

097095

"DISPERSION Y ABSORCION DE SONIDO

EN LA HIDRODINAMICA NO-LOCAL"

TESIS QUE PRESENTA:

HERIBERTO ACUNA CAMPA

PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA.

MEXICO D. F.

C. B. I

JULIO DE 1990.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION.

CAPITULO I.- ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA NO-LOCAL.

CAPITULO II.- DISPERSION Y ABSORCION DE SONIDO.

CAPITULO III.- COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.

CAPITULO IV.- COEFICIENTES DE TRANSPORTE GENERALIZADOS.

CONCLUSIONES

APENDICES

BIBLIOGRAFIA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Dra. Rosa María Velasco B. por la dirección de esta Tesis y por la confianza depositada para continuar trabajando en el Area de Mecánica Estadística.

Tambien quiero agradecer al Dr. Leopoldo García-Colín y a la Dra. S.M.T. de la Selva por sus comentarios y observaciones a este trabajo.

A los Profesores Angelina Uribe A. y J. Ramón Soto M. del Depto. de Física de la Universidad de Sonora por su valioso apoyo en la parte numérica y computacional de este trabajo.

Finalmente agradezco al Depto de Física (UNI-SON), al S.T.A.U.S. y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haber concedido el apoyo que permitió la realización de este trabajo.

A LAURA, MI COMPANERA, POR SU APOYO INCONDICIONAL.

PARA EL JIMY, LA LICHÁ Y TODA LA PROLE, PORQUE SUPIERON ESPERAR.

POR EL BUQUI...

I N T R O D U C C I O N

La Termodinámica Irreversible Lineal (T.I.L) es una teoría bien establecida que describe adecuadamente una gama muy amplia de fenómenos irreversibles. Sin embargo tiene varias limitaciones, aquí nos interesa mencionar dos de ellas; una es que las ecuaciones constitutivas derivadas en ella son válidas en el límite de longitudes de onda grande y frecuencias pequeñas lo cual puede verse del hecho de que la T.I.L es el marco termodinámico para la descripción Hidrodinámica del sistema; otra es que predice velocidades de propagación infinitas para las perturbaciones térmicas y elásticas en el sistema. Por éstas limitaciones no es posible estudiar adecuadamente el fenómeno de dispersión y absorción de sonido.

Una de las teorías que da salida a las limitaciones de la T.I.L es la termodinámica irreversible extendida (T.I.E) que ha sido aplicada a diversos sistemas y ha probado su éxito en cierta medida a pesar de que existen algunos problemas abiertos en sus fundamentos. Por otra parte también se ha trabajado para darle un sustento microscópico, tanto desde el punto de vista de Teoría Cinética como de Mecánica Estadística fuera de equilibrio. Los resultados encontrados con la T.I.E. pueden contrastarse con los de la Hidrodinámica Generalizada con datos de simulación ó directamente con el experimento.

En éste trabajo estamos interesados en utilizar la

T.I.E. para analizar las implicaciones termodinámicas que resultan de considerar las primeras desviaciones respecto al comportamiento en la hidrodinámica clásica, básicamente en dos direcciones: (i) estudiando el comportamiento de la velocidad de fase y el coeficiente de absorción de una perturbación sonora en un gas monoatómico diluido y (ii) en la determinación de expresiones generalizadas para la conductividad térmica y la viscosidad cortante; esto último en la región de longitudes de onda corta y frecuencias grandes.

En el primer capítulo se deduciran las ecuaciones de la Hidrodinámica no local mediante la T.I.E., para un fluido simple isotrópico. Estas serán reducidas para el caso de un gas monoatómico diluido lográndose con ello un conjunto de ecuaciones que tienen un sustento microscópico de Teoría Cinética que permite calcular explícitamente todos los coeficientes fenomenológicos que aparecen en la teoría.

En el segundo capítulo se calcula la relación de dispersión general para un gas monoatómico diluido que está sujeto a una perturbación sonora. También se analiza el comportamiento límite, de la velocidad de fase y el coeficiente de absorción, con la frecuencia .

En el tercer capítulo se presenta una comparación gráfica de los resultados teóricos obtenidos en este trabajo con los resultados experimentales y los obtenidos a través de Teoría Cinética resolviendo numéricamente las distintas relaciones de dispersión.

En el cuarto capítulo se derivan las expresiones

generalizadas para la conductividad térmica y la viscosidad cortante, y se analizan algunos casos particulares.

Al final del trabajo se presenta una breve discusión de los resultados, las conclusiones y algunas perspectivas.

CAPITULO I

ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA NO LOCAL

En la literatura⁽¹⁾ existen varios enfoques que permiten construir ecuaciones hidrodinámicas no-locales con propiedades adecuadas para describir, con cierto éxito, los resultados obtenidos en dispersión de neutrones por fluidos ó en simulación con Dinámica Molecular⁽²⁾, en la región de longitudes de onda corta y altas frecuencias.

En algunos artículos recientes⁽³⁻⁶⁾ se ha visto que la T.I.E. proporciona ecuaciones de movimiento que tienen una forma cualitativa adecuada para explicar los resultados de Dinámica Molecular; sin embargo en estos trabajos se han tratado ciertos casos particulares, D.Jou et al⁽³⁾ consideran un fluido simple aislado e incompresible donde las variables no conservadas relevantes son el tensor de esfuerzos y su flujo y en C.Pérez-García et al⁽⁵⁾ consideran un conductor rígido donde las variables no conservadas relevantes son el flujo de calor y su flujo.

En este trabajo estamos interesados en el estudio de la dispersión de sonido y en general no es posible tomar como base los casos particulares referidos anteriormente ya que cuando una perturbación sonora provoca fluctuaciones en un fluido entran en juego todos los fenómenos de transporte posibles. De manera que, en éste capítulo, nuestro primer objetivo es encontrar las ecuaciones de movimiento completas para el caso en que se tienen

no-localidades en el sistema, siguiendo el esquema de la T.I.E. (6-9).

Partimos de la hipótesis de existencia de una función η continua y diferenciable, que juega el papel de una entropía generalizada, que depende de un conjunto de variables no conservadas además de las variables conservadas ordinarias. Para un fluido isotrópico simple supondremos que el conjunto de variables no conservadas está formado por el flujo de calor q_i , el tensor de presión viscosa $\tau_{\alpha\beta}$ (simétrico sin traza), sus respectivos flujos⁽¹⁰⁾ $\dot{I}_{\alpha\beta}$ (tensor de segundo orden simétrico sin traza) y $P_{\alpha\beta\gamma}$ (tensor de tercer orden), la presión escalar viscosa τ y la traza del tensor $I_{\alpha\beta}$ que denotaremos por I ; es decir:

$$\eta = \eta(e, v, \tau, I, q_i, \dot{\tau}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \quad (I.1)$$

donde e es la densidad de energía local y $v = \rho^{-1}$ es el volumen específico.

Diferenciando la expresión (I.1) tenemos:

$$\begin{aligned} d\eta = & \left(\frac{\partial\eta}{\partial e}\right)' de + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)' dv + \left(\frac{\partial\eta}{\partial \tau}\right)' d\tau + \left(\frac{\partial\eta}{\partial I}\right)' dI + \\ & + \left(\frac{\partial\eta}{\partial q_i}\right)' dq_i + \left(\frac{\partial\eta}{\partial \dot{\tau}_{\alpha\beta}}\right)' d\dot{\tau}_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}\right)' d\dot{I}_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial P_{\alpha\beta\gamma}}\right)' dP_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \quad (I.2)$$

que constituye una relación de Gibbs generalizada, donde los

coeficientes primados indican que el resto de las variables permanecen constantes y se ha tomado la convención de suma para índices repetidos. La existencia de la función η y la relación de Gibbs generalizada van más allá de la hipótesis de equilibrio local, por lo cual el desarrollo de esta teoría contiene aspectos que no contempla la T.I.L..

Definiendo la temperatura y presión de no-equilibrio como :

$$\begin{aligned} \bar{T}'(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial e} \right)' \\ \bar{T}'p(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)' \end{aligned} \quad (I.3)$$

y denotando el resto de los coeficientes como :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)' &= \bar{T}' v \alpha^{(1)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial I} \right)' &= \bar{T}' v \alpha^{(2)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial q_i} \right)' &= \bar{T}' v \alpha_i^{(3)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{t}_{\alpha\beta}} \right)' &= \bar{T}' v \alpha_{\alpha\beta}^{(4)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}} \right)' &= \bar{T}' v \alpha_{\alpha\beta}^{(5)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial P_{\alpha\beta\gamma}} \right)' &= \bar{T}' v \alpha_{\alpha\beta\gamma}^{(6)}(e, v, \tau, I, q_i, \dot{t}_{\alpha\beta}, \dot{I}_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta\gamma}) \end{aligned} \quad (I.4)$$

donde los coeficientes α son construidos como los tensores isotrópicos más generales del correspondiente orden tensorial en el espacio de las variables de estado .

Si nos restringimos al estudio de la teoría lineal, que cubre el estudio de pequeñas perturbaciones alrededor de equilibrio (como corresponde al estudio de sonido), entonces podemos hacer un desarrollo en serie alrededor del equilibrio local y tomar el orden más bajo en las variables no conservadas, de tal forma que en (I.3) T y P correspondan a las variables en equilibrio local. Además, construyendo los coeficientes α de (I.4) con la restricción señalada anteriormente tenemos que la diferencial (I.2) respecto al tiempo queda :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{d\eta}{dt} = & \frac{1}{T} \rho \frac{de}{dt} + \frac{p}{T} \rho \frac{dv}{dt} + \frac{1}{T} [\alpha^{(10)} \tau + \alpha^{(11)} I] \frac{d\tau}{dt} + \\
 & + \frac{1}{T} [\alpha^{(20)} I + \alpha^{(21)} \tau] \frac{dI}{dt} + \frac{1}{T} [\alpha^{(31)} q_i + \alpha^{(31)} \rho_{\alpha\alpha i} + \\
 & + \alpha^{(32)} \rho_{i\alpha\alpha} + \alpha^{(33)} \rho_{\alpha i\alpha}] \frac{dq_i}{dt} + \frac{1}{T} [\alpha^{(40)} \dot{\tau}_{\alpha\beta} + \alpha^{(41)} I_{\alpha\beta}] \frac{d\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{dt} + \\
 & + \frac{1}{T} [\alpha^{(50)} \dot{I}_{\alpha\beta} + \alpha^{(51)} \dot{\tau}_{\alpha\beta}] \frac{d\dot{I}_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{1}{T} [\alpha^{(60)} \rho_{\alpha\beta\gamma} + \alpha^{(61)} q_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \\
 & + \alpha^{(62)} q_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \alpha^{(63)} q_\gamma \delta_{\alpha\beta}] \frac{d\rho_{\alpha\beta\gamma}}{dt}
 \end{aligned} \tag{I.5}$$

donde los coeficientes $\alpha^{(ij)}$ son solo funciones de e y v .

Introduciendo en (I.5) las ecuaciones de balance de masa

y energía⁽¹¹⁾ :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (I.6)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \dot{\tau}_{\alpha\beta} (\vec{\nabla} \vec{u})_{\alpha\beta} \quad (I.7)$$

donde u_i es la i -ésima componente de la velocidad; agrupando términos tenemos :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\eta}{dt} = & -\frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\gamma}{T} \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \alpha^{(10)} \frac{dr}{dt} + \alpha^{(21)} \frac{dI}{dt} \right] + \\ & + \frac{I}{T} \left[\alpha^{(11)} \frac{dr}{dt} + \alpha^{(20)} \frac{dI}{dt} \right] + \frac{q_i}{T} \left[\alpha^{(30)} \frac{dq_i}{dt} + \alpha^{(41)} \frac{d\beta_{i\alpha\alpha}}{dt} + \right. \\ & + \alpha^{(62)} \frac{d\beta_{\alpha i\alpha}}{dt} + \alpha^{(63)} \frac{d\beta_{\alpha\alpha i}}{dt} \left. \right] + \frac{\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{T} \left[-(\vec{\nabla} \vec{u})_{\alpha\beta} + \alpha^{(40)} \frac{d\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{dt} + \right. \\ & + \alpha^{(51)} \frac{d\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{dt} \left. \right] + \frac{\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{T} \left[\alpha^{(41)} \frac{d\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{dt} + \alpha^{(50)} \frac{d\dot{\tau}_{\alpha\beta}}{dt} \right] + \\ & + \frac{\beta_{\alpha\beta\gamma}}{T} \left[\alpha^{(60)} \frac{d\beta_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \alpha^{(31)} \delta_{\alpha\beta} \frac{dq_\gamma}{dt} + \alpha^{(32)} \delta_{\beta\gamma} \frac{dq_\alpha}{dt} + \right. \\ & + \alpha^{(33)} \delta_{\alpha\gamma} \frac{dq_\beta}{dt} \left. \right] \quad (I.8) \end{aligned}$$

Ahora se introduce la segunda suposición de la T.I.E., como una condición de cerradura, que consiste en proponer una ecuación de balance para la función η , es decir :

$$\int \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial J_i}{\partial \chi_i} = \sigma_\eta \quad (I.9)$$

donde J_i es el vector más general que se puede construir en el espacio de las variables de estado (de forma análoga al término $\alpha_i^{(3)}$ en la expresión I.4) y σ_η un escalar que puede determinarse de dos formas independientes, una es realizando las operaciones en (I.9) y la otra construyendo el escalar más general en el espacio de las variables de estado. Físicamente J_i y σ_η representan al flujo y producción de entropía generalizadas respectivamente. De cualquier forma las expresiones de J_i y σ_η deben reducirse, bajo condiciones apropiadas, a las expresiones correspondientes de la T.I.L. Tomando en cuenta lo anterior y considerando solo términos a segundo orden en los flujos tenemos

$$\begin{aligned} J_i = & \left[\frac{1}{T} + K^{(01)} \tilde{\tau} + K^{(02)} I \right] q_i + \left[K^{(11)} \tilde{\tau} + K^{(12)} I \right] P_{\alpha\alpha i} + \\ & + \left[K^{(21)} \tilde{\tau} + K^{(22)} I \right] P_{i\alpha\alpha} + \left[K^{(31)} \tilde{\tau} + K^{(32)} I \right] P_{\alpha i\alpha} + \\ & + K^{(4)} q_\alpha \dot{I}_{\alpha i} + K^{(5)} q_\alpha \dot{I}_{\alpha i} + K^{(60)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + K^{(61)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + \\ & + K^{(62)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + K^{(70)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + K^{(71)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + K^{(72)} P_{\alpha\alpha\alpha} \dot{I}_{li} + \\ & + K^{(80)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\beta\beta i} + K^{(81)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta i} + K^{(82)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta i} + K^{(83)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\beta\beta i} + \\ & + K^{(84)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta i} + K^{(85)} \dot{I}_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta i} \end{aligned}$$

(I.10)

Si suponemos que los coeficientes $K^{(ij)}$ son constantes, tomamos la divergencia en (I.10) y junto con (I.8) sustituimos en (I.9), despues de agrupar términos se obtiene que,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\eta} = & \tau \left[-\frac{1}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\alpha^{(10)}}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^{(21)}}{T} \frac{dI}{dt} + K^{(01)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \right. \\
 & + K^{(11)} \frac{\partial p_{adi}}{\partial x_i} + K^{(21)} \frac{\partial p_{idu}}{\partial x_i} + K^{(31)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_i} \left. \right] + I \left[\frac{\alpha^{(11)}}{T} \frac{dT}{dt} + \right. \\
 & + \frac{\alpha^{(20)}}{T} \frac{dI}{dt} + K^{(02)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + K^{(12)} \frac{\partial p_{adi}}{\partial x_i} + K^{(22)} \frac{\partial p_{idu}}{\partial x_i} + K^{(32)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_i} \left. \right] + \\
 & + q_i \left[\frac{\alpha^{(00)}}{T} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\alpha^{(01)}}{T} \frac{dp_{adi}}{dt} + \frac{\alpha^{(02)}}{T} \frac{dp_{idu}}{dt} + \frac{\alpha^{(03)}}{T} \frac{dp_{iia}}{dt} - \right. \\
 & - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + K^{(02)} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + K^{(02)} \frac{\partial I}{\partial x_i} + K^{(4)} \frac{\partial \dot{i}_{iu}}{\partial x_u} + K^{(5)} \frac{\partial \dot{i}_{iu}}{\partial x_u} \left. \right] + \\
 & + \dot{i}_{\alpha\beta} \left[-\frac{1}{T} (\vec{\partial} \vec{u})_{\alpha\beta} + \frac{\alpha^{(40)}}{T} \frac{d\dot{i}_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{\alpha^{(51)}}{T} \frac{d\dot{i}_{\alpha\beta}}{dt} + K^{(5)} (\vec{\partial} \vec{q})_{\alpha\beta} + \right. \\
 & + K^{(60)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + K^{(61)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + K^{(62)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + K^{(80)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} + \\
 & + K^{(81)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} + K^{(82)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} \left. \right] + \dot{i}_{\alpha\beta} \left[\frac{\alpha^{(41)}}{T} \frac{d\dot{i}_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{\alpha^{(50)}}{T} \frac{d\dot{i}_{\alpha\beta}}{dt} + \right. \\
 & + K^{(4)} (\vec{\partial} \vec{q})_{\alpha\beta} + K^{(90)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + K^{(71)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + K^{(82)} \frac{\partial p_{iia}}{\partial x_{\beta}} + \\
 & + K^{(83)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} + K^{(84)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} + K^{(85)} \frac{\partial p_{\alpha\beta i}}{\partial x_i} \left. \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma} \left[\frac{\alpha^{(60)}}{T} \frac{d\mathcal{P}_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \frac{\alpha^{(31)}}{T} \delta_{\alpha\beta} \frac{d\mathcal{P}_{\gamma}}{dt} + \frac{\alpha^{(32)}}{T} \delta_{\beta\gamma} \frac{d\mathcal{P}_{\alpha}}{dt} + \right. \\
& + \frac{\alpha^{(33)}}{T} \delta_{\alpha\gamma} \frac{d\mathcal{P}_{\beta}}{dt} + K^{(11)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\gamma}} + K^{(12)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\gamma}} + K^{(21)} \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\alpha}} + \\
& + K^{(22)} \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\alpha}} + K^{(31)} \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\beta}} + K^{(32)} \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_{\beta}} + K^{(60)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\gamma}}{\partial x_i} \\
& + K^{(61)} \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha}}{\partial x_i} + K^{(62)} \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\beta}}{\partial x_i} + K^{(70)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\gamma}}{\partial x_i} + \\
& + K^{(71)} \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha}}{\partial x_i} + K^{(72)} \delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\beta}}{\partial x_i} + K^{(80)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \\
& + K^{(81)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}} + K^{(82)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} + K^{(83)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \\
& \left. + K^{(84)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}} + K^{(85)} \frac{\partial \dot{\mathcal{I}}_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} \right]
\end{aligned}$$

(I.11)

De manera análoga se calcula la expresión para σ_η como el escalar más general en el espacio de las variables independientes:

$$\sigma_\eta = X^{(0)} \tau + X^{(1)} I + X_i^{(2)} q_i + \dot{X}_{\alpha\beta}^{(3)} \dot{\tau}_{\alpha\beta} + \ddot{X}_{\alpha\beta}^{(4)} \ddot{I}_{\alpha\beta} + X_{\alpha\beta\gamma}^{(5)} P_{\alpha\beta\gamma} \quad (I.12)$$

en donde, a primer orden en las variables no conservadas :

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= \mu^{(0,1)} \tau + \mu^{(0,2)} I \\ X^{(1)} &= \mu^{(1,0)} I + \mu^{(1,1)} \tau \\ X_i^{(2)} &= \mu^{(2,0)} q_i + \mu^{(2,1)} P_{\alpha i \alpha} + \mu^{(2,2)} P_{i \alpha \alpha} + \mu^{(2,3)} P_{\alpha i \alpha} \\ \dot{X}_{\alpha\beta}^{(3)} &= \mu^{(3,0)} \dot{\tau}_{\alpha\beta} + \mu^{(3,1)} \ddot{I}_{\alpha\beta} \\ \ddot{X}_{\alpha\beta}^{(4)} &= \mu^{(4,0)} \ddot{I}_{\alpha\beta} + \mu^{(4,1)} \dot{\tau}_{\alpha\beta} \\ X_{\alpha\beta\gamma}^{(5)} &= \mu^{(5,0)} P_{\alpha\beta\gamma} + \mu^{(5,1)} q_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \mu^{(5,2)} q_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \mu^{(5,3)} q_\gamma \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (I.13)$$

donde $\mu^{(i,j)}$ son funciones solo de e y v .

Introduciendo (I.13) en (I.12) y comparando con (I.11)

se obtiene un conjunto de ecuaciones acopladas en las derivadas temporales de las variables del mismo orden tensorial, que podemos desacoplar mediante un procedimiento algebraico sencillo, obteniéndose finalmente :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{I}{\beta_1} \left[\beta_{10}\tau + \beta_{11}I - \beta_{12} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \beta_{13} \frac{\partial \rho_{adi}}{\partial x_i} - \beta_{14} \frac{\partial \rho_{eai}}{\partial x_i} - \beta_{15} \frac{\partial \rho_{aii}}{\partial x_i} + \frac{1}{I} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (I.14)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{\beta_2} \left[\beta_{20}I + \beta_{21}\tau - \beta_{22} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \beta_{23} \frac{\partial \rho_{adi}}{\partial x_i} - \beta_{24} \frac{\partial \rho_{eai}}{\partial x_i} - \beta_{25} \frac{\partial \rho_{aii}}{\partial x_i} - \frac{\beta_{26}}{I} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (I.15)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{I}{\beta_3} \left[\beta_{30}q_i + \beta_{31}\rho_{adi} + \beta_{32}\rho_{eai} + \beta_{33}\rho_{aii} + \beta_{34} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \beta_{35} \frac{\partial I}{\partial x_i} + \beta_{36} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} + \beta_{37} \frac{\partial \ddot{u}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{I^2} \frac{\partial I}{\partial x_i} \right] \quad (I.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{u}_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{I}{\beta_4} & \left[\beta_{40}\dot{u}_{\alpha\beta} + \beta_{41}\ddot{u}_{\alpha\beta} - \beta_{42}(\ddot{\vec{q}})_{\alpha\beta} - \beta_{43} \frac{\partial \rho_{adi}}{\partial x_\beta} - \beta_{44} \frac{\partial \rho_{eai}}{\partial x_\beta} - \right. \\ & \left. - \beta_{45} \frac{\partial \rho_{aii}}{\partial x_\beta} - \beta_{46} \frac{\partial \rho_{api}}{\partial x_i} - \beta_{47} \frac{\partial \rho_{aip}}{\partial x_i} - \beta_{48} \frac{\partial \rho_{iap}}{\partial x_i} + \frac{1}{I} (\ddot{\vec{u}})_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (I.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ddot{u}_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{I}{\beta_5} & \left[\beta_{50}\ddot{u}_{\alpha\beta} + \beta_{51}\dddot{u}_{\alpha\beta} - \beta_{52}(\ddot{\vec{q}})_{\alpha\beta} - \beta_{53} \frac{\partial \rho_{adi}}{\partial x_\beta} - \beta_{54} \frac{\partial \rho_{eai}}{\partial x_\beta} - \right. \\ & \left. - \beta_{55} \frac{\partial \rho_{aii}}{\partial x_\beta} - \beta_{56} \frac{\partial \rho_{api}}{\partial x_i} - \beta_{57} \frac{\partial \rho_{aip}}{\partial x_i} - \beta_{58} \frac{\partial \rho_{iap}}{\partial x_i} - \frac{\beta_{59}}{I} (\ddot{\vec{u}})_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (I.18)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^{(60)}}{T} \frac{dP_{\alpha\beta}}{dt} - \frac{\alpha^{(31)}}{\alpha^{(60)}} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{T} \frac{d}{dt} \left[\alpha^{(61)} P_{\alpha ii} + \alpha^{(62)} P_{\alpha i i} + \alpha^{(63)} P_{\alpha i i} \right] - \\
& - \frac{\alpha^{(32)}}{\alpha^{(60)}} \frac{\delta_{\beta i}}{T} \frac{d}{dt} \left[\alpha^{(61)} P_{\alpha ii} + \alpha^{(62)} P_{\alpha i i} + \alpha^{(63)} P_{\alpha i i} \right] - \frac{\alpha^{(33)}}{\alpha^{(60)}} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{T} \frac{d}{dt} \left[\alpha^{(61)} P_{\beta ii} + \right. \\
& + \alpha^{(62)} P_{\beta i i} + \alpha^{(63)} P_{\beta i i} \left. \right] = \mu^{(50)} P_{\alpha\beta} - \frac{\alpha^{(31)}}{\alpha^{(60)}} \delta_{\alpha\beta} \left[\mu^{(21)} P_{\alpha ii} + \mu^{(22)} P_{\alpha i i} + \mu^{(23)} P_{\alpha i i} \right] - \\
& - \frac{\alpha^{(32)}}{\alpha^{(60)}} \delta_{\beta i} \left[\mu^{(21)} P_{\alpha ii} + \mu^{(22)} P_{\alpha i i} + \mu^{(23)} P_{\alpha i i} \right] - \frac{\alpha^{(33)}}{\alpha^{(60)}} \delta_{\alpha\beta} \left[\mu^{(21)} P_{\beta ii} + \right. \\
& + \mu^{(22)} P_{\beta i i} + \mu^{(23)} P_{\beta i i} \left. \right] + \beta_{61} \frac{\partial}{\partial x_s} \delta_{\beta s} + \beta_{62} \frac{\partial}{\partial x_s} \delta_{\alpha s} + \beta_{63} \frac{\partial}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\beta_{64}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} - \\
& - \frac{\beta_{65}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\beta s} - \frac{\beta_{66}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\alpha s} + \beta_{67} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} + \beta_{68} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\beta s} + \beta_{69} \frac{\partial T}{\partial x_s} \delta_{\alpha s} + \\
& + \theta_{61} \frac{\partial I}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{62} \frac{\partial I}{\partial x_s} \delta_{\beta s} + \theta_{63} \frac{\partial I}{\partial x_s} \delta_{\alpha s} + \theta_{64} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha i}}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{65} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha i}}{\partial x_s} \delta_{\beta s} + \\
& + \theta_{66} \frac{\partial \dot{I}_{\beta i}}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{67} \frac{\partial \dot{I}_{\beta i}}{\partial x_s} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{68} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha i}}{\partial x_s} \delta_{\beta s} + \theta_{69} \frac{\partial \dot{I}_{\beta i}}{\partial x_s} \delta_{\alpha s} + K^{(60)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_s} + \\
& + K^{(61)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha s}}{\partial x_p} + K^{(62)} \frac{\partial \dot{I}_{\beta s}}{\partial x_\alpha} + K^{(63)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_s} + K^{(64)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha s}}{\partial x_p} + K^{(65)} \frac{\partial \dot{I}_{\beta s}}{\partial x_\alpha}
\end{aligned}
\tag{I.19}$$

en donde los coeficientes β están dados en términos de $\alpha^{(ij)}$, $\mu^{(ij)}$ y $K^{(ij)}$ como puede verse en el Apéndice I-A.

El conjunto de ecuaciones linealizadas obtenido con las hipótesis de la T.I.E. están acopladas en todas sus variables. Por otra parte, dicho conjunto de ecuaciones linealizadas contiene a los coeficientes fenomenológicos que será necesario obtener del experimento o de algún modelo microscópico.

Si se compara el conjunto de ecuaciones (I.14)-(I.19) con las obtenidas a través de la solución de la ecuación de Boltzmann por el método de Grad de 26 momentos⁽¹²⁾ para un gas monoatómico diluido, observamos que tienen una estructura idéntica tomando las siguientes restricciones :

i) Los coeficientes : $\beta_{21} , \beta_{23} , \beta_{24} , \beta_{25} , \beta_{31} , \beta_{32} , \beta_{33} , \beta_{34} , \beta_{36} , \beta_{42} , \beta_{43} , \beta_{44} , \beta_{45} , \beta_{53} , \beta_{54} , \beta_{55} , \beta_{59} , \alpha^{(31)} , \alpha^{(32)} , \alpha^{(33)}$ se anulan y $\beta_{35} = \beta_{37}$.

ii) El tensor P satisface las propiedades de simetría :

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\alpha\gamma\beta} = P_{\gamma\alpha\beta}.$$

iii) Linearizando alrededor de un estado de equilibrio de manera que $T \rightarrow T_0 + T'$, $u_i \rightarrow u'_i$, $I \rightarrow I'$, $q_\alpha \rightarrow q'_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta} \rightarrow \tau'_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta} \rightarrow I'_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow P'_{\alpha\beta\gamma}$.

Despreciando términos a segundo orden en las variables primadas y considerando que para un gas monoatómico $\tau = 0$, tenemos que el conjunto de ecuaciones (I.14)-(I.19) queda:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{T_0}{\beta_2} \left[\beta_{20} I - \beta_{21} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\beta_{22}}{T_0} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (I.20)$$

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = \frac{T_0}{\beta_3} \left[\beta_{30} q_\alpha + \beta_{35} \frac{\partial I_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right] \quad (I.21)$$

$$\frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{T_0}{\beta_4} \left[\beta_{40} \dot{I}_{\alpha\beta} + \beta_{41} \dot{I}_{\alpha\beta} - \beta_{44} \frac{\partial P_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{T_0} (\vec{\nabla} \vec{u})_{\alpha\beta} \right] \quad (I.22)$$

$$\frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{T_0}{\beta_5} \left[\beta_{50} \dot{I}_{\alpha\beta} + \beta_{51} \dot{I}_{\alpha\beta} - \beta_{52} (\vec{\nabla} \vec{q})_{\alpha\beta} - \beta_{510} \frac{\partial P_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} \right] \quad (I.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} = \frac{T_0}{\beta_6} & \left[\beta_{60} P_{\alpha\beta\gamma} + \beta_{61} q_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \beta_{62} q_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \beta_{63} q_\gamma \delta_{\alpha\beta} - \frac{\beta_{64}}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial x_\delta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\beta_{65}}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial x_\delta} \delta_{\beta\gamma} \right. \\ & - \frac{\beta_{66}}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial x_\delta} \delta_{\alpha\gamma} + \theta_{61} \frac{\partial I}{\partial x_\delta} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{62} \frac{\partial I}{\partial x_\delta} \delta_{\beta\gamma} + \theta_{63} \frac{\partial I}{\partial x_\delta} \delta_{\alpha\gamma} + \theta_{64} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\alpha\beta} \\ & + \theta_{65} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\beta\gamma} + \theta_{66} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\alpha\gamma} + \theta_{67} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\alpha\beta} + \theta_{68} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\beta\gamma} + \theta_{69} \frac{\partial \dot{I}_{\delta\epsilon}}{\partial x_\epsilon} \delta_{\alpha\gamma} \\ & + K^{(60)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + K^{(61)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + K^{(62)} \frac{\partial \dot{I}_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + K^{(63)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \\ & \left. + K^{(64)} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + K^{(65)} \frac{\partial \dot{I}_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \right] \quad (I.24) \end{aligned}$$

donde hemos omitido las primas en las variables y definido los coeficientes $\beta_{40} = \beta_{46} + \beta_{47} + \beta_{48}$, $\beta_{510} = \beta_{56} + \beta_{57} + \beta_{58}$, $\beta_6 = \alpha^{(60)}$ y $\beta_{60} = \mu^{(50)}$.

Al hacer la comparación con las ecuaciones derivadas por Teoría Cinética, los coeficientes fenomenológicos que aparecen en (I.20)-(I.24) quedan determinados por integrales de colisión (ver Apéndice I-B) calculables para un potencial intermolecular dado. Esto permite asegurar que son ecuaciones de relajación para los flujos relevantes en el sistema. Además, a partir de las definiciones cinéticas podemos afirmar que los tensores $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ son los flujos de las cantidades q_α y $\tau_{\alpha\beta}$ respectivamente⁽⁴³⁾.

Definiendo los tiempos de relajación de los flujos I ,

$q_\alpha = \tau_{\alpha\beta} \cdot I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ respectivamente como :

$$t_1 = -\frac{\beta_2}{T_0 \beta_{20}}, t_2 = -\frac{\beta_3}{T_0 \beta_{30}}, t_3 = -\frac{\beta_4}{T_0 \beta_{40}}, t_4 = -\frac{\beta_5}{T_0 \beta_{50}}, t_5 = -\frac{\beta_6}{T_0 \beta_{60}} \quad (I.25)$$

e imponiendo las condiciones para recobrar las ecuaciones constitutivas de la Hidrodinámica Clásica, podemos identificar la viscosidad cortante y la conductividad térmica como :

$$\eta = \frac{1}{T_0 \beta_{40}}, \quad \lambda = \frac{1}{T_0^2 \beta_{30}} \quad (I.26)$$

De una forma alternativa expresamos el conjunto de ecuaciones (I.20)-(I.24) como:

$$t_1 \frac{\partial I}{\partial t} = -I + \epsilon_1 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \epsilon_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (I.27)$$

$$t_2 \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = -q_\alpha - \epsilon_3 \lambda \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \epsilon_3 \lambda \frac{\partial I}{\partial x_\alpha} - \lambda \frac{\partial I}{\partial x_\alpha} \quad (I.28)$$

$$t_3 \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial t} = -\dot{I}_{\alpha\beta} - \epsilon_4 \eta \dot{I}_{\alpha\beta} + \epsilon_5 \eta \frac{\partial \rho_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} - 2\eta (\vec{\nabla}^2 \vec{u})_{\alpha\beta} \quad (I.29)$$

$$t_4 \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial t} = -\dot{I}_{\alpha\beta} - \epsilon_6 \dot{I}_{\alpha\beta} + \epsilon_7 (\vec{\nabla}^2 \vec{q})_{\alpha\beta} + \epsilon_8 \frac{\partial \rho_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} \quad (I.30)$$

$$\begin{aligned} t_5 \frac{\partial \rho_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} = & -\rho_{\alpha\beta\gamma} - \epsilon_9 q_\alpha \delta_{\beta\gamma} - \epsilon_{10} q_\beta \delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{11} q_\gamma \delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{12} \frac{\partial I}{\partial x_\delta} \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \epsilon_{13} \frac{\partial I}{\partial x_\alpha} \delta_{\beta\gamma} + \epsilon_{14} \frac{\partial I}{\partial x_\beta} \delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{15} \frac{\partial I}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{16} \frac{\partial I}{\partial x_\alpha} \delta_{\beta\gamma} - \epsilon_{17} \frac{\partial I}{\partial x_\beta} \delta_{\alpha\gamma} \\ & - \epsilon_{18} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{19} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \epsilon_{20} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{21} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{22} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\beta\gamma} \\ & - \epsilon_{23} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{24} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{25} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \epsilon_{26} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\gamma} - \epsilon_{27} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{28} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \epsilon_{29} \frac{\partial \dot{I}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (I.31)$$

donde los coeficientes ϵ_{ij} están dados en términos de β_{ij} , θ_{ij} y $K^{(ij)}$ (ver Apéndice I-C).

