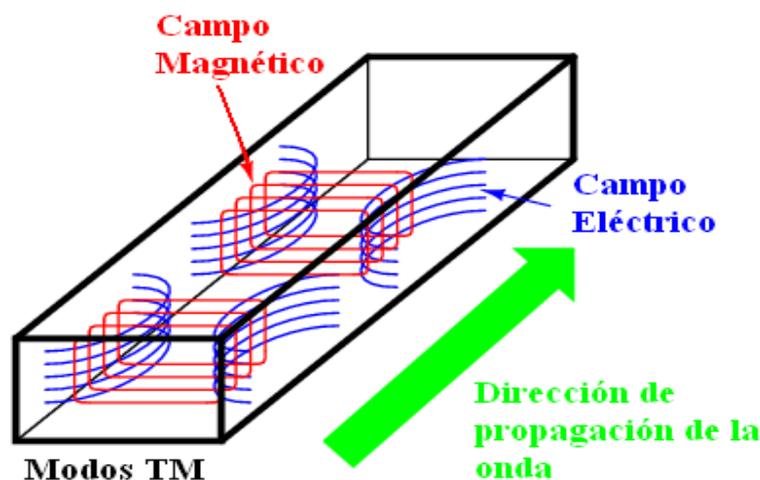


Figura 42. Configuración de los campos eléctrico y magnético para los modos de propagación Transversales Magnéticos.

La figura 43 nos muestra el campo eléctrico en la guía de placas paralelas, podemos observar cómo las flechas que representan al campo apuntan en la dirección de propagación. Considerando las condiciones de frontera en la dirección  $y$ , debemos considerar la frontera entre dos medios dieléctricos, esto implica que las componentes del campo eléctrico normales a la frontera son discontinuas [37] y que las componentes tangenciales se conservaran en ambos lados de la frontera; esto puede verse en la figura 43 dado que no hay flechas que apunten en las direcciones  $+y$  o  $-y$ , justo en las caras correspondientes de la guía.

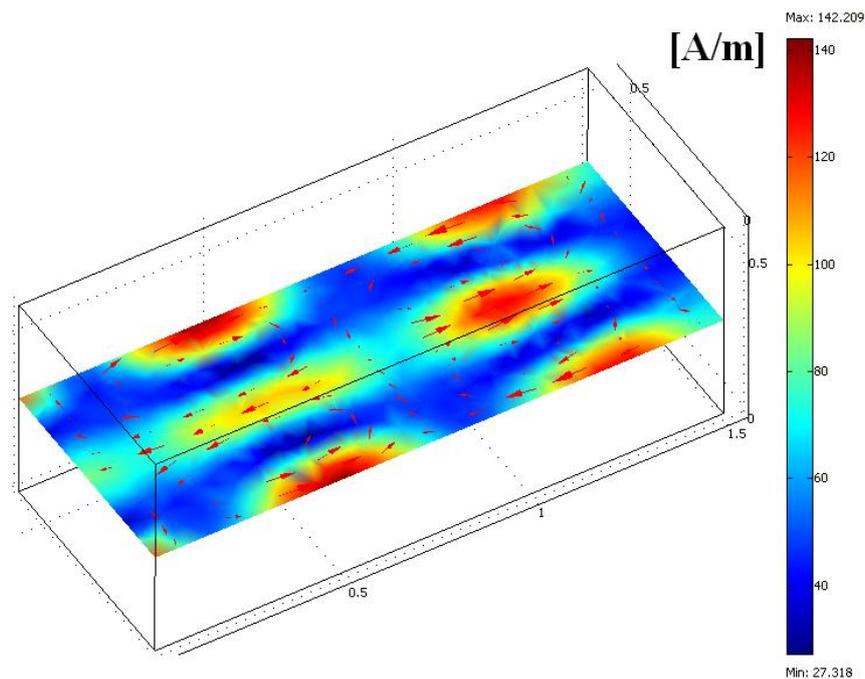


Figura 43. Campo eléctrico en una guía de ondas de placas paralelas para el modo TM<sub>1,1</sub>

El campo magnético en el modo TM se mantiene en un plano transversal a la dirección de propagación de las ondas dentro de la guía de placas paralelas (figura 44). La componente normal del campo es discontinua en la frontera con un conductor, mientras que la componente tangencial es continua.

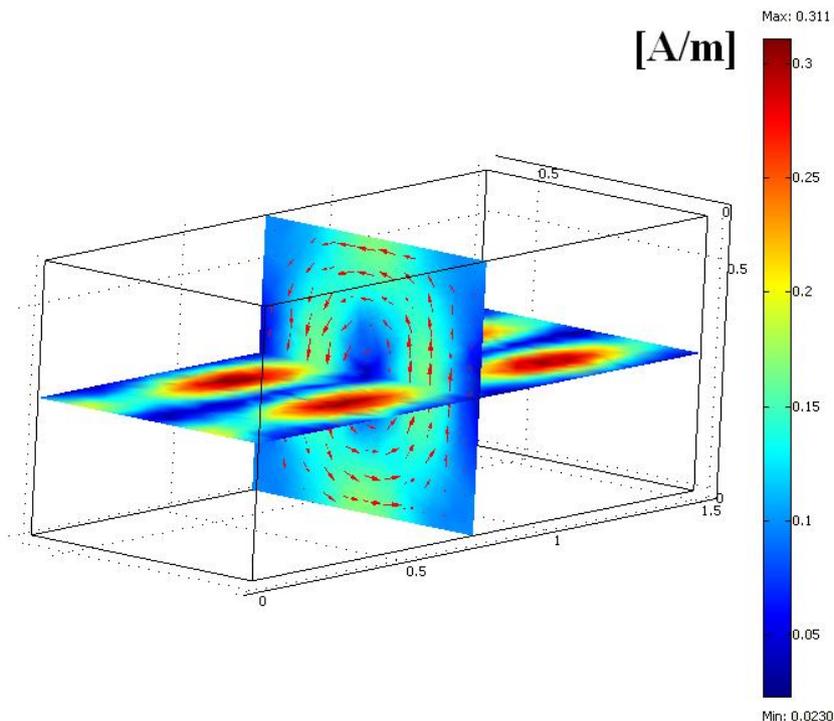


Figura 44. Campo magnético en una guía de ondas de placas paralelas para el modo  $TM_{1,1}$ .

### IV.3. Diseño de la guía de placas paralelas

Se propuso una guía de ondas para IRM de placas paralelas (figura 45), con el objetivo de mostrar que se pueden obtener imágenes por medio de dispositivos guidores de ondas en configuraciones no circulares.

Los experimentos de guías de ondas en IRM reportados, ponen principal énfasis en mostrar que existen ondas que viajan a través de la estructura que ha sido depuesta para tal fin, a esto le han llamado esquema de 'ondas viajeras'. Para mostrar que nuestro diseño es capaz de soportar un esquema de ondas viajeras, nos basaremos en la posibilidad de obtener las señales a la mayor distancia posible desde donde se generaron dichas señales. Esto es principalmente motivado por el hecho bien conocido de que la distancia de la que una antena superficial puede recibir señales, se restringe a una distancia lineal, normal al plano de la antena, igual al diámetro de la antena.

Considerando el criterio anterior, se construyó una guía de placas con una longitud de 200cm y se ejecutaron experimentos de detección remota. Adicionalmente haremos el análisis de cómo responde todo el sistema (imán, gradientes, filtros, sistema de reconstrucción, etc.) cuando nuestro nuevo hardware es introducido y será comparado con un esquema de adquisición convencional. Este análisis implicará el cálculo de la Point Spread Function (PSF), la cual se puede considerar como la respuesta al impulso

(en 2D) del sistema, y que además nos dice qué tanta deformación existirá de la imagen obtenida con respecto de la imagen ideal. Matemáticamente, la relación entre la imagen obtenida  $I(x, y, z)$  y el objeto real  $O(x, y, z)$  del que proviene la imagen, puede ser representada como

$$I(x, y, z) = h(x, y, z) * O(x, y, z) \quad (49)$$

donde  $*$  representa el operador de convolución y  $h(x, y, z)$  es la PSF en 3D [38].

En la configuración de guía propuesta, tenemos la ventaja de que la restricción de la frecuencia de corte no existe, ya que si consideramos la propagación del modo dominante  $TM_0$ , nuestra frecuencia de corte estará en una frecuencia igual a cero; eléctricamente esto lo referimos como señales en corriente directa, para cualesquiera dimensiones (separación de las placas) de la guía.

Sin embargo, si buscamos un criterio de diseño de la guía propuesta, y siendo congruentes con lo reportado en trabajos anteriores para guías de onda en IRM, podemos considerar el diseño basados en el modo TE dominante; esto nos lleva a utilizar como elemento de diseño la ecuación (46)

$$f_{corte} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

de esta ecuación podemos observar que la frecuencia de corte para el modo  $TE_1$  dependerá de la separación entre las placas y de las propiedades dieléctricas del medio, de tal forma que si consideramos los valores de  $\mu$  (permeabilidad) =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m y  $\epsilon$  (permitividad) =  $\epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\epsilon_0 = 8.85410^{-12}$  F/m,  $\epsilon_r = 65$  para el músculo a 120 MHz [39]; y la separación entre las placas de 30cm, obtenemos una frecuencia de corte = 61.9MHz. Considerando que nuestra fuente de excitación trabajará a 128MHz, nuestro diseño no entra en conflicto con ella, ya que no pondrá restricciones en cuanto a frecuencia.

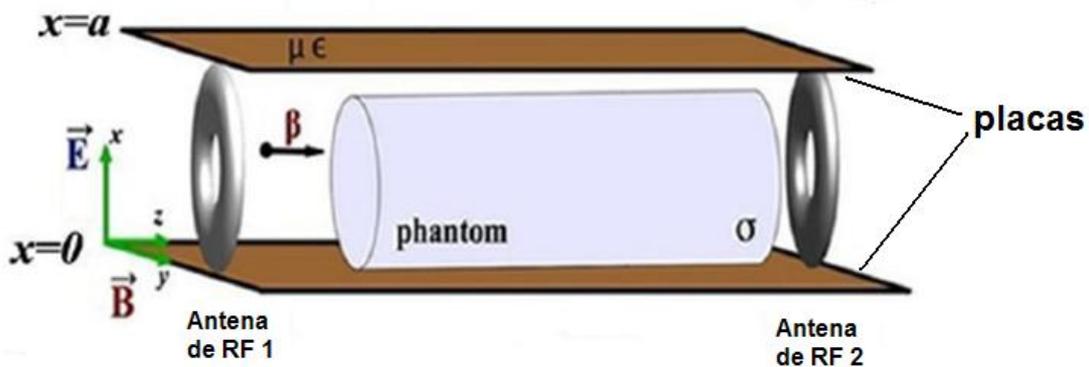


Figura 45. Arreglo experimental propuesto de la guía de ondas de placas paralelas.

El análisis de la frecuencia de corte para distintas configuraciones de guías de ondas para guiar modos TE (figura 46), relacionado con el espacio que ocupan, es decir, el diámetro para la guía circular y la separación entre placas para las guías rectangular y de placas paralelas, nos indica que las prestaciones de una guía de placas paralelas es muy similar a una guía circular; no siendo así para la guías de ondas rectangular cuya frecuencia de corte siempre se encuentra muy por encima de las otras dos, convirtiéndose en un caso poco práctico para IRM dada la restricción de espacio que impone el imán.

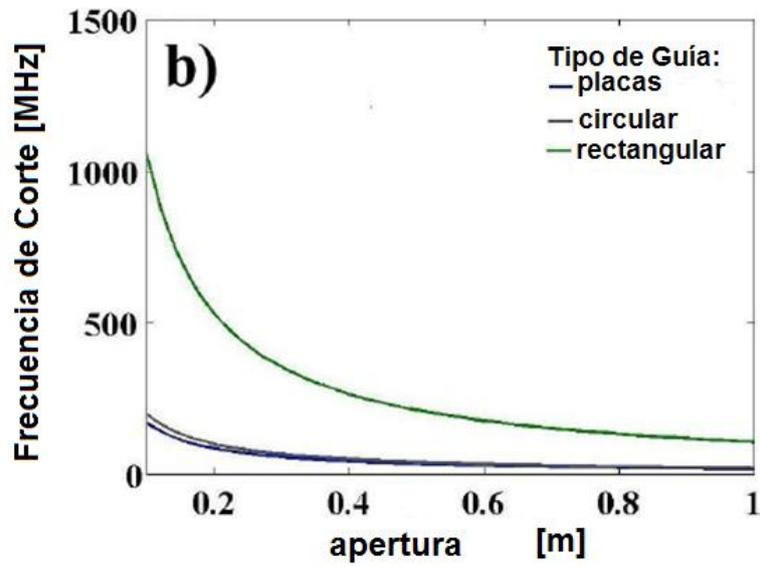


Figura 46. Comparación teórica de la frecuencia de corte al ir variando la apertura de la sección transversal, para 3 tipos de guías de ondas.

#### IV.4. Cálculo del SAR para demostrar la viabilidad de experimentos con la guía de ondas de placas paralelas.

Hasta el momento no existe algún método que permita medir directamente el SAR mientras se ejecuta un experimento de IRM. La definición del SAR implica conocer el campo eléctrico y las propiedades dieléctricas de la muestra (que pueden modificarse por alguna patología), la forma de reportarlo es como un valor escalar expresado en unidades de  $Watt/Kg^2$ , o en otras palabras, cantidad de energía absorbida por unidad de masa.

En IRM lo que tenemos es una imagen, en ella observamos regiones anatómicas, por lo cual es de importancia que conozcamos el SAR en dichas regiones, lo que nos lleva a pensar en una distribución del SAR, esto es, debemos contar con un método para observar el SAR como una imagen o como una distribución espacial y no solo un valor numérico.

La definición de SAR en [40] se puede representar como una matriz de puntos al ser representada por algún método de discretización como Elemento Finito o Diferencias Finitas, de tal forma de que se relacionan cada píxel de una imagen con un valor de SAR determinado:

$$SAR_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j} E_T^2|_{i,j}}{2\rho_{i,j}} \quad (50)$$

donde

$$E_T^2|_{i,j} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n E_y^2|_{i,j} + E_x^2|_{i,j} + E_z^2|_{i,j}} \quad (51)$$

$\sigma_{i,j}$  y  $\rho_{i,j}$  son la conductividad eléctrica y la densidad, respectivamente, de la muestra en cada punto mostrado en la imagen.

En IRM no conocemos directamente el campo eléctrico sobre la muestra, sin embargo en cuanto a simulaciones podemos encontrar métodos numéricos que resuelven tanto el campo eléctrico como el magnético para formas arbitrarias. En IRM se ha utilizado el método conocido como mapeo de campo  $B_1$ , que fue utilizado primariamente como una forma de caracterizar una antena o arreglo de antenas en cuanto a la homogeneidad e intensidad de campo que éstas generan ( $B_1 +$ ) o reciben ( $B_1 -$ ). Nuestro grupo de investigación desarrolló un método de mapeo de campo  $B_1$  [41], en la figura 47 se muestra el resultado que obtenemos con nuestro método comparado con los resultados obtenidos al ejecutar simulaciones.

