



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
UNIDAD IZTAPALAPA

**Un acercamiento al número de
sujeción de una gráfica**

TESIS QUE PRESENTA

Gabriela Juan García

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOAQUÍN TEY CARRERA

JURADO CALIFICADOR:

PRESIDENTE: DR. EDUARDO RIVERA CAMPO

SECRETARIA: DRA. ADRIANA HANSBERG PASTOR

VOCAL: DR. JOAQUÍN TEY CARRERA

MÉXICO, D.F. JUNIO DE 2015



UN ACERCAMIENTO AL NUMERO DE SUJECION DE UNA GRAFICA

En México, D.F., se presentaron a las 12:00 horas del día 15 del mes de junio del año 2015 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. EDUARDO RIVERA CAMPO
- DR. JOAQUIN TEY CARRERA
- DRA. ADRIANA HANSBERG PASTOR



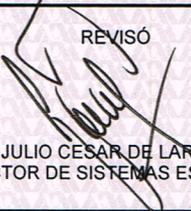

GABRIELA JUAN GARCIA
ALUMNA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)
DE: GABRIELA JUAN GARCIA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

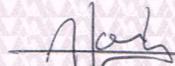
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. EDUARDO RIVERA CAMPO

VOCAL

DR. JOAQUIN TEY CARRERA

SECRETARIA

DRA. ADRIANA HANSBERG PASTOR

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
2. Número de sujeción de una gráfica	9
2.1. Cotas superiores	9
2.2. Valor exacto para algunas gráficas	15
2.2.1. Gráficas completas y multipartitas completas	15
2.2.2. Trayectorias y ciclos	17
2.2.3. Árboles en general	19
2.2.4. Producto cartesiano de dos gráficas completas	21
2.2.5. Producto cartesiano de dos trayectorias	23
2.3. Gráficas sobre superficies	25
3. Gráficas γ -insensibles extremales	33
3.1. Gráficas con un γ -conjunto fijo	34
3.2. Gráficas conexas	37
3.3. Gráficas conexas tras la eliminación de cualquier arista	48
4. <i>ASR</i> -gráficas	53
4.1. Propiedades	53
4.2. Caracterización	60
4.3. <i>ASR</i> -gráficas extremales	65
Conclusiones	71
Bibliografía	73

Introducción

La Teoría de Dominación (ver [10] y [11]) se ha convertido en uno de los temas de gran interés en Teoría de Gráficas. Una de sus aplicaciones más estudiadas concierne a las redes de comunicación. Una red de comunicación consta de una serie de sitios y enlaces entre ellos, por lo tanto, ésta se puede modelar mediante una gráfica.

Consideremos el problema de seleccionar el mínimo número de sitios en la red para colocar transmisores de tal manera que todo sitio que no tenga un transmisor esté conectado a alguno que sí lo tenga. Este problema se reduce a encontrar un conjunto dominante mínimo en la gráfica que representa a dicha red. Sobre esta red de comunicación, podemos hacernos preguntas concernientes a su vulnerabilidad ante fallas en los enlaces entre sitios. Una de ellas es la de saber cuál es el mínimo número de enlaces que deben fallar en la red para que sea necesario agregar al menos un nuevo transmisor, de tal manera que, en la red resultante, nuevamente se cumpla la condición de que todo sitio que no tenga un transmisor esté conectado a alguno que sí lo tenga. La respuesta a esta última pregunta nos introduce de manera natural al concepto de **número de sujeción** de una gráfica, objeto de estudio de este trabajo.

En 1983, Bauer (ver [2]) introdujo por primera vez la noción de *número de sujeción* como el mínimo número de aristas cuya eliminación hace que el número de dominación de una gráfica aumente y lo denominó *edge stability number*. Sin embargo, fue hasta 1990 cuando Fink, Jacobson, Kinch y Roberts (ver [7]) usaron por primera vez el término *bondage number* al que denominaremos en español *número de sujeción*. Ellos encontraron diferentes resultados acerca de éste y desde entonces, ha sido ampliamente estudiado.

El objetivo general de esta tesis es mostrar los resultados más importantes sobre este número, desde el inicio de su estudio hasta la actualidad.

El trabajo se desarrollará en cuatro capítulos, siguiendo una secuencia entre ellos de tal manera que el lector pueda comprender el contenido con facilidad.

En el primer capítulo, daremos las nociones básicas de Teoría de Gráficas y Teoría de Dominación e introduciremos las notaciones que serán utilizadas a lo largo del trabajo.

En el segundo capítulo, estudiaremos los resultados más importantes acerca del número de sujeción: mostraremos las principales cotas superiores y determinaremos el valor exacto para algunas gráficas.

En el tercer capítulo, abordaremos el trabajo desarrollado en 1988 por Brigham y Dutton (ver [3]). Ellos se enfocaron en el estudio de aquellas gráficas cuyo número de sujeción es mayor a uno. En particular, encontraron el tamaño mínimo de éstas.

En el cuarto y último capítulo, estudiaremos aquellas gráficas cuyo número de sujeción es mayor a uno, pero además cumplen la propiedad de que su número de dominación cambia tras subdividir cualquier arista. En este capítulo es donde se concentra la parte original de la tesis, ya que expondremos nuevos resultados obtenidos acerca de este tipo de gráficas que, como veremos, son un subconjunto de las gráficas estudiadas por Brigham y Dutton (Capítulo 3). Estudiaremos algunas propiedades que nos serán útiles para determinar el tamaño mínimo, daremos a conocer una caracterización y mostraremos cotas para el tamaño mínimo.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo, abordaremos la terminología y las definiciones básicas que serán necesarias para la comprensión del trabajo. Empezaremos con la definición de una gráfica, mencionaremos algunas propiedades y operaciones importantes y finalizaremos introduciendo los conceptos de número de dominación y sujeción, los cuales serán cruciales en este trabajo.

Una **gráfica** es un par $G = (V, E)$ que consta de un conjunto $V(G)$ no vacío y finito y un subconjunto $E(G)$ posiblemente vacío de $V^{(2)}$ (el conjunto de todos los pares no ordenados de la forma uv con $u, v \in V(G)$). A cada elemento de $V(G)$ se le conoce como un **vértice** y a cada elemento de $E(G)$ se le conoce como una **arista**. El **orden** y el **tamaño** de G son las cardinalidades de $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente. En la Figura 1.1 se muestra una gráfica de orden 16.

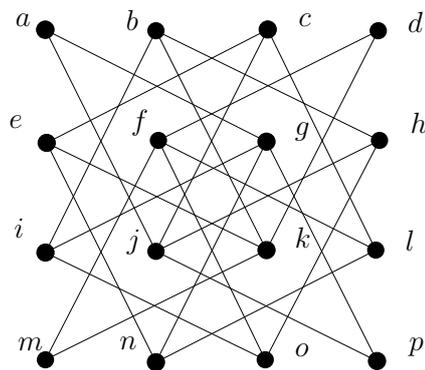


Figura 1.1: Una gráfica con 16 vértices y 24 aristas.

Dos vértices $u, v \in V(G)$ son **adyacentes** si $uv \in E(G)$, una arista e es **incidente** a un vértice v si v es un extremo de e . En la Figura 1.1, el vértice d es adyacente a los vértices f y k e incidente a las aristas df y dk .

La **vecindad abierta** $N(v)$ de $v \in V(G)$ consta del conjunto de vértices adyacentes a v , es decir,

$$N(v) = \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}.$$

La **vecindad cerrada** $N[v]$ de $v \in V(G)$ consta del vértice v junto con su vecindad abierta,

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

Por ejemplo, en la Figura 1.1, la vecindad abierta de b es $N(b) = \{h, i, k\}$, mientras que su vecindad cerrada es $N[b] = N(b) \cup \{b\} = \{b, h, i, k\}$.

Para un conjunto $S \subseteq V(G)$, las vecindades abierta y cerrada de S son $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ y $N[S] = N(S) \cup S$, respectivamente.

Un vértice v se denomina **universal** si $N[v] = V(G)$. Para $S \subseteq V(G)$, un vértice $v \in S$ es **aislado** de S si $N(v) \subseteq V(G) - S$.

La **vecindad privada externa** $EPN(v, S)$ (del inglés *external private neighborhood*) de un vértice $v \in S$ con respecto a $S \subseteq V(G)$, se define como

$$EPN(v, S) := N(v) - N[S - \{v\}].$$

El **grado** $deg(v)$ de un vértice es el número de aristas incidentes a v ,

$$deg(v) = |N(v)|.$$

Los grados mínimo y máximo de los vértices en $V(G)$ se denotan con $\delta(G)$ y $\Delta(G)$, respectivamente. Decimos que una gráfica es **regular** de grado r o r -regular si $\delta(G) = \Delta(G) = r$. En la Figura 1.1, $\delta(G) = 2$ y $\Delta(G) = 4$.

Un **camino** en una gráfica es una sucesión finita no vacía $W = v_0e_1v_1e_2 \dots e_kv_k$, cuyos términos son alternativamente vértices y aristas, tal que para $1 \leq i \leq k$, los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i . Decimos que W es un camino de v_0 a v_k donde el entero k es la **longitud** del camino. En una gráfica simple (sin lazos ni aristas múltiples), un camino es determinado solamente por la sucesión $v_0v_1 \dots v_k$ de sus vértices; si los vértices son todos distintos, entonces a W se le conoce como una **trayectoria**. La trayectoria de orden n se denota con P_n .

Decimos que dos vértices $u, v \in V(G)$ están **conectados** si hay una trayectoria de u a v en G . Una gráfica G es **conexa** si cada par de vértices de G están conectados, de lo contrario es **disconexa**. Mientras no se diga lo contrario, en este trabajo asumiremos que todas las gráficas son simples y conexas. En la Figura 1.2 se muestra una gráfica conexa y una desconexa.

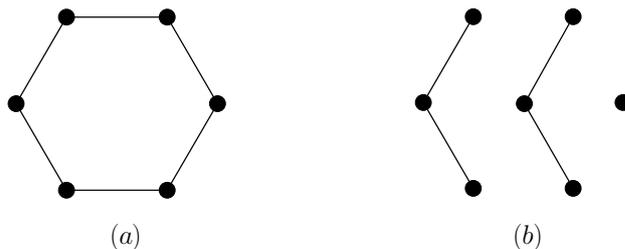


Figura 1.2: (a) Una gráfica conexa, (b) una gráfica desconexa.

Decimos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $uv \in E(H)$ implica que $uv \in E(G)$ y se denota con $H < G$. Si $H < G$ y H contiene todas las aristas $uv \in E(G)$ tal que $u, v \in V(H)$, entonces H es **subgráfica inducida** de G y se denota con $G[H]$. Si $H < G$ y $V(H) = V(G)$, entonces H es **subgráfica generadora** de G .

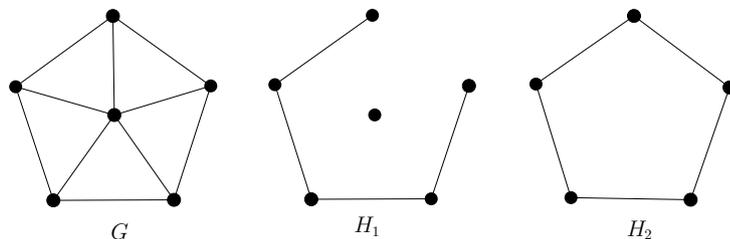


Figura 1.3: Una gráfica G con dos subgráficas H_1 y H_2 , H_1 es generadora pero no inducida, H_2 es inducida pero no generadora.

El **complemento** de la gráfica $G = (V, E)$ es la gráfica $\overline{G} = (V, \overline{E})$, con el mismo conjunto de vértices y tal que dos vértices de \overline{G} son adyacentes si y sólo si no son adyacentes en G .

Dos gráficas G y H son **isomorfas** si existe una biyección

$$\psi : V(G) \rightarrow V(H)$$

tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\psi(u)\psi(v) \in E(H)$ y se denota con $G \cong H$.

Algunas familias de gráficas que usaremos en este trabajo son: los ciclos, los árboles, las estrellas, las gráficas completas y las multipartitas; las cuales describiremos a continuación. A lo largo del trabajo estaremos definiendo algunas otras que sean necesarias.

El **ciclo** C_n de orden $n \geq 3$ tiene tamaño $m = n$, es una gráfica conexa y 2-regular.

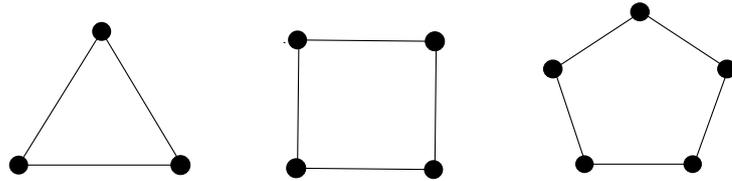


Figura 1.4: Ciclos de tamaño tres, cuatro y cinco.

Una gráfica acíclica, es decir, aquella que no contiene ningún ciclo como subgráfica se denomina **bosque**. Un bosque conexo se denomina **árbol**. Así, un bosque es una gráfica cuyas componentes son árboles. Los vértices de grado uno de un árbol se denominan **hojas**.

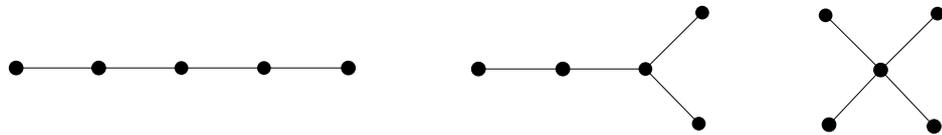


Figura 1.5: Los únicos árboles posibles de orden cinco.

La **estrella** $K_{1,n-1}$ tiene un vértice de grado $n - 1$ y $n - 1$ vértices de grado uno.

Por ejemplo, el primer árbol de la Figura 1.5 es la trayectoria P_5 , mientras que el último, es la estrella $K_{1,4}$.

La **gráfica completa** K_n consta de n vértices, todos ellos adyacentes entre sí dos a dos, de manera que tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Para un entero $t \in \mathbb{Z}$, una gráfica se denomina **t -partita** si $V(G)$ admite una partición V_1, V_2, \dots, V_t tal que $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$ con $|V_i| = n_i$, y donde cada par de vértices $u, v \in V_i$ no son adyacentes. Si la partición de $V(G)$ consta de dos conjuntos, la gráfica se denomina **bipartita** y si todos los vértices de V_i son adyacentes a todos los vértices de V_j para $i \neq j$, diremos

que la gráfica es **t -partita completa** o bipartita completa en el caso $t = 2$. Una gráfica se denomina multipartita (completa) si es t -partita (completa) para alguna $t \geq 2$.

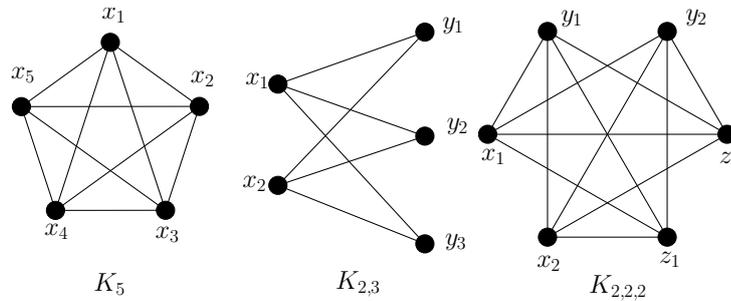


Figura 1.6: Gráficas completa, bipartita completa y 3-partita completa.

A lo largo del trabajo, usaremos en varios resultados algunas modificaciones y operaciones entre gráficas, las cuales describiremos a continuación. Dos de ellas, la eliminación y la subdivisión de una arista, serán cruciales para el desarrollo del trabajo y las estaremos usando constantemente.

Dada una gráfica G y una arista $e \in E(G)$, denotaremos con $G - e$ a la gráfica que se obtiene al **eliminar** la arista e de G y con G_e a la gráfica que se obtiene al **subdividir** la arista e de G . La subdivisión de una arista $e = uv$ consiste en eliminar la arista e de G y añadir un nuevo vértice w y las aristas uw y vw , quedando así una gráfica con $n + 1$ vértices y $m + 1$ aristas. En la Figura 1.7 se muestra un ejemplo.

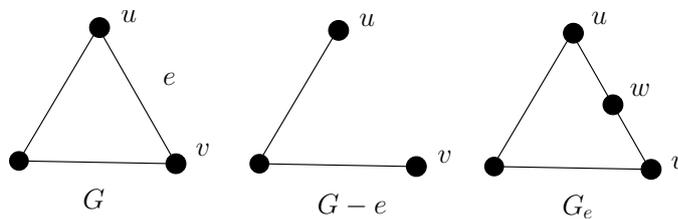


Figura 1.7: Eliminación y subdivisión de la arista e de C_3 .

Dadas las gráficas G y H se definen distintas operaciones como la unión, intersección, suma y producto cartesiano.

- La **unión** $K = G \cup H$ tiene

$$\begin{aligned} V(K) &= V(G) \cup V(H) \text{ y} \\ E(K) &= E(G) \cup E(H). \end{aligned}$$

- La **intersección** $K = G \cap H$ tiene

$$\begin{aligned} V(K) &= V(G) \cap V(H) \text{ y} \\ E(K) &= E(G) \cap E(H). \end{aligned}$$

- Para gráficas disjuntas G y H , la **suma** $K = G + H$ tiene

$$\begin{aligned} V(K) &= V(G) \cup V(H) \text{ y} \\ E(K) &= E(G) \cup E(H) \cup \{uv; u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}. \end{aligned}$$

- El **producto cartesiano** $K = G \times H$ tiene $V(K) = V(G) \times V(H)$ y los vértices $\{u_1, v_1\}$ y $\{u_2, v_2\}$ en $V(K)$ son adyacentes si y sólo si ya sea que $u_1 = u_2$ y $v_1v_2 \in E(H)$ o $v_1 = v_2$ y $u_1u_2 \in E(G)$.

Un concepto fundamental en este trabajo es el de **dominación**, el cual ha sido muy estudiado en los últimos años (ver [10] y [11]).

Un conjunto $D \subseteq V(G)$ se denomina **conjunto dominante** si cada vértice $v \in V(G)$ es un elemento de D o adyacente a un elemento de D . Diremos que D domina a G y escribiremos $D \succ G$. En la Figura 1.8 se muestra un ejemplo.

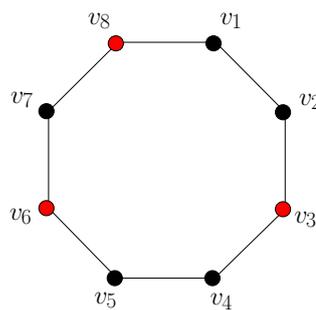


Figura 1.8: Una gráfica donde $D = \{v_3, v_6, v_8\}$ es un conjunto dominante.

El **número de dominación** $\gamma(G)$ de una gráfica G , se define como la cardinalidad mínima de un conjunto dominante.

Un conjunto dominante de cardinalidad mínima se denomina γ -conjunto. Denotaremos con $\Gamma(G)$ al conjunto de todos los γ -conjuntos de G . En la Figura 1.9, se muestra una gráfica con conjuntos dominantes $D_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $D_2 = \{v_3, v_6, v_7, v_8\}$ y $D_3 = \{v_2, v_4, v_6, v_7, v_8\}$ de cardinalidad tres, cuatro y cinco, respectivamente. Dado que no existe un conjunto dominante con dos vértices, tenemos que $\gamma(G) = 3$.

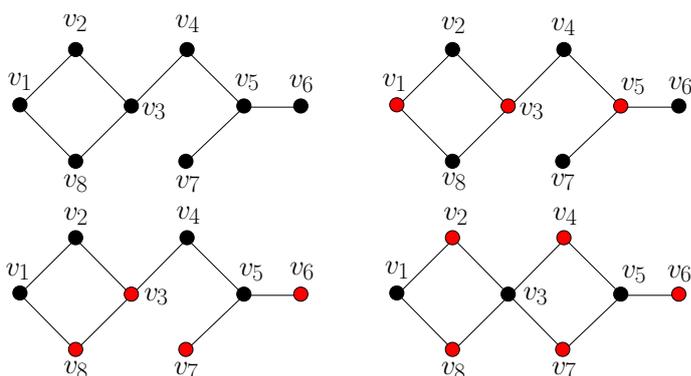


Figura 1.9: Conjuntos dominantes de cardinalidad 3, 4 y 5.

Un resultado importante acerca del número de dominación fue probado por Ore y es el siguiente.

Teorema 1.0.1 Si G es una gráfica de orden n y $\delta(G) \geq 1$, entonces

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

A partir del número de dominación, se define el número de sujeción de una gráfica, tema sobre el cual está centrado este trabajo y que abordaremos ampliamente en el siguiente capítulo.

El **número de sujeción** $b(G)$ de una gráfica no vacía G es el mínimo número de aristas cuya eliminación de G resulta en una gráfica con número de dominación mayor, esto es:

$$b(G) = \min\{|F| : F \subseteq E(G), \gamma(G - F) > \gamma(G)\}.$$

En la Figura 1.10, se muestra una gráfica G con $\gamma(G) = 2$. Observemos que al eliminar cualesquiera una o dos de sus aristas, el número de dominación no cambia, pero el número de dominación de la gráfica que resulta tras eliminar tres aristas aumenta a tres, por lo tanto, G tiene $b(G) = 3$.

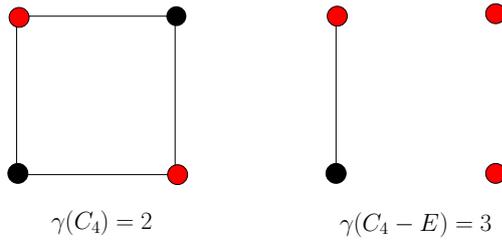


Figura 1.10: Una gráfica G con $b(G) = 3$.

Capítulo 2

Número de sujeción de una gráfica

En el presente capítulo, estudiaremos algunos resultados acerca del número de sujeción de una gráfica. Mostraremos las principales cotas superiores, las cuales están dadas en términos de distintos parámetros como son: los grados mínimo y máximo de los vértices, el número de dominación y el orden de la gráfica. Además, se determinará el valor exacto del número de sujeción de algunas gráficas, incluyendo aquellas que son dibujables sobre superficies en general.

2.1. Cotas superiores

En 1990, Fink, Jacobson, Kinch y Roberts (ver [7]) probaron los siguientes resultados, los cuales aparecen en el artículo donde introdujeron la noción de número de sujeción de una gráfica.

Teorema 2.1.1 [7] *Sea G una gráfica conexa de orden $n \geq 2$. Entonces*

$$b(G) \leq n - 1.$$

Demostración. Sean u y v vértices adyacentes tales que $\deg(u) \leq \deg(v)$. Si $b(G) \leq \deg(u)$, se tiene que $b(G) \leq n - 1$, ya que $\deg(v) \leq n - 1$ para todo $v \in V(G)$. Por lo tanto, supondremos que $b(G) > \deg(u)$.

