



Casa abierta al tiempo

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

## UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

DENOMINACION DE LA TESIS

CONTROL PI/PID ROBUSTO  
DE REACTORES QUIMICOS

En México, D.F. se presentaron a las 12:00 horas del día 23 del mes de MAYO del año 2001 en la Unidad IZTAPALAPA de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del Jurado.

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON;  
DR. FELIPE LOPEZ ISUNZA;  
DR. SALVADOR PADILLA LARES;  
DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA Y  
DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último se reunieron para proceder al Examen de Grado de

Doctora en: CIENCIAS




AMERICA BERENICE MORALES DIAZ  
FIRMA DE LA INTERESADA

AMERICA BERENICE MORALES DIAZ

presentó una tesis producto de una investigación original de denominación aparece al margen y de acuerdo con el artículo 78 fracciones I, II, IV y V del Reglamento de Estudios Superiores de esta Universidad, los miembros del Jurado resolvieron:

Aprobarla

Acto continuo, el Presidente del Jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISO



LIC. CARMEN LLORENS FABREGAT  
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

VISTO BUENO



DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA  
DIRECTORA DE DIVISION

PRESIDENTE



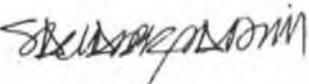
DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

VOCAL



DR. FELIPE LOPEZ ISUNZA

VOCAL



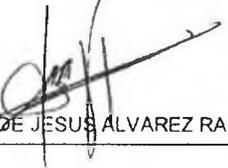
DR. SALVADOR PADILLA LARES

VOCAL



DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA

SECRETARIO



DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Iztapalapa

Control PI/PID Robusto  
de Reactores Químicos\*

# TESIS

Que para Obtener el grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS

P r e s e n t a

M. en I. Q. América

Berenice Morales Díaz

Asesor: Dr. José de Jesús Alvarez Ramírez

México, D. F.

2001

---

\* Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del CONACYT y del IMP a través del proyecto FIES 98-111-II

# Índice General

0.1	Resumen General . . . . .	4
0.2	Introducción general . . . . .	4
0.2.1	El estado del arte . . . . .	5
0.2.2	El desarrollo y los objetivos de la investigación . . . . .	7
0.2.3	De los resultados obtenidos . . . . .	8
0.3	Bibliografía . . . . .	9
<b>I</b>	<b>El control PI</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>Control PI de un reactor contínuo</b>	<b>13</b>
1.1	Resumen . . . . .	13
1.2	El reactor tanque agitado contínuo: una retrospectiva . . . . .	13
1.3	La dinámica de un RTAC . . . . .	14
1.3.1	Definición del problema . . . . .	15
1.4	Diseño de un controlador retroalimentado . . . . .	16
1.5	Diseño de un Controlador tipo PI . . . . .	18
1.6	Análisis de estabilidad . . . . .	20
1.6.1	Configuración a lazo cerrado . . . . .	21
1.6.2	Estabilidad y Robustez . . . . .	22
1.6.3	Desempeño robusto . . . . .	26
1.6.4	Guías de sintonizado . . . . .	27
1.7	Caso de Estudio . . . . .	28
1.8	Conclusiones . . . . .	31
1.9	Apéndice 1 . . . . .	31
1.10	Bibliografía . . . . .	33
<b>II</b>	<b>El control PID</b>	<b>35</b>
<b>2</b>	<b>Control PID de reactores contínuos con dinámica en el sistema de enfriamiento y grado relativo 2</b>	<b>36</b>
2.1	Resumen . . . . .	36
2.2	Introducción . . . . .	36
2.3	La dinámica de un JCR y el problema de control . . . . .	38
2.4	Diseño de un controlador retroalimentado . . . . .	39

2.5	Diseño de un Control PID Robusto . . . . .	41
2.6	Análisis de estabilidad . . . . .	44
2.6.1	Guías de Sintonizado . . . . .	49
2.7	Simulaciones numéricas . . . . .	50
2.8	Conclusiones . . . . .	58
2.9	Apéndice 2 . . . . .	58
2.10	Bibliografía . . . . .	61
 <b>III El control PI en cascada</b>		<b>63</b>
<b>3</b>	<b>Control en cascada de reactores con dinámica en el sistema de enfriamiento y grado relativo <math>n</math></b>	<b>64</b>
3.1	Resumen . . . . .	64
3.2	Introducción . . . . .	64
3.3	Sistemas de una dimensión . . . . .	67
3.3.1	Análisis de estabilidad . . . . .	68
3.4	Sistemas de mayor dimensión ( $n > 1$ ) . . . . .	71
3.4.1	Estimación de las funciones del error de modelado . . . . .	71
3.4.2	El uso de la técnica de backstepping y el diseño del control . . . . .	72
3.4.3	Dinámica de los errores de estimación . . . . .	75
3.4.4	Análisis de estabilidad . . . . .	76
3.4.5	La estabilidad y sus consecuencias en el sintonizado . . . . .	81
3.5	Ejemplo . . . . .	82
3.6	Conclusiones . . . . .	88
3.7	Apéndice 3 . . . . .	88
3.8	Bibliografía . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Conclusiones generales</b>	<b>91</b>
4.1	Problemas Abiertos . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Herramientas</b>	<b>95</b>
5.1	La estabilidad de sistemas dinámicos . . . . .	95
5.1.1	Definiciones de estabilidad . . . . .	97
5.1.2	Definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	97
5.1.3	Estabilidad de Lyapunov . . . . .	98
5.2	Teorema del Mapeo de contracción . . . . .	103
5.3	Estabilidad asintótica en problemas singularmente perturbados . . . . .	106
5.3.1	Teorema del valor inicial para sistemas no lineales singularmente perturbados . . . . .	107
5.4	Estabilización retroalimentada robusta de reactores químicos . . . . .	110
5.5	Estabilización robusta de sistemas lineales inciertos:estabilización cuadrática . . . . .	110
5.6	Bibliografía . . . . .	111

*Para Alex*

- Cuando yo uso una palabra - dijo Cabezota con tono bastante despectivo -, significa exactamente lo que yo quiero.... ni más ni menos.

- La cuestión es - insistió Alicia - cómo *puede* lograr que las palabras signifiquen tantas cosas diferentes.

- La cuestión es -dijo Cabezota - ver quién manda... Eso es todo.

-Ya sé que piensas - dijo Carrasclán-.  
Pero no ocurrió así. ¡Noooo!

- Por el contrario - prosiguió Carrasclán-, si ocurrió así, pudiera ser; y si pudiera ser, quién sabe; pero como no ocurrió, no es. Esto es lógica.

L.C.

## 0.1 Resumen General

Se presenta el desarrollo de una ley de control robusta del tipo de retroalimentación de estados, para cierta clase de reactores tipo tanque agitado continuo (RTAC), la cual es capaz de mantener los estándares de operación impuestos. Esta ley de control se construye en dos pasos: (i) en el primero se desarrolla la ley de control del tipo retroalimentada mediante la definición del error de modelado. (ii) En la segunda parte se estima el error de modelado haciendo uso de un esquema de observación de orden reducido. El conjunto, controlador-observador, da como resultado un controlador PI/PID<sup>1</sup> clásico más algunos términos adicionales.

La estructura de control obtenida en cada caso, depende del tipo de sistema que se está trabajando. Por lo que para un RTAC de grado relativo  $n = 1$  se obtiene un controlador PI. Para el caso de un RTAC con dinámica en el sistema de enfriamiento y de grado relativo  $n = 2$  se obtiene un controlador PID. Para el caso de un sistema en forma estrictamente retroalimentada y de grado relativo  $n > 1$  usando la técnica de backstepping, se obtiene una cascada de controladores PI, la cual se aplica a un RTAC con dinámica en el sistema de enfriamiento y de fase mínima.

En la caracterización de las propiedades de estabilidad de los esquemas de control diseñados, se hace uso de la teoría de sistemas singularmente perturbados. El principal objetivo del trabajo es demostrar qué contrario a lo que se creía, un controlador clásico tipo PI/PID es capaz de proporcionar resultados de estabilidad semi-globales en sistemas no lineales, como lo son los RTAC. También se presentan algunas guías de sintonizado de acuerdo al desarrollo del esquema de control, las cuales además de ser sencillas poseen un significado físico.

## 0.2 Introducción general

El diseño de leyes de control retroalimentado para reactores químicos es un tema que ha sido estudiado arduamente en trabajos anteriores, como en el artículo pionero de Aris y Amudson (1958). La motivación desde el punto de vista de ingeniería recae en el hecho de que un reactor operado cerca de sus puntos de equilibrio inestables, por lo regular corresponde a un desempeño óptimo del proceso. Por ejemplo cuando existe un compromiso entre la productividad y el rendimiento, o entre la conversión y la selección, o entre la actividad y el tiempo de vida de un catalizador (para más información ver el trabajo de Bruns y Bailey, 1975).

El control retroalimentado de reactores es un problema que se dificulta por la naturaleza no lineal de los mecanismos involucrados en el sistema, como sucede con la cinética de las reacciones y los fenómenos de transferencia de calor. Además, también se sabe que el comportamiento de los reactores químicos a lazo abierto o sin control, exhibe multiplicidad de estados estacionarios (estables y/o inestables), ciclos límites e incluso comportamientos caóticos.

Por otro lado, en los últimos años se ha visto una gran actividad en el desarrollo de técnicas de control retroalimentado no lineal de reactores químicos, especialmente en la linearización retroalimentada (Hoo y Kantor, 1985, Alvarez et al., 1990, Limqueco y Kantor, 1990 y Viel et al., 1995).

---

<sup>1</sup>Se refiere al hecho de que puede aplicarse un control proporcional e integral o un control proporcional-integral-derivativo.

Sin embargo, existen algunos problemas de carácter teórico que siguen abiertos, tal es el caso del diseño de leyes de control retroalimentadas que presenten:

- estabilidad no local (global y semiglobal).
- robustez a pesar de incertidumbres en la cinética de la reacción.
- robustez a pesar de saturaciones en la entrada de control.
- una parametrización sencilla y un significado físico que represente los efectos de los fenómenos exhibidos en el reactor controlado.

Las características antes mencionadas son el motivo principal para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

### 0.2.1 El estado del arte

Un problema en particular que ha sido arduamente estudiado, es la regulación de la temperatura en un reactor tanque agitado continuo (RTAC), mediante la manipulación de la temperatura en el sistema de enfriamiento, mientras se realiza una reacción exotérmica y reversible  $A \rightarrow B$ . El problema del diseño de un control robusto se ha planteado como la búsqueda de una ley de control retroalimentado, para regular y estabilizar la temperatura del reactor de manera global en algún punto de operación con cierto margen de robustez contra perturbaciones e incertidumbres de los fenómenos no lineales como la cinética de reacción.

Por ejemplo, en el trabajo de Cibrario M. (1992), se ha demostrado que para una reacción de primer orden, un controlador clásico y simple tipo PI es capaz de estabilizar un RTAC y que este tipo de controlador es robusto en el sentido de que su diseño no requiere de un conocimiento "exacto" de la cinética. Por su parte Abedekun y Schork (1991) consideran el ejemplo de una reacción de orden  $n$  para el diseño de un control de linearización entrada/salida, es decir, se retroalimentaron la concentración y la temperatura. En este trabajo se consideró que las incertidumbres en la cinética, se encontraban restringidas a algunos parámetros constantes que entran de manera lineal en el modelo y se usó una técnica de control adaptable clásica del tipo de modelo de referencia (o por sus siglas en inglés MRAC-type). El control así diseñado puede estabilizar de manera global el sistema a lazo cerrado.

En el trabajo de Alvarez-Ramirez (1994), la técnica de linearización de entrada/salida se combina con un método de estabilización robusta. El controlador propuesto es variante en el tiempo, lo que involucra un término decreciente y lleva la temperatura al punto de operación de manera prácticamente estable. Cabe mencionar que en estos trabajos no se ha desarrollado un método capaz de tomar en cuenta saturaciones en la entrada de control.

Por otro lado, se puede mencionar que muchos procesos industriales exhiben un comportamiento no lineal, debido a los fenómenos fisicoquímicos que ocurren en diferentes escalas de tiempo. En este tipo de procesos no se puede llevar a cabo una técnica de control convencional, ya que el hecho de no tomar en cuenta el escalamiento en tiempo que ocurre dentro del sistema, puede llevar a un problema de control mal condicionado e inducir inestabilidades en el sistema controlado. Para evitar este tipo de problemas, el control de sistemas que se realizan en diferentes escalas de tiempo, se puede direccionar utilizando como marco de referencia a

los sistemas singularmente perturbados (ver por ejemplo los trabajos de Kokotovic, Khalil, & O'Reilly, 1986, Christofides & Daoutidis, 1996).

Además de tener comportamientos no lineales y de realizarse en diferentes escalas de tiempo, se sabe también que muchos procesos industriales, entre los cuales se pueden identificar los RTAC, presentan incertidumbre en su modelamiento y perturbaciones externas. Es por ello que se requiere diseñar controladores para sistemas no lineales con incertidumbres en el modelo, que sean capaces de atenuar el efecto de tales incertidumbres e incluso de perturbaciones externas.

Para el caso de sistemas no lineales con linearización retroalimentada e incertidumbres variantes en el tiempo, que satisfacen la condición de igualdad o "matching", se han diseñado controladores robustos con retroalimentación de estados mediante el método directo de Lyapunov, lo que resuelve este problema de manera local (Corless, 1993).

Posteriormente Khalil (1994) presentó el problema de estabilizar una clase de sistemas no lineales con incertidumbres variantes en el tiempo, en forma estrictamente retroalimentada y sin dinámica cero, mediante un controlador robusto retroalimentado, para condiciones iniciales e incertidumbres arbitrariamente grandes, la solución de este problema se obtuvo como un resultado de estabilidad semi-global. Este resultado se generalizó en el trabajo de Mahmoud y Khalil (1996) para sistemas no lineales con dinámica cero asintóticamente estable.

Por otro lado, Christofides, Teel y Daoutidis (1996), presentaron un resultado de estabilidad robusta para controladores retroalimentados en el estado, en el cual se trabajó con sistemas no lineales singularmente perturbados, con variables dependientes del tiempo e inciertas. Christofides (2000) presenta el diseño de un controlador robusto retroalimentado en la salida, para sistemas no lineales singularmente perturbados con variables o modelo incierto, en el cual el subsistema "rápido" es asintóticamente estable, mientras que el subsistema "lento" es una representación linealizada entrada/salida y posee una estabilidad entrada/estado en la dinámica inversa.

A través de los años se ha observado el desarrollo de la teoría de los sistemas singularmente perturbados, con su aplicación a diferentes tipos de procesos, como cuando Prandtl (1940) estudio de la dinámica de fluidos en condiciones de capa límite. También existen como referencia los trabajos de Thikonov (1948) y Levinson (1950), los cuales tuvieron un alto impacto en la teoría de control alrededor de los años 1960's y 1970's. Posteriormente, el trabajo de Vasileva (1963) que resultó como una continuación del trabajo de Tikhonov y el trabajo Wasow (1965), coloca a las perturbaciones singulares en un marco de referencia de la teoría y el análisis de ecuaciones diferenciales. Este tipo de trabajo en conjunto con los de Vasileva y Butuzov (1973), O'Malley (1974) y el trabajo de Hoppensteadt (1971), reúnen la mayoría de los métodos asintóticos para ecuaciones diferenciales.

No es sino alrededor de los años 1980's, cuando el control en ingeniería se puede ver como un sistema singularmente perturbado, lo cual representa una herramienta útil en la obtención de soluciones en esta área de investigación.

Las principales características de las técnicas de perturbación singular, es que se pueden describir como la expansión asintótica en una serie reducida (subsistema exterior) y en una serie de capa límite (subsistema interior), mientras que un sistema controlado puede ser visto como la descomposición de la dinámica de sistemas con diferentes tiempos de respuesta.

Por lo general el modelo reducido representa el fenómeno más lento y dominante en la mayoría de las aplicaciones, mientras que el sistema de capa límite agrupa los fenómenos más rápidos y escalados en tiempo. Estos representan las desviaciones del comportamiento predicho

para el modelo lento.

La siguiente etapa en la aplicación de la teoría de sistemas singularmente perturbados, en sistemas de control consiste en hacer que los subsistemas de capa límite decaigan de manera asintóticamente estable. La separación de un sistema de control en subsistemas en tiempos escalados también presenta la ventaja de que elimina la rigidez numérica y computacional simplificando su desarrollo en computadora.

Esfandiari y Khalil (1992) establecieron una técnica nueva para el diseño de controladores robustos retroalimentados en sistemas linearizados de entrada/salida. Los mecanismos básicos de esta técnica son usados en este trabajo, por lo que se enuncian:

- (1) Un observador de alta ganancia que estima de manera robusta las derivadas de la salida
- (2) Un control retroalimentado de estado globalmente acotado, que resulta de la saturación de una función de retroalimentación de estado continua fuera de la región de interés. Con esta estructura se alcanzan los objetivos de diseño. La acotación global del control evita que ocurra el fenómeno de sobre-disparo o "peaking", cuando los estados estimados obtenidos en el observador de alta ganancia son usados en lugar de los verdaderos estados.

Khalil y Esfandiari (1993) usaron esta técnica para alcanzar y asegurar estabilización semiglobal de sistemas completamente linearizables. Posteriormente, Khalil (1994) la uso en el diseño de servomecanismos para sistemas completamente linearizables.

Otros investigadores también emplearon esta técnica para asegurar estabilidad semiglobal, por ejemplo Lin y Saberi (1995) y Teel y Praly (1994, 1995).

Jankovic (1996) la usó en la resolución de problemas de control adaptable. Isidori (1997) la uso para unificar los resultados de su trabajo en servomecanismos. Jiang et al. (1997) utilizó un observador de orden reducido para asegurar estabilidad semiglobal en un sistema no lineal.

La metodología de este trabajo se llevo a cabo en dos etapas, en la primera se diseña un control retroalimentado acotado globalmente para alcanzar los objetivos de trabajo y en la segunda se diseña un observador de alta ganancia, diseñado para que estime de manera suficientemente rápida los errores de modelado, con lo cual se puede recobrar el desempeño bajo la acción del controlador retroalimentado. Esa recuperación utiliza el análisis de sistemas singularmente perturbados.

## 0.2.2 El desarrollo y los objetivos de la investigación

Dado el marco de referencia en que se encuentra el diseño de controladores para reactores continuos (RTAC) y los trabajos desarrollados para la obtención de controladores robustos retroalimentados, en conjunto con el desarrollo y aplicación de la teoría de sistemas singularmente perturbados en control, se tiene que en el presente trabajo se hace uso de este conjunto de resultados, para desarrollar controladores robustos retroalimentados para el control de RTAC, bajo ciertas condiciones de diseño y operación.

La parte novedosa en este trabajo es que se usa la definición del error de modelado mediante la agrupación de las incertidumbres de modelo en una función o señal, la cual puede ser estimada mediante las medidas disponibles del sistema, por lo regular se avoca a la disposición prácticamente en línea de la temperatura en el reactor y del sistema de enfriamiento.

Para la compensación del error de modelado se usan observadores de orden reducido, de manera que en el estado de Laplace esto se puede ver como la aplicación de filtros para alcanzar los objetivos de control previamente establecidos. El control ideal de retroalimentación de estados, es decir sin errores de modelado, tiene propiedades de estabilidad bien definidas, sin embargo, este tipo de retroalimentación no es posible de alcanzar debido a los errores en el modelo, con lo que se hace uso de un control de tipo retroalimentado y en este se usa el estimado de la señal del error de modelado. Bajo estas características de trabajo, el controlador completo, es decir, el controlador de tipo retroalimentado y el observador o los observadores (según sea el caso como se podrá ver a lo largo del desarrollo del trabajo), forman una estructura de control que tienen características de control tipo PI ó PID<sup>2</sup>, en el cual dependiendo del estimado de las señales se puede o no tener activa la parte derivativa del control.

Se demuestra que aparte de obtener una estructura de control clásica tipo PI ó PID, también se observa la existencia de dos términos adicionales: el primero es una estructura para prevenir saturaciones en la entrada de control denominada anti-resét windup<sup>3</sup> (ARW), la cual se obtiene por la saturación de la entrada de control para evitar el fenómeno de peaking o sobredisparo y para cumplir requerimientos de operación como es el caso de las capacidades de operación de los elementos finales de control (p. ej. válvulas). El segundo corresponde a un término de precompensación o "dc-bias", el cual se debe a cierto conocimiento en el error de modelado, por ejemplo valores nominales de algunos parámetros.

Con la estructura del controlador de tipo retroalimentado y el esquema de observación se pueden obtener dos subsistemas escalados en tiempo por la ganancia de estimación y se pueden aplicar algunos resultados obtenidos en sistemas de singularmente perturbados, como el de Hoppensteadt (1974) y el de Esfandiari y Khalil (1992), para establecer las propiedades de estabilidad y la recuperación del desempeño y de la región de atracción del reactor controlado. Para esto se hace uso de propiedades termodinámicas y de las características de los RTAC, como las descritas en el trabajo de Bastin et al. (1997).

Así pues el desarrollo de controladores retroalimentados robustos para RTAC(s), tiene como punto de partida los trabajos realizados en el campo de control de reactores y en el de sistemas singularmente perturbados.

### 0.2.3 De los resultados obtenidos

Se ejemplifican casos en los cuales se toman las peores condiciones de diseño, como lo son el desconocimiento total de la cinética de reacción y la estabilización de un punto de equilibrio inestable a lazo abierto.

Se muestra que bajo errores de modelado y perturbaciones en algunas variables de entrada, el control es capaz de mantener los estándares de operación especificados. También se demuestra que en la recuperación del desempeño se tiene un compromiso entre robustez y desempeño que impone un límite en la variable de perturbación que corresponde a un parámetro de sintonización. En este límite se recupera el comportamiento del control ideal retroalimentado. La parametrización de los controladores obtenidos, corresponde a dos constantes de sintonización: una denominada tiempo a lazo cerrado, que es la ganancia del controlador y la otra denominada

---

<sup>2</sup>Equivalente a PI/PID

<sup>3</sup>Del inglés que significa "anti-enredo".

tiempo de estimación, la cual corresponde a la parte del observador. La sintonización que de ellas se obtiene es fácil de entender con un significado físico, ya que para este caso de reactores una vez establecida una la otra se puede escoger libre siempre y cuando se cumplan los límites definidos en la recuperación de desempeño.

Las reglas heurísticas de sintonización se pueden condensar como el escoger la constante a lazo cerrado del orden del tiempo natural del sistema, la cual en el caso de un RTAC puede ser el tiempo de residencia, y con esto dejar libre a la constante de estimación.

*La mayor contribución de este trabajo radica en que contrario a lo que tradicionalmente se creía de las estructuras de control PI/PID, se obtienen resultados de estabilidad semiglobales, de manera que estas estructuras de control son capaces de regular de manera robusta sistemas altamente no lineales para mantener las condiciones de operación y desempeño impuestas, con lo cual se llega a recuperar el comportamiento ideal de un control retroalimentado.*

*Por último, también se obtiene una parametrización sencilla de las ganancias del controlador y con sentido físico, lo cual conlleva a una significación práctica de los controladores así diseñados y de su gran uso y aceptación en la industria de procesos.*

La organización de este trabajo se encuentra dispuesta de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se trabaja con un modelo de grado relativo 1, en el cual se obtiene un controlador clásico PI. En el Capítulo 2 se usa un modelo de grado relativo 2, en el cual se obtiene un controlador clásico PID. En el Capítulo 3 se usa un sistema estrictamente retroalimentado de una entrada con grado relativo  $n$ , en el cual se obtiene una cascada de PI's clásicos. Todos los casos estudiados contienen los términos adicionales de precompensación y de ARW. En la parte final se enuncian algunas conclusiones generales y los problemas que siguen abiertos en este campo de investigación.