Este conjunto de ecuaciones son del tipo Maxwell-Cattaneo⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁶⁾ donde aparecen derivadas espaciales de los flujos, que podrían interpretarse como la manifestación de no-localidades espaciales en el sistema. En ellas están contenidos algunos casos particulares analizados en la literatura^{(9),(5),(7),(8)}.

El conjunto de ecuaciones (I.27)-(I.31) junto con las ecuaciones de balance de masa, momento y energía serán la base para el estudio de la dispersión y absorción de sonido en el siguiente capítulo.

CAPITULO II

DISPERSION Y ABSORCION DE SONIDO

La investigación teórica y experimental de la naturaleza de la propagación de sonido de diferentes frecuencias en diferentes medios fué iniciada desde hace mucho tiempo por I. Newton⁽¹⁷⁾, G. Stokes⁽¹⁸⁾, G. Kirchhoff⁽¹⁹⁾ y L. Rayleigh⁽²⁰⁾ y en la actualidad existe una gran cantidad de información acumulada tanto teórica como experimental.

En el estudio de la propagación de sonido por un medio, existen dos aspectos centrales que son de interés, por una parte la determinación de la velocidad del sonido en el medio y por otra el conocimiento del coeficiente de absorción del sonido, que está ligado a la energía de la onda de sonido absorbida por el medio. Estas dos cantidades están teóricamente determinadas, en principio, por la relación de dispersión, es decir, por la relación entre el vector de onda y la frecuencia de la onda de sonido. El cálculo teórico de éstas cantidades para un medio continuo disipativo, a través de la Hidrodinámica Clásica^{(21),(22)}, muestra un desacuerdo con los resultados experimentales^{(23),(24)} cuando la frecuencia excede un valor particular; lo anterior puede comprenderse por el hecho de que en la región de aplicabilidad de la Hidrodinámica Clásica la trayectoria libre media es mucho menor que la longitud de onda del sonido, es decir que las discrepancias son producto de que las

escalas de espacio y tiempo están restringidas para el modelo del continuo.

Para explicar los resultados experimentales en líquidos se han elaborado diversas teorías^{(25),(26)}, sin embargo éstas presentan explicaciones parciales o son elaboradas para una sustancia específica. Para el caso de gases, a través de Teoría Cinética, se ha resuelto la ecuación de Boltzmann para moléculas de Maxwell en diversas aproximaciones con el método de Chapman-Enskog^{(27),(28)} y con el método de Grad⁽²⁹⁾, que dan explicaciones limitadas a ciertos intervalos de frecuencias. Por otra parte se han propuesto⁽³⁰⁾ ecuaciones constitutivas no lineales para q_α y $\tau_{\alpha\beta}$, que en cierta medida mejoran los resultados en la aproximación de Burnett, ajustando un parametro.

Son de interés especial para nosotros los resultados encontrados por Carrassi-Morro⁽³¹⁾ donde proponiendo *ad hoc* ecuaciones tipo Maxwell-Cattaneo para q_α y $\tau_{\alpha\beta}$ [que son casos particulares de las ecuaciones (I.28) y (I.29)] con los correspondientes tiempos de relajación, encuentran una explicación aceptable de los resultados experimentales en gases nobles. Sin embargo puede mostrarse⁽³²⁾, a través de Teoría Cinética que no hay justificación para no tomar en cuenta los tiempos de relajación de los flujos I , $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$; de hecho todos los tiempos de relajación involucrados en las ecuaciones (I.27)-(I.31) tienen el mismo orden de magnitud, al menos para un potencial intermolecular de esfera dura; de aquí nuestro interés en éste capítulo por generalizar la relación de dispersión, y por consiguiente el comportamiento de la velocidad de fase y el

coeficiente de absorción con la frecuencia, presentada por Carrassi-Morro tomando en cuenta todos los elementos contenidos en las ecuaciones (I.27)-(I.31).

En la primera parte de este capítulo definiremos el tipo de aproximación que se utilizará para después plantear las ecuaciones de balance de masa, momento y energía y las ecuaciones de la Hidrodinámica no-local en esta aproximación que servirán para determinar la relación de dispersión general. Después analizaremos dos casos particulares de interés y al final presentaremos una comparación gráfica de los distintos resultados.

Una onda de sonido está definida^{(21),(22)} como el movimiento oscilatorio de amplitud pequeña de alguna propiedad del fluido, de aquí que las desviaciones de una variable termodinámica alrededor de su valor de equilibrio sean pequeñas. Entonces, su valor instantáneo podemos escribirlo como :

$$\psi = \psi_0 + \psi' \quad (\text{II.1})$$

donde ψ_0 es el valor en equilibrio y ψ' su desviación; ésta es la llamada aproximación acústica. Para muchas situaciones experimentales es suficiente suponer oscilaciones ondulatorias planas de las variables, es decir

$$\psi'(x,t) = \tilde{\psi}'(k,\omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{II.2})$$

donde k es la magnitud del vector de onda y ω la frecuencia circular. Es de nuestro interés el caso en que k es complejo; con $\text{Re}(k) > 0$ e $\text{Im}(k) > 0$; y ω es real. Bajo estas condiciones tenemos de (II.2)

$$\psi'(x,t) = \tilde{\psi}'(k,\omega) e^{-\text{Im}(k)x} e^{i[\text{Re}(k)x - \omega t]} \quad (\text{II.3})$$

que representa una perturbación permanente que se anula suficientemente lejos de la fuente. De aquí que la velocidad de fase (c) y el coeficiente de absorción (α) estén dados como:

$$c = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} \quad (\text{II.4})$$

$$\alpha = \text{Im}(k) \quad (\text{II.5})$$

entonces el vector de onda podemos escribirlo como $k = \beta + i\alpha$, donde $\beta = \omega / c$. Definiendo $\beta_0 = \omega / c_0$ y $K = k / \beta_0$ (siendo c_0 la velocidad del sonido de Laplace) tenemos finalmente

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \text{Re}(K) \quad , \quad \frac{\alpha}{\beta_0} = \text{Im}(K) \quad (\text{II.6})$$

que nos será de utilidad cuando analicemos las relaciones de dispersión.

ECUACIONES DE BALANCE EN LA APROXIMACION ACUSTICA

Las ecuaciones de balance⁽⁴⁾ de masa, momento y energía para un sistema unicomponente sin fuerzas externas son respectivamente :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_p} (\rho u_p) = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} + \tau_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{II.9})$$

donde

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right)$$

es el tensor de rapidez de deformación . Además suponiendo que:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(T, p) \\ h &= h(T, p) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

con $h = e + P / \rho$ la entalpia específica, $\tau_{\alpha\beta}$ el tensor viscoso, ρ la densidad del fluido, u_α la velocidad del fluido, P la presión escalar y q_α el flujo de calor. Las ecuaciones

(II.10) contienen funciones de estado del fluido que deben considerarse funciones conocidas por medio de sus propiedades térmicas.

Al considerar a T y P como variables independientes y de acuerdo con la aproximación (II.1) tenemos entonces

$$p = p_0 + p' \quad , \quad T = T_0 + T' \quad \text{(II.11)}$$

con esto y (II.10) tenemos además :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' \\ h &= h_0 + h' = h_0 + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T p' \end{aligned} \quad \text{(II.12)}$$

como los valores de equilibrio de las variables q_α , $\tau_{\alpha\beta}$ y u_α son cero, es decir

$$q_\alpha = q'_\alpha \quad , \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} \quad y \quad u_\alpha = u'_\alpha \quad \text{(II.13)}$$

tenemos las especificaciones necesarias para trabajar con las ecuaciones de balance.

La ecuación de balance de masa (II.7) en el caso unidimensional queda :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

tomando en cuenta (II.12) y despreciando términos cuadráticos en las variables primadas tenemos :

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \int_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T'}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p'}{\partial t} + \int_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.14})$$

haciendo uso de la relación termodinámica

$$\left(\frac{\partial p}{\partial f} \right)_s = \left(\frac{C_p}{C_v} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial f} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial f} \right)_T \quad (\text{II.15})$$

donde C_p , C_v son las capacidades caloríficas a presión y volumen constante respectivamente, además de las definiciones de compresibilidad isotérmica (K_T), velocidad de sonido de Laplace (c_0) y el coeficiente de expansión térmica (β_p) :

$$K_T = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_T, \quad c_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial f} \right)_s, \quad \beta_p = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II.16})$$

tenemos que :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial f} \right)_T = \frac{\gamma}{c_0^2} = \gamma K_T \quad (\text{II.17})$$

y

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_p = -\frac{\alpha' \gamma}{c_0^2} \quad \text{con} \quad \alpha' = \frac{\beta_p}{K_T} \quad (\text{II.18})$$

de aquí que sustituyendo (II.17) y (II.18) en (II.14) se obtenga:

$$-\frac{\gamma \alpha'}{C_0^2} \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\gamma}{C_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \int_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.19})$$

e introduciendo (II.2) para las variables T' , P' y u' tenemos finalmente :

$$\frac{\gamma \alpha' \omega}{C_0^2} \tilde{T} - \frac{\gamma \omega}{C_0^2} \tilde{p} + \int_0 k \tilde{u} = 0 \quad (\text{II.20})$$

donde hemos omitido la prima en las variables por comodidad en la notación.

La ecuación de balance de momento (II.8) en el caso unidimensional queda :

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\tau}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

haciendo uso de (II.11)-(II.13) a primer orden en las variables primadas

$$\int_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\tau}_{11}'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

y con la relación (II.2) para las variables u' , τ_{11}' y P' tenemos finalmente :

$$-\int_0 \omega \tilde{u} + k \tilde{\tau}_{11} + k \tilde{p} = 0 \quad (\text{II.21})$$

donde tambien hemos omitido la prima en las variables.

La ecuación de balance de energía (II.9) en el caso unidimensional, con (II.11) y a primer orden en las variables primadas queda :

$$\rho_0 \frac{dh'}{dt} - \frac{dp'}{dt} + \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.22})$$

por otra parte de (II.12) tenemos que

$$\frac{dh'}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T'}{\partial t} + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p'}{\partial t}$$

utilizando las relaciones termodinámicas :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho_0} + \frac{T}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = C_p, \quad C_p - C_v = \frac{T \beta \alpha'}{\rho_0}$$

tenemos que la ecuación (II.22) puede expresarse como :

$$\rho_0 C_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{(r-1)}{\gamma \alpha'} \frac{\partial p'}{\partial t} \right] + \frac{\partial q'}{\partial x} = 0$$

haciendo uso de la ecuación (II.2) para las variables T' , P' y q' tenemos finalmente :

$$-\rho_0 C_p \omega \tilde{T} + \frac{\rho_0 C_p (r-1) \omega \tilde{P}}{\gamma \alpha'} + k \tilde{q} = 0 \quad (\text{II.23})$$

donde también hemos omitido la prima en las variables.

En el procedimiento estandar⁽²⁷⁾ de la Hidrodinámica Clásica se toman como ecuaciones suplementarias en (II.21) y (II.23) a las ecuaciones constitutivas de Fourier y Navier-Newton transformadas, para obtener junto con (II.22) un conjunto de tres ecuaciones algebraicas con tres incógnitas que permiten encontrar la relación de dispersión clásica de Kirchhoff; en nuestro caso q y τ_{11} se toman como variables independientes y el conjunto de ecuaciones complementarias a (II.21)-(II.23) son las ecuaciones de evolución linearizadas derivadas en el capítulo anterior transformadas de acuerdo a la relación (II.2).

ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA NO-LOCAL EN LA APROXIMACION ACUSTICA

Para encontrar la relación de dispersión en nuestro problema tomamos el conjunto de ecuaciones (I.27)-(I.31) del capítulo anterior, las cuales ya están linearizadas (Dicha linearización es esencialmente la misma que corresponde a la aproximación acústica) habiendo tomado en cuenta que el valor de equilibrio de todos los flujos es cero. Si además consideramos las restricciones de simetría de los tensores $\tau_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ mencionadas en el capítulo I tenemos que en el caso unidimensional el conjunto de variables a considerar es I , q , u , τ_{11} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{22} , τ_{23} , I_{11} , I_{12} , I_{13} , I_{22} , I_{23} , P_{111} , P_{121} , P_{131} , P_{221} , P_{231} , P_{133} , P_{222} , P_{223} , P_{233} y P_{333} . Utilizando la representación (II.2) para cada una de estas variables y denotando

$$F_i = (1 - i\omega t_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (\text{II. 24})$$

el conjunto de ecuaciones transformadas queda :

$$F_1 \tilde{I} - i\epsilon_1 k \tilde{q} - i\epsilon_2 k \tilde{u} = 0 \quad (\text{II. 25})$$

$$F_2 \tilde{q} + i\epsilon_3 \lambda k \tilde{I} + i\epsilon_3 \lambda k \tilde{I}_{11} + i\lambda k \tilde{T} = 0 \quad (\text{II. 26})$$

$$F_3 \tilde{T}_{11} + \epsilon_4 \eta \tilde{I}_{11} - i\epsilon_5 \eta k \tilde{P}_{111} + \frac{4}{3} i \eta k \tilde{u} = 0 \quad (\text{II. 27})$$

$$F_3 \tilde{T}_{12} + \epsilon_4 \eta \tilde{I}_{12} - i\epsilon_5 \eta k \tilde{P}_{121} = 0 \quad (\text{II. 28})$$

$$F_3 \tilde{T}_{13} + \epsilon_4 \eta \tilde{I}_{13} - i\epsilon_5 \eta k \tilde{P}_{131} = 0 \quad (\text{II. 29})$$

$$F_3 \tilde{T}_{22} + \epsilon_4 \eta \tilde{I}_{22} - i\epsilon_5 \eta k \tilde{P}_{221} - \frac{2}{3} i \eta k \tilde{u} = 0 \quad (\text{II. 30})$$

$$F_3 \tilde{T}_{23} + \epsilon_4 \eta \tilde{I}_{23} - i\epsilon_5 \eta k \tilde{P}_{231} = 0 \quad (\text{II. 31})$$

$$F_4 \tilde{I}_{11} + \epsilon_6 \tilde{T}_{11} - i\epsilon_7 k \tilde{q} - i\epsilon_8 k \tilde{P}_{111} = 0 \quad (\text{II. 32})$$

$$F_4 \tilde{I}_{12} + \epsilon_6 \tilde{T}_{12} - i\epsilon_8 k \tilde{P}_{121} = 0 \quad (\text{II. 33})$$

$$F_4 \tilde{I}_{13} + \epsilon_6 \tilde{T}_{13} - i\epsilon_8 k \tilde{P}_{131} = 0 \quad (\text{II. 34})$$

$$F_4 \tilde{I}_{22} + \epsilon_6 \tilde{T}_{22} + \frac{1}{3} i \epsilon_7 k \tilde{q} - i\epsilon_8 k \tilde{P}_{221} = 0 \quad (\text{II. 35})$$

$$F_4 \tilde{I}_{23} + \epsilon_c \tilde{T}_{23} - i \epsilon_8 h \tilde{P}_{231} = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$F_5 \tilde{P}_{111} + \epsilon_{30} \tilde{q} - i \epsilon_{31} k \tilde{T} + i \epsilon_{32} k \tilde{I} + i \epsilon_{33} k \tilde{T}_{11} + i \epsilon_{34} k \tilde{I}_{11} = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$F_5 \tilde{P}_{121} + i \epsilon_{35} k \tilde{T}_{12} + i \epsilon_{36} k \tilde{I}_{12} = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$F_5 \tilde{P}_{131} + i \epsilon_{35} k \tilde{T}_{13} + i \epsilon_{36} k \tilde{I}_{13} = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$F_5 \tilde{P}_{221} + \epsilon_{11} \tilde{q} - i \epsilon_{12} k \tilde{T} + i \epsilon_{15} k \tilde{I} + i \epsilon_{18} k \tilde{T}_{11} + i \epsilon_{21} k \tilde{I}_{11} + i \epsilon_{24} k \tilde{T}_{22} + i \epsilon_{27} k \tilde{I}_{22} = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$F_5 \tilde{P}_{231} + i \epsilon_{34} k \tilde{T}_{23} + i \epsilon_{37} k \tilde{I}_{23} = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$F_5 \tilde{P}_{133} + \epsilon_9 \tilde{q} - i \epsilon_{13} k \tilde{T} + i \epsilon_{16} k \tilde{I} + i \epsilon_{37} k \tilde{T}_{11} + i \epsilon_{38} k \tilde{I}_{11} \\ - i \epsilon_{26} k \tilde{T}_{22} - i \epsilon_{39} k \tilde{I}_{22} = 0 \quad (\text{II.42})$$

$$F_5 \tilde{P}_{222} + i \epsilon_{39} k \tilde{T}_{12} + i \epsilon_{40} k \tilde{I}_{12} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$F_5 \tilde{P}_{223} + i \epsilon_{18} k \tilde{T}_{13} + i \epsilon_{21} k \tilde{I}_{13} = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$F_5 \tilde{P}_{233} + i \epsilon_{19} k \tilde{T}_{12} + i \epsilon_{22} k \tilde{I}_{12} = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$F_5 \tilde{P}_{333} + i \epsilon_{39} k \tilde{T}_{13} + i \epsilon_{40} k \tilde{I}_{13} = 0 \quad (\text{II.46})$$

donde el valor de los coeficientes están dados en el apéndice

II-A.

Para que el sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas formadas por (II.20), (II.21), (II.23) y (II.25)-(II.46) tenga solución no trivial, el determinante formado por los coeficientes debe anularse⁽³²⁾. Tomando en los primeros cinco renglones del determinante a las ecuaciones (II.42)-(II.46) y reacomodando apropiadamente variables y ecuaciones el determinante es reducible a la siguiente forma :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccc|cccccccc}
 0 & 0 & -16k & -16k & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k & 0 & 0 & -2W & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -Ew & Dw & 0 & Bk & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 Bw & -Aw & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & iE_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & F_1 & 0 & -16k \\
 0 & 0 & -16k & 0 & 0 & E_1 & F_1 & 0 & 0 & -16k & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -3i\eta k & 0 & 0 & 0 & F_3 & E_1\eta & 0 & -16k & 0 \\
 0 & 0 & 0 & i\eta k & 0 & F_3 & E_1\eta & 0 & 0 & -16k & 0 & 0 \\
 0 & i1k & F_2 & 0 & i6k & 0 & i6k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & i6k & E_2 & 0 & i6k & i6k & i6k & 0 & 0 & 0 & F_5 & 0 \\
 0 & -16k & -E_1 & 0 & i6k & i6k & i6k & i6k & i6k & i6k & 0 & F_5
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 F_3 \quad E_1\eta \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 E_1 \quad F_1 \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 i6k \quad i6k \quad F_5 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 F_3 \quad E_1\eta \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 E_1 \quad F_1 \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 i6k \quad i6k \quad F_5 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 F_3 \quad E_1\eta \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 E_1 \quad F_1 \quad -16k \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 i6k \quad i6k \quad F_5 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} = 0 \quad (II.47)$$

donde hemos denotado :

$$A = \int_0 C_p, \quad B = \frac{\int_0 C_p (\delta-1)}{\delta \alpha}, \quad D = \frac{\gamma \alpha^1}{C_0^2}, \quad E = \frac{\gamma}{C_0^2} \quad (II.48)$$

El determinante (II.47) define la ecuación

característica del sistema

$$\Delta_{20}(k, \omega) = 0 \quad (\text{II.49})$$

y sus soluciones nos dan la relación de dispersión del conjunto completo de modos propios de nuestro sistema.

De la relación (II.47) vemos que Δ_{20} es igual al producto de cuatro determinantes de orden menor, es decir :

$$\Delta_{20} = \Delta_{11} \Delta_3^{(1)} \Delta_3^{(1)} \Delta_3^{(1)} \quad (\text{II.50})$$

entonces nuestro problema se reduce en analizar por separado las relaciones de dispersión tomando $\Delta_3^{(1)} = 0$, $\Delta_3^{(2)} = 0$ y $\Delta_{11} = 0$. Debe notarse que por la forma en que están agrupados los términos en (II.47) y por la simetría de $\tau_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$; $\Delta_3^{(1)} = 0$ corresponde a ondas con polarización transversal dirigidas a lo largo de los ejes Y o Z y $\Delta_3^{(2)} = 0$ a ondas con polarización transversal dirigidas a lo largo del eje Z. En $\Delta_{11} = 0$ están incluidas las ondas con polarización longitudinal dirigidas en el eje X, y sus efectos en el eje Y, representadas por las contribuciones de τ_{22} e I_{22} .

RELACION DE DISPERSION PARA $\Delta_{\beta}^{(1)} = 0$.

Resolviendo el determinante encontramos que la relación de dispersión está dada por:

$$(a_1 + i b_1 \omega) k^2 - [(c_1 \omega^2 + d_1) + i (f_1 \omega^3 - g_1 \omega)] = 0 \quad (\text{II.51})$$

donde los coeficientes a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , f_1 y g_1 están dados en términos de las ε , la viscosidad cortante y los tiempos de relajación (ver Apéndice II-B). Considerando el caso en que $\omega \gg a_1 / b_1$, d_1 / c_1 , g_1 / f_1 , la velocidad de fase y el coeficiente de absorción vienen dados por:

$$C = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \left(\frac{b_1}{f_1} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \text{Im}(k) = \frac{(a_1 f_1 - b_1 c_1)}{2} \left(\frac{b_1}{f_1} \right)^{1/2} \quad (\text{II.52})$$

El polinomio característico asociado a éstas ondas para la propagación en Y y Z sería $\left[\Delta_{\beta}^{(1)} \right]^2 = 0$.

RELACION DE DISPERSION PARA $\Delta_{22}^{(2)} = 0$.

De forma análoga al caso anterior, tenemos que la relación de dispersión puede expresarse :

$$(a_2 + i b_2 \omega) k^2 - [(c_1 \omega^2 + d_1) + i (f_1 \omega^3 - g_1 \omega)] = 0 \quad (\text{II.53})$$

donde a_2 y b_2 son funciones de las ε , la viscosidad cortante y los tiempos de relajación (ver Apéndice II-B) y los coeficientes con subíndice uno son los mismos de la relación (II.52). Considerando el caso en que $\omega \gg a_2 / b_2$, d_1 / c_1 , g_1 / f_1 , la velocidad de fase y el coeficiente de absorción viene dada por:

$$C = \frac{\omega}{R_e(k)} = \left(\frac{b_2}{f_1} \right)^{1/2} \quad (\text{II.54})$$

$$\alpha = \text{Im}(k) = \frac{(a_2 f_1 - b_2 c_1)}{2} \left(\frac{b_2}{f_1} \right)^{1/2}$$

RELACION DE DISPERSION PARA $\Delta_{11} = 0$.

Este caso es de importancia central en éste trabajo ya que en él está contemplada la propagación del sonido (ondas longitudinales). Resolviendo el determinante de interés obtenemos la siguiente ecuación de dispersión general :

$$\begin{aligned}
& \left[(A_1 \omega^3 + A_2 \omega) + i (A_3 \omega^2 + A_4) \right] k^6 + \left[(B_1 \omega^5 + B_2 \omega^3 + B_3 \omega^2 + \right. \\
& \left. + B_4 \omega + B_5) + i (B_6 \omega^4 + B_7 \omega^3 + B_8 \omega^2 + B_9 \omega + B_{10}) \right] k^6 + \\
& + \left[(C_1 \omega^3 + C_2 \omega^5 + C_3 \omega^3 + C_4 \omega) + i (C_5 \omega^6 + C_6 \omega^4 + C_7 \omega^2 + C_8) \right] k^4 + \\
& + \left[(D_1 \omega^9 + D_2 \omega^7 + D_3 \omega^5 + D_4 \omega^3 + D_5 \omega) + i (D_6 \omega^8 + D_7 \omega^6 + \right. \\
& \left. + D_8 \omega^4 + D_9 \omega^2) \right] k^2 + \left[(E_1 \omega^{11} + E_2 \omega^9 + E_3 \omega^7 + E_4 \omega^5 + E_5 \omega^3) + \right. \\
& \left. + i (E_6 \omega^{10} + E_7 \omega^8 + E_8 \omega^6 + E_9 \omega^4) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{II.55}$$

donde los coeficientes A_i , B_i , C_i , D_i y E_i están dados en términos de los parámetros ε y los tiempos de relajación (ver Apéndice II-C).

En (II.55) están contenidos dos casos particulares, el de la Hidrodinámica Clásica^{(21),(22)} y el reportado por Carrassi y Morro⁽²⁴⁾.

Analicemos por separado éstos para después resaltar las diferencias con el caso general.

RELACION DE DISPERSION EN LA HIDRODINAMICA CLASICA

Para este caso vemos que en el conjunto de ecuaciones (I.27)-(I.31) todos los tiempos de relajación deben anularse, así

como los parámetros ϵ y las únicas variables que sobreviven son q_α y $r_{\alpha\beta}$ de tal forma que (I.28) y (I.29) se reducen a las expresiones conocidas de Fourier y Navier-Newton respectivamente.

Con las restricciones anteriores vemos que (del Apéndice II-C), en (II.55) los únicos coeficientes distintos de cero son :

$$C_4 = \frac{48\lambda\eta}{3c_0^2}, \quad C_P = \rho_0\lambda, \quad D_5 = \rho_0^2 C_P$$

$$D_9 = -\frac{\rho_0\delta\lambda}{c_0^2} - \frac{4\rho_0 C_P \eta}{3c_0^2}, \quad E_5 = -\frac{\rho_0^2 C_P}{c_0^2}$$

sustituyendo estas expresiones en (II.55) tenemos :

$$\left[\frac{48\lambda\eta}{3c_0^2} \omega + i\rho_0\lambda \right] k^4 + \left[\rho_0^2 C_P \omega + i \left(-\frac{\rho_0\delta\lambda}{c_0^2} - \frac{4\rho_0 C_P \eta}{3c_0^2} \right) \omega^2 \right] k^2 - \frac{\rho_0^2 C_P}{c_0^2} \omega^3 = 0$$

dividiendo entre $\rho_0^2 C_P \omega$ e introduciendo las frecuencias características para procesos viscosos y térmicos :

$$\omega_v = \frac{\rho_0 c_0^2}{\eta}, \quad \omega_e = \frac{\rho_0 c_0^2 C_P}{\lambda} \quad (\text{II.56})$$

la ecuación de dispersión queda :

$$\left[\frac{48c_0^2}{3\omega_e \omega_v} + \frac{i c_0^2}{\omega \omega_e} \right] k^4 + \left[1 - i\omega \left(\frac{\gamma}{\omega_e} + \frac{4}{3\omega_v} \right) \right] k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0$$

(II.57)

en ésta ecuación nos interesa el comportamiento del vector de onda en dos casos :

a).- Comportamiento a frecuencias pequeñas ($\omega \ll \omega_c, \omega_v$).

De (II.57) podemos observar que en ausencia de procesos viscosos y térmicos (i.e., $\eta = \lambda = 0$) el valor de k es ω / c_0 , si tomamos éste valor inicial de k para resolver por iteraciones (II.57) tenemos que en la primera iteración obtenemos :

$$k \approx \frac{\omega}{c_0} \left\{ 1 + i\omega \left[\frac{(r-1)}{2\omega_c} + \frac{2}{3\omega_v} \right] \right\}$$

que nos expresa el hecho de que la velocidad de propagación es c_0 y el coeficiente de absorción es el clásico de Kirchhoff-Stokes (con la viscosidad volumétrica igual a cero, como corresponde al gas monoatómico) :

$$\alpha = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[\frac{(r-1)}{2\omega_c} + \frac{2}{3\omega_v} \right]$$

b).- Comportamiento a frecuencias grandes ($\omega \gg \omega_c, \omega_v$).

En éste caso la ecuación (II.57) podemos expresarla como:

$$k'^2 + \frac{9\omega_c\omega_v}{16c_0^2r^2} \left[1 - i\omega \left(\frac{r}{\omega_c} + \frac{4}{3\omega_v} \right) \right] \left[\frac{4r}{3} - i\frac{\omega_v}{\omega} \right] k' - \frac{9\omega_c\omega_v}{16c_0^2r^2} \left[\frac{4r}{3} - i\frac{\omega_v}{\omega} \right] \omega^2 = 0 \quad \text{(II.58)}$$

donde hemos denotado $k' = k^2$. Resolviendo esta ecuación cuadrática para esta aproximación tenemos que :

$$k^2 = a(\omega_c, \omega_v) + i b(\omega_c, \omega_v) \omega \quad (\text{II.59})$$

donde $a(\omega_c, \omega_v)$ y $b(\omega_c, \omega_v)$ están dados en el Apéndice II-D. De aquí que

$$k = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} + i \sqrt{\frac{b}{2}} \right) \omega^{1/2}$$

entonces en el límite de altas frecuencias la velocidad de fase y el coeficiente de absorción están dados por :

$$\begin{aligned} c &\cong \sqrt{\frac{2}{b}} \omega^{1/2} \\ \alpha &\cong \sqrt{\frac{2}{b}} \omega^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

el comportamiento de la velocidad de fase es anómalo ya que experimentalmente, para frecuencias grandes, tiende a un valor constante⁽²⁹⁾.

RELACION DE DISPERSION CARRASSI-MORRO

Para este caso se consideran solo las variables q_α y $\tau_{\alpha\beta}$ con sus respectivos tiempos de relajación t_2 y t_3 en el conjunto de ecuaciones (I.27)-(I.31), con esto tenemos que los

únicos coeficientes distintos de cero en (II.55) son C_4 , C_7 , C_8 , D_4 , D_5 , D_8 , D_9 , E_4 , E_5 , E_8 y E_9 . Arreglando la ecuación resultante de tal forma que el último término no contenga parte imaginaria llegamos a :

$$\left[(a_1 + a_1' \omega^2) + \frac{i}{\omega} (a_2 + a_2' \omega^2) \right] k^4 + \left[(1 + b_1' \omega^2 + b_1'' \omega^4) - i \omega (b_2 + b_2' \omega^2) \right] k^2 - \left[c_1' \omega^2 + c_1'' \omega^4 + c_1''' \omega^6 \right] = 0 \quad (\text{II.61})$$

donde los coeficientes que aparecen en ella están dados en el Apéndice II-D.

Como el comportamiento anómalo se presenta, en el caso clásico a frecuencias grandes, resolvamos (II.61) considerando solamente los términos de los coeficientes con mayor potencia en la frecuencia , tanto para la parte real como imaginaria . En este caso la relación (II.62) puede reducirse a ,

$$k'^2 + \left[\left(\frac{b''}{a_1'} \right) \omega^2 - i \omega \left(\frac{a_1' b_1''}{a_1'^2} + \frac{b_1'}{a_1'} \right) \right] k' - \left[\left(\frac{c_1'''}{a_1'} \right) \omega^4 - i \omega^3 \left(\frac{a_1' c_1'''}{a_1'^2} \right) \right] = 0$$

donde $k' = k^2$. La solución a ésta ecuación cuadrática puede escribirse como :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{2a_1''} \left\{ a_1' \left[-b_1'' \pm (b_1''^2 + 4a_1' c_1''')^{1/2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\omega} \left[\frac{(a_1' b_2' + a_2' b_1'') [(b_1''^2 + 4a_1' c_1''')^{1/2} \pm b_1''] \pm 2a_1' a_2' c_1'''}{(b_1''^2 + 4a_1' c_1''')^{1/2}} \right] \right\} \quad (\text{II.62})$$

tomando la parte imaginaria de k^2 despreciable respecto a la parte real tenemos que con (II.4) y (II.5) :

$$C = \frac{1}{\left[\frac{-b_1'' \pm (b_1''^2 + 4a_1' c_1''')^{1/2}}{2a_1'} \right]^{1/2}} \quad (\text{II.63})$$

es decir que para frecuencias grandes, la velocidad de fase es independiente la frecuencia de acuerdo con los experimentos. Entonces la introducción de tiempos de relajación en la teoría evita el problema clásico mencionado anteriormente.

La ecuación (II.61) puede expresarse de una forma alternativa⁽³⁴⁾ considerando $t_1 = t_2 = \tau$ y utilizando (II.6) como:

$$\left\{ \left[\frac{4f}{3R} - \frac{4f\tau^2}{3R^3} - \frac{3f\tau}{5R} - \frac{3f\tau^3}{5R^3} \right] + i \left[\frac{3f}{5} + \frac{3f\tau^2}{5R^2} + \frac{8f\tau}{3R^2} \right] \right\} k^4 + \\ + \left\{ \left[R + \tau^2/R + f\tau/R + f\tau^3/R^3 + \frac{4}{3}\tau/R + \frac{4}{3}\tau^3/R^3 \right] + i \left[-f - \frac{f\tau^2}{R^2} - \right. \right. \quad (\text{II.61 bis}) \\ \left. \left. - \frac{4}{3} - \frac{f\tau^2}{3R^2} \right] \right\} k^2 + \left\{ -R \left[1 + \frac{2\tau^2}{R^2} + \frac{\tau^4}{R^4} \right] \right\} = 0$$

donde $R = \rho_0 c_0^2 / \omega \eta = \gamma r$ y $\tau = c_0 t / \Lambda = \rho_0 c_0^2 t / \eta$.

Esta es la relación de dispersión reportada por Carrassi-Morro.