Denotemos con E_u al conjunto de aristas incidentes al vértice u . Entonces, al eliminar E_u de G , el número de dominación no debe cambiar, es decir,

$$\gamma(G - E_u) = \gamma(G).$$

Sea S un γ -conjunto de $G - u$. Entonces $S^* = S \cup \{u\}$ es un γ -conjunto de $G - E_u$. Así, $|S^*| = |S| + 1$ y $\gamma(G - E_u) = \gamma(G - u) + 1$, por lo que

$$\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1.$$

Ahora, denotemos con D a la unión de todos los γ -conjuntos de $G - u$. Entonces, en G , el vértice u no es adyacente a ningún vértice $w \in D$. Por lo tanto, $|E_u| \leq n - 1 - |D|$ y $v \notin D$. Sea $F(v, D)$ el conjunto de aristas incidentes a v y con el otro extremo en D . Como $v \notin D$, ningún γ -conjunto de $G - u - F(v, D)$ está contenido en D , pues todos contienen a v . Así, cualquier γ -conjunto de $G - u$ es de menor cardinalidad que alguno de $G - u - F(v, D)$, es decir,

$$\gamma(G - u - F(v, D)) > \gamma(G - u).$$

Por lo que,

$$\gamma(G - u - F(v, D)) > \gamma(G) - 1.$$

Por lo tanto, $\gamma(G - (E_u \cup F(v, D))) > \gamma(G)$ y así

$$b(G) \leq |E_u \cup F(v, D)| = |E_u| + |F(v, D)| \leq (n - 1 - |D|) + |D| = n - 1.$$

■

Para algunas familias de gráficas, por ejemplo, los árboles de orden n cuyo número de aristas es a lo más $n - 1$, la cota del Teorema 2.1.1 no es muy buena, pues el número de dominación puede cambiar removiendo mucho menos que $n - 1$ aristas; sin embargo, para algunas gráficas la cota es justa, por ejemplo, para la gráfica multipartita completa $G = K_{2,2,\dots,2}$.

Lema 2.1.2 *Sea G una gráfica conexa no vacía de orden $n \geq 2$ y $\gamma(G) \geq 2$. Si $b(G) > (\gamma(G) - 1)\Delta(G) + 1$, entonces*

$$b(G) \leq b(G - u) + \deg(u)$$

donde $u \in V(G)$ y $\deg(u) = \Delta(G)$.

Demostración. Sea G una gráfica conexa no vacía de orden $n \geq 2$ y $\gamma(G) \geq 2$. Supongamos que $b(G) > k\Delta(G) + 1$, donde $k = \gamma(G) - 1$. Sea $u \in V(G)$ tal que $\deg(u) = \Delta(G)$ y sea E_u el conjunto de aristas incidentes a u . Entonces $\gamma(G - E_u) = \gamma(G)$, ya que $b(G) > \deg(u) = \Delta(G)$.

Sea D un γ -conjunto de $G - u$. Entonces, $D \cup \{u\} \succ G - E_u$, por lo que $\gamma(G - E_u) \leq \gamma(G - u) + 1$. Por otro lado, sea D' un γ -conjunto de $G - E_u$,

2.1. Cotas superiores

entonces $u \in D'$ y $D' \setminus \{u\} \succ G - u$, por lo que $\gamma(G - u) \leq \gamma(G - E_u) - 1$. Por lo tanto,

$$\gamma(G - E_u) = \gamma(G - u) + 1.$$

Dado que $\gamma(G - E_u) = \gamma(G)$, tenemos que $\gamma(G) = \gamma(G - u) + 1$.

Sea $E \subseteq E(G - u)$ tal que $b(G - u) = |E|$, así $\gamma(G - u - E) > \gamma(G - u)$. Observemos que $G - (E \cup E_u) = (G - u - E) \cup \{u\}$. Entonces,

$$\gamma(G - (E \cup E_u)) = \gamma(G - u - E) + 1 > \gamma(G - u) + 1 = \gamma(G),$$

por lo que

$$b(G) \leq |E| + |E_u| = b(G - u) + \deg(u).$$

■

Teorema 2.1.3 [7] *Si G es una gráfica no vacía y $\gamma(G) \geq 2$, entonces*

$$b(G) \leq (\gamma(G) - 1)\Delta(G) + 1.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\gamma(G)$. Primero asumiremos que $\gamma(G) = 2$. Sea $u \in V(G)$ tal que $\deg(u) = \Delta(G)$, entonces $\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1 = 1$. Supongamos que $b(G) \geq \Delta(G) + 2$. Entonces, por el Lema 2.1.2, tenemos que

$$\Delta(G) + 2 \leq b(G) \leq b(G - u) + \deg(u) = b(G - u) + \Delta(G),$$

lo cual implica que $b(G - u) \geq 2$. Dado que $\gamma(G) = 2$ y $\gamma(G - u) = 1$, hay un vértice $v \in V(G)$ que es adyacente a todos los vértices de G excepto a u , y así en G , $N(u) = N(v) = V(G) \setminus \{u, v\}$. Dado que $b(G - u) \geq 2$, al remover de $G - u$ una arista incidente a v , nos queda una gráfica con número de dominación uno. Así hay un vértice $w \in V(G) \setminus \{u, v\} = N(u)$ que es adyacente a cada vértice de $G - u$. Esto implica que $\gamma(G) = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $b(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Supongamos a continuación que $\gamma(G) \geq 3$ y que $b(G) > k\Delta(G) + 1$. Entonces por el Lema 2.1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} b(G) &\leq b(G - u) + \deg(u) \\ &= b(G - u) + \Delta(G) \end{aligned}$$

y por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} b(G) &\leq (\gamma(G - u) - 1)\Delta(G - u) + 1 + \Delta(G) \\ &= (\gamma(G) - 2)\Delta(G - u) + 1 + \Delta(G) \\ &\leq (\gamma(G) - 2)\Delta(G) + 1 + \Delta(G) \\ &= (\gamma(G) - 1)\Delta(G) + 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $b(G) \leq (\gamma(G) - 1)\Delta(G) + 1$. ■

La cota del Teorema 2.1.3 es justa si consideramos, por ejemplo, a la gráfica multipartita completa $G = K_{2,2,\dots,2}$. Esta misma gráfica se ajusta a la cota del siguiente teorema.

Teorema 2.1.4 [7] *Si G es una gráfica conexa de orden $n \geq 2$ y número de dominación $\gamma(G)$, entonces*

$$b(G) \leq n - \gamma(G) + 1.$$

Demostración. Sea G una gráfica conexa de orden $n \geq 2$ y número de dominación $\gamma(G) \leq 2$. Entonces $b(G) \leq n - 1$ por el Teorema 2.1.1, y la desigualdad es válida. Por lo tanto, asumiremos que $\gamma(G) \geq 3$ y supondremos que $b(G) \geq n - \gamma(G) + 2$.

Sea $v \in V(G)$ un vértice fijo y sea E_v el conjunto de aristas incidentes a v . Dado que $V(G) - N(v) \succ G$ tenemos que $\gamma(G) \leq n - \deg(v)$, es decir, $\deg(v) \leq n - \gamma(G) < b(G)$ y como $\deg(v) = |E_v|$, entonces

$$\gamma(G - E_v) = \gamma(G).$$

Sea S un γ -conjunto de $G - v$. Entonces $S^* = S \cup \{v\}$ es un γ -conjunto de $G - E_v$. Así, $|S^*| = |S| + 1$ y $\gamma(G - E_v) = \gamma(G - v) + 1$, es decir,

$$\gamma(G - v) = \gamma(G) - 1.$$

Sea D la unión de todos los γ -conjuntos de $G - v$. Entonces $N(v) \cap D = \emptyset$ y así $|E_v| \leq n - 1 - |D|$. Sea $u \in N(v)$ y denotemos con $E(u, D)$ al conjunto de aristas que tienen un extremo en u y el otro en D . Dado que $u \notin D$, ningún γ -conjunto de $G - v - E(u, D)$ está contenido en D , pues todos contienen a u , ya que u es un vértice aislado en $G - v - E(u, D)$. Así, cualquier γ -conjunto de $G - v$ es de menor cardinalidad que alguno de $G - v - E(u, D)$, es decir,

$$\gamma(G - v - E(u, D)) > \gamma(G - v) = \gamma(G) - 1.$$

Sea S_1 un γ -conjunto de $G - u - v$. Entonces $S_1^* = S_1 \cup \{u\}$ es un γ -conjunto de $G - v - E(u, D)$. Así, $|S_1^*| = |S_1| + 1$ y $\gamma(G - v - E(u, D)) = \gamma(G - v - u) + 1$. Observemos que $S_1^{**} = S_1 \cup \{u, v\}$ es un γ -conjunto de $G - E_v - E(u, D)$. Así, $|S_1^{**}| = |S_1| + 2$ y

$$\begin{aligned} \gamma(G - E_v - E(u, D)) &= \gamma(G - v - u) + 2 \\ &= \gamma(G - v - E(u, D)) - 1 + 2 \\ &> \gamma(G). \end{aligned}$$

2.1. Cotas superiores

Por lo que,

$$|E_v| + |E(u, D)| \geq b(G) \geq n - \gamma(G) + 2$$

y así

$$|E(u, D)| \geq (n - \gamma(G) + 2) - (n - 1 - |D|)$$

o

$$|E(u, D)| \geq |D| - \gamma(G) + 3.$$

Sea S_2 el conjunto de vértices en S que son adyacentes a u y sea S_3 el conjunto de vértices en $D \setminus S$ que no son adyacentes a u . Entonces,

$$\begin{aligned} |E(u, D)| &= |S_2| + |D - (S \cup S_3)| \\ &= |S_2| + |D| - |S| - |S_3| \\ &= |D| - (\gamma(G) - 1) + |S_2| - |S_3|. \end{aligned}$$

Así,

$$|D| - (\gamma(G) - 1) + |S_2| - |S_3| \geq |D| - \gamma(G) + 3$$

o

$$|S_2| \geq |S_3| + 2.$$

Ahora, sea S_3^* el conjunto de vértices en S_3 tal que cada vértice tiene exactamente un vecino en S_2 . Dado que $|S_2| > |S_3| \geq |S_3^*|$, hay un vértice $w \in S_2$ que no es adyacente a ningún vértice de S_3^* . Pero entonces, dado que u es adyacente al menos a dos vértices de S ya que $|S_2| > 2$, tenemos que $S - \{w\} \cup \{u\}$ es un γ -conjunto de $G - v$ y llegamos a una contradicción, pues $u \notin D$. Por lo tanto,

$$b(G) \leq n - \gamma(G) + 1.$$

■

En 1990, cuando Fink (ver [7]) introdujo el concepto de número de sujeción, conjeturó lo siguiente.

« Si G es una gráfica no vacía, entonces $b(G) \leq \Delta(G) + 1$. »

En 1993, Teschner (ver [14]) encontró un contraejemplo a esta conjetura, probando que el producto cartesiano $K_3 \times K_3$ tiene $b(G) = \Delta(G) + 2$ (ver Fig. 2.1).

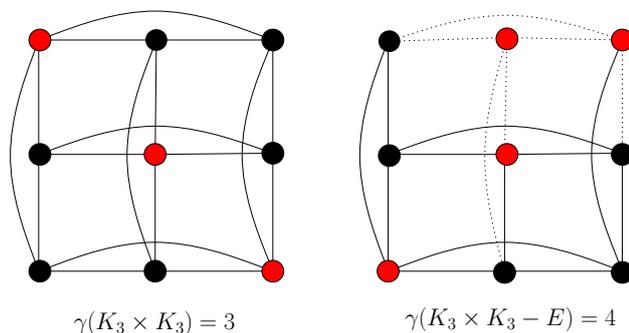


Figura 2.1: Una gráfica con $\Delta(G) = 4$ y $b(G) = 6$.

Más adelante, Hartnell y Rall (ver [9]) y Teschner (ver [16]), independientemente, determinaron el número de sujeción del producto cartesiano de dos gráficas completas de orden n , hecho que probaremos en la siguiente sección.

En 1994, Hartnell y Rall (ver [9]) probaron una cota superior para el número de sujeción, que es mejor en muchos casos, en particular, cuando las gráficas tienen vértices adyacentes de grado pequeño.

Sea $E(A, B)$ el conjunto de aristas de la forma ab con $a \in A \subseteq V(G)$ y $b \in B \subseteq V(G)$. Denotemos con $e(A, B)$ a la cardinalidad de $E(A, B)$.

Teorema 2.1.5 [9] *Si G es una gráfica no vacía, entonces*

$$b(G) \leq \min_{u \in V(G), x \in N(u)} \{deg(u) + e(\{x\}, V - N[u])\}.$$

Demostración. Sea $u \in V(G)$ y $x \in N(u)$ que alcanzan el mínimo en el teorema. Sea F_u el conjunto de aristas incidentes al vértice u . Entonces en la gráfica $H = G - F_u - E(\{x\}, V - N[u])$, u es un vértice aislado y todos los vecinos de x en H , si hay alguno, están en $N_G(u)$. Si D es un γ -conjunto de H , entonces $u \in D$ y $D \cap N(u) \neq \emptyset$ dado que, en particular, D debe dominar a x en H . Sin embargo, $D - \{u\} \succ G$ y así $\gamma(G) \leq |D| - 1$. Por lo tanto, $b(G) \leq |F_u \cup E(\{x\}, V - N[u])|$. ■

Otra conjetura referente al número de sujeción y de la cual hablaremos más adelante, fue propuesta en 1995 por Teschner (ver [15]).

Conjetura 2.1.6 (Teschner [15]) *Para toda gráfica G ,*

$$b(G) \leq \frac{3}{2} \Delta(G).$$

2.2. Valor exacto para algunas gráficas

En general, es difícil determinar el valor exacto del número de sujeción de una gráfica, ya que este depende fuertemente del número de dominación. Cuando Fink (ver [7]) introdujo el concepto de número de sujeción, determinó el valor exacto para algunas gráficas comunes, tales como las gráficas completas, las trayectorias, los ciclos y las gráficas multipartitas completas.

Empezaremos la sección mostrando los resultados de Fink [7]. Posteriormente, mostraremos algunos resultados para los árboles en general y finalizaremos con algunas gráficas que resultan del producto cartesiano de dos gráficas.

2.2.1. Gráficas completas y multipartitas completas

Proposición 2.2.1 [7] *El número de sujeción de la gráfica completa K_n , $n \geq 2$ es*

$$b(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Demostración. Sea H una subgráfica generadora de K_n que es obtenida al eliminar menos de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ aristas (posiblemente ninguna) de K_n . Entonces H contiene al menos un vértice de grado $n - 1$ y así $\gamma(H) = 1$. Por lo tanto, hay que eliminar al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ aristas para que $\gamma(H) > \gamma(K_n)$ y así $b(K_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ahora, si n es par, al eliminar $\frac{n}{2}$ aristas no incidentes entre sí de K_n , el grado de cada vértice se reduce a $n - 2$ y por lo tanto, obtenemos una gráfica H con número de dominación $\gamma(H) = 2$. Si n es impar, al eliminar $\frac{n-1}{2}$ aristas no incidentes entre sí de K_n , obtenemos una gráfica que tiene exactamente un vértice de grado $n - 1$; eliminando una arista incidente a este vértice, obtenemos una gráfica H con número de dominación $\gamma(H) = 2$.

En ambos casos, la gráfica H resulta de la eliminación de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ aristas de K_n , por lo tanto, $b(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. ■

Teorema 2.2.2 [7] *Si $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ donde $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$, entonces*

$$b(G) = \begin{cases} \lceil m/2 \rceil & \text{si } n_m = 1 \text{ y } n_{m+1} \geq 2 \text{ para } 1 \leq m < t, \\ 2t - 1 & \text{si } n_1 = n_2 = \dots = n_t = 2, \\ \sum_{i=1}^{t-1} n_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si $n_m = 1$ y $n_{m+1} \geq 2$ para alguna m , la demostración es similar a la demostración de la Proposición 2.2.1.

Supongamos que $n_1 = n_2 = \dots = n_t = 2$ y observemos que en este caso $\gamma(G) = 2$. Primero mostraremos que $b(G) \geq 2t - 1$. Supongamos lo contrario, es decir, que hay un conjunto de aristas $E(G)$ tal que $|E| = 2t - 2$ y $\gamma(G - E) > \gamma(G)$. Observemos que $G - E$ no tiene vértices aislados, pues toda subgráfica de G que tenga un vértice aislado y $2t - 2$ aristas menos que G es isomorfa a $K_1 \cup K_{1,2,2,\dots,2}$ y tiene número de dominación dos. También si $G - E$ tiene un vértice de grado $2t - 2$, entonces $\gamma(G - E) = 2$. Así el grado de cada vértice en $G - E$ está entre 1 e incluso $2t - 3$. En efecto, dado que $|E| = 2t - 2$, hay un vértice v_1 con $\deg_{G-E}(v_1) = 2t - 3$.

Sea $v_2 \in V(G)$ el otro vértice que pertenece al mismo conjunto de partición que v_1 y sea u_1 el único vértice distinto de v_2 que no es adyacente a v_1 . Dado que el conjunto de partición de dos elementos $\{v_1, v_2\}$ no puede ser un conjunto dominante en $G - E$, debemos tener que $u_1 v_2 \in E$. Sea u_2 el otro vértice del conjunto de partición en G que contiene a u_1 . Entonces, dado que $\gamma(G - E) > 2$ y dado que v_1 es adyacente en $G - E$ a todos los vértices excepto v_2 y u_1 , estos dos últimos no son dominados por v_1 , así cada vértice diferente de v_1, v_2, u_1, u_2 no es adyacente a al menos uno de los vértices v_2 y u_1 en $G - E$ para tener un conjunto dominante de tamaño mayor que 2. Dado que hay $2t - 4$ de esos vértices, para E contamos $2t - 4$ aristas junto con las aristas $v_1 u_1$ y $v_2 u_1$, es decir, $2t - 4 + 2$ o todas las aristas de E . Como ninguna de estas aristas es incidente a u_2 , vemos que u_2 tiene grado $2t - 2$ en $G - E$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $b(G) \geq 2t - 1$.

Sea $\{v_1, v_2\}$ un conjunto de partición de G y sea H la gráfica obtenida eliminando de G las $2t - 2$ aristas incidentes a v_1 y una arista incidente a v_2 , como ningún conjunto D de tamaño dos domina a H , pues $v_1 \in D$, u_1 no domina a v_2 y cualquier otro vértice en D no domina al otro vértice de su misma clase, entonces $\gamma(H) = 3$. Por lo tanto, cuando $n_1 = n_2 = \dots = n_t = 2$ tenemos que $b(G) = 2t - 1$.

Ahora supongamos que $n_1 \geq 2$ y $n_t \geq 3$, observemos que en este caso $\gamma(G) = 2$ y sea $s = \sum_{i=1}^{t-1} n_i$. Supongamos que hay un conjunto de aristas E de G tal que $|E| < s$ y $\gamma(G - E) > \gamma(G)$. Entonces cada vértice de G es incidente a al menos un elemento de E , pues si hubiera un vértice v tal que $\deg_{G-E}(v) = \deg_G(v)$ y si V es el conjunto de partición al que pertenece v , cada uno de los mas de s vértices que no están en V no son adyacentes en $G - E$ a al menos un elemento de V (de lo contrario v y algún otro vértice que no está en V formarían un conjunto dominante de dos elementos en $G - E$), pero entonces, hay por lo menos una arista de E incidente a cada uno de los vértices que no están en V , esto implica que $|E| \geq s$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, cada vértice es incidente al menos a una arista de E . Observemos también que dado que $|E| < s$, debe haber un vértice v_1 incidente a exactamente una arista, digamos $e \in E$. Sea y_1

2.2. Valor exacto para algunas gráficas

el otro vértice de G que es incidente a e y sea Y el conjunto de partición de G que contiene a y_1 . Por lo tanto, sean v_2, v_3, \dots, v_n los otros elementos del conjunto de partición X que contiene a v_1 . Dado que v_1 es adyacente en $G - E$ a cada vértice diferente de y_1, v_2, \dots, v_n , y dado que $\gamma(G - E) > 2$, cada vértice que no está en $X \cup Y$ no es adyacente en $G - E$ a al menos uno de los vértices y_1, v_2, \dots, v_n (de lo contrario, v_1 y algún otro vértice que no está en $X \cup Y$ formarían un conjunto dominante de dos elementos en $G - E$) y como cada vértice de Y es también no adyacente a algún vértice en $G - E$, entonces cada vértice de Y es incidente a alguna arista de E , esto implica que $|E| \geq |V(G) \setminus (X \cup Y)| + |Y| - 1$, considerando la arista $v_1 y_1 \in E$ tenemos que $|E| \geq |V(G) \setminus (X \cup Y)| + |Y| \geq s$, lo cuál es una contradicción. Así, $b(G) \leq s$. Consideremos la gráfica H obtenida eliminando las s aristas incidentes a un vértice v en un conjunto de partición de cardinalidad n , entonces como ningún vértice domina a v , este pertenece a algún γ -conjunto que tiene cardinalidad mayor que dos, así $\gamma(G) = 3$ y por lo tanto $b(G) = s$. ■

2.2.2. Trayectorias y ciclos

A continuación, determinaremos el número de sujeción del ciclo y la trayectoria de orden n . Para ello, haremos uso del siguiente lema cuya demostración es sencilla, por lo que no la presentaremos aquí.

Lema 2.2.3 *El número de dominación del ciclo y la trayectoria de orden n son*

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad \text{para } n \geq 3$$

y

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad \text{para } n \geq 1,$$

respectivamente.

Teorema 2.2.4 [7] *El número de sujeción del ciclo de orden n es*

$$b(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Observemos que, al eliminar cualquier arista de C_n nos queda una trayectoria del mismo orden, y por el Lema 2.2.3, tenemos que $\gamma(C_n) = \gamma(P_n)$ para $n \geq 3$. Por lo tanto, $b(C_n) \geq 2$. Ahora, si $n \equiv 1 \pmod{3}$, al eliminar cualesquiera dos aristas de C_n nos queda una gráfica H que consta

de dos trayectorias P y Q . Si P tiene orden n_1 y Q tiene orden n_2 , entonces o bien $n_1 \equiv n_2 \equiv 2 \pmod{3}$, o, sin pérdida de generalidad, $n_1 \equiv 0 \pmod{3}$ y $n_2 \equiv 1 \pmod{3}$. En el primer caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \gamma(H) &= \gamma(P) + \gamma(Q) \\
 &= \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil \\
 &= \left(\frac{n_1+1}{3} \right) + \left(\frac{n_2+1}{3} \right) \\
 &= \left(\frac{n+2}{3} \right) \\
 &= \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\
 &= \gamma(C_n).
 \end{aligned}$$

En el segundo caso,

$$\begin{aligned}
 \gamma(H) &= \gamma(P) + \gamma(Q) \\
 &= \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil \\
 &= \left(\frac{n_1}{3} \right) + \left(\frac{n_2+2}{3} \right) \\
 &= \left(\frac{n+2}{3} \right) \\
 &= \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\
 &= \gamma(C_n).
 \end{aligned}$$

En ambos casos, cuando $n \equiv 1 \pmod{3}$, tenemos que $b(C_n) \geq 3$.