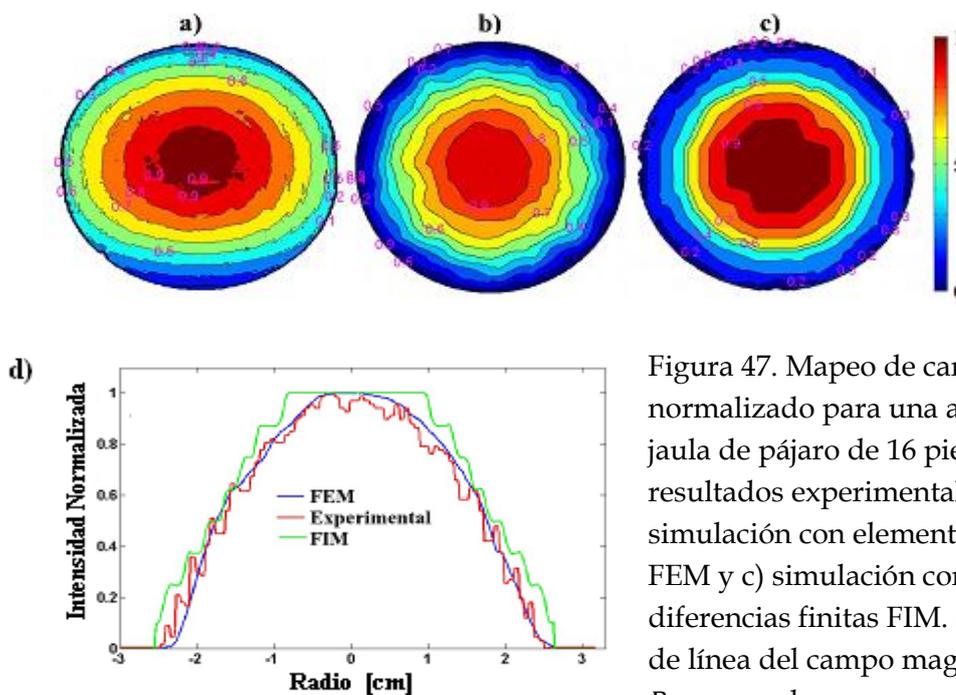


Figura 47. Mapeo de campo normalizado para una antena jaula de pájaro de 16 piernas, a) resultados experimentales, b) simulación con elemento finito FEM y c) simulación con diferencias finitas FIM. d) perfil de línea del campo magnético  $B_1$  para cada caso.

Tomando en consideración que podemos tener una aproximación al campo magnético  $B_1$ , nuestra ecuación (ec. 50) puede modificarse para dar la siguiente relación:

$$SAR_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j} B_1^2 |_{i,j}}{2\rho_{i,j} \epsilon \mu} \quad (52)$$

Con esta nueva ecuación vemos que el cálculo del SAR depende del campo magnético captado en la antena; si bien es cierto que en la imagen de IRM no tenemos el valor del campo magnético tal cual sino una intensidad de señal, en la teoría básica de RM está planteado que la intensidad de señal recibida es proporcional al campo magnético generado [42] (así como la duración del pulso  $T$ ), como lo muestran las ecuaciones que expresan la relación para la intensidad de señal (IS) recibida para una secuencia gradiente-eco (ecus. 53 y 54); se puede observar que cuando se utiliza un TR largo en la secuencia, la señal depende prácticamente del ángulo  $\theta$ . Con ello obtenemos un método que nos permite saber la distribución de SAR sobre la muestra para averiguar si existen puntos en donde se genere una excesiva absorción de energía.

$$IS(TR, T_1, \theta) \propto M_0 \frac{\text{sen } \theta (1 - e^{-\frac{TR}{T_1}}) e^{-\frac{TE}{T_2}}}{1 - \text{cos } \theta e^{-\frac{TR}{T_1}}} \quad (53)$$

donde  $\theta = \gamma B_1 T \quad (54)$

#### IV.5. Diseño del prototipo para IRM in vivo.

Con la finalidad de obtener imágenes *in vivo* con nuestro diseño de guía de ondas de placas paralelas, se planteó la necesidad de generar un nuevo prototipo para obtener imágenes de extremidades ya que son las regiones en las que según la normatividad planteada por la IEC 60601-2-33 [43] se permite un mayor valor de SAR; en particular se pensó en obtener imágenes de una pierna.

Para este objetivo se diseñó un prototipo de 60cm de largo y 45cm de ancho, las placas tenían un espesor de  $6\mu m$  y se montaron sobre un cilindro de acrílico, lo cual provee una ligera curvatura a las placas, pero también aumenta el espacio libre en donde se puede situar la muestra.

Para averiguar el efecto de la curvatura de las placas, se realizó un estudio numérico para comparar los casos en los que las placas de la guía se encuentran completamente

rectas y para el caso en el que existe la curvatura. De igual forma se utilizó la herramienta de cálculo numérico para ver el efecto que tiene el variar la separación entre las placas en cuanto al campo magnético generado en la guía.

Para el experimento *in vivo*, previamente se calculó numéricamente la distribución del campo magnético, para saber cómo sería la distribución de la intensidad de señal, de igual forma se determinaron los valores de SAR sobre la extremidad (pierna), para estar seguros que el sujeto no corre ningún riesgo.

## V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

### V.1. Separación de las placas.

Siendo el primer diseño reportado de este tipo de guías en IRM se procedió a su caracterización. Un aspecto importante es determinar cómo se degradan la intensidad y homogeneidad del campo a medida que la separación entre las placas de la guía crece, ya que con ello podemos determinar el volumen de muestra que podemos introducir. Los resultados en la figura 48 muestran la comparación en cuanto a la distribución del campo magnético al variar la separación de las placas cuando se excita la guía con una antena de parche y cuando se realiza con una antena circular (convencional en IRM). Se experimentaron distancias desde 35cm a 65cm con pasos de 5cm. Podemos observar que el comportamiento del campo para la excitación con ambas antenas es similar cuando la separación de las placas es pequeña, a medida que aumentamos la distancia  $g$  de las placas, la antena circular muestra un decremento mayor en la intensidad de campo generado dentro de la guía; si se planea excitar la guía de placas con antenas circulares, es deseable que la separación se mantenga al mínimo. Sin embargo, considerando la antena de parche, podemos ver que en un espacio libre de 80cms el campo se mantiene al 75% del máximo campo que se podría generar. Esto nos indica que la restricción de espacio no es una limitante para el empleo de este tipo de guía. El espacio para la muestra es similar al de una guía circular [23, 24] y muy superior al espacio en una guía coaxial [29].

Las imágenes de las simulaciones pueden consultarse en el Anexo E. Los esquemas de excitación para guías de ondas pueden considerar otros diseños de antenas, como la antena tipo magnetrón, que ayudarán a mejorar las imágenes obtenidas por esta técnica (ver Anexo F).

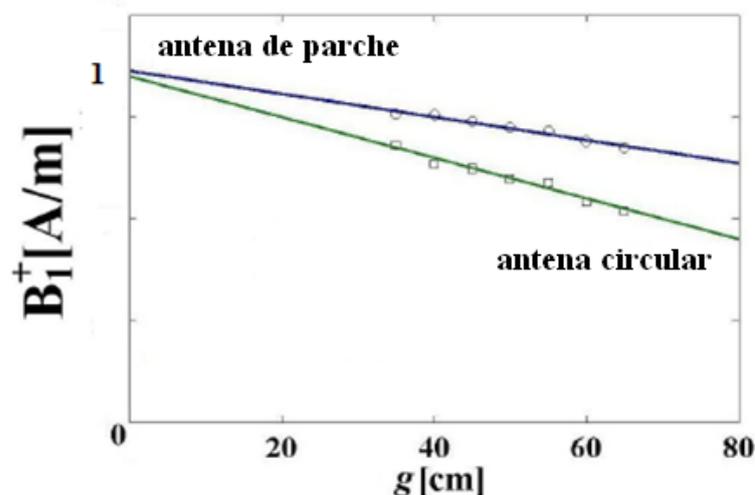


Figura 48. Simulaciones del campo magnético sobre un fantoma cilíndrico, dentro de una guía de placas paralelas excitada con una antena de parche y una circular.

## V. 2. Simulaciones de la guía de ondas a diferentes frecuencias.

Se realizaron las simulaciones de la guía de ondas de placas paralelas para averiguar su posible empleo a diferentes intensidades de campo magnético; en la actualidad los sistemas a 7T están tomando una mayor importancia en el mundo de la IRM, no solo para estudios de investigación o en animales, se está buscando que los sistemas de cuerpo entero se conviertan en una alternativa más para la práctica clínica que permita observar con mejor resolución los tejidos del cuerpo humano; siguiendo esta tendencia sería probable que en algún momento se utilizaran sistemas a 9T de cuerpo entero.

Se generó una guía de ondas de placas paralelas con dimensiones 25cmx30cmx60cm, se simularon un par de antenas circulares con diámetro de 12cm en los extremos de la guía, al interior de la guía se colocó un cilindro de solución salina con un diámetro de 8cm y 60cm de longitud.

La figura 49, muestra las simulaciones a intensidades de campo de 1.5T, 3T, 7T y 9T, se puede observar que el campo magnético generado al interior de la guía de ondas incrementa conforme incrementa la intensidad de campo magnético del sistema.

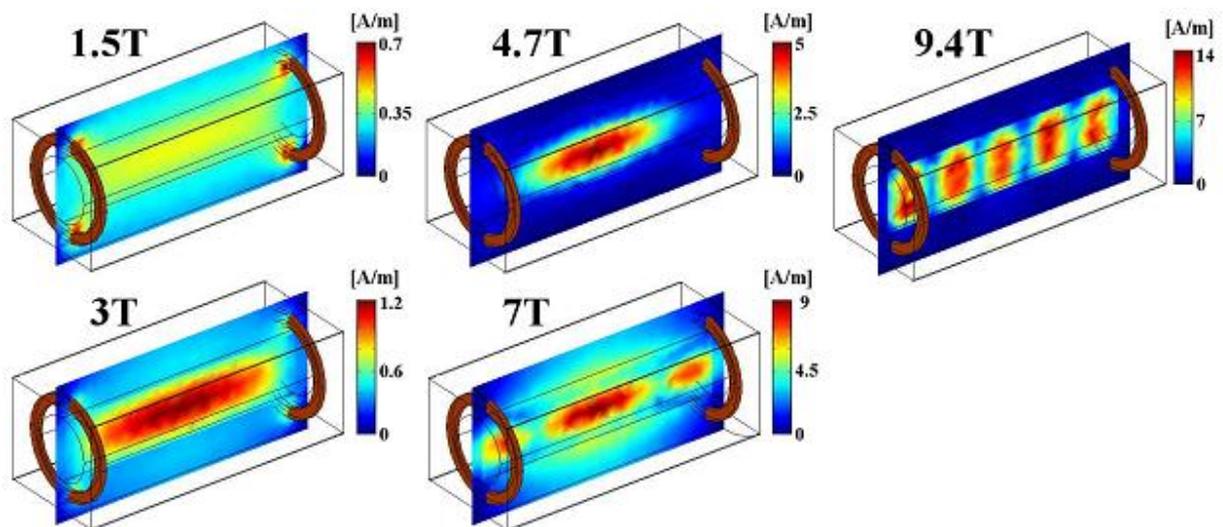


Figura 49. Simulación de la guía de ondas de placa paralelas a diferentes intensidades de campo magnético estático.

Estos resultados nos indican que a medida que incrementa la frecuencia de resonancia de los protones del agua, nuestro prototipo de guía de ondas sigue siendo compatible con estas intensidades de campo magnético estático. En la figura 50a, podemos ver que el campo magnético generado para campos de 3T y menores es de intensidad baja pero tienen la característica de que poseen una buena uniformidad.

En la figura 50, se muestran los perfiles de línea obtenidos a lo largo del fantoma (figura 50b). A pesar de que a altos campos se tiene un incremento sustancial del campo magnético, se observa que para 9.4T existen muchas oscilaciones, es necesario

determinar un acoplamiento dieléctrico óptimo entre la guía y la muestra, o investigar sobre las dimensiones correctas para esa intensidad de campo.

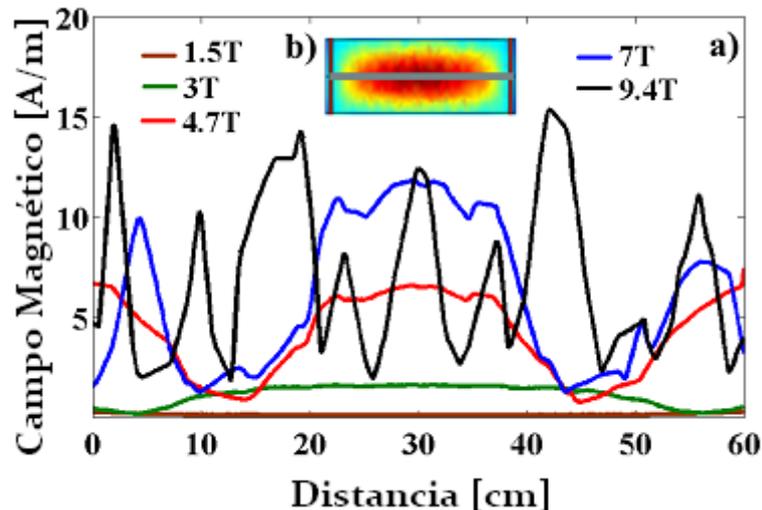


Figura 50. a) Perfiles de línea del campo generado dentro de la guía a diferentes intensidades de campo magnético estático. b) los perfiles fueron tomados a la mitad de los fantomas en dirección longitudinal.

### V.3. Simulaciones con fantoma humano.

Se realizó la simulación del campo magnético de la guía de ondas de placas paralelas, en primera instancia para emplearla en aplicaciones de imagenología de extremidades. Como primer paso se generó el fantoma humano con medidas reales, siendo obtenidas de un voluntario sano, con una estatura de 1.78m. Cabe mencionar que existen reportados algunos fantomas humanos generados con dimensiones de población europea [44] y que no son compatibles con el método de solución que empleamos en esta aplicación, además de que las dimensiones antropométricas de las poblaciones son muy diferentes. Nuestras simulaciones fueron ejecutadas con la herramienta comercial COMSOL Multiphysics 3.2, que resuelve el campo electromagnético para geometrías complejas por medio del método de elemento finito (FEM).

El fantoma se contruyó por medio de la intersección de figuras geométricas, de tal forma que fue posible realizarlo con la interfaz gráfica del software COMSOL. El modelo se muestra en la figura 51.

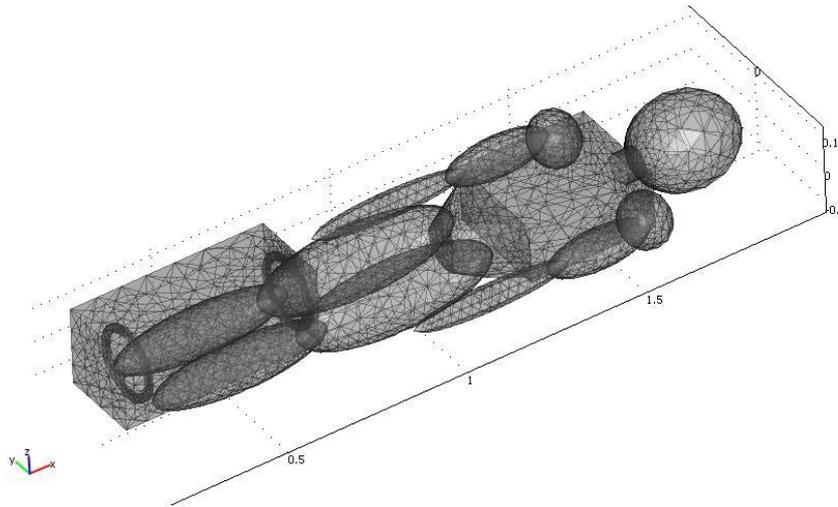


Figura 51. Malla generada sobre el fantoma humano, la guía de ondas de placas paralelas para pierna y el arreglo de antenas de recepción.

Las simulaciones fueron ejecutadas a 130MHz, frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia de los protones de agua a la intensidad de 3T.

Se emplearon las propiedades dieléctricas reportadas [39] para tejido humano para frecuencias alrededor de los 130MHz, siendo para hueso la conductividad  $\sigma = 0.1837S/m$  y la permitividad relativa  $\epsilon_r = 26.208$ ; mientras que para el músculo de la pierna se emplearon los valores  $\sigma = 0.7199S/m$  y  $\epsilon_r = 63.357$ .

La guía de onda empleada en la pierna tiene como dimensiones 25cm de ancho, 30cm de separación entre las placas y una longitud de 60cm.