### 0.3 Bibliografía

- Abedekun, A.K., & Schork, F.J. (1991). On the global stabilization of the  $n$ th order reactions. *Chem. Eng. Commun.*, 101, 1-15.
- Aris, R., & Amundson, N. (1958). An analysis of chemical reactor stability and control. *Chem. Eng. Sci.*, 7.
- Bruns, D.D., & Bailey, J.E. (1975). Process operation near an unstable steady state using nonlinear feedback control. *Chem. Eng. Sci.*, 30, 755-762.
- Hoo, K.A., & Kantor, J.C. (1985). An exothermic continuous stirred tank reactor is feedback equivalent to a linear system. *Chem. Eng. Commun.*, 37, 1-10.
- Alvarez, J., Suarez, R., & Sanchez, A. (1990). Nonlinear decoupling control of free radical polymerization continuous stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 45, 3341-3357.
- Limqueco, L.C., & Kantor, J.C. (1990). Nonlinear output feedback control of an exothermic reactor. *Computers Chem. Eng.*, 14, 427-437.
- Viel, F., Busvelle, E., & Gauthier, J.P. (1995). Stability of polymerization reactors using I/O linearization and a high gain observer. *Automatica*, 31, 971-984.

- Cibrario, M. (1992). On the control of a class of unstable chemical reactors, Ph.D. dissertation, Ecole des Mines de Paris, France.
- Abedekun, A.K., & Schork, F.J. (1991). On the global stabilization of nth order reactions. *Chem. Eng. Commun.*, 101, 1-15.
- Alvarez-Ramirez, J. (1994). Stability of a class of uncertain continuous stirred chemical reactors with a nonlinear feedback. *Chem. Eng. Sci.*, 49, 1743-1748.
- Kokotovic, P.V., Khalil, H.K., & O'Reilly, J. (1986). Singular perturbations in control: analysis and design. London: Academic Press.
- Christofides, P.D., Teel, A.R., & Daoutidis, P. (1996). Robust semiglobal output tracking for nonlinear singularly perturbed systems. *International Journal of Control*, 65, 639-666.
- Corless, M. (1993). Control of uncertain nonlinear systems. *Journal of Dynamics Systems , Measurements and Control*, 115, 362-372.
- Khalil, H. (1994). Robust servomechanism output feedback controller for feedback linearizable systems. *Automatica*, 30, 1587-1599.
- Mahmoud, N.A., & Khalil, H.K. (1996). Asymptotic regulation of minimum phase nonlinear systems using output feedback. *IEEE Trans. on Automat. Contrl.*, 41, 1402-1412.
- Christofides, P.D. (2000). Robust output feedback control of nonlinear singularly perturbed systems. *Automatica*, 36, 45-52.
- Thikonov, A. (1984). On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter. *Mat. Sb.*, 22, 193-204
- Levinson, N. (1950). Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations. *Acta Math.*, 82, 71-106.
- Vasileva, , A. B., (1963). Asymptotic behavior of solutions to certain problems involving nonlinear differential equations containing a small parameter multiplying the highest derivatives. *Russian Math Surveys*, 18, 13-81
- Wasow, W. (1965). Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Wiley-Interscience, New York..
- Vasileva, A.B., & Butuzov, V.F. (1973). Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed differential equations. *Nauka, Moscow*.
- O'Malley, R.E. Jr.(1974). Boundary layer methods for certain nonlinear singularly perturbed optimal control problems. *J. Math Anal. Appl.*, 45, 468-484.
- Hoppensteadt, F. (1971). Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34, 807-840.
- Esfandiari, F., & Khalil, H.K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *Int. J. Contrl.*, 56, 1007-1037.

- Khalil, H.K, & Esfandiari, F. (1993). Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contrl.*, 38, 1412-1415.
- Lin, Z., & Saberi, A. (1995). Robust semi-global stabilization of minimum- phase input-output linearizable systems via partial state and output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contrl.*, 40, 1029-1041.
- Teel, A., & Praly, L. (1994). Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Syst. Contr. Lett.*, 22, 313-325.
- Teel, A., & Praly, L. (1995). Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback. *SIAM J. Contr. Optim.*, 33.
- Isidori, A. (1997). A remark on the problem of semi-global nonlinear output regulation. *IEEE Trans. Automat. Contrl.*, 42, 1734-1738.
- Jiang, Z. P., Hill, D.J., & Guo, Y. (1997). Semiglobal output feedback stabilization for the nonlinear benchmark example. *In Proc. European Control Conf.*, Brussels, Belgium, Julio 1997.

**Parte I**

**El control PI**

# Capítulo 1

## Control PI de un reactor continuo

### 1.1 Resumen

En esta sección se estudia el control de los reactores tipo tanque agitado continuo (RTAC), mediante la aplicación de un controlador tipo proporcional-integral (PI). Para el diseño del controlador tipo PI se usó el error de modelado. El análisis de estabilidad se presenta usando ideas de sistemas no lineales singularmente perturbados para una clase de RTAC's. También se demuestra que el desempeño de un control retroalimentado inverso, puede ser recuperado mediante un controlador clásico tipo PI. En la recuperación del desempeño se incluye la región de atracción y la respuesta temporal de la variable controlada.

### 1.2 El reactor tanque agitado continuo: una retrospectiva

El reactor tanque agitado continuo (RTAC), ha sido arduamente estudiado, debido a que presenta comportamientos no comunes, tales como multiplicidad de estados estacionarios, puntos de encendido/apagado de reacciones, oscilaciones e incluso caos. Además, este tipo de reactores se pueden operar en condiciones de inestabilidad (p. ej., sistemas de polimerización y de cracking catalítico); es decir, en condiciones que no pueden ser alcanzadas de manera natural por el sistema sin control. Estas condiciones de operación suelen ser buscadas porque pueden llegar a representar altos rendimientos de la reacción en condiciones de temperaturas moderadas.

Los estudios que se han realizado de este tipo de sistemas comprende desde el análisis del comportamiento de su dinámica a lazo abierto (Aris y Amundson, 1958), el estudio del control del sistema usando versiones linealizadas del modelo dinámico (Ray, 1982), el control usando técnicas no lineales (Kravaris et al., 1988), hasta la aplicación de controladores tipo proporcional integral (PI) modificados (Jadot, 1996).

En la industria actual la aplicación de esquemas de control tipo PI en RTAC, sigue siendo de uso común, lo cual se debe al buen conocimiento práctico que se tiene de ellos y por que resuelve de manera eficiente los problemas aunados al comportamiento del RTAC. Esto contrasta con la falta de análisis rigurosos que demuestren la causa de su buen desempeño.

Entonces, el problema de estabilización global y semiglobal de RTAC's controlados por PI's, sigue estando abierto, debido a la falta de resultados analíticos que avalen su buen funcionamiento y debido a la falta de técnicas robustas de diseño que garanticen un buen desempeño.

Por lo que en esta parte del trabajo se desarrolla una técnica de construcción de controladores tipo PI's robustos.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se hace una descripción de la dinámica y de las propiedades de los RTAC. En la Sección 3 se muestra el diseño y la estructura el controlador propuesto y se derivan algunas guías de sintonizado. En la Sección 4 se realiza el análisis de estabilidad. En la Sección 5 se muestran ejemplos de aplicación y por último en la Sección 6 se presentan algunas conclusiones preliminares.

### 1.3 La dinámica de un RTAC

Se considera un RTAC con mezclado perfecto, con  $n$  número de especies y donde se llevan a cabo  $m$  número de reacciones. El reactor cuenta con un sistema de enfriamiento para el control de la temperatura, lo que convierte a la temperatura del sistema de enfriamiento la entrada de control. Entonces el RTAC esta descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \theta(c^{in} - c) + Er(c, T) \\ \dot{T} &= \theta(T^{in} - T) + H^T r(c, T) + \gamma(u - T)\end{aligned}\tag{1.1}$$

en donde:

- .  $c \in \mathbb{R}^n$  es el vector de concentraciones de las especies químicas presentes en el reactor
- .  $c^{in} \in \mathbb{R}$  es el vector de las concentraciones de entrada al reactor
- .  $T \in \mathbb{R}^m$  es la temperatura del reactor
- .  $T^{in} \in \mathbb{R}$  es la temperatura de entrada al reactor
- .  $r(c, T) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de las velocidades de reacción
- .  $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de coeficientes estequiométricos
- .  $H \in \mathbb{R}^m$  es el vector que contiene los coeficientes de calor debidos a la reacción
- .  $\theta$  representa el tiempo de residencia o la tasa de dilución
- .  $\gamma$  es el coeficiente de transferencia de calor
- .  $u$  es la temperatura del sistema de enfriamiento, que es la entrada de control.

Como parte fundamental en el desarrollo del trabajo, se tomaron como base las siguientes suposiciones (Gavalas, 1968; Viel et al., 1999):

- **Suposición 1.1.** Con base en el principio de conservación de masa, la cantidad de masa que entra es igual a la que sale del sistema, es decir, que existe un vector positivo definido  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ,  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\omega^T E = 0$ . Lo cual significa que la cantidad de materia producida en el reactor no puede ser mayor a la cantidad que se esta alimentando. Como consecuencia de esto se puede mostrar que el conjunto compacto  $C_p \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}^n; \omega^T(c^{in} - c) \leq 0, c_i \geq 0, 1 < i < n\}$ , es positivo e invariante bajo la dinámica del RTAC (1) (Suposición 1 en Viel et al., 1997).

- **Suposición 1.2.** (i)  $r(c, 0) = 0$ , lo cual indica que no existe cambio de materiales por reacción en el cero absoluto (0 grados Kelvin) de temperatura. (ii) La reacción esta limitada por la estequiometría, es decir que  $r(c, T) < \rho$ , para todo  $c \in C_p$  y  $T \in \mathbb{R}$ .
- **Suposición 1.3.** La temperatura del sistema de enfriamiento esta restringida a tomar valores de acuerdo con los límites del elemento final de control (válvula), de manera que  $0 < u_{min} < \bar{u} < u_{max} < \infty$ , donde  $\bar{u}$  representa el valor nominal de la entrada de control, el cual esta dado por la temperatura y la concentración del punto de operación dado, es decir que  $\bar{u} = [\theta(T_{in} - \bar{T}) + H^T r(\bar{c}, \bar{T}) - \gamma \bar{T}] / \gamma$ .

**Proposición 1.1.** Si las suposiciones de la 1.1-1.3 se cumplen, entonces, existe una temperatura  $T_1 > 0$ , tal que el intervalo de temperaturas  $(0, T_1)$  es un dominio positivo e invariante.

**Prueba.** Ver el Apéndice 1 ■

La Proposición 1.1 indica que dada una condición inicial en el reactor, ésta se encontrará en el dominio de interés, es decir, en el intervalo donde se requiere estabilizar su temperatura. De manera que el conjunto compacto de valores  $D_p = C_p \times [0, T_1]$  puede tomarse como el conjunto de existencia física del RTAC. Lo que indica que las condiciones iniciales del reactor, que van a ser estabilizadas, se encuentran en la vecindad del dominio del punto de operación ( $W \subset D_p$ ).

### 1.3.1 Definición del problema

Dado un conjunto de condiciones de operación,  $(\bar{c}, \bar{T}) \in D_p$ , cuyos valores son constantes y dada la temperatura del reactor ( $T$ ) como la salida medida, el RTAC puede ser estabilizado por un controlador tipo PI:

$$u = K_P(\bar{T} - T) + K_I \int (\bar{T} - T(\sigma)) d\sigma \quad (1.2)$$

donde  $K_P$  y  $K_I$  son las ganancias proporcional e integral, respectivamente. Entonces, el problema de control puede definirse como *dada una ley de control tipo PI, encontrar las ganancias  $K_P$  y  $K_I$ , tales que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c(t), T(t)) \rightarrow (\bar{c}, \bar{T}) \quad (1.3)$$

para todas las condiciones iniciales contenidas en el conjunto  $W \subseteq D_p$ . Es decir, que dadas unas condiciones iniciales contenidas en el dominio de interés, el RTAC puede estabilizarse por una ley de control tipo PI, si se asignan de "manera correcta" las ganancias proporcional e integral. Entonces, tenemos que encontrar cual es la mejor manera de asignar dichas ganancias para obtener el desempeño deseado. Como puede observarse, se asignó la salida medida como la temperatura del reactor, dado que en la práctica sus mediciones son fáciles de obtener con termopares, sin un retraso significativo. Es decir que son casi instantáneos, mientras que las mediciones de la concentración se encuentran retardadas. Por lo tanto, la dinámica de la concentración no estará directamente involucrada, pero debe cumplir con las siguientes suposiciones:

- **Suposición 1.4.** Dada una temperatura  $\bar{T}$ , la dinámica isotérmica de la concentración  $\dot{c} = \theta(c^{in} - c) + Er(c, \bar{T})$  es asintóticamente estable al punto de equilibrio  $\bar{c} \in C_p$ . Esta

suposición corresponde a una suposición estabilidad de la dinámica interna (no observable) o de fase mínima del sistema<sup>1</sup>.

- **Suposición 1.5.** El vector de la cinética de la reacción  $r(c, T)$  es una función  $C^2$ , con respecto a sus argumentos. Es decir, esta acotada y es diferenciable<sup>2</sup>.

La suposición de estabilidad interna se basa en que la dinámica de la concentración al no ser observada, debe ser estable para que el reactor pueda ser estabilizado en las condiciones de operación deseadas. La mayoría de los reactores industriales son de dinámica interna estable, en el sentido de la suposición 4 (Feinberg, 1987), incluyendo los reactores catalíticos de la industria petroquímica. Por otro lado, debido a las limitaciones de intercambio de calor, la temperatura del fluido en la chaqueta esta sujeta a restricciones de saturación. En la industria actual, el margen de saturación  $u_{min} - u_{max}$  es del orden de 80 Kelvin.

Una vez establecida la dinámica del reactor y las condiciones de operación, se desarrolla un procedimiento para el diseño del controlador, siguiendo la técnica de retroalimentación de estados.

## 1.4 Diseño de un controlador retroalimentado

En el diseño del controlador se aplicaron algunos resultados estándar de la técnica de retroalimentación de estados para sistemas no lineales (p. ej., Kravaris y Palanki, 1988; Alvarez et al., 1990; Daoutidis et al., 1990; Viel et al., 1995). Además se empleo se trabajo con la dinámica inversa del sistema, mediante la retroalimentación de estados usando una linearización entrada/salida del sistema (I/O feedback linearization).

El diseño del esquema de control se inicia con un cambio de coordenadas definido como  $x = c - \bar{c}$  y  $y = T - \bar{T}$ . Bajo este cambio de coordenadas el sistema (1.1) puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta(x^{in} - x) + ER(x, y) \\ \dot{y} &= \tau_n^{-1}y + H^T R(x, y) + \beta(\bar{T}) + \gamma u\end{aligned}\quad (1.4)$$

donde  $x^{in} = c^{in} - \bar{c}$ ,  $R(x, y) = r(x + \bar{c}, y + \bar{T})$ ,  $\tau_n^{-1} = (\theta + \gamma) > 0$  y  $\beta(\bar{T}) = \theta(T^{in} - \bar{T}) + \gamma\bar{T}$ . Como consecuencia del cambio de coordenadas, el dominio físico denominado como  $D_P = C_P \times [0, T_1]$  se convierte en  $D'_P = C'_P \times [-\bar{T}, T_1 - \bar{T}]$ , donde  $C'_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x = c - \bar{c}, c \in C_P\}$ . Mientras que el conjunto de condiciones iniciales  $W \subseteq D_P$  se traslada a el conjunto  $W' \subseteq D'_P$ .

La base del diseño es el sistema (1.4), en él se puede observar que el grado relativo del sistema es uno, es decir que con la primera derivada de la salida medida ( $\dot{y}$ ) se encuentra explícitamente la entrada de control. Además, se desea que el sistema siga una trayectoria de referencia tal que  $\dot{y} = -\tau_c^{-1}y$ , donde  $\tau_c > 0$  es la constante de tiempo a lazo cerrado. Este tipo de comportamiento a lazo cerrado se puede describir con la linearización I/O del mapa de  $u \rightarrow y$  asignando la siguiente función:

$$u^{in} = \phi_1(x, y) \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>Básicamente, esto se refiere a que al no involucrar a la dinámica de la concentración en el diseño del control, esta debe ser estable para asegurar la convergencia del RTAC.

<sup>2</sup>Con esto se quiere decir que la cinética de la reacción no crece de manera desproporcionada y que es una función continua, al menos en el dominio de interes.

donde

$$\phi_1(x, y) = [-H^T R(x, y) - \beta(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\gamma \quad (1.6)$$

**Proposición 1.2.** *El sistema a lazo cerrado formado entre la dinámica del RTAC (1.4) y la función de retroalimentación de estados (1.5), (1.6) es globalmente asintóticamente estable<sup>3</sup> al origen, con respecto al dominio físico  $D'_P$ .*

**Prueba.** Ver el Apéndice 1 ■

La función de retroalimentación (1.5), (1.6), debe cumplir con la restricción de estar acotada (Suposición 5), entre  $[u_{min}, u_{max}]$ , por lo que se va a considerar una versión saturada de la ley de control (5), (6) :

$$u_{sat}^{in} = Sat[\phi_1(x, y)] \quad (1.7)$$

donde la función de la saturación esta dada por

$$Sat(v) = \begin{cases} u_{max} & \text{sí } v \geq u_{max} \\ v & \text{sí } u_{min} \leq v \leq u_{max} \\ u_{min} & \text{sí } v \leq u_{min} \end{cases} \quad (1.8)$$

Mientras que el sistema a lazo cerrado esta dado por

$$\dot{z} = f_0(z) \quad (1.9)$$

donde  $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  y

$$f_0(z) = \begin{bmatrix} f_{0,1}(z) \\ f_{0,2}(z) \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \theta(x^{in} - x) + ER(x, y) \\ -\tau_n^{-1}y + H^T R(x, y) + \beta(\bar{T}) + \gamma Sat(\phi_1(x, y)) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

En algunos casos, es deseable que la entrada de control saturada cumpla la propiedad de estabilidad global (Alvarez et al., 1991). Sin embargo, la preservación de estabilidad asintótica al origen de la función de saturación (1.5), está asegurada bajo la suposición de que la entrada nominal ( $\bar{u}$ ) de control esta acotada, es decir,  $u_{min} < \bar{u} < u_{max}$  (Alvarez et al., 1991). Es más, la condición de saturación  $Sat(\phi_1(x, y)) = \phi_1(x, y)$  se satisface en la vecindad del origen. Ahora bien, definiendo a la región de atracción del sistema (1.9) como  $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , se puede demostrar que el conjunto  $\Omega_0$  es invariante<sup>4</sup> en el dominio de interes y que todas las trayectorias del sistema a lazo cerrado (1.9), convergen de manera asintótica al origen. Además, si  $D'_P \subseteq \Omega_0$ , se puede mencionar que el sistema a lazo cerrado (1.9) es GAS<sup>5</sup> con respecto al dominio físico de atracción  $D'_P$ .

Entonces, una vez definidos el problema y el objetivo del trabajo, se demostrará que dado un conjunto de condiciones iniciales  $W'$  contenidas en  $\Omega_0$ , estas pueden ser llevadas al origen usando un controlador tipo PI.

<sup>3</sup> Para una mejor comprensión de ésta definición consultar el capítulo de herramientas.

<sup>4</sup> O lo que es igual, no cambia

<sup>5</sup> GAS: por sus siglas en inglés, "globally asymptotic stabilizable".

## 1.5 Diseño de un Controlador tipo PI

En esta sección se desarrollará un control retroalimentado que posea una configuración PI para controlar una clase RTAC's, del tipo anteriormente descrito. Para este fin, se hará uso de la teoría de control de sistemas no lineales singularmente perturbados.

Las medidas empleadas en los controladores tipo PI como en el caso de los controladores retroalimentados se reducen a determinaciones de la temperatura, ya que las medidas de concentración se encuentran retardadas y al pobre conocimiento que se tiene de la dinámica del reactor. El peor caso que se considera en este diseño es aquel en el que la cinética de las reacciones que se llevan a cabo dentro del reactor ( $R(x, y)$ ) es una función desconocida, mientras que el coeficiente de transferencia de calor ( $\gamma$ ) se va a considerar incierto. Esto debido a que existen ensuciamientos e incrustaciones en el sistema de enfriamiento que varían el coeficiente total de transferencia de calor, por lo que sólo se contará con su valor aproximado o nominal. Bajo estas condiciones de diseño, se van a agrupar las incertidumbres de modelado en una función denominada *error de modelado* y definida como

$$\eta(x, y, u) \stackrel{def}{=} H^T R(x, y) + \Delta\beta(\bar{T}) + (\gamma - \bar{\gamma})u \quad (1.11)$$

donde  $\bar{\gamma} > 0$  es un estimado del coeficiente de transferencia de calor  $\gamma$  y  $\Delta\beta(\bar{T}) = \beta(\bar{T}) - \bar{\beta}(\bar{T})$ . Entonces, se puede observar que la función  $\eta(x, y, u)$  contiene los errores de modelado asociados con el mapa de entrada-salida (I/O)  $u \rightarrow T$ . De manera que introduciendo la función del error de modelado en el sistema (1.4), se tiene que la dinámica del reactor puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \theta(x^{in} - x) + ER(x, y) \\ \dot{y} &= \tau_n^{-1}y + \bar{\beta}(\bar{T}) + \eta(x, y, u) + \bar{\gamma}u \end{aligned} \quad (1.11a)$$

donde  $\bar{\beta}(\bar{T}) = \theta(T^{in} - \bar{T}) + \bar{\gamma}\bar{T}$ .

De (1.11a) se puede observar que  $\dot{y} = \tau_n^{-1}y + \bar{\beta}(\bar{T}) + \bar{\gamma}u$  puede interpretarse como un modelo "nominal" de la dinámica de la temperatura del reactor. Ahora, de manera similar a lo aplicado en (1.6), se tiene que la entrada de control inversa y saturada esta dada por

$$u_{sat}^{in} = Sat[\phi_2(y, \eta)] \quad (1.12)$$

donde

$$\phi_2(y, \eta) = [-\eta(x, y, u) - \bar{\beta}(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\bar{\gamma} \quad (1.13)$$

La función (1.13) no se puede calcular debido a que depende de la función del error de modelado  $\eta(x, y, u)$ , la cual es desconocida. Entonces, la idea es introducir un observador de primer orden para estimar la función del error de modelado  $\eta(x, y, u)$  y usar la función estimada  $[\bar{\eta}(x, y, u)]$  para poder calcular una versión de la función de control retroalimentada, denominada función práctica de control retroalimentada y definida como:

$$u_{sat}^p = Sat[\varphi(y, \bar{\eta})] \quad (1.14)$$

donde  $\bar{\eta}(t)$  es un estimado del error de modelado y

$$\varphi(y, \bar{\eta}) = [-\bar{\eta} - \bar{\beta}(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\bar{\gamma} \quad (1.15)$$

Mientras que el observador propuesto es

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (1.16)$$

donde  $\tau_e > 0$  es la constante de estimación. Este observador corresponde a un observador de orden reducido, en el cual el error de modelado corresponde a un nuevo estado que va a ser reconstruido mediante las mediciones de las temperaturas del sistema  $T$ ,  $T^{in}$  y  $u$ .