Para la cota superior, consideraremos dos casos:

Caso 1. $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$. La gráfica H que se obtiene al eliminar dos aristas incidentes entre sí de C_n consta de un vértice aislado y una trayectoria de orden $n - 1$. Así

$$\begin{aligned}
 \gamma(H) &= 1 + \gamma(P_{n-1}) \\
 &= 1 + \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \\
 &= 1 + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\
 &= 1 + \gamma(C_n),
 \end{aligned}$$

por lo que, $b(C_n) \leq 2$. Por lo tanto, si $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$, entonces $b(C_n) = 2$.

Caso 2. $n \equiv 1 \pmod{3}$. La gráfica H que se obtiene al eliminar tres aristas consecutivas de C_n consta de dos vértices aislados y una trayectoria de orden

2.2. Valor exacto para algunas gráficas

$n - 2$. Así,

$$\begin{aligned}\gamma(H) &= 2 + \gamma(P_{n-2}) \\ &= 2 + \lceil \frac{n-2}{3} \rceil \\ &= 2 + \left(\frac{n-1}{3}\right) \\ &= 2 + \left(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1\right) \\ &= 1 + \gamma(C_n),\end{aligned}$$

por lo que, $b(C_n) \leq 3$. Por lo tanto, si $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $b(C_n) = 3$. ■

Del Teorema 2.2.4, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5 *El número de sujeción de la trayectoria de orden n , $n \geq 2$ es*

$$b(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.2.3. Árboles en general

En 1983, Bauer (ver [2]) y en 1990, Fink (ver [7]) independientemente, obtuvieron el siguiente resultado para árboles.

Teorema 2.2.6 [7] *Si T es un árbol no trivial, entonces $b(T) \leq 2$.*

Demostración. Para árboles de orden dos o tres, la afirmación es inmediata. Entonces, asumiremos que T tiene orden al menos cuatro.

Supongamos que T tiene un vértice soporte u que es adyacente al menos a dos vértices finales v y w . Sea D un conjunto dominante de T que no contiene a u . Entonces, D contiene a ambos vértices v y w . Así, $D \setminus \{v, w\} \cup \{u\}$ también es un conjunto dominante de T . Luego, cada γ -conjunto de T contiene a u y no contiene a v (ni a w). Sea $e = uv$. Dado que cada conjunto dominante de $T - e$ contiene a v y también es un conjunto dominante de T , tenemos que $\gamma(T - e) > \gamma(T)$. Por lo tanto, en este caso, $b(T) = 1$.

Ahora, supongamos que cada vértice de T es adyacente a lo más a un vértice final. Entonces, T tiene un vértice u de grado dos que es adyacente a exactamente un vértice final v . Sea w el otro vértice adyacente a u y sea D un γ -conjunto de $T - uv - uw$. Entonces, ambos vértices u y v están en D y $D \setminus \{v\}$ es un conjunto dominante de T . Así, $\gamma(T - uv - uw) > \gamma(T)$ y por lo tanto, $b(T) \leq 2$. ■

De la demostración del Teorema 2.2.6 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.7 *Si algún vértice de un árbol T es adyacente a dos o más vértices finales, entonces $b(T) = 1$.*

Del Corolario 2.2.5, podemos observar que los árboles del Corolario 2.2.7 no son los únicos con número de sujeción igual a uno. Las gráficas que se obtienen al subdividir todas las aristas de la estrella $K_{1,n}$, son otro tipo de gráficas que tienen número de sujeción igual a uno, y no tienen vértices que son adyacentes a más de un vértice final.

El siguiente resultado fue probado por Fink, Jacobson, Kinch y Roberts (ver [7]).

Teorema 2.2.8 [7] *Si F es un bosque, entonces F es subgráfica inducida de un árbol S con $b(S) = 1$ y un árbol T con $b(T) = 2$.*

Demostración. Sea u el vértice central de una trayectoria de orden tres. Sea F un bosque, de cada componente de F elegimos un vértice y añadimos una arista de ese vértice a u . El árbol resultante S contiene a F como subgráfica inducida y tiene un vértice, a saber u , adyacente a dos vértices finales. Entonces, por el Corolario 2.2.7, tenemos que $b(S) = 1$.

Ahora, probaremos que existe un árbol T con $b(T) = 2$, el cual contiene a F como subgráfica inducida. Procederemos por inducción sobre el orden n de F .

Para $n = 2$, la afirmación es cierta. Supongamos que la afirmación es cierta para todo bosque de orden n . Sea F un bosque de orden $n + 1$ tal que $F \cong \overline{K}_{n+1}$ (el complemento de la gráfica completa de orden $n + 1$). Sea T una trayectoria cuyo orden es congruente con uno módulo tres y es tan grande al menos como $2n + 1$. Entonces, T contiene un conjunto independiente de $n + 1$ vértices (la subgráfica inducida F) y, por el Corolario 2.2.5, tenemos que $b(T) = 2$. Ahora supongamos que F es no vacío. Sea u un vértice final de F y sea v el vértice adyacente a u . Por la hipótesis de inducción, el bosque $F' = F - \{u\}$ de orden n es subgráfica inducida de un árbol T' con $b(T') = 2$.

Sea H la unión de dos trayectorias de orden cuatro, cuyos vértices están etiquetados como en la Figura 2.2. Sea T el árbol que resulta de la unión de H con T' , añadiendo el vértice u junto con las aristas uv , ux_1 y ux_2 (ver Fig. 2.3 (a)).

Observemos que F es subgráfica inducida de T . También observemos que, de cada par de vértices $\{w_1, x_1\}$, $\{y_1, z_1\}$, $\{w_2, x_2\}$ y $\{y_2, z_2\}$, exactamente uno debe estar en cada conjunto dominante de T , y ninguno de estos domina a algún vértice de T' ; así, $\gamma(T) \geq \gamma(T') + 4$. Si D' es un γ -conjunto de T' , entonces $D = D' \cup \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ es un conjunto dominante de T de

2.2. Valor exacto para algunas gráficas

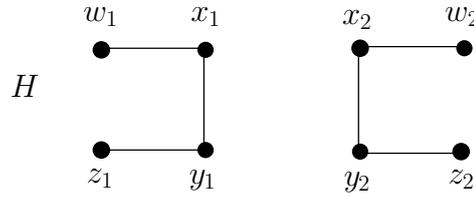


Figura 2.2: Dos trayectorias de orden cuatro.

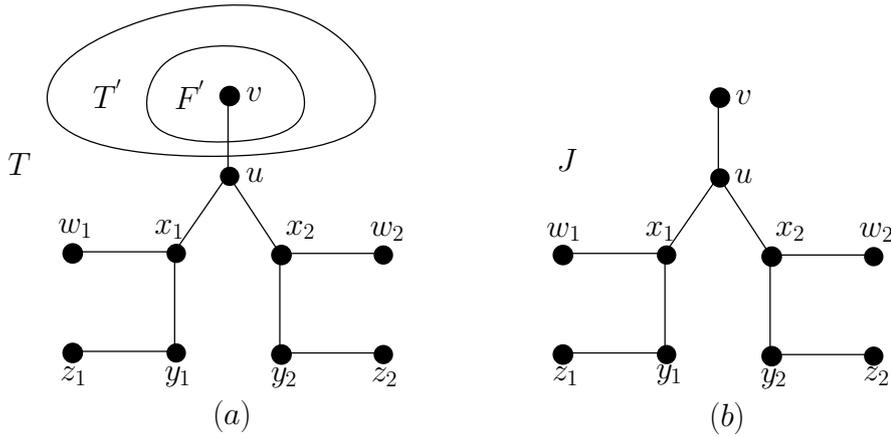


Figura 2.3: Árboles T y T' .

cardinalidad $\gamma(T') + 4$; así $\gamma(T) = \gamma(T') + 4$ y D es un γ -conjunto de T . Sea e una arista de T' , entonces $\gamma(T - e) = \gamma(T)$, dado que $b(T') = 2$. Sea J la subgráfica generada por los vértices $\{u, v, w_1, x_1, y_1, z_1, w_2, x_2, y_2, z_2\}$. Si $e \in J$ (ver Fig. 2.3 (b)), tenemos que $\gamma(T - e) = \gamma(T)$, dado que $b(J) = 2$. Por lo tanto, $b(T) = 2$. ■

2.2.4. Producto cartesiano de dos gráficas completas

En 1994, Hartnell y Rall (ver [9]) determinaron el número de sujeción del producto cartesiano de dos gráficas completas $K_n \times K_n$. Observemos que este resultado se ajusta a la cota de la Conjetura 2.1.6.

Teorema 2.2.9 [9] *Sea $G_n = K_n \times K_n$, $n \geq 3$. Entonces*

$$b(G_n) = 3(n - 1) = \frac{3}{2}\Delta(G_n).$$

Demostración. Consideremos a G_n como un arreglo de $n \times n$ vértices $\{v_{i,j} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ donde para cada j , $1 \leq j \leq n$, los conjuntos

$C_j = \{v_{1,j}, v_{2,j}, \dots, v_{n,j}\}$ y $R_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,n}\}$ inducen subgráficas completas. Observemos que, $\gamma(G_n) = n$ y $\gamma(G_n - v_{ij}) = n - 1$ para cualquier i, j . Una arista $e \in E(G_n)$ se denomina vertical u horizontal dependiendo de si ésta pertenece a la subgráfica inducida $G_n[C_j]$ o $G_n[R_j]$, respectivamente, para alguna j . Procederemos por inducción sobre n .

Observemos que G_n es regular de grado $2(n-1)$, y si u y v son cualesquiera par de vértices adyacentes de G_n , entonces v tiene exactamente $n - 1$ vecinos que no están en $N[u]$. Así, $b(G_n) \leq 3(n - 1)$, por el Teorema 2.1.5. Ahora, sólo necesitamos probar que si $F \subseteq E(G_n)$ con $|F| = 3(n - 1) - 1$, entonces $\gamma(G_n - F) = \gamma(G_n)$. Si H es subgráfica generadora de G_n , decimos que el vértice $v_{i,j}$ es horizontalmente (vérticalmente) saturado en H si $v_{i,j}$ domina a R_i (respectivamente C_j). Decimos que R_j (respectivamente C_j) es saturado en H si la subgráfica inducida $H[R_j]$ (respectivamente $H[C_j]$) de H es completa.

Sean $n = 3$, F algún conjunto de cinco aristas de G_3 y $H = G_3 - F$. Primero, supongamos que H tiene un vértice que es a su vez horizontalmente y verticalmente saturado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que éste es $v_{1,1}$. Si $\{v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,2}, v_{3,3}\}$ inducen una subgráfica J de H con al menos dos aristas, entonces J puede ser dominado usando dos vértices, los cuales junto con $v_{1,1}$ forman un conjunto dominante de H de cardinalidad tres. Así, supongamos que J tiene a lo más una arista. Si $v_{1,2}$ y $v_{1,3}$ son ambos verticalmente saturados en H o si $v_{2,1}$ y $v_{3,1}$ son ambos horizontalmente saturados en H , entonces H tiene un γ -conjunto de tamaño tres. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_{2,1}$ no es horizontalmente saturado en H y por lo tanto, $v_{3,1}$ es saturado en H . Sin embargo, la subgráfica K de H inducida por los vértices $\{v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,2}, v_{2,3}\}$ solamente puede tener una arista, por lo tanto, si algún vértice de $G_3 - F$ tiene grado cuatro, entonces $\gamma(G_3 - F) = 3$. Entonces, supongamos que ningún vértice de H tiene grado cuatro, es decir, no es a la vez horizontalmente y verticalmente saturado en H . Si F tiene dos aristas horizontales (o verticales) ambas incidentes al mismo vértice, digamos $v_{1,1}$, entonces R_1 (o C_1) domina a H . Por lo tanto, podemos suponer que F contiene a las aristas $v_{1,1}v_{1,2}$ y $v_{1,1}v_{2,1}$ y las otras tres aristas de F forman un emparejamiento perfecto con los seis vértices restantes. Podemos observar fácilmente que, $v_{1,3}$ junto con $v_{i,3}$ donde $v_{1,3}v_{i,3} \in F$, y $v_{j,2}$, $j \neq i$, $j \neq 1$ dominan a H . Por lo tanto, $\gamma(G_3 - F) = 3 = \gamma(G_3)$ y $b(G_3) = 6$.

Para una n arbitraria $n \geq 3$, supongamos que $b(G_n) = 3(n - 1)$ y sea $m = n + 1$. Sea F algún conjunto de $3(m - 1) - 1 = 3n - 1$ aristas de $G_m = K_m \times K_m$ y sea $H = G_m - F$. Si $m = 4$ y las aristas de F forman un emparejamiento perfecto de G_m , entonces podemos suponer que $v_{1,1}v_{1,2} \in F$. Si además $v_{1,3}v_{1,4} \in F$, entonces $\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}\}$ domina a H . De otro modo, $v_{1,3}v_{i,3} \in F$ y $v_{1,4}v_{j,4} \in F$ para algún par i, j . Sin embargo,

2.2. Valor exacto para algunas gráficas

$\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{i,3}, v_{j,4}\}$ dominan a H .

Así, podemos suponer que H tiene un vértice, digamos $v_{1,1}$, que es a su vez horizontalmente y verticalmente saturado. Denotemos con $H_{i,j}$ a la subgráfica de H obtenida al eliminar R_i y C_j de H . Por inducción, $|F \cap E(H_{1,1})| \geq 3(m-2)$, si no, $H_{1,1}$ tiene un γ -conjunto A de cardinalidad $m-1$ y $A \cup \{v_{1,1}\}$ domina a H . De esto se sigue que, todos excepto un vértice de R_1 , son verticalmente saturados en H y todos excepto un vértice de C_1 son horizontalmente saturados en H y ambas subgráficas $H[R_1]$ y $H[C_1]$ son completas. Observemos que, el vértice de R_1 que no es verticalmente saturado en H , es incidente a exactamente una arista de F , y una afirmación similar es cierta respecto a C_1 .

Así, todos excepto un vértice de cada uno de los R_1 y C_1 son horizontalmente y verticalmente saturados en H . Aplicando el mismo argumento que fue usado para $v_{1,1}$ a cada uno de estos, llegamos a $m-1$ renglones y $m-1$ columnas de G_m que son saturados en H . Esto implica que F tiene a lo más $3(m-1)$ aristas. Esta contradicción e inducción completan la demostración. ■

2.2.5. Producto cartesiano de dos trayectorias

Dadas dos trayectorias P_n y P_m de orden n y m , respectivamente, se define $G_{n,m}$ como el *producto cartesiano* de estas dos trayectorias

$$G_{n,m} = P_n \times P_m.$$

El número de sujeción de esta familia de gráficas fue estudiado por primera vez en 2009 por Cao, Hu y Xu (ver [4]). Ellos determinaron el valor exacto del número de sujeción para $P_n \times P_2$, $P_n \times P_3$ y $P_n \times P_4$. Además, propusieron una conjetura para $P_n \times P_m$. Aquí sólo mostraremos el resultado para $P_n \times P_2$.

Para un entero positivo $t < n$, $G_{t,m}$ es una subgráfica de $G_{n,m}$. Denotemos con $H_{n-t,m}$ a la diferencia $G_{n,m} - G_{t,m}$; es decir, $H_{n-t,m}$ es una subgráfica de $G_{n,m}$ inducida por el conjunto de vértices $\{u_{i,j} : t+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. En la Figura 2.4, se muestra la gráfica $G_{5,3} = P_5 \times P_3$.

En el siguiente resultado, denotaremos con $Y_i = \{u_{i,j} : 1 \leq j \leq m\}$, para cada i , $1 \leq i \leq n$, al conjunto de vértices verticales de i en $G_{n,m}$.

Lema 2.2.10 *Sea P_n la trayectoria de orden $n \geq 1$. Entonces*

$$\gamma(G_{n,2}) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

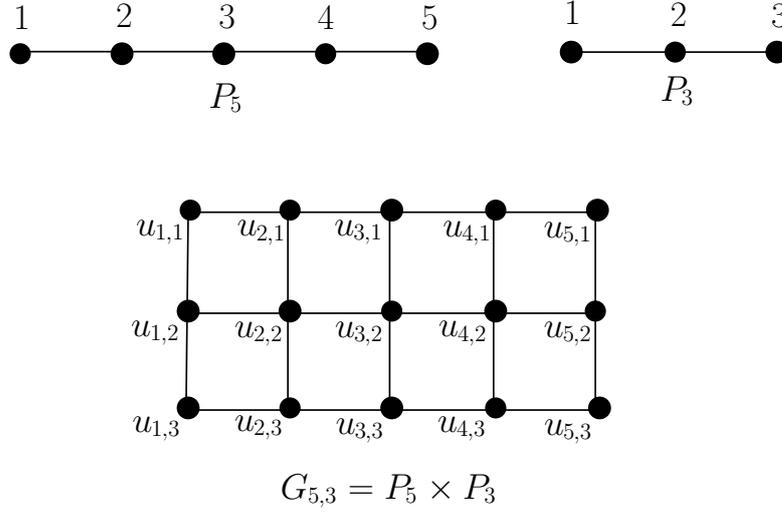


Figura 2.4: El producto cartesiano de P_5 y P_3 .

Lema 2.2.11 *Sea D un conjunto dominante de $G_{n,m}$. Entonces*

$$\gamma(G_{i,m}) \leq |D \cap V(G_{i+1,m})|$$

y

$$\gamma(H_{n-i,m}) \leq |D \cap V(H_{n-i+1,m})|$$

para cada i , $1 \leq i \leq n - 1$ y $m \geq 2$.

Demostración. Solo necesitamos probar que $\gamma(G_{i,m}) \leq |D \cap V(G_{i+1,m})|$, dado que $H_{n-i,m} \cong G_{n-i,m}$. Sea $D' = D \cap V(G_{i+1,m})$. Si $D' \cap Y_{i+1} = \emptyset$, entonces D' es un conjunto dominante de $G_{i,m}$, y por lo tanto, $\gamma(G_{i,m}) \leq |D'|$.

Supongamos que $D' \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$. Sea $B_i = \{j : u_{i+1,j} \in D'\}$. Entonces $D'' = (D' \setminus Y_{i+1}) \cup \{u_{ij} : j \in B_i\}$ es un conjunto dominante de $G_{i,m}$ y $|D''| \leq |D'|$. Así tenemos que $\gamma(G_{i,m}) \leq |D''| \leq |D'|$. ■

Teorema 2.2.12 [4] $b(G_{2,2}) = 3$, $b(G_{3,2}) = 2$ y

$$b(G_{n,2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

para toda $n \geq 4$.

Demostración. Es fácil verificar que $b(G_{2,2}) = 3$ y $b(G_{3,2}) = 2$. Por lo tanto, asumiremos que $n \geq 4$. De aquí tenemos dos casos.

Caso 1. n es impar. Consideremos el número de dominación de

2.3. Gráficas sobre superficies

$G = G_{n,2} - u_{1,1}u_{1,2}$. Sea $D \in \Gamma(G)$. Entonces, ya sea que $u_{1,1} \in D$ o $u_{1,2} \in D$ y o bien $u_{2,1} \in D$ o $u_{2,2} \in D$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_{2,1}, u_{2,2} \in D$ y $u_{1,1}, u_{1,2} \notin D$. Por el Lema 2.2.11, $|D \cap V(H_{n-2,m})| \geq \gamma(H_{n-3,2})$. Entonces, por el Lema 2.2.10, $|D| \geq 2 + \gamma(H_{n-3,2}) = 2 + \lceil \frac{n-3+1}{2} \rceil = 1 + \gamma(G_{n,2})$. Por lo tanto, $b(G_{n,2}) = 1$.

Caso 2. n es par. Afirmamos que $\gamma(G_{n,2}) = \gamma(G_{n,2} - e)$ para cualquier $e \in E(G_{n,2})$. Para probar esta afirmación, consideremos dos subcasos.

Caso 2.1. e es una arista vertical. Sea $e = u_{j,1}u_{j,2}$. Si j es par, entonces todos los vértices $u_{i,1}$, $i \equiv 1 \pmod{4}$, $u_{i,2}$, $i \equiv 3 \pmod{4}$, $u_{n,1}$ si $n \equiv 0 \pmod{4}$ o $u_{n,2}$ si $n \equiv 2 \pmod{4}$, forman un conjunto dominante de $G_{n,2} - e$ de cardinalidad $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Si j es impar, entonces todos los vértices $u_{i,1}$, $i \equiv 2 \pmod{4}$, $u_{i,2}$, $i \equiv 0 \pmod{4}$ y $u_{2,2}$, forman un conjunto dominante de $G_{n,2} - e$ de cardinalidad $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Caso 2.2. e es una arista horizontal. Sin pérdida de generalidad, sea $e = u_{j,1}u_{j+1,1}$. Si $j \equiv 2$ o $3 \pmod{4}$, entonces todos los vértices $u_{i,1}$, $i \equiv 1 \pmod{4}$, $u_{i,2}$, $i \equiv 3 \pmod{4}$ y $u_{n,1}$, forman un conjunto dominante de $G_{n,2} - e$ de cardinalidad $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Si $j \equiv 0$ o $1 \pmod{4}$, entonces todos los vértices $u_{i,2}$, $i \equiv 1 \pmod{4}$, $u_{i,1}$, $i \equiv 3 \pmod{4}$ y $u_{n,1}$, forman un conjunto dominante de $G_{n,2} - e$ de cardinalidad $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Por lo tanto, $b(G_{n,2}) \geq 2$.

Ahora mostraremos que $b(G_{n,2}) \leq 2$. Sea $e_1 = u_{2,1}u_{3,1}$, $e_2 = u_{2,2}u_{3,2}$ y $G' = G_{n,2} - \{e_1, e_2\}$. Entonces G' consta de dos componentes conexas, una es $G_{2,2}$ y la otra es $H_{n-2,2}$. Por el Lema 2.2.10, tenemos que $\gamma(G') = \gamma(G_{2,2}) + \gamma(H_{n-2,2}) = 2 + \lceil \frac{n-2+1}{2} \rceil = 1 + \gamma(G_{n,2})$, lo cual implica que $b(G_{n,2}) \leq 2$. Por lo tanto, $b(G_{n,2}) = 2$. ■

2.3. Gráficas sobre superficies

En esta sección, presentaremos cotas del número de sujeción para gráficas que se pueden encajar sobre superficies en general.