Las simulaciones muestran que para el campo magnético generado para el modo dominante (TEM) en la guía de ondas de placas paralelas, tenemos una intensidad de señal superior en la región central de la guía que disminuye conforme se acerca a la posición de las antenas (figura 52a).

Adicionalmente, se realizaron simulaciones de SAR (Specific Absorption Rate), esto con la finalidad de mostrar el empleo seguro de la guía diseñada al momento de introducir al sujeto. Cabe mencionar que el SAR es uno de los parámetros determinantes para que un dispositivo nuevo sea aceptado para emplearse o no en la práctica clínica.

Con los resultados obtenidos del campo eléctrico se procedió a calcular el SAR utilizando la ecuación (ecu. 51).

La distribución de SAR obtenida es como lo muestra la figura 52b.

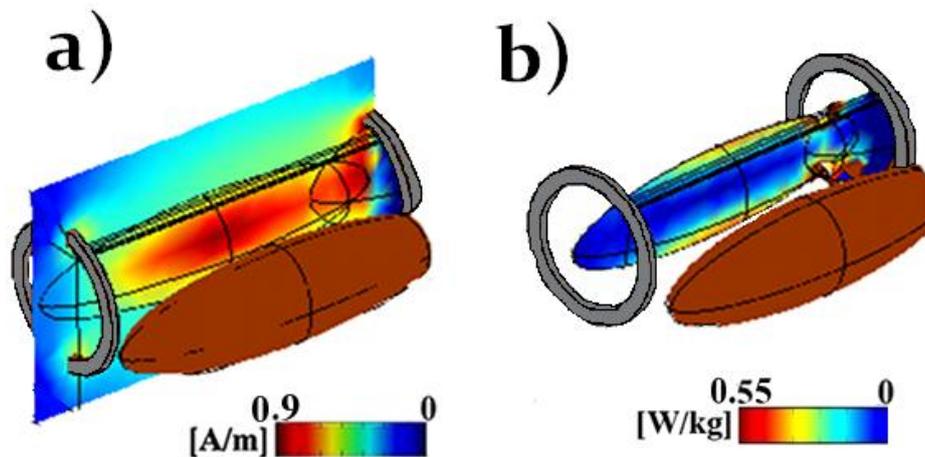


Figura 52. Resultados obtenidos con el arreglo sobre el fantoma humano simulado. a) Campo magnético  $B_1$ , b) SAR.

De la simulación del SAR podemos observar que el máximo valor alcanzado es de  $0.55\text{W/Kg}$ . La norma IEC 60601-2-33 que describe los valores de SAR permitidos para IRM marca que para extremidades el SAR no debe exceder los  $20\text{W/Kg}$ , por lo cual estamos mostrando que el empleo de la guía de ondas de placas paralelas es seguro para imagenología en humanos, en específico para imágenes de extremidades.

#### V.4. Respuesta del Sistema (Point Spread Function)

Al momento de introducir un nuevo elemento de hardware al sistema de adquisición de imágenes (imán-gradientes-antenas, principalmente), es de esperarse que el funcionamiento del sistema se vea afectado; dicho efecto lo podemos observar como una distorsión de la imagen. De este modo, empleamos la PSF como respuesta del sistema al impulso en 2D y con ello determinar qué tanto se distorsiona la imagen obtenida con respecto a un esquema de adquisición convencional. En este caso se empleó una adquisición con un arreglo en fase de 8 canales para cabeza. La PSF para la adquisición con la guía de placas muestra una intensidad de señal recibida mayor a la obtenida con el arreglo en fase; además la forma del perfil de línea de la PSF en 2D muestra una forma similar para ambos esquemas de adquisición (figura 53), lo que muestra que son equivalentes y que no existe una distorsión por parte del nuevo hardware (guía de ondas). Las imágenes para el cálculo de la PSF, así como el fantoma se muestran en el Anexo G.

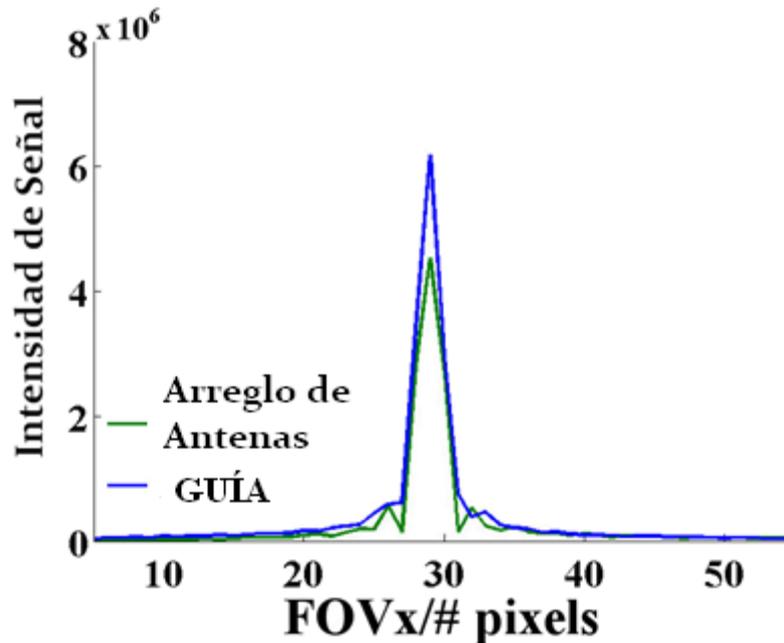


Figura 53. Perfil de línea de la PSF (respuesta del sistema) en 2D para comparar la distorsión de la imagen ocasionada por la introducción de la guía de ondas al sistema.

#### V.5. Antenas Circulares para los experimentos con la guía de ondas de placas paralelas.

En la figura 54a se muestran las antenas circulares que se utilizaron en los experimentos de detección remota con la guía de ondas de placas paralelas, constan de un diámetro exterior de 12 cm y un ancho de cobre de 1cm. Se muestra que las antenas fueron sintonizadas a la frecuencia de 128.5MHz y la impedancia se ajustó lo más posible a los 50Ohms de los amplificadores de RF para obtener la máxima transferencia de potencia y evitar daños a los equipos debidos a potencia reflejada. En esta figura se muestra la "Antena 1", en el Anexo H se pueden observar con mejor resolución los resultados del diseño de la "Antena 2".

El coeficiente de reflexión para la Antena 1 a 128.5MHz nos da un valor del parámetro S11 de -20.24dB, lo que quiere decir que solo el 0.946% de la potencia incidente fue reflejada. Para la Antena 2 tenemos -26.20dB. Las impedancias obtenidas fueron 53.83Ohms y 48.38Ohms para las Antenas 1 y 2, respectivamente.

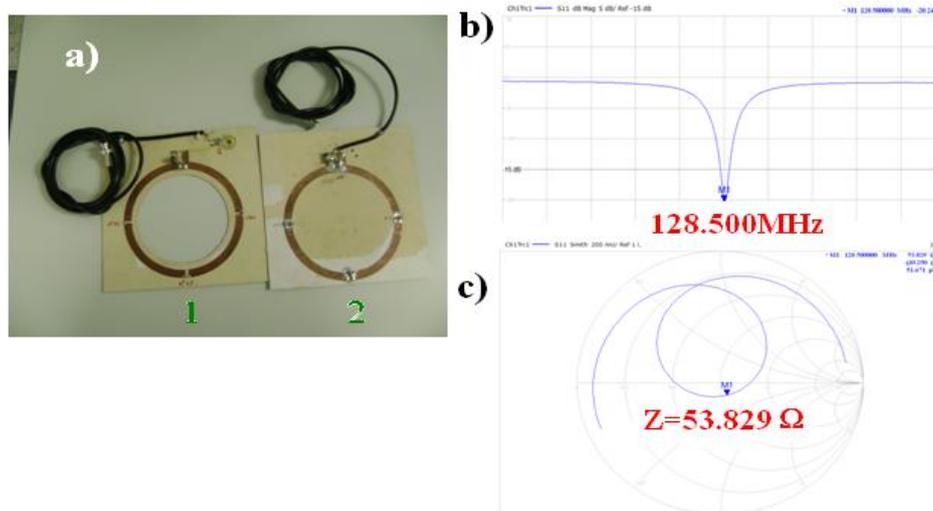


Figura 54. Antenas Circulares diseñadas para los experimentos de guías de ondas, a) ambas antenas, b) Coeficiente de reflexión S11 que muestra la sintonía, c) Carta Smith mostrando la impedancia.

#### V.6. Determinación de la detección remota en la guía de placas paralelas

En los experimentos anteriores mostramos que la guía propuesta puede ser empleada en estudios de IRM con imágenes experimentales de buena calidad, por lo cual se procedió a abordar la controversia de las ondas viajeras y la detección remota, verificando que nuestro diseño, efectivamente, es capaz de realizar la detección de las señales de RM a una gran distancia. Al momento de reportar estos resultados nadie había reportado una recepción a las distancias que presentamos. Estas distancias claramente permiten la recepción de señales fuera del túnel del sistema de IRM.

El arreglo empleado para verificar las capacidades de recepción remota se muestra en la figura 55, la excitación se genera sobre el fantoma con una antena ‘jaula de pájaro’ convencional, con el fantoma dentro del túnel, y la recepción se ejecutó con una de las antenas circulares mencionadas en la sección anterior. La antena cuenta con diodos de desacople para evitar la inducción mientras la antena de volumen mandaba pulsos de RF.

Se varió la distancia entre el fantoma y la antena probando 5 distancias: 118cm, 132cm, 150cm, 166cm y 182cm.

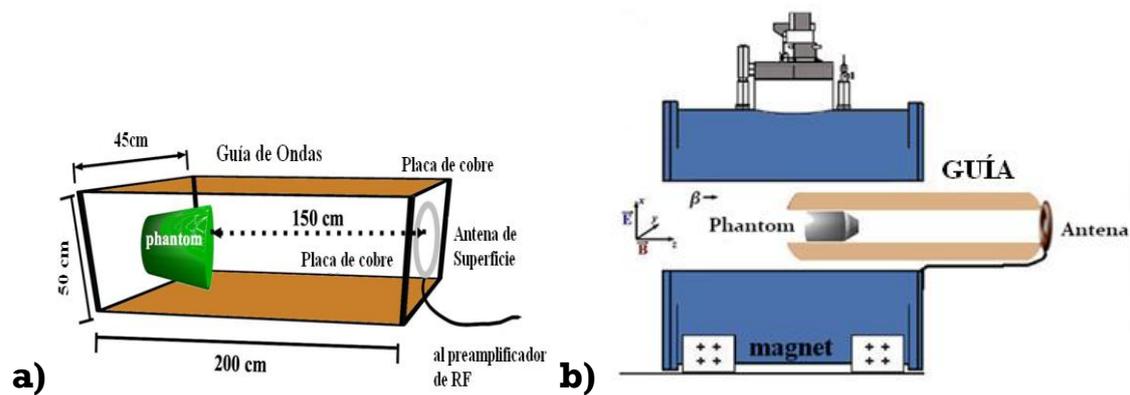


Figura 55. Arreglo experimental para mostrar la detección remota con la guía de ondas de placas paralelas, a) prototipo construido, b) implementación del prototipo en el sistema de IRM clínico

Las imágenes obtenidas de un fantoma en forma de botella lleno de aceite mineral se muestran en la figura 56. Cabe mencionar que hasta el momento se está empleando un mecanismo de excitación limitado, ya que se genera una excitación relativamente homogénea sobre el objeto, pero esta puede ser mejorada con las tecnologías emergentes como los arreglos de transmisión. Por otro lado se puede explorar la excitación por medio de dispositivos que generen un campo magnético más intenso en la dirección de propagación, como es el caso de la antena magnetron superficial [45].

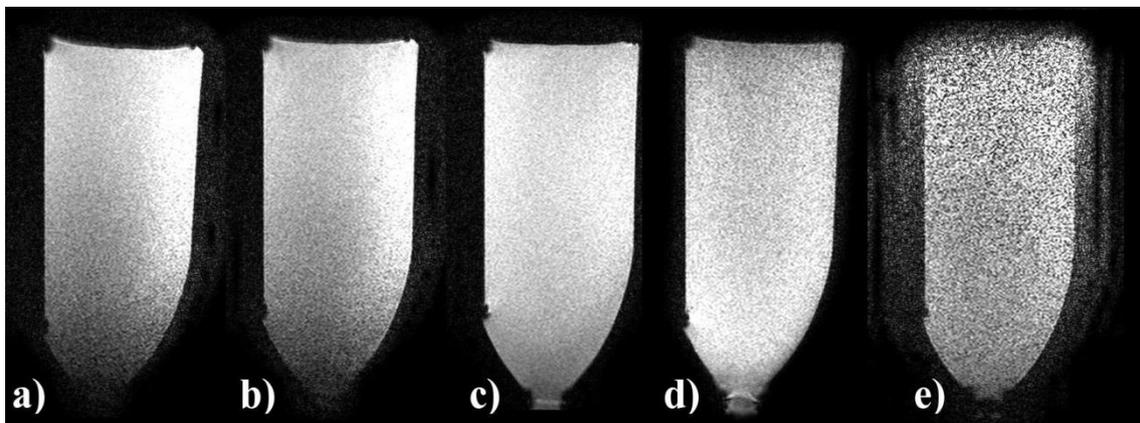


Figura 56. Imágenes obtenidas al variar la distancia de recepción.

De dichas imágenes se obtuvo el valor promedio de intensidad de señal de las imágenes de una ROI de aproximadamente el 70% de la imagen. Estos datos se muestran en la gráfica de la figura 57, de lo cual podemos notar claramente que la mejor calidad de las imágenes se obtiene a una distancia de 1.5 metros desde donde se encuentra el fantoma hasta donde se coloca la antena de recepción.

Estos experimentos muestran que no es necesario tener una antena dentro del sistema para adquirir imágenes de buena calidad y que la detección remota en IRM es una realidad.

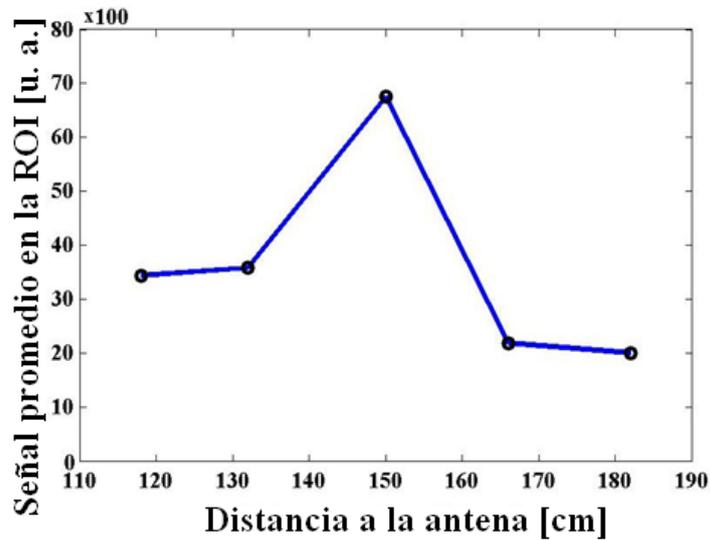


Figura 57. Señal promedio al ir variando la distancia a la cual se posiciona la antena para hacer la recepción de la señal de RM.

#### V.7. Cociente señal a ruido (SNR) de la guía de ondas de placas paralelas

La comparación estadística de las imágenes del fantoma de botella obtenidas con un arreglo de antenas de 8 elementos dentro del imán y con la guía de ondas y el receptor fuera del imán, muestran que la calidad de las imágenes remotas es comparable con las de una adquisición convencional, esto a pesar de que el receptor se encuentra distante de la muestra. El histograma muestra un valor promedio de señal para el arreglo en fase de 188.92 con una desviación estándar de 12.998, mientras que para el esquema de adquisición remota muestra una media de intensidad de señal de 223.815 y desviación estándar de 13.366 (Anexo I). Los valores del SNR son similares para ambos casos, para el primer experimentos es igual a 14.534 y para el segundo caso es 16.745. Los valores del SNR fueron calculados sobre una ROI del 70% de la imagen, de acuerdo al American College of Radiology [46].