RELACION DE DISPERSION GENERAL

Para este caso tomamos la expresión (II.55) completa y siguiendo el procedimiento de I. Müller⁽⁹⁵⁾ tenemos que para frecuencias grandes podemos expresar esta ecuación como:

$$k_1^4 + F_1 k_1^3 + G_1 k_1^2 + H_1 k_1 + I_1 = 0 \quad (\text{II.64})$$

donde

$$k_1 = \frac{k}{\omega}, \quad F_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad G_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad H_1 = \frac{D_1}{A_1}, \quad I_1 = \frac{E_1}{A_1}$$

Siguiendo el método de Ferrari⁽⁹⁴⁾ para resolver (II.64) tenemos que ésta es equivalente a las dos ecuaciones cuadráticas

$$k_1^2 + (F_1 + IK) \frac{k_1^2}{2} + \left(y + \frac{F_1 y - H_1}{IK} \right) = 0 \quad (\text{II.65})$$

donde

$$IK = \pm \sqrt{8y + F_1^2 - 4G_1} \quad (\text{II.66})$$

e y es una raíz real cualquiera de la ecuación cúbica

$$8y^3 - 4G_1 y^2 + (2F_1 H_1 - 8I_1) y + I_1 (4G_1 - F_1^2) - H_1^2 = 0 \quad (\text{II.67})$$

ésta ecuación cúbica puede expresarse alternativamente como:

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \quad (\text{II.68})$$

donde:

$$x = y - \frac{q}{c}$$

$$y^3 = \frac{q^3}{108} + \frac{1}{24} q_1 (1F_1 H_1 - 4I_1) + \frac{1}{8} [I_1 (4q_1 - 1F_1^2) - 1H_1^2]$$

$$3p = 48 (1F_1 H_1 - 4I_1) - \frac{q_1^2}{12}$$

Las soluciones de Cardano para (II.68), son

$$x_1 = u + v, \quad x_2 = \epsilon_1 u + \epsilon_2 v, \quad x_3 = \epsilon_1 v + \epsilon_2 u$$

con

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

y

$$\epsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

tomando a x_1 como la solución de interés tenemos

$$y_1 = x_1 + \frac{q}{c} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{q}{c} \quad (\text{II.69})$$

entonces

$$|K_1| = + \sqrt{8y_1 + F_1^2 - 4G_1}$$

$$|K_2| = + \sqrt{8y_1 + F_1^2 - 4G_1}$$

las dos ecuaciones cuadráticas a resolver serían,

$$h'^2 + \frac{(F_1 + |K_1|)}{2} h' + \left(y_1 + \frac{F_1 y_1 - |H_1|}{|K_1|} \right) = 0$$

y

$$h'^2 + \left(\frac{F_1 + |K_2|}{2} \right) h' + \left(y_1 + \frac{F_1 y_1 - |H_1|}{|K_2|} \right) = 0$$

de la solución de éstas vemos que:

$$C = \frac{1}{\sqrt{-\frac{J_{12}}{2}} + \sqrt{\frac{J_{12}^2}{4} - L_{12}}}$$

(II.70)

con

$$J_{12} = \frac{1}{2} (F_1 + |K_{1,2}|)$$

$$L_{1,2} = y_1 + \frac{F_1 y_1 - |H_1|}{|K_{1,2}|}$$

Con (II.70) se generaliza la expresión (II.63) de Carrassi-Morro y la presentada por Müller.

Para el caso general (II.55), se exige que p y q (en II.68) sean reales, por lo tanto para resolverla tendrá que utilizarse un método numérico.

Debe señalarse que todos los parámetros involucrados en

la ecuación general (II.55), y por lo tanto, en sus casos particulares están bien determinados cuando se selecciona el potencial intermolecular por la identificación que fue hecha en el Capítulo I.

CAPITULO III

COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

En éste Capitulo haremos referencia a los experimentos realizados por E. Meyer y G. Sessler⁽²⁴⁾ (1957) y M. Greenspan⁽²³⁾ (1956) que permitieron determinar el comportamiento de la velocidad de fase y el coeficiente de absorción de una onda sonora que se propaga en diferentes gases monoatómicos diluidos. Estos experimentos, a pesar de que fueron hechos con técnicas y a frecuencias distintas, muestran resultados similares.

Básicamente en estos experimentos el sonido es generado por un transmisor piezoeléctrico y detectado por un receptor piezoeléctrico movable, de tal manera que cuando la distancia entre el transmisor y el receptor se varia, la fase y la amplitud de la señal en el receptor cambia, de lo que se puede inferir la velocidad de fase y el coeficiente de absorción.

Dado que en estos trabajos se reportan los resultados únicamente en forma gráfica, fué necesario digitalizar las gráficas con el objeto de tener los valores numéricos de los puntos experimentales de manera que fuera posible hacer una comparación mas confiable con las predicciones teóricas (ver Apéndice III-A). Aquí solo se presentan los resultados experimentales para el Argon, ya que en las mediciones de Greenspan para cinco gases monoatómicos (He, Ne, A, Kr y Xe) se muestra que todos ellos se comportan sustancialmente de la misma forma.

En las figs. 1 y 2 se muestran los resultados experimentales, en escalas $\log_{10}$ - $\log_{10}$, encontrados por M. Greenspan y Meyer-Sessler, respectivamente, para el comportamiento de la velocidad de fase y el coeficiente de absorción en argon. En ellas el parámetro $r = P / \omega \eta$, donde P es la presión y η la viscosidad cortante.

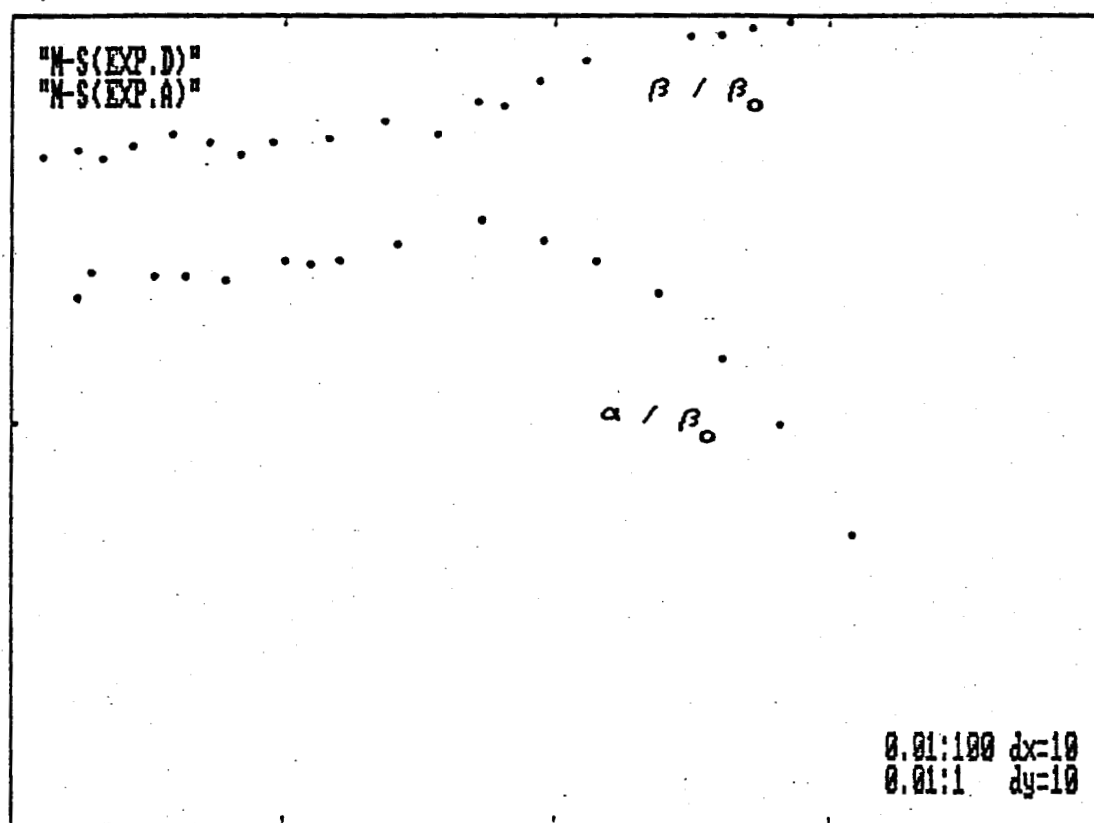


FIGURA 1. RESULTADOS EXPERIMENTALES DE DISPERSION ($\beta/\beta_0 = c_0/c$) Y ABSORCION (α/β_0) EN ARGON. (FRECUENCIA 11 Mc, TEMPERATURA 30 C).

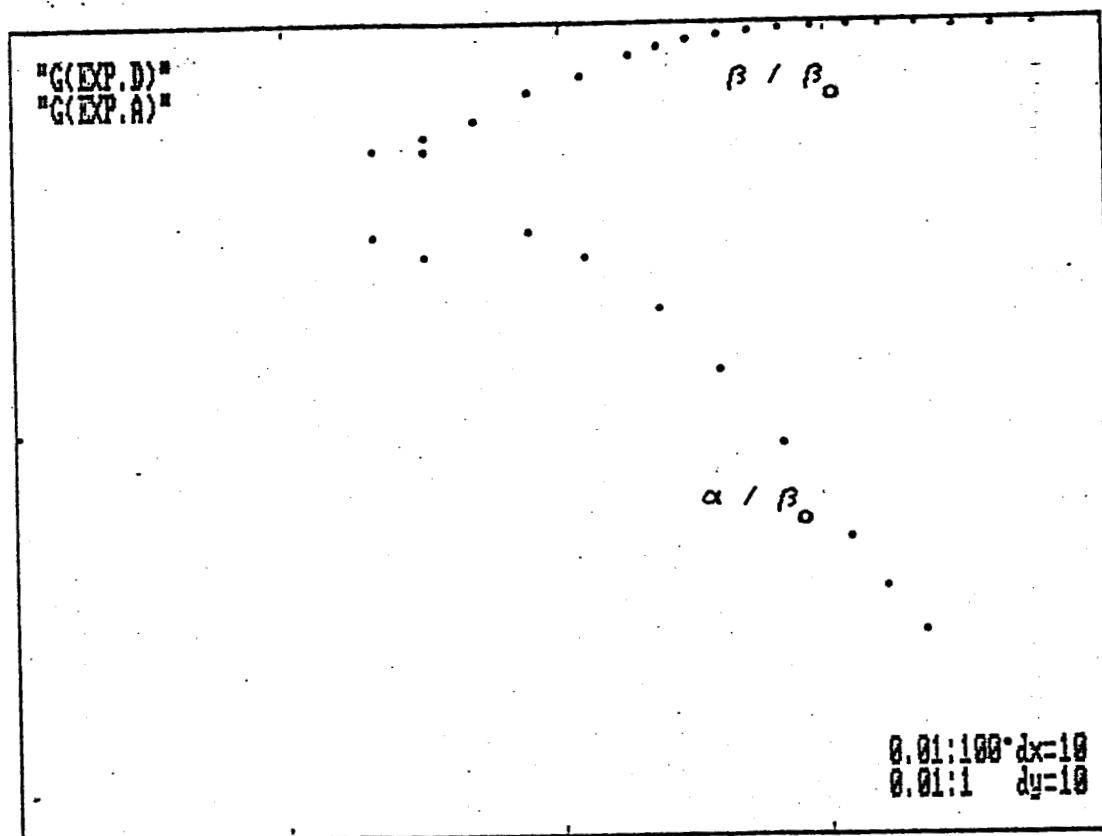


FIGURA 2. RESULTADOS EXPERIMENTALES DE DISPERSION Y ABSORCION EN ARGON (FRECUENCIA 100 KHZ, TEMPERATURA 20 C).

Las mediciones de dispersión y absorción se realizan variando la distancia (L) de separación entre el transmisor y el receptor, por lo que es conveniente considerar tres regímenes distintos de presión en la cual son hechos los experimentos. En la fig. 3 se muestran estas regiones, donde A es la trayectoria

libre media y λ_0 la longitud de onda del sonido.

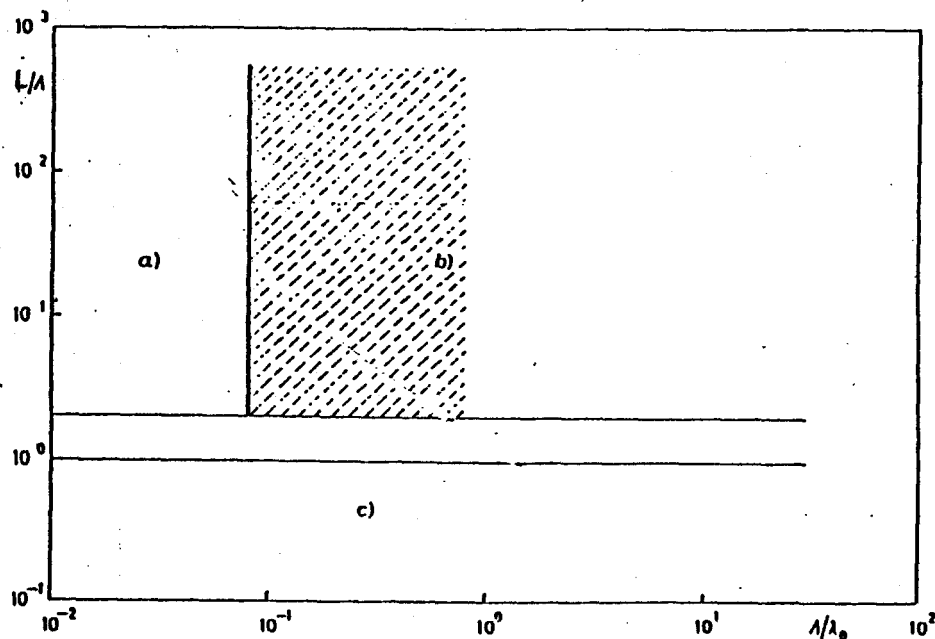


FIGURA 3. A) REGIMEN CLASICO, B) REGIMEN DE RELAJACION TRASLACIONAL, C) REGIMEN DE RELAJACION GEOMETRICA.

Para $L / \Lambda > 2$ se ha separado en dos regiones; una para bajas frecuencias o trayectoria libre media corta ($\Lambda / \lambda_0 < 0.1$, ver fig. 3a) y la region donde los efectos de relajación son importantes ($0.1 < \Lambda / \lambda_0 < 1$, ver fig. 3b). La región por debajo de la recta $L / \Lambda = 1$ se le conoce como regimen de relajación geométrica, en donde predomina la propagación molecular libre. Por último, en la fig. 3 se señala una región de transición para $1 <$

$L / \Lambda < 2$. En los experimentos L / Λ varía de tal forma que al decrecer la presión se pasa a la región de relajación geométrica para $\Lambda = \lambda_0$.

Para que la propagación de sonido esté gobernada solo por colisiones dentro del gas, debe tenerse $L \gg \Lambda$. Esta condición hace que los experimentos de propagación de sonido sean más difíciles de realizar a altas frecuencias en vista de que la incertidumbre experimental aumenta considerablemente. Por ejemplo, si $L = 15 \Lambda$, la amplitud de la onda de sonido en el detector es menor que la de la fuente por un factor $\exp[-\alpha L]$, como αL puede expresarse como $\alpha L = \alpha c_0 L / \omega R \Lambda$ de aquí que, para $R = 1$ ($r = 3 R / 5$) y de la fig. 2, tenemos que $\alpha c_0 / \omega = 0.3$, por lo que la amplitud disminuye por un factor $1 / 90$. Lo anterior muestra la dificultad experimental al trabajar con altas frecuencias.

RELACIONES DE DISPERSION EN TEORIA CINETICA.

En la literatura^{(27),(30)} se ha estudiado ampliamente, la propagación de sonido en gases monoatómicos, desde el punto de vista teórico, utilizando el esquema de aproximaciones sucesivas de Chapman-Enskog y el Método de Grad para la solución de la ecuación de transporte de Boltzmann. En esta sección presentaremos los resultados obtenidos mediante la solución de la ecuación de Boltzmann por el método de Chapman-Eskog para un gas de moléculas de Maxwell en las aproximaciones de Navier-Stokes, Burnett y SuperBurnett.

a) La relación de dispersión en la aproximación Navier-Stokes esta dada por,

$$\left[-\frac{10}{3R^2} + i \frac{3}{2R} \right] K^4 + \left[1 + i \frac{23}{6R} \right] K^2 + 1 = 0 \quad (\text{III.1})$$

donde $R = \gamma r$ con $\gamma = 5/3$ y el factor de Eucken $f = 5/2$.

En las figs. 4A y 4B se muestran los datos experimentales y la predicción teórica en esta aproximación para dispersión y absorción.

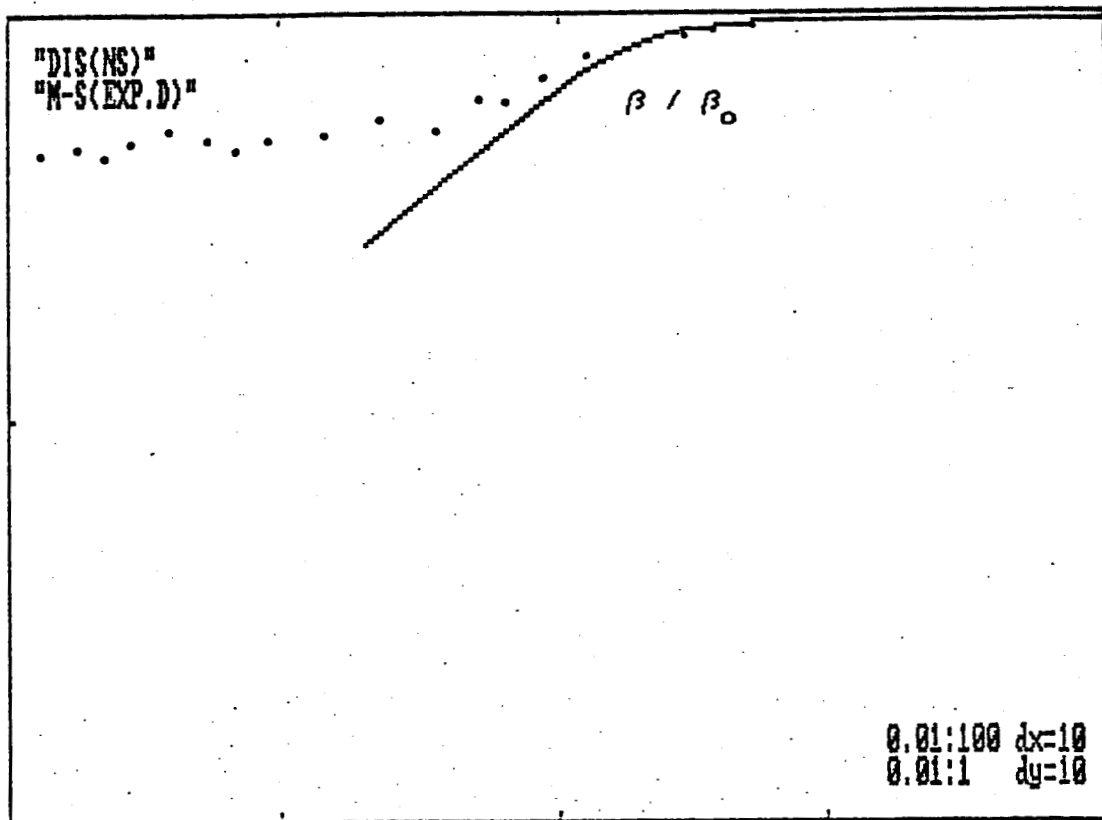


FIGURA 4A.

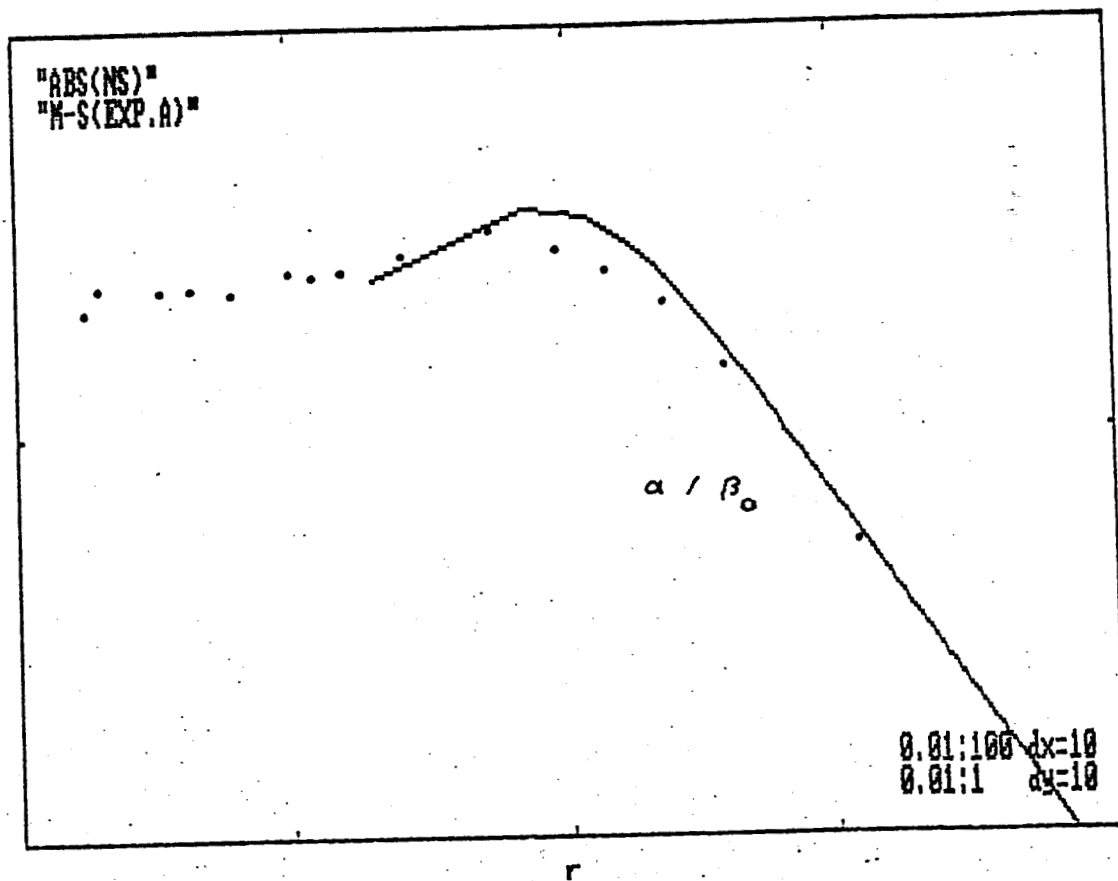


FIGURA 4B.

Como puede observarse, la predicción teórica es correcta para $r > 10$ en ambos casos, sin embargo para $r < 10$ las diferencias son notables, de donde se concluye que no predice velocidades finitas de propagación para frecuencias altas (i.e. r pequeña).

b) La relación de dispersión en la aproximación de Burnett esta dada por,

$$\left[-\frac{35}{27R^4} - i \frac{10}{3R^2} \right] K^6 + \left[-\frac{97}{18R^2} + i \frac{3}{2R} \right] K^4 +$$

(III.2)

$$+ \left[1 + i \frac{23}{6R} \right] K^2 + 1 = 0$$

donde r y γ toman los mismos valores establecidos para (III.1).

En las figs. 5A y 5B se muestran los datos experimentales y la predicción teórica.

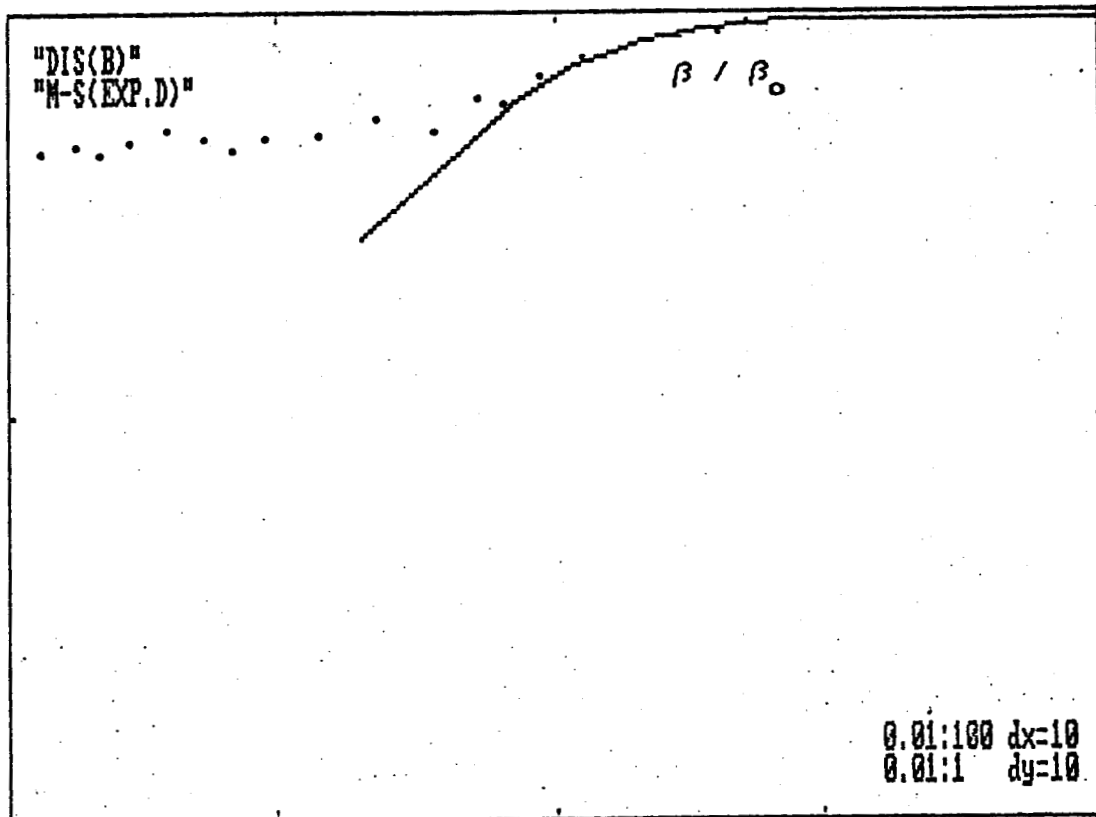


FIGURA 5A.

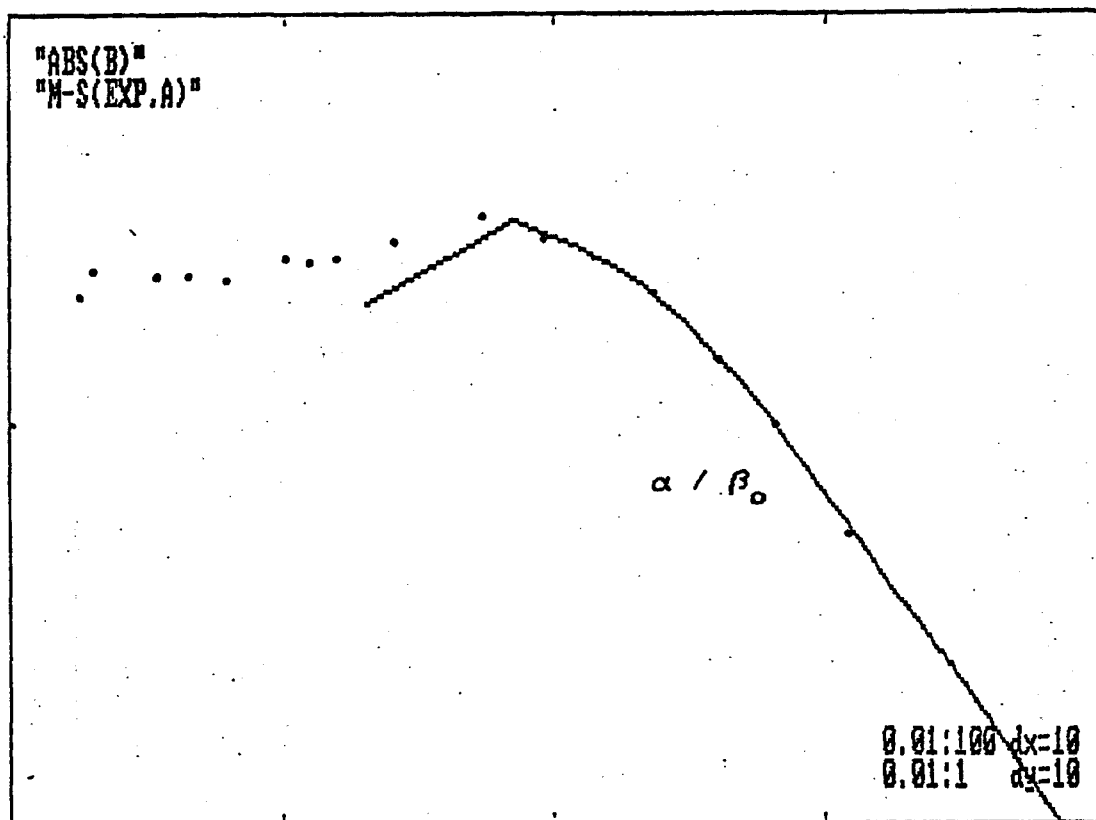


FIGURA 5B.

Como puede observarse, la predicción teórica es correcta para bajas frecuencias y valores de $r > 1$ en ambos casos. Esto muestra la relevancia de la variación de gradientes que no son tomados en cuenta por la ecuación de Navier-Stokes; además para $r < 1$ las diferencias son apreciables.

c) La relación de dispersión en la aproximación de SuperBurnett esta dada por,

$$\left[\frac{3925}{972 R^6} - i \frac{15}{R^5} \right] K^8 + \left[-\frac{805}{54 R^4} + i \frac{67}{24 R^3} \right] K^6 + \left[\frac{2775}{216} \frac{i}{R^2} - \frac{97}{18 R} + \frac{3i}{2 R} \right] K^4 + \left[1 + \frac{23}{6} \frac{i}{R} \right] K^2 + 1 = 0 \quad (\text{III.3})$$

donde r y γ toman los valores presentados en a) y b).

En las figs. 6A y 6B se muestran los resultados experimentales y la predicción teórica.

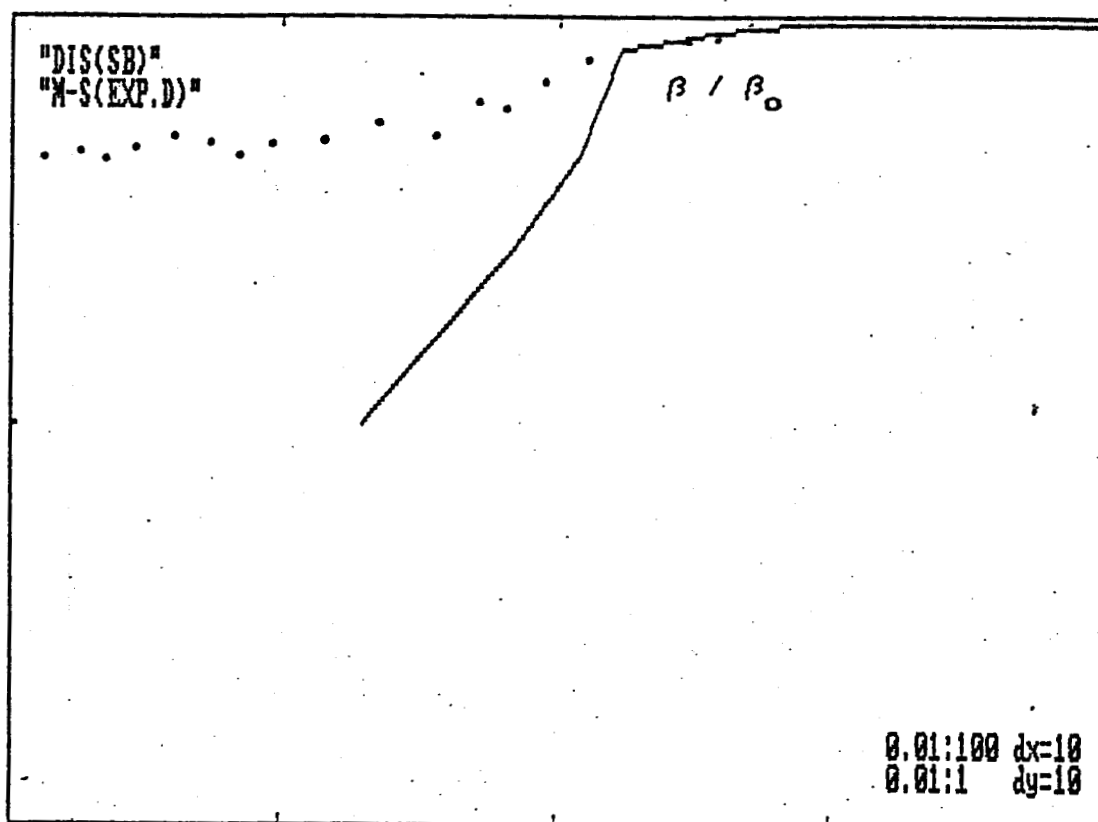


FIGURA 6A.