Toda **superficie** cerrada S se puede obtener a partir de la esfera S_0 , añadiendo cierto número de *asas* o *bandas de Möbius* de la siguiente manera.

Dada una esfera, le quitamos dos discos disjuntos y le añadimos un *cilindro*, identificando las dos circunferencias borde del cilindro con los bordes de los agujeros de la esfera. Este procedimiento se llama *añadir un asa* a la esfera. Repitiéndolo, obtenemos una esfera con dos, tres, o un número finito de asas. La esfera con un asa es conocida como el *toro*.

Por otro lado, el procedimiento de *añadir una banda de Möbius* a la esfera, consiste en quitarle un solo disco a la esfera y añadir una *banda de Möbius*

en su lugar, identificando los puntos de la única circunferencia borde de la banda con los de la circunferencia borde del agujero de la esfera. La superficie cerrada resultante se llama *plano proyectivo*. Para cada entero n , podemos formar una superficie cerrada, suprimiendo n discos disjuntos de la esfera y reemplazando cada uno de ellos con una banda de Möbius. Cuando $n = 2$, obtenemos la *botella de Klein*.

Si añadimos h asas a S_0 , obtenemos una **superficie orientable** S_h , que comunmente se denomina el h -toro. El número h es el género orientable de S_h . Si añadimos k bandas de Möbius a la esfera S_0 , obtenemos una **superficie no orientable** N_k . El número k es el género no orientable de N_k . Cualquier superficie cerrada es homeomorfa o bien a S_h , $h \geq 0$ o bien a N_k , $k \geq 1$.

Una gráfica G es **dibujable** en una superficie S si ésta admite un dibujo en la superficie sin cruces de aristas, tal dibujo se denomina un **encaje** de G en S . El conjunto de caras de un encaje de G en S se denota con $F(G)$ y el número de aristas que rodean a la cara F se denota con $\deg(F)$. Un encaje es **2-celular** si cada cara del encaje es homomorfo a un disco abierto.

Una **gráfica plana** es aquella que se puede *encajar* en la esfera. En 1998, Dunbar (ver [6]) propuso la siguiente conjetura para el número de sujeción de una gráfica plana.

Conjetura 2.3.1 [6] *Si G es una gráfica plana, entonces*

$$b(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

En 2000, Kang y Yuang (ver [12]), tratando de probar la Conjetura 2.3.1, mostraron el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2 [12] *Si G es una gráfica plana conexa, entonces*

$$b(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Posteriormente, en 2006, Carlson y Develin (ver [5]) mostraron este mismo resultado, presentando una demostración más simple y topológicamente intuitiva, donde la herramienta principal es la *fórmula de Euler*. Además, obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3 [5] *Si G una gráfica conexa que se puede encajar en un toro, entonces*

$$b(G) \leq \Delta(G) + 3.$$

2.3. Gráficas sobre superficies

Recientemente, en 2012, Gagarin y Zverovich (ver [8]) extendieron los resultados de Carlson y Develin (ver [5]), al establecer cotas superiores del número de sujeción para gráficas que son dibujables sobre superficies en general.

Teorema 2.3.4 [8] *Sea G una gráfica conexa que se puede encajar en una superficie orientable de género h y una superficie no orientable de género k . Entonces*

$$b(G) \leq \min\{\Delta(G) + h + 2, \Delta(G) + k + 1\}.$$

Para probar el Teorema 2.3.4, usaremos el siguiente resultado, que se conoce como la *fórmula de Euler* generalizada.

Teorema 2.3.5 (*Fórmula de Euler*)

Supongamos que una gráfica conexa G con $|V(G)|$ vértices y $|E(G)|$ aristas admite un encaje 2-celular con $|F(G)|$ caras en una superficie topológica S . Entonces, o bien

$$S = S_h \text{ y } |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2h \quad (2.1)$$

o bien

$$S = N_k \text{ y } |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - k. \quad (2.2)$$

A las ecuaciones (2.1) y (2.2) se les conoce como la *fórmula de Euler* para una superficie orientable S_h de género h ($h \geq 0$) y una superficie no orientable N_k de género k ($k \geq 1$), respectivamente.

Sea G una gráfica conexa de orden n y tamaño m . A cada arista $e_i = xy \in E(G)$, $1 \leq i \leq m$, le asignamos variables

$$v_i = \frac{1}{\deg(x)} + \frac{1}{\deg(y)}$$

y

$$f_i = \frac{1}{\deg(F_1)} + \frac{1}{\deg(F_2)},$$

donde F_1 y F_2 son las caras adyacentes a e_i .

Al hacer la suma sobre todas las aristas, cada vértice es contado tantas veces como su grado, es decir, $\frac{1}{\deg(x)}$ aparecerá tantas veces como $\deg(x)$. Así

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{x \in V(G)} \deg(x) \cdot \frac{1}{\deg(x)} = |V(G)|.$$

Del mismo modo, cada par de caras comparten exactamente una arista, por lo que cada cara es contada tantas veces como el número de aristas que la rodean. Así

$$\sum_{i=1}^m f_i = \sum_{F \in F(G)} \deg(F) \cdot \frac{1}{\deg(F)} = |F(G)|.$$

Aplicando la *fórmula de Euler* (Teorema 2.3.5), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} (v_i + f_i - 1) = |V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2 - 2h$$

o

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 - \frac{2 - 2h}{|E(G)|} \right) = \sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 + \frac{2h - 2}{|E(G)|} \right) = 0.$$

A cada arista $e_i = uv \in E(G)$, $i = 1, 2, \dots, |E(G)|$ le asociamos el número

$$v_i + f_i - 1 + \frac{2h - 2}{|E(G)|}$$

denominado la **curvatura orientada** de la arista e_i .

También por la *fórmula de Euler*, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} (v_i + f_i - 1) = |V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2 - k$$

o

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 - \frac{2 - k}{|E(G)|} \right) = \sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 + \frac{k - 2}{|E(G)|} \right) = 0.$$

A cada arista $e_i = uv \in E(G)$, $i = 1, 2, \dots, |E(G)|$ le asociamos el número

$$v_i + f_i - 1 + \frac{k - 2}{|E(G)|}$$

denominado la **curvatura no orientada** de la arista e_i .

Teorema 2.3.6 [8] *Sea G una gráfica conexa 2-celular que admite un encaje en una superficie orientable de género $h \geq 0$. Entonces*

$$b(G) \leq \Delta(G) + h + 2.$$

2.3. Gráficas sobre superficies

Demostración. Supongamos que G es 2 -celular enclavada en el h -toro S_h . Si $\delta(G) \leq h + 3$, entonces por el Teorema 2.1.5, la desigualdad es válida. Por lo tanto, supondremos que $\Delta(G) \geq \delta(G) \geq h + 4$ y asumiremos que $b(G) \geq \Delta(G) + h + 3$.

Por el Teorema 2.1.5, para toda arista $e_i = uv$ tenemos que

$$\Delta(G) + h + 3 \leq b(G) \leq \deg(u) + \deg(v) - 1 - |N(u) \cap N(v)|$$

o

$$\Delta(G) + h + 4 + |N(u) \cap N(v)| \leq \deg(u) + \deg(v), \quad (2.3)$$

con $\deg(u), \deg(v) \leq \Delta(G)$.

Si $\deg(u)$ o $\deg(v)$ es igual a $h + 4$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\deg(u) = h + 4$, entonces por (2.3), tenemos que

$$\Delta(G) + \deg(u) + |N(u) \cap N(v)| \leq \deg(u) + \deg(v)$$

o

$$\Delta(G) + |N(u) \cap N(v)| \leq \deg(v) \leq \Delta(G),$$

es decir, el otro vértice debe tener $\deg(v) = \Delta(G) \geq h + 4$. Así $|N(u) \cap N(v)| = 0$, entonces u y v no pueden tener algún vecino común, por lo que $\deg(F_1)$ y $\deg(F_2)$ son al menos cuatro cada uno.

Dado que, en este caso $|E(G)| \geq \frac{(h+4)(h+5)}{2}$, una arista $e_i = uv$ tienen curvatura orientada negativa:

$$v_i + f_i - 1 + \frac{2h-2}{|E(G)|} \leq \frac{2}{h+4} + \frac{2}{4} - 1 + \frac{2(2h-2)}{(h+4)(h+5)} = \frac{-8+h(3-h)}{2(h+4)(h+5)} < 0$$

para alguna $h \geq 1$, y, en el caso $h = 0$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{2}{|E(G)|} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{2}{|E(G)|} = \frac{-2}{|E(G)|} < 0.$$

Supongamos que uno de los dos $\deg(u)$ y $\deg(v)$ es igual a $h + 5$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\deg(u) = h + 5$. Entonces por (2.3),

$$\Delta(G) \geq \deg(v) \geq \Delta(G) - 1 + |N(u) \cap N(v)|.$$

Si $\deg(v) = h + 4 = \Delta(G) - 1$, estamos en el caso anterior. De otro modo, tenemos $\deg(v) \geq h + 5$, entonces $|N(u) \cap N(v)| \leq 1$, es decir, hay a lo más un vecino común entre u y v . Así a lo más uno de los dos $\deg(F_1)$ o $\deg(F_2)$ es tres y el otro al menos cuatro. Entonces también, dado que en este caso

$$|E(G)| \geq \frac{(h+4)(h+4) + 2(h+5)}{2} = \frac{h^2 + 10h + 26}{2},$$

la arista e_i debe tener curvatura negativa:

$$\begin{aligned} v_i + f_i - 1 + \frac{2h-2}{|E(G)|} &\leq \frac{2}{h+5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{2(2h-2)}{h^2+10h+26} \\ &= \frac{-5h^3 - 3h^2 + 52h - 266}{12(h+5)(h^2+10h+26)} < 0 \end{aligned}$$

para alguna $h \geq 1$, y, en el caso $h = 0$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{2}{|E(G)|} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{2}{|E(G)|} = -\frac{1}{60} - \frac{2}{|E(G)|} < 0.$$

El único caso restante es cuando $\deg(u) \geq h+6$ y $\deg(v) \geq h+6$. En este caso, $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$, es decir, hay a lo más dos vecinos comunes y $\deg(F_1)$ y $\deg(F_2)$ son por lo menos tres, y, en este caso,

$$|E(G)| \geq \frac{(h+4)(h+5) + 2(h+6)}{2} = \frac{h^2 + 11h + 32}{2},$$

así la arista e_i debe tener curvatura negativa:

$$v_i + f_i - 1 + \frac{2h-2}{|E(G)|} \leq \frac{2}{h+6} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{2(2h-2)}{h^2+11h+32} = \frac{-h^3 + h^2 + 28h - 72}{3(h+6)(h^2+11h+32)} < 0$$

para alguna $h \geq 1$, y, en el caso $h = 0$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{2}{|E(G)|} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{|E(G)|} = -\frac{2}{|E(G)|} < 0.$$

Sumando sobre todas las aristas $e_i \in E(G)$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 + \frac{2h-2}{|E(G)|} \right) < 0,$$

lo cuál es una contradicción a la *fórmula de Euler*. Por lo tanto $b(G) \leq \Delta(G) + h + 2$. ■

Teorema 2.3.7 [8] *Sea G una gráfica conexa 2-celular que admite un encaje en una superficie no orientable de género $k \geq 1$. Entonces*

$$b(G) \leq \Delta(G) + k + 1.$$

2.3. Gráficas sobre superficies

Demostración. Supongamos que G es 2-celular enclavada en la esfera con k bandas de Möbius N_k . Si $\delta(G) \leq k + 2$, entonces por el Teorema 2.1.5, la desigualdad es válida. Por lo tanto, supondremos que $\Delta(G) \geq \delta(G) \geq k + 3$ y asumiremos que $b(G) \geq \Delta(G) + k + 2$.

Entonces, por el Teorema 2.1.5, para alguna arista $e_i = uv$, $1 \leq i \leq m$, tenemos que

$$\Delta(G) + k + 2 \leq b(G) \leq \deg(u) + \deg(v) - 1 - |N(u) \cap N(v)|,$$

o

$$\Delta(G) + k + 3 + |N(u) \cap N(v)| \leq \deg(u) + \deg(v)$$

y $\deg(u) \leq \Delta(G)$, $\deg(v) \leq \Delta(G)$.

Si alguno de los dos $\deg(u)$ o $\deg(v)$ es igual a $k + 3$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\deg(u) = k + 3$, entonces el otro debe tener $\deg(v) = \Delta(G) \geq 3$. Así $|N(u) \cap N(v)| = 0$, lo cual implica que u y v no tienen vecinos comunes y entonces $\deg(F_1)$ y $\deg(F_2)$ son al menos cuatro cada uno. Dado que, en este caso $|E(G)| \geq \frac{(k+3)(k+4)}{2}$, la curvatura no orientada de la arista $e_i = uv$ es

$$v_i + f_i - 1 + \frac{k-2}{|E(G)|} \leq \frac{2}{k+3} + \frac{2}{4} - 1 + \frac{2(k-2)}{(k+3)(k+4)} = \frac{-4 + k(1-k)}{2(k+3)(k+4)} < 0$$

para alguna $k \geq 2$, y, en el caso $k = 1$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{1}{|E(G)|} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{|E(G)|} = \frac{-1}{|E(G)|} < 0.$$

Supongamos que alguno de los dos $\deg(u)$ o $\deg(v)$, digamos $\deg(u)$ es igual a $k + 4$. Entonces

$$\Delta(G) \geq \deg(v) \geq \Delta(G) - 1 - |N(u) \cap N(v)|.$$

Si $\deg(v) = k + 3 = \Delta(G) - 1$, estamos en el caso anterior. De otro modo, tenemos $\deg(v) \geq k + 4$, y a lo más uno de los dos $\deg(F_1)$ y $\deg(F_2)$ puede ser igual a tres, lo cual implica que el otro sea al menos cuatro. Entonces también, dado que en este caso

$$|E(G)| \geq \frac{(k+3)(k+3) + 2(k+4)}{2} = \frac{k^2 + 8k + 17}{2},$$

la arista e_i debe tener una curvatura no orientada negativa:

$$v_i + f_i - 1 + \frac{k-2}{|E(G)|} \leq \frac{2}{k+4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{2(k-2)}{k^2 + 8k + 17}$$

$$= \frac{-124 - 5k - 12k^2 - 5k^3}{12(k+4)(k^2+8k+17)} < 0$$

para alguna $k \geq 2$, y, en el caso $k = 1$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{1}{|E(G)|} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{|E(G)|} = -\frac{1}{60} - \frac{1}{|E(G)|} < 0.$$

El único caso restante es cuando $\deg(u) \geq k+5$ y $\deg(v) \geq k+5$. Dado que en este caso $\deg(F_1)$ y $\deg(F_2)$ son por lo menos 3 y en este caso

$$|E(G)| \geq \frac{(k+3)(k+4) + 2(k+5)}{2} = \frac{k^2 + 9k + 22}{2},$$

la arista e_i debe tener curvatura no orientada negativa:

$$v_i + f_i - 1 + \frac{k-2}{|E(G)|} \leq \frac{2}{k+5} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{2(k-2)}{k^2+9k+22} = \frac{-k^3 - 2k^2 + 5k - 38}{3(k+5)(k^2+9k+22)} < 0$$

para alguna $k \geq 2$ y en el caso $k = 1$,

$$v_i + f_i - 1 - \frac{1}{|E(G)|} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{|E(G)|} = \frac{-1}{|E(G)|} < 0.$$

Sumando sobre todas las aristas $e_i \in E(G)$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{|E(G)|} \left(v_i + f_i - 1 + \frac{k-2}{|E(G)|} \right) < 0$$

lo cuál es una contradicción a la *fórmula de Euler*, por lo tanto $b(G) \leq \Delta(G) + k + 1$. ■

Capítulo 3

Gráficas γ -insensibles extremales

Dada una propiedad genérica, las gráficas con el mínimo o máximo número de aristas que la satisfacen se denominan **gráficas extremales**. Una gráfica es γ -**insensible** si su número de sujeción es mayor que uno, es decir, se tiene que $\gamma(G) = \gamma(G - e)$ para toda $e \in E(G)$. En el presente capítulo, abordaremos el trabajo desarrollado por Brigham y Dutton (ver [3]). Ellos estudiaron tres problemas relativos a las gráficas γ -insensibles extremales de orden n , los cuales describiremos a continuación y desarrollaremos en cada una de las secciones posteriores.

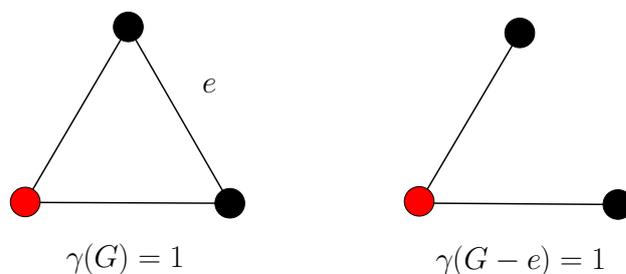


Figura 3.1: Una gráfica γ -insensible extremal.

- **Problema 1.** Determinar el tamaño mínimo de una gráfica γ -insensible G , tal que existe un γ -conjunto fijo de G que también domina a $G - e$ para toda $e \in E(G)$. Denotaremos con $E_f(n, \gamma)$ al tamaño mínimo de estas gráficas.
- **Problema 2.** Determinar el tamaño mínimo de una gráfica γ -insensible conexas. Denotaremos con $E(n, \gamma)$ al tamaño mínimo de estas gráficas.

- **Problema 3.** Determinar el tamaño mínimo de una gráfica γ -insensible y conexa tras eliminar cualquiera de sus aristas. Denotaremos con $E_c(n, \gamma)$ al tamaño mínimo de estas gráficas.

3.1. Gráficas con un γ -conjunto fijo

En esta sección, supondremos que G es una gráfica γ -insensible de orden $n \geq 2$ y que $D_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_\gamma\}$ es un γ -conjunto fijo de G que también domina a $G - e$ para toda $e \in E(G)$ y $D_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-\gamma}\}$ es el complemento de D_1 en $V(G)$. Supondremos también que G tiene el tamaño mínimo $E_f(n, \gamma)$ sobre todas estas gráficas. Observemos que $\gamma(G) \geq 2$, pues si $\gamma(G) = 1$, entonces habría un vértice $v \in V(G)$ tal que $v \succ G$ y $v \notin G - e$ para cualquier arista $e \in E(G)$ incidente a v .

Lema 3.1.1 G es bipartita con conjuntos partidos D_1 y D_2 . Además, todo vértice de D_2 tiene grado dos.

Demostración. Dado que D_1 es un conjunto dominante fijo de G , no debemos considerar las aristas entre dos vértices de D_1 o dos vértices de D_2 , pues no son necesarias, ya que el número de dominación no cambia tras eliminar cualquiera de estas aristas, por lo tanto, G es bipartita. Ahora, sea $v_i \in D_2$ y supongamos que $\deg(v_i) = 1$, para alguna $1 \leq i \leq n - \gamma$. Dado que no estamos considerando a las aristas entre dos vértices de D_2 , hay una única arista incidente a v_i y algún vértice de D_1 , tal que al eliminarla, el vértice v_i quedará sin dominar, así este tendría que estar en D_1 , pero esto nos lleva a una contradicción, pues D_1 es un γ -conjunto. Por lo tanto, $\deg(v_i) \geq 2$. Por otro lado, v_i puede ser dominado tras eliminar solo una de sus aristas incidentes. Por lo tanto, no son necesarias más de dos aristas y $\deg(v_i) = 2$. ■

A partir del Lema 3.1.1 y dado que, D_1 es un γ -conjunto fijo con γ vértices y D_2 tiene $n - \gamma$ vértices de grado dos, el tamaño mínimo de una gráfica de este tipo es $E_f(n, \gamma) = 2(n - \gamma)$.

Ahora, mostraremos que hay valores de n y γ para los cuales no existe una gráfica γ -insensible con un γ -conjunto fijo. Denotemos con A_i , $1 \leq i \leq \gamma$, al conjunto de vértices de D_2 que son adyacentes a $u_i \in D_1$, es decir,

$$A_i = \{v_j \in D_2 : u_i v_j \in E(G), u_i \in D_1\}.$$

3.1. Gráficas con un γ -conjunto fijo

Lema 3.1.2 $|A_i \cap A_j| \neq 1$ para toda $i \neq j$.

Demostración. Supongamos que $|A_i \cap A_j| = 1$. Sea $v \in A_i \cap A_j$, dado que todos los vértices de D_2 tienen grado dos, cualquier vértice de $D_2 - \{v\}$ es dominado por algún $u_k \in D_1$, $k \neq i, j$. Así $\{u_k : k \neq i, j\} \cup \{v\}$ es un conjunto dominante de G cuya cardinalidad es $(\gamma - 2) + 1 = \gamma - 1$, lo que nos lleva a una contradicción. ■

El Lema 3.1.2 implica que, o bien $|A_i \cap A_j| = 0$ o $|A_i \cap A_j| \geq 2$.

Para probar el siguiente resultado, introduciremos la siguiente definición. La **gráfica de intersección** G_I de los conjuntos S_1, S_2, \dots, S_n tiene un vértice por cada conjunto y dos vértices son adyacentes si la intersección de sus respectivos conjuntos es no vacía.

Sea G_I la gráfica de intersección de los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_\gamma$. El hecho que G sea conexa implica que G_I también es conexa y tiene al menos $\gamma - 1$ aristas.

Lema 3.1.3 G tiene al menos $4(\gamma - 1)$ aristas.

Demostración. Consideremos una arista $e_1 = A_i A_j \in E(G_I)$. Dado que $|A_i \cap A_j| \geq 2$, hay al menos dos aristas incidentes a $A_i \cap A_j$ y u_i , y dos aristas más incidentes a u_j y $A_i \cap A_j$. Al considerar otra arista de G_I incidente a A_i o A_j , digamos $e_2 = A_i A_k \in E(G_I)$, debemos considerar un nuevo vértice v de G tal que $v \in A_i \cap A_k$. Dado que los vértices de $A_i \cap A_k$ tienen grado al menos dos, esta arista e_2 corresponde a otra colección de aristas de G . Así, existe un mapeo uno a uno entre las aristas de la gráfica G_I y los subconjuntos de cuatro elementos del conjunto de aristas de G (ver Figura 3.2). Por lo tanto, dado que G_I tiene al menos $\gamma - 1$ aristas, G tiene al menos $4(\gamma - 1)$ aristas. ■

A partir del Lema 3.1.3 y dado que G tiene $2(n - \gamma)$ aristas, sabemos que $2(n - \gamma) \geq 4(\gamma - 1)$, es decir, $n \geq 3\gamma - 2$, tal como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 3.1.4 Si $\gamma \geq 2$ y $n \geq 3\gamma - 2$, existe una gráfica γ -insensible con un γ -conjunto fijo D tal que $D \succ G - e$ para toda $e \in G$.