Para poder implementar el observador (1.16), se hace lo siguiente: como  $\eta(t) = \dot{y}(t) + \tau_n^{-1}y(t) - \bar{\beta}(\bar{T}) - \bar{\gamma}u(t)$ , para todo  $t \geq 0$ , de la ecuación (1.16) se tiene que

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(\dot{y} + \tau_n^{-1}y - \bar{\beta}(\bar{T}) - \bar{\gamma}u - \bar{\eta})$$

ahora bien para evitar el uso de diferenciadores, se define una variable nueva  $w = \tau_e \bar{\eta} - y$ . Por lo que el sistema de observación será

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \tau_n^{-1}y - \bar{\beta}(\bar{T}) - \bar{\gamma}u - \tau_e^{-1}(w + y) \\ \bar{\eta} &= \tau_e^{-1}(w + y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Debido a que el error de modelado es desconocido, este estimador puede calcularse al programar sus condiciones iniciales en  $\eta(t) = 0$ , y  $w(0) = -y(0)$ .

**Proposición 1.3.** *La ley de control definida por la función de retroalimentación (1.14)-(1.15) y el estimador del error de modelado (1.17) es equivalente a un controlador tipo PI con una estructura de antireset wind<sup>6</sup> (ARW).*

**Prueba.** Definiendo

$$u_c^p \stackrel{def}{=} \varphi(x, y) = [-\bar{\eta} - \bar{\beta}(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\bar{\gamma}$$

como el la entrada de control calculada y a  $u_{sat}^p = Sat(u_c^p)$  como la entrada de control actual. De las ecuaciones (1.15) y (1.17) se obtiene la siguiente expresión de la entrada de control:

$$u_c^p = \frac{1}{\tau_e s + 1} u_{sat}^p - \frac{\tau_e s}{(\tau_e s + 1)\bar{\gamma}} \bar{\beta}(\bar{T}) + \frac{\tau_e(\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1} - \tau_e^{-1})s - \tau_c^{-1}}{(\tau_e s + 1)\bar{\gamma}} y$$

donde  $s \stackrel{def}{=} d/dt$ . Cuando la entrada de control no esta sujeta a saturaciones, se tiene que la entrada actual y la entrada calculada de control son iguales, es decir,  $u = u_c$ , y en este caso la entrada de control calculada esta dada por

$$u_c^p = -\bar{\beta}(\bar{T})/\bar{\gamma} + K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

la cual corresponde a una ley de control PI mas el término de precompensación  $-\bar{\beta}(\bar{T})/\bar{\gamma}$  (denominado "dc-bias"<sup>7</sup>), con una ganancia del controlador  $K_c$  y un tiempo integral

<sup>6</sup> Que como ya se menciona es una estructura para prevenir saturaciones en el controlador.

<sup>7</sup> Del inglés: "dual compensation bias"

$\tau_I > 0$ , definidas como

$$\begin{aligned} K_c &= (\tau_e^{-1} + \tau_c^{-1} - \tau_n^{-1})/\bar{\gamma} \\ \tau_I &= \tau_e \tau_c (\tau_e^{-1} + \tau_c^{-1} - \tau_n^{-1}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En el caso general, en el cual la entrada de control calculada esta sujeta a saturaciones, la expresión del controlador correspondiente puede escribirse como sigue:

$$u_c^p = -\bar{\beta}(\bar{T})/\bar{\gamma} + K_c \left[ -y + \tau_I^{-1} \int_0^t \left( -y + \frac{\tau_I}{K_c \tau_c} [u_c^p - u_{sat}^p] \right) d\sigma \right]$$

de donde se puede observar que el controlador propuesto contiene una configuración de ARW que es retroalimentado de manera natural, y esta dada por

$$\frac{\tau_I}{K_c \tau_c} [u_c^p - u_{sat}^p]$$

Entonces, cuando la entrada de control esta saturada, la expresión anterior de ARW lleva el error  $u_c^p - u_{sat}^p$  a cero integrandolo, de manera que la salida del controlador  $u_c^p$  sea idéntica al límite de saturación. Esta estructura evita que el controlador se quede saturado de manera permanente, es decir, evita el fenómeno de “wind up”<sup>8</sup> (Kothare et al., 1994). ■

Se puede observar que el estimador del error de modelado (1.17) asigna una estructura de ARW al controlador propuesto. Además, debido a esta estructura el estimador (1.17) realiza una estimación asintótica del error de modelado  $\eta(t)$  a pesar de la saturaciones en la entrada de control.

En resumen, el controlador retroalimentado (1.14)-(1.16) que posee una estructura para evitar saturaciones en la entrada de control (“anti-windup scheme”), puede verse como la realización de un observador tipo ARW en un controlador tradicional tipo PI (Kapoor y Daoutidis, 1999). Entonces, usando una técnica de estimación del error de modelado tipo I/O se obtiene una realización de un esquema de controlador tipo PI (ec. (1.16)). Además, esta realización tipo PI basada en el esquema de observación antes propuesto, se encuentra parametrizada en función de las ganancias a lazo cerrado y de estimación,  $\tau_c$  y  $\tau_e$  (ec. (1.18)), respectivamente, las cuales son la base del análisis de estabilidad del controlador propuesto y que es objeto de la siguiente parte del trabajo.

## 1.6 Análisis de estabilidad

Desde el punto de vista de la Proposición 1.3, es suficiente demostrar que los objetivos de control pueden alcanzarse por medio de un controlador tipo PI (ecs. (1.14)-(1.17)). Por lo que a continuación se van a obtener las ecuaciones a lazo cerrado del sistema controlado.

---

<sup>8</sup>Del inglés enredado.

### 1.6.1 Configuración a lazo cerrado

Para propósitos de análisis, la dinámica del observador va a ser reemplazada por la dinámica del error de estimación definida como  $\varsigma \stackrel{\text{def}}{=} \eta - \bar{\eta}$ . Bajo este cambio de variables, se tiene que la entrada de control esta dada por:

$$u = \text{Sat}(\varphi(y, \eta - \varsigma) = \text{Sat}(\varphi(y, H^T R(x, y) + \Delta\beta(\bar{T}) + \Delta\gamma u - \varsigma)) \quad (1.19)$$

donde  $\Delta\gamma = \gamma - \bar{\gamma}$ . Para tener un manejo más sencillo en las variables, se va a definir el vector de estados como  $z = (x^T, y^T) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Además, para simplificar el análisis, de aquí en adelante se va a asumir que  $\text{Sat} : \mathbb{R} \rightarrow [u_{\min}, u_{\max}]$  es una función  $C^1$ .

**Lema 1.1.** Si  $\gamma_{\max}$  es una cota superior del coeficiente de transferencia de calor  $\gamma$  y además,  $\bar{\gamma} \geq \gamma_{\max}$ . Entonces, para cualquier función de saturación  $\text{Sat}$  con derivada igual a uno, es decir,

$$\left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \right| \leq 1, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}$$

existe una función  $\Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma)$  que es  $C^1$  y que además resuelve la ecuación

$$u = \text{Sat}(\varphi(y, H^T R(x, y) + \Delta\beta(\bar{T}) + \Delta\gamma u - \varsigma))$$

para todo  $u$ .

**Prueba.** Ver en el Apéndice 1 ■

De acuerdo al Lema 1.1, la entrada de control (ec. (1.19)), puede escribirse como  $u = \Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma)$ , lo cual corresponde a una función de retroalimentación. Desde el punto de vista de estabilidad es deseable que el error de estimación se vaya a cero, es decir que  $\varsigma = \eta - \bar{\eta} = 0$  y que cuando esto suceda, la función de retroalimentación  $\Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma)$  sea equivalente al control saturado inverso exacto, es decir,  $\text{Sat}[\phi_1(x, y)]$ , (ecs. (1.5)-(1.7)).

**Lema 1.2.**  $\Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma) = \text{Sat}[\phi_1(x, y)]$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Prueba.** Ver en el Apéndice 1 ■

De acuerdo al Lema 1.2, el sistema dinámico del reactor puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z) + B_1(\Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma) - \text{Sat}[\phi_1(x, y)]) \\ \dot{\varsigma} &= -\tau_e^{-1}\varsigma + \dot{\eta} \end{aligned}$$

donde  $B_1 = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $f_0(z)$  esta dado en la ecuación (1.10), además

$$\dot{\eta} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) (f_0(z) + B_1(\Theta_{\text{sat}}(z, \varsigma) - \text{Sat}[\phi_1(x, y)])) + \Delta\gamma \dot{u}$$

y

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = H^T \frac{\partial R}{\partial z}$$

Para el cálculo de  $\dot{u}$ , se usarán las ecuaciones (1.14) y (1.15) para obtener:

$$\dot{u} = \bar{\gamma}^{-1} \left( \frac{dSat(s)}{ds} \right) (-\tau_e^{-1}\zeta - (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})[f_{0,1}(z) + B_1(\Theta_{sat}(z, \zeta) - Sat[\phi_1(x, y)])])$$

donde  $s$  es un argumento de integración. Entonces, las ecuaciones a lazo cerrado del sistema pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z) + B_1(\Theta_{sat}(z, \zeta) - Sat[\phi_1(x, y)]) \\ \dot{\zeta} &= -\tau_e^{-1}\varkappa(t)\zeta + \Gamma(z, \zeta) \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde

$$\varkappa(t) \stackrel{def}{=} \frac{\bar{\gamma} + \left( \frac{dSat(s)}{ds} \right) (\gamma - \bar{\gamma})}{\bar{\gamma}} \quad (1.21)$$

y

$$\Gamma(z, \zeta) = H^T \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right) (f_0(z) + B_1(\Theta_{sat}(z, \zeta) - Sat[\phi_1(x, y)])) + \bar{\gamma}^{-1} \Delta \gamma \left( \frac{dSat(s)}{ds} \right) (-\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1}) [f_{0,1}(z) + B_1(\Theta_{sat}(z, \zeta) - Sat[\phi_1(x, y)])] \quad (1.22)$$

Ahora bien, el análisis de estabilidad se basará en algunos resultados obtenidos para sistemas no lineales singularmente perturbados, por lo que el sistema a lazo cerrado (ec. (1.20)), puede verse como un sistema singularmente perturbado para valores suficientemente pequeños de la constante de estimación,  $\tau_e > 0$ , con  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\zeta \in \mathbb{R}$ , como las variables rápidas y lentas, respectivamente. El sistema reducido se obtiene de la ecuación (1.9) cuando  $\tau_e = 0$ . Mientras que el sistema de capa límite se obtiene haciendo un escalamiento de tiempo  $t' = t/\tau_e$  con  $\tau_e > 0$  y por ello

$$\zeta' = \varkappa(t)\zeta \quad (1.23)$$

donde  $\zeta' = d\zeta/dt$ .

### 1.6.2 Estabilidad y Robustez

Para definir las propiedades de estabilidad en el sistema a lazo cerrado (1.20), se demostrarán la estabilidad del sistema reducido (ec. (1.9) y del sistema de capa límite (1.23).

Por un lado, la estabilidad del sistema reducido puede definirse haciendo uso de la propiedad de fase mínima (Suposición 1.3), como sigue.

*Del teorema converso de Lyapunov (Massera, 1956), se sabe de la existencia de una función propia de Lyapunov  $C^1$  denominada  $V : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , y de tres funciones definidas positivas  $Q_1(z)$ ,  $Q_2(z)$  y  $Q_3(z)$ , todas ellas continuas y definidas en  $\Omega_0 \setminus \{0\}$ , que cumplen*

$$\begin{aligned} Q_1(z) &\leq V(z) \leq Q_2(z) \\ \lim_{z \rightarrow \partial\Omega_0} Q_1(z) &= \infty \\ (\partial V / \partial z) f_0(z) &\leq -Q_3(z) \end{aligned}$$

*Además, el hecho de que la función de Lyapunov  $V(z)$  sea propia en  $\Omega_0$ , garantiza que para cualquier  $q > \max_{z \in W} V(z)$ , el conjunto  $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : V(z) \leq q\}$  es un subconjunto*

compacto en  $\Omega_0$  y además que  $W$  se encuentra en el interior de  $\mathcal{L}$ , con lo cual queda establecida la estabilidad del sistema reducido. ■

Por otro lado, la estabilidad del sistema de capa límite (1.23), se establece mediante la siguiente proposición:

**Proposición 1.4.** *Bajo los mismos razonamientos del Lema 1.1, el sistema de capa límite (1.23), es exponencialmente estable con una función de Lyapunov  $\mathcal{V}(\varsigma) = \varsigma^2$ .*

**Prueba.** Ver en el Apéndice 1. ■

Para simplificar el análisis de estabilidad, se muestra el siguiente resultado.

**Lema 1.3.** *Para cualquier conjunto de condiciones iniciales en el reactor, denominadas  $W' \subseteq D'_p$ , existe un conjunto acotado de condiciones iniciales  $W_\varsigma \subseteq D'_p$  conteniendo la dinámica del error de estimación.*

**Prueba.** Ver en el Apéndice 1. ■

Ahora bien, si  $(z(t, \tau_e), \varsigma(t, \tau_e))$  define la trayectoria del sistema a lazo cerrado (1.20), entonces, el siguiente resultado describe la *estabilidad práctica* en el punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T})$ , que puede obtenerse mediante un controlador tipo PI, es decir, que todas las trayectorias  $(z(t, \tau_e), \varsigma(t, \tau_e))$  que comienzan en  $W' \subseteq \Omega_0$  pueden ser estabilizadas en el origen mediante una ley de control tipo PI como la descrita en (1.18).

**Teorema 1.1.** *Si las Suposiciones 1.1-1.5 se cumplen, entonces el punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T})$  es semiglobalmente estabilizado de manera práctica mediante una ley de control tipo PI. Esto quiere decir que desde cualquier par de conjuntos compacto  $\mathcal{K}_{in} \subset \mathcal{K}_{out} \subset \Omega_0$ , localizados en la vecindad del origen, existen un conjunto de ganancias  $(K_P, K_I)$ , correspondientes a un controlador tipo PI, tales que todas las soluciones  $z(t, \tau_e)$  del RTAC controlado, cuyas condiciones iniciales pertenecen al conjunto  $\mathcal{K}_{in}$ , son dirigidas al conjunto  $\mathcal{K}_{out}$ .*

**Prueba.** La demostración se lleva a cabo en dos pasos.

- 1) Existe un valor del tiempo de estimación máximo  $\tau_{e,1}^{\max} > 0$ , tal que para cualquier valor comprendido entre  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,1}^{\max}$ , las trayectorias  $(z, \varsigma)$  correspondientes al sistema a lazo cerrado (ec. (1.20)), que comienzan en  $W' \times W_\varsigma$ , se encuentran acotadas para todo  $t \geq 0$ . El hecho de que los estados del sistema representados por  $z(t)$  se encuentren acotados, proviene de la Proposición 1.1. Entonces, de ec. (1.20) se tiene que

$$|\varsigma \Gamma(z, \varsigma)| \leq k_0 + k_1 |\varsigma|, \quad \text{para todo } (z, \varsigma) \in W' \times \mathbb{R}$$

Por lo que, si  $\mathcal{V}(\varsigma) = \varsigma^2$

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -2\tau_e^{-1} \kappa_{\min} \mathcal{V} + 2(k_0 + k_1 |\varsigma|) |\varsigma|$$

Lo anterior muestra que existe un  $\tau_{e,1}^{\max} > 0$  tal que en el intervalo  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,1}^{\max}$ , la función  $\mathcal{V}(t)$  esta acotada para cualquier  $t \geq 0$ . Además,  $\mathcal{V}(t)$  converge en un tiempo finito a una bola  $B_1(0, r(\tau_e)) \subset \mathbb{R}$  de radio  $r(\tau_e) \leq (\tau_e k_0 / (\kappa_{\min} - \tau_e k_1))^{1/2}$ , la cual esta

localizada alrededor del origen. De esta manera, las trayectorias de los estados del sistema  $(z(t, \tau_e), \varsigma(t, \tau_e))$  comienzan en  $\Lambda^9 = D'_p \times B_1(0, r(\tau_e))$  para todo  $t \geq 0$ .

- 2) Para cualquier  $\xi > 0$ , existe un valor del tiempo de estimación denominado  $\tau_{e,2}^{\max}(\xi) > 0$  y un tiempo finito  $T_1(\xi)$  tal que, para cualquier valor comprendido entre  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,2}^{\max}(\xi)$  del sistema a lazo cerrado se satisface la siguiente condición:

$$|z(t, \tau_e)| + |\varsigma(t, \tau_e)| \leq 2\xi, \quad \text{para todo } t \geq T_1$$

Del punto 1, se puede encontrar un valor del tiempo de estimación  $\tau_{e,3}^{\max} \leq \tau_{e,1}^{\max}$  tal que para cualquier valor comprendido entre  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,2}^{\max}(\xi)$  se tiene que:

$$|\varsigma(t, \tau_e)| \leq \xi, \quad \text{para todo } t \geq T_2$$

Por otro lado, del teorema converso de Lyapunov antes citado la función se puede expresar

$$\dot{V} \leq -Q_3(z) + (\partial V / \partial z) B_1(\Theta_{Sat}(z, \varsigma) - Sat\{\phi_1(z)\})$$

Más aún, del punto 1 se puede demostrar que  $|B_1(\Theta_{Sat}(z, \varsigma) - Sat\{\phi_1(z)\})| \leq k_2 |\varsigma| \leq k_3 \tau_e$ , para todo  $(z, \varsigma) \in \Lambda$  (ver Lema 1.2). De aquí que para todo  $(z, \varsigma) \in \Lambda$

$$\dot{V} \leq -Q_3(z) + k_4 \tau_e$$

donde  $k_4 \tau_e \stackrel{def}{=} k_3 \max_{z \in D'_p} (|\partial V / \partial z|)$ . Además, se sabe de la existencia de un  $q_1 > 0$  tal que  $\mathcal{L}_1 \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : V(z) \leq q_1\} \subset \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : |z| \leq \xi\}$ . Ahora bien, como  $Q_3(z)$  es una función definida positiva y continua, entonces existe un valor del tiempo de estimación  $\tau_{e,4}^{\max}(\xi) > 0$  y un tiempo finito  $T_2(\xi)$  tales que para cualquier  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,4}^{\max}(\xi)$ ,  $z(t, \tau_e)$  converge a  $\mathcal{L}_1$  en  $T_3(\xi)$  y permanece allí para todo  $t \geq T_3(\xi)$ . Para concluir la prueba, se toma  $\tau_{e,2}^{\max}(\xi) = \min(\tau_{e,3}^{\max}(\xi), \tau_{e,4}^{\max}(\xi))$ ,  $T_1 = \max(T_2(\xi), T_3(\xi))$ ,  $\mathcal{K}_{out} = W'$  and  $\mathcal{K}_{in} = \mathcal{L}_1$ . Este resultado implica que las trayectorias del sistema a lazo cerrado pueden ser llevadas a una vecindad del origen al escoger tiempos de estimación pequeños  $\tau_e$ . El conjunto compacto  $\mathcal{K}_{in}$  se denomina *atractor de tiempo finito*, el cual es alcanzado en el tiempo  $T_1$ . ■

El resultado anterior tiene el problema de que establece estabilidad asintótica<sup>10</sup> en el punto de equilibrio  $(\bar{z}, \bar{T})$ . Esto se debe a que en la Suposición 1.4 únicamente se define la estabilidad asintótica de la dinámica isotérmica del CSTR. Ahora bien, desde el punto de vista del análisis con funciones de Lyapunov, esta suposición de la dinámica isotérmica puede derivar en el establecimiento de la estabilidad asintótica en el punto de operación deseado, para todo el sistema a lazo cerrado (ec. (1.20)). De hecho, si se toma a la función de Lyapunov compuesta por el sistema de capa límite y el sistema reducido como  $V_c(z) = V(z) + \mathcal{V}(\varsigma)$  y se obtiene su

<sup>9</sup>Este conjunto se define como un dominio positivo e invariante y arbitrariamente pequeño en la dirección del error de estimación  $\varsigma$ .

<sup>10</sup>Con esto se habla de que el sistema al menos va a tender en un largo período de tiempo a un punto de equilibrio, que en este caso por el cambio de coordenadas corresponde al equilibrio.

derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (1.20), se llega a:

$$\dot{V}_c = -Q_3(z) - 2\tau_e^{-1}\kappa_{\min} |\varsigma|^2 + (\partial V/\partial z)(\Theta_{Sat}(z, \varsigma) - Sat[\phi_1(z)]) + 2\varsigma\Gamma(z, \varsigma)$$

El cuarto término de la ecuación anterior, puede ser acotado por arriba por  $L_2 |z| |\varsigma| + L_3 |\varsigma|^2$ .

Por otro lado,  $Q_3(z) \leq \alpha_1 |z|^p$  y  $(\partial V/\partial z) \leq \alpha_2 |z|^{p-1}$ , para  $0 < p \leq 2$ . Si el sistema reducido no es exponencialmente estable, entonces,  $p < 2$ . En este caso, en la vecindad del origen, el término  $\alpha_1 |z|^p$  no puede ser mayor que  $L_3 |\varsigma|^2$ , lo cual se convierte en una obstrucción para mostrar estabilidad asintótica mediante un análisis de Lyapunov. Por lo tanto, la suposición de estabilidad asintótica en el sistema isotérmico, solamente permite demostrar un resultado de estabilidad práctica. Entonces, para demostrar estabilidad asintótica en el punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T})$  bajo la acción del controladores tipo PI, se va hacer uso de una condición local adicional en la dinámica isotérmica del RTAC, la cual se enuncia a continuación.

**Suposición 1.6.** *La dinámica isotérmica del RTAC  $\dot{c} = \theta(c_{in} - c) + Er(c, T)$  es localmente exponencialmente estable en el punto de de equilibrio  $\bar{c} \in C_p$ .*

Entonces, el resultado correspondiente al segundo punto del Teorema 1.1 en conjunto con la Suposición 1.4 permite llegar al siguiente resultado.