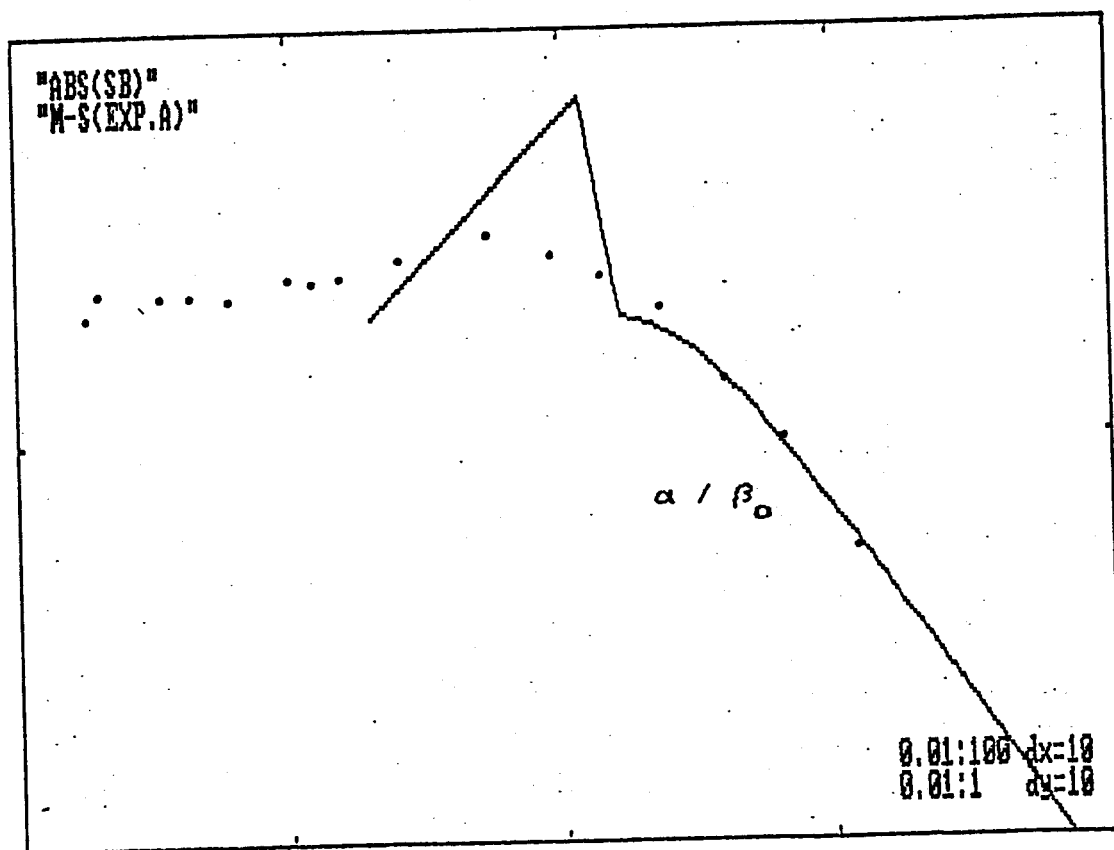


FIGURA 6B.

La aproximación de SuperBurnett no mejora los resultados de la aproximación de Burnett, lo cual se hace evidente para $r < 4$.

RELACIONES DE DISPERSION EN LA T.I.E.

En esta sección consideraremos los siguientes casos particulares de interés basados en la relación general (II.51):

1) Para $\tau_2 = \tau_9 = \tau = 0.18$, se obtienen los resultados reportados por Carrassi-Morro en 1973 [ver (II.61 bis)]. En las figs. 7A y 7B se muestra la comparación de sus resultados con el experimento.

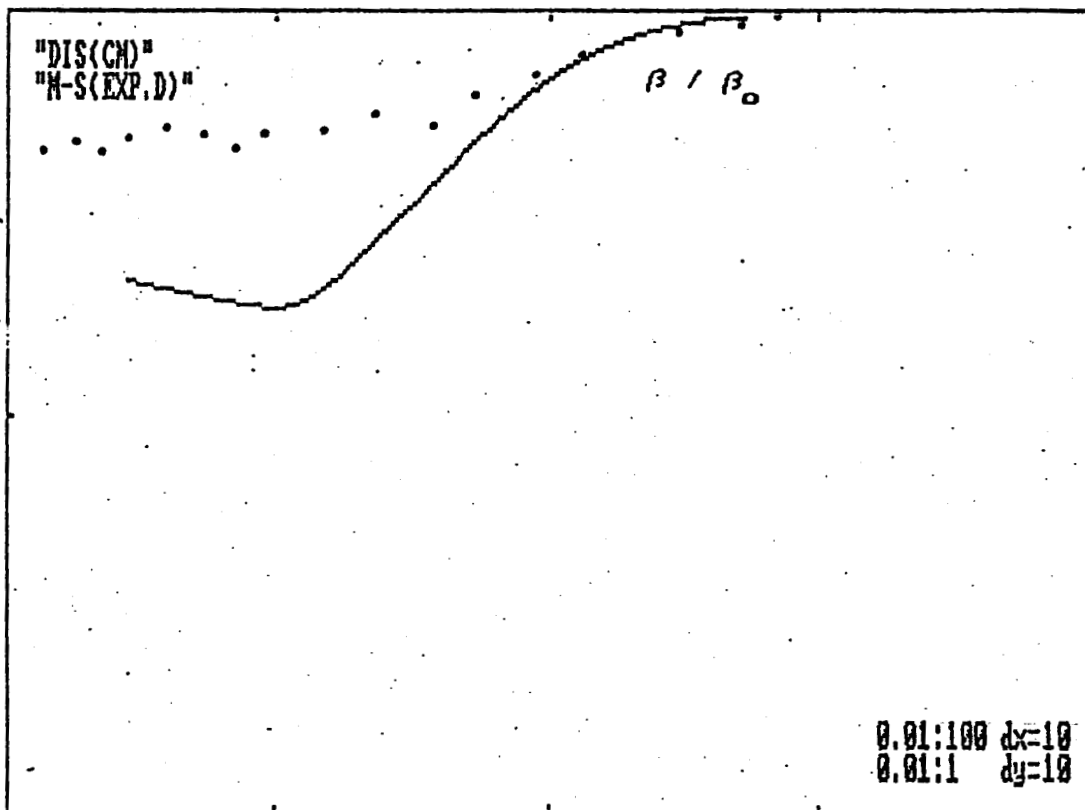


FIGURA 7A.

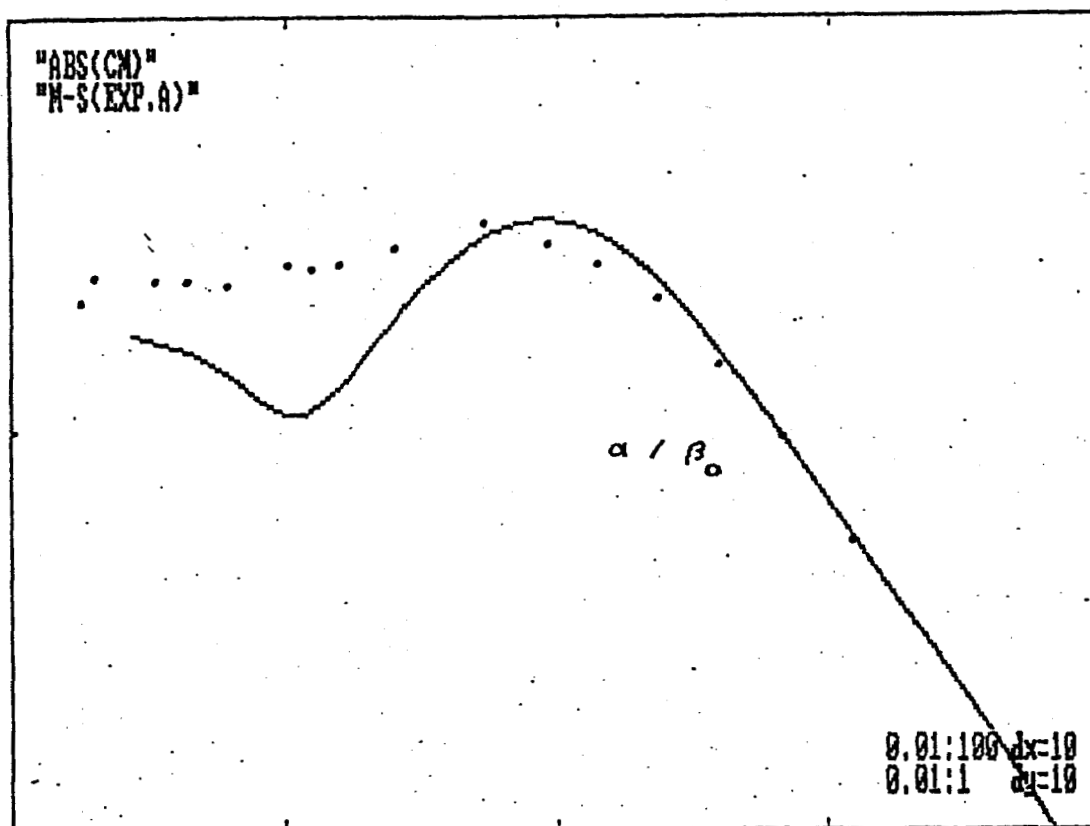


FIGURA 7B.

Como puede observarse existe un comportamiento aceptable para $1 < r < 10$ y una tendencia a mantener un valor constante para r pequeña. Este resultado no es de sorprender ya que el valor de r es seleccionado *a priori* para que se de esta concordancia.

II) Para $\tau_2 \neq \tau_3$ calculados en base a una comparación de (I.28) y (I.29), con las correspondientes ecuaciones obtenidas por el método de Grad para 13 momentos⁽³⁷⁾, se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[-\frac{3f\tau_2}{5R} - \frac{3f\tau_2\tau_3^2}{5R^2} + \frac{4f}{3R} - \frac{4f\tau_2\tau_3}{3R^2} \right] + i \left[\frac{3f}{5} + \frac{3f\tau_3^2}{5R^2} + \frac{4f\tau_2}{3R^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4f\tau_3}{3R^2} \right] \right\} K^4 + \left\{ \left[R + \frac{\tau_3^2}{R} + \frac{\tau_2^2}{R} + \frac{\tau_2^2\tau_3^2}{R^3} + \frac{f\tau_2}{R} + \frac{f\tau_2\tau_3}{R^2} + \frac{4\tau_3}{3R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4\tau_2^2\tau_3}{3R^3} \right] + i \left[-f - \frac{f\tau_3^2}{R^2} - \frac{4}{3} - \frac{4\tau_2^2}{3R^2} \right] \right\} K^2 + \\ & + \left\{ \left[-R \left(1 + \frac{\tau_2^2}{R^2} + \frac{\tau_3^2}{R^2} + \frac{\tau_2^2\tau_3^2}{R^4} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

(III.4)

con $\tau_2 = c_0 t_2 / \Lambda = 2.6105732$ y $\tau_3 = c_0 t_3 / \Lambda = 1.6666658$.

En las figs. 8A y 8B se muestran los resultados experimentales y la predicción teórica (denotada en este caso como A23).

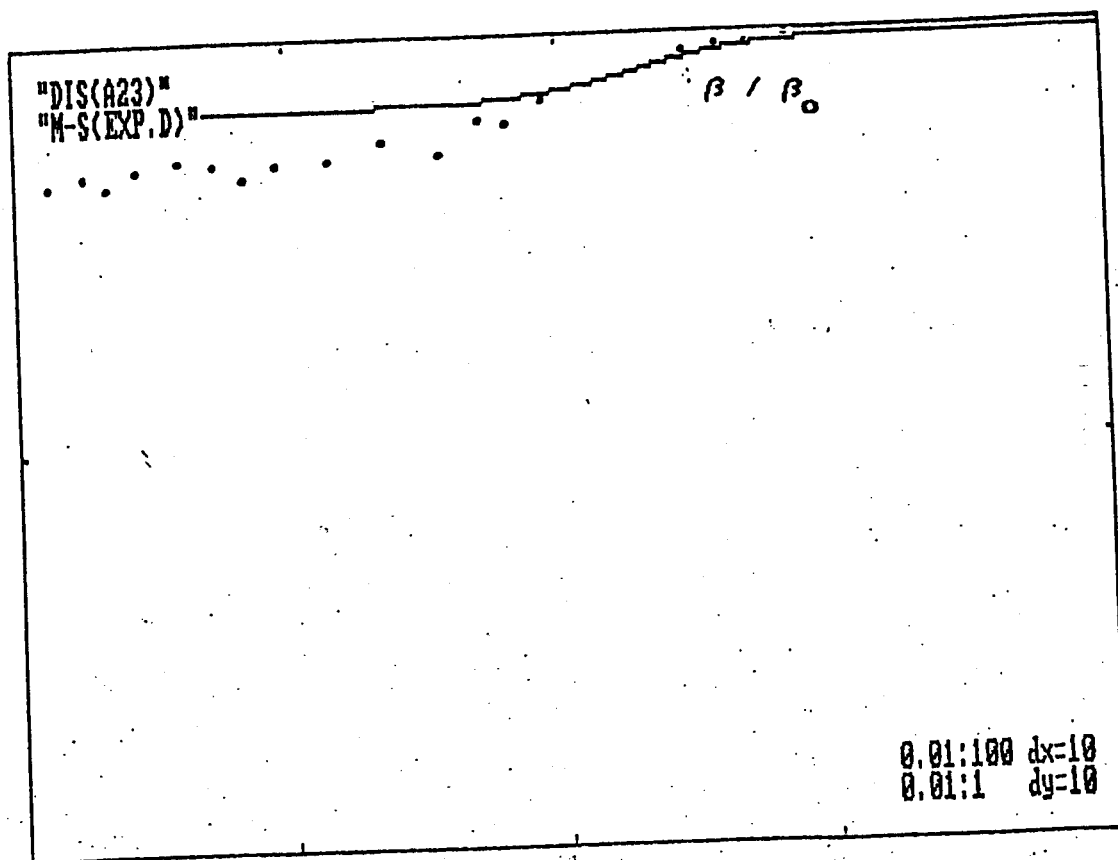


FIGURA 8A.

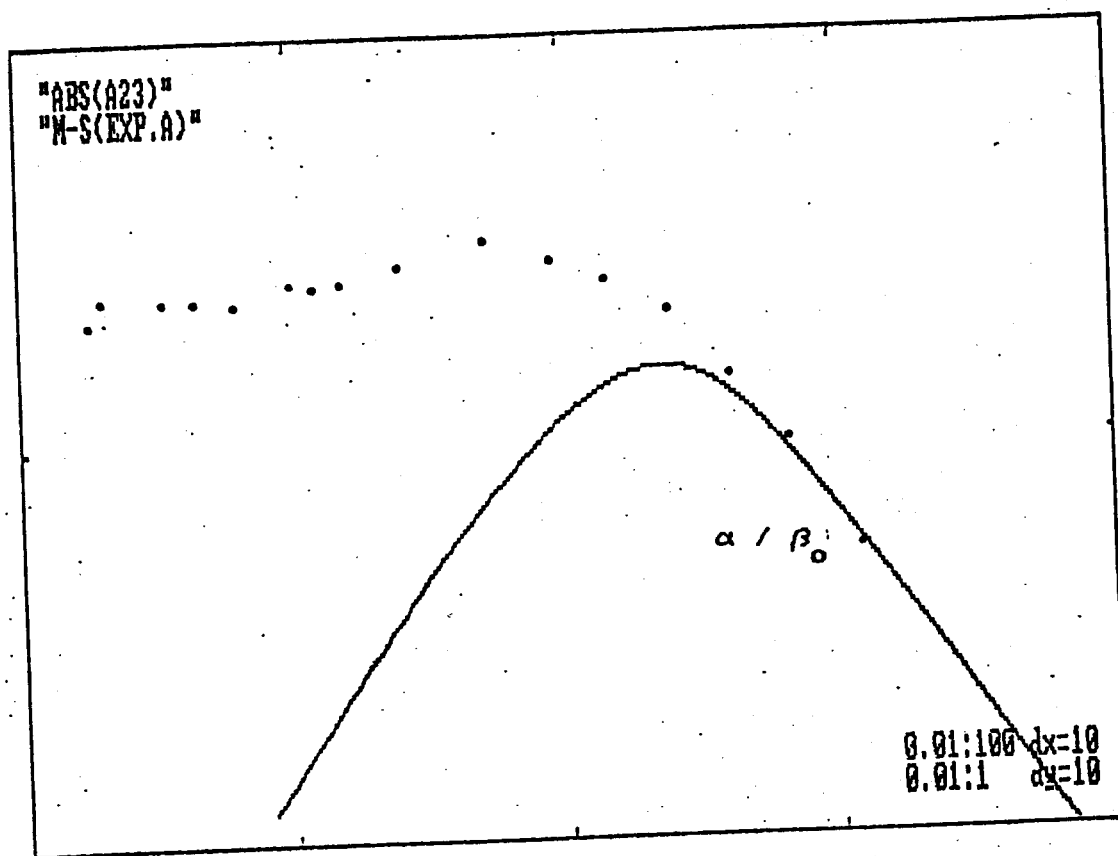


FIGURA 8B.

Como puede observarse, para la curva de dispersión (DISCA23) se presenta un buen acuerdo con los resultados experimentales, sin embargo en la correspondiente curva de absorción (ABSCA23) sólo hay acuerdo en la región clásica, i.e. para $r > 10$.

III) Para τ_i ($i=1,2,\dots,5$) diferentes, la solución de la (II.55) presenta dificultades algebraicas y numéricas considerables, por lo cual se seleccionaron únicamente los términos relevantes para altas frecuencias. Los valores de τ_i se calcularon en base a las integrales de colisión $\Omega^{(i)}$ reportadas por J. Kestin et al.⁽³⁸⁾, con la identificación presentada en el Apéndice I-B.

La relación de dispersión correspondiente es la siguiente:

$$\begin{aligned} & [C_1 \omega^7 + i C_5 \omega^6] k^4 + [D_1 \omega^9 + i D_6 \omega^8] k^2 \\ & + [E_1 \omega'' + i E_2 \omega^{10}] = 0 \end{aligned} \quad \text{(III.5)}$$

Los coeficientes que presentan una contribución mayor, para las condiciones mencionadas anteriormente, son $C_{24}, D_{10}, D_{22}, D_{26}$ y E_{12} (ver Apéndice II-C).

En términos de los τ_i y el parámetro R , la relación de dispersión anterior toma la forma,

$$\begin{aligned}
& \frac{f}{8} \left\{ \left[\frac{\tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2}{R^3} \right] - \frac{i}{R^6} \left[\tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 + \tau_1 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 + \tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 + \tau_1 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 + \tau_1 \tau_3^2 \tau_4 \tau_5^2 \right] \right\} K^4 + \left\{ - \frac{i}{R^3} \left[\tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 - \tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 f \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2}{3} \right] + \frac{i}{R^6} \left[(\tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4 \tau_5^2 + \tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2) + f (\tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_3^2 \tau_4 \tau_5^2) + \frac{4}{3} (2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5 + \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 + \tau_1 \tau_2 \tau_4^2 \tau_5^2) \right] \right\} K^2 + \left\{ \left[\frac{1}{R^3} (\tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{i}{R^6} \left[(\tau_1 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 + \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 \tau_5^2 + 2 \tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 \tau_5 \right. \right. \\
& \left. \left. + \tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4 \tau_5^2) \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

con $\gamma = 5 / 3$, $f = 2.50151274$, $\tau_1 = 1.7547708$, $\tau_2 = 2.4961985$,
 $\tau_3 = 2.5636005$, $\tau_4 = \tau_1$ y $\tau_5 = 8.7366948$

En las figs. 9A y 9B se muestran los resultados experimentales y la predicción teórica, denotada en este caso como A15.

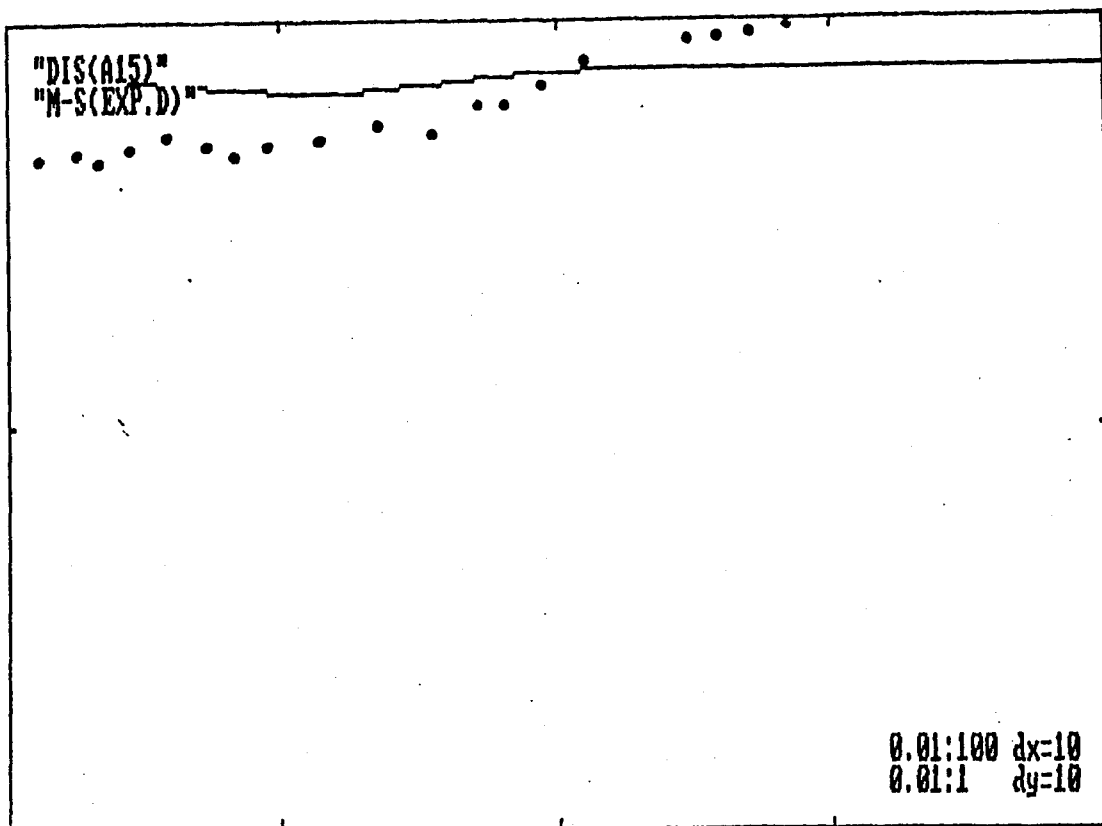


FIGURA 9A.

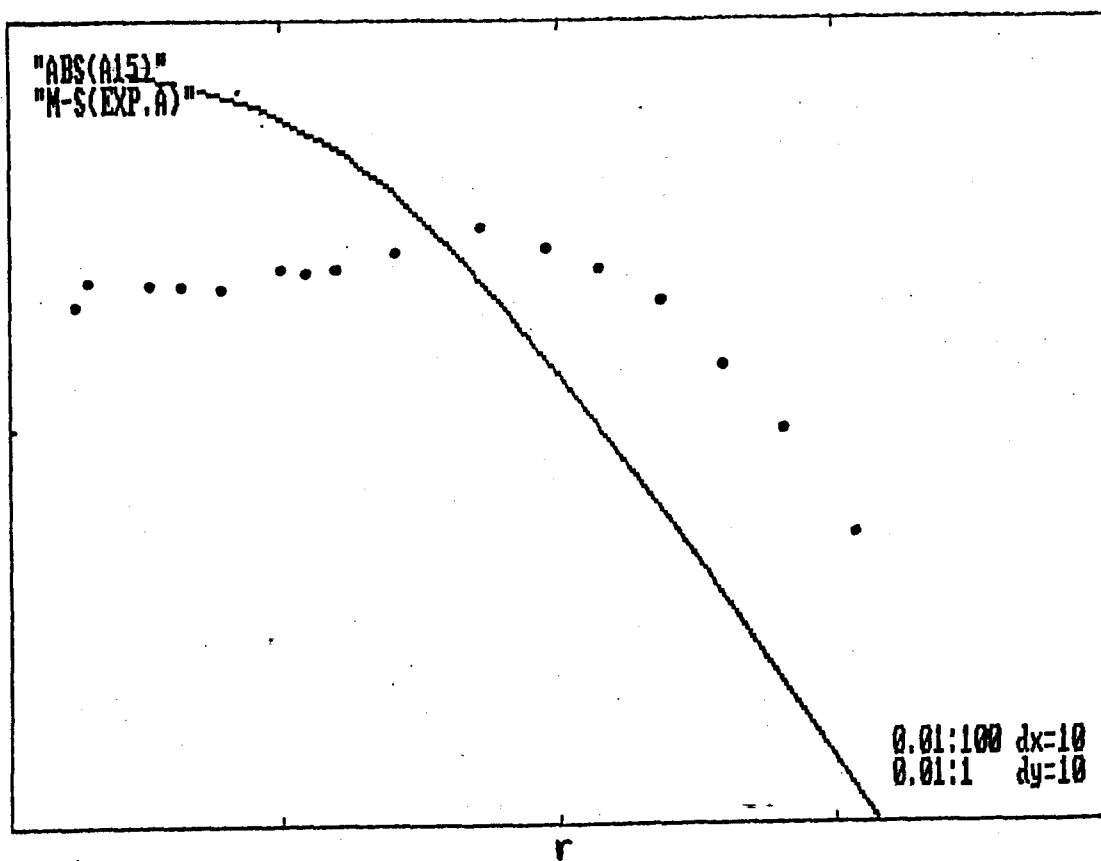


FIGURA 9B.

Como puede observarse en la curva de dispersión [DIS(A15)] se muestra la misma tendencia hacia un valor constante para r pequeña; contrario a lo observado en las figuras de los casos anteriores la curva de absorción presenta una tendencia significativa hacia un valor constante para estos valores de r . Es de esperarse que al considerar términos adicionales en la relación de dispersión, se mejore el comportamiento de la curva de absorción mostrada en la fig. 9B.

Finalmente, en el Apéndice III-B se presenta una tabla comparativa de las soluciones numéricas para las relaciones de dispersión consideradas en este capítulo.

CAPITULO IV

COEFICIENTES DE TRANSPORTE GENERALIZADOS

La conexión que se establece en la literatura^{(3),(5)} de los resultados de la T.I.E. con los de la Hidrodinámica Generalizada es a través del cálculo de la función de correlación temporal de las fluctuaciones de la velocidad transversal con ecuaciones de relajación del tipo (I.27)-(I.31), lográndose con esto expresiones para los coeficientes de transporte (λ y η) en el espacio de Fourier a frecuencia cero, idénticas en estructura a las obtenidas por simulación⁽²⁾ y a través de la Hidrodinámica Generalizada, introduciendo *ad hoc* funciones memoria exponenciales.

En nuestro caso la obtención de expresiones generalizadas para la conductividad térmica y la viscosidad cortante está basada en el hecho de que son suficientes las ecuaciones (II.20), (II.21), (II.23), (II.25)-(II.27), (II.32) y (II.37) para expresar la relación entre q y T , por un lado, y τ_{11} y u por el otro, que permiten encontrar $\lambda(k, \omega)$ y $\eta(k, \omega)$.

CONDUCTIVIDAD TERMICA GENERALIZADA

De la ecuación (II.23) despejamos p :

$$\tilde{p} = \frac{A}{B} \tilde{T} - \frac{k}{\beta \omega} \tilde{q} \quad \text{(IV.1)}$$

sustituyendo (IV.1) en (II.20) tenemos,

$$(D\omega - \frac{EA\omega}{B})\tilde{T} + \frac{Ek}{B}\tilde{q} + \rho_0 k \tilde{u} = 0$$

despejando $\tilde{u}$ de esta relación:

$$\tilde{u} = -\frac{E\tilde{q}}{\rho_0 B} - \frac{\omega}{\rho_0 k} (D - \frac{EA}{B})\tilde{T} \quad \text{(IV.2)}$$

sustituyendo (IV.1) y (IV.2) en (II.21) y despejando $\tilde{T}_{11}$:

$$\tilde{T}_{11} = \left[-\frac{A}{B} - \frac{\omega^2}{k^2} (D - \frac{EA}{B}) \right] \tilde{T} - \left[\frac{E\omega}{Bk} - \frac{k}{B\omega} \right] \tilde{q} \quad \text{(IV.3)}$$

por otra parte de (II.25) despejamos $\tilde{I}$:

$$\tilde{I} = \frac{i\epsilon_1 k \tilde{q}}{F_1} + i \frac{\epsilon_2 k \tilde{u}}{F_1} \quad \text{(IV.4)}$$

introduciendo (IV.2) en (IV.4) se obtiene,

$$\tilde{I} = \frac{ik}{F_1} (\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2 E}{\rho_0 B}) \tilde{q} - \frac{i\epsilon_2 \omega}{\rho_0 F_1} (D - \frac{EA}{B}) \tilde{T} \quad \text{(IV.5)}$$

ahora sustituyendo (IV.3) y (IV.5) en (II.37) y agrupando

$$\begin{aligned} F_5 \hat{\Theta}_{III} + \left[\epsilon_{30} - \frac{\epsilon_{32} k^2}{F_1} (\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2 E}{\rho_0 B}) - i\epsilon_{31} k \left(\frac{E\omega}{Bk} - \frac{k}{B\omega} \right) \right] \tilde{q} + \\ + \left\{ -i\epsilon_{31} k + \frac{\epsilon_{32} \epsilon_{32} k \omega}{\rho_0 F_1} (D - \frac{EA}{B}) - i\epsilon_{33} k \left[\frac{A}{B} + \omega^2 (D - \frac{EA}{B}) \right] \right\} \tilde{T} \\ + i\epsilon_{34} k \tilde{I}_{11} \end{aligned} \quad \text{(IV.6)}$$

por otra parte sustituyendo (IV.2) y (IV.3) en (II.27), agrupando y despejando $\tilde{P}_{111}$ tenemos,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11} = & \left\{ \frac{i F_3}{\epsilon_5 \eta k} \left[\frac{A}{B} + \frac{\omega^2}{k^2} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) \right] - \frac{4 \omega}{3 \epsilon_5 \rho_0 k} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) \right\} \tilde{T} \\ & + \left[\frac{i F_3}{\epsilon_5 \eta k} \left(\frac{\epsilon \omega}{\rho k} - \frac{k}{B \omega} \right) - \frac{4 \epsilon}{3 \epsilon_5 \rho_0 B} \right] \tilde{q} - \frac{i \epsilon_7}{\epsilon_5 k} \tilde{I}_{11} \end{aligned}$$

sustituyendo esta expresión en (IV.6) y despejando $\tilde{I}_{11}$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{11} = & \left\{ \frac{F_3 F_5}{(\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2) \eta} \left[\frac{A}{B} + \frac{\omega^2}{k^2} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) \right] + \frac{4 i \omega F_5}{3 \rho_0 (\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) \right. \\ & - \frac{\epsilon_5 \epsilon_{31} k^2}{(\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} - \frac{i \epsilon_2 \epsilon_5 \epsilon_{32} k^2 \omega}{\rho_0 F_1 (\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) - \frac{\epsilon_5 \epsilon_{33} k^2}{(\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left[\right. \\ & \left. \left. \frac{A}{B} + \frac{\omega^2}{k^2} \left(D - \frac{\epsilon A}{B} \right) \right] \right\} \tilde{T} + \left\{ \frac{F_3 F_5}{\eta (\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left(\frac{\epsilon \omega}{B k} - \frac{k}{B \omega} \right) + \right. \\ & + \frac{4 i \epsilon F_5 k}{3 \rho_0 B (\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} - \frac{i \epsilon_5 \epsilon_{30} k}{(\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} + \\ & \left. + \frac{i \epsilon_5 \epsilon_{32} k^3}{F_1 (\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2 \epsilon}{\rho_0 B} \right) - \frac{\epsilon_5 \epsilon_{33} k^2}{(\epsilon_4 \epsilon_5 - \epsilon_5 \epsilon_{34} k^2)} \left(\frac{\epsilon \omega}{B k} - \frac{k}{\omega} \right) \right\} \tilde{q} \end{aligned}$$

(IV.7)

introduciendo (IV.5) y (IV.7) en (II.26) y despejando $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} = - \frac{i \lambda h}{F_2} \frac{(1+N)}{(1+P)} \tilde{T} \quad \text{(IV.8)}$$

donde N y P están dados en el Apéndice IV-A.