Demostración. La prueba se realizará mediante la construcción de una gráfica extremal G , especificando su conjunto de aristas como:

$$E(G) = \{u_1 v_i : 1 \leq i \leq n - \gamma\} \cup \{u_i v_{2i-3}, u_i v_{2i-2} : i = 2, 3, \dots, \gamma - 1\} \\ \cup \{u_\gamma v_i : i = 2\gamma - 3, 2\gamma - 2, \dots, n - \gamma\}.$$

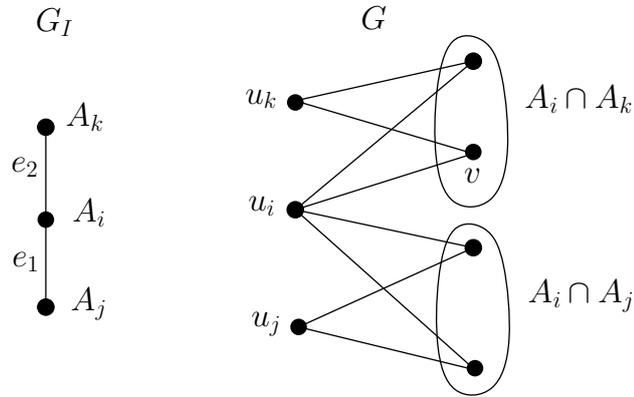


Figura 3.2: Mapeo uno a uno entre $E(G_I)$ y los subconjuntos de cuatro elementos de $E(G)$.

Bajo esta construcción, cada v_i , $1 \leq i \leq n - \gamma$, es adyacente a u_1 y dado que $n \geq 3\gamma - 2$, tenemos que $n - \gamma \geq 2(\gamma - 1)$, así el número de vértices de D_2 es por lo menos el doble del número de vértices de $D_1 - \{u_1\}$, por lo que, cada u_i , $2 \leq i \leq \gamma$, es adyacente al menos a dos vértices de D_2 , por lo tanto, podemos afirmar que D_1 es un conjunto dominante fijo de G que también domina a $G - e$ para toda $e \in E(G)$. La cardinalidad de este conjunto dominante es γ y es mínimo, ya que podemos intercambiar cualquier v_i por u_1 . Por lo tanto, el número de dominación de G es γ . ■

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5 [3] *Si $\gamma \geq 2$ y $n \geq 3\gamma - 2$, entonces*

$$E_f(n, \gamma) = 2n - 2\gamma,$$

y es indefinido en otro caso.

En la Figura 3.3, se muestran dos gráficas extremales, construidas como en la demostración del Lema 3.1.4. Observemos que éstas son bipartitas, donde un γ -conjunto de G también es un γ -conjunto de $G - e$ para toda $e \in E(G)$.

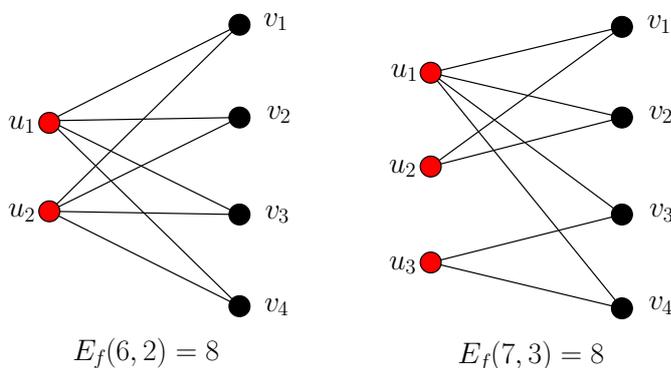


Figura 3.3: Gráficas extremales con $\gamma = 2$ y 3 .

3.2. Gráficas conexas

En esta sección, desarrollaremos el segundo problema descrito en la introducción del capítulo. Aquí la única condición que se pide es la conexidad inicial de la gráfica. Por lo tanto, sabemos que $E(n, \gamma) \geq n - 1$. Primero analizaremos el caso cuando $\gamma(G) = 1$.

Teorema 3.2.1 [3] *Si $n \geq 3$ y $\gamma(G) = 1$, entonces*

$$E(n, 1) = 3n - 6.$$

Demostración. Sea G una gráfica γ -insensible con $\gamma(G) = 1$. Entonces, G debe tener al menos tres vértices universales, así $E(n, 1) \geq 3(n - 3) + 3 = 3n - 6$. Ahora, dado que una gráfica con exactamente tres vértices de grado $n - 1$ y $\gamma(G) = 1$ es γ -insensible, tenemos que $E(n, 1) \leq 3n - 6$. Por lo tanto, $E(n, 1) = 3n - 6$. ■

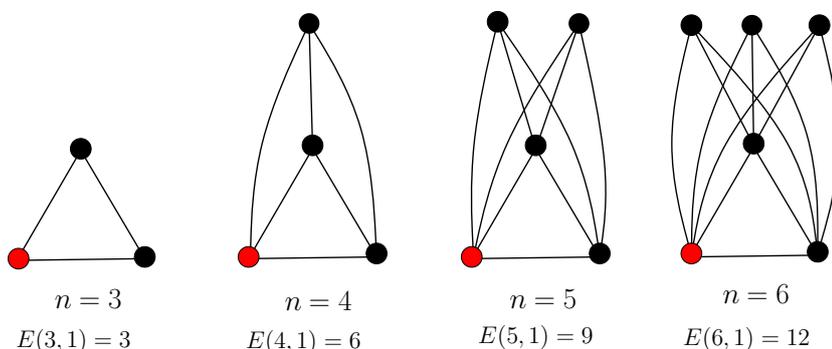


Figura 3.4: Gráficas γ -insensibles con $\gamma(G) = 1$.

Ahora supongamos que $\gamma(G) \geq 2$. Consideremos tres casos: $n \leq 3\gamma - 2$, $n = 3\gamma - 1$ y $n \geq 3\gamma$. Primero analizaremos el caso cuando $n \leq 3\gamma - 2$.

Teorema 3.2.2 [3] *Si $n \leq 3\gamma - 2$, entonces*

$$E(n, \gamma) = n - 1.$$

Demostración. Sabemos que $E(n, \gamma) \geq n - 1$. Entonces, solo necesitamos encontrar una gráfica conexa γ -insensible de orden n y tamaño $n - 1$ para toda $n \leq 3\gamma - 2$ y $\gamma \geq 2$. Para ello, consideremos el árbol de la Figura 3.5, donde $k = 3\gamma - n$, $k \geq 2$ y $l = 3n - 6\gamma$. Observemos que para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) = \gamma(G) = \gamma$. ■

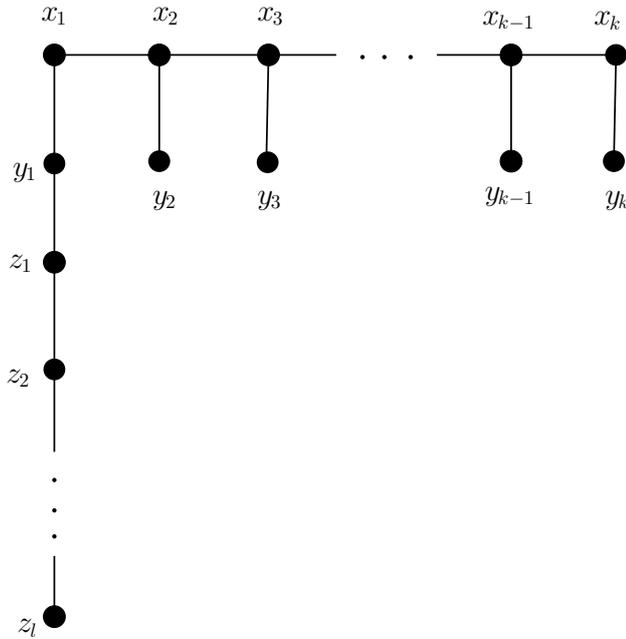


Figura 3.5: Construcción de un árbol γ -insensible.

En la Figura 3.6, se muestran tres árboles γ -insensibles con $\gamma(G) = 4$, contruidos como en la demostración del Teorema 3.2.2.

Para el caso $n \geq 3\gamma$, realizaremos un conteo del mínimo número de aristas de una gráfica no necesariamente γ -insensible, de orden n y número de dominación $\gamma \geq 2$.

3.2. Gráficas conexas

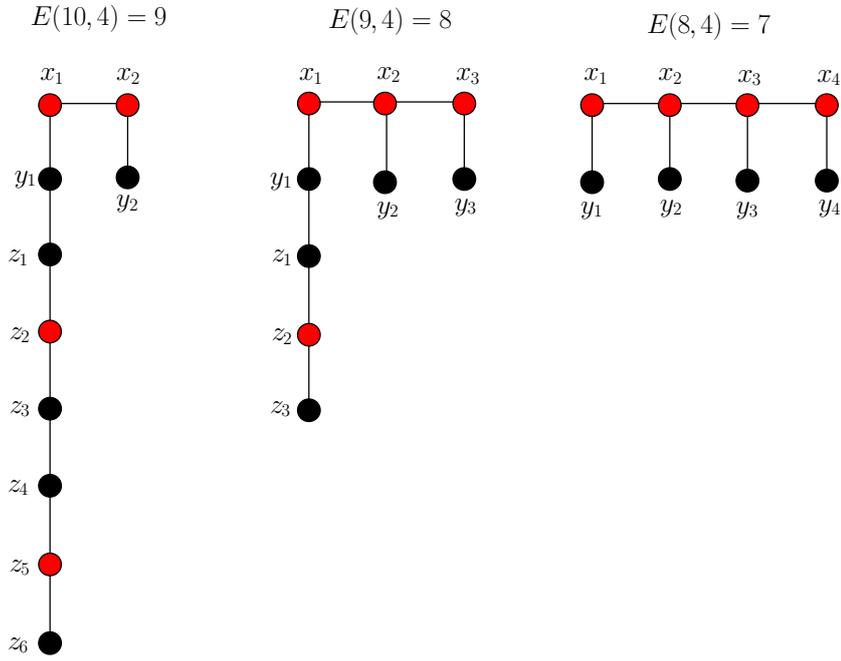


Figura 3.6: Árboles γ -insensibles con $\gamma(G) = 4$.

Arbitrariamente, elegimos un γ -conjunto D_0 de G . Sea S_0 el subconjunto de vértices de $G - D_0$ que tienen exactamente un vecino en D_0 . Mostraremos que G tiene al menos $2|S_0| - \gamma$ aristas con un vértice en S_0 y usaremos este hecho para probar que $E(n, \gamma) \geq 2n - 3\gamma$.

Empezaremos haciendo una partición de D_0 y S_0 de la siguiente manera. Etiquetaremos cualquier otro γ -conjunto de G con D_1, D_2, \dots, D_k , donde el orden es arbitrario. Luego, definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} X_i &= D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{i-1} - D_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq k, \\ X_{k+1} &= D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_k \quad \text{y} \\ S_i &= \{v \in S_0 : N(v) \cap D_0 \in X_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k+1. \end{aligned}$$

Obsevemos que

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{k+1} = D_0.$$

Así la colección de conjuntos X_i es una partición de D_0 . Dado que, cada S_i es el subconjunto de vértices de $G - D_0$ que tienen exactamente un vecino en X_i , los conjuntos S_i son una partición de S_0 . Cualquier X_i , y por lo tanto su correspondiente S_i , puede ser vacío. Observemos también, que la definición de X_i , implica que $X_i \cap D_i = \emptyset$ para $1 \leq i \leq k$.

Definimos otra colección de conjuntos Z_i para $1 \leq i \leq k$, de la siguiente manera:

1. $Z_i \subseteq D_i \cap \{s \in S_0 : |N(s) \cap (D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{i-1})| = 1\}$;
2. $(D_i - Z_i) \succ G - (X_i \cup S_i)$;
3. Z_i es maximal con respecto a (1) y (2).

Así, para $1 \leq i \leq k$, se tiene que $Z_i \subseteq D_i \cap S_0$ y, para cualquier $z \in Z_i$, se tiene que

$$N(z) \cap D_0 = \{s\} \subseteq D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{i-1}.$$

Lema 3.2.3 *Cualquier vértice $z \in Z_i$, $1 \leq i \leq k$,*

a) es un elemento de S_i , o

b) domina al menos a un vértice de S_i , el cual no es dominado por ningún otro vértice de D_i .

Demostración. Supongamos que $z \notin S_i$. Entonces $z \in Z_i - S_i$. Dado que $D_i - Z_i$ domina a $G - (X_i \cup S_i)$, así la única razón para que z pertenezca a D_i es para dominar a algún vértice de $X_i \cup S_i$. Pero $z \in S_0 - S_i$, y puede no tener vecinos en X_i . Por lo tanto, la única posibilidad es que z domine al menos a un vértice de S_i . ■

Una consecuencia inmediata del Lema 3.2.3, es que podemos asociarle a cada $z \in Z_i$ un único vértice $z' \in S_i$, que bien puede ser el mismo z si se cumple 3.2.3 a), o algún vértice dominado por z como se describe en 3.2.3 b). En este último caso, la elección de z' de entre todos los vértices de S_i que son dominados solamente por $z \in D_i$ es arbitraria, pero una vez hecha, permanece fija. Esto establece una correspondencia uno a uno entre los vértices de $Z_i - S_i$ y el subconjunto $S'_i \subseteq S_i$. Ahora definimos para $1 \leq i \leq k$, los siguientes conjuntos

$$B_i = (Z_i \cap S_i) \cup S'_i.$$

Observemos que $|B_i| = |Z_i|$.

Lema 3.2.4 $|Z_i| \leq |X_i|$ para $1 \leq i \leq k$.

Demostración. Sabemos que $X_i \succ X_i \cup S_i$. Entonces, dado que

$$D_i - Z_i \succ G - (X_i \cup S_i),$$

tenemos que

$$(D_i - Z_i) \cup X_i \succ G$$

3.2. Gráficas conexas

y

$$|(D_i - Z_i) \cup X_i| \geq \gamma.$$

Pero, $Z_i \subseteq D_i$ y $D_i \cap X_i = \emptyset$, entonces

$$\gamma \leq |D_i - Z_i| + |X_i| \leq |D_i| - |Z_i| + |X_i| = \gamma - |Z_i| + |X_i|.$$

Por lo tanto, $|Z_i| \leq |X_i|$. ■

Ahora contaremos el mínimo número de aristas que tienen al menos un vértice en S_0 .

Lema 3.2.5 *Para $1 \leq i \leq k$, hay al menos $2|S_i| - |X_i|$ aristas con al menos un vértice en S_i .*

Demostración. Por definición, para cada $s \in S_i$, existe una arista entre s y algún vértice de X_i . Así tenemos $|S_i|$ aristas. El resto de la demostración, establece una segunda arista sv distinta para cada $s \in S_i - B_i$, para tener $|S_i - B_i| = |S_i| - |B_i|$ aristas más. Dado que $|B_i| = |Z_i| \leq |X_i|$, tendremos que $|S_i| + |S_i| - |B_i| \geq 2|S_i| - |X_i|$, que es lo deseado.

Las aristas adicionales, se definen primero para vértices de $S_1 - B_1$, enseguida para vértices de $S_2 - B_2$, y así sucesivamente hasta llegar a los vértices de $S_k - B_k$. Sea $s \in S_i - B_i$. Entonces, hay dos posibilidades para determinar el único vecino v de s . Cuando $i = 1$, solo se aplica el caso 2.

Caso 1. $s \in D_j$ para algún $j < i$. Aquí tenemos dos subcasos:

Caso 1.1. $s \in Z_j$. Por el Lema 3.2.3, s tiene un único vecino $v \in B_j \subseteq S_j$.

Caso 1.2. $s \notin Z_j$ para todo $j < i$. Sea j el índice más pequeño para el cual $s \in D_j$. Dado que $s \notin Z_j$, existe un vértice $v \in G - (X_j \cup S_j)$ el cual es dominado solamente por el vértice s en D_j .

Caso 2. $s \notin D_j$ para todo $j < i$. Aquí también tenemos dos subcasos:

Caso 2.1. $s \notin D_i$. Entonces, algún vértice $v \in D_i - X_i$ debe dominar al vértice s .

Caso 2.2. $s \in D_i$. Dado que $s \notin Z_i$, este debe dominar a algún vértice v en $G - (S_i \cup X_i)$, el cual no es dominado por ningún otro vértice en D_i .

En cada caso, sv es una segunda arista que puede ser asociada solamente con el vértice s . Las aristas contadas conforme a 1.1, 2.1, y 2.2, por definición, no involucran a ningún vértice de X_i . Tampoco lo hace alguna arista derivada de 1.2. De otro modo, dado que $X_i = D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_{i-1} - D_i$, el vértice v debería estar en algún D_j , para $j < i$, lo cual contradice la definición de v . Así, ninguna de las segundas aristas coincide con alguna del conjunto inicial de $|S_i|$ aristas. Por lo tanto, ningún par de las segundas aristas es igual. La posibilidad de que esto ocurra para aristas que se derivan de 1.1 o 2.2 no

existe, dado que estas aristas involucran a un vértice que no está en $S_i - B_i$. El vértice v de una arista que se deriva de 1.2 no puede estar en $S_i - B_i$, dado que este debería ser dominado por un vértice de $D_j \cap X_i$, otro aparte de s . El vértice v que se deriva de 2.1 está en D_i , así, si este también está en $S_i - B_i$, este debería tener su segunda arista contada por 2.2, lo cuál haría que la arista sea diferente de sv .

Así, todas las aristas determinadas por los casos 1 y 2 son distintas, y el total de dichas aristas es $|S_i| - |B_i|$. ■

El siguiente resultado es importante para determinar un conteo preciso de las aristas.

Lema 3.2.6 *Las aristas contadas en el Lema 3.2.5 para S_i son distintas de las aristas contadas para S_j , para $1 \leq i < j \leq k$.*

Demostración. Las aristas con un extremo en D_0 y el otro en S_i y S_j son distintas, dado que $S_i \cap S_j = \emptyset$. Retomando la demostración del Lema 3.2.5, las aristas que se derivan de 1.1 son distintas, por la manera en que se definió v .

Las aristas contadas conforme a 1.2, no permitirían que v pertenezca a $S_l - B_l$ para $l > j$, dado que v debería ser dominado por un vértice de D_j , en X_l , otro aparte de s . Si $v \in S_l - B_l$, para $l < j$, existe la posibilidad de que la arista sv pueda ser también la arista asociada a v , si 1.2, 2.1 o 2.2 eran usadas. Pero esto no podría suceder en 1.2, dado que s debería ser dominado por un vértice de D_l , otro aparte de v . La forma en que se cuentan las aristas en 2.1, tampoco genera alguna arista duplicada, dado que, entonces $s \in D_l$, para $l < j$, lo cual contradice el hecho que j es el índice más pequeño para el cual $s \in D_j$. Finalmente, nos queda el caso 2.2, pero tampoco es posible, dado que también s sería dominado por un vértice de D_l , otro aparte de v . Por lo tanto, las aristas contadas de acuerdo a 1.2 son distintas de todas las otras aristas contadas. Usando argumentos similares, ligeramente modificados, se puede mostrar que las aristas contadas de acuerdo a 2.1 y 2.2, también son distintas. ■

El número de aristas distintas, contadas hasta ahora para una gráfica G con número de dominación $\gamma(G) \geq 2$, es por lo menos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (2|S_i| - |X_i|) &= 2 \sum_{i=1}^{k+1} |S_i| - 2|S_{k+1}| - \sum_{i=1}^{k+1} |X_i| + |X_{k+1}| \\ &= 2|S_0| - 2|S_{k+1}| - \gamma + |X_{k+1}|. \end{aligned}$$

3.2. Gráficas conexas

Recordemos que este análisis aplica para gráficas con $\gamma \geq 2$. El siguiente resultado muestra lo que ocurre al considerar gráficas γ -insensibles.

Lema 3.2.7 *Si G es γ -insensible hay al menos $2|S_{k+1}|$ aristas con un vértice en S_{k+1} , distintas de aquellas contadas en el Lema 3.2.5.*

Demostración. Supongamos que $S_{k+1} \neq \emptyset$, de lo contrario, el resultado es inmediato. Sea $s \in S_{k+1}$. Si $s \in D_j$ para alguna j , podemos definir una arista incidente a s como en la demostración del Lema 3.2.5, y mostrar que ésta es distinta de aquellas aristas contadas usando la misma técnica de la demostración del Lema 3.2.6. Si $s \notin D_j$, para $1 \leq j \leq k$, un argumento similar al de la demostración del Lema 3.2.6 muestra que s no puede ser el extremo de alguna arista ya contada. Sea s'' el vértice de X_{k+1} al cual s es adyacente. Dado que G es γ -insensible, $G - ss''$ debe ser dominado por un D_j , para alguna $j \geq 1$. En particular, hay una arista sv con $v \in D_j$. Podemos argumentar, como en la demostración del Lema 3.2.5, que si $v \in S_{k+1}$, una arista diferente debe ser contada para v . Así, hay al menos una arista distinta incidente a cada $s \in S_{k+1}$, la cual no involucra un vértice de X_{k+1} . Dado que, también hay una arista de cada $s \in S_{k+1}$ a un vértice en X_{k+1} , tenemos un total de $2|S_{k+1}|$ aristas, no contadas previamente. ■

Teorema 3.2.8 [3] *Si $n \geq 3\gamma \geq 6$, entonces $E(n, \gamma) = 2n - 3\gamma$.*

Demostración. Por los Lemas 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7, cualquier gráfica G γ -insensible con $\gamma \geq 2$, debe tener al menos

$$2|S_0| - 2|S_{k+1}| - \gamma + |X_{k+1}| + 2|S_{k+1}| \geq 2|S_0| - \gamma$$

aristas con extremo en S_0 . Por definición, cada vértice de $G - (D_0 \cup S_0)$ tiene al menos dos aristas incidentes a D_0 , así ninguna de estas tiene uno de sus extremos en S_0 . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(n, \gamma) &\geq 2|S_0| - \gamma + 2|G - (D_0 \cup S_0)| \\ &= 2|S_0| - \gamma + 2(n - \gamma - |S_0|) = 2n - 3\gamma. \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que $E(n, \gamma) \leq 2n - 3\gamma$, mediante la construcción de una gráfica γ -insensible con este tamaño. Si $n = 3\gamma$, basta considerar al ciclo de orden $n = 3\gamma$. Entonces, supongamos que $n > 3\gamma$. Sea $t \in \mathbb{Z}^+$, $t < \gamma$. Consideremos dos ciclos C_{3t} y $C_{3(\gamma-t)}$, de orden $3t$ y $3(\gamma-t)$, respectivamente. Seleccionemos un vértice x en uno de los ciclos y un vértice y en el otro, tal como se muestra en la Figura 3.7. Para $1 \leq i \leq n - 3\gamma$, añadimos un vértice

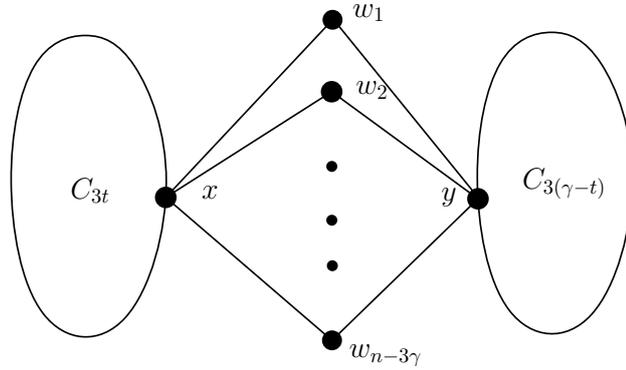


Figura 3.7: Construcción de una gráfica γ -insensible.

w_i y las aristas $w_i x$ y $w_i y$. Observemos que esta gráfica tiene n vértices, $2n - 3\gamma$ aristas y es γ -insensible. ■

Mostraremos todo lo anterior con un ejemplo. Consideremos la gráfica de la Figura 3.8. Contaremos paso a paso el número de aristas de esta gráfica γ -insensible, siguiendo la construcción definida anteriormente.