**Teorema 1.2.** *Si las suposiciones 1.1-1.6 se cumplen, entonces, el punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T})$  es semiglobalmente-asintóticamente estable mediante un controlador clásico tipo PI. Es decir que en la vecindad del origen, para cualquier conjunto compacto  $W' \subset \Omega_0$ , existe un conjunto de ganancias  $(K_P, K_I)$ , correspondientes a un controlador PI, tales que las trayectorias  $z(t, \tau_e)$  del sistema controlado (RTAC), de condiciones iniciales comprendidas en  $W'$ , son conducidas de manera asintótica al origen.*

**Prueba.** Considerando dos bolas de radio  $B_2(0, \xi) \subset \Omega_0$  y  $B_3(0, \xi) \subset \mathbb{R}$ . Entonces, para todo  $(z, \varsigma) \in B_2(0, \xi) \times B_3(0, \xi)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |\Theta_{Sat}(z, \varsigma) - Sat[\phi_1(z)]| &\leq L_1 |\varsigma| \\ |\Gamma(z, \varsigma)| &\leq L_2 |z| + L_3 |\varsigma| \end{aligned}$$

Por otro lado, retomando la función compuesta  $V_c(z) = V(z) + \mathcal{V}(\varsigma)$ , se tiene que sí  $z_\tau(t)$  es una solución del sistema reducido (1.9), entonces por la Suposición 1.6, se sabe que existe un valor  $\xi > 0$ , suficientemente pequeño, tal que las trayectorias  $z_\tau(t)$  que comienzan en  $B_2(0, \xi)$  convergen de manera exponencial al origen. Y en este caso, existen dos constantes positivas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tales que  $Q_3(z) = \alpha_1 |z|^2$  y  $(\partial V/\partial z) \leq \alpha_2 |z|$ . Por lo tanto, la derivada de la función compuesta a lo largo de las trayectorias se convierte en:

$$\dot{V}_c = -\alpha_1 |z|^2 - 2\tau_e^{-1}\kappa_{\min} |\varsigma|^2 + \alpha_2 L_1 |z| |\varsigma| + 2|\varsigma| (L_2 |z| + L_3 |\varsigma|)$$

Se puede demostrar que existe un tiempo de estimación máximo  $\tau_{e,5}^{\max} > 0$ , tal que para cualquier tiempo de estimación comprendido entre 0 y  $\tau_{e,5}^{\max}$  ( $0 < \tau_e \leq \tau_{e,5}^{\max}$ ), se tiene que  $\dot{V}_c < 0$  para todo  $(z, \varsigma) \in \{B_2(0, \xi) \times B_3(0, \xi)\} \setminus \{0\}$ . Un estimado de  $\tau_{e,5}^{\max}$  puede estar dado por

$$\tau_{e,5}^{\max} = \frac{8\alpha_1 \kappa_{\min}}{\rho^2 + 8\alpha_1 L_3}$$

donde  $\rho = \alpha_2 L_1 + 2L_2$ . Para concluir la prueba, se puede elegir  $\tau_{e,6}^{\max} = \min\{\tau_{e,1}^{\max}, \tau_{e,2}^{\max}, \tau_{e,5}^{\max}\}$ . Entonces, para cualquier  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,6}^{\max}$ , se tiene que todas las trayectorias a lazo cerrado  $(z(t, \tau_e), \varsigma(t, \tau_e))$  que comienzan en  $W' \times W_\zeta$  convergen al origen. Por lo que, de acuerdo a la Proposición 1.3 se dice que existe un conjunto de ganancias  $[K_P, K_I]$  correspondientes a un controlador PI, que resuelven el problema de control. ■

*Concluyendo, se dice que la región de atracción  $\Omega_0$  inducida por el control saturado inverso (ecs. (1.6), (1.7)), es recuperada por el controlador tipo PI, aquí diseñado, cuando  $\tau_e \rightarrow 0$ . Es decir, que en el límite cuando  $\tau_e \rightarrow 0$ , todas las trayectorias del sistema  $z(t, \tau_e)$  que comienzan en  $\Omega_0$ , pueden ser llevadas al punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T})$  mediante un controlador clásico tipo PI.*

### 1.6.3 Desempeño robusto

El desempeño robusto va a ser determinado mediante el Teorema 1.3, en el cual se muestra que el desempeño de  $z_r(t)$  inducido por la ley de control saturada inversa (state-feedback), ecs. (1.6),(1.7)), puede recuperarse cuando el tiempo de estimación tiende a valores pequeños, es decir,  $\tau_e \rightarrow 0$ .

**Teorema 1.3.** *Si las Suposiciones 1.1-1.6 se cumplen, entonces el límite*

$$z(t, \tau_e) \rightarrow z_r(t), \quad \text{cuando } \tau_e \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

*se cumple de manera uniforme en  $t$ , para todo  $t \geq 0$ .*

**Prueba.** Para demostrar lo anterior se van a utilizar los resultados descritos en el artículo de Attasy & Khalil (1999). Para este fin, será suficiente mostrar que dado cualquier valor  $\xi > 0$ , existe un tiempo de estimación  $\tau_{e,7}^{\max} > 0$ , tal que para cualquier valor  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,7}^{\max}$ , se cumple la siguiente desigualdad

$$|z(t, \tau_e) - z_r(t)| \leq \xi \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (1.25)$$

Si se divide el intervalo  $[0, \infty)$  en  $[0, T_4(\xi)]$  y  $[T_4(\xi), \infty)$ , donde  $T_4(\xi)$  es un valor a ser determinado, con estos intervalos se puede demostrar que la desigualdad (1.25) se cumple para cada uno.

- 1) Intervalo  $[T_4(\xi), \infty)$ . Debido a la estabilidad asintótica del sistema reducido (1.9) y al Teorema 1.2, se dice que existe un tiempo finito  $T_4(\xi)$  tal que

$$|z(t, \tau_e) - z_r(t)| \leq \xi \quad \text{para todo } t \geq T_4(\xi)$$

- 2) Intervalo  $[0, T_4(\xi)]$ . Como para todo  $\tau_e > 0$   $|z(t, \tau_e) - z_r(t)| = 0$ , y  $z(t, \tau_e)$  y  $z_r(t)$  son funciones continuas, entonces de la dependencia de soluciones continuas para ecuaciones diferenciales en intervalos compactos, se sabe que existe un tiempo de estimación  $\tau_{e,7}^{\max} > 0$ , tal que para todo  $0 < \tau_e \leq \tau_{e,7}^{\max}$ , se tiene

$$|z(t, \tau_e) - z_r(t)| \leq \xi \quad \text{para todo } t \in [0, T_4(\xi)]$$

Con esto se concluye la prueba ■.

De manera general, el Teorema 1.3 establece que el desempeño inducido a un RTAC mediante un controlador no-lineal de retroalimentación de estados (ecs. (1.6), (1.7)), puede ser recuperado de manera efectiva mediante un controlador PI clásico. Esta recuperación del desempeño, es debida a la rápida estimación del error de modelado del mapa de entrada/salida (I/O), que permite una parametrización tipo PI, como es mostrada en (1.18). Además, se puede decir que el esquema de estimación propuesto induce una acción de alta ganancia integral, la cual, debido al término de precompensación o “dc-bias”, también es capaz de “obstruir” el efecto de las incertidumbres de alta ganancia.

Los resultados obtenidos en los Teoremas 1.1 y 1.2 se resumen a continuación: *Se encontró que un controlador clásico tipo PI, es capaz de recuperar la región de atracción  $\Omega_0$  y el desempeño robusto a lazo cerrado  $z_r(t)$ , siempre y cuando los errores de modelado sean estimados de manera rápida, es decir, cuando  $\tau_e \rightarrow 0$ . Entonces, se ha demostrado que al aplicar un controlador lineal, tipo PI a un RTAC se pueden obtener resultados de estabilidad no-locales.*

En el caso de que no existan saturaciones en la entrada de control, la recuperación del desempeño puede establecerse con la propiedad de ARW que el estimador (1.17) provee al esquema de control. Es decir, que la estimación del error de modelado puede llevarse a cabo, por que el esquema de control usa el valor actual de la entrada de control y en este contexto la representación del error de modelado hecha en (1.17) es similar a la mostrada en el trabajo de Kapoor y Daoutidis (1999), en el cual se diseña un esquema de anti-windup<sup>11</sup> para sistemas no-lineales.

Debe recalcar, que el esquema de ARW resulta esencial para la recuperación del desempeño inducido por la ley de retroalimentación de estados (ecs. (6), (7)), lo cual esta de acuerdo con los resultados para sistemas lineales (Kapoor, 1998) y sistemas no-lineales (Kapoor y Daoutidis, 1999) previamente obtenidos, en los cuales se muestra que los efectos en la dinámica del controlador y por ende los efectos de saturación, pueden ser rápidamente atenuados al diseñar de manera apropiada las ganancias del esquema anti-windup. Mientras que en este trabajo se muestra que un controlador clásico tipo PI con estructura de ARW es capaz de recuperar las propiedades de estabilidad y desempeño inducidas por el controlador retroalimentado y saturado inverso (Teoremas 1.2 y 1.3).

#### 1.6.4 Guías de sintonizado

Para valores del tiempo de estimación de  $0 < \tau_e \leq \tau_e^{\max}$ , se observa que la parametrización en el tiempo de estimación (1.18) define trayectorias en el espacio de ganancias  $[K_P, K_I]$ , en cual se puede obtener de manera indistinta estabilidad práctica y estabilidad asintótica en la dinámica del RTAC a lazo cerrado. Por lo tanto, las guías de sintonizado van a ser relatadas en función del coeficiente de transferencia de calor  $\gamma$ , la constante de tiempo a lazo cerrado  $\tau_c$  y el tiempo de estimación  $\tau_e$ .

---

<sup>11</sup>Por sus siglas en inglés, que significan, anti-saturación.

- i) Primero se debe escoger el coeficiente de transferencia de calor como  $\gamma \geq \gamma_{\max}$ , con lo cual sólo se requiere conocer una cota superior del coeficiente de transferencia de calor.
- ii) Escoger la constante de tiempo a lazo cerrado  $\tau_c$  conforme a un criterio de desempeño dado, por ejemplo colocación de polos, entre otros. Sin embargo, como una simple aproximación se puede determinar que la constante a lazo cerrado sea del orden del tiempo de asentamiento natural del sistema, es decir de  $\tau_n = \theta^{-1} + \gamma^{-1}$ , por lo que para evitar esfuerzos de control excesivos se recomienda escoger  $\tau_c$  del orden de 0.5 ó 0.75 veces  $\tau_n$ .
- iii) Escoger un valor del tiempo de estimación  $\tau_e$  suficientemente pequeño, de manera que la estabilidad a lazo cerrado y el desempeño no se vean degradados (Teorema 1.3). Una vez determinados los valores de  $\gamma$ ,  $\tau_c$  y  $\tau_e$ , se deberán calcular las ganancias del controlador mediante (1.18).

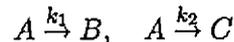
De esta manera el sintonizado del controlador PI diseñado puede llevarse a cabo de manera sencilla, atendiendo al hecho de que cuando no existen influencias debidas a las dinámicas no-modeladas o a ruido de medición, entre más pequeño sea el valor de  $\tau_e$  el tamaño de la región de atracción será más grande, mientras que la recuperación del desempeño se aproximará de manera más rápida a aquella inducida por el control saturado inverso.

Es importante recalcar que como la función de saturación es igual a la identidad en la vecindad del origen (Suposición 1.3), entonces el comportamiento local de la temperatura del reactor se comporta como  $\dot{y} = -\tau_c^{-1}y$  bajo el controlador inverso (ecs. (1.6), (1.7)). Por lo que para valores muy pequeños del tiempo de estimación, para  $\tau_e > 0$ , el comportamiento a lazo cerrado se aproxima a un tipo exponencial  $y(t) = \exp(-t/\tau_c)y(0)$ . Entonces, el controlador tipo PI, al menos se comporta con una estabilidad localmente exponencial.

## 1.7 Caso de Estudio

Con el fin de ejemplificar los resultados obtenidos en esta sección, se procede a desarrollar el control de la dinámica de un RTAC. Específicamente se desea ilustrar que el controlador tipo PI es capaz de proporcionar resultados no-locales con respecto a la región de atracción y a la recuperación del desempeño.

El ejemplo proviene de un trabajo anterior (Christofides et al., 1996), el cual corresponde a dos reacciones paralelas e irreversibles de la forma



Donde las velocidades de reacción tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} r_1 &= -k_{10} \exp(-E_{a,1}/RT)C_A \\ r_2 &= -k_{20} \exp(-E_{a,2}/RT)C_A \end{aligned}$$

En la Tabla 1.1, se pueden observar los parámetros del reactor. Por otro lado, las dinámicas isotérmicas del reactor son de tipo lineal, por lo que la Suposición 1.6 es satisfecha. Entonces, aplicando el resultado establecido en el Teorema 1.2, se sabe que este reactor puede ser estabilizado mediante un controlador clásico tipo PI.

Con base en los parámetros del sistema, se tiene que el tiempo natural corresponde a  $\tau_n = (\theta + \gamma)^{-1} = 0.0313h$ , por lo que se escoge que  $\tau_c = 0.022h$ . El coeficiente de transferencia de calor es de  $\gamma = 28.86h^{-1}$ . Para cuestiones de simulación se va a suponer que sólo tenemos un valor estimado  $\bar{\gamma} = 36h^{-1}$ . La temperatura nominal del sistema de enfriamiento es de  $\bar{u} = 320K$ , mientras que los valores de las cotas de saturación son de  $u_{\min} = 265K$  y  $u_{\max} = 375K$ . En este ejemplo se va a mostrar como el controlador tipo PI recupera el desempeño inducido por la ley de retroalimentación inversa (1.6), (1.7)) para el mismo valor de la constante a lazo cerrado, aun cuando las condiciones iniciales se encuentren lejos del punto de operación deseado que es  $\bar{T} = 300K$ .

La Figura 1.1 muestra el desempeño del controlador (1.18) bajo tres valores diferentes del tiempo de estimación  $\tau_e$ . En esta figura también se muestra la ley de control inversa (ecs. (1.6), (1.7)). Para realizar estas simulaciones se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:  $C_A(0) = 3.75 \text{ kmol/m}^3$ ,  $C_B(0) = 0 \text{ kmol/m}^3$  y  $T(0) = 310 \text{ K}$ . En estas simulaciones se muestra la concordancia del comportamiento que predice la teoría, es decir, que conforme  $\tau_e \rightarrow 0$  la ley de control tipo PI tiende a la ley de control inverso.

Con el fin de mostrar que la ley de control tipo PI presenta propiedades de estabilidad no-locales, en la Figura 1.2 se muestra un retrato fase  $(C_A, T)$  para diferentes condiciones iniciales y en ella se puede observar que la ley de control tipo PI es capaz de llevar a las trayectorias del sistema al punto de operación deseado.

Tabla 1.1

Parámetros del sistema

$\theta = 3.0 \text{ h}^{-1}$
$C_A^m = 3.75 \text{ kmol m}^{-3}$
$T^m = 310 \text{ K}$
$k_{10} = 3.36 \times 10^6 \text{ h}^{-1}$
$k_{20} = 7.21 \times 10^6 \text{ h}^{-1}$
$E_{a,1} = 8.0 \times 10^4 \text{ kcal kg}^{-1}$
$E_{a,2} = 9.0 \times 10^4 \text{ kcal kg}^{-1}$
$R = 1.987 \text{ kcal kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\gamma = 28.86 \text{ h}^{-1}$
$H_1 = 8.72 \times 10^8 \text{ K m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
$H_2 = 1.75 \times 10^{10} \text{ K m}^3 \text{ kmol}^{-1}$

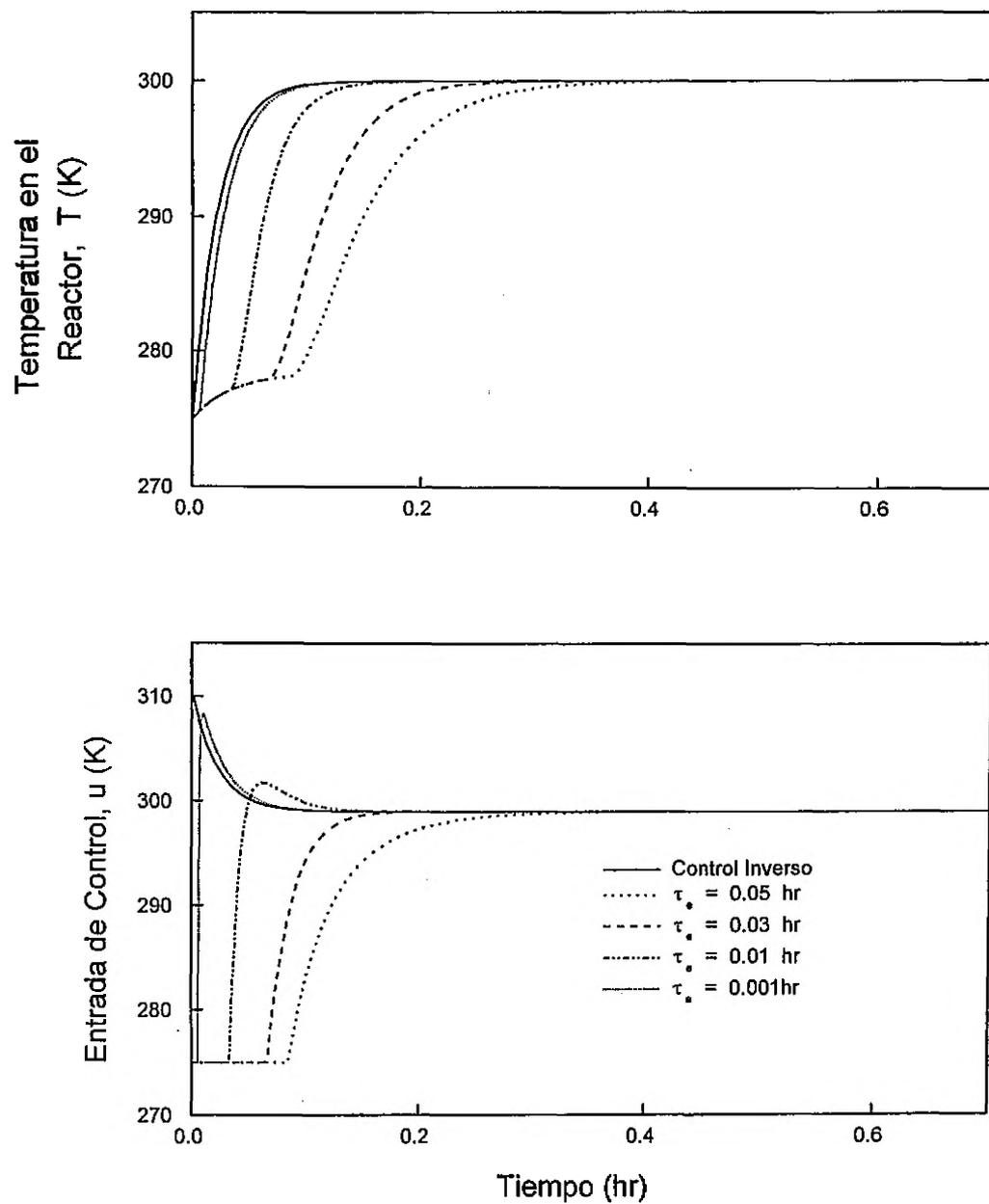


Figura 1.1 Desempeño del controlador para tres valores de  $\tau_e$ .

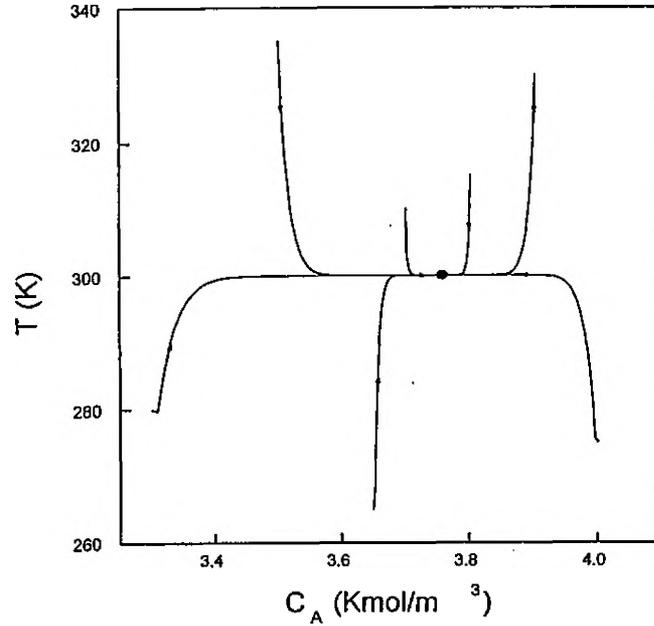


Figura 1.2 Retrato fase  $(c_A, T)$  del reactor controlado.

## 1.8 Conclusiones

En este capítulo se estudió la estabilidad de los reactores tipo tanque agitado continuo, para lo cual se diseñó un controlador tipo PI con retroalimentación de la temperatura. Para la construcción de este controlador se utilizó un observador de orden reducido para estimar los errores de modelado. Bajo esta estructura de diseño, el controlador posee una estructura de anti-reset windup para evitar saturaciones en la entrada de control.

Además, el análisis de estabilidad del controlador mostró que en el límite, cuando  $\tau_e \rightarrow 0$ , es capaz de recuperar el desempeño a lazo cerrado y la región de atracción inducidos mediante una ley de control retroalimentado inversa. Dichas propiedades de estabilidad y de recuperación de desempeño se demostraron usando simulaciones numéricas.

En el siguiente capítulo se trabaja con un RTAC con dinámica en el sistema de enfriamiento. Se le aplica la misma metodología usada en este capítulo para la construcción del controlador, sin embargo, como este sistema es de grado relativo 2, la estructura del controlador es de un controlador tipo PID.