Con (IV.8) tenemos que al suponer una ecuación de Fourier generalizada $\hat{q} = -i \tilde{\lambda}(k, \omega) \tilde{T}$ tenemos,

$$\tilde{\lambda}(k, \omega) = \frac{\lambda}{F_2} \frac{(1+N)}{(1+P)}$$

ó alternativamente

$$\tilde{\lambda}(k, \omega) = \tilde{\lambda}_1(k, \omega) + i \tilde{\lambda}_2(k, \omega) \quad \text{(IV.9)}$$

VISCOSIDAD CORTANTE GENERALIZADA

De la ecuación (II.21) despejamos p

$$\tilde{p} = \frac{\rho_0 \omega}{k} \tilde{u} - \tilde{\tau}_{11} \quad (\text{IV.10})$$

de (II.20) despejamos $\tilde{T}$:

$$\tilde{T} = \frac{E}{D} \tilde{p} - \frac{\rho_0 k}{D\omega} \tilde{u} \quad (\text{IV.11})$$

introduciendo (IV.10) en (IV.11) y agrupando

$$\tilde{T} = \frac{\rho_0}{D} \left[\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right] \tilde{u} - \frac{E}{D} \tilde{\tau}_{11} \quad (\text{IV.12})$$

por otra parte de (II.23) despejamos $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} = \frac{A\omega}{k} \tilde{T} - \frac{B\omega}{k} \tilde{p}$$

introduciendo en ésta relación, (IV.10) y (IV.12) obtenemos,

$$\tilde{q} = \frac{\rho_0 \omega}{k} \left[\frac{A}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{B\omega}{k} \right] \tilde{u} + \frac{\omega}{k} \left[B - \frac{AE}{D} \right] \tilde{\tau}_{11} \quad (\text{IV.13})$$

ahora, despejando $\tilde{I}_{11}$ de (II.32)

$$\tilde{I}_{11} = -\frac{E_0}{F_4} \tilde{\tau}_{11} + \frac{iG_7 k}{F_4} \tilde{q} + \frac{iE_8 k}{F_4} \tilde{\rho}_{111} \quad (\text{IV.14})$$

e introduciendo esta expresión en (II.37) y despejando $\tilde{P}_{111}$ de la ecuación resultante, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{111} = & \frac{i \epsilon_{31} F_4 k}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \tilde{T} - \frac{i \epsilon_{32} F_4 k}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \tilde{I} - \frac{(\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{34} k^2)}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \tilde{q} \\ & - \frac{(\epsilon_{33} F_4 - \epsilon_6 \epsilon_{34} k^2) i h}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \tilde{\gamma}_{11} \end{aligned} \quad (IV.15)$$

por otra parte, despejando $\tilde{I}$ de (II.25):

$$\tilde{I} = i \frac{\epsilon_1 k}{F_1} \tilde{q} + i \frac{\epsilon_2 k}{F_1} \tilde{u}$$

sustituyendo en (IV.13) y agrupando,

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \left\{ \epsilon_1 \rho_0 \omega \left[\frac{A}{D} \left(\frac{\epsilon \omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{B \omega}{k} \right] + \epsilon_2 k \right\} \frac{i \tilde{u}}{F_1} \\ & + \frac{i C_1 \omega}{F_1} \left(B - \frac{A \epsilon}{D} \right) \tilde{\gamma}_{11} \end{aligned} \quad (IV.16)$$

nuevamente, sustituyendo (IV.12), (IV.13) y (IV.16) en (IV.15) obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{111} = & \frac{1}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \left\{ - \frac{i \epsilon_{31} \epsilon F_4 k}{D} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_{32} F_4 \omega k}{F_1} \left(B - \frac{A \epsilon}{D} \right) \right. \\ & \left. - \frac{(\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{34} k^2)}{k} \omega \left(B - \frac{A \epsilon}{D} \right) - i (\epsilon_{33} F_4 - \epsilon_6 \epsilon_{34} k^2) h \right\} \tilde{\gamma}_{11} + \\ & + \frac{1}{(F_4 F_5 - \epsilon_8 \epsilon_{34} k^2)} \left\{ \frac{i \epsilon_{31} \rho_0 F_4 k}{D} \left(\frac{\epsilon \omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) + \frac{\epsilon_2 \epsilon_{32} F_4 k^2}{F_1} \right\} \tilde{u} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\epsilon_1 \epsilon_{32} F_4 \rho_0 \omega k}{F_1} \left[\frac{A}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) \right] - (\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{33} k^2) \frac{\rho_0 \omega}{k}$$

$$\left[\frac{A}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{B\omega}{k} \right] \} \tilde{u}$$

(IV.17)

introduciendo (IV.13) y (IV.17) en (IV.14) se obtiene,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{11} = & \left\{ -\frac{\epsilon_6}{F_4} + \frac{i \epsilon_7 \omega}{F_4} \left(B - \frac{EA}{D} \right) + \frac{i \epsilon_8 k}{F_4 (F_4 F_5 - \epsilon_3 \epsilon_{34} k^2)} \left[-\frac{i \epsilon_{31} E F_4 k}{D} + \right. \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 \epsilon_{32} F_4 \omega k}{F_1} \left(B - \frac{AE}{D} \right) - \frac{(\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{34} k^2) \omega}{k} \left(B - \frac{AE}{D} \right) \\ & \left. \left. - i (\epsilon_{33} F_4 - \epsilon_6 \epsilon_{34}) k \right] \right\} \tilde{I}_{11} + \left\{ \frac{i \epsilon_7 \rho_0 \omega}{F_4} \frac{A}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{i \epsilon_7 \rho_0 \omega^2 B}{F_4 k} \right. \\ & + \frac{i \epsilon_8 k}{F_4 (F_4 F_5 - \epsilon_3 \epsilon_{34} k^2)} \left[\frac{i \epsilon_{31} \rho_0 F_4 k}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) + \frac{\epsilon_2 \epsilon_{32} F_4 k^2}{F_1} + \right. \\ & + \frac{\epsilon_1 \epsilon_{32} F_4 \rho_0 A k}{D F_1} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{(\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{34} k^2) \rho_0 A \omega}{D k} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) \\ & \left. \left. + \frac{(\epsilon_{30} F_4 - \epsilon_7 \epsilon_{34} k^2) \rho_0 B \omega^2}{k^2} \right] \right\} \tilde{u} \end{aligned}$$

(IV.18)

finalmente, introduciendo (IV.17) y (IV.18) en (II.27), y agrupando,

$$\tilde{I}_{11} = -\frac{4}{3} \frac{i \eta k}{F_3} \frac{(1+Z)}{(1+W)} \tilde{u}$$

Si suponemos una ecuación del tipo Navier-Newton generalizada

$\tilde{\tau}_{11} = -4/3 i \tilde{\eta}(k, \omega) k \tilde{u}$ tenemos:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{\eta (1+Z)}{F_3 (1+W)}$$

ó alternativamente

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \tilde{\eta}_1(k, \omega) + i \tilde{\eta}_2(k, \omega) \quad (\text{IV.19})$$

donde Z y W están dados en el Apéndice IV-B.

Para poder identificar a $\lambda(k, \omega)$ y $\eta(k, \omega)$ de (IV.9) y (IV.19) con los coeficientes de transporte transformados se debe exigir que λ y η sean funciones reales, es fácil comprobar que éstas expresiones cumplen ésta condición.

Son de nuestro interés dos casos particulares reportados en la literatura^{(3),(5)}:

A).- Cuando solo se consideran las variables independientes $\tau_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ ⁽³⁾. Si nos interesan solo las componentes de éstas en la dirección de propagación de la onda de sonido, las únicas ecuaciones a considerar son la (II.27) y (II.37). De estas dos ecuaciones se obtiene directamente

$$\tilde{\tau}_{11} = -\frac{4}{3} i k \tilde{u} \frac{\eta}{\left(F_3 - \frac{\epsilon_s \epsilon_{33} \eta k^2}{F_5}\right)}$$

de donde, si suponemos una relación de Navier-Newton transformada y generalizada, podemos por identificación obtener la expresión

para la viscosidad cortante generalizada

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{\eta}{\left(F_3 - \frac{\epsilon_s \epsilon_{33} \eta k^2}{F_s} \right)}$$

que puede expresarse por (II.24) como:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{\eta t_3^{-1}}{-i\omega + t_3^{-1} - \frac{\epsilon_s \epsilon_{33} \eta t_3^{-1} t_s^{-1} k^2}{-i\omega + t_s^{-1}}}$$

que tiene la forma de los primeros términos en el desarrollo de una expansión en fracciones continuas de $\eta(k, \omega)^{(5)}$. Para establecer una comparación directa con el resultado mostrado en el trabajo de D. Jou et al.⁽²⁾, observamos de (IV.20) que $\eta(0,0) = \eta$ entonces podemos reescribir la última ecuación como:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \left[1 - \epsilon_s \epsilon_{33} \eta k^2 \right]^{-1} \tilde{\eta}(0,0) \quad (\text{IV.21})$$

donde el signo negativo dentro del parentesis proviene de la representación (II.2).

B).- Cuando se consideran las componentes de los flujos independientes q_α e $I_{\alpha\beta}$ en la dirección de propagación de la onda de sonido tenemos de las ecuaciones (II.26) y (II.32)

$$\tilde{q} = -i k \tilde{T} \frac{\lambda}{(F_2 - \epsilon_3 \epsilon_7 \lambda k^2 / F_4)}$$

donde, si suponemos una relación de Fourier transformada generalizada podemos identificar a la conductividad térmica generalizada como:

$$\tilde{\lambda}(k, \omega) = \frac{\lambda}{F_2 - \frac{\epsilon_3 \epsilon_7 \lambda k^2}{F_4}}$$

la cual podemos expresar, de manera análoga al caso anterior

$$\tilde{\lambda}(k, \omega) = \frac{\lambda t_2^{-1}}{-i\omega + t_2^{-1} - \frac{\epsilon_3 \epsilon_7 \lambda t_2^{-1} t_4^{-1} k^2}{-i\omega + t_4^{-1}}} \quad (\text{IV.22})$$

esta relación puede compararse directamente con la expresión reportada por C. Pérez-García y D. Jou⁽⁵⁾. En esta comparación al igual que en el caso anterior puede notarse una diferencia en los signos de las expresiones, que se debe a la forma de la transformación (II.2).

En general, por la forma de las ecuaciones (IV.9) y (IV.19), es de esperar que admitan una expansión en fracciones continuas en donde (IV.20) y (IV.22) solo sean casos particulares.

Para poder identificar a $\lambda(k, \omega)$ y $\eta(k, \omega)$ de (IV.9) y (IV.19) con los coeficientes de transporte transformados se debe exigir que λ y η sean funciones reales, es fácil comprobar que estas expresiones cumplen esta condición.

CONCLUSIONES

Se ha utilizado la Termodinámica Irreversible Extendida (T.I.E.) para determinar las ecuaciones de evolución de las variables no conservadas relevantes para la descripción de una perturbación sonora que está presente en un gas monoatómico diluido. El método de la T.I.E. consiste básicamente en suponer la existencia de la función η con dependencia en las variables conservadas y no conservadas. En este trabajo se amplía el espacio de variables no conservadas al considerar a τ , I , q_i , $I_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ como cantidades independientes. Al calcular la variación temporal de la función η quedan definidos coeficientes de distinto orden tensorial los cuales: (i) se construyen como los tensores más generales en el espacio de variables independientes a primer orden en las variables no conservadas y (ii) se supone que admiten un desarrollo en serie alrededor de equilibrio local. Con lo anterior la variación en el tiempo de la función η queda expresada en términos de las variables, sus derivadas temporales y de los coeficientes que dependen exclusivamente de la densidad de energía local y el volumen específico. Utilizando las ecuaciones de balance de masa y energía podemos eliminar la dependencia en las derivadas temporales de la densidad de energía y el volumen específico.

Para determinar las ecuaciones de evolución de las variables no conservadas se introduce como condición de cerradura la hipótesis de que la función η satisface una ecuación de balance. Si en esta ecuación de balance construimos el flujo de

entropía como el vector mas general en el espacio de variables a segundo orden en los flujos, tenemos dos formas independientes de calcular la producción de entropía: (i) utilizando la expresión de la derivada temporal de la función η y el flujo de entropía, y (ii) construyéndola como el escalar mas general en el espacio de variables a primer orden en los flujos. Al comparar estas dos expresiones para la producción de entropía, se encuentran ecuaciones acopladas en derivadas temporales de flujos del mismo orden tensorial, que pueden desacoplarse para obtener finalmente las ecuaciones de evolución para cada una de las variables no conservadas. La estructura de este conjunto de ecuaciones puede compararse con las obtenidas mediante la solución de la ecuación de Boltzmann, para un gas monoatómico diluido, por el método de Grad al considerar 26 momentos, cuando (i) se restringen algunos coeficientes fenomenológicos, (ii) se exigen propiedades de simetría al tensor de tercer orden $P_{\alpha\beta\gamma}$ y (iii) al considerar un estado cerca de equilibrio despreciando términos de segundo orden en los flujos. Lo anterior permite interpretar a los tensores $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ como los flujos de q_α y $r_{\alpha\beta}$, y calcular todos los coeficientes fenomenológicos que aparecen en la teoría. Este hecho nos permite asegurar que la fundamentación cinética de la T.I.E. se da al tratar la ecuación de Boltzmann con el método de momentos de Grad.

Al considerar la acción de una perturbación acústica en nuestro sistema físico, las desviaciones de todas las variables independientes las podemos representar como una onda plana

unidimensional con vector de propagación k y frecuencia ω , es decir, en la aproximación acústica el conjunto de ecuaciones diferenciales para las variables conservadas y no-conservadas puede ser reducido en un conjunto de ecuaciones algebraicas para las variables transformadas cuya solución no trivial esta dada cuando el determinante de los coeficientes se anula. Un primer resultado se muestra con la aparición de modos de propagación transversales y longitudinales. Los modos de propagación transversales aparecen como consecuencia de la introducción de las variables $r_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta\gamma}$ y los longitudinales corresponden a la propagación de sonido.

Se muestra en particular que, para altas frecuencias, los modos transversales se propagan con una velocidad de fase y tienen asociado un coeficiente de absorción que no dependen de la frecuencia. Para los modos longitudinales la relación de dispersión mas general es una ecuación algebraica de octavo orden en el vector de onda con coeficientes complejos, cuya solución general presenta dificultades numéricas, por lo que solo se analizan ciertos casos particulares (ver relaciones (II.57), (II.61), (III.4) y (III.5)). Cuando se toman los términos mas relevantes en frecuencia para las partes real e imaginaria de cada coeficiente en las relaciones de dispersión señaladas, se muestra que la velocidad de fase permanece finita. Se muestra graficamente para ciertos casos particulares la tendencia de la velocidad de fase a adquirir un valor constante para altas frecuencias, en contraposición a la predicciones de las aproximaciones de Burnett

y SuperBurnett.

En base al conjunto de ecuaciones transformadas que satisfacen las variables no conservadas, es posible identificar coeficientes de transporte generalizados que dependen del vector de onda y la frecuencia. Al considerar exclusivamente como variables no conservadas al tensor de presión y su flujo se encuentra la expresión para la viscosidad cortante que coincide con la expresión con que se ajustan los resultados de simulación de dinámica molecular. Por otra parte al considerar al flujo de calor y su flujo, se reproducen los resultados para la conductividad térmica de Pérez García y D. Jou⁽⁵⁾.

De lo anterior podemos asegurar que la T.I.E. es el marco termodinámico adecuado para la descripción de los procesos que ocurren en un sistema sujeto a pequeñas perturbaciones alrededor de equilibrio. Lo anterior se refleja en el hecho de que ya no se presentan las dificultades de la T.I.L. mencionadas en la introducción de este trabajo, es decir la T.I.E. predice una velocidad de propagación finita para las distintas perturbaciones a las que puede estar sujeta un sistema y por otra parte la región de validez va mas allá que el de la Hidrodinámica clásica, reflejándose esto último en que los coeficientes de transporte η y λ tienen una dependencia en k y ω .

Finalmente el conjunto de ecuaciones derivadas en el capítulo I pueden ser utilizadas para estudiar dispersión y

absorción en líquidos, gases poliatómicos y gases densos; en estos casos los coeficientes fenomenológicos tendrían que obtenerse de los resultados experimentales o de alguna teoría microscópica.

APENDICE I-A

$$\beta_1 = \alpha^{(10)} - \frac{\alpha^{(21)} \alpha^{(11)}}{\alpha^{(20)}}, \beta_{10} = \mu^{(01)} - \frac{\alpha^{(21)} \mu^{(11)}}{\alpha^{(20)}}, \beta_{11} = \mu^{(02)} - \frac{\alpha^{(21)} \mu^{(10)}}{\alpha^{(20)}}$$

$$\beta_{12} = K^{(01)} - \frac{K^{(02)} \alpha^{(21)}}{\alpha^{(20)}}, \beta_{13} = K^{(11)} - \frac{K^{(12)} \alpha^{(21)}}{\alpha^{(20)}}, \beta_{14} = K^{(21)} - \frac{K^{(22)} \alpha^{(21)}}{\alpha^{(20)}}$$

$$\beta_{15} = K^{(31)} - \frac{K^{(32)} \alpha^{(21)}}{\alpha^{(20)}}, \beta_2 = \alpha^{(20)}, \beta_{20} = \mu^{(10)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{11}}{\beta_1}$$

$$\beta_{21} = \mu^{(11)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{10}}{\beta_1}, \beta_{22} = K^{(02)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{12}}{\beta_1}, \beta_{23} = K^{(12)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{13}}{\beta_1}$$

$$\beta_{24} = K^{(22)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{14}}{\beta_1}, \beta_{25} = K^{(32)} - \frac{\alpha^{(11)} \beta_{15}}{\beta_1}, \beta_{26} = \frac{\alpha^{(11)}}{\beta_1}$$

$$\beta_4 = \alpha^{(40)} - \frac{\alpha^{(51)} \alpha^{(41)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{40} = \mu^{(30)} - \frac{\alpha^{(51)} \mu^{(41)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{41} = \mu^{(31)} - \frac{\alpha^{(51)} \mu^{(40)}}{\alpha^{(50)}}$$

$$\beta_{42} = K^{(5)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(4)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{43} = K^{(60)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(60)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{44} = K^{(61)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(61)}}{\alpha^{(50)}}$$

$$\beta_{45} = K^{(62)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(62)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{46} = K^{(80)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(83)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_{47} = K^{(81)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(84)}}{\alpha^{(50)}}$$

$$\beta_{48} = K^{(82)} - \frac{\alpha^{(51)} K^{(85)}}{\alpha^{(50)}}, \beta_5 = \alpha^{(50)}, \beta_{50} = \mu^{(40)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{41}}{\beta_4}$$

$$\beta_{51} = \mu^{(41)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{40}}{\beta_4}, \beta_{52} = K^{(4)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{42}}{\beta_4}, \beta_{53} = K^{(60)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{43}}{\beta_4}$$

$$\beta_{54} = K^{(81)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{44}}{\beta_4}, \beta_{55} = K^{(82)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{45}}{\beta_4}, \beta_{56} = K^{(83)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{46}}{\beta_4}$$

$$\beta_{57} = K^{(84)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{47}}{\beta_4}, \beta_{58} = K^{(85)} - \frac{\alpha^{(41)} \beta_{48}}{\beta_4}, \beta_{59} = \frac{\alpha^{(41)}}{\beta_4}$$

$$\beta_{61} = \mu^{(51)} - \frac{\alpha^{(32)} \mu^{(60)}}{\alpha^{(30)}}, \beta_{62} = \mu^{(52)} - \frac{\alpha^{(33)} \alpha^{(20)}}{\alpha^{(30)}}, \beta_{63} = \mu^{(53)} - \frac{\alpha^{(31)} \mu^{(60)}}{\alpha^{(30)}}$$

$$\beta_{64} = \frac{\alpha^{(31)}}{\alpha^{(30)}}, \beta_{65} = \frac{\alpha^{(32)}}{\alpha^{(30)}}, \beta_{66} = \frac{\alpha^{(33)}}{\alpha^{(30)}}, \beta_{67} = \frac{K^{(01)} \alpha^{(31)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(11)}$$

$$\beta_{68} = \frac{K^{(01)} \alpha^{(32)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(21)}, \beta_{69} = \frac{K^{(01)} \alpha^{(33)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(31)}, \theta_{61} = \frac{K^{(02)} \alpha^{(31)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(12)}$$

$$\theta_{62} = \frac{K^{(02)} \alpha^{(32)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(22)}, \theta_{63} = \frac{K^{(02)} \alpha^{(33)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(32)}, \theta_{64} = \frac{K^{(51)} \alpha^{(31)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(60)}$$

$$\theta_{65} = \frac{K^{(52)} \alpha^{(32)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(61)}, \theta_{66} = \frac{K^{(52)} \alpha^{(33)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(62)}, \theta_{67} = \frac{K^{(41)} \alpha^{(31)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(70)}$$

$$\theta_{68} = \frac{K^{(42)} \alpha^{(32)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(71)}, \theta_{69} = \frac{K^{(42)} \alpha^{(33)}}{\alpha^{(30)}} - K^{(72)},$$

$$\beta_3 = \alpha^{(30)} - \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [\alpha^{(31)} + 3\alpha^{(32)} + \alpha^{(33)}] - \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [\alpha^{(31)} + \alpha^{(32)} + 3\alpha^{(33)}] \\ - \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [3\alpha^{(31)} + \alpha^{(32)} + \alpha^{(33)}]$$

$$\beta_{30} = \mu^{(20)} - \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [3\mu^{(51)} + \mu^{(52)} + \mu^{(53)}] - \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [\mu^{(51)} + 3\mu^{(52)} + \mu^{(53)}] \\ - \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [\mu^{(51)} + \mu^{(52)} + 3\mu^{(53)}]$$

$$\beta_{31} = \mu^{(21)} - \frac{\alpha^{(63)} \mu^{(50)}}{\alpha^{(60)}}, \beta_{32} = \mu^{(22)} - \frac{\alpha^{(61)} \mu^{(50)}}{\alpha^{(60)}}, \beta_{33} = \mu^{(23)} - \frac{\alpha^{(62)} \mu^{(50)}}{\alpha^{(60)}}$$

$$\beta_{34} = \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(11)} + 3K^{(21)} + K^{(31)}] + \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(11)} + K^{(21)} + 3K^{(31)}] + \\ + \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [3K^{(11)} + K^{(21)} + K^{(31)}] - K^{(01)}$$

$$\beta_{35} = \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(12)} + 3K^{(22)} + K^{(32)}] + \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(12)} + K^{(22)} + 3K^{(32)}] \\ + \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [3K^{(12)} + K^{(22)} + K^{(32)}] - K^{(02)}$$

$$\beta_{36} = \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(60)} + 3K^{(61)} + K^{(62)} + K^{(80)} + K^{(81)}] +$$

$$+ \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(60)} + K^{(61)} + 3K^{(62)} + K^{(80)} + K^{(82)}] +$$

$$+ \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [3K^{(60)} + K^{(61)} + K^{(62)} + K^{(81)} + K^{(84)}] - K^{(5)}$$

$$\beta_{37} = \frac{\alpha^{(61)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(70)} + 3K^{(71)} + K^{(72)} + K^{(83)} + K^{(84)}] +$$

$$+ \frac{\alpha^{(62)}}{\alpha^{(60)}} [K^{(70)} + K^{(71)} + 3K^{(72)} + K^{(83)} + K^{(85)}] +$$

$$+ \frac{\alpha^{(63)}}{\alpha^{(60)}} [3K^{(70)} + K^{(71)} + K^{(72)} + K^{(84)} + K^{(85)}] - K^{(4)}$$

APENDICE I-B

$$\frac{T_0 \beta_{20}}{\beta_2} = \frac{\mu_7 m}{p_0 k T_0}, \quad -\frac{T_0 \beta_{21}}{\beta_2} = \frac{2 k T_0}{m}, \quad -\frac{\beta_{26}}{\beta_2} = \frac{5 k T_0 p_0}{m}$$

$$\frac{T_0 \beta_{30}}{\beta_3} = \frac{\mu_1}{p_0} \sqrt{\frac{m}{k T_0}}, \quad \frac{T_0 \beta_{35}}{\beta_3} = 1, \quad \frac{1}{T_0 \beta_3} = -\frac{5}{2} \frac{p_0 k}{m}$$

$$\frac{T_0 \beta_{40}}{\beta_4} = \frac{\mu_2}{p_0}, \quad \frac{T_0 \beta_{41}}{\beta_4} = \frac{m \mu_3}{p_0 k T_0}, \quad + \frac{T_0 \beta_{49}}{\beta_4} = 1, \quad \frac{1}{\beta_4} = -2 p_0$$

$$\frac{T_0 \beta_{50}}{\beta_5} = \frac{\mu_8 m}{p_0 k T_0}, \quad \frac{T_0 \beta_{51}}{\beta_5} = \frac{\mu_6}{p_0}, \quad \frac{T_0 \beta_{52}}{\beta_5} = \frac{2 k T_0}{m}, \quad \frac{T_0 \beta_{510}}{\beta_5} = \frac{2 k T_0}{m}$$

$$\frac{T_0 \beta_{60}}{\beta_6} = \frac{\mu_4}{p_0} \sqrt{\frac{m}{k T_0}}, \quad \frac{T_0 \beta_{61}}{\beta_6} = \frac{\mu_5}{p_0} \sqrt{\frac{m}{k T_0}}, \quad \frac{T_0 \beta_{62}}{\beta_6} = \frac{\mu_5}{p_0} \sqrt{\frac{m}{k T_0}}$$

$$\frac{T_0 \beta_{63}}{\beta_6} = -\frac{2}{3} \frac{\mu_5}{p_0} \sqrt{\frac{m}{k T_0}}, \quad -\frac{\beta_{64}}{T_0 \beta_6} = \frac{2}{3} \frac{p_0 k}{m}$$

$$-\frac{\beta_{65}}{T_0 \beta_6} = -\frac{\beta_{66}}{T_0 \beta_6} = -\frac{p_0 k}{m}, \quad \frac{T_0 \theta_{61}}{\beta_6} = \frac{4}{45}$$

$$\frac{T_0 \theta_{62}}{\beta_6} = \frac{T_0 \beta_{63}}{\beta_6} = -\frac{2}{15}, \quad \frac{T_0 \theta_{64}}{\beta_6} = \frac{T_0 \theta_{65}}{\beta_6} = \frac{T_0 \theta_{66}}{\beta_6} = \frac{2 k T_0}{7 m}$$

$$\frac{T_0 \theta_{67}}{\beta_6} = \frac{8}{21}, \quad \frac{T_0 \theta_{68}}{\beta_6} = \frac{T_0 \theta_{69}}{\beta_6} = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{T_0 K^{(80)}}{\beta_6} = \frac{T_0 K^{(81)}}{\beta_6} = \frac{T_0 K^{(82)}}{\beta_6} = -\frac{5}{7} \frac{k T_0}{m}$$

$$\frac{T_0 K^{(83)}}{\beta_6} = \frac{T_0 K^{(84)}}{\beta_6} = \frac{T_0 K^{(85)}}{\beta_6} = -\frac{2}{7}$$

Con :

$$\mu_1 = -\frac{16}{15} n p_0 \sqrt{\frac{kT_0}{m}} \Omega^{(2,2)}$$

$$\mu_2 = -\frac{8}{45} n p_0 \left[\frac{19}{2} \Omega^{(2,2)} - \Omega^{(2,3)} \right]$$

$$\mu_3 = -\frac{8}{45} n p_0 \left[\Omega^{(2,3)} - \frac{7}{2} \Omega^{(2,2)} \right]$$

$$\mu_4 = \mu_5 = -\frac{32}{105} n p_0 \sqrt{\frac{kT_0}{m}} \Omega^{(2,2)}$$

$$\mu_6 = -\frac{4}{45} \frac{p_0^2}{m} \left[11 \Omega^{(2,3)} - \frac{325}{12} \Omega^{(2,2)} - \Omega^{(2,4)} \right]$$

$$\mu_7 = \mu_8 = -\frac{4}{45} \frac{p_0^2}{m} \left[\frac{217}{12} \Omega^{(2,2)} - 5 \Omega^{(2,3)} + \Omega^{(2,4)} \right]$$

$$y \quad \eta = \frac{p_0}{m}$$

APENDICE I-C

$$\epsilon_1 = \frac{\beta_{22}}{\beta_{20}}, \epsilon_2 = \frac{\beta_{26}}{T_0 \beta_{20}}, \epsilon_3 = T_0^2 \beta_{35}, \epsilon_4 = 2 T_0 \beta_{41}$$

$$\epsilon_5 = 2 T_0 \beta_{49}, \epsilon_6 = \frac{\beta_{51}}{\beta_{50}}, \epsilon_7 = \frac{\beta_{52}}{\beta_{50}}, \epsilon_8 = \frac{\beta_{510}}{\beta_{50}}, \epsilon_9 = \frac{\beta_{61}}{\beta_{60}}$$

$$\epsilon_{10} = \frac{\beta_{62}}{\beta_{60}}, \epsilon_{11} = \frac{\beta_{63}}{\beta_{60}}, \epsilon_{12} = \frac{\beta_{64}}{T_0^2 \beta_{60}}, \epsilon_{13} = \frac{\beta_{65}}{T_0^2 \beta_{60}}$$

$$\epsilon_{14} = \frac{\beta_{66}}{T_0^2 \beta_{60}}, \epsilon_{15} = \frac{\theta_{61}}{\beta_{60}}, \epsilon_{16} = \frac{\theta_{62}}{\beta_{60}}, \epsilon_{17} = \frac{\theta_{63}}{\beta_{60}}$$

$$\epsilon_{18} = \frac{\theta_{64}}{\beta_{60}}, \epsilon_{19} = \frac{\theta_{65}}{\beta_{60}}, \epsilon_{20} = \frac{\theta_{66}}{\beta_{60}}, \epsilon_{21} = \frac{\theta_{67}}{\beta_{60}}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\theta_{68}}{\beta_{60}}, \epsilon_{23} = \frac{\theta_{69}}{\beta_{60}}, \epsilon_{24} = \frac{K^{(80)}}{\beta_{60}}, \epsilon_{25} = \frac{K^{(81)}}{\beta_{60}}$$

$$\epsilon_{26} = \frac{K^{(82)}}{\beta_{60}}, \epsilon_{27} = \frac{K^{(83)}}{\beta_{60}}, \epsilon_{28} = \frac{K^{(84)}}{\beta_{60}}, \epsilon_{29} = \frac{K^{(85)}}{\beta_{60}}$$

APENDICE II-A

Tomando en cuenta que tenemos $\mu_7 = \mu_8$

$$\epsilon_1 = - \frac{2 P_0 k^2 T_0^2}{m^2 \mu_7} = - \frac{2 P_0 k^2 T_0^2}{m^2 \mu_8}$$

$$\epsilon_2 = \frac{5 P_0}{2} \epsilon_1, \quad \epsilon_3 = - \frac{2m}{5 P_0 k}, \quad \epsilon_4 = - \frac{m \mu_3}{P_0^2 k T_0}$$

$$\epsilon_5 = \frac{5k}{2m} \epsilon_3, \quad \epsilon_6 = \frac{k T_0}{m} \frac{\mu_6}{\mu_8}, \quad \epsilon_7 = - \epsilon_1$$

$$\epsilon_8 = - \epsilon_1, \quad \epsilon_9 = \frac{\mu_5}{\mu_4}, \quad \epsilon_{10} = \epsilon_9, \quad \epsilon_{11} = - \frac{2}{3} \epsilon_7$$

$$\epsilon_{12} = - \frac{2 P_0^2 k}{3m} \left(\frac{k T_0}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\mu_4}, \quad \epsilon_{13} = - \frac{3}{2} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{14} = - \frac{3}{2} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{15} = - \frac{2m}{15 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{16} = \frac{m}{5 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{17} = \frac{m}{5 P_0 k} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{18} = - \frac{3}{7} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{19} = - \frac{3}{7} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{20} = - \frac{3}{7} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{21} = - \frac{4m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{22} = \frac{3m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{23} = \frac{3m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{24} = \frac{15}{14} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{25} = \frac{15}{14} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{26} = \frac{15}{14} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{27} = \frac{3m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{28} = \frac{3m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{29} = \frac{3m}{7 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{30} = \frac{4}{3} \epsilon_9$$

$$\epsilon_{31} = - 2 \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{32} = \frac{28m}{15 P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{33} = \frac{27}{14} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{34} = \frac{11}{7} \frac{m}{P_0 k} \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{35} = \frac{12}{7} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{36} = \frac{9}{7} \frac{m}{P_0 k} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{37} = - \frac{3}{2} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{38} = 0$$

$$\epsilon_{39} = - \frac{9}{7} \frac{T_0}{P_0} \epsilon_{12}, \quad \epsilon_{40} = \frac{2}{7} \frac{m}{P_0 k} \epsilon_{12}.$$