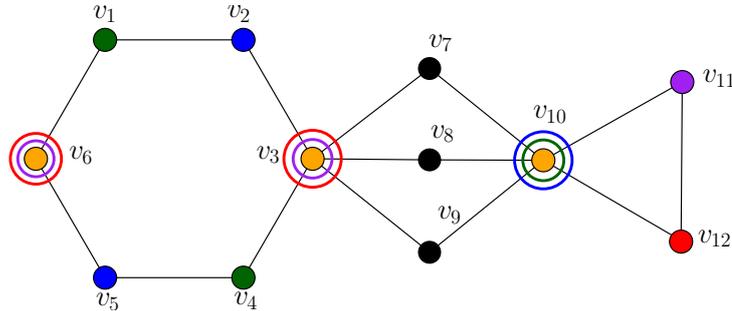


Figura 3.8: Una gráfica γ -insensible con 5 γ -conjuntos.

Sea D_0 un γ -conjunto arbitrario,

$$D_0 = \{v_3, v_6, v_{10}\}.$$

Sea S_0 el subconjunto de vértices de $V(G) - D_0$ que tienen exactamente un vecino en D_0 ,

$$S_0 = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_{11}, v_{12}\}.$$

Sean D_1, D_2, D_3 y D_4 los otros γ -conjuntos de G (el orden es arbitrario).

$$D_1 = \{v_1, v_4, v_{10}\}$$

$$D_2 = \{v_2, v_5, v_{10}\}$$

$$D_3 = \{v_3, v_6, v_{11}\}$$

$$D_4 = \{v_3, v_6, v_{12}\}$$

3.2. Gráficas conexas

Por definición,

$$\begin{aligned}
 X_1 &= D_0 - D_1 = \{v_3, v_6\} & S_1 &= \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \\
 X_2 &= D_0 \cap D_1 - D_2 = \{\emptyset\} & S_2 &= \{\emptyset\} \\
 X_3 &= D_0 \cap D_1 \cap D_2 - D_3 = \{v_{10}\} & S_3 &= \{v_{11}, v_{12}\} \\
 X_4 &= D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 - D_4 = \{\emptyset\} & S_4 &= \{\emptyset\} \\
 X_5 &= D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \emptyset & S_5 &= \{\emptyset\}
 \end{aligned}$$

Observemos que $\bigcup_{i=1}^{k+1} X_i = D_0$, $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_i = S_0$ y $X_i \cap D_i = \emptyset$.

Por definición,

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \{v_1, v_4\} & S'_1 &= \{v_1, v_4\} \\
 Z_2 &= \{\emptyset\} & S'_2 &= \{\emptyset\} \\
 Z_3 &= \{v_{11}\} & S'_3 &= \{v_{11}\} \\
 Z_4 &= \{\emptyset\} & S'_4 &= \{\emptyset\}.
 \end{aligned}$$

Hasta aquí podemos observar que los Lemas 3.2.3 y 3.2.4 se satisfacen. También por definición,

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (Z_1 \cap S_1) \cup S'_1 = \{v_1, v_4\} \\
 B_2 &= (Z_2 \cap S_2) \cup S'_2 = \emptyset \\
 B_3 &= (Z_3 \cap S_3) \cup S'_3 = \{v_{11}\} \\
 B_4 &= (Z_4 \cap S_4) \cup S'_4 = \emptyset.
 \end{aligned}$$

El Lema 3.2.5 nos ayudará a contar las aristas con al menos un vértice en S_i . Así, tenemos al menos

$$\begin{aligned}
 2|S_1| - |X_1| &= 2(4) - 2 = 6 && \text{aristas con un extremo en } S_1, \\
 2|S_2| - |X_2| &= 2(0) - 0 = 0 && \text{aristas con un extremo en } S_2, \\
 2|S_3| - |X_3| &= 2(2) - 1 = 3 && \text{aristas con un extremo en } S_3, \\
 2|S_4| - |X_4| &= 2(0) - 0 = 0 && \text{aristas con un extremo en } S_4.
 \end{aligned}$$

Hasta ahora llevamos $\sum_{i=1}^4 (2|S_i| - |X_i|) = 6 + 3 = 9$ aristas.

Observemos que $V(G) - (D_0 \cup S_0) = \{v_7, v_8, v_9\}$, donde cada uno de estos vértices tiene al menos dos aristas incidentes a D_0 , y ninguna de estas aristas tiene uno de sus extremos en S_0 . Así,

$$E(n, \gamma) \geq 2|S_0| - \gamma + 2|G - (D_0 \cup S_0)| = 2(6) - 3 + 2(3) = 15.$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.2.8, tenemos que $E(12, 3) = 15$.

Retomando el problema, sólo nos queda analizar el caso cuando $n = 3\gamma - 1$. Dado que estamos considerando gráficas conexas y el ciclo C_n de orden $n = 3\gamma - 1$ es γ -insensible, tenemos que

$$n - 1 \leq E(n, \gamma) \leq n.$$

Mostraremos que la cota superior es justa. Para ello, haremos uso de los siguientes resultados para gráficas γ -insensibles.

Lema 3.2.9 *Si G es γ -insensible, entonces ningún vértice es adyacente a dos o más vértices de grado uno.*

Lema 3.2.10 *Si G es un árbol γ -insensible, entonces los vértices finales de cualquier trayectoria de longitud máxima son vértices de grado uno y ambos son adyacentes a un vértice de grado dos.*

En la demostración del siguiente teorema, dado un conjunto arbitrario de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, denotaremos con G_{v_1, v_2, \dots, v_n} a la gráfica $G \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Teorema 3.2.11 [3] *Si $n = 3\gamma - 1$, entonces*

$$E(n, \gamma) = n.$$

Demostración. Sea G una gráfica γ -insensible. Primero supongamos que $\gamma(G) = 2$. Dado que ningún árbol de orden cinco es γ -insensible, tenemos que $E(5, 2) = 5$. Por lo tanto, asumiremos que $\gamma(G) = k \geq 3$. Supongamos que G es un árbol con el menor número de vértices tal que $E(n, \gamma) = n - 1$. Mostraremos que dicho árbol no existe. Por los Lemas 3.2.9 y 3.2.10, existen vértices $x, y, z \in V(G)$ como se muestran en la Figura 3.9 (a). Ninguna trayectoria punteada cuyo vértice inicial es x tiene longitud mayor a dos, y a lo más una trayectoria tiene longitud uno. Estudiaremos diferentes casos dependiendo del grado de x . En cada caso, se eliminarán dos o tres vértices de G . Así, la subgráfica resultante será un árbol con número de dominación $k - 1$ y $(k - 1)$ -insensible. Observemos que, al eliminar dos vértices de G , la subgráfica resultante será de orden $n = 3k - 1 - 2 = 3(k - 1)$ y por el Teorema 3.2.8, no puede ser un árbol. Al eliminar tres vértices de G , la subgráfica resultante será de orden $n = 3k - 1 - 3 = 3(k - 1) - 1$, la cual no puede ser un árbol, pues estamos suponiendo que G es el árbol más pequeño para el cual $n = 3k - 1$. Ambos casos nos llevan a una contradicción, lo cual probaría el teorema.

Procederemos a analizar los casos posibles.

3.2. Gráficas conexas

Caso 1. $\deg(x) = 2$. Es claro que $\gamma(G_{xyz}) = k - 1$. Sea $e \in E(G_{xyz})$. Entonces cualquier γ -conjunto D de $G - e$ incluye a y . Así $D - \{y\} \succ G_{xyz} - e$ y G_{xyz} es la subgráfica requerida.

Caso 2. $\deg(x) \geq 4$ (ver Fig. 3.9 (b)). La arista wt puede o no estar presente. Es claro que $\gamma(G_{yz}) = k - 1$. Sea $e \in E(G_{yz})$. Entonces cualquier γ -conjunto D de $G - e$ incluye a y y x es dominado por al menos uno de los vértices y , v o w . Así $D - \{y\} \succ G_{yz} - e$ y G_{yz} es la subgráfica requerida.

Caso 3. $\deg(x) = 3$, donde x da lugar a dos trayectorias de longitud dos (ver Fig. 3.9 (c)). También es claro que $\gamma(G - yz) = k - 1$. Sea $e = uv \in E(G)$, $G - e$ puede ser dominado por un conjunto que contiene a los vértices y y w y un conjunto D' de cardinalidad $k - 2$ que contiene a x . Entonces $D' \cup \{w\}$ domina a ambas subgráficas $G_{yz} - vw$ y $G_{yz} - xv$. Sea $e \in E(G_{yzvw})$. Entonces $G - e$ puede ser dominado por un conjunto D que contiene a los vértices y y v . Así, $D - \{y\} \succ G_{yz} - e$ y G_{yz} es la subgráfica requerida.

Caso 4. $\deg(x) = 3$, donde x da lugar a una trayectoria de longitud uno (ver Fig. 3.9 (d)). Entonces cualquier γ -conjunto de G contiene tanto a x como a y . Así $\gamma(G_{wyz})$ es o bien $k - 1$ o $k - 2$. Primero, supongamos que $\gamma(G_{wyz}) = k - 1$ y sea $e \in E(G_{wyz})$. Entonces cualquier γ -conjunto D de $G - e$ contiene a ambos vértices x y y . Así $D - \{y\} \succ G_{wyz} - e$ y G_{wyz} es la subgráfica requerida. Ahora, supongamos que $\gamma(G_{wyz}) = k - 2$. Entonces, ningún γ -conjunto D de G_{wyz} puede contener a x dado que $D \cup \{y\}$ sería un conjunto dominante de G de cardinalidad $k - 1$. Así concluimos que $\gamma(G_{yz}) = k - 1$. $G_{yz} - xw$ es dominado por w y por un conjunto dominante de G_{wyz} de cardinalidad $k - 2$, y para una arista $e \in E(G_{wyz})$, $G - e$ es dominado por un conjunto D' que contiene a ambos vértices x y y . Por lo tanto, $D' - \{y\} \succ G_{yz} - e$ y G_{yz} es la subgráfica requerida. ■

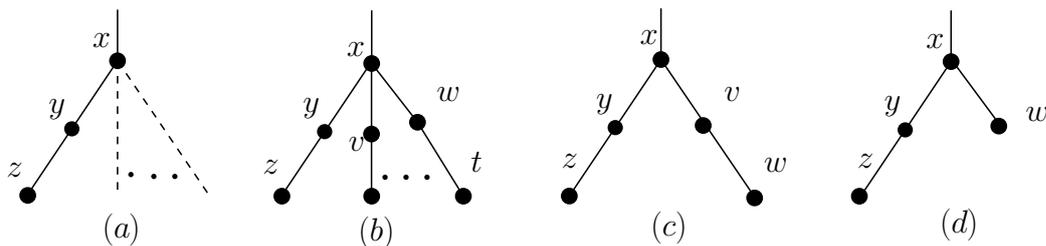


Figura 3.9: Casos posibles de árboles γ -insensibles.

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.12 [3]

$$E(n, \gamma) = \begin{cases} 3n - 6 & \text{si } \gamma = 1 \text{ y } n \geq 3, \\ n - 1 & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n \leq 3\gamma - 2, \\ n & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n = 3\gamma - 1, \\ 2n - 3\gamma & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n \geq 3\gamma. \end{cases}$$

3.3. Gráficas conexas tras la eliminación de cualquier arista

En esta sección, desarrollaremos el tercer problema descrito en la introducción del capítulo, donde la gráfica $G - e$ debe ser conexas para toda $e \in E(G)$. Observemos que $E_c(n, \gamma) \geq n$ y $E_c(n, \gamma) \geq E(n, \gamma)$, hechos que usaremos más adelante.

Teorema 3.3.1 [3] *Si $\gamma(G) = 1$ o $5 \leq 3\gamma - 1 \leq n$ o $n \neq 3\gamma + 1$, entonces*

$$E_c(n, \gamma) = E(n, \gamma).$$

Demostración. Si $n = 3\gamma - 1$ o $n = 3\gamma$, basta considerar el ciclo de orden n para probar el teorema. De otro modo, las familias de gráficas que se describen en la demostración del Teorema 3.2.1 y el Teorema 3.2.8, muestran que $E_c(n, \gamma) \leq E(n, \gamma)$. ■

Teorema 3.3.2 [3] *Si $n = 3\gamma - 2 \geq 4$, entonces*

$$E_c(n, \gamma) = 3\gamma - 2 = E(n, \gamma) + 1.$$

Demostración. En este caso, basta considerar al ciclo de orden n . ■

Observemos que los ciclos de orden $n < 3\gamma - 2$, no cumplen la propiedad que $\gamma(G) = \gamma$, es decir, si $n < 3\gamma - 2$, entonces $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil < \gamma$. Por lo tanto, para $n < 3\gamma - 2$, si tales gráficas existen, se tiene que $E_c(n, \gamma) \geq n + 1$.

3.3. Gráficas conexas tras la eliminación de cualquier arista

Teorema 3.3.3 [3] *Si $n = 3\gamma + 1 \geq 7$, entonces*

$$E_c(n, \gamma) = E(n, \gamma) + 1 = n + 2.$$

Demostración. Para la cota superior, consideremos la gráfica de la Figura 3.10. Observemos que en este caso, $G - e$ es conexas para toda $e \in E(G)$. Así

$$E_c(n, \gamma) \leq |E(C_{3(\gamma-1)})| + 6 = 3(\gamma - 1) + 6 = 3\gamma + 3 = n + 2.$$

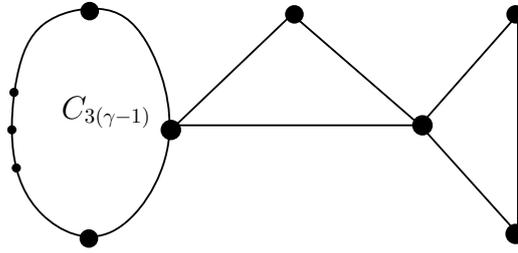


Figura 3.10: Gráfica extremal de orden $n = 3\gamma + 1$ y tamaño $n + 2$.

Ahora, supongamos que $E_c(n, \gamma) = n + 1$. Sea l_i el número de vértices de grado i de una gráfica extremal. Como $\sum_{i=1}^{n-1} il_i = 2n$, tenemos que

$$2E_c(n, \gamma) = 2n + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} il_i.$$

Dado que $G - e$ debe ser conexas para toda $e \in E(G)$, $l_1 = 0$. Como $\sum_{i=1}^{n-1} l_i = n$, $l_2 = n - l_3 - \dots - l_{n-1}$. Así

$$\begin{aligned} 2n + 2 &= 2(n - l_3 - l_4 - \dots - l_{n-1}) + 3l_3 + 4l_4 + \dots + (n - 1)l_{n-1} \\ &= 2n + l_3 + 2l_4 + \dots + (n - 3)l_{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2 = l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \dots + (n - 3)l_{n-1},$$

lo cual implica que $l_i = 0$ para $i \geq 5$ y o bien $l_3 = 0$ y $l_4 = 1$ o $l_3 = 2$ y $l_4 = 0$. Ahora, analizaremos cada caso.

Caso 1. $l_3 = 0$ y $l_4 = 1$. Observemos que en este caso, todo γ -conjunto D de G debe incluir al vértice de grado cuatro, pues si no estuviera, D debería contener solamente vértices de grado dos y podría dominar a lo más a $3\gamma < n$ vértices. Ahora, en la demostración del Teorema 3.2.8, se mostró que

$E(n, \gamma) \geq 2n - 3\gamma + |X_{l+1}|$ donde X_{l+1} es el conjunto de vértices que aparecen en cada γ -conjunto. Por lo tanto, tenemos que

$$E_c(n, \gamma) \geq 2n - 3\gamma + 1 = 2(3\gamma + 1) - 3\gamma + 1 = n + 2.$$

Caso 2. $l_3 = 2$ y $l_4 = 0$. Sean x y y los dos vértices de grado tres

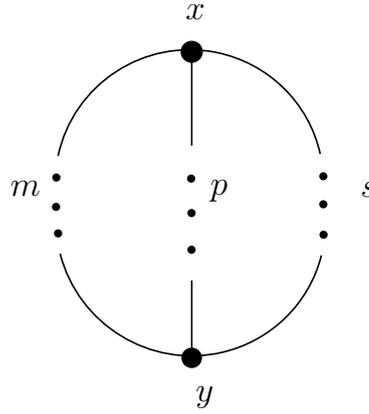


Figura 3.11:

(ver Fig. 3.11). Supongamos que hay m vértices en la trayectoria izquierda entre los vértices x y y , p vértices en la trayectoria central y s vértices en la trayectoria derecha, es decir, $m + p + s = n + 2 = 3\gamma + 1 - 2 = 3\gamma - 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq p \leq s$. Además, tenemos que $m \geq 1$, pues de otro modo, x es adyacente a y y $G - xy$ sería un ciclo de orden $3\gamma + 1$, el cuál requiere de $\gamma + 1$ vértices para ser dominado. Ahora, mostraremos que la gráfica de la Figura 3.11, tiene una arista e para la cuál $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$. Entonces $E_c(3\gamma + 1, \gamma) > 3\gamma + 2$, es decir, $E_c(3\gamma + 1, \gamma) \geq 3\gamma + 3$. Consideremos la eliminación de alguna arista incidente a x . Las subgráficas resultantes son todas similares, en el sentido que éstas son un ciclo con una trayectoria colgante. Así el análisis de uno de ellos, se aplica a los demás. Supongamos que v es adyacente a x sobre la trayectoria izquierda y sea $G' = G - vx$. Por hipótesis, $\gamma(G') = \gamma(G) = \gamma$ y G' consiste de un ciclo de $p + s + 2 = 3\gamma + 1 - m$ vértices con una trayectoria colgante de longitud m . De aquí, tenemos tres casos dependiendo del valor de m .

Caso 2.1. $m = 3k$ para algún $k \geq 1$. Entonces cada γ -conjunto contiene k o $k + 1$ vértices de la trayectoria colgante. En el primer caso, al menos $\gamma - k + 1$ vértices más son necesarios para dominar el ciclo, y en el siguiente caso, al menos $\gamma - k$ vértices más. En cualquiera de los dos casos, se requiere un total de $\gamma + 1$ vértices. Por lo tanto, $m \neq 3k$ y usando un argumento similar

3.3. Gráficas conexas tras la eliminación de cualquier arista

tenemos que ni p ni s son igual a $3k$.

Caso 2.2. $m = 3k + 1$ para algún $k \geq 0$. Elegimos $\gamma - k$ vértices del ciclo, incluyendo a y para dominar al ciclo y un vértice de la trayectoria. Ahora elegimos k vértices de una trayectoria para dominar a los otros $3k$ vértices. Así, esto es posible para todo m , p o s igual a $3k + 1$ para algún $k \geq 0$.

Caso 2.3. $m = 3k + 2$ para algún $k \geq 0$. Los vértices de la trayectoria y el vértice y pueden ser dominados por $k + 1$ vértices de una trayectoria. Entonces, necesitaremos al menos $\gamma - k$ vértices del ciclo para completar un γ -conjunto, es decir, $\gamma + 1$ vértices en total. Por lo tanto, ni m , p o s pueden ser $3k + 2$ para algún $k \geq 0$.

Por lo tanto, m , p y s deben satisfacer el Caso 2.2 y tener valores de $3k_1 + 1$, $3k_2 + 1$ y $3k_3 + 1$, respectivamente, para enteros no negativos k_1 , k_2 y k_3 . Pero esto implica que $n = m + p + s + 2 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1) + 2 \neq 3\gamma + 1$. Así, $E_c(n, \gamma) > 3\gamma + 2$ y por lo tanto,

$$E_c(n, \gamma) \geq n + 2.$$

■

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.4 [3]

$$E_c(n, \gamma) = \begin{cases} E(n, \gamma) = 3n - 6 & \text{si } \gamma = 1 \text{ y } n \geq 3, \\ E(n, \gamma) + 1 = n & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n = 3\gamma - 2, \\ E(n, \gamma) = n & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n = 3\gamma - 1 \text{ o } 3\gamma, \\ E(n, \gamma) + 1 = n + 2 & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n = 3\gamma + 1, \\ E(n, \gamma) = 2n - 3\gamma & \text{si } \gamma \geq 2 \text{ y } n \geq 3\gamma + 2. \end{cases}$$

Capítulo 4

ASR-gráficas

Recordemos que, dada una gráfica G y $e \in E(G)$, denotamos con $G - e$ a la gráfica que se obtiene al eliminar la arista e de G y con G_e a la gráfica que se obtiene al subdividir la arista e de G . En el presente capítulo, estudiaremos aquellas gráficas tales que $\gamma(G - e) \neq \gamma(G_e)$ para toda $e \in E(G)$; a éstas se les denomina *ASR*-gráficas. Es aquí donde se concentra la parte original del trabajo, pues expondremos nuevos resultados obtenidos acerca de este tipo de gráficas que, como veremos, son un subconjunto de las gráficas γ -insensibles estudiadas en el capítulo anterior. Con respecto a las *ASR*-gráficas, estudiaremos algunas propiedades, daremos una caracterización y mostraremos cotas para su tamaño mínimo. Además, daremos una cota superior justa para su número de dominación.

4.1. Propiedades

En esta sección, mostraremos algunas propiedades de las *ASR*-gráficas. Nos apoyaremos fundamentalmente en el trabajo desarrollado por Lemańska, Tey y Zuazua (ver [13]).

De ahora en adelante, mientras no se indique lo contrario, las gráficas consideradas serán simples, conexas y no nulas.

Sea G una gráfica, $D \in \Gamma(G)$ y $e \in E(G)$. Si $|e \cap D| = 1$, entonces con $\overline{e \cap D}$ denotaremos al extremo de e que no está contenido en D . Como en los capítulos precedentes, escribiremos $D \succ G$ cuando D sea un conjunto dominante de G .