## 1.9 Apéndice 1

**Prueba de la Proposición 1.1.** De la Suposición 1.2.(i) se tiene que  $\dot{T} = \theta T^{in} + \gamma u > 0$ , para  $T = 0$  y para cualquier concentración  $c \in C_p$ . Además, la Suposición 1.2.(ii) implica que  $\dot{T} < \theta(T^{in} - T) + \rho + \gamma(u_{max} - T)$  para todo  $c \in C$ . Si se toma a  $T_1 \stackrel{def}{=} (\theta T^{in} + \rho + \gamma u_{max}) / (\theta + \rho)$ . Entonces  $\dot{T} < 0$ , para todo  $c \in C_p$  y  $T > T_1$ . Bajo estos argumentos se determina que el dominio

es positivo e invariante. ■

**Prueba de la Proposición 1.2.** La dinámica controlada de la temperatura  $\dot{y} = -\tau_c^{-1}y$  es globalmente asintóticamente estable. Este resultado puede establecerse fácilmente utilizando la Suposición 3 y el Lema 1 presentados en (Viel et al., 1997). ■

**Prueba del Lema 1.1.** Para cada par  $(z, \zeta)$ , considerar el mapeo:

$$T(u) = \text{Sat}(\varphi(y, H^T R(x, y) + \Delta\beta(\bar{T}) + \Delta\gamma u - \varsigma)) \quad (\text{A.1})$$

Entonces

$$\left| \frac{T(u)}{du} \right| = \left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \frac{\Delta\gamma}{\bar{\gamma}} \right| \leq \left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \left( \frac{\gamma - \gamma_{\max}}{\gamma_{\max}} \right) \right| < 1$$

La ecuación (A.1) corresponde a un mapeo de contracción. Por lo que la prueba del Lema 1.1 se completa al utilizar el Teorema del Mapeo de Contracción y el hecho de que  $T$  is  $C^1$  respecto a  $(z, \zeta)$ . ■

**Prueba del Lema 1.2.** Si  $u = u^c$  (i.e., la entrada de control no esta saturada), entonces  $\text{Sat} = \text{Id}$ , donde  $\text{Id}$  la función de identidad. En este caso la solución a (1.20) para  $\zeta = 0$  es  $\Theta_{\text{Id}}(z, 0) = \phi_1(z)$ . De esta forma la prueba se completa si se muestra que  $\Theta_{\text{Sat}}(z, 0) = \text{Sat}[\phi_1(z)]$  cuando  $u \neq u^c$  (i.e. que la entrada de control se encuentra en los límites de saturación). Entonces, se supone que  $u^c \leq u_{\min}$  tal que  $u = u_{\min}$ . Ahora se introducen los límites de saturación como:

$$S_{\Theta}^{\min} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \Theta_{\text{Sat}}(z, 0) \leq u_{\min}\}$$

$$S_{\phi_1}^{\min} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \phi_1(z) \leq u_{\min}\}$$

Se va a demostrar que  $S_{\Theta}^{\min} = S_{\phi_1}^{\min}$ . De hecho, usando (1.11) and (1.19) puede demostrarse que

$$\begin{aligned} S_{\Theta}^{\min} &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \Theta_{\text{Sat}}(z, 0) \leq u_{\min}\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : [-\eta - \beta(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\bar{\gamma} \leq u_{\min}\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : [-H^T R(x, y) - (\gamma - \bar{\gamma})u_{\min} - \beta(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\bar{\gamma} \leq u_{\min}\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : [-H^T R(x, y) - \beta(\bar{T}) + (\tau_n^{-1} - \tau_c^{-1})y]/\gamma \leq u_{\min}\} = S_{\phi_1}^{\min} \end{aligned}$$

Lo anterior se aplica y establece para  $S_{\Theta}^{\max} = S_{\phi_1}^{\max}$  cuando  $u = u_{\max}$ . Con lo cual se concluye la prueba. ■

**Prueba de la Proposición 1.4.** De la prueba del Lema 1.1 se sabe que

$$\left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \left( \frac{\gamma - \gamma_{\max}}{\gamma_{\max}} \right) \right| < 1$$

Es más, como  $\gamma > \gamma_{\min} > 0$  y  $\gamma - \gamma_{\max} < 0$ , se tiene que

$$\kappa(t) = 1 + \frac{(d\text{Sat}(s)/ds)(\gamma - \bar{\gamma})}{\bar{\gamma}} \geq \kappa_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}} > 0$$

Por lo que se puede demostrar que

$$\mathcal{V}' = -2\kappa\zeta^2 \leq -2\kappa_{\min}\mathcal{V} < 0, \text{ para } \mathcal{V} \neq 0$$

Entonces,  $\mathcal{V}(t) \leq \exp(-2\kappa_{\min}t)\mathcal{V}(0)$ . Esto concluye la prueba. ■

**Prueba del Lema 1.3.** El observador (ec. (1.17)) se inicializa como  $\bar{\eta}(0) = 0$ . Entonces,  $e(0) = \eta(0)$ . Ahora, usando (1.11) se tiene

$$|\zeta(0)| \leq |H^T R(x(0), y(0))| + |\Delta\beta(\bar{T})| + |(\gamma - \bar{\gamma})u_{\max}|$$

Por lo que usando el hecho de que  $(x(0), y(0)) \in W' \subseteq D'_P$  y que la velocidad de reacción  $(R(x, y))$  es una función continua, implican que  $\zeta(0)$  pertenece a un conjunto acotado denominado  $W_\zeta \subset \mathbb{R}$ . ■

## 1.10 Bibliografía

- Alvarez, J., Suarez, R., & Sanchez, A. (1990). Nonlinear decoupling control of free radical polymerization continuous stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 45, 3341-3357.
- Alvarez, J., Alvarez-Ramirez, J., & Suarez, R. (1991). Nonlinear bounded control of continuous agitated tank reactor. *Chem. Eng. Sci.*, 46, 3235-3249.
- Alvarez-Ramirez, J., Suarez, R., & Femat, R. (1996). Control of continuous stirred tank reactors: Stabilization with unknown reaction rates. *Chem. Eng. Sci.*, 51, 4183-4188.
- Alvarez-Ramirez, J. (1999). Robust PI stabilization of a class of continuously stirred tank reactors. *AIChE J.*, 45, 1982-1990.
- Aris, R., & Amundson (1958). An analysis of chemical reactor stability and control. *Chem. Eng. Sci.*, 7, 121.
- Atassi, A.N., & Khalil, H.K. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44, 1672-1687.
- Brown, L.J., Gonyie, G., Schwber, E., & James, S. (1998). Non-linear PI control inspired by biological control. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1, 1040-1045.
- Chang, J.-S., & Liao, P.H. (1999). Molecular weight control of a batch polymerization reactor. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 38, 144-153.
- Christofides, P.D., Teel, A.R., & Daoutidis, P. (1996). Robust semi-global output tracking for nonlinear singularly perturbed systems. *Int. J. Contr.*, 65, 639-666.
- Daoutidis, P., Soroush, M., & Kravaris, C. (1990). Feedforward/feedback control of multivariable nonlinear processes. *AIChE J.*, 36, 1471-1484.
- Feinberg, M. (1987). Chemical reaction network structure and the stability of isothermal reactors-I. The deficiency zero and deficiency one theorems. *Chem. Eng. Sci.*, 29, 2229-2268.

- Fradkov, A., Ortega, R., & Bastin, G. (1997). Semiadaptive control of convexity parameterized systems with application to temperature regulation of chemical reactors. *Proc. IFAC-ADCHEM*, Banff, Canada, July.
- Gavalas, G.R. (1968). *Nonlinear Differential Equations of Chemical Reacting Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Grosdidier, P., Mason A., Aitolahti, A., Heinonen, P., & Vanhumaki, V. (1993). FCC unit regenerator-reactor control. *Comput. Chem. Eng.*, 17, 169-178.
- Jadot, F. (1996). *Dynamics and Robust Nonlinear PI Control of Stirred Tank Reactors*. Ph.D. thesis, CESAME, Universite Catholique de Louvain, Belgium.
- Kapoor, N., Teel, A. R., & Daoutidis, P. (1998). An anti-windup design for linear systems with input saturation. *Automatica*, 34, 559-567.
- Kapoor, N., & Daoutidis, P. (1999). An observer-based anti-windup scheme for non-linear systems with input constraints. *Int. J. Contr.*, 72, 18-29.
- Khandelakar, P.D., & Riggs, J.B. (1995). Nonlinear process model based control and optimization of a model IV FCC. *Comp. Chem. Eng.*, 19, 1153-1168.
- Kothare, M.V., Campo, P.J., Morari, M., & Nett, C.N. (1994). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30, 1869-1883.
- Kravaris, C., & Palanki, S. (1988). Robust nonlinear state feedback under structured uncertainty. *AIChE J.*, 34, 1119-1127.
- Lee, S.Y., Coronella, C.J., Bhadkamkar, A.S., & Seader, J.D. (1993). Modelling and temperature regulation of a thermally coupled reactor system vinternal model control strategy. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 32, 3029-3036.
- Massera, J.L. (1956). Contribution to stability theory. *J. Diff. Eq.*, 64, 182-206.
- Ratto, M. (1998). Theoretical approach to the analysis of PI-controlled CSTR's with noise. *Comp. Chem. Eng.*, 22, 1581-1593.
- Ray, W. H. (1982). New approaches to the dynamics of nonlinear systems with implications for process and control system design. *Chemical Process Control 2*, D. E. Seborg and T. F. Edgar, eds., United Engineering Trustees, New York, 245.
- Urretabizkaia, A., Leisa, J.R., & Asua, J.M. (1994). On-line terpolymer composition control in semicontinuous emulsion polymerization. *AIChE J.*, 40, 1850-1864.
- Viel, F., Buesvelle, E., & Gauthier, J.P. (1995). Stability of polymerization reactors using I/O linearization and a high-gain observer. *Automatica*, 31, 971-984.
- Viel, F., Jadot, F., & Bastin, G. (1997). Robust feedback stabilization of chemical reactors. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42, 473-481.

**Parte II**

**El control PID**

## Capítulo 2

# Control PID de reactores continuos con dinámica en el sistema de enfriamiento y grado relativo 2

### 2.1 Resumen

En esta parte del trabajo se diseña un controlador PID para una clase de reactores tipo RTAC con dinámica en el sistema de enfriamiento (JCRs<sup>1</sup>). Siguiendo ideas similares a las del capítulo anterior, se trabaja con funciones del error de modelado. La naturaleza de la dinámica del sistema (se trabaja con un sistema de grado relativo 2<sup>2</sup>), en conjunto con el uso de funciones del error de modelado y de observadores de orden reducido, provee la parametrización de un controlador clásico PID. Esta parametrización está directamente relacionada con el tamaño de la región de atracción y con el desempeño a lazo cerrado. En esta sección se presenta también una prueba de estabilización asintótica semiglobal, para el reactor químico controlado.

### 2.2 Introducción

La mayoría de los reactores químicos tipo tanque agitado con camisa de enfriamiento, que se usan en la industria, utilizan controladores tipo PID. Esto se debe a que mantienen los estándares de producción impuestos, a que su operación y mantenimientos son bien conocidos y a que una sintonización adecuada de ellos no solo cumple con los requerimientos de operación, sino que incluso los excede.

Por otro lado, a pesar de su efectividad probada en práctica y de su buen desempeño, los controladores tipo PID en sistemas no-lineales como lo son los JCR, algunos investigadores afirman que este tipo de controladores es inadecuado para trabajar con sistemas altamente no-lineales, ya que su diseño se basa en versiones linearizadas de las dinámicas del sistema, por lo que solo establecen resultados de estabilidad de tipo local (Kravaris & Kantor, 1990). Debido

---

<sup>1</sup>JCR: por sus siglas en inglés, "jacketed tank chemical reactors".

<sup>2</sup>Esto se refiere a que se necesita obtener la segunda derivada de la temperatura del reactor, para obtener de manera explícita la entrada de control.

a esto, distintos investigadores han tratado de obtener resultados no-locales en el control de JCR, para lo cual han desarrollado diferentes controladores usando la dinámica inversa del sistema, (Isidori, 1989; Kravaris & Kantor, 1990; Bequette, 1991; Russo & Bequette, 1997). Sin embargo y a pesar de que los controladores así diseñados cuentan con una fuerte base teórica que garantiza márgenes de robustez, su estructura es compleja, por lo que implantación e impacto en la industria no es algo que resulte evidente (Soroush & Kravaris, 1994).

Sumado a lo anterior, es sorprendente la falta de análisis rigurosos que validen este comportamiento. Y de hecho, los resultados de estabilidad que han sido reportados provienen de la teoría de control lineal, siendo entonces de naturaleza local. Desde este punto de vista, los resultados presentados en la literatura están lejos de ser concluyentes debido a la naturaleza no-lineal de los JCR, (p. ej., Russo & Bequette, 1997). Además, como la dinámica de los JCR es altamente incierta, lo cual se debe principalmente al modelamiento de la cinética de reacción y a los fenómenos de transferencia de calor, no queda claro cómo, este tipo de incertidumbres, afecta el desempeño y la estabilidad no-local de los controladores PID.

Por otro lado, el análisis de estabilidad se encuentra obstaculizado por que no se sabe como acotar los términos no-locales en función del sistema y por que no se sabe como se encuentra parametrizado un controlador tipo PID en función de la teoría de control moderno. Lo cual repercute en la dificultad para derivar resultados de estabilidad no-local para este tipo de controladores.

Entonces, se puede observar que existe la necesidad de diseñar controladores que presenten propiedades de estabilidad no-local, que sean fáciles de implantar y que tengan un significado físico del proceso. Bajo este marco de referencia, en este capítulo se presenta un resultado de estabilización semi-global y asintótica de reactores tipo JCR actuando bajo un controlador tipo PID. En otras palabras, se prueba que para un conjunto de condiciones iniciales denominado  $\Sigma$  existe un controlador tipo PID que dirige las trayectorias de un reactor tipo JCR hacia un punto de operación impuesto y que lo hace de forma asintóticamente estable<sup>3</sup> en un dominio que contiene al conjunto  $\Sigma$ .

La metodología del trabajo se describe en 4 pasos como:

- (1) Diseño de un controlador con salida retroalimentada usando el concepto del error de modelado.
- (2) Demostrar que la estructura del controlador diseñado corresponde a un controlador tipo PID.
- (3) Describir la dinámica del sistema a lazo cerrado como un sistema no-lineal singularmente perturbado, para lo cual se va hacer uso de la estructura del controlador PID.
- (4) Usar resultados de la teoría de sistemas no-lineales singularmente perturbados (Hoppensteadt, 1974; Esfandiari & Khalil, 1992; Christofides & Teel, 1996), para demostrar estabilidad semi-globalmente asintótica, en el sistema de estudio.

En este capítulo se explica de manera teórica, los resultados prácticos que se obtienen en el uso de controladores PID en la industria para el control de sistemas no-lineales, como lo

---

<sup>3</sup>Para dudas sobre este concepto, revisar en la parte final de herramientas.

son los reactores tipo JCR. Debe recalcar que estos resultados fueron obtenidos al trabajar con un modelo no-lineal, por lo que las propiedades de estabilidad local de un controlador PID proveniente de un modelo lineal son una derivación del resultado principal.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se describe el modelo dinámico del JCR, se establecen las suposiciones hechas para el diseño del controlador y se define el problema de control. En la Sección 3 se diseña un control retroalimentado bajo la suposición de un modelo "perfecto". En la Sección 4 se diseña un controlador PID robusto. En la Sección 5 se presenta el análisis de estabilidad. En la Sección 6 se ilustra el comportamiento del controlador diseñado. Por último, en la Sección 7 se presentan algunas conclusiones preliminares.

## 2.3 La dinámica de un JCR y el problema de control

Para el diseño de un controlador tipo PID, se va considerar la dinámica de un reactor con camisa de enfriamiento (JCR), el cual puede representarse por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \theta(c^{in} - c) + Er(c, T) \\ \dot{T} &= \theta(T^{in} - T) + H^T r(c, T) + \gamma_1(T_j - T) \\ \dot{T}_j &= (u/V_j)(T_j^{in} - T_j) - \gamma_2(T_j - T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde:

- .  $c \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de las concentraciones de las sustancias químicas dentro del reactor
- .  $T \in \mathbb{R}$  es la temperatura del reactor<sup>4</sup>
- .  $T_j \in \mathbb{R}$  es la temperatura de la camisa de enfriamiento.
- .  $r(c, T) \in \mathbb{R}^m$  es el vector que contiene las velocidades de reacción
- .  $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , es la matriz de coeficientes estequiométricos
- .  $H \in \mathbb{R}^m$  es el vector que contiene los calores de reacción
- .  $\theta$  es la tasa de dilución
- .  $\gamma_1 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$  son el coeficiente de transferencia de calor del reactor y de la camisa de enfriamiento, respectivamente
- .  $V_j$  es el volumen de la camisa de enfriamiento.

La entrada de control va a ser tomada como el flujo de entrada al sistema de enfriamiento.

Al igual que en el capítulo anterior existen una serie de suposiciones que son establecidas, para definir el problema de control.

*Suposiciones:*

---

<sup>4</sup>Las siglas "in" denotan las condiciones de entrada al sistema.

**Suposición 2.1** Existe un vector positivo definido  $\omega \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\omega^T E = 0$  y donde  $C_p \stackrel{def}{=} \{c \in \mathbb{R}^n; \omega^T(c^{in} - c) \leq 0, c_i \geq 0, 1 < i < n\}$  es el dominio de las concentraciones  $c$ , el cual es un conjunto acotado.

**Suposición 2.2**  $r(c, 0) = 0$  y  $\|r(c, T)\| < \rho < \infty$ , para  $\rho \in c$  y  $T \in \mathbb{R}_{\geq 0} \stackrel{def}{=} \{T \in \mathbb{R} : T \geq 0\}$ .

**Suposición 2.3** La dinámica isotérmica  $\dot{c} = \theta(c^{in} - c) + Er(c, \bar{T})$  es asintóticamente globalmente estable.

**Suposición 2.4** Los flujos  $(\theta, u)$  y las temperaturas del sistema  $(T, T_{in}, T_j, T_j^{in})$  son medidos.

**Suposición 2.5** El flujo del sistema de enfriamiento está restringido a tomar valores en el intervalo  $[u_{\min}, u_{\max}]$ , de manera que la entrada de control nominal  $(\bar{u} = \gamma_2 V_j (\bar{T}_j - \bar{T}) / (T_j^{in} - \bar{T}_j))$  esta acotada entre  $0 \leq u_{\min} < \bar{u} < u_{\max}$ .

Se puede observar que excepto la Suposición 2.4, las demás suposiciones han sido detalladas en el capítulo anterior, sin embargo y como parte instrumental del análisis son señaladas otra vez.

Por otro lado, en la ec. (2.1) se puede observar que el mapa de realización  $u \rightarrow T$  es de grado relativo 2, lo cual en conjunto con la Suposición 2.3 (suposición de fase mínima), permite replantear el problema de control de una manera simple como sigue: *dadas las Suposiciones 2.1-2.5, diseñar un una ley de control PID que regule la temperatura  $(T(t))$  del reactor JCR en un punto de operación  $(\bar{T})$  dado, manipulando el flujo del sistema de enfriamiento.*

Una vez establecidas las suposiciones para el diseño de un control PID robusto, en la siguiente Sección se establece la técnica de diseño.

## 2.4 Diseño de un controlador retroalimentado

En esta sección se muestran algunos resultados de estabilidad del JCR (ec. (2.1)) bajo una ley de control saturada inversa, también conocida como un control linealizado entrada-salida<sup>5</sup> (Kravaris & Kantor, 1990; Alvarez, Alvarez-Ramirez, & Suarez, 1991; Soroush & Kravaris, 1992, 1994).

Entonces, bajo la suposición de que el modelo (2.1) no es incierto, primero se va a considerar un cambio de coordenadas para facilitar el manejo de las ecuaciones como:  $(\varsigma, z) = \Phi(c, T, T_j)$ , donde  $\varsigma \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}^2$ , y

$$\begin{aligned} \varsigma &= c - \bar{c} \\ z_1 &= T - \bar{T} \\ z_2 &= \Phi_3(c, T, T_j) \stackrel{def}{=} \theta(T_{in} - T) + H^T r(c, T) + \gamma_1(T_j - T) \end{aligned} \tag{2.2}$$

<sup>5</sup>También conocida por sus siglas en inglés como input/output linearizing control.

En donde el mapa  $\Phi$  define el cambio de coordenadas  $(\varsigma, z)$  y de hecho la inversa de este mapa,  $(c, T, T_j) = \Phi^{-1}(\varsigma, z)$  esta dada como:

$$\begin{aligned} c &= \varsigma + \bar{c} \\ T &= z_1 + \bar{T} \\ T_j &= \Phi_3^{-1}(c, T, T_j) = [z_2 - \theta(T^{in} - z_1 - \bar{T}) - H^T R(\varsigma, z_1) + \gamma_1(z_1 + \bar{T})]/\gamma_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $R(\varsigma, z_1) = r(\varsigma + \bar{c}, z_1 + \bar{T})$ . Utilizando este cambio de coordenadas, el modelo (2.1) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f(z, \varsigma) + g(z, \varsigma)u \\ \dot{\varsigma} &= \chi_1(z, \varsigma) \end{aligned} \quad (2.4)$$

en el cual

$$\begin{aligned} \chi_1(z, \varsigma) &= \theta(c_{in} - \varsigma - \bar{c}) + ER(\varsigma, z_1) \\ f(z, \varsigma) &= -(\theta + \gamma_1)\chi_2(z, \varsigma) + H^T [\partial_\varsigma R(\varsigma, z)\chi_1(z, \varsigma) + \partial_{z_1} R(\varsigma, z)z_2] \\ &\quad - \gamma_1\gamma_2[\Phi_3^{-1}(\varsigma, z) - z_1 + \bar{T}] \\ \chi_2(z, \varsigma) &= \theta(T^{in} - z_1 - \bar{T}) + H^T R(\varsigma, z_1) + \gamma_1[\Phi_3^{-1}(\varsigma, z) - z_1 + \bar{T}] \\ g(z, \varsigma) &= (\gamma_1/V_j)[T_j^{in} - \Phi_3^{-1}(\varsigma, z)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Además, de (2.5) se tiene que  $\chi_1(0, 0) = 0$ . Debido al cambio de coordenadas el dominio de atracción se traslada a un nuevo dominio  $D_{TP} = C' \times (\mathbb{R}_{\geq 0} - \bar{T}) \times (\Phi_3^{-1} \circ \mathbb{R}_{\geq 0})$ , donde  $C' = C - \bar{c}$ . Puede notarse que con el cambio de coordenadas el origen corresponde a un punto de equilibrio de (2.5) cuando  $u = \bar{u}$ , por lo que el problema de control consiste ahora en estabilizar la temperatura del reactor  $z_1$  en el origen.

Ahora, para el diseño del controlador se usará la siguiente función

$$u^{id} = Sat[\vartheta(z, \varsigma)] \quad (2.6)$$

donde  $\vartheta(z, \varsigma)$  es el control inverso retroalimentado, de (2.4)

$$\vartheta(z, \varsigma) = [-f(z, \varsigma) + Kz]/g(z, \varsigma) \quad (2.7)$$

y el término  $Sat$  corresponde a la saturación de la entrada de control tal que  $Sat : \mathbb{R} \rightarrow [u_{\min}, u_{\max}]$  es una función  $C^1$  y  $K = (K_1 K_2) \in \mathbb{R}^2$  es el vector que contiene las ganancias del controlador, de manera que la matriz de controlabilidad

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

es Hurwitz. Además, en una vecindad del origen  $B_0$ , se tiene que  $u^{id} = \vartheta(z, \varsigma)$ , para todo  $(z, \varsigma) \in B_0$ . Por lo tanto, el sistema a lazo cerrado (2.4), (2.6), se convierte en

$$\dot{z} = A_c z \quad (2.9)$$

$$\dot{\varsigma} = \chi_1(z, \varsigma)$$

para todo  $(z, \varsigma) \in B_0$ . Para usar una notación más compacto, se define un vector de estados  $x \stackrel{def}{=} (z, \varsigma)^T \in \mathbb{R}^{n+2}$ , por lo que el sistema a lazo cerrado (ecs. (2.4), (2.6)), puede escribirse como

$$\dot{x} = F_0(x) \quad (2.10)$$

donde

$$F_0(x) = \begin{bmatrix} z_2 \\ f(x) + g(x) \text{Sat}[\vartheta(x)] \\ \chi_1(x) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Para establecer las condiciones de estabilidad del sistema (2.4), se sabe que de acuerdo al Lema A.1 en (Viel et al., 1997) el sistema (2.4) bajo la acción del controlador (2.6), (2.7) contiene al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable. Por otro lado, el resultado más importante de este capítulo, muestra que la estabilidad asintótica al origen del sistema (2.10), implica la existencia de una base de atracción al origen. Al aplicar teoremas conversos de Lyapunov (Massera, 1956), se sabe que existe un dominio máximo de atracción  $\Delta_x \subseteq D_{TP}$  que contiene al origen y una función de Lyapunov  $V(x) : \Delta_x \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , tal que  $V(0) = 0$  y que la derivada a lo largo de las trayectorias de la función de Lyapunov,  $\langle \partial_x V, F_0(x) \rangle$ , es negativa para todo  $x \in \Delta_x \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\Delta_x \subseteq D_{TP}$  es la base de atracción al origen del JCR (1) bajo la acción del control inverso (2.6), (2.7). Por lo que todas las trayectorias del sistema a lazo cerrado (2.4), (2.6), contenidas en el dominio  $\Delta_x$  convergen de manera asintótica al origen. Es más, si  $D_{TP} \subseteq \Delta_x$ , entonces, se dice que el JCR controlado es globalmente asintóticamente estable con respecto al dominio físico  $D_P$ . En otras palabras, se desea que el reactor JCR bajo la ley de control (2.6) sea al menos asintóticamente estable al origen bajo cierto dominio de atracción, por otro lado, si el dominio de atracción está contenido en todo el espacio de funciones, la estabilidad asintótica será global.