Adicionalmente en la figura 58, mostramos perfiles de uniformidad de la señal recibida para ambos esquemas de adquisición. Se puede observar que la señal recibida con la guía de ondas es mayor a lo obtenido con un arreglo en fase, sin embargo también se observan más variaciones que pueden relacionarse con ruido. Este ruido adicional puede deberse a que los sistemas de reconstrucción actuales no están diseñados para obtener imágenes que viajan distancias grandes, un paso para solucionar ese problema es trabajar en nuevos esquemas de reconstrucción de las imágenes de RM.

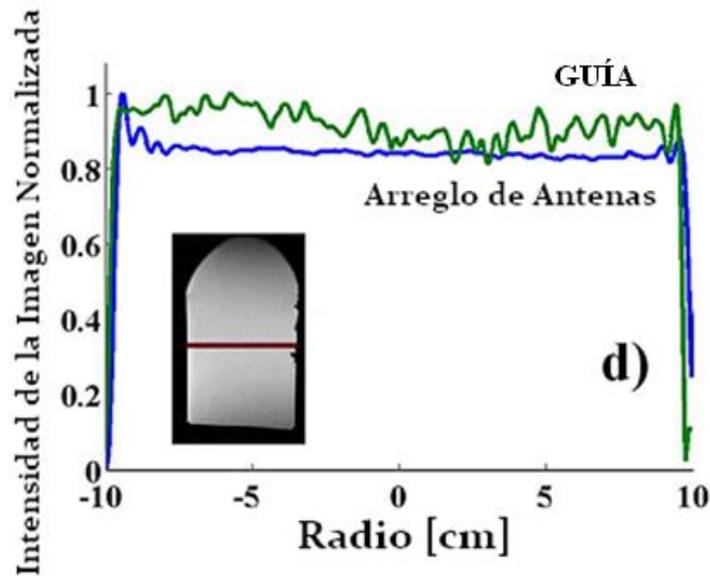


Figura 58. Perfiles de uniformidad de señal para la guía y un arreglo de antenas. Los perfiles fueron tomados al centro del fantoma de botella. Los parámetros para los experimentos fueron: Flip angle = 20°, TR/TE = 336.9/16.1 ms, FOV = 450 mm x 190 mm, matriz = 500x169, grosor del corte = 10 mm, NEX = 5.

La existencia de ruido en las imágenes podría indicar una recepción deficiente, esto es, mientras haya señal habrá ruido, así podría pensarse en que a medida de que la señal aumente el ruido también lo hará. Para abordar esta controversia, se calculó un mapa de sensibilidad del SNR con respecto al flip angle (figura 59)

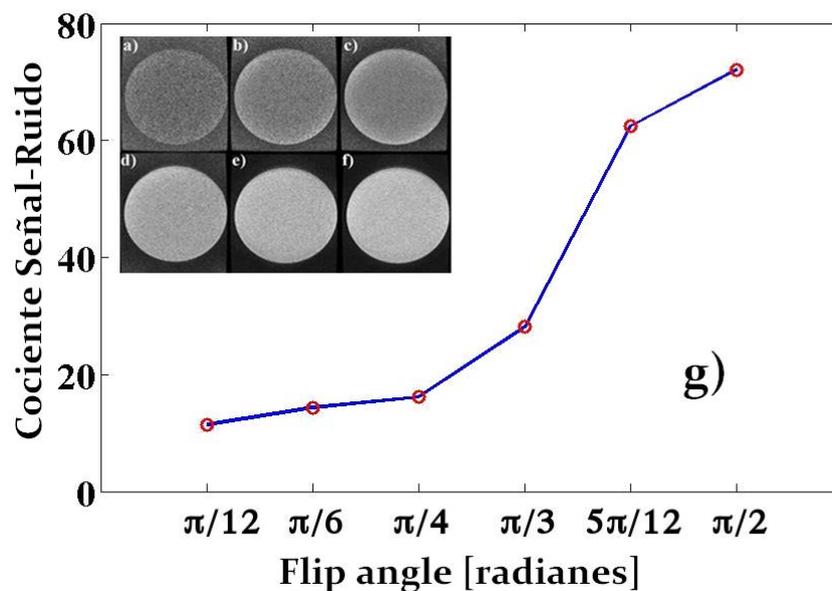


Figura 59. Cálculo del SNR para flip angles desde 15°(a) hasta 90°(f), en g) se muestra la gráfica del comportamiento del SNR al variar el flip angle.

En la gráfica de la figura 59g puede observarse que el SNR se ve afectado al utilizar ángulos pequeños en la secuencia Gradiente-Eco. Esto puede deberse a que existirán señales que incidan normalmente sobre las placas de la guía y no viajen directamente hacia el receptor. Para ángulos superiores a  $60^\circ$  obtenemos una mejoría considerable del SNR. En las imágenes e) y f) puede notarse que a medida de que la intensidad de señal aumenta el ruido no necesariamente lo hace.

### V.8. Mapa del campo $B_1$ para el sistema de guía de ondas de placas paralelas

Una de las principales características reportadas de las guías de ondas es la posibilidad de tener una excitación homogénea sobre el volumen del cual se quiere obtener imágenes. Una forma de demostrar la homogeneidad obtenida es por medio del mapa del campo  $B_1$ . En la figura 60b tenemos el mapa de campo obtenido por el método reportado en [41].

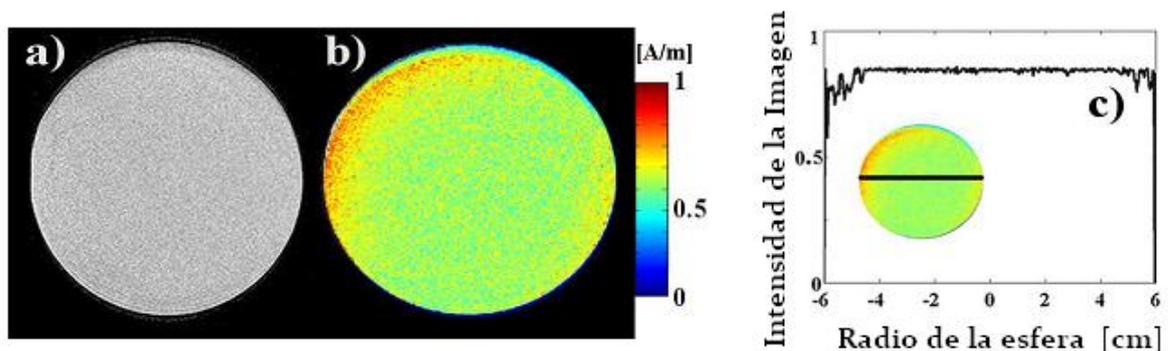


Figura 60. a) Imagen de referencia obtenida para el mapeo de campo, b) mapa de campo y c) perfil de línea obtenida del mapa de campo normalizado.

Podemos observar que el campo es homogéneo, superior al que se puede obtener en una antena (ver figura 47a-c), a pesar de que existen ligeras zonas que muestran una intensidad mayor. El perfil mostrado en (c) muestra que el campo se mantiene homogéneo prácticamente sobre toda la sección transversal del volumen de la muestra.

### V.9. Resultados de los experimentos *in vivo*

Se obtuvieron imágenes de la pierna de un voluntario sano, la figura 61 muestra el arreglo experimental que se montó para realizar dichos experimentos. En el arreglo se tienen la guía de ondas montada sobre un cilindro de acrílico y las antenas circulares a ambos extremos de la guía. La longitud de la guía de ondas es de 60cm, lo que implica

que la separación entre las antenas es mucho mayor que su diámetro. Es importante hacer notar esto ya que la profundidad de penetración de una antena es igual a su diámetro. En este experimento se utilizaron antenas circulares con diámetro externo de 12cm.



Figura 61. Arreglo experimental de la adquisición de imágenes *in vivo*.

Con la finalidad de comparar el diseño propuesto con lo que existe actualmente, se obtuvieron imágenes con la antena de cuerpo entero que se encuentra insertada en el sistema de IRM. Los parámetros de adquisición de las imágenes para el caso de la antena de cuerpo entero como para el caso de la guía de ondas fueron los siguientes: Secuencia Gradiente-Eco, ángulo  $80^\circ$ ,  $TR=500ms$ ,  $TE=4.6ms$ ,  $FOV=484mm \times 171mm$ , tamaño de la matriz  $=840 \times 238$ , grosor de la rebanada  $=5mm$ ,  $NEX=10$ . Los experimentos fueron llevados a cabo en un sistema a 3T con diámetro de bore de 58cm.

La figura 62 muestra las imágenes de pierna obtenidas con la antena de cuerpo entero y con la guía de ondas diseñada. Se puede ver cómo a pesar de que existe mayor cantidad de ruido en el experimento de la guía, la intensidad de la señal se incrementó y la resolución mejoró en las estructuras cercanas a los extremos de la guía, esto comparado con los resultados vistos en la adquisición con la antena de cuerpo entero incorporada en el sistema de IRM. Adicionalmente se muestra una imagen obtenida únicamente con un arreglo de antenas, podemos ver que la calidad de la imagen no permite distinguir entre estructuras.

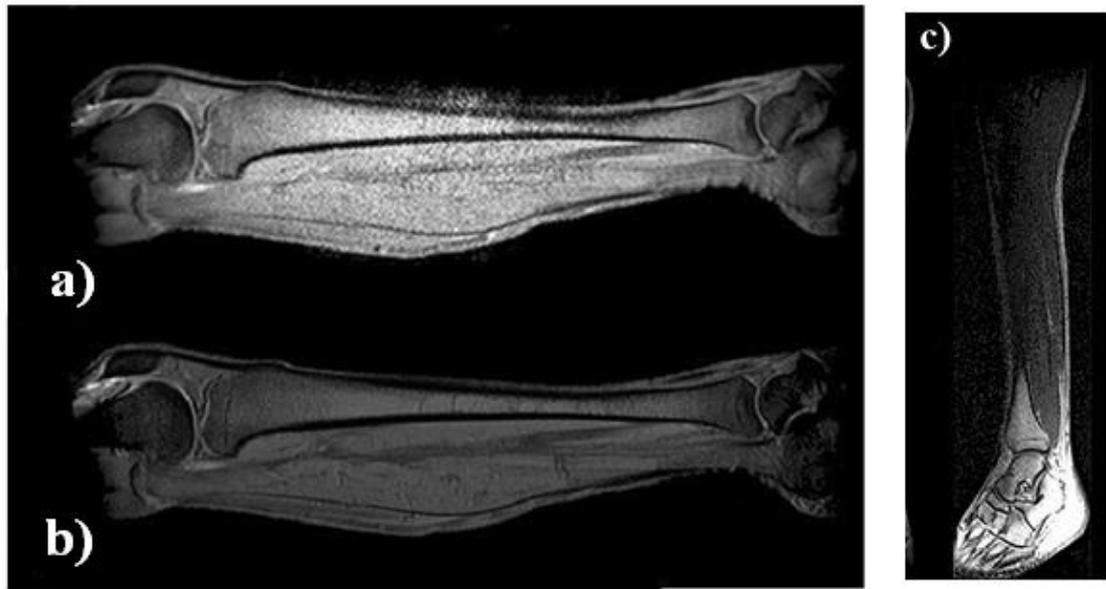


Figura 62. Imágenes de pierna obtenidas con: a) Guía de ondas, b) antena de cuerpo entero y c) con un arreglo de antenas.

En la figura 63 se muestran los perfiles de intensidad de señal para los casos en que se adquiere la imagen con la guía de ondas de placas paralelas y la antena de cuerpo entero. Podemos observar que en ambas direcciones de adquisición de los perfiles, la guía de ondas muestra una señal adquirida con mayor intensidad. Para el caso a lo largo de la pierna, para ambos esquemas de adquisición, se puede notar que la mayor intensidad de señal se encuentra al centro y disminuye a los extremos de la imagen, siendo el comportamiento similar.

Cabe mencionar que la antena de cuerpo entero es una antena del tipo jaula de pájaro, la cual consta de de 16 piernas y las dimensiones son: 68 cm de largo y 66 cm de diámetro. Esto la hace extremadamente complicada de construir y es costosa, además de que a 7T no puede ser empleada para sistemas de cuerpo entero debido a que empiezan a presentarse artefactos de ondas estacionarias. Nuestro diseño muestra ser de fácil implementación, para cualquier intensidad de campo y con imágenes de buena calidad.

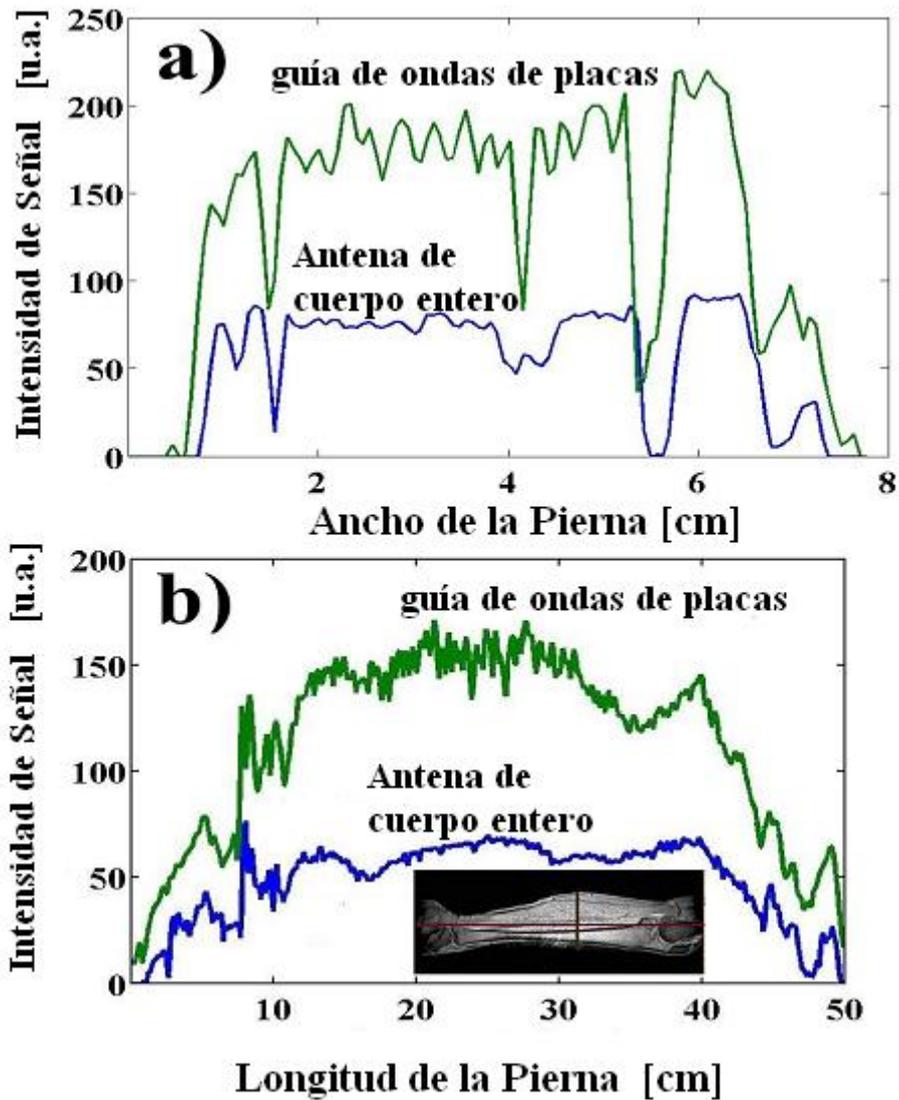


Figura 63. Perfiles de intensidad de señal obtenidos a) a lo ancho y b) a lo largo de la pierna.