Observación 4.1.1 Sea G una gráfica y $e \in E(G)$.

- (a) Si $D \succ G - e$, entonces $D \succ G$.
- (b) Si $D \succ G_e$ y $e \cap D \neq \emptyset$, entonces $D \succ G$.

Lema 4.1.2 Sea G una gráfica y $e \in E(G)$. Entonces

- (a) $\gamma(G) \leq \gamma(G - e) \leq \gamma(G) + 1$ y
- (b) $\gamma(G) \leq \gamma(G_e) \leq \gamma(G) + 1$.

Demostración. Sean G una gráfica y $e = uv$ una arista de G . Por la Observación 4.1.1 (a), tenemos que $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$. Por otro lado, sea D un γ -conjunto de G . Si $e \cap D = \emptyset$ o $e \cap D = e$, entonces $D \succ G - e$; en otro caso, sin pérdida de generalidad, $e \cap D = \{u\}$. Así, $D \cup \{v\} \succ G - e$, por lo que $\gamma(G - e) \leq \gamma(G) + 1$.

Ahora, sean w el nuevo vértice que se obtiene al subdividir la arista e y D un γ -conjunto de G_e . Si $w \notin D$, entonces $e \cap D \neq \emptyset$ y por la Observación 4.1.1 (b), tenemos que $\gamma(G) \leq \gamma(G_e)$; si $w \in D$, entonces $(D \setminus \{w\}) \cup \{u\} \succ G$, por lo que $\gamma(G) \leq \gamma(G_e)$. Por otro lado, si $D \succ G$, entonces $D \cup \{w\} \succ G_e$, así $\gamma(G_e) \leq \gamma(G) + 1$. ■

Decimos que G es una **ASR-gráfica** (del inglés *anti subdivision remotion*) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que

$$\gamma(G - e) \neq \gamma(G_e).$$

Por ejemplo, la gráfica completa $G = K_n$, $n \geq 3$, es una *ASR*-gráfica, ya que para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) = 1$ y $\gamma(G_e) = 2$ (ver Figura 4.1).

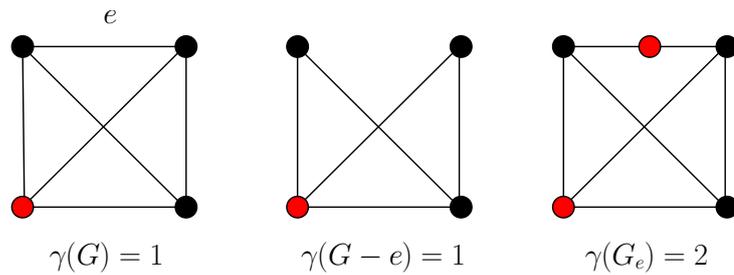


Figura 4.1: Ejemplo de una *ASR*-gráfica.

Observemos que K_1 no es una *ASR*-gráfica y K_2 claramente sí lo es. A partir de ahora, asumiremos que todas las gráficas consideradas en este capítulo tienen orden al menos tres.

4.1. Propiedades

Lema 4.1.3 *Si G es una gráfica con $\gamma(G) = 1$, entonces $\gamma(G_e) = 2$ para toda $e \in E(G)$.*

Demostración. Sean $e = uv \in E(G)$, $D \in \Gamma(G_e)$ y w el nuevo vértice que se obtiene al subdividir e . Observemos que $|D \cap N[w]| \geq 1$ y que ningún vértice en $N[w]$ es un vértice universal de G_e . Luego $|D| \geq 2$ y por el Lema 4.1.2 (b), tenemos que $|D| = 2$. ■

Lema 4.1.4 [13] *Si G es una ASR-gráfica, entonces para todo γ -conjunto $D = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ se tiene que $(N[v_1], N[v_2], \dots, N[v_k])$ es una partición de $V(G)$.*

Demostración. Sea G una ASR-gráfica y $D = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un γ -conjunto de G . Para cada i , $1 \leq i \leq k$, tenemos que $N[v_i] \neq \emptyset$ y $V(G) = \bigcup_{i=1}^k N[v_i]$. Supongamos que existe un vértice $v \in N[v_i] \cap N[v_j]$ para algún $i \neq j$. Entonces para la arista $e = v_i v$, tenemos que $D \succ G - e$ y $D \succ G_e$, así $\gamma(G - e) \leq \gamma(G)$ y $\gamma(G_e) \leq \gamma(G)$ y por el Lema 4.1.2, tenemos que $\gamma(G - e) \geq \gamma(G)$ y $\gamma(G_e) \geq \gamma(G)$. Por lo tanto, $\gamma(G - e) = \gamma(G) = \gamma(G_e)$, lo que nos lleva a una contradicción, pues estamos suponiendo que G es una ASR-gráfica. Luego, $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$ y así $(N[v_1], N[v_2], \dots, N[v_k])$ es una partición de $V(G)$. ■

Observemos que el Lema 4.1.4, implica que si G es una ASR-gráfica, entonces todo γ -conjunto de G es un conjunto independiente. También, del Lema 4.1.4 tenemos el siguiente corolario, donde hacemos referencia a $\varphi(G)$, el número de empaque de una gráfica.

Se define el número de empaque de una gráfica G como

$$\varphi(G) = \max\{k : \exists v_1, v_2, \dots, v_k \in V(G) \text{ con } N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k\}.$$

Corolario 4.1.5 *Si G es una ASR-gráfica, entonces $\gamma(G) = \varphi(G)$.*

Demostración. Es fácil ver que $\varphi(G) \leq \gamma(G)$ para toda G . Entonces por el Lema 4.1.4, para toda ASR-gráfica se cumple que $\gamma(G) \leq \varphi(G)$, por lo que $\gamma(G) = \varphi(G)$. ■

Al trabajar con gráficas conexas, es común estudiar el problema para árboles, pero en nuestro caso esto no es posible, ya que en [13] se demostró que las ASR-gráficas no tienen hojas. Para llegar a este resultado, introduciremos el concepto de arista de sujeción.

En 1997, Teschner (ver [17]) introdujo el concepto de *bondage edge* (que en español denominaremos *arista de sujeción*) para referirse a aquellas aristas de una gráfica que al eliminarlas, alteran su número de dominación.

Una arista $e \in E(G)$ se denomina **arista de sujeción** si $\gamma(G-e) > \gamma(G)$.

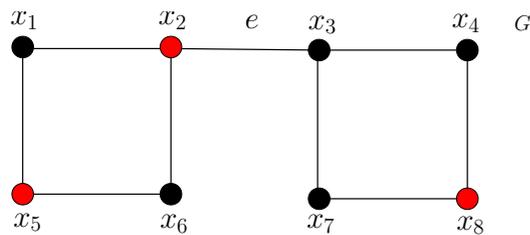
Recordemos que, la *vecindad privada externa* $EPN(v, S)$ de un vértice $v \in S$ con respecto a $S \subseteq V(G)$ es $EPN(v, S) = N(v) - N[S - \{v\}]$.

En [17] se probó la siguiente caracterización de una arista de sujeción.

Teorema 4.1.6 [17] *Una arista $e \in E(G)$ es de sujeción si y sólo si $|e \cap D| = 1$ y $e \cap \bar{D} \in EPN(e \cap D, D)$ para todo $D \in \Gamma(G)$.*

Si una arista satisface la condición del Teorema 4.1.6, decimos que satisface la **Condición de Teschner**. En la Figura 4.2, se muestra una gráfica G cuya arista de sujeción es $e = x_2x_3$. Observemos que, en este caso no es difícil mostrar que e satisface la Condición de Teschner, por ejemplo, para $D = \{x_2, x_5, x_8\}$, $e \cap D = \{x_2\}$ y así

$$\begin{aligned} EPN(x_2, D) &= N(x_2) - N[D - \{x_2\}] \\ &= \{x_1, x_3, x_6\} - N[x_5, x_8] \\ &= \{x_1, x_3, x_6\} - \{x_1, x_5, x_6, x_4, x_7, x_8\} \\ &= \{x_3\} \end{aligned}$$



$$\gamma(G) = 3 \text{ y } \gamma(G - e) = 4$$

Figura 4.2: Una gráfica cuya arista de sujeción es $e = x_2x_3$.

Observación 4.1.7 *Toda gráfica tiene un γ -conjunto sin hojas.*

4.1. Propiedades

Proposición 4.1.8 [13] *Las ASR-gráficas no tienen aristas de sujeción.*

Demostración. Sea G una ASR-gráfica. Si $\gamma(G) = 1$, por el Lema 4.1.3, $\gamma(G_e) = 2$ para toda $e \in E(G)$ y como estamos suponiendo que G es una ASR-gráfica, tenemos que $\gamma(G - e) \neq \gamma(G_e) = 2$. Así, por el Lema 4.1.2 (a), tenemos que $\gamma(G) = \gamma(G - e)$ para toda $e \in E(G)$ y por lo tanto, G no tiene aristas de sujeción. Ahora, la única ASR-gráfica conexa de orden tres es K_3 y claramente ésta no tiene aristas de sujeción. Por lo tanto, supondremos que G tiene orden al menos cuatro y $\gamma(G) = k \geq 2$.

Supongamos que $e = uv$ es una arista de sujeción de G , es decir, $\gamma(G - e) > \gamma(G)$. Por el Teorema 4.1.6, tenemos que $|e \cap D| = 1$ y $e \cap \bar{D} \in EPN(e \cap D, D)$ para todo $D \in \Gamma(G)$. Sea $D \in \Gamma(G)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u = e \cap D$ y $v = \bar{e} \cap \bar{D}$, luego $D = \{u, v_2, v_3, \dots, v_k\}$. Como G es conexa y no es K_2 , por la Observación 4.1.7, podemos suponer que $\deg(u) \geq 2$.

Por el Lema 4.1.2 (b) y dado que e es una arista de sujeción, tenemos que $\gamma(G) \leq \gamma(G_e) \leq \gamma(G) + 1 = \gamma(G - e)$. Como estamos suponiendo que G es una ASR-gráfica, $\gamma(G_e) \neq \gamma(G - e)$ y así, $\gamma(G) = \gamma(G_e)$. Entonces existe $D^* \succ G_e$ tal que $|D^*| = k$.

Claramente, $N_{G_e}[v_i] = N_G[v_i]$ y $|D^* \cap N_{G_e}[v_i]| \geq 1$, para $2 \leq i \leq k$. Así, por el Lema 4.1.4, $|\bigcup_{i=2}^k (D^* \cap N_{G_e}[v_i])| \geq k - 1$. Observemos que, si $|D^* \cap N_{G_e}[v_i]| \geq 2$ para alguna $i \geq 2$, entonces $D^* \cap N_{G_e}[u] = \emptyset$, lo cual contradice que D^* es un conjunto dominante de G_e . Por lo tanto, $|D^* \cap N_{G_e}[v_i]| = 1$ para toda $i \geq 2$.

Sean $z_i = D^* \cap N_{G_e}[v_i]$, $2 \leq i \leq k$, $Z = \{z_2, z_3, \dots, z_k\}$ y w el nuevo vértice en G_e . Dado que $|Z| = k - 1$ y $Z \not\ni w$ tenemos que $|D^* \cap \{u, v, w\}| = 1$. Por otro lado, en G_e , v no es adyacente a u y por el Lema 4.1.4, $Z \not\ni u$. Así $D^* = Z \cup \{w\}$. Dado que $Z \succ \{N_{G_e}(u) - \{w\}\}$ y $\deg_{G_e}(u) \geq 2$, existe un vértice $y \in N_{G_e}(u) \cap N_{G_e}(z_i)$ para alguna $i \geq 2$. Por lo tanto, para $f = yz_i$, el conjunto $Z \cup \{u\}$ domina a la vez a $G - f$ y G_f , lo que nos lleva a una contradicción pues estamos suponiendo que G es una ASR-gráfica. Por lo tanto, G no tiene aristas de sujeción. ■

Corolario 4.1.9 *Las ASR-gráficas son γ -insensibles.*

Demostración. Sea G una ASR-gráfica. Entonces, por la Proposición 4.1.8, G no tiene aristas de sujeción. Luego por el Lema 4.1.2 (a), $\gamma(G - e) = \gamma(G)$ para toda $e \in E(G)$, es decir, G es γ -insensible. ■

Corolario 4.1.10 *Las ASR-gráficas no tienen hojas.*

Demostración. Sea G una *ASR*-gráfica. Supongamos que $e = uv$ es una arista tal que $\deg(u) = 1$. Por la Proposición 4.1.8, e no es arista de sujeción. Si $e \cap D = \{v\}$ para todo $D \in \Gamma(G)$, entonces e satisface la Condición de Teschner y por el Teorema 4.1.6, la arista e es de sujeción, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \{u\}$. Observemos que, por el Corolario 4.1.9, $|D^*| = \gamma(G - e)$. Ahora, sea w el vértice que se obtiene al subdividir la arista e . Entonces $D' = (D^* - \{u\}) \cup \{w\}$ es un conjunto dominante de G_e tal que $|D'| = |D^*|$, así $\gamma(G_e) = \gamma(G - e)$, lo que nos lleva a una contradicción, pues estamos suponiendo que G es una *ASR*-gráfica. Por lo tanto, G no tiene hojas. ■

Lema 4.1.11 *Si una gráfica tiene un único γ -conjunto, entonces no es una ASR-gráfica.*

Demostración. Supongamos que G es una *ASR*-gráfica con un único γ -conjunto D . Por el Lema 4.1.4 y dado que G es conexa, existe $v \in V(G) \setminus D$ y un único $u \in D$ tal que $u \succ v$. Sea $e = uv$. Entonces $D \neq G - e$ y todo D^* con $D^* \succ G - e$ es distinto de D . Por otro lado, por el Corolario 4.1.9, $|D^*| = |D|$. Luego, por la Observación 4.1.1 (a), D^* es un segundo γ -conjunto de G , contradiciendo el hecho de que D sea el único. ■

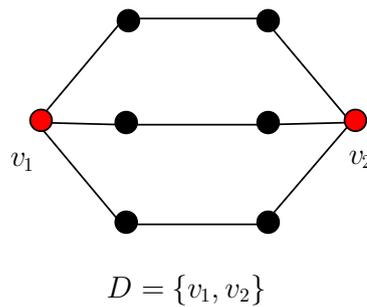


Figura 4.3: Una gráfica con un único γ -conjunto.

Lema 4.1.12 *Si una gráfica tiene dos únicos γ -conjuntos, entonces no es una ASR-gráfica.*

4.1. Propiedades

Demostración. Supongamos que G es una ASR -gráfica con número de dominación $\gamma(G) = k$. Sean $D_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ y $D_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ los dos únicos γ -conjuntos de G . Entonces existen $u_i \in D_1 - D_2$ y $v_j \in D_2 - D_1$ tales que $e = u_i v_j$ es una arista de G .

Por el Lema 4.1.4, ni D_1 ni D_2 dominan a $G - e$. Entonces por el Corolario 4.1.9 existe $D_3 \succ G - e$ distinto de D_1 y D_2 tal que $|D_3| = |D_1| = |D_2|$ y por la Observación 4.1.1 (a), estamos encontrando un tercer γ -conjunto de G , contradiciendo el hecho de que G tiene solamente dos γ -conjuntos. ■

Proposición 4.1.13 *Una ASR -gráfica tiene al menos tres γ -conjuntos distintos.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de los Lemas 4.1.11 y 4.1.12. ■

Corolario 4.1.14 *Una gráfica con exactamente uno o dos vértices universales no es una ASR -gráfica.*

Demostración. Consecuencia directa de que $\gamma(G) = 1$ y la Proposición 4.1.13. ■

Proposición 4.1.15 *Si una gráfica tiene al menos tres vértices universales, entonces es una ASR -gráfica.*

Demostración. Sea $e \in E(G)$. Por hipótesis, la gráfica $G - e$ tiene al menos un vértice universal, luego $\gamma(G - e) = 1$ y por el Lema 4.1.3, $\gamma(G_e) = 2$. Por lo tanto, G es una ASR -gráfica. ■

Lema 4.1.16 *Sea G una ASR -gráfica de orden n . Entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{3}.$$

Demostración. Sean G una ASR -gráfica con $\gamma(G) = k$ y $D = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un γ -conjunto de G . Por el Lema 4.1.4, tenemos que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$ para toda $i \neq j$, y por el Corolario 4.1.10, $|N[v_i]| \geq 3$ para toda i , $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto,

$$n = \sum_{i=1}^k |N[v_i]| \geq 3k.$$

■

4.2. Caracterización

En esta sección, caracterizaremos a las *ASR*-gráficas. Empezaremos con las *ASR*-gráficas con $\gamma(G) = 1$, dicho resultado lo podemos encontrar en [13]. Posteriormente, mostraremos una caracterización de las *ASR*-gráficas, la cual nos proporciona información sobre la relación entre las aristas y los γ -conjuntos de éstas, pero nos dice poco acerca de su estructura. Es por ello que, para finalizar la sección, daremos condiciones suficientes para que una gráfica sea *ASR*-gráfica, esta vez más comprometidas con la estructura de la misma.

Proposición 4.2.1 [13] *Una gráfica G con $\gamma(G) = 1$ es una *ASR*-gráfica si y sólo si existe una gráfica (posiblemente nula) H tal que $G = K_3 + H$.*

Demostración. Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$ y $\gamma(G) = 1$. Supongamos que existe una gráfica H tal que $G = K_3 + H$. Entonces, G tiene al menos tres vértices universales y por la Proposición 4.1.15, es una *ASR*-gráfica.

Recíprocamente, supongamos que G es una *ASR*-gráfica. Entonces, por el Corolario 4.1.14, G tiene al menos tres vértices universales, es decir, existe H (posiblemente nula) tal que $G = K_3 + H$. ■

Del Lema 4.1.2 y el Corolario 4.1.9, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.2 *G es una *ASR*-gráfica si y sólo si*

$$\gamma(G_e) = \gamma(G) + 1 \quad \text{y} \quad \gamma(G - e) = \gamma(G). \quad (4.1)$$

Nuestra caracterización de las *ASR*-gráficas se basa en hacer un análisis de (4.1). Primero, estudiaremos aquellas gráficas para las cuales $\gamma(G) = \gamma(G - e)$ para toda $e \in E(G)$, es decir, las gráficas γ -insensibles. Posteriormente, estudiaremos aquellas para las cuales $\gamma(G) \neq \gamma(G_e)$ para toda $e \in E(G)$. Esto nos permitirá caracterizar las gráficas que nos interesan, es decir, aquellas que cumplen ambas condiciones a la vez.

En 1979, Acharya y Walikar (ver [1]) mostraron la siguiente caracterización de las gráficas γ -insensibles. Como es de esperar, dicha caracterización se puede obtener a partir de la negación lógica de la Condición de Teschner expuesta en el Teorema 4.1.6.

4.2. Caracterización

Teorema 4.2.3 [1] G es γ -insensible si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $e \cap D = e$.
2. $e \cap D = \emptyset$.
3. $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$.

Decimos que una gráfica G es una **DSS-gráfica** (del inglés *domination subdivision stable*) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que

$$\gamma(G_e) = \gamma(G).$$

En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de una DSS-gráfica. Observemos que, después de subdividir cualquier arista, siempre nos quedará una gráfica con número de dominación igual a dos.

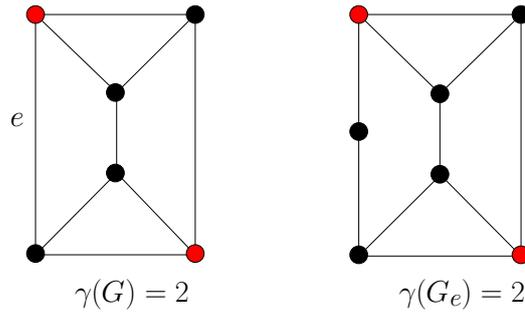


Figura 4.4: Ejemplo de una DSS-gráfica.

En 2012, Karthika y Yamuna (ver [18]) dieron una caracterización de las DSS-gráficas. Desafortunadamente esta es imprecisa. El siguiente teorema es una versión corregida de dicha caracterización.

Teorema 4.2.4 G es una DSS-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $e \cap D = e$.
2. $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$.
3. $|e \cap D| = 1$ y $EPN(e \cap D, D) = \{\overline{e \cap D}\}$.

Demostración. Sean G una DSS-gráfica, $e = uv$ una arista de G , w el nuevo vértice que se obtiene al subdividir la arista e y $D^* \in \Gamma(G_e)$. Consideraremos dos casos.

Caso 1. $w \in D^*$. Si $e \cap D^* \neq \emptyset$, entonces $D = D^* - \{w\}$ es un conjunto dominante de G con $|D| < |D^*|$, lo cual es imposible, pues estamos suponiendo que $\gamma(G_e) = \gamma(G)$. Luego, $e \cap D^* = \emptyset$ y es claro que $D = (D^* - \{w\}) \cup \{u\}$ es un γ -conjunto de G . Si $v \notin EPN(u, D)$, entonces D cumple la segunda condición del teorema. De lo contrario, como en G_e , $N(w) = \{u, v\}$, se tiene que en G , $EPN(u, D) = \{v\}$ y así D cumple la tercera condición del teorema.

Caso 2. $w \notin D^*$. En este caso $e \cap D^* \neq \emptyset$ y $D^* \succ G$. Si $e \cap D^* = e$, entonces D^* cumple la primera condición del teorema. De lo contrario, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $e \cap D^* = \{u\}$ y como en G_e , el vértice v debe ser dominado por algún otro vértice distinto de u , en G se tiene que $v \notin EPN(u, D^*)$. Así D^* cumple la segunda condición del teorema.

Recíprocamente, sea $e \in E(G)$ y supongamos que existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple alguna de las tres condiciones citadas en el enunciado. Si $e \cap D = e$, entonces $D \succ G_e$. Si $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$, también $D \succ G_e$. Si $|e \cap D| = 1$ y $EPN(e \cap D, D) = \{\overline{e \cap D}\}$, entonces $(D - \{e \cap D\}) \cup \{w\} \succ G_e$. Por lo tanto, por el Lema 4.1.2 (b), en cualquiera de los tres casos tenemos que $\gamma(G_e) = \gamma(G)$. ■

Decimos que G es una **DSNS-gráfica** (del inglés *domination subdivision non stable*) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que

$$\gamma(G_e) > \gamma(G).$$

Ahora, negaremos lógicamente las condiciones del Teorema 4.2.4 para obtener una caracterización de las *DSNS*-gráficas.

Teorema 4.2.5 *G es una DSNS-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ y todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. $e \cap D = \emptyset$.
2. $|e \cap D| = 1$, $\overline{e \cap D} \in EPN(e \cap D, D)$ y $EPN(e \cap D, D) \neq \{\overline{e \cap D}\}$.