Con respecto al controlador desarrollado en esta sección se tienen algunos inconvenientes para su implantación en la industria, debido a que existen incertidumbres en el modelo de referencia (ec. (2.1)), en relación con los fenómenos de transferencia de calor y al modelado de la cinética. Como se desea trabajar con un controlador que sea eficiente y que en las peores circunstancias de trabajo (desconocimiento total de la cinética, p. ej.) sea capaz de mantener las variables controladas de manera eficiente, ya que por supuesto, esto implica disminución en los costos de producción, en la siguiente sección se procede a desarrollar un controlador PID robusto.

## 2.5 Diseño de un Control PID Robusto

En esta sección se presenta el diseño de un controlador PID robusto, el cual se basa en la aglomeración del error de modelado en una función dependiente del tiempo y en la estimación de este error de modelado (Alvarez-Ramirez, 1999).

Para el diseño del controlador tipo PID, se van a tomar valores nominales de los coeficientes de transferencia de calor en el reactor y en el sistema de enfriamiento, por lo que  $\bar{\gamma}_1 > 0$  y  $\bar{\gamma}_2 > 0$ , van a ser los estimados de  $\gamma_1 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$ , respectivamente. Por lo tanto en las nuevas coordenadas (ec. (2.4)), se tiene que  $g(x) \equiv (\gamma_1/V_j)(T_j^{in} - T_j)$  va a ser sustituida por un

estimado definido como  $\bar{g}(x) \stackrel{def}{=} \bar{g}(T_j) = (\bar{\gamma}_1/V_j)(T_j^{in} - T_j)$ . Además, como la medición de la concentración en línea no es frecuente en la industria y genera retardos, se va a considerar el caso extremo en donde el vector de las velocidades de reacción  $R(\varsigma, z)$  es totalmente desconocido. Sin embargo, siempre puede existir un valor nominal del vector de la velocidad de reacción  $\bar{R}(\varsigma, z)$  disponible que puede incorporarse en el diseño del controlador robusto. Por otro lado, de (2.4) se observa también la necesidad de un estimado de la función  $f(x)$ , la cual puede ser dividida en dos partes, como  $f(x) = \bar{f}(T, T_j) + \Delta f(x)$ , tal que

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= -\Delta\gamma_1\chi_2(z, \varsigma) + H^T[\partial_\varsigma R(\varsigma, z)\chi_1(z, \varsigma) + \partial_z R(\varsigma, z)z_2] \\ &\quad -\Delta\gamma_1\Delta\gamma_2[\Phi_3^{-1}(\varsigma, z) - z_1 + \bar{T}] \\ \Delta\gamma_1 &= \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, \quad \Delta\gamma_2 = \gamma_2 - \bar{\gamma}_2\end{aligned}$$

corresponde a la parte desconocida y

$$\begin{aligned}\bar{f}(T, T_j) &= -(\theta + \bar{\gamma}_1)[\theta(T^{in} - z_1 - \bar{T}) + \bar{\gamma}_1(\Phi_3^{-1}(\varsigma, z) - z_1 - \bar{T})] \\ &\quad -\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2(\Phi_3^{-1}(\varsigma, z) - z_1 - \bar{T}) \\ &= -(\theta + \bar{\gamma}_1)[\theta(T^{in} - T) + \bar{\gamma}_1(T_j - T)] - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2(T_j - T)\end{aligned}$$

es la parte conocida. Bajo estas condiciones de diseño, se va a definir la función del error de modelado como

$$\eta(x, u) \stackrel{def}{=} \Delta f(x) + \Delta g(x)u \quad (2.12)$$

donde  $\Delta g(x) = g(x) - \bar{g}(T_j)$ . De acuerdo a la función del error de modelado (ec. (2.12)), el sistema (2.4) puede re-escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \bar{f}(T, T_j) + \eta(x, u) + \bar{g}(T_j)u \\ \dot{\varsigma} &= \chi_1(z, \varsigma)\end{aligned} \quad (2.13)$$

De la ec. (2.12) puede observarse que la función del error de modelado  $\eta(x, u)$  contiene las incertidumbres contenidas en el mapa entrada-salida  $u \rightarrow T - \bar{T}$ . Por otro lado el cambio de coordenadas  $(\varsigma, z) = \Phi(c, t, T_j)$  en conjunto con la definición de  $z_2 = \theta(T^{in} - T) + H^T r(c, T) + \gamma_1(T_j - T)$ , involucran funciones y parámetros inciertos, lo cual obstruye la causalidad de un controlador de dinámica inversa, ya que el error de modelado  $\eta(x, u)$  es desconocido y  $z_2$  no es un estado medido. Por lo tanto se observa la necesidad de diseñar un controlador robusto.

Para evitar este tipo de obstrucciones en el diseño de una ley de control para el JCR, se usarán señales estimadas, por lo que  $\eta(x, u)$  y  $z_2$  deben ser observables.

Como  $\eta(x, u)$  y  $z_2$  dependen de señales medidas como  $(\theta, u)$  y  $(T, T^{in}, T, T_j)$ , entonces pueden ser reconstruidas a partir de ellas, mediante observadores que reconstruyan a estas señales y el uso de sus estimados  $(\bar{\eta}(x, u), \bar{z}_2)$  para diseñar un control de tipo dinámica inversa.

Por lo tanto se introduce el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_2 &= \bar{f}(T, T_j) + \bar{\eta} + \bar{g}(T_j)u + 2L(z_2 - \bar{z}_2) \\ \dot{\bar{\eta}} &= L^2(z_2 - \bar{z}_2)\end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $L$  es un parámetro de diseño. Con los valores estimados de  $\eta(x, u)$  y  $z_2$  se obtiene un controlador de tipo dinámica inversa definido como:

$$u = \text{Sat}[F(\bar{z}, \bar{\eta})] \quad (2.15)$$

donde

$$F(\bar{z}, \bar{\eta}) = [-\bar{f}(T, T_j) - \bar{\eta} + K\bar{z}]/\bar{g}(T_j) \quad (2.16)$$

y  $\bar{z}_1 \equiv z_1$ . El observador (2.14) depende de la señal  $z_2$ , la cual no es medida, sin embargo de la estructura del sistema transformado (ec. (2.13)) se sabe que  $z_2 = \dot{z}_1$ , por lo que el observador (2.14) puede re-escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_2 &= \bar{f}(T, T_j) + \bar{\eta} + \bar{g}(T_j)u + 2L(\dot{z}_1 - \bar{z}_2) \\ \dot{\bar{\eta}} &= L^2(\dot{z}_1 - \bar{z}_2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para evitar el uso de observadores en (2.17) se introducen dos nuevas variables denominadas  $\omega_1 = \bar{z}_2 - 2Lz_1$  y  $\omega_2 = \bar{\eta} - L^2z_1$ . Por lo que el observador puede verse como

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \bar{f}(T, T_j) + (\omega_2 + L^2z_1) + \bar{g}(T_j)u - 2L(\omega_1 + 2Lz_1) \\ \dot{\omega}_2 &= -L^2(\omega_1 + 2Lz_1) \\ \bar{z}_2 &= \omega_1 + 2Lz_1 \\ \bar{\eta} &= \omega_2 + L^2z_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

que es un observador de orden reducido; como  $z_1$  depende solamente de señales medidas ( $z_1 = T - \bar{T}$ ) y  $z_2, \eta$  son señales desconocidas, entonces el observador (2.18) puede inicializarse como  $\omega_1(0) = -2Lz_1(0)$  y  $\omega_2(0) = -L^2z_1(0)$ .

Debido a la estructura del controlador basado en el observador (2.17), se resaltan los siguientes hechos:

1. El controlador (2.14)-(2.16) es una especie de controlador adaptable. Aunque a diferencia de lo que tradicionalmente se hace en control adaptable, la adaptación no se hace en parámetros sino en señales, como es el caso de la función del error de modelado  $\eta(t)$ .
2. La estructura del controlado diseñado (ecs. (2.14)-(2.16)), se obtiene al calcular la función de transferencia, para lo cual se define a  $u^c \stackrel{\text{def}}{=} F(\bar{z}, \bar{\eta})$  como el control calculado, entonces de ecuaciones (2.16) y (2.18), se obtiene,

$$\bar{\eta} = \frac{L^2(p^2 - K_2p - K_1)}{p(p - K_2 + 2L)}z_1 - \frac{\bar{g}(T_j)L^2}{p(p - K_2 + 2L)}(u - u^c)$$

y

$$\bar{z}_2 = \frac{K_1 + 2Lp}{p - K_2 + 2L}z_1 + \frac{\bar{g}(T_j)}{p - K_2 + 2L}(u - u^c)$$

donde  $p = d/dt$ . Utilizando las expresiones anteriores en (2.16), se puede demostrar que

la entrada de control queda representada como:

$$u^c = -\frac{\bar{f}(T, T_j)}{\bar{g}(T_j)} + \bar{g}(T_j)^{-1} C_{PID}(p) F_1(p) [-z_1] + G_{ARW}(p) [u - u^c] \quad (2.19)$$

donde  $C_{PID}(p)$  corresponde a un controlador clásico tipo PID, con ganancias proporcional, integral y derivativa como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{-(2LK_1 + L^2K_2)}{(2L - K_2)} \\ K_I &= \frac{-K_1L^2}{(2L - K_2)} \\ K_D &= \frac{-(K_1 - L^2 + 2LK_2)}{(2L - K_2)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

mientras que el término  $F_1(p) = [\tau_f p + 1]^{-1}$  es un filtro de primer orden cuya constante de tiempo es  $\tau_f = [2L - K_2]^{-1} > 0$  y por último, el término  $G_{ARW}$  es un operador para prevenir saturaciones en la entrada de control  $u$ , denominado por sus siglas en inglés “antireset windup” (*ARW*) y equivale a

$$G_{ARW} = \frac{K_2 p + L^2}{p(p - K_2 + 2L)} \quad (2.21)$$

Se observa que la estructura del controlador corresponde a un controlador clásico PID con un término adicional de precompensación  $-\bar{f}(T, T_j)/\bar{g}(T_j)$ , más un esquema retroalimentado de manera natural denominado *ARW*. Este último término actúa cuando existe diferencia entre la entrada de control y el control calculado, es decir, que cuando el control se encuentra saturado, la señal  $G_{ARW}(p)[u - u^c]$  lleva a cero la diferencia entre  $u - u^c$  al recalcular  $u^c$ , de tal forma que el control calculado sea igual al límite de saturación. Esta acción previene el fenómeno de “wind up” o de saturación del controlador (Kothare et al., 1994). Cuando el control no está saturado, entonces  $u = u^c$  y el operador de *ARW* no tiene efecto en el esquema de control.

Se ha mostrado que el esquema de control propuesto posee una estructura de PID clásico, con una “frecuencia de alta ganancia” variante en el tiempo ( $\bar{g}(T_j)$ ) que compone el término  $-\bar{f}(T, T_j)/\bar{g}(T_j)$ , denominado “dc-bias”. Se puede observar que si  $\bar{f}(T, T_j) = 0$  y  $\bar{g}(T_j) = \text{constante}$ , esto da paso a una ley convencional lineal tipo PID denominada  $g_{HF} C_{PID}(p) F_1(p) [-z_1]$ , para  $g_{HF} > 0$ .

Una vez expuesta la estructura de la ley de control aquí diseñada, en la siguiente sección se muestra que este controlador tipo PID (ecs. (2.14)-(2.16)) exhibe estabilidad no-local en el JCR controlado.

## 2.6 Análisis de estabilidad

Una vez diseñado un controlador tipo PID con estimación de incertidumbres para el JCR (ec. (2.1)), se procederá realizar un análisis de estabilidad que demuestre el funcionamiento de este

controlador y sus limitaciones. Para esto se escribirá el sistema a lazo cerrado en un conjunto de coordenadas que faciliten el análisis. A continuación se definen los errores de estimación escalados como:

$$\begin{aligned} e_1 &= L(z_2 - \bar{z}_2) \\ e_2 &= \eta - \bar{\eta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En estas nuevas coordenadas se re-escribe la entrada de control, entonces, combinando (2.12), (2.15) y (2.16) se tiene que:

$$u = Sat[\varphi(x, e, u)] \quad (2.23)$$

donde

$$\varphi(x, e, u) \stackrel{\text{def}}{=} (-f(x) - \Delta g(x)u + Kz + L^{-1}K_2e_1 + e_2)/\bar{g}(T_j)$$

Antes de continuar con el análisis de estabilidad, puede observarse que bajo el cambio de coordenadas propuesto, la entrada de control depende de sí misma, lo cual implica un problema en el análisis de estabilidad. Para evitarlo se puede escoger una función de saturación apropiada, como la que se enuncia a continuación.

**Lema 2.1** Si  $\gamma_1^{\max}$  es una cota máxima del coeficiente de transferencia de calor  $\gamma_1$  y además si  $\bar{\gamma}_1 \geq \gamma_1^{\max}$ . Entonces, para cualquier función de saturación con derivada acotada por uno, es decir

$$\left| \frac{dSat(s)}{ds} \right| \leq 1, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

existe una función diferenciable ( $C^1$ ) denominada  $\Theta_{Sat}(x, e)$  que resuelve la ecuación (2.23).

**Prueba.** Ver el Apéndice 2. ■

De acuerdo al Lema anterior, la función de control (2.16), (2.17) puede escribirse como  $u = \Theta_{Sat}(x, e)$ . Con esto se puede establecer una conexión entre el control tipo PID (ecs. (2.14), (2.15)) y el control saturado inverso (ecs. (2.6), (2.7)). De hecho, se puede demostrar que la ley de control tipo PID robusto (2.15), (2.16) es una representación alternativa de la ley de control inverso cuando  $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ . Esta propiedad es de gran importancia para la demostración de la estabilidad del JCR bajo el control PID propuesto. Lo cual nos lleva a enunciar el siguiente resultado.

**Lema 2.2** La ley tipo PID robusta es igual a la ley de control saturada inversa cuando los errores de estimación son cero, es decir,  $\Theta_{Sat}(x, 0) = Sat[\vartheta(x)]$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ .

**Prueba.** Ver el Apéndice 2. ■

Una vez establecido el resultado al que se desea llegar y las herramientas que se van a utilizar para lograrlo, a continuación lo que procede es describir la dinámica a lazo cerrado del JCR bajo la acción del controlador PID robusto propuesto en función de los errores de estimación

como<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_0(x) + B_1[\Theta_{Sat}(x, e) - \Theta_{Sat}(x, 0)], \\ \dot{e} &= LA_e(\kappa(x, e))e + B_2\Gamma(x, e)\end{aligned}\tag{2.25}$$

donde  $\kappa(x, e) \stackrel{def}{=} Sat'(\varphi(x, e))(\gamma_1/\bar{\gamma}_1)$  y

$$A_e(\kappa(x, e)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\kappa(x, e) & 0 \end{bmatrix}$$

En esta parte del análisis de estabilidad vale mencionar que, el sistema a lazo cerrado ha sido estudiado para el conjunto de soluciones con condiciones iniciales de  $x(0) \in \mathbb{R}^{n+2}$  contenidas en el conjunto compacto  $\Delta_x \subseteq D_{TP}$ . Además como las condiciones iniciales del observador de orden reducido (ec. (2.18)) son  $w_1(0) = -2Lz_1(0)$  y  $w_2(0) = -2L^2z_1(0)$ , entonces las condiciones iniciales en los errores de estimación son  $e(0) \in \mathbb{R}^2$ , las cuales están contenidas en un conjunto denominado  $\Delta_e \subseteq \mathbb{R}^2$ . Por lo que se van a estudiar las soluciones del sistema (2.25) contenidas en el conjunto  $\bar{\Delta}_x \times \bar{\Delta}_e$ . Se desea entonces que tanto las trayectorias del reactor ( $x$ ) como las del error de estimación ( $e$ ) tiendan al origen escogiendo el factor de diseño  $L$  lo suficientemente grande, de manera que el efecto de la función desconocida  $F(x, e)$  sea nulo en el control del JCR. Puesto el problema de estabilización de esta manera, el sistema (2.25) puede verse como un sistema no-lineal singularmente perturbado (Hoppensteadt, 1974) donde  $L^{-1}$  es el parámetro pequeño,  $x \in \mathbb{R}^{n+2}$  es la variable lenta y  $e \in \mathbb{R}^2$  es la variable rápida. Entonces, para demostrar la estabilidad del sistema a lazo cerrado bajo el control tipo PID diseñado, se van a analizar las propiedades de estabilidad de los sistemas lento y rápido, que como ya se mencionó, corresponden a la dinámica del error de estimación ( $e$ ) y de los estados del JCR ( $x$ ), respectivamente. Ahora bien, se sabe que el modelo del sistema lento (ec. (2.10),  $\dot{x} = F_0(x)$ ) es asintóticamente estable con la base de atracción  $\Delta_x \in \mathbb{R}^{n+2}$ . Mientras que el modelo del sistema rápido esta dado por

$$e' = A_e(\kappa(x, e))e,\tag{2.26}$$

donde  $e'$  es la derivada de  $e$  con respecto al tiempo escalado  $t' \stackrel{def}{=} Lt$ .

Visto de esta manera, el sistema a lazo cerrado esta compuesto por la dinámica de los errores de estimación (sistema rápido) y por la dinámica de las trayectorias del JCR (sistema lento), interconectados ambos por el parámetro  $L$ . Lo cual significa que la dinámica del error de estimación debe ser más rápida que la dinámica de los estados del sistema, en otras palabras, que antes de estabilizar el reactor, se deben estimar el error de modelado y la primera derivada de la temperatura del reactor, de manera que cuando el control sea calculado las tenga disponibles para llevar al JCR al punto de operación deseado por el controlador PID diseñado, a pesar de las incertidumbres del modelo y usando únicamente las medidas de temperatura del sistema, lo cual es el objetivo de este capítulo.

Ahora se va a proceder a demostrar la estabilidad del sistema rápido (ec, (2.26)). Lo cual se enuncia en el siguiente lema.

---

<sup>6</sup>Para detalles ver el Apéndice 2.

**Lemma 2.3** Asumiendo que  $\bar{\gamma}_1 \geq \gamma_1^{\max}$ . Se dice que el sistema rápido (2.26) es cuadráticamente-asintóticamente estable. Es decir, que existe una función de Lyapunov  $V_e(e) = eP_e e$ , con  $P > 0$ , tal que  $V_e(e)$  es una función de Lyapunov del sistema rápido (2.26).

**Prueba.** Ver el apéndice 2. ■

Como una consecuencia de los lemas 2.1-2.3, el principal resultado de esta parte se deriva como una aplicación directa del Teorema 2 de Hoppensteadt (Hoppensteadt, 1974) y se enuncia a continuación:

**Teorema 2.1** Bajo las Suposiciones 2.1-2.5, para cualquier conjunto compacto  $\Sigma$  contenido en el interior de  $\Delta_x$ , existe un número positivo  $L_{\min}$  tal que para todo  $L > L_{\min}$ , el sistema a lazo cerrado (2.1) y (2.14)-(2.16) contiene el punto de operación  $(\bar{c}, \bar{T}, \bar{T}_j) \in D_p$  como un punto de equilibrio asintóticamente estable con una base atracción conteniendo al conjunto  $\Sigma$ .

Como segunda consecuencia del Teorema 2 de Hoppensteadt (1974) (ver también Esfandiari & Khalil, 1992), se encuentra relacionado la recuperación del desempeño derivada de la ley de control inversa saturada (ecs. (2.6), (2.7)), que a continuación se enuncia como un corolario al Teorema 2.1.

**Corolario 2.1** Para todas las condiciones iniciales en  $\Delta_x$ , se sabe que

$$x(t, L) \rightarrow x^*(t), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

uniformemente en  $t$  y  $L$ , para todo  $t < 0$ , donde  $x^*(t)$  es la solución del sistema lento  $\dot{x} = F_0(x)$  y  $x(t, L)$  es la solución del sistema perturbado (2.25).

Los resultados anteriores conducen a la siguiente discusión.

**Discusión:**

- (1) De manera general, el resultado presentado en el Teorema 2.1 establece que el controlador tipo PID (2.14)-(2.16) puede recobrar la base de atracción  $\Delta_x$  que es inducida por la ley de control inverso (2.6), (2.7). Esto significa que todas las trayectorias que comiencen en cualquier dominio compacto  $\Sigma$  contenido en  $\Delta_x$ , pueden ser estabilizadas mediante un controlador PID. Desde el punto de vista de la teoría de control moderno (Christofides et al., 1996; Teel & Praly, 1995), se dice que el controlador PID (2.14)-(2.16) es robusto y estabiliza de manera semi-global y asintótica al JCR (2.1).
- (2) En el caso de que  $\bar{f}(T, T_j) = 0$  y  $\bar{g}(T_j) = cte.$ , se obtendría la ley de control lineal tipo PID  $g_{HF}C_{PID}(p)F_1(p)[-z_1]$ , donde el valor de la ganancia de alta frecuencia  $g_{HF} > 0$  puede establecerse siguiendo el procedimiento hecho en esta parte del trabajo. Por lo que el caso del controlador PID lineal puede establecerse como un corolario de los resultados anteriores. Esto es significativo, porque tradicionalmente se ha establecido que un controlador PID no es adecuado para sistemas no-lineales, ya que este ley de control sólo presenta resultados de estabilidad local. (Kravaris & Kantor, 1990).

- (3) El Corolario 2.1 establece que el desempeño inducido por la ley de control ideal (2.6), (2.7) es recobrado por la ley de control (2.14)-(2.16) cuando la primera derivada de la temperatura ( $z_2$ ) y el error de modelado ( $\eta$ ) son estimados de manera rápida. Estó también incluye la recuperación de la base de atracción  $\Delta_x$  (Teorema 2.1) y de las trayectorias ( $x^*(t)$ ) inducidas por la ley exacta de control inverso (2.6), (2.7).
- (4) En el diseño del controlador propuesto se incluyó una función de saturación  $Sat : \mathbb{R} \rightarrow [u_{\min}, u_{\max}]$  para satisfacer las restricciones físicas del sistema. Por otro lado, es claro que el diseño del observador (2.14) coloca los valores propios del sistema rápido  $\dot{e} = LA_e(\kappa(x, e))e$  en una razón de  $\mathcal{O}(L^{-1})$ , de tal manera que se aproximan al infinito cuando  $L \rightarrow 0$ .

De manera general, el colocar los polos de un sistema en el plano izquierdo del plano ocasiona un sobredisparo conocido como el fenómeno de “peaking” (o de alta ganancia) (Sussman & Kokotovic, 1989). En el presente trabajo, este fenómeno puede ser descrito en función del factor de escalamiento  $L$  de la ecuación (2.22) (Esfandiari & Khalil, 1992). El fenómeno de sobredisparo es un comportamiento no deseado en el control de un sistema, ya que puede causar deterioro del desempeño del sistema y entradas de control no realizables. Cuando un controlador está globalmente acotado el fenómeno de “peaking” es generalmente despreciable. Mediante la utilización de funciones de saturación (p. ej.,  $B_1[\Theta_{Sat}(x, e) - \Theta_{Sat}(x, 0)]$  se tiene un controlador globalmente acotado con respecto al error de estimación escaldo  $e$ ). En este trabajo se supuso que la entrada de control esta sujeta a saturaciones, lo que induce, de manera natural, la propiedad de acotación global. Sin embargo, la saturación de la entrada de control no es el único recurso para reducir el fenómeno de sobredisparo. También existe un procedimiento desarrollado por Christofides (2000) que es eficiente y que consiste en saturar los estados estimados, lo cual también elimina sobredisparos. Este método también provee al JCR controlado estabilidad semi-global al JCR como la descrita en el Teorema 2.1.