#### V.10. Adquisición en otras orientaciones

En la literatura reportada sobre guías de ondas en IRM no existen imágenes en orientación axial, esto debido a que las investigaciones se han centrado en obtener un FOV más grande y mostrar que las ondas viajan longitudinalmente sin reflexión. En la figura 64 se muestran imágenes de un voluntario en un escáner con  $B_0 = 3T$ , obtenidas con un arreglo de guía de ondas de cuerpo entero con dimensiones de 60x200cm. La adquisición se realizó a 100cm de donde se posicionó la región de interés.

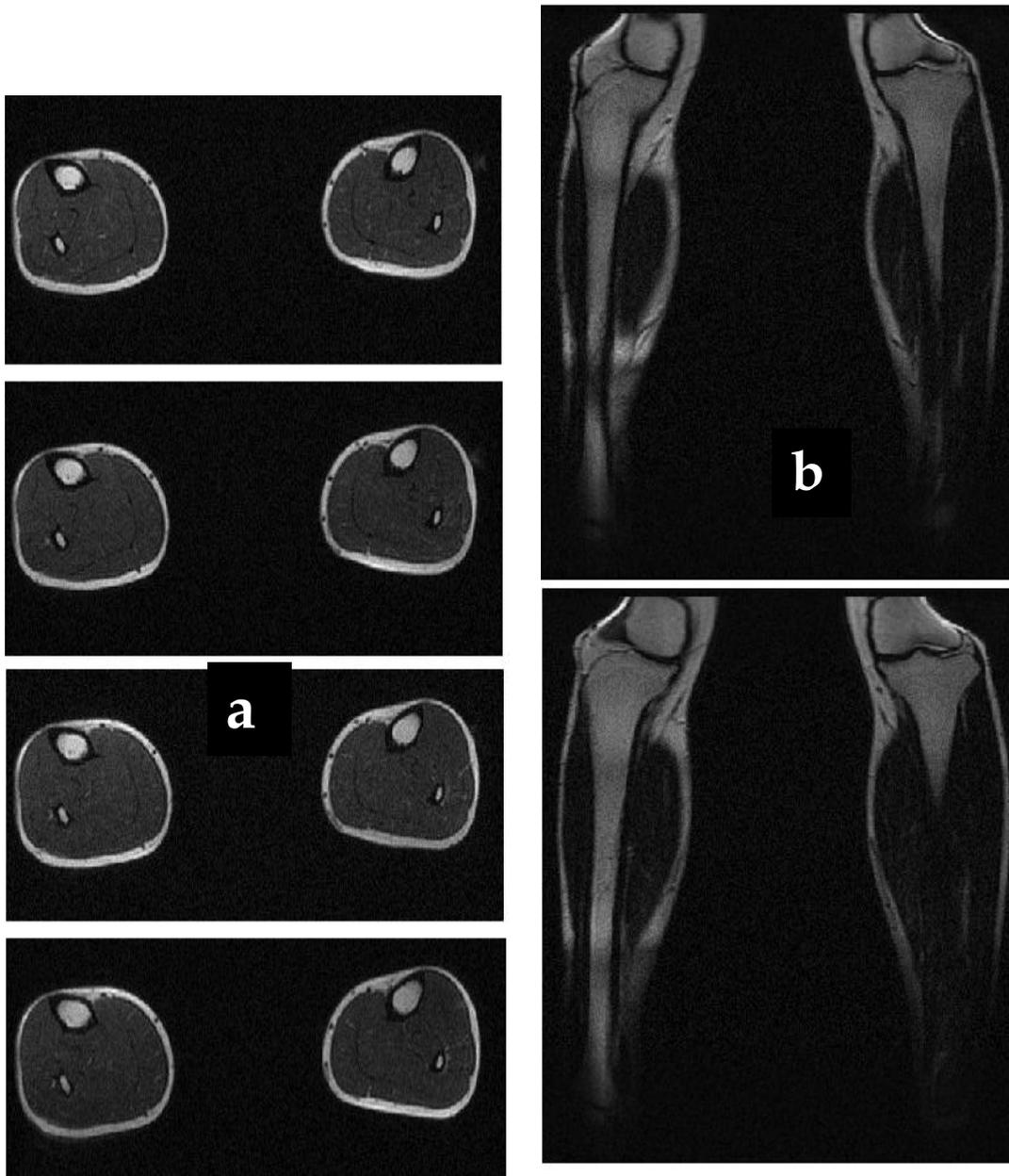


Figura 64. Adquisiciones con la guía de ondas de placas paralelas de cuerpo entero. a) orientación axial, b) orientación coronal. Secuencia: FSE, TR/TE=3800/100ms. NEX=4, 512x512.

La recepción se realizó con un arreglo de 6 canales para cabeza. Con esto pudimos mostrar que como efectivamente las ondas viajan hacia el receptor, la geometría de la antena de recepción no es relevante. El ruido presente en las imágenes es consecuencia de los algoritmos de reconstrucción que no contemplan los retardos de viaje y de fase de las ondas.



## V. CONCLUSIONES

En esta tesis se presentó un enfoque al análisis de la teoría de la resonancia magnética nuclear desde un punto de vista no clásico, esto implica abordar el problema de la resonancia de los núcleos revisando la teoría de la mecánica cuántica, considerando la evidencia experimental y ayudándose de la física clásica para mejor entendimiento de ciertos conceptos.

Con nuestro trabajo experimental demostramos la detección remota en sistemas de IRM para frecuencias inferiores a los 300MHz empleando la guía de ondas de placas paralelas. Por medio del cálculo numérico basado en el Método de Elemento Finito demostramos la posibilidad de utilizar la guía de ondas de placas a prácticamente cualquier intensidad de campo magnético estático empleado actualmente para obtención de imágenes con fines médicos y de investigación. De igual forma pudimos obtener un indicador de la seguridad para el sujeto al emplear el diseño en experimentos *in vivo*, esto por medio del valor del SAR, el cual mostró valores claramente inferiores a los recomendados para IRM, en particular para estudios de extremidades.

Las imágenes obtenidas por este nuevo esquema de adquisición muestran una calidad comparable a la que arroja una adquisición convencional, que hoy en día se puede definir como el empleo de sofisticados arreglos de antenas que incluyen más de 6 canales. Si bien es cierto en algunas de las imágenes obtenidas con la guía de ondas se observa un incremento en el ruido de fondo, también se observa una considerable ganancia de la intensidad de señal recibida. Esto hace que el cociente señal a ruido sea similar para los experimentos convencionales y aquellos que emplean la guía. Una posible causa del incremento del ruido es que los sistemas de reconstrucción actuales no están diseñados para imágenes de Campos de Visión extendidos como los que se pueden obtener con el empleo de las guías de ondas en cualquiera de sus configuraciones, siempre y cuando no entre en conflicto con la frecuencia de corte.

Demostramos que el desempeño de un sistema clínico no se ve alterado por la inclusión del nuevo elemento (guía de ondas), esto hace más fácil la utilización del hardware que ya se encuentra disponible en el sistema de IRM. El comportamiento de la Point Spread Function es similar para el empleo de la guía de ondas como para una adquisición convencional, siendo que no se observa una distorsión en la respuesta al impulso del sistema si comparamos los perfiles de línea de la respuesta al impulso en 2D.

Uno de los resultados más interesantes es la posibilidad de obtener imágenes con la antena de recepción situada a una gran distancia de donde se encuentra la muestra, inclusive es posible poner la antena fuera del imán. Esta nueva posibilidad permitirá que personas con algún problema de claustrofobia sean nuevamente candidatos a

estudios de IRM, dado que no tendrán una antena que rodee su cabeza, en estudios de cerebro por ejemplo.

El diseño de antenas para estudios de IRM tomará una nueva vertiente, ya que ahora se puede pensar no solo en Antenas de volumen o superficie (incluyendo los arreglos), sino que debemos pensar en Antenas que nos permitan excitar algún modo (configuración de campos) en específico dentro de la guía.

Los esquemas de reconstrucción también se verán modificados siendo que si podemos forzar a que exista una configuración de campo dentro de la guía es posible prescindir de los gradientes para hacer la selección del corte. Este enfoque también implica necesariamente pensar en un nuevo sistema de gradientes de campo, nuevas formas de recolección de datos en el espacio  $k$  y nuevas secuencias de pulsos. Como consecuencia de nuestros resultados, vemos muchos retos que se plantean como trabajo a futuro para diversos grupos de investigación.

## VI. REFERENCIAS

- [1] P. Mansfield and I.L. Pykett. *Biological and Medical Imaging by NMR. Journal of Magnetic Resonance*. 29, 355-373 (1978).
- [2] M. A. Brown, R. C. Semelka. *MRI. Basic Principles and Applications*. 3rd Ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc. 2003. Pag. 11
- [3] R. T. Weidner, R. L. Sells. *Elementary Modern Physics*. Allyn and Bacon, Inc. 2<sup>nd</sup> Ed, Boston 1971.
- [4] M. A. Bernstein, K. F. King, X. J. Zhou. *Handbook of MRI Pulse Sequences*. Elsevier, 2004.
- [5] Zhi-Pei Liang, P. C. Lauterbur. *Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing Perspective*. November 1999, Wiley-IEEE.
- [6] P. Golland. *Spatial Encoding In MRI And How To Make It Faster*. May 10, 2000.
- [7] University of Aberdeen. Department of Bio-Medical Physics and Bio-Engineering. *Magnetic Resonance Imaging, Lecture Notes- 2000*.
- [8] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, 7<sup>th</sup> Edition, USA 1996.
- [9] R. H. Hashemi, Bradley W. G., Lisanti C. J. *MRI: The Basics*. 2<sup>nd</sup> Ed., Philadelphia; Lippincott Williams & Wilkins: 2004. 27 - 28.
- [10] D. W. Mc Robbie, E. A. Moore, M. J. Graves and M. R. Prince. *MRI From picture to proton*. Cambridge University Press, 2da edición. 2006.
- [11] P. Mansfield. *Imaging by nuclear magnetic resonance*. J. Phys. E: Sci. Instrum. 21 (1988) 18-30.
- [12] C. A. Balanis. *Antenna Theory, Analysis and Design*. 3<sup>rd</sup> Ed. Wiley, 2005. 535-540.
- [13] J. Clarke, M. Hatridge, M. Mößle. *SQUID-Detected Magnetic Resonance Imaging in Microtesla Fields*. Annu. Rev. Biomed. Eng. 2007.9:389-413.
- [14] Moule AJ, Spence MM, Han SI, Seeley JA, Pierce KL, et al. *Amplification of xenon NMR and MRI by remote detection*. Proc. Natl. Acad. Sci. 2003. USA 100:9122-27
- [15] Seeley JA, Han SI, Pines A. *Remotely detected high-field MRI of porous samples*. J. Magn. Reson. 2004. 167:282-90.
- [16] D.I. Hoult, R. E. Richards. *The signal-to-noise ratio of the nuclear magnetic resonance experiment*. J. Magn. Reson. 1976. 24:71-85.
- [17] T. G. Walker, W. Happer. *Spin-exchange optical pumping of noble gas nuclei*. Rev. Mod. Phys. 1997. 69:629.

- [18] C. Hilty, E. E. McDonnell, J. Granwehr, K. L. Pierce, S. Han, A. Pines. *Microfluidic gas-flow profiling using remote-detection NMR*. Proc. Natl. Acad. Sci. 2005. vol. 102, no. 42. 14960-14963.
- [19] E. Harel, L. Schröder, S. Xu. *Novel Detection Schemes of Nuclear Magnetic Resonance and Magnetic Resonance Imaging: Applications from Analytical Chemistry to Molecular Sensors*. Annual Review of Analytical Chemistry 2008.1:133-163.
- [20] S. Xu, V. V. Yashchuk, M. H. Donaldson, S. M. Rochester, D. Budker, Pines A. *Magnetic resonance imaging with an optical atomic magnetometer*. Proc. Natl. Acad. Sci. 2006.USA 103:12668-71.
- [21] V. N. Egorov. *Resonance Methods for Microwave Studies of Dielectrics (Review)*. Instruments and Experimental Techniques. 2007. Vol. 50, No. 2, pp. 143-175.
- [22] C. A. Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons. 1989.
- [23] D. O. Brunner, N. De Zanche, J. Fröhlich, J. Paska, K. P. Pruessmann. *Travelling-wave nuclear magnetic resonance*. Nature Vol. 457, 19 February 2009.
- [24] A. G. Webb, C. M. Collins, M. J. Versluis, H. E. Kan and N. B. Smith. *MRI and Localized Proton Spectroscopy in Human Leg Muscle at 7 Tesla Using Longitudinal Traveling Waves*. Magnetic Resonance in Medicine 63:297-302 (2010).
- [25] D. K. Cheng. *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*. Prentice Hall, NJ, 1992.
- [26] IEC 60601-2-33. *Safety Standard for MR Systems*. 3ra edición. 2010.
- [27] F. Vazquez, R. Martin, O. Marrufo, and A. O. Rodriguez. *Waveguide Magnetic Resonance Imaging at 3Tesla*. Proc. Intl. Soc. Magn. Reson.Med. 18,3792(2010).
- [28] J. A. Tang, G. C. Wiggins, D. K. Sodickson and A. Jerschow. *Cutoff-Free Traveling Wave NMR. Concepts in Magnetic Resonance*. Part A. Volume 38A, Issue 5, pages 253-267, September 2011.
- [29] S. Alt, M. Müller, R. Umathum, A. Bolz, P. Bachert, W. Semmler, and M. Bock. *Coaxial Waveguide MRI*. Magnetic Resonance in Medicine 67:1173-1182 (2012).
- [30] J. Mallow, T. Herrmann, K. Kim, J. Stadler, J. Mylius, M. Brosch, and J. Bernarding. *Ultra-high field MRI for primate imaging using the travelling-wave concept*. Magn. Reson. Mater. Phy. Springer, 2012.
- [31] U. Katscher, P. Börnert, C. Leussler, and J. van den Brink. *Transmit SENSE*. Magnetic Resonance in Medicine 49:144 -150 (2003).
- [32] Y. Zhu. *Parallel Excitation With an Array of Transmit Coils*. Magnetic Resonance in Medicine 51:775-784 (2004).

- [33] G. Adriany, P. van de Moortele, F. Wiesinger, S. Moeller, J. Strupp, P. Andersen, C. Snyder, X. Zhang, W. Chen, K. Pruessmann, P. Boesiger, T. Vaughan, K. Ugurbil. *Transmit and receive transmission line arrays for 7 Tesla parallel imaging*. Magn. Reson. Med. 53(2):434–445 (2005).
- [34] P. Bhartia, K. Rao and R. Tomar. *Millimeter-wave microstrip and printed circuit antennas*. Artech House, Norwood Massachusetts, 1991.
- [35] K. Cheng. *Field and Wave electromagnetics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [36] M. Sadiku. *Elementos de Electromagnetismo*. 2da Edición. Compañía Editorial Continental, México, 1998.
- [37] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3ra edición. John Wiley & Sons Ltd. 1962.
- [38] M. Ohkubo, S. Wada, S. Ida, M. Kunii, A. Kayugawa, T. Matsumoto, K. Nishizawa, and K. Murao. *Determination of point spread function in computed tomography accompanied with verification*. Med Phys. 2009 Jun; 36(6):2089-97.
- [39] C. Gabriel, S. Gabriel, E. Corthout. *The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey*, Phys. Med. Biol. 41, 1996.
- [40] J. Jianming. *Electromagnetic Analysis and Design in Magnetic Resonance Imaging*. CRC Press. 1998.
- [41] F. Vazquez, O. Marrufo, and A. O. Rodriguez. *Simple method for B1 mapping at 7 Tesla*. Proc. Eur. Soc. Mag. Reson. Med. Biol. 589, 143 (2011).
- [42] M. A. Bernstein, K. F. King and X. J. Zhou. *Handbook of MRI Pulse Sequences*. Elsevier Academic Press, 2004.
- [43] International Electrotechnical Commission, *IEC 60601-2-33*, 2008.
- [44] A. Christ, W. Kainz, E. Hahn, K. Honegger, M. Zefferer, E. Neufeld, W. Rascher, R. Janka, W. Bautz, J. Chen, B. Kiefer, P. Schmitt, H. Hollenbach, J. Shen, M. Oberle, D. Szczerba, A. Kam, J. Guag and N. Kuster. *The Virtual Family – development of surface-based anatomical models of two adults and two children for dosimetric simulations*. Phys. Med. Biol. 55 (2010) N23–N38.
- [45] A. Rodríguez. *Magnetron Surface Coil for Brain MR Imaging*. Archives of Medical Research 37 (2006) 804–807.
- [46] American College of Radiology, *Magnetic Resonance Imaging Quality Control Manual* (American College of Radiology, Reston, VA, 2004).