Por el Corolario 4.2.2 y la definición anterior, tenemos la siguiente observación.

Observación 4.2.6 *G es una ASR-gráfica si y sólo si es γ -insensible y DSNS-gráfica.*

Por lo tanto, los Teoremas 4.2.3 y 4.2.5 constituyen la base de la siguiente caracterización de las *ASR*-gráficas.

4.2. Caracterización

Teorema 4.2.7 *G es una ASR-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$ y para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. $e \cap D = \emptyset$.
2. $|e \cap D| = 1$, $\overline{e \cap D} \in EPN(e \cap D, D)$ y $EPN(e \cap D, D) \neq \{\overline{e \cap D}\}$.

Demostración. Supongamos que G es una gráfica tal que para toda $e \in E(G)$ existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$. Entonces por el Teorema 4.2.3, G es γ -insensible. Si además, para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las dos condiciones citadas en el enunciado teorema, entonces por el Teorema 4.2.5, G es una DSNS-gráfica. Así $\gamma(G - e) = \gamma(G) \neq \gamma(G_e)$ para toda $e \in E(G)$. Por lo tanto, G es una ASR-gráfica.

Recíprocamente, supongamos que G es una ASR-gráfica y sea $e \in E(G)$. Entonces por el Corolario 4.1.9, G es una DSNS-gráfica, y por el Teorema 4.2.5, para la arista e y todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las condiciones del teorema. Por otra parte, por el Corolario 4.1.9, G es γ -insensible, luego por el Teorema 4.2.3, existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que la segunda condición del teorema no se cumple. Finalmente, como G es simultáneamente DSNS-gráfica y γ -insensible, por los Teoremas 4.2.3 y 4.2.5, se tiene que $e \cap D^* = \emptyset$. ■

A continuación, daremos condiciones suficientes para que una gráfica sea ASR-gráfica, esta vez más comprometidos con la estructura de la misma.

Lema 4.2.8 *Sea G una gráfica tal que*

1. *G tiene al menos tres γ -conjuntos disjuntos.*
2. *Para todo $D \in \Gamma(G)$ con $D = \{v_1, v_2, \dots, v_\gamma\}$ y $v_i, v_j \in D$, $i \neq j$, se tiene que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$.*

Entonces G es una ASR-gráfica.

Demostración. Mostraremos que se cumplen las condiciones suficientes del Teorema 4.2.7 para que G sea una ASR-gráfica.

Sea $e = uv$ una arista de G . Como G tiene al menos tres γ -conjuntos disjuntos, existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$.

Ahora, si existe $D \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D = e$, entonces $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$, lo cual contradice la segunda condición del enunciado. Por lo tanto, para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las siguientes condiciones.

1. $e \cap D = \emptyset$.
2. $|e \cap D| = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $e \cap D = \{u\}$ y $\overline{e \cap D} = \{v\}$. Entonces $EPN(u, D) = N(u) - N[D - \{u\}] = N(u)$, por la segunda condición del lema. Observemos que $|N(u)| > 1$, por la primera condición del lema. Luego $\{v\} \in EPN(u, D) = N(u) \neq \{v\}$. Por lo tanto, por el Teorema 4.2.7, G es una ASR-gráfica. ■

Observemos que, las condiciones del Lema 4.2.8 por sí solas no aseguran que G sea una *ASR*-gráfica. Por ejemplo, para la gráfica G de la Figura 4.5, $D = \{v_1, v_2\}$ es el único γ -conjunto y $N[v_1] \cap N[v_2] = \emptyset$, pero para la arista $e \in E(G)$, tenemos que $\gamma(G - e) = \gamma(G_e) = 3$, por lo tanto, G no es una *ASR*-gráfica. De igual manera, para la gráfica G de la Figura 4.6, $D_1 = \{x_1, x_2\}$, $D_2 = \{y_1, y_2\}$ y $D_3 = \{z_1, z_2\}$ son tres γ -conjuntos disjuntos, pero no es una *ASR*-gráfica, ya que para la arista $e \in E(G)$, tenemos que $\gamma(G) = \gamma(G - e) = \gamma(G_e) = 2$.

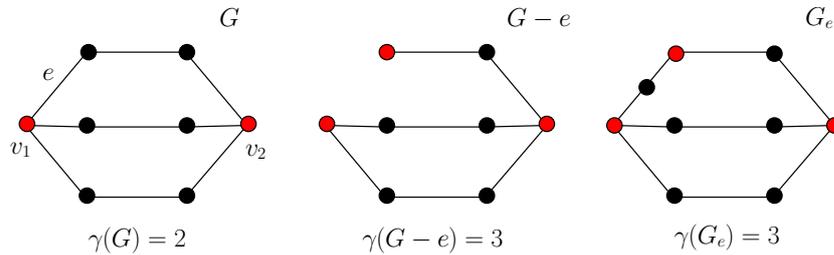


Figura 4.5: $N[v_1] \cap N[v_2] = \emptyset$, pero G no es una *ASR*-gráfica.

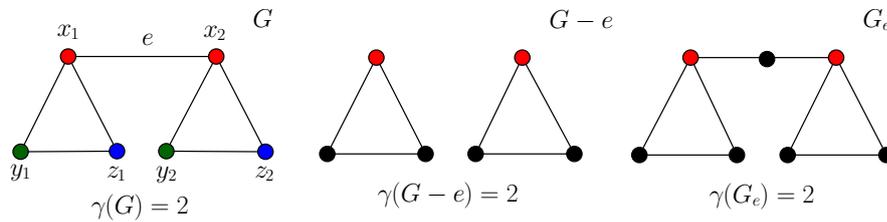


Figura 4.6: G tiene tres γ -conjuntos disjuntos, pero no es una *ASR*-gráfica.

Por otro lado, por el Lema 4.1.4, la segunda condición del Lema 4.2.8 es necesaria para que una gráfica sea *ASR*-gráfica. Luego, si la primera condición del Lema 4.2.8 también fuera necesaria, tendríamos una caracterización de las *ASR*-gráficas tal vez más tangible que la que se tiene por el Teorema 4.2.7. De aquí, tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 4.2.9 *Las ASR-gráficas tienen al menos tres γ -conjuntos disjuntos.*

Observación 4.2.10 *Toda ASR-gráfica con número de dominación uno tiene al menos tres γ -conjuntos disjuntos.*

4.3. *ASR*-gráficas extremales

Recordemos que, las *gráficas extremales* son aquellas con el tamaño mínimo o máximo que satisfacen cierta propiedad. En esta sección, presentaremos cotas para las *ASR*-gráficas extremales y mostraremos que la cota superior es justa para $\gamma = 1$.

Definimos $\phi(n, \gamma)$ como el tamaño mínimo de una *ASR*-gráfica conexa de orden n y número de dominación γ .

Observemos que, por el Lema 4.1.16, $\phi(n, \gamma)$ no está definida para $n < 3\gamma$. Por lo que, a partir de ahora, asumiremos que $n \geq 3\gamma$.

Empezaremos mostrando una cota inferior para $\phi(n, \gamma)$.

Lema 4.3.1 *Si $\gamma \geq 2$, entonces $\phi(n, \gamma) \geq 2n - 3\gamma$.*

Demostración. Sea G una *ASR*-gráfica conexa de orden n y número de dominación γ . Por el Corolario 4.1.9, sabemos que G es γ -insensible. Entonces, por el Teorema 3.2.8, tenemos que $\phi(n, \gamma) \geq E(n, \gamma) = 2n - 3\gamma$. ■

A continuación, describiremos una familia de gráficas no necesariamente conexas de orden $n \geq 3\gamma$. Probaremos que cualquier elemento de esta familia es una *ASR*-gráfica. Dicha familia la podemos encontrar en [13]. Ésta nos permitirá dar una primera cota superior para $\phi(n, \gamma)$.

Dadas k gráficas disjuntas por vértices H_1, H_2, \dots, H_k , denotaremos con $E(H_1, H_2, \dots, H_k)$ al conjunto de todas las posibles aristas entre ellas, es decir, al conjunto de aristas de la gráfica k -partita completa, determinada por $(V(H_1), V(H_2), \dots, V(H_k))$.

Dada $k \in \mathbb{N}$, decimos que una gráfica G pertenece a la familia de gráficas \mathcal{B}_k si existen k *ASR*-gráficas disjuntas por vértices G_1, G_2, \dots, G_k , cada una de orden al menos tres y número de dominación uno, tales que

1. $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$.
2. $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(G_i) \cup \tilde{E}(G)$.

Donde

- Para $1 \leq i \leq k$, $G_i = K_{r_i} + H_i$, donde $r_i \geq 3$ es el número de vértices universales en G_i .
- Para $1 \leq i \leq k$, existe un subconjunto $S_i \neq \emptyset$ de $V(H_i)$ tal que $N_{H_i}[S_i] \neq V(H_i)$.
- $\tilde{E}(G) \subseteq E(H_1[S_1], H_2[S_2], \dots, H_k[S_k])$.

En la Figura 4.7, se muestra un elemento de la familia \mathcal{B}_2 de orden 10 con $r_1 = r_2 = 3$.

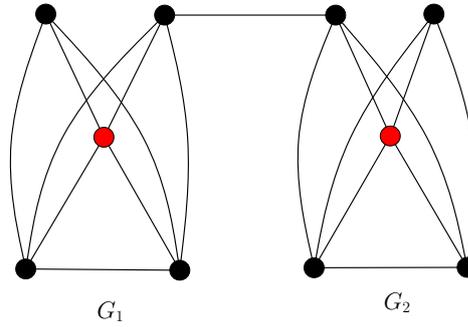


Figura 4.7: Una *ASR*-gráfica de orden 10 que pertenece a la familia \mathcal{B}_2 .

Probaremos que, efectivamente, cualquier elemento de \mathcal{B}_k es una *ASR*-gráfica con número de dominación k . Mostraremos una prueba distinta a la que podemos encontrar en [13]. Para ello haremos uso del siguiente lema.

Lema 4.3.2 Si $G \in \mathcal{B}_k$, entonces para todo $D \in \Gamma(G)$ se tiene que $|D \cap V(G_i)| \geq 1$, para toda i , $1 \leq i \leq k$.

Demostración. Sean $G \in \mathcal{B}_k$ y $D \in \Gamma(G)$. Dado que $N[V(K_{r_i})] \subseteq V(G_i)$, se tiene que $|D \cap V(G_i)| \geq 1$, para $1 \leq i \leq k$. ■

Proposición 4.3.3 Si $G \in \mathcal{B}_k$, entonces G es una *ASR*-gráfica con número de dominación k .

Demostración. Sea $G \in \mathcal{B}_k$. Por la Proposición 4.2.1, sólo necesitamos probar el resultado para $k \geq 2$. Dado que $\gamma(G_i) = 1$ para $1 \leq i \leq k$, tenemos que $\gamma(G) \leq k$ y por el Lema 4.3.2, tenemos que $\gamma(G) \geq k$. Por lo tanto, $\gamma(G) = k$.

Sea $D \in \Gamma(G)$, afirmamos que D es de la forma $D = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ donde $u_i \in K_{r_i}$ para toda i , $1 \leq i \leq k$. Supongamos que $u_i \in D \cap V(H_i)$,

4.3. ASR-gráficas extremales

para alguna i , $1 \leq i \leq k$. Entonces tenemos dos casos.

Caso 1. $u_i \in S_i$. Dado que $N_{H_i}[S_i] \neq V(H_i)$, existe un vértice $v \in V(H_i) \setminus V(S_i)$ tal que $u_i \not\succeq v$, por lo tanto $|D \cap V(G_i)| \geq 2$, y por el Lema 4.3.2, $|D| \geq k + 1$, lo cual es una contradicción.

Caso 2. $u_i \notin S_i$. Como u_i no es un vértice universal de G_i , existe $v \in V(H_i)$ tal que $u_i \not\succeq v$. Si v es dominado por un vértice de G_i , entonces $|D \cap V(G_i)| \geq 2$, y por el Lema 4.3.2, $|D| \geq k + 1$, lo cual es una contradicción. De lo contrario, existe $v' \in S_j \cap D$, $j \neq i$ tal que $v' \succ v$, pero entonces estamos en el Caso 1.

Por lo tanto, por la forma que tiene D y dado que $r_i \geq 3$, podemos observar que G tiene al menos tres γ -conjuntos disjuntos, y para todo $D \in \Gamma(G)$ tenemos que $N[u_i] \cap N[u_j] = \emptyset$ para todo $u_i, u_j \in D$, $i \neq j$. Así, por el Lema 4.2.8, G es una ASR-gráfica. ■

Lema 4.3.4 Si $n \geq 5\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) \leq 3n - 5\gamma - 1$.

Demostración. Sea $G \in \mathcal{B}_\gamma$ una ASR-gráfica conexa, de orden n , número de dominación γ y, bajo estas condiciones, de tamaño mínimo. Entonces, basta tomar una $G \in \mathcal{B}_\gamma$ con $r_i = 3$ para todo $1 \leq i \leq \gamma$, $|\tilde{E}(G)| = \gamma - 1$, $\sum_{i=1}^{\gamma} |V(H_i)| = n - 3\gamma$, $E(H_i) = \emptyset$ y $|V(H_i)| \geq 2$. Claramente estas gráficas son las de tamaño mínimo en \mathcal{B}_γ .

Así,

$$\phi(n, \gamma) \leq |E(G)| = |V(K_{r_i})| \left(\sum_{i=1}^{\gamma} |V(H_i)| \right) + \sum_{i=1}^{\gamma} |E(K_{r_i})| + |\tilde{E}(G)|,$$

es decir,

$$\phi(n, \gamma) \leq 3(n - 3\gamma) + 3\gamma + (\gamma - 1) = 3n - 5\gamma - 1. \quad \blacksquare$$

A continuación, mejoraremos la cota superior para $\phi(n, \gamma)$.

Proposición 4.3.5 Si $n \geq 3\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) \leq 3n - 6\gamma$.

Demostración. Para la prueba, construiremos una ASR-gráfica conexa de orden $n \geq 3\gamma$ y tamaño $3n - 6\gamma$.

Sean $C_{3\gamma}$ un ciclo de orden 3γ con $V(C_{3\gamma}) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, \dots, v_{3(\gamma-1)}\}$, $P_3 = C_{3\gamma}[\{u_1, u_2, u_3\}]$ una trayectoria de orden tres en $C_{3\gamma}$ y $H_{n-3\gamma}$ un conjunto independiente (posiblemente vacío) de $n - 3\gamma$ vértices $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-3\gamma}\}$. Enseguida, realizaremos la suma $P_3 + H_{n-3\gamma}$ (ver Figura 4.8) y definimos

$$G(n, \gamma) = C_{3\gamma} \cup (P_3 + H_{n-3\gamma}).$$

Claramente $G(n, \gamma)$ es conexa, de orden n y tamaño $3n - 6\gamma$. Veamos que es una ASR-gráfica.

Observemos que $D_i = \{u_i\} \cup \left\{ \bigcup_{j=0}^{\gamma-2} \{v_{i+3j}\} \right\}$ con $1 \leq i \leq 3$, es un γ -conjunto de $G(n, \gamma)$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Luego, $G(n, \gamma)$ satisface la primera condición del Lema 4.2.8.

Por otra parte, si $|V(H_{n-3\gamma})| \neq 1$, entonces $\Gamma(G(n, \gamma)) = \{D_1, D_2, D_3\}$. En otro caso, $V(H_{n-3\gamma}) = \{x_1\}$, e intercambiar x_1 con u_2 y dejar fijos a los vértices restantes, determina un automorfismo de $G(n, \gamma)$. Por lo tanto, $\Gamma(G(n, \gamma)) = \{D_1, D_2, D_3\}$ (salvo automorfismos).

Finalmente, se puede comprobar que D_1, D_2 y D_3 también satisfacen la segunda condición del Lema 4.2.8. Por lo tanto, $G(n, \gamma)$ es una ASR-gráfica. ■

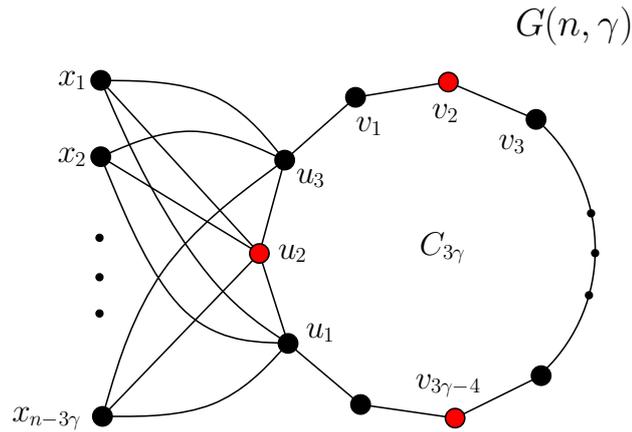


Figura 4.8: Una gráfica conexa, de orden n y tamaño $3n - 6\gamma$.

Proposición 4.3.6 Sea G una ASR-gráfica de orden n . Entonces $\gamma(G) \leq \frac{n}{3}$ y dicha cota superior para γ es justa.

Demostración. Por el Lema 4.1.16, $\gamma(G) \leq \frac{n}{3}$. Sean $\gamma \geq 1$ y $n = 3\gamma + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$. Entonces la ASR-gráfica $G(n, \gamma)$ construida en la prueba de la Proposición 4.3.5 tiene orden n y número de dominación $\gamma = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. ■

A partir del Lema 4.3.1 y la Proposición 4.3.5, se tienen las siguientes cotas para $\phi(n, \gamma)$.

4.3. ASR-gráficas extremales

Proposición 4.3.7 *Si $\gamma \geq 2$ y $n \geq 3\gamma$, entonces*

$$2n - 3\gamma \leq \phi(n, \gamma) \leq 3n - 6\gamma.$$

La siguiente observación, remarca nuestro interés por demostrar la Conjetura 4.2.9.

Observación 4.3.8 *Si la Conjetura 4.2.9 es cierta, entonces*

$$\phi(n, \gamma) = 3n - 6\gamma.$$

Demostración. Sea G una ASR-gráfica conexa, de orden n y número de dominación γ . Si la Conjetura 4.2.9 es cierta, existen tres γ -conjuntos disjuntos D_1 , D_2 y D_3 de G . Sea $X = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Entonces, todo vértice de $G[X]$ tiene grado al menos dos y todo vértice de G que no está en X , es adyacente al menos a tres vértices en X . Luego, $|E(G)| \geq |X| + 3(n - |X|) = 3n - 6\gamma$ y por la Proposición 4.3.5, se tiene que $\phi(n, \gamma) = 3n - 6\gamma$. ■

Para finalizar, mostraremos algunos valores exactos para $\phi(n, \gamma)$.

Corolario 4.3.9 $\phi(n, 1) = 3n - 6$.

Demostración. Por el Corolario 4.1.9 y el Teorema 3.2.1, tenemos que $\phi(n, 1) \geq E(n, 1) = 3n - 6$. Por otro lado, por la Proposición 4.3.5, $\phi(n, 1) \leq 3n - 6$. ■

Corolario 4.3.10 *Si $n = 3\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) = n$ y la única ASR-gráfica con $n = 3\gamma$ y tamaño n es el ciclo de orden 3γ .*

Demostración. Por el Corolario 4.3.9, si $\gamma = 1$, entonces $\phi(3, 1) = 3$. Si $\gamma \geq 2$, entonces por la Proposición 4.3.7, se tiene que $\phi(3\gamma, \gamma) = 3\gamma$. Sea G una ASR-gráfica conexa con $n = 3\gamma$ ($\gamma(G) = 3\gamma$) y $|E(G)| = n$. Entonces, por el Corolario 4.1.10, G es el ciclo de orden 3γ . ■

Conclusiones

Lo más relevante de este trabajo fue el estudio de las *ASR*-gráficas, con respecto a estas:

- Se encontraron nuevas propiedades.
- Se determinó una caracterización.
- Se establecieron condiciones suficientes para que una gráfica sea *ASR*-gráfica.
- Se determinaron cotas para el tamaño mínimo.
- Se determinó el tamaño mínimo para $\gamma = 1$.
- Se encontró una cota superior justa para el número de dominación.

Podemos concluir que los objetivos planteados al iniciar el trabajo fueron cumplidos, como trabajo futuro se pretende mejorar la cota inferior, ya que conjeturamos que la cota superior es justa para toda n y toda γ .

Bibliografía

- [1] B. D. Acharya, H. B. Walikar. *Domination critical graphs*. Nat. Acad. Sci. Lett.,2:70-72, 1979.
- [2] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C.L. Suffel. *Domination alteration sets in graphs*. Discrete Math, 47(1983) 153-161.
- [3] R. C. Brigham, R. D. Dutton, *An extremal problem for edge domination insensitive graphs*. Discrete Applied Mathematics 20 (1998), 113-125.
- [4] Y. Cao, F. Hu, J. Xu. *The bondage number of mesh networks*. Frontiers of Mathematics in China, to appear, 2012.
- [5] K. Carlson, M. Develin. *On the bondage number of planar and directed graphs*. Discrete Mathematics 306(2006) 820-826.
- [6] J. E. Dunbar, T. W. Haynes, V. Teschner, L. Volkmann. in: T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. *Bondage insensitivity and reinforcement*, Domination in Graphs: Advanced Topics, Dekker, New York, 1998, pp. 249-259.
- [7] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch and J. Roberts. *The bondage number of a graph*. Discrete Mathematics, 86 (1990), 47-57.
- [8] A. Gagarin, V. Zverovich. *Upper bounds for the bondage number of graphs on topological surfaces*. Discrete Mathematics 313 (2013) 1132-1137.
- [9] B.L. Hartnell, D.F. Rall. *Bounds on the bondage number of a graph*. Discrete Math. 128 (1994) 173–177.
- [10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. A series of Monographs and textbooks.
- [11] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. *Domination in graphs*. A series of Monographs and textbooks.

-
- [12] L. Kang, J. Yuan. *Bondage number of planar graphs*. Discrete Math. 222 (2000) 191-198.
- [13] M. Lemańska, J. Tey, R. Zua Zua. *Relations between edge removing and edge subdivision concerning domination number of a graph*. (201-) AMS Subject Classification: 05C05, 05C69.
- [14] U. Teschner. *A counterexample to a conjecture on the bondage number of a graph*. Discrete Math, 122 (1993) 393-395.
- [15] U. Teschner. *A new upper bound for the bondage number of graphs with small domination number* Australas. J. Combin. 12 (1995) 27-35.
- [16] U. Teschner. *The bondage number of a graph G can be much greater than $\Delta(G)$* . Ars Combinatoria, 43 (1996), 81-87.
- [17] U. Teschner. *The bondage number of a graph*. Discrete Mathematics 171 (1997), 249-259.
- [18] K. Karthika, M. Yamuna. *Domination subdivision stable graphs* International Journal of Mathematical archive-3(4), 2012, pp. 1467-1471.