- (5) Por otro lado se sabe que los parámetros del JCR, tales como  $T^{in}$ ,  $c^{in}$ ,  $\theta$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , son variantes en el tiempo. En este caso se pueden usar los resultados obtenidos por Christofides y Teel (1996) para determinar las propiedades de estabilidad del JCR controlado mediante un PID. Dichas propiedades de estabilidad pueden establecerse de manera similar a la del Teorema 2.1, exceptuando el hecho de que existirá un pequeño error o sesgo en la estimación y regulación de los estados, aún para perturbaciones con derivadas acotadas siempre y cuando el parámetro  $L > 0^7$  sea suficientemente grande. A esta propiedad se le conoce como “estabilidad total” del controlador PID con respecto a perturbaciones variantes en el tiempo.

Una vez establecido el análisis de estabilidad y los límites de su comportamiento es posible determinar una sintonización adecuada de los parámetros del controlador y del observador, de manera que el JCR controlado muestre un buen desempeño. A continuación se resumen una serie de pasos para determinar los valores de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $L$ .

---

<sup>7</sup>En el caso que  $L < 0$  el sistema controlado no sería estable.

### 2.6.1 Guías de Sintonizado

De acuerdo con las propiedades de estabilidad establecidas anteriormente y el límite que establece el comportamiento del desempeño dinámico del JCR (ec. (2.27)), se establecen las siguientes guías de sintonización.

- (a) En la vecindad del punto de operación, el comportamiento del sistema controlado idealmente, corresponde a un sistema de segundo orden con el polinomio característico  $p^2 - K_2p - K_1 = 0$  (ver matriz (2.8)). Con estos elementos, se puede obtener una parametrización clásica del tipo  $K_1 = \tau_c^{-2}$  y  $K_2 = -2\xi_c\tau_c^{-1}$ , donde  $\tau_c$  y  $\xi_c$ , corresponden respectivamente al tiempo característico a lazo cerrado y el coeficiente de asentamiento. Bajo esta parametrización se simplifica la sintonización de las constantes  $K_1$  y  $K_2$ , por lo que una vez encontrados valores que den una respuesta satisfactoria del sistema a lazo cerrado,  $K_1$  y  $K_2$  deberán ser sintonizadas con valores mayores a los encontrados.
- (b) Escoger un valor suficientemente grande de  $L$  tal que se asegure la estabilidad asintótica del sistema a lazo cerrado hacia el punto de operación, tratando de mantener la respuesta entrada-salida obtenida en el paso (a). Se puede ver que las unidades de  $L$  corresponden a tiempo. Para lograr una sintonización sencilla se puede decir que  $\tau_e \stackrel{def}{=} L^{-1}$  es la constante del tiempo de estimación y de esta manera la determinación del valor de  $\tau_e$  puede darse por comparación con la constante a lazo cerrado  $\tau_c$ .
- (c) Una vez determinadas las constantes de tiempo a lazo cerrado ( $\tau_c$ ) y la de estimación ( $\tau_e$ ), entonces se puede determinar explícitamente las ganancias del controlador PID usando las relaciones expresadas en (2.20).

Una ventaja de este procedimiento de sintonización del PID propuesto, es que se puede llevar a cabo en dos pasos: en el primero, se especifica el comportamiento nominal entrada-salida al seleccionar  $K_1$  y  $K_2$ ; en el segundo paso, la sintonización del controlador tipo PID solamente depende del parámetro  $L$ . De acuerdo al Teorema 2.1 y el límite (2.27), se sabe que conforme el valor de  $L$  sea mayor la base de atracción también crecerá, con lo cual el comportamiento del JCR bajo la acción del controlador PID se acercará más al comportamiento nominal descrito por la ley de control ideal inversa (ecs. (2.6), (2.7)). A pesar de que las guías de sintonizado antes descritas han sido llevadas a la práctica desde hace mucho tiempo, cabe hacer algunos comentarios al respecto.

- (1) A diferencia de lo que sucede en la sintonización clásica de los controladores tipo PID, se tiene que la parametrización aquí adoptada mejora el desempeño entrada-salida (mediante la selección de las ganancias  $K_1$  y  $K_2$ ), el cual puede verse como desacoplado de las modificaciones requeridas para la reducción de sensibilidad (que dependen de la sintonización de  $L$ ) y viceversa.
- (2) Se encuentra una fácil sintonización del parámetro de estimación  $L$ , cuando existan las dinámicas no modeladas y el ruido de medición no son significativos, en estas circunstancias el desempeño entrada-salida es mejorado de manera monotónica con respecto a  $L$ .
- (3) Del diseño de controlador propuesto, se puede obtener un controlador clásico tipo PID cuando  $\bar{g}(T_j) = \bar{\gamma}_1(T_j^{in} - T_j^*)$ , donde  $T_j^* = \text{cte.}$  y corresponde a la máxima desviación

de temperatura en las condiciones de entrada al reactor. Además, como  $\bar{f}(T, T_j)$  es una función lineal de sus argumentos, entonces el controlador tipo PID resultante también es lineal. Lo cual significa que el controlador diseñado puede ser implantado fácilmente en los esquemas tecnológicos industriales actuales, tales como controladores lógicos programables (PLC).

- (4) La intención de este capítulo y en particular de esta subsección no es proporcionar un riguroso procedimiento de sintonizado para el control de JCR mediante PID's. Más bien, el objetivo de las guías de sintonizado antes mencionadas, es el de dar un mejor entendimiento de como un controlador tipo PID es capaz de proporcionar una propiedad de estabilización no-local, a pesar de contar con fuertes incertidumbres y no-linealidades en el modelo. De hecho, estas guías de sintonizado deberán tomarse como un punto de partida para el desarrollo de una técnica de sintonizado mediante metodologías bien conocidas (p. ej. Ziegler-Nichols, Cohen-Coon y reglas de IMC), con el fin de garantizar un óptimo desempeño de los controladores PID's.

Para comprobar el desempeño del controlador diseñado bajo las guías de sintonizado enunciadas, en la siguiente sección se desarrolla un ejemplo numérico.

## 2.7 Simulaciones numéricas

En esta sección se presentan algunos resultados numéricos. Esto se hace con un doble fin: el primero consiste en ilustrar el desempeño del la configuración del controlador PID propuesto y el segundo es mostrar que el esquema para prevenir saturaciones en el controlador (esquema de ARW ) es necesario en algunos casos para que el JCR controlado mantenga la propiedad de estabilidad asintótica semi-global.

Por ejemplo se toma un JCR en el que se lleva a cabo una reacción exotérmica, irreversible y de primer orden del tipo  $A \rightarrow B$ . Bajo estas circunstancias el modelo esta dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{c}_A &= \theta(c_A^{in} - c_A) - c_A k_0 \exp(-E_A/RT), \\ \dot{T} &= \theta(T^{in} - T) + H c_A k_0 \exp(-E_A/RT) + \gamma_1(T_j - T), \\ \dot{T}_j &= (u/V_j)(T_j^{in} - T_j) - \gamma_2(T_j - T), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde:

- .  $k_0$  es la constante cinética de la reacción .
- .  $E_A$  es la energía de activación
- .  $R$  es la constante universal de los gases
- .  $H$  es la entalpía de la reacción.

La dinámica isotérmica  $\dot{c}_A = \theta(c_A^{in} - c_A) - c_A k_0 \exp(-E_A/R\bar{T})$  satisface la Suposición 2.3. Es estable, lineal y con un punto de equilibrio único dado por  $\bar{c}_A = \theta c_A^{in} / [\theta + k_0 \exp(-E_A/R\bar{T})] > 0$ , para cualquier  $\bar{T} > 0$ . A pesar de que el modelo (2.28) es simple, retiene las características

principales de la dinámica del tipo de JCR aquí estudiadas, tales como multiplicidad de estados estacionarios y reacciones altamente exotérmicas. De hecho, bajo los parámetros  $\theta = 1$ ,  $c_A^{in} = 1$ ,  $k_0 = \exp(25)$ ,  $E_A/R = 10^4$ ,  $T^{in} = 350$ ,  $H = 200$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1.5$ ,  $T_j^{in} = 325$ ,  $V_j = \frac{1}{3}$ , y  $\bar{u} = 1$ , el reactor a lazo abierto o sin control exhibe tres puntos de equilibrio, de los cuales uno se encuentra localizado en  $(\bar{c}_A, \bar{T}, \bar{T}_j) = (0.5, 400, 350)$ , el cual es inestable (tipo-silla de montar). En la Figura 2.1 se muestra el retrato-fase  $(c_A, T)$  del reactor a lazo abierto. Se puede notar la existencia de dos puntos de equilibrios asintóticamente estables, en los cuales se atraen las trayectorias del sistema.

Para propósitos de ejemplificación, se harán las siguientes suposiciones: (a) se desea estabilizar el punto de equilibrio inestable  $(\bar{c}_A, \bar{T}, \bar{T}_j) = (0.5, 400, 350)$ . (b) La entrada de control está saturada entre  $u_{\min} = 0$  y  $u_{\max} = 1.5$ . (c) Se cuenta con los estimados de los coeficientes de transferencia de calor  $\bar{\gamma}_1 = 1.75$  y  $\bar{\gamma}_2 = 1.75$ , por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{f}(T, T_j) &= -2.75[(350 - T) + 1.75(T_j - T) - 3.062(T_j - T)], \\ \bar{g}(T_j) &= 5.25(325 - T_j)\end{aligned}$$

Por otro lado, el tiempo de residencia del JCR es de  $\theta^{-1} = 1$  y se puede tomar como la constante natural a lazo abierto del JCR. Conforme a esto, la constante de tiempo a lazo cerrado se define como  $\tau_c = 1$  y el coeficiente de amortiguamiento como  $\xi_c = 1$ . Por lo que las ganancias del controlador estarán dadas como  $K_1 = -\tau_c^{-2} = -1.0$  y  $K_2 = -2\xi_c\tau_c^{-1} = -2.0$ . Para la elección del tiempo de estimación se debe considerar, al menos de manera intuitiva, que debe ser más rápido que el tiempo de convergencia nominal a lazo cerrado, es decir,  $L^{-1} = \tau_e \ll \tau_c$ . En la Figura 2.2 se presenta el retrato-fase  $(c_A, T)$  del JCR a lazo cerrado utilizando las mismas condiciones iniciales que en la Figura 2.1.

Se puede notar que las trayectorias del reactor convergen de manera asintótica al punto de operación  $(\bar{c}_A, \bar{T}, \bar{T}_j) = (0.5, 400, 350)$ , a pesar de las altas incertidumbres en el coeficiente de transferencia de calor y en la expresión de la cinética de reacción. También se puede observar que la base de atracción es grande e incluye a las condiciones iniciales cercanas a los puntos de equilibrio estables a lazo abierto.

Para ejemplificar el límite establecido en el Corolario 2.1 ( $x(t, L) \rightarrow x^*(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ ), se escogieron las condiciones iniciales  $(c_A(0), T(0), (T_j)) = (1, 350, 325)$ , que corresponden al punto de arranque del reactor, y se supuso un cambio en el punto de operación de  $\bar{T} = 400$  a  $404$  a  $T = 35$  y una perturbación en la temperatura de entrada al reactor ( $T^{in}$ ) de  $-10$  a  $t = 45$ . El límite (2.27) encontrado mediante simulaciones numéricas fué  $L_{\min} \simeq 16.4$ . Entonces, de acuerdo al Teorema 2.1, la estabilidad asintótica esta garantizada para todo  $\tau_e^{-1} = L > 16.4$ .

En la Figura 2.3 se muestran las trayectorias de la temperatura del reactor y del flujo en el sistema de enfriamiento para 3 valores de la constante de estimación  $\tau_e = L^{-1}$ . También se muestran las mismas trayectorias del reactor bajo el control inverso perfecto (es decir la ley de control inverso (2.6), (2.7)). En esta figura se puede notar que cuando  $\tau_e = L^{-1} \rightarrow 0$ , las trayectorias  $T(L, t)$  del controlador PID diseñado convergen uniformemente a las trayectorias del control ideal  $T^*(t)$ . Estas simulaciones muestran que el controlador PID es una aproximación robusta del control inverso.

Se puede observar también que en intervalos de tiempo cortos la entrada de control presenta sobre-disparos, los cuales están inducidos principalmente por las condiciones iniciales del sistema de observación. De hecho, el fenómeno de "peaking" se presenta en la estimación del error de

modelado  $\bar{\eta}$  (ver Figura 2.4). Mientras que en la Figura 2.3 se muestra la saturación del control durante el tiempo que se presenta el fenómeno de peaking, por lo tanto, la saturación aísla el fenómeno de "peaking" de la estimación del error de modelado.

Para demostrar que el esquema de ARW es necesario para obtener estabilidad semiglobal y asintótica, en la Figura 2.5 se presenta el comportamiento de la temperatura del reactor y del flujo de entrada al sistema de enfriamiento (que es la entrada de control), para los casos en que existe y no existe ARW con  $\tau_e = 0.01$ . En esta figura se nota que cuando se dan condiciones iniciales lejanas al punto de operación, no es posible estabilizar el JCR si el esquema de ARW no está activado. En este caso (sin ARW), se puede notar que el sistema a lazo cerrado no converge al punto de operación deseado, lo cual se debe al mal funcionamiento del observador (ec. (2.18)) y a su incapacidad para estimar el error del modelado ( $\bar{\eta}$ ).

Por otro lado, para demostrar el desempeño del controlador cuando se realiza un cambio en el punto de operación y bajo perturbaciones, en la Figura 2.6 se muestra un cambio en escalón en la temperatura de operación del reactor ( $\bar{T}$ ) de 400 a 395 grados a  $t = 15$ , y también se realiza una perturbación en la concentración de entrada ( $c^{in}$ ) de 1.0 a 0.75 en  $t = 35$ . A pesar de realizar estos cambios en las condiciones del JCR, se puede observar que el controlador PID presenta un buen desempeño para regular y mantener la trayectoria de la temperatura en el reactor.

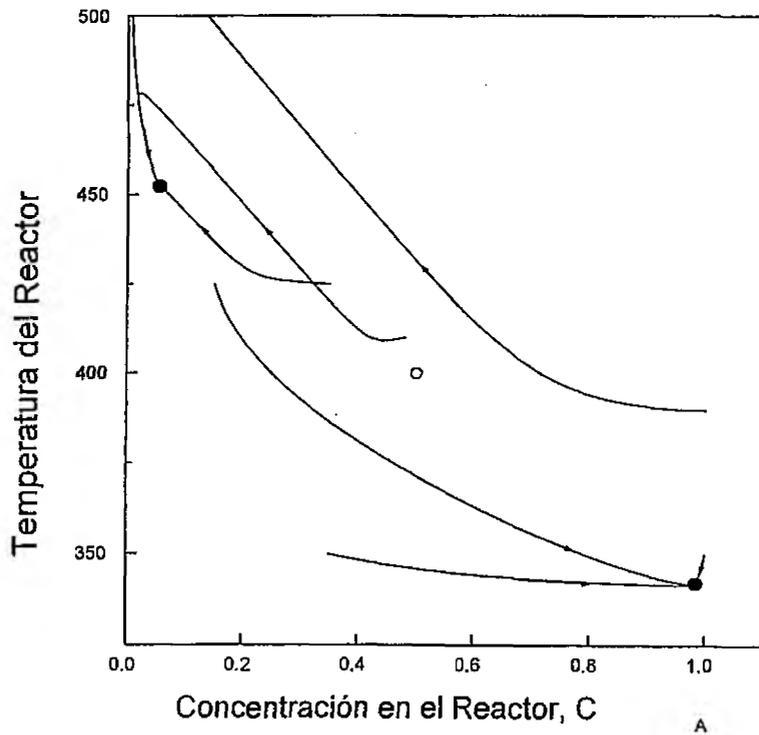


Figura 2.1 Retrato fase del reactor a lazo abierto.

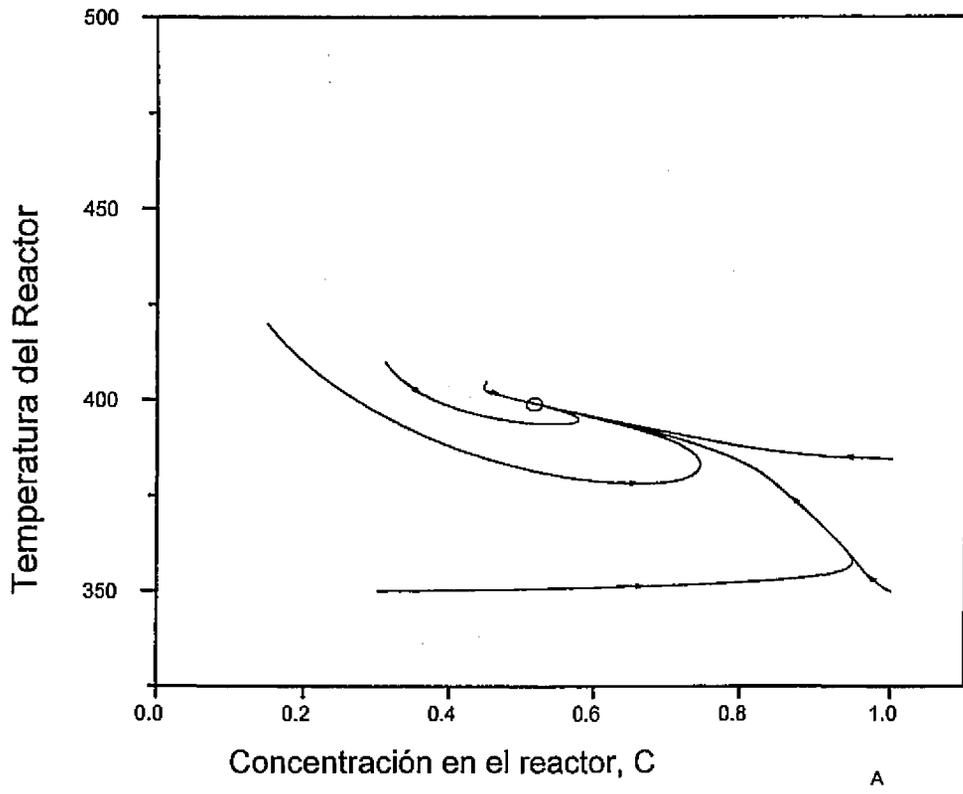


Figura 2.2 Retrato fase del reactor controlado.

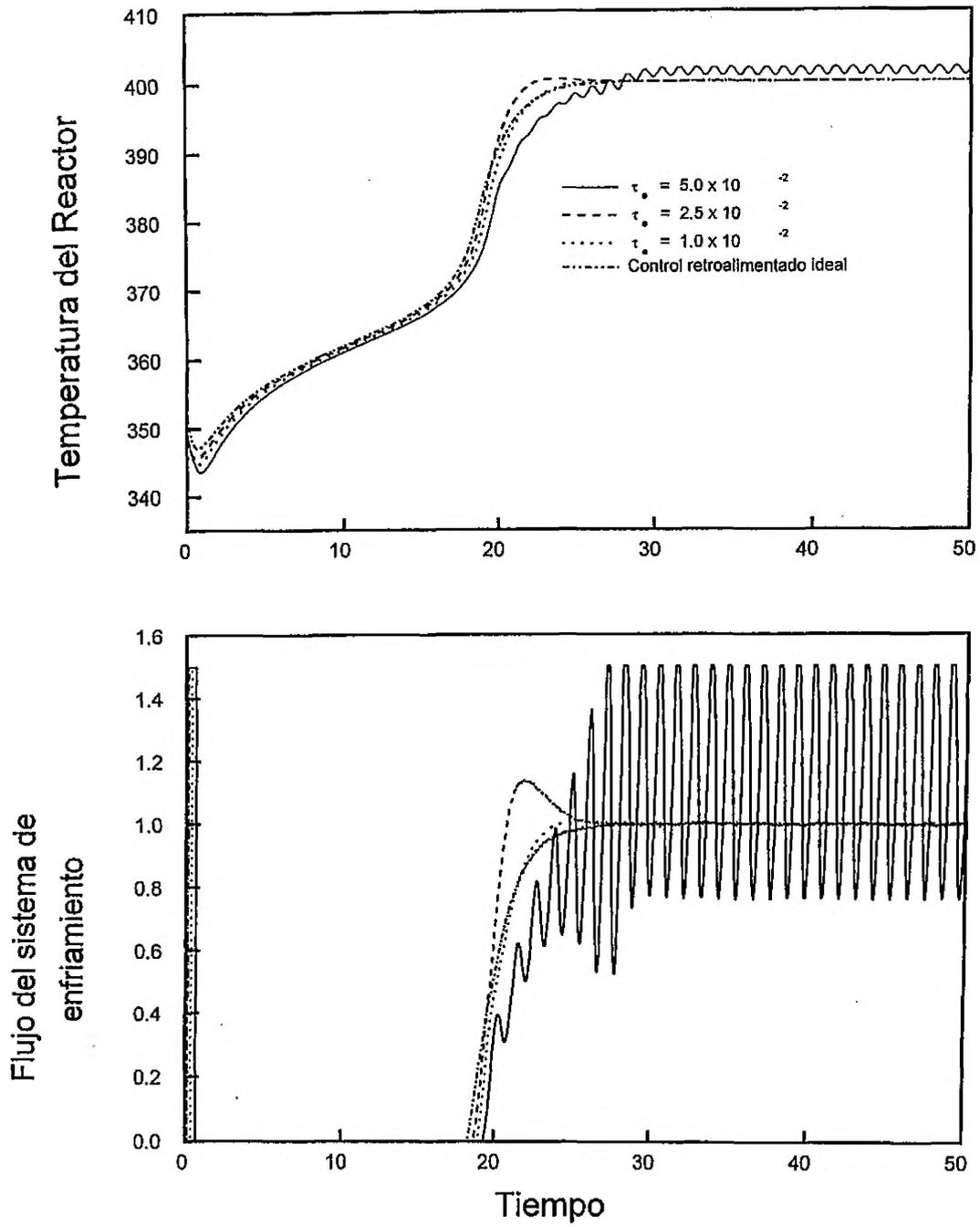


Figura 2.3 Saturación de la entrada de control y el fenómeno de “peaking”.