APENDICE II-B

$$a_1 = \epsilon_4 \epsilon_8 \epsilon_{35} \eta + \epsilon_5 \epsilon_6 \epsilon_{36} \eta - \epsilon_8 \epsilon_{36} - \epsilon_5 \epsilon_{35} \eta$$

$$b_1 = \epsilon_8 \epsilon_{36} t_3 + \epsilon_5 \epsilon_{35} \eta t_4$$

$$c_1 = t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5$$

$$d_1 = \epsilon_4 \epsilon_6 \eta - 1$$

$$f_1 = t_3 t_4 t_5$$

$$g_1 = t_4 + t_3 + t_5 - \epsilon_4 \epsilon_6 \eta t_5$$

$$a_2 = \epsilon_4 \epsilon_8 \epsilon_{34} \eta + \epsilon_5 \epsilon_6 \epsilon_{27} \eta - \epsilon_8 \epsilon_{27} - \epsilon_5 \epsilon_{34} \eta$$

$$b_2 = \epsilon_8 \epsilon_{27} t_3 + \epsilon_5 \epsilon_{34} \eta t_4$$

APENDICE II-C

$$A_1 = -t_3^2 A_{11} - t_1 t_3 A_{12} - t_1 t_4 A_{13} - t_3 t_4 A_{14} + t_3 A_{21} + t_4 A_{22} - t_1 t_3^2 A_{23} \\ - t_1 t_4^2 A_{25} - t_1 t_3 t_4 A_{26} .$$

$$A_2 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} + A_{16} + A_{17} + A_{18} + 2 t_3 A_{24} + t_1 A_{24} \\ + 2 t_4 A_{25} + t_1 A_{25} + t_4 A_{26} + t_3 A_{26} + t_1 A_{26} + t_3 A_{27} + t_1 A_{27} \\ + t_4 A_{28} + t_1 A_{28} + t_1 A_{29} .$$

$$A_3 = -2 t_3 A_{11} - t_3 A_{12} - t_1 A_{12} - t_4 A_{13} - t_1 A_{13} - t_4 A_{14} - t_3 A_{14} - t_1 A_{15} \\ - t_3 A_{16} - t_4 A_{17} + A_{21} + A_{22} + A_{23} - t_3^2 A_{24} - 2 t_1 t_3 A_{24} - t_4^2 A_{25} \\ - 2 t_1 t_4 A_{25} - t_3 t_4 A_{26} - t_1 t_4 A_{26} - t_1 t_3 A_{26} - t_4 t_3 A_{27} - t_1 t_4 A_{28}$$

$$A_4 = A_{24} + A_{25} + A_{26} + A_{27} + A_{28} + A_{29}$$

$$B_1 = -t_4^2 B_{11} - t_3^2 B_{12} - t_3 t_4 B_{13} - t_1 t_4 B_{14} - t_1 t_3 B_{15} + t_3 t_4^2 t_5 B_{11}' + t_1 t_3 t_4^2 B_{12}' + \\ + t_1 t_4^2 t_5 B_{13}' + t_3^2 t_4 t_5 B_{14}' + t_1 t_3 t_4^2 B_{15}' + t_1 t_3^2 t_5 B_{16}' + t_1 t_3 t_4 t_5 B_{17}' + \\ + t_1 t_3 t_4 t_5 B_{18}' - t_3 t_4 t_5 B_{27}' - t_3 t_3 t_4 B_{28}' - t_1 t_3 t_4 B_{29}' - t_1 t_3 t_3 B_{27}' \\ - t_1 t_3 t_4 B_{22}' - t_1 t_3 t_5 B_{23}' - t_1 t_4 t_5 B_{24}' - t_4^2 t_5 B_{25}' - t_3 t_4^2 B_{26}' - t_4 t_3^2 B_{27}' \\ - t_1 t_4^2 B_{28}' + t_1 t_3^2 t_4 t_5 B_{26}'' + t_1 t_3 t_4^2 t_5 B_{27}'' .$$

$$B_2 = B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{14} + B_{15} + B_{16} + B_{17} + B_{18} + B_{19} - t_4^2 B_{11}' - 2 t_4 t_5 B_{11}' - 2 t_3 t_4 B_{11}' \\ - t_3 t_5 B_{11}' - B_{12}' (t_4^2 + 2 t_3 t_4 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_3) - B_{13}' (t_4^2 + 2 t_4 t_5 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_3) \\ - B_{14}' (t_4 t_5 + 2 t_3 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_3^2) - B_{15}' (t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_2) \\ - B_{16}' (t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5) - B_{17}' (t_3 t_4 + t_3 t_4 + t_3 t_3 + t_1 t_4 + t_1 t_3 \\ + t_1 t_2) - B_{18}' (t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_5) - B_{19}' (t_3^2 + 2 t_1 t_3) \\ - B_{11}'' (t_4^2 + 2 t_1 t_4) - B_{12}'' (t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_3 t_4) - B_{13}'' (t_3 t_5 + t_4 t_5 + t_4 t_3) \\ - B_{14}'' (t_4 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_4) - B_{15}'' (t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2) - B_{16}'' (t_2 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_2) \\ - B_{17}'' (t_3 t_4 + t_4 t_4 + t_1 t_3) - B_{18}'' (t_3 t_5) - B_{19}'' (t_4 t_5) - B_{11}''' (t_4 t_5) - B_{12}''' (t_1 t_2) \\ - B_{13}''' (t_1 t_3) - B_{14}''' (t_1 t_4) + B_{21} (2 t_4) + B_{22} (t_5) + B_{23} (t_4) + B_{24} (t_3) + \\ + B_{25} (t_1) + B_{27} (t_5 + t_4 + t_3) + B_{28} (t_4 + t_3 + t_2) + B_{29} (t_4 + t_3 + t_1) + \\ + B_{21}' (t_3 + t_2 + t_1) + B_{22}' (t_4 + t_2 + t_1) + B_{23}' (t_5 + t_3 + t_1) + B_{24}' (t_5 + t_4 + t_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + B'_{25}(t_5 + 2t_4) + B'_{26}(t_2 + 2t_4) + B'_{27}(t_1 + 2t_3) + B'_{28}(t_1 + 2t_4) + \\
& + B'_{29}(t_4 + t_3) + B''_{21}(t_4 + t_2) + B''_{22}(t_3 + t_1) + B''_{23}(t_4 + t_1) + B''_{24}(t_2 + t_1) \\
& + B''_{25}(t_5 + t_1) - B''_{26}(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_5 + t_3^2 t_4 + 2t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 \\
& + t_1 t_4 t_5) - B''_{27}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 \\
& + t_1 t_3 t_5) - B''_{28}(t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) - B''_{29}(t_1 t_3 t_5) \\
& - B'''_{21}(t_1 t_4 t_5) .
\end{aligned}$$

$$B_3 = -B'''_{17}(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2) - B'''_{18}(t_2 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_2) - B'''_{19}(t_1 t_2)$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & B'_{11} + B'_{12} + B'_{13} + B'_{14} + B'_{15} + B'_{16} + B'_{17} + B'_{18} + B'_{19} + B''_{11} + B''_{12} + B''_{13} + B''_{14} \\
& + B''_{15} + B''_{16} + B''_{17} + B''_{18} + B''_{19} + B'''_{11} + B'''_{12} + B'''_{13} + B'''_{14} + B'''_{15} + B'''_{16} + \\
& + B'''_{17} + B'''_{18} + B'''_{19} + B''_{26}(2t_3 + t_5 + t_1 + t_4) + B''_{27}(2t_4 + t_5 + t_3 + t_1) + B''_{28}(t_4 + t_3 + t_5 \\
& + t_1) + B''_{29}(t_5 + t_3 + t_1) + B'''_{21}(t_5 + t_4 + t_1) + B'''_{22}(t_5 + t_1) .
\end{aligned}$$

$$3_5 = B'''_{17} + B'''_{18} + B'''_{19}$$

$$\begin{aligned}
3_6 = & -B'_{11}(2t_4) - B'_{12}(2t_3) - B'_{13}(t_4 + t_3) - B'_{14}(t_4 + t_1) - B'_{15}(t_3 + t_1) - B'_{16}(t_4) - B'_{17}(t_3) - B'_{18}(t_1 \\
& + B'_{19}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5) + B'_{12}(t_2 t_4^2 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_2 t_4) + B'_{13}(t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5) \\
& + B'_{14}(2t_3 t_4 t_5 + t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4) + B'_{15}(t_2 t_3^2 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_2 t_3) + B'_{16}(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_5) \\
& + B'_{17}(t_3 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_3) + B'_{18}(t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) + \\
& + B'_{19}(t_1 t_3^2) + t_1 t_4^2 B''_{11} - t_3 t_4 t_5 B''_{12} + t_1 t_3 t_5 B''_{13} + t_1 t_4 t_5 B''_{14} + t_1 t_2 t_3 B''_{15} + t_1 t_2 t_4 B''_{16} + \\
& + t_1 t_3 t_4 B''_{17} - t_4^2 B''_{21} - B'_{27}(t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_3 t_4) - B'_{28}(t_3 t_4 + t_2 t_4 + t_2 t_3) \\
& - B'_{29}(t_3 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_3) - B'_{21}(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2) - B'_{22}(t_2 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_2) \\
& - B'_{23}(t_3 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_3) - B'_{24}(t_4 t_5 + t_1 t_5) - B'_{25}(2t_4 t_5 + t_4^2) - B'_{26}(2t_2 t_4 + t_4^2) \\
& - B'_{27}(2t_1 t_3 + t_3^2) - B'_{28}(2t_1 t_4 + t_4^2) - B'_{29}(t_3 t_4) - B''_{21}(t_2 t_4) - B''_{22}(t_1 t_3) - B''_{23}(t_1 t_4) \\
& - B''_{24}(t_1 t_2) - B''_{25}(t_1 t_5) + B''_{26}(t_1 t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 + 2t_1 t_3 t_4 t_5) + \\
& + B''_{27}(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5) + B''_{28}(t_1 t_3 t_4 t_5) .
\end{aligned}$$

$$B_7 = t_1 t_2 t_3 B'''_{17} + t_1 t_2 t_4 B'''_{18} .$$

$$\begin{aligned}
B_8 = & -B_{11}'(2t_4 + t_5 + t_3) - B_{12}'(2t_4 + t_2 + t_1) - B_{13}'(2t_4 + t_5 + t_1) - B_{14}'(t_5 + t_4 + 2t_3) \\
& - B_{15}'(2t_3 + t_2 + t_1) - B_{16}'(2t_3 + t_5 + t_1) - B_{17}'(t_4 + t_3 + t_2 + t_1) - B_{18}'(t_4 + t_3 + t_5 + t_1) \\
& - B_{19}'(2t_3 + t_1) - B_{11}''(2t_4 + t_1) - B_{12}''(t_5 + t_4 + t_3) - B_{13}''(t_5 + t_3 + t_1) - B_{14}''(t_5 + t_4 + t_1) \\
& - B_{15}''(t_3 + t_2 + t_1) - B_{16}''(t_4 + t_2 + t_1) - B_{17}''(t_4 + t_3 + t_1) - B_{18}''(t_5 + t_3) - B_{19}''(t_5 + t_4) \\
& - B_{11}'''(t_5 + t_4) - B_{12}'''(t_2 + t_1) - B_{13}'''(t_3 + t_1) - B_{14}'''(t_4 + t_1) - t_5 B_{15}''' - t_1 B_{16}''' + \\
& + B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{24} + B_{25} + B_{26} + B_{27} + B_{28} + B_{29} + B_{21}' + B_{22}' + B_{23}' + B_{24}' \\
& - t_1 t_4 B_{24}' + B_{25}' + B_{26}' + B_{27}' + B_{28}' + B_{29}' + B_{21}'' + B_{22}'' + B_{23}'' + B_{24}'' + B_{25}'' \\
& - B_{26}''(t_3^2 + 2t_3 t_5 + 2t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2t_3 t_4 + t_4 t_5 + 4t_4) - B_{27}''(t_4^2 + 2t_4 t_5 \\
& + 2t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_1 t_3) - B_{28}''(t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 \\
& + t_1 t_5) - B_{29}''(t_3 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_3) - B_{21}'''(t_4 t_5 + t_4 t_5 + t_4 t_4) - t_1 t_5 B_{22}''' .
\end{aligned}$$

$$B_9 = -B_{17}'''(t_3 + t_2 + t_1) - B_{18}'''(t_4 + t_2 + t_1) - B_{19}'''(t_2 + t_1) .$$

$$B_{10} = B_{26}' + B_{27}'' + B_{28}'' + B_{29}'' + B_{21}''' + B_{22}''' .$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & t_3^2 t_4 t_5 C_{11} + t_3 t_4^2 t_5 C_{12} + t_1 t_2 t_3^2 C_{13} + t_1 t_2 t_4^2 C_{14} + t_1 t_3^2 t_5 C_{15} + t_1 t_2 t_3 t_4 C_{16} \\
& + t_1 t_2 t_4 t_5 C_{17} - t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5 C_{14}'' + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 C_{15}'' - t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 C_{16}'' - t_1 t_3^2 t_4 t_5^2 C_{17}'' \\
& - t_3^2 t_4^2 t_5^2 C_{13}''' + t_3 t_4^2 t_5^2 C_{22} + t_2 t_3 t_4^2 t_5 C_{28} + t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 C_{21}' + t_1 t_2 t_4^2 t_5 C_{22}' \\
& + t_1 t_3 t_4 t_5^2 C_{27}' + t_1 t_3^2 t_4 t_5 C_{28}' + t_1 t_3 t_4^2 t_5 C_{29}' + t_1 t_3^2 t_4^2 t_5^2 C_{24}'' .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -C_{11}(t_4 t_5 + 2t_3 t_5 + 2t_3 t_4 + t_3^2) - C_{12}(t_4^2 + 2t_4 t_5 + 2t_3 t_4 + t_3 t_5) - C_{13}(t_3^2 + 2t_2 t_3 \\
& + 2t_4 t_3 + t_1 t_2) - C_{14}(t_4^2 + 2t_2 t_4 + 2t_1 t_4 + t_1 t_2) - C_{15}(t_3^2 + 2t_3 t_5 + 2t_1 t_3 + t_1 t_5) \\
& - C_{16}(t_3 t_4 + t_2 t_4 + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_4 t_3 + t_1 t_2) - C_{17}(t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_4 t_4 + t_1 t_3 \\
& + t_1 t_5) - C_{18}(t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_3 t_4) - C_{19}(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2) - C_{11}'(t_2 t_4 + t_1 t_4 \\
& + t_1 t_2) - C_{12}'(t_3 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_3) - C_{13}'(t_3 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_3) - C_{14}'(2t_1 t_3 + t_3^2) \\
& - C_{15}'(t_3 t_5) - C_{16}'(t_4 t_5) - C_{17}'(t_1 t_2) - C_{18}'(t_1 t_3) - C_{19}'(t_1 t_5) - C_{11}''(t_1 t_4) + \\
& + C_{14}''(t_1 t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 + 2t_4 t_3 t_4 t_5 + t_2 t_3^2 t_5 + t_1 t_2 t_3^2 + 2t_4 t_2 t_3 t_5 + \\
& + 2t_2 t_3^2 t_4 + 2t_2 t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 t_5) + C_{15}''(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + \\
& + t_1 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_2 t_4^2 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 + 2t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 + 2t_1 t_2 t_4 t_5 \\
& + 2t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_5) + C_{16}''(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + \\
& + t_4^2 t_5^2 + t_3 t_4^2 t_5 + 2t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_4^2 t_5 + 2t_1 t_4 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5^2) \\
& + C_{17}''(t_1 t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_3^2 t_5^2 + t_1 t_3^2 t_5 + 2t_1 t_3 t_5^2 \\
& + t_3^2 t_4 t_5 + 2t_3 t_4 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_4 t_4 t_5^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{18}''(t_1 t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_7 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5) + C_{19}''(t_1 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5^2 \\
& + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_5^2) + C_{11}'''(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_7^2 + \\
& + 2 t_1 t_3 t_4 t_5) + C_{12}'''(t_1 t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5) \\
& + C_{13}'''(t_3 t_4^2 t_5 + t_4^2 t_5^2 + t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_3 t_4 t_5^2 + t_3 t_4^2 t_5 + t_3^2 t_4^2 + 2 t_3^2 t_4 t_5 \\
& + t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_3^2 t_4 t_5 + t_3^2 t_5^2) + C_{14}'''(t_3 t_4 t_5^2) + C_{15}'''(t_1 t_3 t_5^2) \\
& + C_{16}'''(t_1 t_4 t_5^2) + C_{17}'''(t_1 t_1 t_3 t_5) + C_{18}'''(t_1 t_2 t_4 t_5) + C_{19}'''(t_1 t_3 t_4 t_5) - C_{21}(t_4 t_5^2) \\
& - C_{22}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2 t_4 t_5^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2) \\
& - C_{24}(t_3 t_4 t_5) - C_{26}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5) - C_{27}(t_2 t_4 t_5) - C_{28}(t_4^2 t_5 \\
& + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_2 t_4^2 + 2 t_2 t_4 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5) - C_{29}(t_1 t_2 t_5) \\
& - C_{21}'(t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_3 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + \\
& + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5) - C_{22}'(t_1 t_2 t_4 + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_5 \\
& + t_2 t_4^2 + t_1 t_4^2 + t_1 t_2 t_4 + t_4^2 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5) - C_{23}'(t_1 t_2 t_4 + \\
& + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_5) - C_{25}'(t_1 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) \\
& - C_{26}'(t_1 t_5^2) - C_{27}'(t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_3 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 \\
& + t_3 t_5^2 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_5^2) - C_{28}'(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2 t_1 t_3 t_5 + \\
& + t_3^2 t_4 + 2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5) - C_{29}'(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5 \\
& + t_1 t_4^2 + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5) - C_{21}''(t_1 t_3 t_5) - C_{22}''(t_1 t_4 t_5) \\
& + C_{23}''(t_1 t_3 t_4 t_5^2) + C_{24}''(t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + \\
& + 2 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 \\
& + t_1 t_3^2 t_4^2 + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_5^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15} + C_{16} + C_{17} + C_{18} + C_{19} + C_{11}' + C_{12}' + C_{13}' + C_{14}' + C_{15}' + C_{16}' \\
& + C_{17}' + C_{18}' + C_{19}' + C_{11}'' + C_{12}'' + C_{13}'' - C_{14}''(t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_4 t_5 \\
& + t_1 t_4 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + t_1 t_2 + t_2 t_4) - C_{15}''(t_4^2 + 2 t_4 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2 t_1 t_4 \\
& + t_1 t_5 + t_1 t_3 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_2 t_3 + t_1 t_5) - C_{16}''(t_4^2 + 2 t_4 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2 t_1 t_4 \\
& + t_1 t_5 + t_1 t_3 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_2 t_3 + t_1 t_5) - C_{17}''(t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2 t_3 t_4 \\
& + t_4 t_5 + t_1 t_4 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + t_2 t_3 + t_1 t_5) - C_{18}''(t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2 t_3 t_4 \\
& + t_4 t_5 + t_1 t_4) - C_{19}''(t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_5 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_5^2 \\
& + t_1 t_5) - C_{11}'''(t_4^2 + 2 t_4 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_1 t_3) - C_{12}'''(t_3 t_4 + t_2 t_4 \\
& + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - C_{13}'''(t_4^2 + 2 t_4 t_5 \\
& + 2 t_3 t_4 + t_3 t_5 + t_4 t_5 + t_5^2 + t_3 t_5 + t_3 t_4 + t_3 t_5 + t_3^2 + t_3 t_5) - C_{14}'''(t_4 t_5 + t_3 t_5 \\
& + t_3 t_4 + t_5^2 + t_4 t_5 + t_3 t_5) - C_{15}'''(t_3 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_3 + t_5^2 + t_3 t_5 + t_1 t_5) \\
& - C_{16}'''(t_4 t_5 + t_4 t_5 + t_1 t_4 + t_5^2 + t_4 t_5 + t_1 t_5) - C_{17}'''(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_3 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{18}'''(t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - C_{19}'''(t_3 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_5) \\
& - C_{11}'''(2 t_1 t_5 + t_5^2) - C_{12}'''(t_1 t_2 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - C_{13}'''(t_1 t_4 + t_4 t_5 + t_1 t_5) - C_{14}'''(t_1 t_3 \\
& + t_3 t_5 + t_1 t_5) - C_{15}'''(t_5^2) - C_{16}'''(t_1 t_5) + C_{21}(2 t_5 + t_4) + C_{22}(t_4 + 2 t_5 + t_3) \\
& + C_{23}(t_5) + C_{24}(t_5 + t_4 + t_3) + C_{25}(t_5 + t_4) + C_{26}(t_4 + t_5 + t_3) + C_{27}(t_5 + t_4 + t_2) \\
& + C_{28}(2 t_4 + t_5 + t_3 + t_2) + C_{29}(t_2 + t_1 + t_5) + C_{21}'(t_4 + t_3 + t_2 + t_1 + t_5) + \\
& + C_{22}'(2 t_4 + t_2 + t_1 + t_5) + C_{23}'(t_4 + t_2 + t_1 + t_5) + C_{24}'(t_5 + t_1) + C_{25}'(t_4 + t_3 \\
& + t_1 + t_5) + C_{26}'(2 t_5 + t_1) + C_{27}'(t_4 + t_3 + 2 t_5 + t_1) + C_{28}'(2 t_3 + t_5 + t_1 + t_4) \\
& + C_{29}'(2 t_4 + t_5 + t_3 + t_1) + C_{21}''(t_5 + t_3 + t_1) + C_{22}''(t_5 + t_4 + t_1) - C_{23}''(t_2 t_3 t_5 \\
& + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_3 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_5^2) \\
& - C_{24}''(t_4 t_5 + t_3 t_4^2 + t_3 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2 t_4 t_5^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3 t_4^2 \\
& + 2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_3^2 t_4 + t_3^2 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3^2 t_5 + t_1 t_4^2 + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 \\
& + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5) \\
& - C_{25}''(t_1 t_5^2) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & C_{14}'' + C_{15}'' + C_{16}'' + C_{17}'' + C_{18}'' + C_{19}'' + C_{11}''' + C_{12}''' + C_{13}''' + C_{14}''' + C_{15}''' + C_{16}''' + C_{17}''' \\
& + C_{18}''' + C_{19}''' + C_{11}''' + C_{12}''' + C_{13}''' + C_{14}''' + C_{15}''' + C_{16}''' + C_{23}''(t_4 + t_3 + 2 t_5 + t_1) \\
& + C_{24}''(t_4 + 2 t_5 + 2 t_3 + t_1) + C_{25}''(2 t_5 + t_1) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & C_{11}(2 t_3 t_4 t_5 + t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4) + C_{12}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5) + C_{13}(t_2 t_3^2 + t_1 t_3^2 + 2 t_1 t_2 t_3) \\
& + C_{14}(t_2 t_4^2 + t_1 t_4^2 + 2 t_1 t_2 t_4) + C_{15}(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2 t_1 t_3 t_5) + C_{16}(t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 \\
& + t_1 t_2 t_4) + C_{17}(t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) + C_{18}(t_2 t_4 t_5) \\
& + C_{19}(t_1 t_2 t_3) + C_{11}'(t_1 t_2 t_4) + C_{12}'(t_1 t_3 t_5) + C_{13}'(t_1 t_3 t_4) + C_{14}'(t_1 t_3^2) - C_{14}''(t_1 t_3^2 t_4 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_3^2 t_5 + t_2 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3^2 t_4 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5) - C_{15}''(t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5) - C_{16}''(t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_4^2 t_5^2 \\
& + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2) - C_{17}''(t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_5^2 + t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_3^2 t_4 t_5 \\
& + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2) - C_{18}''(t_1 t_3^2 t_4 t_5) - C_{19}''(t_1 t_3 t_4 t_5^2) - C_{11}'''(t_1 t_3 t_4^2 t_5) - C_{12}'''(t_1 t_2 t_3 t_4 \\
& - C_{13}'''(t_3 t_4^2 t_5 + t_3^2 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + 2 t_3^2 t_4 t_5^2) + C_{22}(t_3 t_4^2 t_5 + t_4 t_5^2 \\
& + t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_3 t_4 t_5^2) + C_{26}(t_3 t_4^2 t_5) + C_{28}(t_1 t_4^2 t_5 + t_2 t_4^2 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 + \\
& + 2 t_2 t_3 t_4 t_5) + C_{21}'(t_1 t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5) + \\
& + C_{22}'(t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 + t_2 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5) + C_{23}'(t_1 t_2 t_4 t_5) \\
& + C_{25}'(t_1 t_3 t_4 t_5) + C_{21}''(t_1 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_5^2) + \\
& + C_{28}'(t_1 t_3^2 t_5 + t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5) + C_{29}'(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 \\
& + t_1 t_3 t_4^2 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5) - C_{24}''(t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 +
\end{aligned}$$

$$+ t_1 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 t_5^2) .$$

$$\begin{aligned} C_6 = & -C_{11}(t_5 + t_4 + 2t_3) - C_{12}(t_4 + t_5 + t_3) - C_{13}(2t_3 + t_2 + t_1) - C_{14}(2t_4 + t_2 + t_1) \\ & - C_{15}(2t_3 + t_5 + t_1) - C_{16}(t_4 + t_3 + t_2 + t_1) - C_{17}(t_4 + t_3 + t_5 + t_1) - C_{18}(t_5 + t_4 + t_3) \\ & - C_{19}(t_3 + t_2 + t_1) - C_{11}'(t_4 + t_2 + t_1) - C_{12}'(t_5 + t_3 + t_1) - C_{13}'(t_4 + t_3 + t_1) - C_{14}'(t_1 + 2t_3) \\ & - C_{15}'(t_5 + t_3) - C_{16}'(t_5 + t_4) - C_{17}'(t_2 + t_1) - C_{18}'(t_3 + t_1) - C_{19}'(t_5 + t_1) - C_{11}''(t_4 + t_1) \\ & - C_{12}''(t_5) - C_{13}''(t_1) + C_{14}''(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_5 + t_3^2 t_4 + 2t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 + \\ & t_1 t_4 t_5 + t_2 t_3^2 + 2t_2 t_3 t_5 + 2t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_5 + 2t_3 t_4 + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4) + \\ & + C_{15}''(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_2 t_4^2 \\ & + 2t_2 t_4 t_5 + 2t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5 + 2t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_2 t_3) + C_{16}''(t_4^2 t_5 \\ & + t_3 t_4^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_4^2 t_5 + 2t_4 t_5^2 \\ & + 2t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2 + 2t_1 t_4 t_5 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5) + C_{17}''(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_5 \\ & + t_3^2 t_4 + 2t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_3^2 t_5 + 2t_3 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_5 + t_1 t_5^2 \\ & + 2t_3 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 + t_1 t_4 t_5) + C_{18}''(t_3^2 t_5 + t_1 t_3^2 + 2t_1 t_3 t_5 + t_3^2 t_4 + 2t_3 t_4 t_5 \\ & + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5) + C_{19}''(t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_3 t_4 t_5 \\ & + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_5^2) + C_{11}'''(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2t_3 t_4 t_5 + \\ & + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5) + C_{12}'''(t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 \\ & + t_1 t_2 t_3 + t_3 t_4 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5) + \\ & + C_{13}'''(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2t_4 t_5^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3 t_4^2 \\ & + 2t_3 t_4 t_5 + 2t_3^2 t_4 + t_3^2 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3^2 t_5) + C_{14}'''(t_3 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 \\ & + t_3 t_4 t_5) + C_{15}'''(t_1 t_3 t_5 + t_3 t_5^2 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5) + C_{16}'''(t_1 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 + \\ & + t_1 t_5^2 + t_1 t_4 t_5) + C_{17}'''(t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5) + C_{18}'''(t_1 t_2 t_4 \\ & + t_2 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_5) + C_{19}'''(t_1 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) \\ & + C_{11}''''(t_1 t_5^2) + C_{12}''''(t_1 t_2 t_5) + C_{13}''''(t_1 t_4 t_5) + C_{14}''''(t_1 t_3 t_5) - C_{21}(t_5^2 + \\ & + 2t_4 t_5) - C_{22}(t_4^2 + 3t_4 t_5 - 2t_3 t_4 - 2t_3 t_5 - t_5^2) - C_{24}(t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_3 t_4) \\ & - C_{25}(t_4 t_5) - C_{26}(t_4^2 + 2t_4 t_5 + 2t_3 t_4 + t_3 t_5) - C_{27}(t_4 t_5 + t_2 t_5 + t_2 t_4) \\ & - C_{28}(t_4^2 - 2t_4 t_5 + 2t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2t_2 t_4 + 2t_2 t_5 + t_2 t_3) - C_{29}(t_1 t_2 + t_2 t_5 \\ & + t_1 t_5) - C_{21}'(t_3 t_4 + t_2 t_4 + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_2 t_5 \\ & + t_1 t_5) - C_{22}'(t_2 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_5 + t_4^2 + t_2 t_4 + t_1 t_4 \\ & + t_4 t_5) - C_{23}'(t_1 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - C_{24}'(t_1 t_5) \\ & - C_{25}'(t_3 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_5) - C_{26}'(2t_1 t_5 + t_5^2) \\ & - C_{27}'(t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_5 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_5^2 + t_1 t_5) \\ & - C_{28}'(t_3^2 + 2t_3 t_5 + 2t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_1 t_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{29}'(t_4^2 + 2t_4t_5 + 2t_3t_4 + t_3t_5 + 2t_1t_4 + t_1t_5 + t_1t_3) - C_{21}''(t_3t_5 + t_1t_5 + t_1t_3) \\
& -C_{22}'(t_4t_5 + t_1t_5 + t_1t_4) + C_{23}''(t_3t_4t_5^2 + t_4t_3t_4t_5 + t_1t_4t_5^2 + t_1t_3t_5^2 + \\
& + t_1t_3t_4t_5) + C_{24}''(t_3t_4^2t_5 + t_4^2t_5^2 + t_3t_4^2t_5 + 2t_3t_4t_5^2 + t_3t_4^2t_5 + \\
& + t_3^2t_4^2 + 2t_3^2t_4t_5 + t_3t_4^2t_5 + 2t_1t_4t_5^2 + 2t_3^2t_4t_5 + t_3^2t_5^2 + t_1t_4^2t_5 + \\
& + t_1t_3t_4^2 + 2t_1t_3t_4t_5 + t_1t_4^2t_5 + 2t_1t_4t_5^2 + 2t_1t_3t_4t_5 + t_1t_3t_5^2 + \\
& + t_1t_3t_4^2 + 2t_1t_3t_4t_5 + t_1t_3^2t_5 + t_1t_3t_5^2 + t_1t_3^2t_5) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_7 = & -C_{14}''(2t_3 + t_5 + t_1 + t_4 + t_2) - C_{15}''(2t_4 + t_5 + t_3 + t_1 + t_2) - C_{16}''(2t_4 + 2t_5 \\
& + t_3 + t_1) - C_{17}''(2t_3 + 2t_5 + t_1 + t_4) - C_{18}''(2t_3 + t_5 + t_1 + t_4) - C_{19}''(t_4 + t_3 \\
& + 2t_5 + t_1) - C_{11}'''(2t_4 + t_5 + t_3 + t_1) - C_{12}'''(t_4 + t_3 + t_2 + t_1 + t_5) \\
& - C_{13}'''(t_4 + 2t_5 + 2t_3) - C_{14}'''(2t_5 + t_4 + t_3) - C_{15}'''(2t_5 + t_3 + t_1) - C_{16}'''(2t_5 \\
& + t_4 + t_1) - C_{17}'''(t_3 + t_2 + t_1 + t_5) - C_{18}'''(t_4 + t_2 + t_1 + t_5) - C_{19}'''(t_4 + t_3 + t_1 + t_5) \\
& + C_{11}'''(2t_5 + t_1) - C_{12}'''(t_2 + t_1 + t_5) - C_{13}'''(t_4 + t_1 + t_5) - C_{14}'''(t_3 + t_1 + t_5) \\
& - C_{15}'''(2t_5) - C_{16}'''(t_5 + t_1) + C_{21} + C_{22} + C_{23} + C_{24} + C_{25} + C_{26} + C_{27} + C_{28} \\
& + C_{29} + C_{21}' + C_{22}' + C_{23}' + C_{24}' + C_{25}' + C_{26}' + C_{27}' + C_{28}' + C_{29}' + C_{21}'' + C_{22}'' \\
& - C_{23}''(t_3t_4 + t_4t_5 + t_3t_5 + t_1t_4 + t_1t_3 + t_1t_5 + t_4t_5 + t_3t_5 + t_5^2 + t_1t_5) \\
& - C_{24}''(t_4^2 + 2t_4t_5 + 2t_3t_4 + t_3t_5 + t_4t_5 + t_5^2 + t_3t_5 + t_3t_4 + t_3t_5 \\
& + t_3^2 + t_3t_5 + t_1t_4 + t_1t_5 + t_1t_3 + t_1t_5 + t_1t_3) - C_{25}''(2t_1t_5 + t_5^2)
\end{aligned}$$

$$G_8 = C_{23}'' + C_{24}'' + C_{25}''$$

$$\begin{aligned}
D_1 = & -D_{12}(t_3^2t_4^2t_5^2) - D_{14}(t_1t_2t_3^2t_4t_5) - D_{15}(t_1t_2t_3t_4^2t_5) - D_{12}'(t_1t_3^2t_4t_5^2) - D_{14}'(t_1t_2t_3^2t_4^2t_5) \\
& + D_{22}(t_1t_3^2t_4^2t_5^2) - D_{26}(t_1t_2t_3t_4^2t_5^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & D_{11}(t_3t_4t_5^2) + D_{12}(t_3t_4^2t_5 + t_4^2t_5^2 + t_3t_4^2t_5 + 2t_3t_4t_5^2 + t_3t_4^2t_5 + t_3^2t_4^2 + 2t_3^2t_4t_5 + \\
& + t_3t_4^2t_5 + 2t_3t_4t_5^2 + 2t_3^2t_4t_5 + t_3^2t_5^2) + D_{14}(t_1t_3^2t_5 + t_3^2t_4t_5 + t_1t_3^2t_4 + 2t_1t_3t_4t_5 \\
& + t_1t_3^2 + t_1t_2t_3^2 + 2t_1t_2t_3t_5 + t_2t_3^2t_4 + 2t_2t_3t_4t_5 + 2t_1t_2t_3t_4 + t_1t_2t_4t_5) + \\
& + D_{15}(t_3t_4^2t_5 + t_1t_4^2t_5 + t_1t_3t_4^2 + 2t_1t_3t_4t_5 + 2t_1^2t_5 + t_2t_3t_4^2 + 2t_2t_3t_4t_5 + \\
& + t_1t_2t_4^2 + 2t_1t_2t_4t_5 + 2t_1t_2t_3t_4 + t_1t_2t_3t_5) + D_{16}(t_1t_2t_3t_4 + t_2t_3t_4t_5 \\
& + t_1t_3t_4t_5 + t_1t_2t_4t_5 + t_1t_2t_3t_5) + D_{17}(t_1t_2t_3t_5) + D_{18}(t_1t_2t_4t_5) + \\
& + D_{11}'(t_1t_3t_5^2) + D_{12}'(t_1t_3^2t_5 + t_3^2t_4t_5 + t_1t_3^2t_4 + 2t_1t_3t_4t_5 + t_3^2t_5^2 + t_1t_3^2t_5 \\
& + 2t_1t_3t_5^2 + t_3^2t_4t_5 + 2t_3t_4t_5^2 + 2t_1t_3t_4t_5 + t_1t_4t_5^2) + D_{14}'(t_1t_3^2t_5 + \\
& + t_3^2t_4t_5 + t_1t_3^2t_4 + 2t_1t_3t_4t_5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D'_{16}(t_1 t_3 t_4 t_5) - D'_{18}(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2) - D'_{19}(t_3^2 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 \\
& + t_1 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_2 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_2 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_2 t_3^2 t_4^2 t_5 \\
& + 2 t_2 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 4 t_2 t_3 t_4^2 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 + 2 t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_3^2 t_5^2) + D_{22}(t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + 2 t_3^2 t_4 t_5^2 + \\
& + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4^2 + \\
& + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_5^2) + D_{24}(t_1 t_3 t_4 t_5^2 \\
& + D_{25}(t_1 t_2 t_4 t_5^2) + D_{26}(4 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 \\
& + t_1 t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 + 2 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 \\
& + t_2 t_4^2 t_5^2 + 4 t_4^2 t_5^2) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & -D_{11}(2 t_4 t_5 + 2 t_3 t_5 + t_4 t_5 + t_5^2) - D_{12}(t_4^2 + 3 t_4 t_5 + 3 t_3 t_4 + 3 t_4 t_5 + t_5^2 + t_3^2) \\
& - D_{13}(t_5^2) - D_{14}(t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_4 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_4 t_4 + 2 t_2 t_3 + t_2 t_5 \\
& + t_1 t_2 + t_2 t_4) - D_{15}(t_4^2 + 2 t_4 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_3 t_5 + 2 t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_1 t_3 + 2 t_1 t_4 \\
& + t_2 t_5 + t_2 t_3 + t_1 t_2) - D_{16}(t_3 t_4 + t_2 t_4 + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_3 t_4 \\
& + t_2 t_5 + t_1 t_5) - D_{17}(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2 + t_3 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - D_{18}(t_2 t_4 + t_1 t_4 \\
& + t_1 t_2 + t_4 t_5 + t_1 t_5 + t_1 t_5) - D_{19}(t_1 t_2 + t_2 t_5 + t_1 t_5) - D_{20}(2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_5 + t_1 t_3 \\
& + t_3^2) - D_{21}(t_3^2 + 4 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + 2 t_1 t_5 + 2 t_3 t_4 + 2 t_4 t_5 + t_1 t_4 + t_5^2) - D_{22}(t_3 t_5 \\
& + t_1 t_5 + t_1 t_3) - D_{23}(t_3^2 + 2 t_3 t_5 + 2 t_1 t_3 + t_1 t_5 + 2 t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_1 t_4) - D_{24}(t_1 t_5) \\
& - D_{25}(t_3 t_4 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_5) + D_{26}(t_1 t_2 t_3^2) + D_{27}(t_1 t_2 t_3 t_4 \\
& + 2 t_2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_2 t_4 t_5 + 2 t_1 t_2 t_3 t_5 + t_3 t_4 t_5^2 + t_2 t_4 t_5^2 + \\
& + t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_5^2) + D_{28}(4 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_4^2 t_5^2 + 4 t_3 t_4 t_5^2 \\
& + t_3^2 t_4^2 + 4 t_3^2 t_4 t_5 + t_3^2 t_5^2 + 2 t_1 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4^2 + 4 t_1 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_4 t_5^2 + \\
& + 2 t_1 t_3 t_5^2 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3^2 t_4 + 2 t_1 t_3^2 t_5 + 2 t_2 t_4^2 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4^2 + \\
& + 6 t_2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_2 t_4 t_5^2 + 2 t_2 t_3 t_5^2 + 2 t_2 t_3^2 t_4 + 2 t_2 t_3^2 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 + \\
& + 3 t_1 t_2 t_4 t_5 + 3 t_1 t_2 t_3 t_4 + 4 t_1 t_2 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3^2) - D_{29}(t_3 t_4 t_5 + \\
& + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5) - D_{30}(t_4^2 t_5 + 2 t_3 t_4^2 + 6 t_3 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2 t_4 t_5^2 \\
& + t_3 t_5^2 + 2 t_3^2 t_4 + 2 t_3^2 t_5 + t_3 t_5^2 + t_1 t_4^2 + 3 t_1 t_4 t_5 + 3 t_1 t_3 t_4 + 4 t_1 t_3 t_5 \\
& + t_1 t_5^2 + t_1 t_3^2) - D_{31}(t_1 t_5^2) - D_{32}(2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_5 \\
& + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_1 t_5^2) - D_{33}(t_1 t_5^2 + 2 t_1 t_2 t_5 + t_2 t_5^2 + 2 t_1 t_4 t_5 + t_4 t_5^2 + \\
& + 2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4) - D_{34}(2 t_2 t_3 t_4 + 2 t_1 t_3 t_4 + 2 t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_3 + 2 t_3 t_4 t_5 \\
& + 3 t_2 t_4 t_5 + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_5 + 2 t_1 t_2 t_5 + 2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + \\
& + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_2 t_5^2 + t_1 t_5^2 + t_3 t_4^2 + t_2 t_4^2 + t_1 t_4^2 + 2 t_4^2 t_5) .
\end{aligned}$$