## VII. ANEXOS

### A.1. Principios Físicos de la IRM

Nuestro punto de partida para explicar el fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear (RMN) se basará en el enfoque de la mecánica cuántica, esto debido a que estamos hablando de dimensiones subatómicas y medios confinados.

El análisis del comportamiento de las partículas subatómicas parte de la existencia de una función de onda compleja  $\psi(x)$ , que incluye el concepto de la naturaleza ondulatoria de la materia, propuesta por de Broglie [A.1]. La función de onda nos permite describir el estado físico completo de una partícula o sistema de partículas tales como un átomo. La función de onda por sí sola no posee un significado físico, sin embargo el producto

$$\psi^*(x)\psi(x) = |\psi(x)|^2 \quad (A1)$$

es real y representa la probabilidad por unidad de longitud de encontrar la partícula en un punto cualquiera en la dirección  $x$ . En la ecuación 1,  $\psi^*(x)$  es el complejo conjugado de la función de onda. Si se define la función de onda en tres dimensiones, entonces se determinará la probabilidad por unidad de volumen.

La relación que indica la certidumbre de encontrar la partícula en alguna parte, está dada por la siguiente condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) = 1 \quad (A2)$$

Si la función de onda también depende del tiempo además de la posición, entonces satisface la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo [A.2]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (A3)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $\hbar$  la constante de Planck normalizada y  $V$  una función que expresa la energía potencial del sistema. El producto  $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$  ahora representa la probabilidad por unidad de longitud de encontrar la partícula en un punto y en un tiempo dados.

Cuando la ecuación describe un estado estacionario, donde  $\Psi$  y  $V$  no dependen del tiempo, la ecuación A3 puede escribirse en su forma independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (A4)$$

Definiendo la energía total del sistema como

$$E = K + V = \frac{p^2}{2m} + V \quad (A5)$$

y el operador Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (A6)$$

la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (A7)$$

Para que las funciones de onda  $\psi(x)$  sean consistentes con las observaciones físicas, es necesario imponer requisitos adicionales [A.3]:

1. Debe ser de buen comportamiento, es decir, que sea continua en todas partes y de valor único.
2. Cumple con el principio de superposición, de tal forma que si  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$  son soluciones de la ecuación A7, entonces la combinación lineal  $\psi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \dots + a_n\psi_n(x)$  será también solución.
3. Debe aproximarse a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$

## A.2. Teoría de Schrödinger del átomo de hidrógeno

En la figura A1 se muestra una representación esquemática, desde el punto de vista de la mecánica clásica, del átomo de hidrógeno, que se considera como la estructura atómica más simple que existe en la naturaleza. Se compone por un electrón con masa  $m_e$  y un protón con una masa  $=1836m_e$ , el protón se posiciona en el origen del sistema coordenado y el electrón orbita alrededor de él a una distancia  $r$  bajo la influencia del campo atractivo de Coulomb. Desde una visión más realista, ambas partículas orbitarían alrededor del centro de masas del sistema, desplazado un poco fuera del protón.

La energía potencial debida al campo de Coulomb es:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (A8)$$

donde  $e$  es la carga del electrón y  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío ( $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ ). Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el electrón (en general, la partícula) es representado por un sistema de ondas limitado por el pozo de potencial del campo de Coulomb [A.3]; esto da como resultado un conjunto permitido de ondas estacionarias y cada uno corresponde a un valor posible de la energía total.

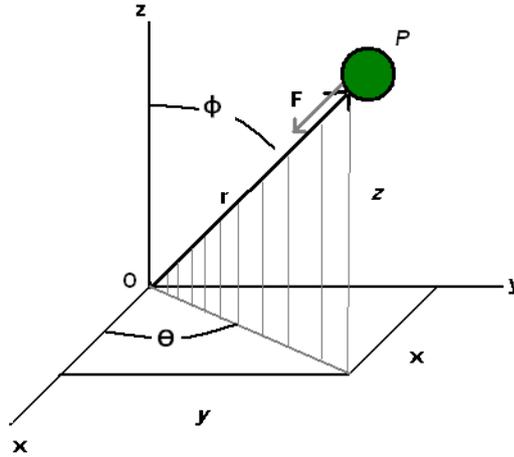


Figura A1. Representación clásica en el plano coordenado del átomo de hidrógeno.

Para el presente caso, el átomo se encuentra en su estado estacionario, por lo que debe utilizarse la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y la ecuación de onda debe expresarse en 3 dimensiones, por lo que el operador Hamiltoniano también adquiere esta notación:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V \quad (\text{A9})$$

La geometría del problema sugiere que es más conveniente utilizar coordenadas esféricas. Éstas serán:  $r$ , el radio vector;  $\theta$ , el ángulo polar y  $\phi$  el ángulo azimutal. Las coordenadas rectangulares se relacionan con las esféricas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Transformando el Hamiltoniano a coordenadas esféricas, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo queda [A.2]

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi \\ = E\psi \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

y la función de onda ahora es dependiente de  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (\text{A12})$$

Utilizando esta forma de la función de onda, sustituyendo en la ecuación de Schrödinger (ec. A11) y multiplicando todo por  $2mr^2/\hbar^2$  llegamos a:

$$\begin{aligned} & \Theta\Phi \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Theta}{\text{sen}^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\Phi R}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R\Theta\Phi \\ & = 0 \end{aligned} \quad (A13)$$

Si ahora dividimos esta última ecuación por  $\psi = R\Theta\Phi$ , obtenemos una relación donde los términos que dependen de  $r$ , no dependen de  $\phi$  ni de  $\theta$ . Con ello, podemos agrupar los términos en una sección puramente radial y en otra sección angular que solo depende de  $\phi$  y de  $\theta$ , e igualar ambas partes a una constante (la misma constante). Definiendo la constante  $l(l+1)$  [A.4], tenemos

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) R = l(l+1)R \quad (A14)$$

y

$$\frac{1}{\Phi \text{sen}^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\Phi \text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (A15)$$

La ecuación A15 puede ser separada de forma similar, en una parte que solo dependa del ángulo azimutal  $\phi$  y en otra que solo dependa del ángulo polar  $\theta$ . Multiplicando por  $\text{sen}^2\theta$  e igualando ambas partes de la ecuación resultante a una nueva constante  $m_l^2$  [A.4], obtenemos:

$$\frac{m_l^2}{\text{sen}^2\theta} - \frac{1}{\Theta \text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (A16)$$

y

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m_l^2\Phi = 0 \quad (A17)$$

Con ello hemos separado la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno en tres ecuaciones, que dependen de una sola coordenada; además se ha introducido la notación de un par de constantes que nos ayudarán a describir los fenómenos que ocurren en este átomo.

### A.2.1. La ecuación azimutal

Describe el comportamiento de la función de onda a medida que el sistema gira alrededor del eje  $z$ . Su forma es similar a la del oscilador armónico, y sus soluciones constan de dos funciones periódicas reales y una compleja [A.5]

$$\begin{aligned} \Phi &= A \text{sen } m_l \phi \\ \Phi &= A \cos m_l \phi \\ \Phi &= A e^{jm_l \phi} \end{aligned} \quad (A18)$$

Si el átomo es girado una vuelta completa alrededor del eje  $z$ , debe alcanzarse el mismo valor para la función  $\Phi$  cuando se alcance de nuevo el valor  $\phi$ ; esto implica que en las soluciones de la ecuación A18, se cumplirá siempre y cuando el producto  $m_l\phi$  sea múltiplo entero de  $2\pi$ . Debido a que  $\phi$  está en radianes,  $m_l$  debe ser un número entero.

Tomando en consideración las soluciones cuando no hay rotación y cuando existen rotaciones en sentido opuesto, los únicos valores posibles para  $m_l$  son:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (A19)$$

### A.2.2. La ecuación polar

La otra ecuación que describe el comportamiento angular de la función de onda alrededor del origen, tiene como soluciones los polinomios asociados de Legendre (Anexo C), descritos por

$$P_{lm_l}(\cos \theta) \quad (A20)$$

Ya que  $m_l$  solo puede tener valores enteros, de las propiedades de los polinomios de Legendre aplicados al sistema de la figura 1, donde  $\theta$  solo puede tomar valores de 0 a  $\pi$ , las soluciones dadas por la ecuación A20 existen solo cuando  $l$  es entero y es mayor o igual al valor absoluto de  $m_l$  [A.2]. Esto impone las condiciones para los valores del *número cuántico orbital*. Si  $l = 0$  entonces  $m_l = 0$ ; si  $l = 1$  entonces  $m_l$  puede ser igual a 0, +1 o -1, con lo cual podemos determinar que:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (A21)$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

En general, para un valor dado de  $l$ , hay  $(2l + 1)$  posibles soluciones cuando  $m_l$  toma sus valores permitidos. Se dice que un estado correspondiente a un valor dado de  $l$  muestra  $(2l + 1)$  múltiple degeneración en  $m_l$ . Si los  $(2l + 1)$  valores característicos de la energía son todos iguales, entonces el estado es *degenerado*.

Si se presenta algún estímulo físico adicional que separe estos valores característicos, unos de otros, desaparece la degeneración y se dice que el estado es *no degenerado*. Un campo magnético aplicado al átomo de hidrógeno remueve la degeneración en  $m_l$ , y es por esto que se le conoce como *número cuántico magnético*.

### A.2.3. La ecuación radial

El conjunto resultante de las soluciones de la ecuación de onda radial está determinado por los polinomios de Laguerre (Anexo D), y se expresan de la siguiente forma

$$R_{nl} = e^{-nr} r^l L_{n,l}(r) \quad (A22)$$

donde  $n$  es cualquier número positivo distinto de cero y  $l$  sigue siendo el número cuántico orbital. A  $n$  se le conoce como *número cuántico total o principal*. De las propiedades de los polinomios de Laguerre se extrae que las soluciones de la ecuación A22 solo existen cuando  $n \geq (l + 1)$  [A.2].

Si re-arreglamos la ecuación de onda radial (ecu. A14), los tres términos entre paréntesis tienen unidades de energía, por lo tanto podemos igualar el tercer término a una energía  $E'$ , con lo que tenemos

$$\hbar^2 l(l+1) = r^2 (2mE') = r^2 \rho^2 \quad (\text{A23})$$

La cantidad 'radio por momento lineal' es simplemente el momento angular que, bajo esta consideración, queda expresado como

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (\text{A24})$$

Con esto podemos concluir que el momento angular está cuantizado.

Se tiene un conjunto de tres números cuánticos para el modelo del átomo de hidrógeno, obteniendo la siguiente relación entre ellos

$$\begin{aligned} \text{número cuántico total } n &= 1, 2, 3, \dots \\ \text{número cuántico orbital } l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ \text{número cuántico magnético } m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \end{aligned}$$

El número total de soluciones independientes a la ecuación completa de Schrödinger para un valor dado de  $n$  es

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (\text{A25})$$

### A.3. El momento magnético del átomo de hidrógeno

Un momento angular asociado con una carga eléctrica implica una corriente circulante. Una corriente eléctrica rotatoria genera un campo magnético, de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell. De esto se desprende que el átomo de hidrógeno posee un campo magnético permanente propio. La intensidad de este campo, comúnmente se expresa en términos del momento magnético. Considerando al átomo de hidrógeno como un electrón circulando alrededor del protón (figura 2A), calculemos el momento magnético del sistema.

Si  $f$  es la frecuencia de rotación del electrón, la corriente equivalente es

$$i = -ef \quad (\text{A26})$$

y si  $m_e$  es la masa del electrón,  $R$  el radio de rotación y  $v$  la velocidad lineal del electrón, entonces su momento angular es

$$L = m_e v R = m_e 2\pi f R^2 \quad (\text{A27})$$

Si una corriente fluye a través de una malla cerrada de área  $A$ , el campo magnético que produce es similar al de un imán con momento

$$\mu_l = iA \quad (\text{A28})$$

donde  $A = \pi R^2$

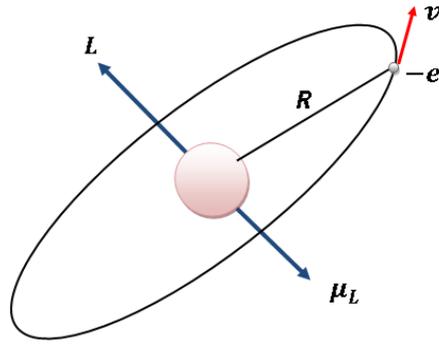


Figura 2A. Representación del momento angular y del momento magnético del sistema protón-electrón del átomo de hidrógeno.

La relación que se obtiene al dividir la expresión del momento magnético entre la expresión del momento angular, es conocida como *razón giromagnética*:

$$\gamma = \frac{\mu_l}{L} = -\frac{ef\pi R^2}{m_e 2\pi f R^2} = -\frac{e}{2m_e} = 8.8 \times 10^9 \frac{C}{Kg} \quad (A29)$$

Como puede observarse, esta razón es independiente de la forma y tamaño de la órbita, es decir, si aplicáramos el tratamiento a una órbita elíptica de dimensiones cualesquiera el valor de la razón giromagnética permanece constante.

Considerando que el momento angular orbital del electrón está cuantizado (ec. A24), la magnitud del momento dipolar magnético asociado al átomo de hidrógeno es

$$|\mu_l| = \frac{e}{2m} L = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} \quad (A30)$$

Debido a que la carga del electrón es negativa, el vector del momento dipolar magnético tiene dirección opuesta a la del momento angular (figura A2). En la ecuación A30, podemos identificar la unidad expresada por

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \times 10^{-24} \frac{J}{T} \quad (A31)$$

como el *magnetón electrónico de Bohr*, y se considera una unidad natural del momento dipolar magnético. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica relativista de Dirac, podemos hacer el mismo cálculo para el momento dipolar magnético del protón, en este caso el electrón representaría el origen de nuestro sistema coordinado; y de igual forma podemos encontrar el valor para el magnetón del protón

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2(1836m)} = 5.050 \times 10^{-27} \frac{J}{T} \quad (A32)$$

#### A.4. Efectos de un Campo Magnético Externo (El efecto Zeeman)

El momento magnético es una medida de la fuerza y de la orientación del dipolo y puede ser definido como [A.6]

$$\mu_l = qd \quad (\text{A33})$$

donde  $q$  es la fuerza del campo magnético de cada uno de los polos y  $d$  es un vector que va del polo negativo (sur) al polo positivo (norte).

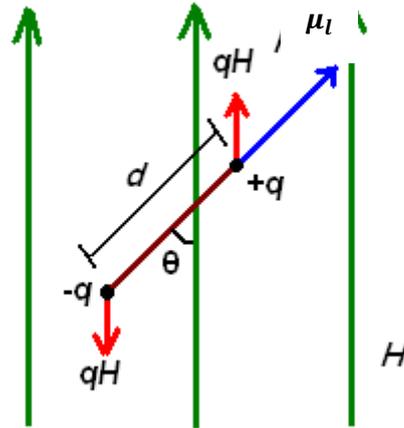


Figura A3. Momento magnético dentro de un campo magnético externo  $H$ .