$$D_4 = D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14} + D_{15} + D_{16} + D_{17} + D_{18} + D_{19} + D_{21} + D_{22} + D_{23} + D_{24} + D_{25} + D_{26} + D_{27} + D_{28} + D_{29} + D_{31} + D_{32} + D_{33} + D_{34} + D_{35} + D_{36} + D_{37} + D_{38} + D_{39} + D_{41} + D_{42} + D_{43} + D_{44} + D_{45} + D_{46} + D_{47} + D_{48} + D_{49} + D_{51} + D_{52} + D_{53} + D_{54} + D_{55} + D_{56} + D_{57} + D_{58} + D_{59} + D_{61} + D_{62} + D_{63} + D_{64} + D_{65} + D_{66} + D_{67} + D_{68} + D_{69} + D_{71} + D_{72} + D_{73} + D_{74} + D_{75} + D_{76} + D_{77} + D_{78} + D_{79} + D_{81} + D_{82} + D_{83} + D_{84} + D_{85} + D_{86} + D_{87} + D_{88} + D_{89} + D_{91} + D_{92} + D_{93} + D_{94} + D_{95} + D_{96} + D_{97} + D_{98} + D_{99}$$

$$D_5 = D'_{17} + D'_{18} + D'_{19}$$

$$D_6 = -D_{12}(2t_3 t_7^2 t_5^2 + 2t_3^2 t_4^2 t_5 + 2t_3^2 t_4 t_5^2) - D_{14}(t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2) - D_{15}(t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2) - D_{16}(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5) - D_{12}'(2t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_5^2 + t_3^2 t_4 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5^2) - D_{14}'(t_1 t_3^2 t_4 t_5) + D_{17}'(t_2 t_3^2 t_4^2 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_4^2 t_5^2 + 2t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_3^2 t_4^2 t_5^2) - D_{22}(t_3^2 t_4^2 t_5^2 + 2t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 + 2t_1 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4 t_5^2) - D_{26}(2t_1 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 2t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_4^2 t_5^2)$$

$$D_7 = D_{11}(2t_3t_4t_5 + t_4t_5^2 + t_3t_5^2) + D_{12}(2t_4^2t_5 + 2t_3t_4^2 + 6t_3t_4t_5 + 2t_4t_5^2 + 2t_3t_5^2 + 2t_3^2t_4 + 2t_3^2t_5) + D_{14}(t_3^2t_5 + t_1t_3^2 + 2t_1t_3t_5 + t_3^2t_4 + 2t_3t_4t_5 + 2t_1t_3t_4 + t_1t_4t_5 + t_1t_5^2 + 2t_1t_3t_5 + 2t_1t_2t_3 + t_1t_2t_5 + 2t_2t_3t_4 + t_2t_4t_5 + t_1t_2t_4) + D_{15}(t_4^2t_5 + t_3t_4^2 + 2t_3t_4t_5 + t_1t_4^2 + 2t_1t_4t_5 + 2t_1t_3t_4 + t_1t_3t_5 + t_2t_4^2 + 2t_2t_4t_5 + 2t_2t_3t_4 + t_2t_3t_5 + 2t_1t_2t_4 + t_1t_2t_5 + t_1t_2t_3) + D_{16}(t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 + t_1t_2t_4 + t_1t_2t_3 + t_3t_4t_5 + t_2t_4t_5 + t_2t_3t_5 + t_1t_4t_5 + t_1t_3t_5 + t_1t_2t_5) + D_{17}(t_1t_2t_3 + t_2t_3t_5 + t_1t_3t_5 + t_1t_2t_5) + D_{18}(t_1t_2t_4 + t_2t_4t_5 + t_1t_4t_5 + t_1t_2t_5) + D_{19}(t_1t_2t_5) + D_{11}'(t_1t_3t_5 + t_3t_5^2 + t_1t_5^2 + t_1t_3t_5) + D_{12}'(t_3^2t_5 + t_1t_3^2 + 2t_1t_3t_5 + t_3^2t_4 + 2t_3t_4t_5 + 2t_1t_3t_4 + t_1t_4t_5 + t_3^2t_5 + 2t_3t_5^2 + 2t_1t_3t_5 + t_1t_5^2 + 2t_3t_4t_5 + t_4t_5^2 + t_1t_4t_5) + D_{13}'(t_1t_3t_5) + D_{14}'(t_3^2t_5 + t_1t_3^2 + 2t_1t_3t_5 + t_3^2t_4 + 2t_3t_4t_5 + 2t_1t_3t_4 + t_1t_4t_5) + D_{16}'(t_1t_3t_4 + t_3t_4t_5 + t_1t_4t_5 + t_1t_3t_5) - D_{18}'(2t_1t_2t_3t_4t_5 + t_2t_3t_4t_5^2 + t_1t_3t_4t_5^2 + t_1t_2t_4t_5^2 + t_1t_2t_3t_5^2) - D_{19}'(t_3t_4^2t_5^2 + t_3^2t_4^2t_5 + t_3t_4^2t_5^2 + t_3^2t_4^2t_5 + t_3^2t_4t_5^2 + t_1t_3t_4^2t_5 + t_1t_4^2t_5^2 + t_1t_3t_4^2t_5 + 2t_1t_3t_4t_5^2 + t_1t_3t_4^2t_5 + t_1t_3^2t_4^2 + 2t_1t_3^2t_4t_5 + t_1t_3t_4^2t_5 + 2t_1t_3^2t_4t_5 + t_1t_3^2t_5^2 + t_2t_3t_4^2t_5 + t_2t_3t_4^2t_5 + 2t_2t_3t_4t_5^2 + t_2t_3t_4^2t_5 + t_2t_3^2t_4^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + 2t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 2t_2 t_3^2 t_4 t_5 + 2t_2 t_3^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_4^2 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 t_5 + 2t_1 t_2 t_4 t_5^2 + 2t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + \\
& + t_1 t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_2 t_3^2 t_4 + t_1 t_2 t_3^2 t_5 + \\
& + t_1 t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_5) + D_{11}(t_1 t_3 t_4 t_5) + D_{22}(t_2 t_4^2 t_5 + t_4^2 t_5^2 + \\
& + t_3 t_4^2 t_5 + 2t_3 t_4 t_5^2 + t_3 t_4^2 t_5 + t_3^2 t_4^2 + 2t_3^2 t_4 t_5 + t_3 t_4^2 t_5 + 2t_3 t_4 t_5^2 \\
& + 2t_3^2 t_4 t_5 + t_3^2 t_5^2 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + 2t_1 t_4 t_5^2 + \\
& + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 + 2t_1 t_3 t_4 t_5 + 2t_1 t_3^2 t_4 + t_1 t_3^2 t_5 + t_1 t_3 t_5^2 \\
& + t_1 t_3^2 t_5) + D_{24}(t_1 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_5^2) + \\
& D_{25}(t_1 t_2 t_5^2 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_2 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_4 t_5) + D_{26}(t_1 t_2 t_3 t_4 \\
& + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 \\
& + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5 + t_3 t_4 t_5^2 + t_2 t_4 t_5^2 + t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_5^2 \\
& + t_1 t_2 t_5^2 + t_2 t_3 t_4^2 + t_1 t_3 t_4^2 + t_1 t_2 t_4^2 + t_1 t_2 t_3 t_4 + t_3 t_4^2 t_5 + t_2 t_4^2 t_5 \\
& + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_3 t_4^2 t_5 + t_2 t_4^2 t_5 + \\
& + t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_4^2 t_5 + t_1 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4 t_5 + t_4^2 t_5^2 + t_3 t_4 t_5^2 + t_2 t_4 t_5^2 \\
& + t_1 t_4 t_5^2) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_8 = & -D_{11}(2t_5 + t_4 + t_3) - D_{12}(t_4 + 2t_5 + 2t_3) - D_{13}(2t_5) - D_{14}(2t_3 + t_5 + t_1 + t_4 + t_1) \\
& - D_{15}(2t_4 + t_5 + t_3 + t_1 + t_2) - D_{16}(t_4 + t_3 + t_2 + t_4 + t_5) - D_{17}(t_3 + t_2 + t_1 + t_5) \\
& - D_{18}(t_4 + t_2 + t_1 + t_5) - D_{19}(t_2 + t_1 + t_5) - D_{11}'(2t_5 + t_3 + t_1) - D_{12}'(2t_3 \\
& + 2t_5 + t_1 + t_4) - D_{13}'(t_5 + t_3 + t_1) - D_{14}'(2t_3 + t_5 + t_1 + t_4) - D_{15}'(t_5 + t_4) - D_{16}'(t_4 \\
& + t_3 + t_1 + t_5) + D_{17}'(t_1 t_5^2 + 2t_1 t_2 t_5 + t_2 t_5^2) + D_{18}'(t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_1 \\
& + t_1 t_2 t_3 + t_3 t_4 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5 + t_3 t_4 t_5 \\
& + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5 + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_2 t_5^2 \\
& + t_1 t_5^2) + D_{19}'(t_4^2 t_5 + t_2 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2t_4 t_5^2 + 2t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2 + \\
& t_3 t_5^2 + 2t_3 t_4 t_5 + 2t_3^2 t_4 + t_3^2 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3^2 t_5 + t_1 t_4^2 + 2t_1 t_4 t_5 + \\
& + 2t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_3^2 + \\
& + t_1 t_3 t_5 + t_2 t_4^2 + 2t_2 t_4 t_5 + 2t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_5^2 \\
& + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3^2 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_5 + \\
& + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_2 t_3) - D_{21}(t_3 t_4 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_5) \\
& - D_{22}(t_4^2 + 2t_4 t_5 + 2t_3 t_4 + t_3 t_5 + t_4 t_5 + t_5^2 + t_3 t_5 + t_3 t_4 + t_3 t_5 + t_3^2 \\
& + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_5 + t_1 t_3 + t_4 t_5 + t_1 t_3) - D_{23}(t_1 t_5 + t_5^2 + t_1 t_5) - D_{24}(t_3 t_4 \\
& + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_1 t_4 + t_1 t_3 + t_1 t_5 + t_4 t_5 + t_3 t_5 + t_5^2 + t_1 t_5) - D_{25}(t_1 t_5 + t_5^2 \\
& + t_1 t_5 + t_2 t_5 + t_1 t_2 + t_2 t_5 + t_4 t_5 + t_1 t_4 + t_4 t_5 + t_2 t_4) - D_{26}(t_3 t_4 + t_2 t_4
\end{aligned}$$

$$E_6 = E_{12}(t_1 t_3^2 t_4^2 t_5^2 + t_2 t_3^2 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_3^2 t_4 t_5^2).$$

$$E_7 = -E_{11}(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_4 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_5^2) - E_{12}(t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 t_5^2 + t_3^2 t_4^2 t_5 + 2 t_3^2 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_4^2 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + t_1 t_3^2 t_4^2 + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_3^2 t_4 t_5 + t_1 t_3^2 t_5^2 + t_2 t_3 t_4^2 + t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + t_2 t_3 t_4^2 t_5 + t_2 t_3^2 t_4^2 + 2 t_2 t_3^2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_4^2 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4 t_5^2 + 2 t_2 t_3^2 t_4 t_5 + t_2 t_3^2 t_5^2 + t_1 t_2 t_4^2 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_4^2 t_5 + 2 t_1 t_2 t_4 t_5^2 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_3 t_4^2 + 2 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_1 t_2 t_3^2 t_4 + t_1 t_2 t_3^2 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_5^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_5).$$

$$E_8 = E_{11}(t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_3 t_4 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_5 + t_4 t_5^2 + t_3 t_5^2 + t_2 t_5^2 + t_1 t_5^2) + E_{12}(t_4^2 t_5 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_4^2 t_5 + 2 t_4 t_5^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3 t_4^2 + 2 t_3 t_4 t_5 + 2 t_3^2 t_4 + t_3^2 t_5 + t_3 t_5^2 + t_3^2 t_5 + t_1 t_4^2 + 2 t_1 t_4 t_5 + 2 t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_1 t_5^2 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_5 + t_1 t_3^2 + t_1 t_3 t_5 + t_2 t_4^2 + 2 t_2 t_4 t_5 + 2 t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_4 t_5 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3^2 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_5 + t_2 t_3^2 + t_2 t_3 t_5 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_2 t_3) + E_{13}(t_1 t_5^2 + t_1 t_2 t_5 + t_2 t_5^2 + t_1 t_2 t_5).$$

$$E_9 = -E_{11}(t_4 + t_3 + t_2 + t_1 + 2 t_5) - E_{12}(t_4 + 2 t_5 + 2 t_3 + t_1 + t_2) - E_{13}(2 t_5 + t_4).$$

$$A_{11} = \beta_0^2 C_p \lambda A_{111} - \frac{\gamma \alpha \lambda}{c^2} A_{112}$$

$$A_{12} = \frac{4\gamma \alpha \lambda \eta}{3c^2} A_{121} + \beta_0^2 C_p \lambda \eta A_{122} + \frac{4\gamma \lambda \eta}{3c^2} A_{123} + \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \alpha} A_{124}$$

$$A_{13} = \frac{4\gamma \alpha \lambda \eta^2}{3c^2} A_{131} + \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 A_{132} + \frac{4\gamma \lambda \eta^2}{3c^2} A_{133} + \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{\gamma \alpha} A_{134}$$

$$A_{14} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta A_{141} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \alpha} A_{142} + \frac{\gamma \alpha \lambda \eta}{c^2} A_{143} + \frac{\gamma \lambda \eta}{c^2} A_{144}$$

$$A_{15} = -\frac{4\gamma \alpha \lambda \eta^2}{3c^2} A_{151} - \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 A_{152} - \frac{4\gamma \lambda \eta^2}{3c^2} A_{153} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{\gamma \alpha} A_{154}$$

$$A_{16} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta A_{161} + \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \alpha} A_{162} + \frac{\gamma \alpha \lambda \eta}{c^2} A_{163} - \frac{\gamma \lambda \eta}{c^2} A_{164}$$

$$A_{17} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 A_{171} + \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{\gamma \alpha} A_{172} + \frac{\gamma \alpha \lambda \eta^2}{c^2} A_{173} - \frac{\gamma \lambda \eta^2}{c^2} A_{174}$$

$$A_{18} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 A_{181} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{\gamma \alpha} A_{182} - \frac{\gamma \alpha \lambda \eta^2}{c^2} A_{183} + \frac{\gamma \lambda \eta^2}{c^2} A_{184}$$

$$A_{21} = \frac{4\beta_0 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{3c^2} A_{211} - \frac{4\beta_0 C_p \gamma \lambda \eta}{3c^2} A_{212} + \frac{\beta_0 C_p \lambda \eta}{c^2} A_{213}$$

$$A_{22} = \frac{4\beta_0 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{3c^2} A_{221} - \frac{4\beta_0 C_p \gamma \lambda \eta^2}{3c^2} A_{222} + \frac{\beta_0 C_p \lambda \eta^2}{c^2} A_{223}$$

$$A_{23} = -\frac{4\beta_0 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{3c^2} A_{231} + \frac{4\beta_0 C_p \gamma \lambda \eta^2}{3c^2} A_{232} - \frac{\beta_0 C_p \lambda \eta^2}{c^2} A_{233}$$

$$A_{24} = \beta_0 \lambda A_{241}$$

$$A_{25} = \beta_0 \lambda \eta^2 A_{251}$$

$$A_{26} = \beta_0 \lambda \eta A_{261}$$

$$A_{27} = \beta_0 \lambda \eta A_{271}$$

$$A_{28} = -\beta_0 \lambda \eta^2 A_{281}$$

$$A_{29} = \beta_0 \lambda \eta^2 A_{291}$$

$$B_{11} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{111}$$

$$B_{12} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda}{c^2} B_{121}$$

$$B_{13} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} B_{131}$$

$$B_{14} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{141}$$

$$B_{15} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} B_{151}$$

$$B_{16} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{161}$$

$$B_{17} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} B_{171}$$

$$B_{18} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{181}$$

$$B_{19} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{191}$$

$$B'_{11} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta B'_{111} + \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \alpha} B'_{112} - \frac{\gamma \lambda \eta}{c^2} B'_{113} - \frac{\gamma \alpha \lambda \eta}{c^2} B'_{114}$$

$$B'_{12} = \beta_0^2 C_p \eta^2 B'_{121} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \eta^2}{\gamma \alpha} B'_{122}$$

$$B'_{13} = -\frac{4\gamma \lambda \eta^2}{3c^2} B'_{131}$$

$$B'_{14} = \beta_0^2 C_p \lambda B'_{141} + \frac{\gamma \alpha \lambda}{c^2} B'_{142} + \beta_0^2 C_p B'_{143}$$

$$B'_{15} = \beta_0^2 C_p B'_{151}$$

$$B'_{16} = \beta_0^2 C_p \lambda B'_{161}$$

$$B'_{17} = \beta_0^2 C_p \eta B'_{171} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda}{\gamma \alpha} B'_{172}$$

$$B'_{18} = -\frac{4\gamma \alpha \lambda \eta}{3c^2} B'_{181} + \beta_0^2 C_p \lambda \eta B'_{182} - \frac{4\gamma \lambda \eta}{3c^2} B'_{183} - \frac{\beta_0^2 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \alpha} B'_{184}$$

$$B'_{19} = -\beta_0^2 C_p \lambda B'_{141}$$

$$B''_{11} = -\frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B''_{111}$$

$$B''_{12} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta B''_{121} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta}{8\alpha} B''_{122} - \beta_0 C_p \lambda \eta B''_{123} - \frac{8\alpha \lambda \eta}{c^2} B''_{124} + \frac{8\lambda \eta}{c^2} B''_{125}$$

$$B''_{13} = -\frac{48\alpha \lambda \eta}{3c^2} B''_{131} - \beta_0^2 C_p \lambda \eta B''_{132} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta}{8\alpha} B''_{133}$$

$$B''_{14} = -\frac{48\alpha \lambda \eta^2}{3c^2} B''_{141} + \frac{48\eta^2}{3c^2} B''_{142} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B''_{143}$$

$$B''_{15} = -\beta_0^2 C_p \eta B''_{151} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1)}{8\alpha} B''_{152}$$

$$B''_{16} = -\beta_0^2 C_p \eta^2 B''_{161} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \eta^2}{8\alpha} B''_{162} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \eta}{8\alpha} B''_{163}$$

$$B''_{17} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta B''_{171} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta}{8\alpha} B''_{172}$$

$$B''_{18} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta B''_{181} - \frac{8\alpha \lambda \eta}{c^2} B''_{182} - \beta_0^2 C_p \eta B''_{183}$$

$$B''_{19} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 B''_{191} + \frac{8\lambda \eta^2}{c^2} B''_{192} + \frac{8\alpha \lambda \eta^2}{c^2} B''_{193}$$

$$B'''_{11} = \frac{48\alpha \lambda \eta^2}{3c^2} B'''_{111} - \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 B'''_{112} + \frac{48\lambda \eta^2}{3c^2} B'''_{113} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B'''_{114}$$

$$B'''_{12} = \beta_0^2 C_p \eta^2 B'''_{121} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \eta}{8\alpha} B'''_{122}$$

$$B'''_{13} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta B'''_{131} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta}{8\alpha} B'''_{132}$$

$$B'''_{14} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 B'''_{141} + \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B'''_{142}$$

$$B'''_{15} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 B'''_{151} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B'''_{152} - \frac{8\lambda \eta^2}{c^2} B'''_{153} - \frac{8\alpha \lambda \eta^2}{c^2} B'''_{154}$$

$$B'''_{16} = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 B'''_{161} - \frac{\beta_0^2 C_p (x-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} B'''_{162}$$

$$B_{17}''' = -\rho_0^2 C_p \eta B_{171}'''$$

$$B_{18}''' = -\rho_0^2 C_p \eta^2 B_{181}'''$$

$$B_{19}''' = \rho_0^2 C_p \eta^2 B_{191}'''$$

$$B_{21} = \rho_0 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{211}$$

$$B_{22} = \frac{4\rho_0 C_p (\gamma-1) \lambda \eta^2}{3c^2} B_{221} - \frac{4\rho_0 C_p \gamma \lambda \eta^2}{3c^2} B_{222} + \frac{\rho_0 C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{223}$$

$$B_{23} = -\rho_0 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{231}$$

$$B_{24} = -\rho_0 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} B_{241}$$

$$B_{25} = -\rho_0 \frac{\gamma \lambda \eta^2}{c^2} B_{251} - \frac{4\rho_0 C_p \lambda \eta^2}{3c^2} B_{252}$$

$$B_{26} = \rho_0 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} B_{261}$$

$$B_{27} = -\frac{4\rho_0 C_p (\gamma-1) \lambda \eta}{3c^2} B_{271} + \frac{4\rho_0 C_p \gamma \lambda \eta}{3c^2} B_{272} - \frac{\rho_0 C_p \lambda \eta}{c^2} B_{273}$$

$$B_{28} = -\rho_0 \frac{C_p \eta}{c^2} B_{281}$$

$$B_{29} = -\rho_0 \frac{\gamma \lambda \eta}{c^2} B_{291}$$

$$B_{21}' = -\frac{4\rho_0 C_p \eta}{3c^2} B_{211}'$$

$$B_{22}' = -\frac{4\rho_0 C_p \eta^2}{3c^2} B_{221}'$$

$$B_{23}' = -\frac{4\rho_0 C_p \lambda \eta}{3c^2} B_{231}'$$

$$B_{24}' = -\frac{4\rho_0 C_p \lambda \eta}{3c^2} B_{241}'$$

$$B'_{25} = - \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta^2}{3c^2} B'_{251}$$

$$B'_{26} = - \frac{\rho_0 c_p \eta^2}{c^2} B'_{261}$$

$$B'_{27} = - \frac{\rho_0 \lambda}{c^2} B'_{271}$$

$$B'_{28} = - \frac{\rho_0 \lambda \eta^2}{c^2} B'_{281}$$

$$B'_{29} = \frac{\rho_0 c_p \lambda \eta}{c^2} B'_{291}$$

$$B''_{21} = \frac{\rho_0 c_p \eta^2}{c^2} B''_{211}$$

$$B''_{22} = \frac{\rho_0 \lambda \eta}{c^2} B''_{221} + \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta}{3c^2} B''_{222}$$

$$B''_{23} = \frac{\rho_0 \lambda \eta^2}{c^2} B''_{231} + \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta^2}{3c^2} B''_{232}$$

$$B''_{24} = \frac{4\rho_0 c_p \eta^2}{3c^2} B''_{241}$$

$$B''_{25} = \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta^2}{3c^2} B''_{251}$$

$$B''_{26} = -\rho_0 \lambda B''_{261}$$

$$B''_{27} = \rho_0 \lambda \eta B''_{271}$$

$$B''_{28} = \rho_0 \lambda \eta^2 B''_{281} + \rho_0 \lambda \eta B''_{282}$$

$$B''_{29} = - \frac{4\lambda \eta}{3c^2} B''_{291} - \rho_0^2 c_p \lambda \eta B''_{292} - \frac{\rho_0^2 c_p (\gamma-1) \lambda \eta}{\gamma \lambda} B''_{293}$$

$$B'''_{21} = \rho_0 \lambda \eta^2 B'''_{211}$$

$$B'''_{22} = -\rho_0 \lambda \eta^2 B'''_{221}$$

$$G_{11} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda}{c^2} G_{111}$$

$$G_{12} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G_{121}$$

$$G_{13} = -\beta_0^2 \frac{C_p}{c^2} G_{131}$$

$$G_{14} = -\beta_0^2 \frac{C_p \eta^2}{c^2} G_{141}$$

$$G_{15} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda}{c^2} G_{151}$$

$$G_{16} = -\beta_0^2 \frac{C_p \eta}{c^2} G_{161}$$

$$G_{17} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G_{171}$$

$$G_{18} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G_{181}$$

$$G_{19} = \beta_0^2 \frac{C_p \eta}{c^2} G_{191}$$

$$G'_{11} = \beta_0^2 \frac{C_p \eta^2}{c^2} G'_{111}$$

$$G'_{12} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G'_{121}$$

$$G'_{13} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G'_{131}$$

$$G'_{14} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda}{c^2} G'_{141}$$

$$G'_{15} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G'_{151}$$

$$G'_{16} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} G'_{161}$$

$$G'_{17} = -\beta_0^2 \frac{C_p \eta^2}{c^2} G'_{171}$$

$$G'_{18} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta}{c^2} G'_{181}$$

$$C_{19}^I = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{191}^I$$

$$C_{11}^{II} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{111}^{II}$$

$$C_{12}^{II} = -\beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{121}^{II}$$

$$C_{13}^{II} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{131}^{II}$$

$$C_{14}^{II} = -\beta_0^2 C_p C_{141}^{II}$$

$$C_{15}^{II} = -\beta_0^2 C_p \eta C_{151}^{II} + \beta_0^2 \frac{C_p (\gamma-1) \eta}{\gamma \alpha} C_{152}^{II}$$

$$C_{16}^{II} = \frac{4\gamma\lambda\eta}{3c^2}$$

$$C_{17}^{II} = -\beta_0^2 C_p \lambda C_{171}^{II}$$

$$C_{18}^{II} = \beta_0^2 C_p \lambda C_{181}^{II}$$

$$C_{19}^{II} = \frac{4\gamma\alpha\lambda\eta}{3c^2} C_{191}^{II} + \beta_0^2 \frac{C_p (\gamma-1)\lambda\eta}{\gamma\alpha} C_{192}^{II}$$

$$C_{11}^{III} = \beta_0^2 \frac{C_p (\gamma-1)\lambda\eta}{\gamma\alpha} C_{111}^{III}$$

$$C_{12}^{III} = \beta_0^2 C_p \eta C_{121}^{III} - \beta_0^2 \frac{C_p (\gamma-1)}{\gamma\alpha} C_{122}^{III}$$

$$C_{13}^{III} = -\beta_0^2 C_p \lambda C_{131}^{III} + \frac{\gamma\alpha\lambda}{c^2} C_{132}^{III}$$

$$C_{14}^{III} = 2\beta_0^2 C_p \lambda \eta C_{141}^{III} - \frac{2\gamma\alpha\lambda\eta}{c^2} C_{142}^{III}$$

$$C_{15}^{III} = \beta_0^2 C_p \lambda \eta C_{151}^{III}$$

$$C_{16}^{III} = -\frac{4\gamma\lambda\eta^2}{3c^2} C_{161}^{III}$$

$$C_{17}^{III} = \beta_0^2 C_p \eta C_{171}^{III}$$

$$C_{18}'' = \beta_0^2 C_p \eta^2 C_{181}''' - \frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \eta^2}{8\alpha} C_{182}'''$$

$$C_{19}''' = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta C_{191}''' - \frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \lambda \eta}{8\alpha} C_{192}'''$$

$$C_{11}'''' = -\frac{48\alpha\lambda\eta^4}{3c^2} C_{111}'''' - \frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} C_{112}''''$$

$$C_{12}'''' = -\beta_0^2 C_p \eta^2 C_{121}'''' - \beta_0^2 C_p \eta C_{122}'''' + \frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \eta}{8\alpha} C_{123}''''$$

$$C_{13}'''' = -\frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} C_{131}''''$$

$$C_{14}'''' = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta C_{141}''''$$

$$C_{15}'''' = -\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 C_{151}'''' + \frac{8\alpha\lambda\eta^2}{c^2} C_{152}''''$$

$$C_{16}'''' = \beta_0^2 C_p \lambda \eta^2 C_{161}'''' + \frac{\beta_0^2 C_p (r-1) \lambda \eta^2}{8\alpha} C_{162}''''$$

$$C_{21} = -\frac{4\beta_0 C_p \lambda \eta^2}{3c^2} C_{211}$$

$$C_{22} = \frac{4\beta_0 C_p \lambda \eta}{3c^2} C_{221}$$

$$C_{23} = -\frac{\beta_0 C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{231}$$

$$C_{24} = \frac{\beta_0 C_p \lambda \eta}{c^2} C_{241}$$

$$C_{25} = \frac{\beta_0 C_p \lambda \eta^2}{c^2} C_{251}$$

$$C_{26} = -\frac{\beta_0 C_p \lambda \eta}{c^2} C_{261}$$

$$C_{27} = -\frac{\beta_0 C_p \eta^2}{c^2} C_{271}$$

$$C_{28} = \frac{\beta_0 C_p \eta}{c^2} C_{281}$$

$$C_{29} = - \frac{4\rho_0 c_p \eta^2}{3c^2} C_{291}$$

$$C'_{21} = \frac{4\rho_0 c_p \eta}{3c^2} C'_{211}$$

$$C'_{22} = \frac{4\rho_0 c_p \eta^2}{3c^2} C'_{221}$$

$$C'_{23} = - \frac{4\rho_0 c_p \eta^2}{3c^2} C'_{231}$$

$$C'_{24} = \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta^2}{3c^2} C'_{241} + \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta^2}{c^2} C'_{242}$$

$$C'_{25} = - \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta}{3c^2} C'_{251} - \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta}{c^2} C'_{252}$$

$$C'_{26} = - \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta^2}{3c^2} C'_{261}$$

$$C'_{27} = - \frac{4\rho_0 c_p \lambda \eta}{3c^2} C'_{271}$$

$$C'_{28} = \frac{\rho_0 \delta \lambda}{c^2} C'_{281}$$

$$C'_{29} = \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta}{c^2} C'_{291}$$

$$C''_{21} = - \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta}{c^2} C''_{211}$$

$$C''_{22} = - \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta^2}{c^2} C''_{221}$$

$$C'_{23} = - 2\rho_0 \lambda \eta C''_{231}$$

$$C''_{24} = \rho_0 \lambda$$

$$C''_{25} = \rho_0 \lambda \eta^2 C''_{251}$$

$$D_{11} = -\frac{2\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} D_{111}$$

$$D_{12} = \beta_0^2 \frac{C_p \lambda}{c^2} D_{121}$$

$$D_{13} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} D_{131}$$

$$D_{14} = \frac{\beta_0^2 C_p}{c^2} D_{141}$$

$$D_{15} = \frac{\beta_0^2 C_p \eta}{c^2} D_{151}$$

$$D_{16} = -\frac{\beta_0^2 C_p \eta}{c^2} D_{161}$$

$$D_{17} = -\frac{\beta_0^2 C_p \eta}{c^2} D_{171}$$

$$D_{18} = -\frac{\beta_0^2 C_p \eta^2}{c^2} D_{181}$$

$$D_{19} = \frac{\beta_0^2 C_p \eta^2}{c^2} D_{191}$$

$$D'_{11} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} D'_{111}$$

$$D'_{12} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda}{c^2} D'_{121}$$

$$D'_{13} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} D'_{131}$$

$$D'_{14} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda}{c^2} D'_{141}$$

$$D'_{15} = -\frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta^2}{c^2} D'_{151}$$

$$D'_{16} = \frac{\beta_0^2 C_p \lambda \eta}{c^2} D'_{161}$$

$$D'_{17} = \beta_0^2 C_p \eta^2 D'_{171}$$

$$D'_{18} = -2\rho_0^2 c_p \eta D'_{181}$$

$$D'_{19} = \rho_0^2 c_p$$

$$D_{21} = \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta}{c^2} D_{211}$$

$$D_{22} = -\frac{\rho_0 \delta \lambda}{c^2}$$

$$D_{23} = -\frac{\rho_0 \delta \lambda \eta^2}{c^2} D_{231}$$

$$D_{24} = \frac{\rho_0 \delta \lambda \eta}{c^2} D_{241}$$

$$D_{25} = \frac{4\rho_0 c_p \eta^2}{c^2} D_{251}$$

$$D_{26} = -\frac{4\rho_0 c_p \eta}{3c^2}$$

$$E_{11} = \frac{2\rho_0^2 c_p \eta}{c^2} E_{111}$$

$$E_{12} = -\frac{\rho_0^2 c_p}{c^2}$$

$$E_{13} = -\frac{\rho_0^2 c_p \eta^2}{c^2} E_{131}$$

$$A_{111} = -\frac{454}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^3 \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2, \quad A_{112} = -\frac{62}{490} \left(\frac{m^3}{\rho_0^3 k^3}\right) \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{121} = -\frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \frac{T_0}{\rho_0} \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2, \quad A_{122} = \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{123} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 + \frac{12}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}, \quad A_{124} = -\frac{249}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{131} = \frac{405}{490} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right)^2 \epsilon_1 \epsilon_{12}^2, \quad A_{132} = \frac{405}{490} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right)^2 \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{133} = \frac{249}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2, \quad A_{134} = -\frac{249}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{141} = \frac{681}{735} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{142} = \frac{28}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{12}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{143} = \frac{31}{28} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2, \quad A_{144} = 2 \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{151} = -\frac{162}{490} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{152} = \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^3}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^3}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{153} = \frac{249}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{154} = \frac{11}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{1}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 - \frac{249}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{12}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0^2}\right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{161} = -\frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^3}\right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{454}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0^4}\right) \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2 + \frac{221}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0}\right) \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{8}{25} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right) \left(\frac{1}{\rho_0}\right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{162} = \frac{40}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{163} = -\frac{31}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^3 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 - \frac{31}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^2 T_0 \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{4}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k}\right)^3 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{164} = \frac{6}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 P_0 \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{171} = \frac{93}{735} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0^2}{P_0^3} \right) \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{27}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \left(\frac{3m}{7P_0 k} - \frac{15T_0}{14P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{172} = \frac{40}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \left(\frac{3m}{7P_0 k} - \frac{15T_0}{14P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + 4 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{173} = -2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{174} = \frac{85}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{14}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \left(\frac{3m}{7P_0 k} - \frac{15T_0}{14P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{181} = \frac{62}{1225} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{93}{735} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{245} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right)^2 \epsilon_1^3 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{182} = \frac{40}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{20}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^3 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{183} = -\frac{4}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 - 2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{184} = \frac{6}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{15}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) T_0 \epsilon_1^3 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{211} = -\frac{124}{6125} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{212} = -\frac{62}{1225} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{213} = \frac{31}{245} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{221} = -\frac{62}{1225} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{222} = -\frac{31}{245} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{223} = \frac{31}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{231} = -\frac{124}{6125} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^4 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 - \frac{186}{1225} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{232} = -\frac{62}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 - \frac{31}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{233} = \frac{31}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2 - \frac{15}{14} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \left(\frac{28}{13} + \frac{11}{7} \epsilon_1 \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{241} = \frac{1743}{1715} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{251} = \frac{T_0^2}{\rho_0^4} \epsilon_{12}^2$$

$$A_{261} = \frac{165}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{271} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{42}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$A_{281} = \frac{405}{98} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{249}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_{12}^2$$

$$A_{291} = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{405}{196} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{1743}{1715} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0^2} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{111} = -\frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^4} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{121} = \frac{62}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \epsilon_1^3 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{131} = -\frac{10}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{141} = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^4} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{151} = \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{161} = \frac{31}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{171} = \frac{62}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1^3 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 - \frac{10}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{62}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{181} = \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{91} = \frac{62}{1225} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{31}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 \\ - \frac{81}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{81}{78} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right)^2 \epsilon_1^3 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B'_{111} = \frac{6}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad B'_{112} = \frac{16}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$B'_{113} = -\frac{14}{3} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad B'_{114} = \frac{15}{14} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$B'_{121} = \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_{12}^2, \quad B'_{122} = -\frac{15}{7} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_{12}^2$$

$$B'_{131} = -\frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_{12}, \quad B'_{141} = \frac{4}{75} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}$$

$$B'_{142} = -\frac{2}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \rho_0 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}, \quad B'_{143} = \frac{56}{75} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}$$

$$B'_{151} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2, \quad B'_{161} = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_{12}, \quad B'_{171} = \frac{123}{44} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2$$

$$B'_{172} = -\frac{6}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2, \quad B'_{181} = \frac{27}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$B'_{182} = \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{27}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad B'_{183} = -\frac{14}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$B'_{184} = \frac{83}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad B'_{191} = \frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_9 \epsilon_{12}, \quad B''_{111} = \frac{10}{7} \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B''_{121} = -\frac{62}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12} + \frac{27}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{122} = -\frac{40}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad B''_{123} = \frac{6}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} + \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{124} = \frac{28}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{15}{14} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) T_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{125} = -2 \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \rho_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad B''_{131} = \frac{6}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B''_{132} = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad B''_{133} = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{141} = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad B''_{142} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_{12} - \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B_{143}'' = \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12},$$

$$B_{151}'' = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{33}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{165}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{152}'' = -\frac{6}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{161}'' = \frac{165}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{51}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_{12}^2 + \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{P_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{162}'' = -\frac{6}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \epsilon_{12}^2 - \frac{15}{7} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2, \quad B_{163}'' = -\frac{15}{7} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{171}'' = \frac{10}{7} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_9 \epsilon_{12}, \quad B_{172}'' = \frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{181}'' = \frac{4}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad B_{182}'' = -\frac{2}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 P_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{183}'' = \frac{56}{75} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad B_{191}'' = \frac{6}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{192}'' = -\frac{14}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad B_{193}'' = \frac{15}{14} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{111}''' = \frac{6}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad B_{112}''' = -\frac{32}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{113}''' = -\frac{83}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{114}''' = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} + \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_{12} + \frac{83}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{121}''' = \frac{11}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{165}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{122}''' = -\frac{6}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 - \frac{15}{7} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{131}''' = \frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_9 \epsilon_{12} + \frac{10}{7} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12} - \frac{8}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{132}''' = \frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12}, \quad B_{141}''' = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_6 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{142}''' = \frac{4}{7} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12} + \frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{151}''' = -\frac{62}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_c^2 \epsilon_{12} + \frac{27}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_c \epsilon_{12} - \frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_c$$

$$B_{152}''' = -\frac{40}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12} + \frac{40}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_c \epsilon_{12}$$

$$B_{153}''' = -2 \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \rho_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_c \epsilon_{12}, \quad B_{154}''' = -\left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \rho_0 \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_c^2$$

$$B_{161}''' = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0^2} \right) \epsilon_c \epsilon_9 \epsilon_{12} - \frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{162}''' = -\frac{4}{3} \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_9, \quad B_{171}''' = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{181}''' = \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{191}''' = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{211} = -\frac{10}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad B_{221} = \frac{124}{2625} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12}$$

$$B_{222} = \frac{62}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12}, \quad B_{223} = -\frac{31}{105} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12}$$

$$B_{231} = -\frac{20}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12} - \frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B_{241} = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \rho_0 \epsilon_1^3 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{251} = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2 + \frac{249}{245} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0^2} \right) \epsilon_c \epsilon_{12}^2 \\ - \frac{165}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12}^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_c \epsilon_{12}^2$$

$$B_{252} = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{261} = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9 \epsilon_{12} - \frac{10}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) T_0 \epsilon_1^3 \epsilon_4^2 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$B_{271} = \frac{124}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^3 \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad B_{272} = \frac{62}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}$$

$$B_{273} = -\frac{1}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12} , \quad B_{281} = 2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B_{291} = \frac{165}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 , \quad B'_{211} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B'_{221} = \frac{165}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 , \quad B'_{231} = -\frac{6}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}$$

$$B'_{241} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$B'_{251} = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{6}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B'_{261} = 5 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 , \quad B'_{271} = \frac{1413}{1225} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2$$

$$B'_{281} = \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{P_0^4} \right) \epsilon_{12}^2 , \quad B'_{291} = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{211} = 2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + 5 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B''_{221} = \frac{249}{245} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{165}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{249}{245} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$B''_{222} = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{231} = \frac{405}{98} \left(\frac{T_0^2}{P_0^3} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{249}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^3} \right) \epsilon_{12}^2$$

$$B''_{232} = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{241} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{165}{98} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2$$

$$B''_{251} = -\frac{6}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B''_{261} = -\frac{14}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} , \quad B''_{271} = \frac{6}{7} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_{12} , \quad B''_{281} = -\frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_1$$

$$B''_{282} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_{12} - 3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{83}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B''_{291} = \frac{6}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{292}'' = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} + \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$B_{293}'' = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad B_{211}''' = -\frac{27}{14} \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$B_{221}''' = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12} - 3 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{83}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_1$$

$$C_{111} = -\frac{4}{75} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}, \quad C_{121} = \frac{6}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{131} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}^2, \quad C_{141} = \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_{12}^2$$

$$C_{151} = -\frac{6}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_{12}, \quad C_{161} = \frac{123}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{171} = -\frac{6}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{181} = -\frac{62}{525} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_{12} + \frac{6}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12} + \frac{6}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{191} = \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}^2 + \frac{123}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6$$

$$C_{111}' = \frac{405}{98} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{165}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2 + \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^3} \right) \epsilon_{12}^2$$

$$C_{121}' = -\frac{6}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$C_{131}' = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad C_{141}' = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$C_{151}' = -\frac{4}{75} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{161}' = \frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{171}' = \frac{81}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}^2 + \frac{405}{196} \left(\frac{T_0^2}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_{12}^2 + \frac{33}{49} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}^2$$

$$+ \frac{165}{98} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}^2.$$

$$C_{181}' = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{4}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{8}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_6 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$C_{191}' = -\frac{27}{35} \left(\frac{m}{\rho_0 h} \right) \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}.$$

$$C_{111}'' = -\frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$C_{121}'' = \frac{62}{525} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_{12} + \frac{6}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12} \\ + \frac{6}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{27}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{131}'' = -\frac{8}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right)^2 \left(\frac{1}{P_0^2} \right) \epsilon_6 \epsilon_9 \epsilon_{12} - \frac{4}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9 \epsilon_{12}$$

$$C_{141}'' = -2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad C_{151}'' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_{12}$$

$$C_{152}'' = 2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_{12}, \quad C_{171}'' = -\epsilon_1, \quad C_{181}'' = -\frac{4}{3} \epsilon_1 \epsilon_9$$

$$C_{191}'' = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_6, \quad C_{192}'' = -\epsilon_1 \epsilon_4, \quad C_{111}''' = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_9$$

$$C_{121}''' = -\frac{11}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12} - 3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_{12}$$

$$C_{122}''' = 2 \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}, \quad C_{131}''' = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1, \quad C_{132}''' = -\left(\frac{m}{P_0 k} \right) P_0 t$$

$$C_{141}''' = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad C_{142}''' = -\left(\frac{m}{P_0 k} \right) P_0 \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_4$$

$$C_{151}''' = -\epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad C_{161}''' = \epsilon_4 \epsilon_6$$

$$C_{171}''' = -2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{181}''' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{182}''' = 2 \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{191}''' = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_9$$

$$C_{192}''' = -\frac{4}{3} \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_9, \quad C_{111}'''' = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2$$

$$C_{112}^{(11)} = -\epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6$$

$$C_{121}^{(111)} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{11}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_{12}$$

$$C_{122}^{(111)} = -\frac{27}{14} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{123}^{(111)} = 2 \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{131}^{''''} = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9, \quad C_{141}^{''''} = -\frac{4}{3} \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9$$

$$C_{151}^{''''} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6^2, \quad C_{152}^{''''} = - \left(\frac{m}{P_0 k} \right) P_0 \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6^2$$

$$C_{161}^{''''} = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_9, \quad C_{162}^{''''} = -\frac{4}{3} \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_9$$

$$C_{211} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad C_{221} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1$$

$$C_{231} = \frac{4}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) P_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_9, \quad C_{241} = \frac{4}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) P_0 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_9$$

$$C_{251} = \frac{4}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9, \quad C_{261} = \frac{4}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_9$$

$$C_{271} = -\frac{14}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{281} = -\frac{14}{3} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{291} = -\frac{11}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{211}' = -2 \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$C_{221}' = -\frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_{12}, \quad C_{231}' = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_{12} - \frac{15}{14} \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12}$$

$$C_{241}' = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9$$

$$C_{242}' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{83}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{251}' = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_9$$

$$C_{252}' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{83}{35} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{3}{7} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \left(\frac{1}{P_0} \right) \epsilon_{12}$$

$$C_{261}' = \frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad C_{271}' = \frac{2}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1$$

$$C_{281}' = -\frac{14}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}, \quad C_{291}' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0^2} \right) \epsilon_{12}$$

$$C_{211}'' = -\frac{14}{5} \left(\frac{m}{P_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad C_{221}'' = -3 \left(\frac{T_0}{P_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$C_{231}'' = \epsilon_4 \epsilon_6, \quad C_{251}'' = \epsilon_4 \epsilon_6^2$$

$$D_{111} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad D_{121} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1$$

$$D_{131} = -\frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6^2, \quad D_{141} = -2 \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_{12}$$

$$D_{151} = -3 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_{12},$$

$$D_{161} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_{12} - 3 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_{12} - \frac{11}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$D_{171} = -2 \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}, \quad D_{181} = -3 \left(\frac{T_0}{\rho_0^2} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12}$$

$$D_{191} = -\frac{3}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_{12} - 3 \left(\frac{T_0}{\rho_0} \right) \epsilon_1 \epsilon_4^2 \epsilon_6 \epsilon_{12} - \frac{11}{7} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_{12}$$

$$D'_{111} = \frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6, \quad D'_{121} = \frac{2}{5} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1$$

$$D'_{131} = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon_6 \epsilon_9, \quad D'_{141} = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \epsilon_1 \epsilon_9$$

$$D'_{151} = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_4 \epsilon_6^2 \epsilon_9, \quad D'_{161} = \frac{8}{15} \left(\frac{m}{\rho_0 k} \right) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \epsilon_6 \epsilon_9$$

$$D'_{171} = \epsilon_4^2 \epsilon_6^2, \quad D'_{181} = \epsilon_4 \epsilon_6, \quad D_{211} = \epsilon_4 \epsilon_6$$

$$D_{231} = \epsilon_4^2 \epsilon_6^2, \quad D_{241} = \epsilon_4 \epsilon_6, \quad D_{251} = \epsilon_4 \epsilon_6$$

$$E_{111} = \epsilon_4 \epsilon_6, \quad E_{131} = \epsilon_4^2 \epsilon_6^2$$

APENDICE II-D

$$a(\omega_c, \omega_v) = \frac{9\omega_c \omega_v}{32c_0^2 \gamma^2} \left\{ \frac{4}{3}(1-\gamma) + \frac{8\omega_v}{\omega_c} \pm \omega_v \left(\frac{\gamma}{\omega_c} - \frac{4}{3\omega_v} \right) \right. \\ \left. \pm \frac{4}{3} \gamma \frac{\left(\frac{2}{\omega_c} - \frac{\gamma}{\omega_c} - \frac{4}{3\omega_v} \right)}{\left(\frac{\gamma}{\omega_c} - \frac{4}{3\omega_v} \right)} \right\}$$

$$b(\omega_c, \omega_v) = \frac{3\omega_c \omega_v}{8c_0^2 \gamma} \left\{ \left(\frac{\gamma}{\omega_c} + \frac{4}{3\omega_v} \right) \pm \left(\frac{\gamma}{\omega_c} - \frac{4}{3\omega_v} \right) \right\}$$

— o —

$$a_1 = \frac{48c_0^2}{3\omega_c \omega_v} - \frac{c_0^2 t_2^2}{\omega_c}, \quad a_1' = - \left(\frac{48c_0^2 t_2 t_3}{3\omega_c \omega_v} + \frac{c_0^2 t_2 t_3^2}{\omega_c} \right)$$

$$a_2 = \frac{c_0^2}{\omega_c}, \quad a_2' = \frac{48c_0^2 t_3}{3\omega_c \omega_v} + \frac{48c_0^2 t_2}{3\omega_c \omega_v} + \frac{c_0^2 t_3^2}{\omega_c}$$

$$\textcircled{1} b_1' = t_3^2 + t_2^2 + \frac{8t_2}{\omega_c} + \frac{4t_3}{3\omega_v}, \quad b_1'' = t_2^2 t_3^2 + \frac{8t_2 t_3^2}{\omega_c} + \frac{4t_2^2 t_3}{3\omega_v}$$

$$b_2 = \frac{\gamma}{\omega_c} + \frac{4}{3\omega_v}, \quad b_2' = \frac{8t_3^2}{\omega_c} + \frac{4t_2^2}{3\omega_v}$$

$$c_1' = \frac{1}{c_0^2}, \quad c_1'' = \frac{t_3^2}{c_0^2} + \frac{t_2^2}{c_0^2}, \quad c_1''' = \frac{t_2^2 t_3^2}{c_0^2}$$

APENDICE III-A

DATOS EXPERIMENTALES DE MEYER-SESSLER

r	β / β_0	r	α / β_0
.013	.46	.014	.229
.018	.48	.018	.2089
.022	.46	.018	.229
.028	.49	.02	.2398
.039	.53	.027	.2344
.054	.5	.034	.2344
.069	.47	.036	.2454
.091	.5	.044	.2344
.141	.52	.056	.2238
.223	.57	.061	.229
.354	.53	.077	.2511
.512	.63	.1	.257
.645	.62	.123	.2754
.87	.71	.123	.2511
1.288	.81	.147	.2511
3.019	.92	.154	.257
3.89	.92	.208	.263
5.128	.97	.251	.2818
7.079	1	.331	.2951
		.524	.3235
		.691	.309
		.912	.2884
		1.23	.257
		1.412	.257
		1.778	.229
		2.344	.2137
		3.09	.1737
		3.981	.1479
		5.37	.1148
		6.606	.1023
		8.91	.0707
		12.022	.0537
		15.488	.0436

DATOS EXPERIMENTALES DE GREENSPAN

r	β / β_0	r	α / β_0
.21	.309	0.21	0.2041
.21	.5011	0.32	0.2754
.32	.5011	0.49	0.3235
.32	.537	0.77	0.3162
.49	.5888	1.2	0.263
.77	.6918	1.23	0.2754
1.2	.7585	1.86	0.2344
1.82	.8511	2.34	0.2041
2.34	.8912	3.1	0.1737
3.02	.9332	3.98	0.1445
3.98	.9549	5.25	0.1202
5.13	.9772	6.76	0.0954
6.76	1	8.91	0.0758
8.91	1	12.02	0.0549
12.02	1	12.02	0.0575
15.85	1	16.22	0.0416
21.38	1	16.22	0.0426
29.51	1	22.38	0.0323
40.74	1	30.2	0.0234
57.54	1	42.66	0.0169
		60.26	0.012

APENDICE III-B

NAVIER-STOKES

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	.006999	.999930
80.000000	.008748	.999890
63.000000	.011108	.999822
50.000000	.013994	.999718
40.000000	.017488	.999560
32.000000	.021851	.999312
25.000000	.027950	.998874
20.000000	.034903	.998243
16.000000	.043561	.997260
13.000000	.053494	.995860
10.000000	.069231	.993039
8.000000	.086010	.989200
6.300000	.108099	.982791
5.000000	.134090	.973167
4.000000	.163786	.959176
3.200000	.197772	.938709
2.500000	.239047	.906012
2.000000	.277184	.865361
1.600000	.312507	.813314
1.300000	.339276	.755474
1.000000	.360212	.673298
.800000	.364738	.600514
.630000	.356842	.525344
.500000	.339739	.459241
.400000	.317954	.403122
.320000	.293818	.354437
.250000	.266583	.308234
.200000	.242643	.272349
.160000	.219942	.241150
.130000	.200180	.215690
.100000	.177230	.187681
.050000	.127234	.130924
.030000	.099137	.100852
.010000	.057570	.057900

BURNETT

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	.006998	.999893
80.000000	.008746	.999832
63.000000	.011103	.999729
50.000000	.013983	.999571
40.000000	.017467	.999330
32.000000	.021811	.998955
25.000000	.027867	.998292
20.000000	.034741	.997341
16.000000	.043247	.995870
13.000000	.052918	.993797
10.000000	.068003	.989691
8.000000	.083703	.984249
6.300000	.103670	.975504
5.000000	.126024	.963084
4.000000	.149969	.946304
3.200000	.175319	.923921
2.500000	.203467	.892063
2.000000	.227562	.856997
1.600000	.249389	.816694
1.300000	.267520	.775288
1.000000	.288823	.718024
.800000	.308197	.661903
.630000	.323174	.582195
.500000	.310683	.499627
.400000	.285327	.432763
.320000	.256894	.376911
.250000	.225862	.324706
.200000	.199581	.284265
.160000	.175500	.249034
.130000	.155201	.220213
.100000	.132420	.188469
.050000	.085991	.124522
.030000	.062101	.091401
.010000	.030480	.046481

SUPER-BURNETT

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	.006998	.999893
80.000000	.008746	.999832
63.000000	.011102	.999729
50.000000	.013982	.999571
40.000000	.017465	.999330
32.000000	.021807	.998954
25.000000	.027859	.998290
20.000000	.034725	.997336
16.000000	.043214	.995859
13.000000	.052852	.993772
10.000000	.067840	.989629
8.000000	.083346	.984120
6.300000	.102831	.975259
5.000000	.124125	.962727
4.000000	.145933	.946081
3.200000	.167232	.924737
2.500000	.187513	.896778
2.000000	.200451	.870207
1.600000	.206409	.846546
1.300000	.737492	.500969
1.000000	.624270	.392834
.800000	.536906	.320240
.630000	.455222	.259080
.500000	.387556	.212469
.400000	.331615	.176348
.320000	.283630	.146945
.250000	.238455	.120504
.200000	.203721	.100950
.160000	.173934	.084702
.130000	.150051	.072017
.100000	.124401	.058733
.050000	.075486	.034407
.030000	.052054	.023259
.010000	.023228	.010068

CARRASSI-MORRO

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	1.024374	.006842
80.000000	1.024331	.008552
63.000000	1.024258	.010859
50.000000	1.024145	.013679
40.000000	1.023973	.017094
32.000000	1.023705	.021357
25.000000	1.023230	.027315
20.000000	1.022547	.034103
16.000000	1.021482	.042550
13.000000	1.019968	.052231
10.000000	1.016921	.067540
8.000000	1.012782	.083814
6.300000	1.005894	.105141
5.000000	.995600	.130058
4.000000	.980736	.158228
3.200000	.959199	.189979
2.500000	.925269	.227637
2.000000	.883804	.261279
1.600000	.831672	.291067
1.300000	.774620	.312265
1.000000	.694032	.326803
.800000	.621335	.327154
.630000	.542404	.314970
.500000	.468529	.291117
.400000	.403326	.259619
.320000	.345680	.224454
.250000	.290580	.186086
.200000	.248798	.155207
.160000	.216019	.130665
.130000	.195738	.115742
.100000	.186533	.110782
.050000	.201646	.152182
.030000	.214873	.171048
.010000	.237894	.178272

A23

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	.999823	.006997
80.000000	.999724	.008743
63.000000	.999555	.011096
50.000000	.999294	.013967
40.000000	.998898	.017434
32.000000	.998283	.021743
25.000000	.997198	.027719
20.000000	.995648	.034449
16.000000	.993262	.042678
13.000000	.989926	.051868
10.000000	.983411	.065756
8.000000	.974960	.079489
6.300000	.961821	.095607
5.000000	.944069	.111422
4.000000	.921732	.125123
3.200000	.894735	.135158
2.500000	.861422	.139730
2.000000	.830979	.137032
1.600000	.802961	.128435
1.300000	.780727	.116615
1.000000	.758862	.099078
.800000	.745453	.083902
.630000	.735427	.068823
.500000	.728930	.056042
.400000	.724769	.045563
.320000	.722030	.036836
.250000	.720096	.028991
.200000	.718992	.023290
.160000	.718280	.018682
.130000	.717848	.015204
.100000	.717504	.011711
.050000	.717129	.005864
.030000	.717049	.003519
.010000	.717009	.001173

A15

r	β / β_0	α / β_0
100.000000	.730666	.001227
80.000000	.730666	.001533
63.000000	.730665	.001947
50.000000	.730663	.002453
40.000000	.730661	.003066
32.000000	.730658	.003833
25.000000	.730651	.004906
20.000000	.730643	.006132
16.000000	.730629	.007665
13.000000	.730609	.009433
10.000000	.730569	.012261
8.000000	.730513	.015322
6.300000	.730419	.019450
5.000000	.730274	.024493
4.000000	.730055	.030590
3.200000	.729716	.038186
2.500000	.729121	.048763
2.000000	.728280	.060751
1.600000	.727006	.075551
1.300000	.725263	.092330
1.000000	.721977	.118401
.800000	.717928	.145444
.630000	.712050	.179823
.500000	.704792	.218591
.400000	.696597	.260988
.320000	.687903	.307730
.250000	.678920	.363393
.200000	.672641	.415866
.160000	.669181	.468724
.130000	.669057	.516712
.100000	.673284	.573539
.050000	.700735	.690720
.030000	.724179	.744443
.010000	.757812	.799475

APENDICE IV-A

$$P = - \frac{\epsilon_1 \lambda k^2}{F_1 F_2} + \frac{i \epsilon_3 \lambda F_3 F_5 k}{\eta B F_2 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \left(\frac{F \omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{4 \epsilon_3 \lambda F_5 k^2}{3 F_2 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \\ + \frac{\epsilon_4 \lambda k^2}{F_2 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} - \frac{\epsilon_5 \lambda k^4}{F_1 F_2 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} - \frac{i \epsilon_6 \lambda k^3}{F_2 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \left(\frac{F \omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right)$$

$$N = \frac{\epsilon_7 \omega}{i F_1} + \frac{\epsilon_3 F_3 F_5}{\eta (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \left[H + \frac{\omega^2}{k^2} \right] \\ + i \frac{4 \epsilon_3 \omega F_5 \omega}{3 \rho_0 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} - \frac{\epsilon_8 k^2}{(\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} - \frac{i \epsilon_9 \omega \omega k^2}{F_1 (\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \\ - \frac{\epsilon_6 B k^2}{(\epsilon_4 F_5 - \epsilon_2 k^2)} \left[H + \frac{\omega^2}{k^2} \right]$$

y en donde:

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2 E}{\rho_0 B} \right), \quad \epsilon_2 = \epsilon_5 \epsilon_3 \epsilon_4, \quad \epsilon_3 = \frac{\epsilon_3 E}{\rho_0 B}$$

$$\epsilon_4 = \epsilon_3 \epsilon_5 \epsilon_{30}, \quad \epsilon_5 = \epsilon_5 \epsilon_3 \epsilon_1, \quad \epsilon_6 = \frac{\epsilon_3 \epsilon_5 \epsilon_{33}}{B}$$

$$\omega = D - \frac{EA}{B}, \quad \epsilon_7 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\rho_0}, \quad \epsilon_8 = \epsilon_3 \epsilon_5 \epsilon_{31}$$

$$H = \frac{A}{B}, \quad \epsilon_9 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5}{\rho_0}$$

APENDICE IV-B

$$\begin{aligned}
 Z = & \frac{3\epsilon_4\epsilon_7\rho_0\pi\omega}{4F_4k} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{3\epsilon_4\epsilon_7\rho_0B\omega^2}{4F_4k^2} \\
 & + \frac{3\epsilon_4\epsilon_8}{4F_4(F_4F_5 - \epsilon_{10}k^2)} \left[\frac{i\epsilon_{31}\rho_0F_4k}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) + \frac{\epsilon_{14}F_4k^2}{F_1} \right. \\
 & + \frac{\epsilon_{11}F_4\rho_0\pi\omega k}{F_1} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\rho_0\pi\omega}{k} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) \\
 & + \left. \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\rho_0B\omega^2}{k^2} \right] - \frac{3\epsilon_5}{4(F_4F_5 - \epsilon_{10}k^2)} \left[\frac{i\epsilon_{31}\rho_0F_4k}{D} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) \right. \\
 & + \frac{\epsilon_{14}F_4k^2}{F_1} + \frac{\epsilon_{11}F_4\rho_0\pi\omega k}{F_1} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) - \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\pi\rho_0\omega}{k} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) \\
 & + \left. \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\pi\rho_0B\omega^2}{k^2} \right] \\
 & - \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\pi\rho_0\omega}{k} \left(\frac{E\omega}{k} - \frac{k}{\omega} \right) + \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)\rho_0B\omega^2}{k^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W = & -\frac{\epsilon_4\epsilon_6\eta}{F_3F_4} + \frac{i\epsilon_4\epsilon_7\eta Q\omega\omega}{F_3F_4} + \frac{i\epsilon_4\epsilon_8\eta k}{F_3F_4(F_4F_5 - \epsilon_{10}k^2)} \left[-i\epsilon_{31}RF_4k \right. \\
 & + \frac{\epsilon_{11}F_4Q\omega k}{F_1} - \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)Q\omega}{k} - i(\epsilon_{33}F_4 - \epsilon_{13})k \left. \right] \\
 & - \frac{\epsilon_5\eta k}{F_3(F_4F_5 - \epsilon_{10}k^2)} \left[-i\epsilon_{31}RF_4k + \frac{\epsilon_{11}F_4\omega Qk}{F_1} - \frac{(\epsilon_{30}F_4 - \epsilon_{12}k^2)Q\omega}{k} \right. \\
 & + \left. i(\epsilon_{33}F_4 - \epsilon_{13})k \right]
 \end{aligned}$$

$$Q = B - \frac{1E}{D}, \quad E_{10} = E_6 E_{34}, \quad R = \frac{E}{D}, \quad T = \frac{A}{D}$$

$$E_{11} = E_1 E_{32}, \quad E_{12} = E_7 E_{34}, \quad E_{13} = E_6 E_{34}$$

$$E_{14} = E_2 E_{32}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Yip, J. P. Boon, *Molecular Hydrodynamics* (Mc. Graw Co., N. Y. 1980).
- [2] W. E. Alley, B. J. Alder, *Phys. Rev. A*, 27, 3158 (1983).
- [3] D. Jou, C. Pérez-García, L. S. García-Colín, M. López de Haro y R. F. Rodríguez, *Phys. Rev. A*, 31, 2502 (1985).
- [4] R. F. Rodríguez, L. S. García-Colín, M. López de Haro, D. Jou y C. Pérez-García, *Phys. Lett. A*, 107, 17 (1985).
- [5] C. Pérez-García y D. Jou, *J. Phys. A*, 19, 2881 (1986).
- [6] D. Jou, J. Casas-Vázquez y G. Lebon, *Rep. Prog. Phys.*, 51, 1105 (1988).
- [7] L. S. García-Colín, M. López de Haro, R. F. Rodríguez, J. Casas Vázquez y D. Jou, *J. Stat. Phys.*, 37, 465 (1984).
- [8] L. S. García-Colín, *Rev. Mex. Fis.*, 34, 344 (1988).
- [9] J. Casas Vázquez, D. Jou, G. Lebon, Eds., *Recent Developements in Non-Equilibrium Thermodynamics, Lectures Notes in Physics*, Vol. 199 (Springer-Verlag, Berlin 1984).

- [10] S. Hess, *Z. Naturforsch.*, 32A, 678 (1977).
- [11] S. R. de Groot, P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, (Dover Publ., N. Y. 1984).
- [12] R. M. Velasco, *Comunicación Interna U. A. M. - I.*
- [13] H. Grad, *Comm. Pure appl. Math.* 2, 331 (1949)
- [14] *The Collected Paper of James C. Maxwell*, Vol. II, W. D. Niven, Ed., (Dover Publ., N. Y. 1965).
- [15] C. Cattaneo, *Atti dei Seminario Matematica e Fisica delli, Università di Modena*, 3:3 (1948); *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 247 (1948).
- [16] P. Vernotte, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 246:3154 (1958).
- [17] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1686).
- [18] G. Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8:287 (1845).
- [19] G. Kirchhoff, *Poggendorf Ann. Phys.*, 134:177 (1868).

- [20] L. Rayleigh, *Phil. Trans. A*, 183, 1 (1892)
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*,
(Addison-Wesley Publ. 1959).
- [22] A. B. Bhatia, *Ultrasonic Absorption: An Introduction to
the Theory of Sound Absorption and Dispersion in Gases,
liquids and Solids*, (Dover Publ., N. Y. 1985).
- [23] M. Greenspan, *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, 644 (1956); 31,
155 (1959).
- [24] E. Meyer, G. Sessler, *Z. Phys.*, 149, 15 (1957).
- [25] S. M. Karim, L. Rosenhead, *Rev. of Mod. Phys.*, 24, 108
(1952).
- [26] S. V. Krivokhizha, in *Proceedings (Trudy) of P. N.
Levedev Physics Institute*, Vol. 72, Ed. D. V. Skobeltsyn
(1975).
- [27] J. D. Foch, G. W. Ford, *The Dispersion of Sound in
Monoatomic Gases, in Studies in Statistical Mechanics*,
Vol. V, Ed. J. de Boer, G. E. Uhlenbeck, (North Holland
Publ., Amsterdam 1970).

- [28] M. Greenspan, *Transmission of Sound Waves in Gases at Very Low Pressures*, in *Physical Acoustics*, Vol. IIA, Ed. W. P. Mason, (Academic Press 1964).
- [29] D. Kahn, D. Mintzer, *The Physics of Fluids*, 8, 1090 (1965).
- [30] A. M. Anile, S. Pluchino, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 3, 167 (1984).
- [31] M. Carrassi, A. Morro, *Il Nuovo Cimento*, 9, 321 (1972); 13, 281 (1973).
- [32] A. I. Máltsev, *Fundamentos de Algebra Lineal* (MIR, 1978).
- [33] M. Kranys, *J. Phys. A*, 10, 689 (1977).
- [34] J. V. Uspensky, *Theory of Equations* (Mc Graw Hill Co. 1948).
- [35] I. Müller, en Ref. 9.
- [36] Champann-Cowling, *The Mathematical Theory of Non-*

Uniformes Gases (Cambridge Univ. Press 1970).

[37] R. M. Velazco, F. J. Uribe, *Physica* 134A, 339-358
(1986).

[38] J. Kestin, K. Knierim, E. A. Mason, B. Najafi, S. T. Ro,
M. Waldman, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 13, 1 (1984).