A continuación evaluaremos las fuerzas que actúan sobre un sistema de momento magnético  $\mu_l$  (electrón o protón) colocado en un campo magnético externo  $H$ , el cual es uniforme en la región del dipolo (figura A3). En este campo existe una fuerza paralela a la dirección de  $H$ , su magnitud es  $qH$  y actúa sobre el polo positivo, y una fuerza de la misma magnitud que actúa en dirección opuesta sobre el polo negativo. El torque que se ejerce sobre el sistema es

$$T = qH \frac{d}{2} \sin \theta + qH \frac{d}{2} \sin \theta = qH d \sin \theta = \mu_l H \sin \theta \quad (\text{A34})$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mu_l$  y  $H$ . El torque es un vector perpendicular tanto a  $\mu_l$  como a  $H$ . Su magnitud y dirección pueden ser expresadas como

$$T = \mu_l \times H \quad (\text{A35})$$

En un campo magnético externo  $H$ , el sistema con momento magnético  $\mu_l$  tiene una energía potencial orientacional  $\Delta E$ , que depende del ángulo  $\theta$  entre los dos vectores [A.6]. Dicha energía potencial puede ser evaluada por la energía potencial de cada uno de los polos del dipolo, para ello definimos como el cero de la energía potencial el centro del dipolo. Para un campo magnético que es uniforme en la región del dipolo, tenemos

$$\Delta E = -zqH - (-z)(-q)H = -2 \frac{\delta}{2} \cos \theta qH = -\mu_l H \cos \theta \quad (\text{A36})$$

Se puede reescribir considerando que:

$$\Delta E = -\mu_l \cdot H \quad (\text{A37})$$

La energía orientacional  $\Delta E$  se minimiza cuando  $\mu_l$  y  $H$  están alineados. En ausencia de mecanismos disipativos, el vector  $\mu_l$  no obedece la tendencia natural a alinearse con el vector  $H$ ; en lugar de esto  $\mu_l$  precesará alrededor de  $H$  de tal forma que  $\theta$  y  $\Delta E$  se mantengan constantes [A.6] (figura A4).

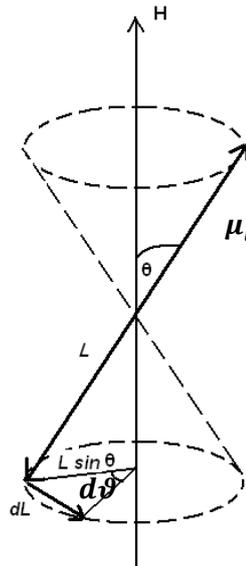


Figura A4. Precesión del momento magnético de la partícula alrededor de la dirección de un campo magnético externo.

Este movimiento de precesión es una consecuencia de que el torque  $T$  es siempre perpendicular al vector del momento angular  $L$ , de la ecuación A36 tenemos

$$T = -\frac{\mu_B}{\hbar} L \times H \quad (\text{A38})$$

Sustituyendo en la ley de Newton para la rotación  $\frac{dL}{dt} = T$ , obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\mu_B}{\hbar} L \times H \quad (\text{A39})$$

De esta ecuación podemos ver que el cambio en  $L$  con respecto al tiempo es

$$dL = \frac{\mu_B}{\hbar} L \times H dt \quad (\text{A40})$$

Estos vectores se pueden ver en la figura A4. En el tiempo  $dt$  la flecha del vector  $L$  se mueve en un ángulo

$$d\vartheta = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{\mu_B L H \sin \theta dt}{\hbar L \sin \theta} = \frac{\mu_B H dt}{\hbar} \quad (\text{A41})$$

En consecuencia  $L$ , y también  $\mu_l$ , precesan alrededor de  $H$  con una frecuencia angular de magnitud

$$\omega_L = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu_B H}{\hbar} = \gamma H \quad (\text{A42})$$

A este fenómeno se le conoce como *precesión de Larmor*, y  $\omega_L$  es la *frecuencia de Larmor*.

Cuando un átomo de hidrógeno se sitúa dentro de un intenso campo magnético externo  $B_{ext}$ , el momento dipolar magnético  $\mu_l$  de la corriente electrónica en su órbita alrededor del protón (o el momento dipolar del protón al girar alrededor del electrón), interaccionará con dicho campo. La energía potencial asociada con esa interacción es

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= -\mu_l \cdot B_{ext} = \mu_l B_{ext} \cos(\pi - \theta) \\ \Delta E_m &= \mu_l B_{ext} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A43})$$

Sustituyendo la expresión para el momento magnético dipolar (ec. A28)

$$\Delta E_m = \frac{e}{2m} L B_{ext} \cos \theta \quad (\text{A44})$$

y como  $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

$$\Delta E_m = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} B_{ext} \cos \theta = \mu_B \sqrt{l(l+1)} B_{ext} \cos \theta \quad (\text{A45})$$

La energía total del átomo de hidrógeno en el campo magnético es ahora

$$E_{n,l,m_l} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} + \mu_B \sqrt{l(l+1)} B_{ext} \cos \theta \quad (\text{A46})$$

donde el primer término de la ecuación es debido a la interacción de Coulomb entre el electrón y el protón. El segundo término representa la interacción del campo magnético externo y el momento magnético dipolar (del electrón o del protón).

Introduciendo la relación del número cuántico  $\cos \theta = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$  [A.2], obtenemos

$$E_{n,l,m_l} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} + m_l \mu_B B_{ext} \quad (\text{A47})$$

Esta ecuación nos muestra que la energía también depende del número cuántico  $m_l$ . Con esto podemos conocer el efecto que tiene un campo magnético sobre los niveles de energía del átomo. Cuando el campo  $B_{ext} = 0$ , el nivel de energía está dado solamente por el primer término; a medida que el campo magnético externo crece, el segundo término toma valores significativos de tal forma que los valores permitidos de  $m_l$  toman efecto. Recordando que para cada  $n$  y  $l$  dados existen  $2l+1$  valores posibles para  $m_l$ . Cada valor permitido de  $m_l$  produce un valor diferente de  $E_{n,l,m_l}$  dividiendo así el nivel original de energía en  $2l+1$  niveles. Cuando se aplica un campo magnético externo, la separación entre dos niveles consecutivos de energía es constante y está dada por

$$\Delta E = \mu_B B_{ext} \quad (\text{A48})$$

#### A.4.1. El efecto Zeeman normal

Un átomo excitado deja tal estado efectuando una transición a un estado de energía total con un número cuántico diferente. La diferencia de energía entre los dos estados debe ser desechada a través de algún mecanismo para no violar la ley de conservación de energía. Esto ocurre mediante la emisión de un fotón de frecuencia

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}, \quad E_i > E_f \quad (\text{A49})$$

donde  $E_i$  y  $E_f$  son las energías totales de los estados inicial y final, respectivamente. La transición puede tener lugar espontáneamente y al azar con respecto al tiempo, de manera que no hay forma de predecir cuándo ocurrirá la transición. Sin embargo, se puede calcular la probabilidad de transición por unidad de tiempo. Esto se logra mediante ciertas reglas de selección [A.2] que gobiernan las transiciones permitidas, es decir, en donde existe una alta probabilidad de transición. Un ejemplo de estas reglas es:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l_i - l_f = \pm 1 \\ \Delta m_l &= m_{l_i} - m_{l_f} = 0 \text{ o } \pm 1 \end{aligned} \quad (\text{A50})$$

Cuando no existe un campo magnético aplicado, la energía del fotón emitido es [A.2]

$$\Delta E = h\nu_0 \quad (\text{A51})$$

y la longitud de onda del fotón emitido será

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \quad (\text{A52})$$

Para un campo magnético externo aplicado las energías para las transiciones permitidas serán

$$h\nu = h\nu_0 + \Delta m_l \mu_B B_{ext}, \quad \text{para } \Delta m_l = -1, 0, +1 \quad (\text{A53})$$

y las longitudes de onda de los fotones emitidos

$$\lambda = \frac{c}{\nu_0 + \frac{\Delta m_l \mu_B B_{ext}}{h}}, \quad \text{para } \Delta m_l = -1, 0, +1 \quad (\text{A54})$$

#### A.5. El Espín

Una propiedad importante de las partículas subatómicas es el momento angular intrínseco, o conocido como momento angular de espín. El momento angular de espín es independiente del movimiento orbital y se puede ver como una partícula girando alrededor de algún eje de rotación interno. El protón al rotar generará un momento magnético  $\mu_l$  [A.7].

Si el protón, con su respectivo momento magnético de espín, es puesto en un campo magnético, el espín estará espacialmente cuantizado (efecto Zeeman), lo cual implica

que el momento angular del espín está restringido solo a ciertas orientaciones cuantizadas y la energía del átomo dependerá de la orientación en particular.

La evidencia mostrada por la espectroscopia es que las líneas espectrales obtenidas de un átomo con un solo electrón de valencia, en ausencia de un campo magnético externo, aparecen como dobletes (dos componentes) [A.7], para cada nivel de energía orbital (excepto para  $l = 0$ ), cuando  $l = 0$  aparece como una sola componente espectral.

Cuando aplicamos un campo magnético al sistema, según lo visto por el efecto Zeeman, cada estado con número cuántico orbital  $l$  es dividido en  $2l + 1$  subniveles. Se asume que un estado que tiene un número cuántico de momento angular de espín  $I$  es dividido en  $2I + 1$  componentes. Debido a que el número de componentes que aparecen en el espectro de un átomo con momento angular orbital diferente de cero es siempre igual a 2, se debe cumplir la relación

$$2I + 1 = 2, \text{ y por lo tanto } I = \frac{1}{2} \quad (\text{A55})$$

La magnitud del momento angular de espín  $L_I$  está dada por la relación análoga al momento angular orbital

$$L_I = \sqrt{I(I + 1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (\text{A56})$$

En presencia de un campo magnético el espín se encuentra espacialmente cuantizado, esto es que la componente  $L_{I,z}$  del momento angular de espín en la dirección del campo magnético es

$$L_{I,z} = m_I\hbar \quad (\text{A57})$$

donde el número cuántico de espín magnético  $m_I$ , solo tiene dos posibles valores,  $+\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ . A estas posibles orientaciones se les conoce como direcciones paralelas y anti-paralelas, respectivamente. Siendo la primera un estado de baja energía y la segunda de alta energía.

El cambio de energía magnética potencial del momento magnético de un protón en un campo magnético  $B_{ext} = B_0$  está dada por

$$\Delta E_I = \frac{1}{2}\mu_B B_0 - (-\frac{1}{2})\mu_B B_0 = \mu_B B_0 = \frac{e\hbar}{2m} B_0 = \gamma\hbar B_0 \quad (\text{A58})$$

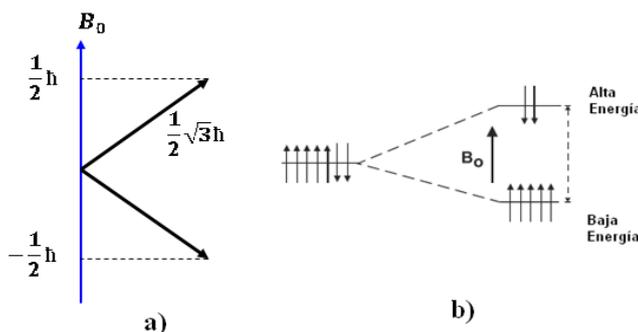


Figura A5. Efecto Zeeman. a) Magnitud del momento angular del espín. b) En ausencia de campo externo (lado izquierdo de la Figura) no existe una orientación preferencial de los espines. En presencia de un  $B_0$ , los espines en sentido paralelo se encuentran en estado de baja energía y los anti-paralelos están en estado de alta energía.

## B. Distribución de Boltzman

Considerando el caso en el que existe un número arbitrario de niveles de energía y un número muy grande de partículas  $N_s$ , habrá  $N_s!$  formas de arreglar las  $N_s$  partículas en  $N_s$  estados especificados por un solo tipo de partícula. Si definimos la población de partículas en el estado de energía  $E = 0$  como  $n_0$ ,  $E = \varepsilon$  como  $n_1$ ,  $E = 2\varepsilon$  como  $n_2$  y así sucesivamente, las partículas  $n_0$  pueden arreglarse en  $n_0!$  diferentes formas, sin afectar la distribución. Similarmente podemos arreglar las partículas  $n_1, n_2, n_3, \dots$

El número de estados dentro de la distribución está determinado por el conjunto de poblaciones con diferentes niveles de energía  $\{n_j\}$ :

$$G = \frac{N_s!}{n_0! n_1! n_2! n_3! \dots n_j!} \quad (B1)$$

Para encontrar la distribución más probable, se necesita encontrar el conjunto  $\{n_j\}$  que maximice  $G$ . Debido a que  $N_s$  es muy grande, podemos utilizar la aproximación de Stirling aplicando logaritmo natural a (B1):

$$\ln(G) = N_s \ln(N_s) - N_s - \sum_j (n_j \ln(n_j) - n_j) \quad (B2)$$

Considerando  $N_s$  constante, la variación de  $\ln(G)$  con respecto a las variaciones de cada  $n_j$  es:

$$d \ln(G) = - \sum_j \left( \ln(n_j) + \frac{n_j}{n_j} - 1 \right) dn_j = - \sum_j \ln\left(\frac{n_j}{n_j}\right) dn_j \quad (B3)$$

Debido a que  $\ln(G)$  incrementa con  $G$ , si obtenemos un máximo del logaritmo obtendremos un máximo de  $G$ , debido a los cambios en las poblaciones de los diferentes niveles de energía. Con esto tenemos:

$$d \ln(G) = - \sum_j \ln\left(\frac{n_j}{n_j}\right) dn_j = 0 \quad (B4)$$

El número total de partículas y la energía total deben permanecer constantes, esto es:

$$\begin{aligned} dN_s = \sum_j d n_j &= 0, \\ dU = \sum_j E_j d n_j &= 0 \end{aligned} \quad (B5)$$

Para satisfacer las ecuaciones (62), (63) y (64) simultáneamente, introducimos 2 parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$- \sum_j (\ln(n_j) - \alpha - \beta E_j) dn_j = 0 \quad (B6)$$

Satisfacemos la ecuación si:

$$\ln(n_j) - \alpha - \beta E_j = 0 \quad (B7)$$

para cada  $n_j$ , con lo que tenemos que la población de cada nivel de energía es:

$$n_j = e^\alpha e^{\beta E_j} \quad (B8)$$

Para el caso del átomo de hidrógeno, donde tenemos dos niveles de energía, tendremos la población de baja energía y la población de alta energía:

$$n_{alta \text{ energía}} = e^{\alpha} e^{\beta E_{alta \text{ energía}}} \text{ y } n_{baja \text{ energía}} = e^{\alpha} e^{\beta E_{baja \text{ energía}}} \quad (B9)$$

Obteniendo el cociente:

$$\frac{n_{alta \text{ energía}}}{n_{baja \text{ energía}}} = e^{\beta(E_{alta \text{ energía}} - E_{baja \text{ energía}})} \quad (B10)$$

$\beta$  representa la velocidad de decaimiento de las poblaciones (tendrá signo negativo), cuando  $\beta \ll 0$ , el estado de baja energía estará densamente poblado; de tal forma que  $\beta$  es un parámetro asociado con la energía total del sistema y está determinado como:

$$\beta = -\frac{1}{kT_e} \quad (B11)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann igual a  $1.381 \times 10^{-23} JK^{-1}$ , y  $T_e$  la temperatura. Podemos re-escribir (B10) como:

$$\frac{n_{alta \text{ energía}}}{n_{baja \text{ energía}}} = e^{\frac{\Delta E}{kT_e}} \quad (B12)$$

### C. Polinomios de Legendre.

Se definen los polinomios de Legendre por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (C.1)$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\quad \bullet \\ &\quad \bullet \\ &\quad \bullet \end{aligned}$$

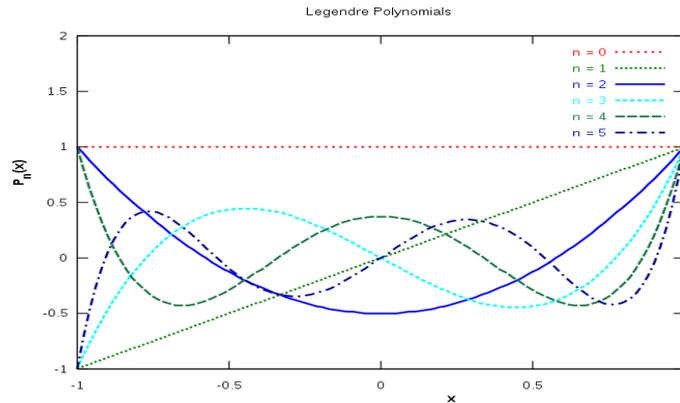


Figura C.1. Curvas de los polinomios de Legendre para n=5.

Son las soluciones que se obtienen al examinar ecuaciones diferenciales que tienen la forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (C.2)$$

#### D. Polinomios de Laguerre.

Son las soluciones a las ecuaciones diferenciales que tienen la forma:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (D.1)$$

Los polinomios se pueden definir por medio de la siguiente ecuación:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (D.2)$$

Con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\ L_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \\ L_5(x) &= \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120) \end{aligned}$$

### E. Simulaciones al variar la separación de las placas de la guía de ondas.

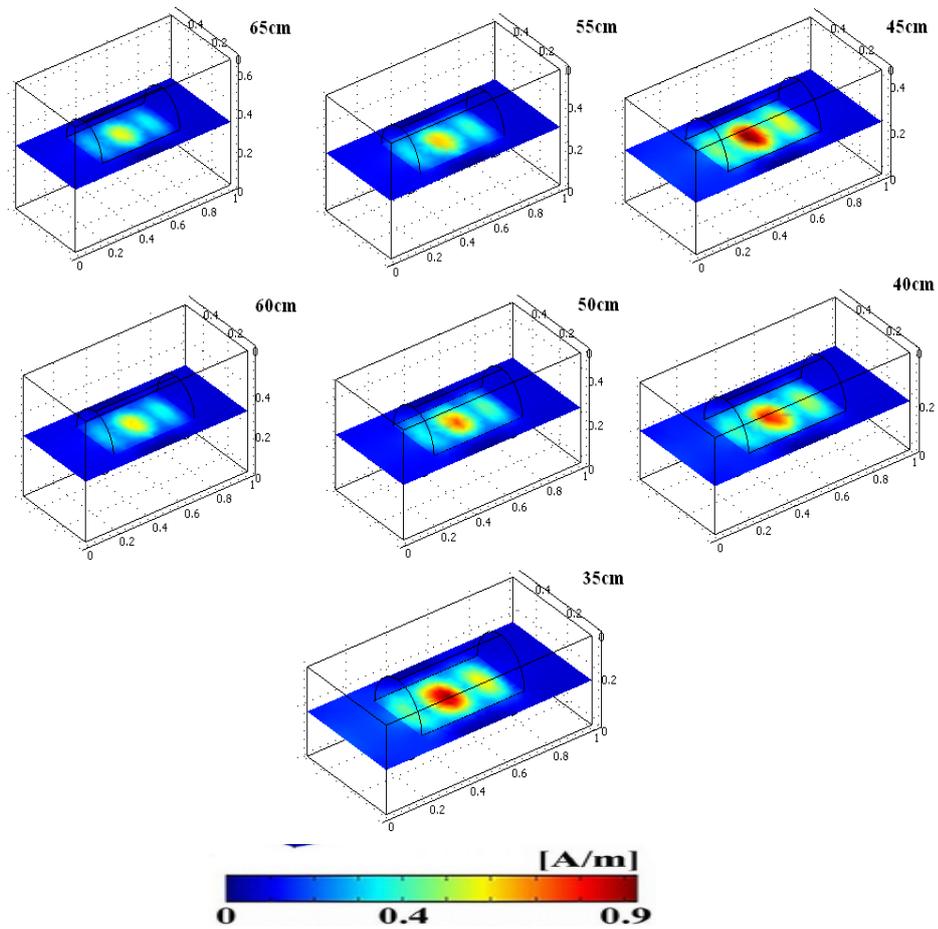


Figura E.1. Simulaciones de campo magnético para 6 distancias entre las placas.

### F. Comparación de esquema transmisión-recepción con diferentes tipos de antenas.

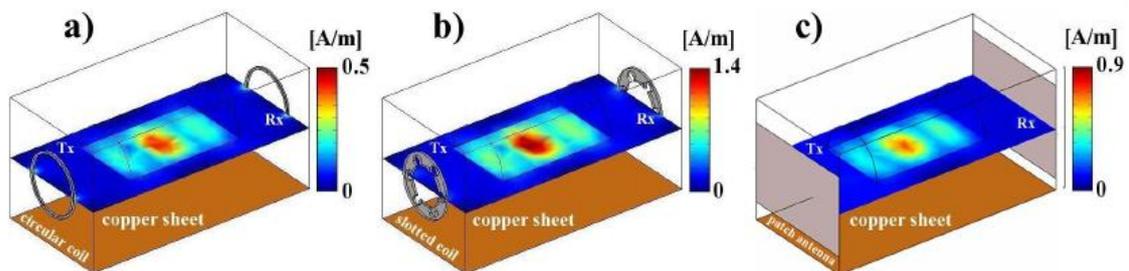


Figura F.1. Transmisión y recepción en la guía de placas, a) con antenas circulares, b) antenas tipo magnetrón y c) antenas de parche.

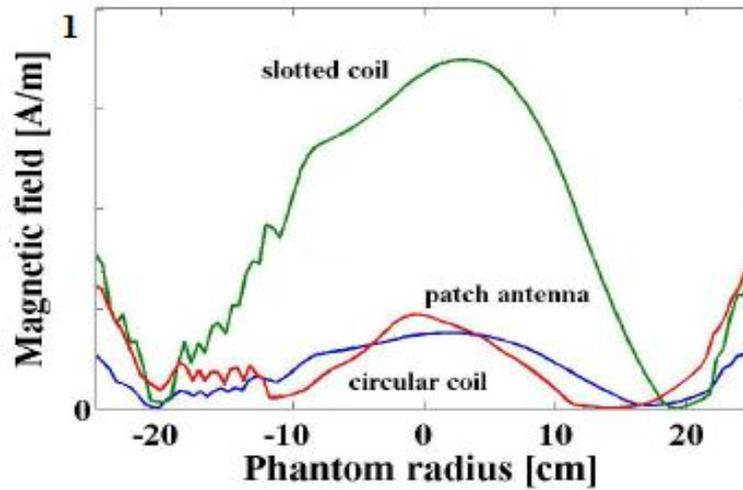


Figura F.2. Perfiles de intensidad de campo para la comparación en el esquema de transmisión y recepción para la guía de placas paralelas.

**G. Imágenes para el cálculo de la PSF.**

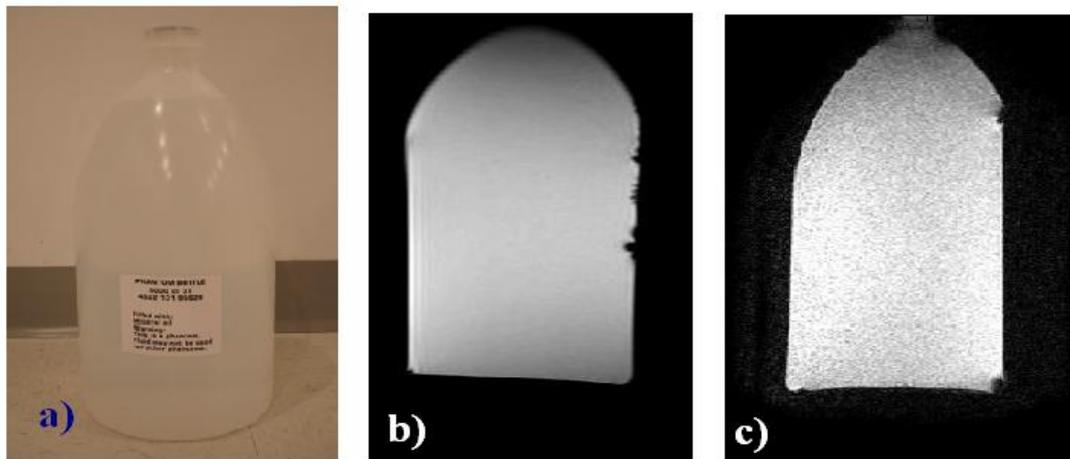


Figura G.5. a) Fantoma de botella con aceite mineral, b) imagen adquirida con un arreglo en fase de 8 elementos, c) imagen obtenida con la guía de ondas de placas paralelas.

## H. Parámetros S de la antena circular 2.

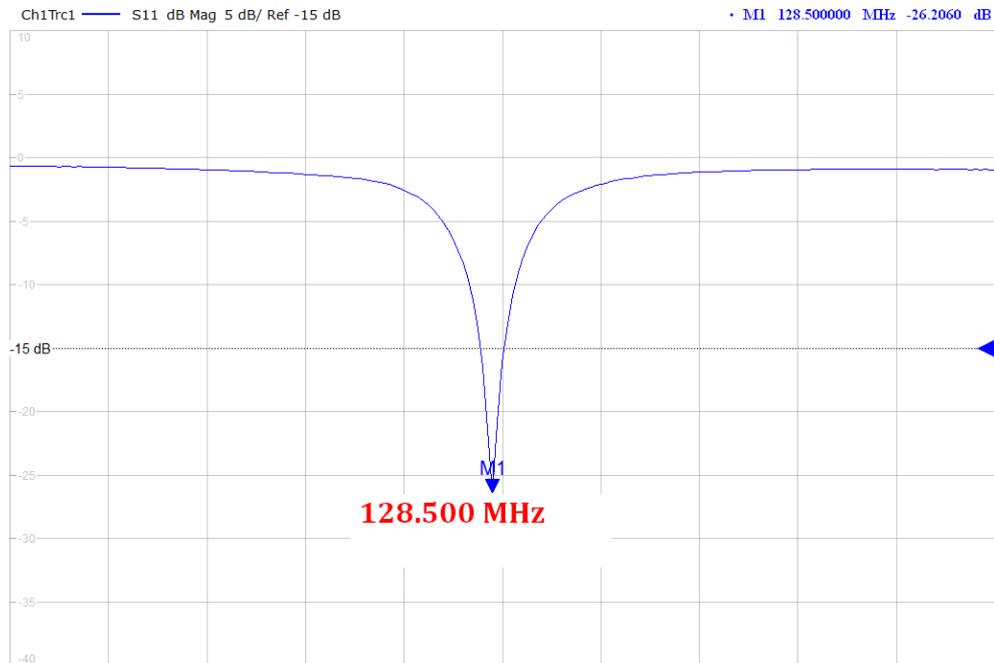


Figura H.1. Coeficiente de reflexión para la Antena Circular 2 sintonizada a 128.500MHz.

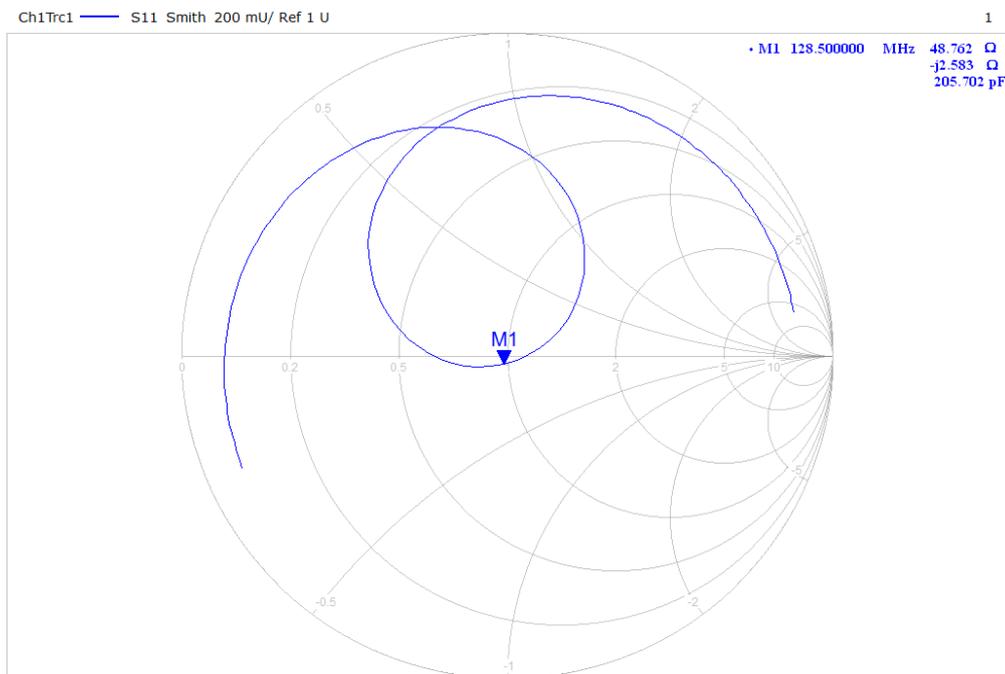


Figura H.2. Carta Smith para la Antena 2. La línea horizontal del diagrama representa una carga puramente real. La antena muestra una impedancia muy cercana a los 50Ohms.

## I. Histogramas para comparación cuantitativa de las imágenes obtenidas.

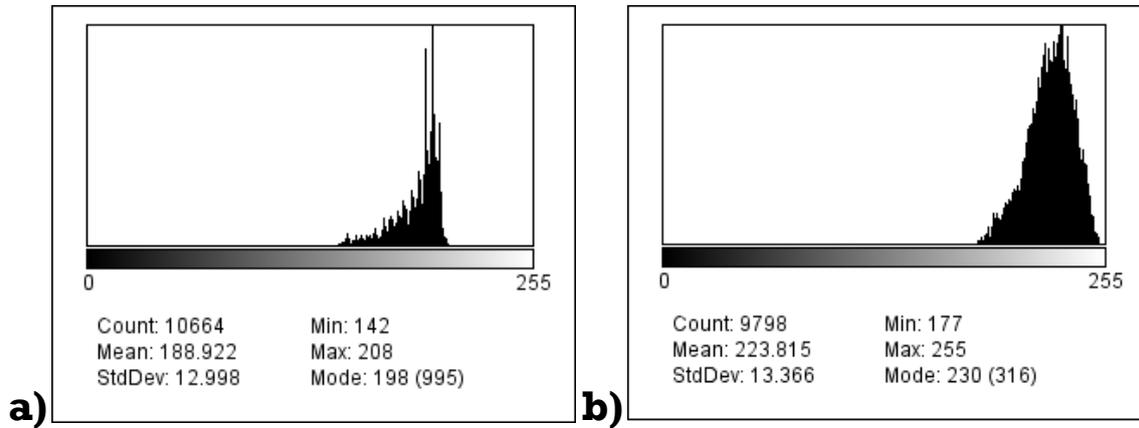


Figura I.1. Histogramas de distribución de intensidad de grises, a) de la imagen adquirida con un arreglo de 8 canales, b) de una imagen obtenida con la guía de ondas.

## J. REFERENCIAS DE LOS ANEXOS

- [A.1] L. de Broglie. *La física nueva y los cuantos*. Editorial Losada, Buenos Aires, 1940. 145-171.
- [A.2] V. Acosta, C. L. Cowan, B. J. Graham. *Curso de Física Moderna*. Harla, México, 1975. 101-109, 151-190, 206-234, 245-248, 277-290.
- [A.3] L. de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Compañía Editorial Continental, S.A. México, D.F., 1979.
- [A.4] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, 7<sup>th</sup> Edition, USA 1996.
- [A.5] R. Resnick, D. Halliday and K. Krane. *Física Volumen 1*. 5ta Edición. Grupo Editorial Patria, México 2008.
- [A.6] R. M. Eisberg. *Fundamentals of Modern Physics*. John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> Ed, 1965.
- [A.7] R. T. Weidner, R. L. Sells. *Elementary Modern Physics*. Allyn and Bacon, Inc. 2<sup>nd</sup> Ed, Boston 1971.