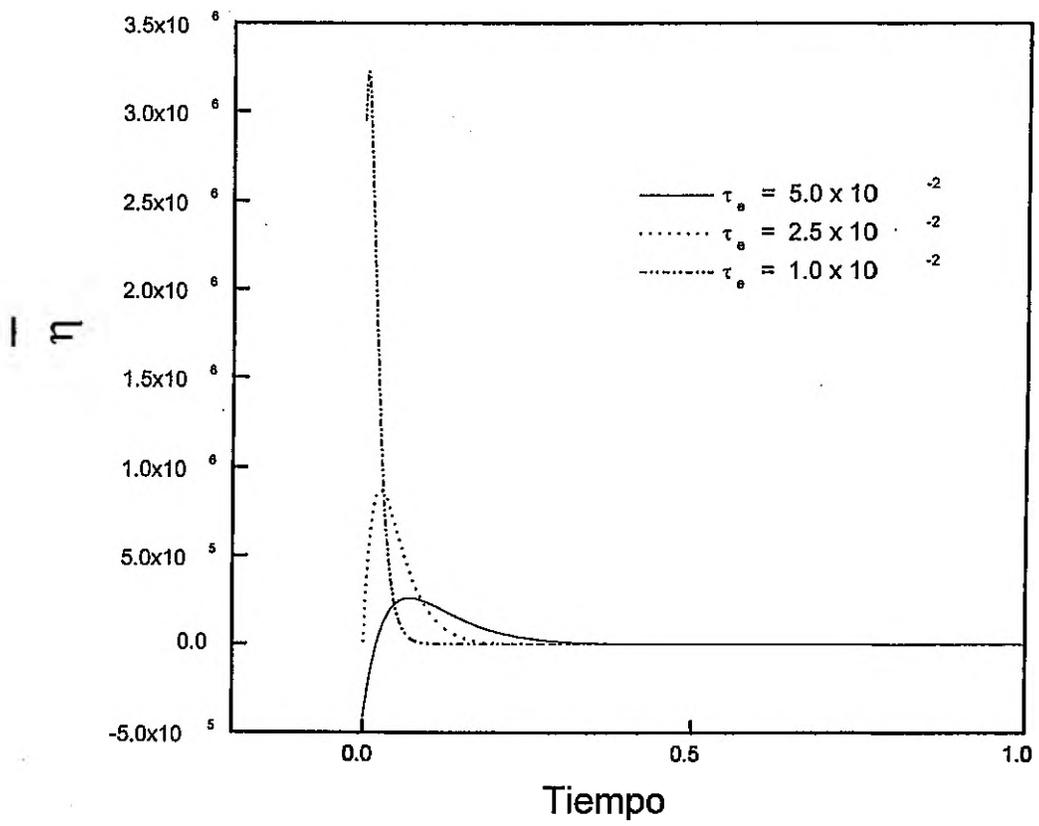


Figura 2.4 Estimación de la señal del error de modelado.

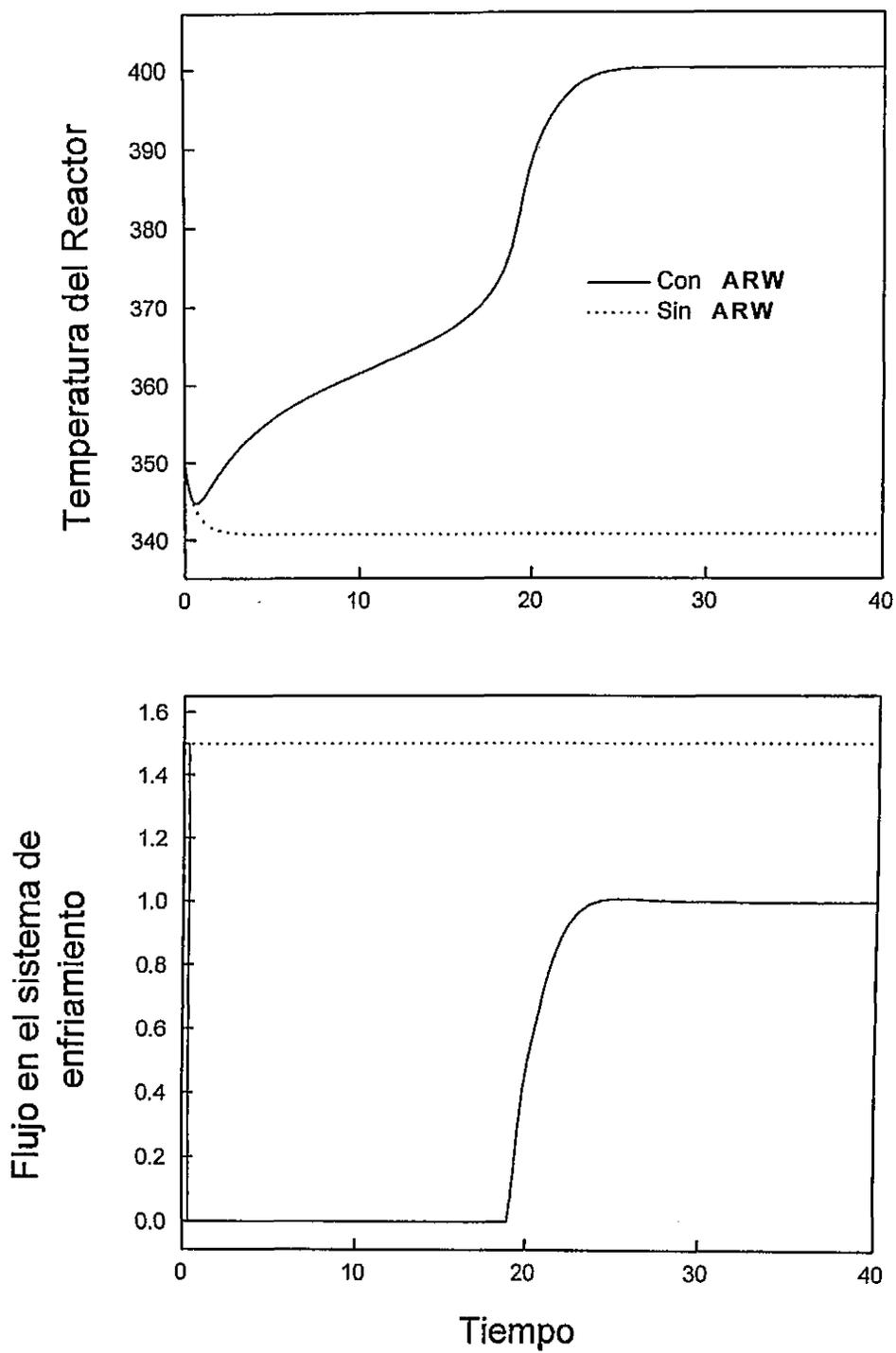


Figura 2.5 Desempeño del reactor controlado con y sin ARW.

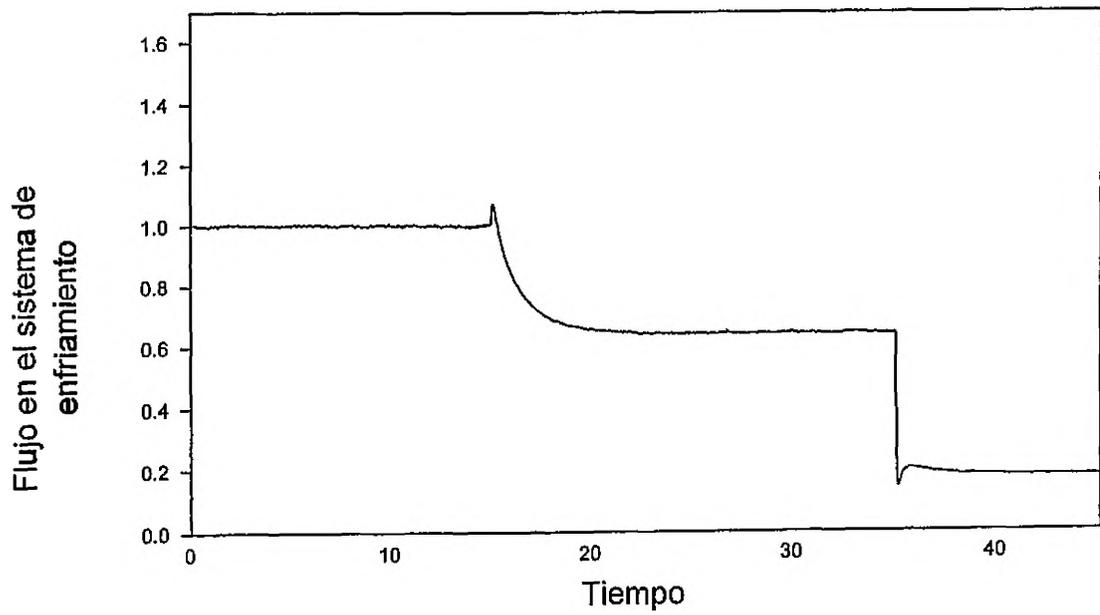
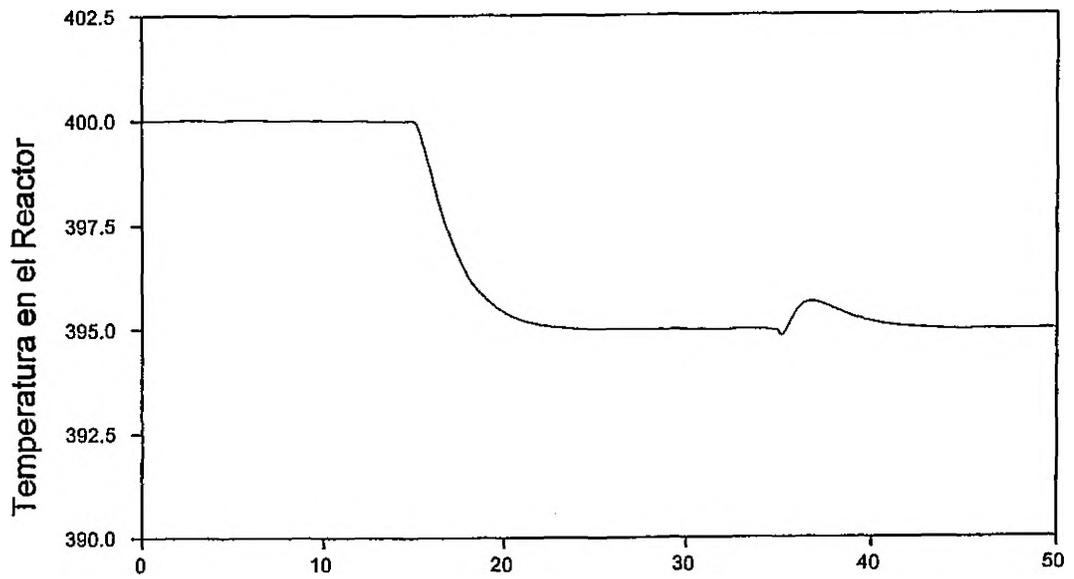


Figura 2.6 Respuesta del sistema a un cambio en escalón de  $\bar{T}$  y  $c^{in}$ .

## 2.8 Conclusiones

Se estudiaron algunas propiedades que muestran los JCR controlados mediante controladores PID. Los resultados que se presentaron se basaron en un control de tipo dinámica inversa con estimación de señales. Se usó un observador de orden reducido para estimar el estado inducido por una transformación de coordenadas (por ejemplo, incertidumbre en parámetros) y por el error de modelado de la relación entrada-salida.

El esquema de estimación fue usado en la construcción de un controlador saturado de tipo dinámica inversa. Se mostró que el controlador diseñado es equivalente a un controlador PID con un esquema para prevenir saturaciones (ARW).

Las propiedades de estabilidad del sistema a lazo cerrado, se comprobaron usando resultados de la teoría de sistemas no-lineales singularmente perturbados. Se tomó a la constante de estimación  $L^{-1} = \tau_e$  como el parámetro de perturbación. También se encontró que en el límite cuando  $\tau_e$  tiende a cero, el desempeño del controlador tipo PID se aproxima al del control inverso con conocimiento perfecto del modelo. De esta forma, el control tipo PID diseñado puede verse como una aproximación robusta de la ley de control linealizado entrada-salida.

En este capítulo se fundamenta y además se da una explicación de la gran aceptación que tienen los controladores PID y tipo-PID en ingeniería. Sin embargo, esto no significa que esquemas de control más elaborados o complejos dejen de ser útiles.

La diferencia del sistema tratado en este capítulo con respecto al del Capítulo 1, se debe a dos cosas principalmente: (1) la primera consiste en que se habla de un reactor tipo RTAC de dinámica en el sistema de enfriamiento. (2) De que el grado relativo o bien el orden del sistema en esta parte del trabajo es 2, mientras que en el anterior corresponde a un grado 1.

Hasta este momento la aplicación de la estimación del error de modelado y el diseño de un controlador del tipo de retroalimentación de estados, provee una parametrización de un controlador tipo PI para el caso de un sistema de grado relativo 1 y de un controlador PID para un sistema de grado relativo 2.

La pregunta que ahora surge es ¿qué sucederá con un RTAC de grado relativo  $n$  con dinámica en el sistema de enfriamiento apreciable?

## 2.9 Apéndice 2

### 2.1 Prueba de los lemas 5.1-5.3

**Prueba del Lema 2.1.** Para cada par  $(x, e)$ , considerar el mapa

$$T(u) = \text{Sat} [(-f(x) - \Delta g(x)u + Kz + L^{-1}K_2e_1 + e_2)/\bar{g}(T_j)] \quad (\text{A.1})$$

Entonces

$$\left| \frac{dT(u)}{du} \right| = \left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \frac{\Delta g(x)}{\bar{g}(T_j)} \right| = \left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \frac{\gamma_1 - \bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_1} \right| \leq \left| \frac{d\text{Sat}(s)}{ds} \frac{\gamma_1 - \gamma_1^{\max}}{\gamma_1^{\max}} \right| < 1$$

Por lo que se determina que (A.1) es una contracción. La prueba se completa aplicando el Teorema del Mapeo de Contracción y por el hecho de que  $T$  es  $C^1$  con respecto a  $(x, e)$ . ■

**Prueba del Lema 2.2.** Si  $u = u^c$  (es decir, la entrada de control no está saturada), entonces

$Sat = Id$ , donde  $Id$  es la función identidad. En este caso, la solución de (2.23) con  $e = 0$  es  $\Theta_{Id}(x, 0) = (-f(x) + Kz)/g(x) = \vartheta(x)$ . Por lo que la prueba será válida si se muestra que  $\Theta_{Sat}(x, 0) = Sat[\vartheta(x)]$  cuando  $u \neq u^c$  (es decir, cuando la entrada de control se encuentra en alguno de los límites de saturación). Entonces, primero se asume que  $u^c \leq u_{\min}$ , tal que  $u = u_{\min}$  y a continuación se definen las siguientes cotas de saturación:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Theta}^{\min} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : \Theta_{Sat}(x, 0) \leq u_{\min}\} \\ \mathcal{S}_{\vartheta}^{\min} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : \vartheta(x) \leq u_{\min}\} \end{aligned}$$

Una vez definido lo anterior, se demostrará que  $\mathcal{S}_{\Theta}^{\min} = \mathcal{S}_{\vartheta}^{\min}$ .

De donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Theta}^{\min} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : \Theta_{Sat}(x, 0) \leq u_{\min}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : (-f(x) - \Delta g(x)u_{\min} + Kz)/\bar{g}(T_j) \leq u_{\min}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : (-f(x) + Kz)/g(x) \leq u_{\min}\} \\ &= \mathcal{S}_{\vartheta}^{\min} \end{aligned}$$

Por lo tanto la prueba se concluye cuando  $\mathcal{S}_{\Theta}^{\max} = \mathcal{S}_{\vartheta}^{\max}$  y  $u = u_{\max}$ . ■

**Prueba del Lema 2.3.** El sistema (2.26) puede escribirse como

$$e' = [A_o + \Delta A_e(t)]e$$

donde  $A_o$  esta dado por:

$$A_e(\kappa(x, e)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\kappa(x, e) & 0 \end{pmatrix}$$

y  $\Delta A_e(t) \stackrel{def}{=} A_e(\kappa(x, e)) - A_o$ . Además,  $A_o = A_e(\Delta A_e(t))$ . Como  $A_o$  es Hurwitz, entonces, el sistema  $e' = A_o e$  es globalmente-asintóticamente estable. Por otro lado, puede verse al término  $\Delta A_e(t)e$  como un parámetro de perturbación del sistema lineal estable  $e' = A_o e$ . Y de hecho, se puede escribir como  $\Delta A_e(t) = (1 - \kappa(x, e))E_1 E_2$ , donde  $E_1 = (0, 1)^T$  y  $E_2 = (\delta, 0)$ , para  $\delta = 1 - \varepsilon$  y  $0 < \varepsilon < 1$  y  $\varepsilon$  es un valor sumamente pequeño. Puesto de esta forma el sistema (2.26), pueden hacerse las siguientes observaciones: (1) como  $\bar{\gamma}_1 > \gamma_1^{\max}$ , existe un valor  $\varepsilon$  para  $0 < \varepsilon < 1$  tal que  $|1 - \kappa(x, e)| < 1 - \varepsilon < 1$ , y (2)  $\|E_2(pI - A_o)E_1\|_{\infty} = \|\delta/(p+1)^2\|_{\infty} = \delta < 1$ . Del Teorema 2.7 en el trabajo de Khargonekar *et al.* (1990) se sabe de la existencia de una función cuadrática  $V_e(e) = e^T P_e e$ ,  $P > 0$ , donde  $V(e)$  es una función de Lyapunov del modelo rápido (ec. (2.26)). ■

## 2.2 Obtención de la dinámica a lazo cerrado en coordenadas $(x, e)$

De acuerdo a los lemas 2.1 y 2.2, el sistema a lazo cerrado puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_0(x) + B_1[\Theta_{Sat}(x, e) - \Theta_{Sat}(x, 0)] \\ \dot{e} &= LA_o e + B_2 \dot{\eta} \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde  $B_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+2}$ ,  $B_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$A_o = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

es una matriz Hurwitz con valores propios localizados en  $\{-1, -1\}$ , y

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \eta}{\partial u} \dot{u} \quad (\text{A.4})$$

Para obtener (A.2) la ecuación (2.23) puede escribirse como  $u = \text{Sat}[\phi(x, e_1, \bar{\eta})]$ , donde

$$\phi(x, e_1, \bar{\eta}) \stackrel{\text{def}}{=} (-\bar{f}(T, T_j) - \bar{\eta} + Kz + L^{-1}K_2e_1)/\bar{g}(T_j)$$

Por lo que

$$\dot{u} = \text{Sat}'(s) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} + L \frac{\partial \phi}{\partial e_1} (-2e_1 + e_2) + L \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} e_1 \right) \quad (\text{A.5})$$

y  $\text{Sat}'(s)$  representa a la derivada de la función de saturación  $\text{Sat}$ . Además, se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial e_1} = L^{-1}K_2/\bar{g}(T_j)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} = -1/\bar{g}(T_j)$$

En consecuencia, la derivada del error de modelado ( $\dot{\eta}$ ) puede escribirse como:

$$\dot{\eta} = \Gamma(x, e) - L\text{Sat}'(s)\Delta g(x)/\bar{g}(T_j) \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\Gamma(x, e) = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \text{Sat}'(s)\Delta g(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \pi(x, e) + K_2\text{Sat}'(s)\Delta g(x)/\bar{g}(T_j)(-2e_1 + e_2) \quad (\text{A.7})$$

y  $\pi(x, e) \stackrel{\text{def}}{=} F_0(x) + B_1[\Theta_{\text{Sat}}(x, e) - \Theta_{\text{Sat}}(x, 0)]$ . Además, puede verse que  $\Gamma(0, 0) = 0$  y

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Delta f(x)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta g(x)}{\partial x} u = \frac{\partial \Delta f(x)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta g(x)}{\partial x} \text{Sat}[\varphi(x, e)] \quad (\text{A.8})$$

Debido a esto todos los términos en  $\Gamma(x, e)$  son del orden de  $L^r$ , para  $r \leq 0$ . De acuerdo a lo anterior la ecuación (A.2) se puede escribir de manera explícita como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_0(x) + B_1[\Theta_{\text{Sat}}(x, e) - \Theta_{\text{Sat}}(x, 0)] \\ \dot{e} &= LA_e(\kappa(x, e))e + B_2\Gamma(x, e) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

para  $\kappa(x, e) \stackrel{def}{=} Sat'(\varphi(x, e))(\gamma_1/\bar{\gamma}_1)$  y

$$A_e(\kappa(x, e)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\kappa(x, e) & 0 \end{pmatrix}$$

Como se supuso que  $T_j^{in} - T_j$  son medidas, entonces  $\Delta g(x)/\bar{g}(T_j) = (\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)/\bar{\gamma}_1$ .

## 2.10 Bibliografía

- Alvarez, J., Alvarez-Ramirez, J., & Suarez, R. (1991). Nonlinear bounded control for a class of continuous stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 46, 3235-3249.
- Alvarez-Ramirez, J. (1999). Adaptive control of feedback linearizable systems: a modeling error compensation approach. *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, 9, 361-377.
- Bequette, B.W. (1991). Nonlinear control of chemical processes: a review. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 30, 1391-1421.
- Byrnes, Ch.I., & Isidori, A. (1991). Asymptotic stabilization of minimum-phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36, 1122-1137.
- Christofides, P.D. (2000). Robust output feedback control of nonlinear singularly perturbed systems. *Automatica*, 36, 45-52.
- Christofides, P.D., & Teel, A.R. (1996). Singular perturbations and input-state stability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41, 1645-1650.
- Christofides, P.D., Teel, A.R. & Daoutidis, P. (1996) Robust semiglobal output tracking of nonlinear singularly perturbed systems, *Int. J. Control*, 65, 639-666.
- Esfandiari, F., & Khalil, H.K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *Int. J. Control*, 56, 1007-1037.
- Feinberg, M. (1987). Chemical reaction network structure and the stability of isothermal reactors-I The deficiency zero and deficiency one theorems. *Chem. Eng. Sci.*, 29, 2229-2268.
- Gavalas, G.R.(1968). *Nonlinear Differential Equations of Chemical Reacting Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Hoppensteadt, F. (1974). Asymptotic stability in singular perturbation problems. II: problems having matched asymptotic expansion solutions. *J. of Differential Equations*, 15, 510-521.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Khargonekar, P.P., Petersen, I.R., & Zhou, K. (1990). Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and  $H^\infty$  control theory. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35, 356-361.

- Kothare, M.V., Campo, P.J., Morari, M., & Nett, C.N. (1994). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30, 1869-1883.
- Kravaris, C., & Kantor, J.C. (1990). Geometric methods for nonlinear process control. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 29, 2295-2314.
- Massera, J.L. (1956). Contribution to stability theory. *J. Differential Equations*, 64, 182-206.
- Rivera, D.E., & Jun, K.J., An integrated identification and control design methodology for multivariable process system identification, *IEEE Control Systems Magazine*, June 2000, 25-37.
- Russo, L.R., & Bequette, B.W. (1997). State space versus input/output representations for cascade control of unstable systems. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 36, 2271-2278.
- Russo, L.R., & Bequette, B.W. (1995). Impact of process design on the multiplicity behavior of a jacketed exothermic CSTR. *AIChE J.*, 41, 1135-1146.
- Soroush, M., & Kravaris, C. (1992). Nonlinear control of a batch polymerization reactor: an experimental study. *AIChE J.*, 38, 1429-1448.
- Soroush, M., & Kravaris, C. (1994). Nonlinear control of a polymerization CSTR with singular characteristic matrix. *AIChE J.*, 40, 980-990.
- Sussman, H.J., & Kokotovic, P.V. (1989). Peaking and stabilization. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, 1379-1384.
- Teel, A., & Praly, R. (1995). Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback. *SIAM J. Contr. Optimization*, 33, 1443-1488.
- Viel, F., Jacob, F., & Bastin, G. (1997). Robust feedback stabilization of chemical reactors. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42, 473-481.
- Viel, F., Jadot, F. & Bastin, G. (1997) Global stabilization of exothermic chemical reactors under input constraints, *Automatica*, 33, 1437-1448.

## **Parte III**

# **El control PI en cascada**

## Capítulo 3

# Control en cascada de reactores con dinámica en el sistema de enfriamiento y grado relativo $n$

### 3.1 Resumen

En este capítulo se describe un procedimiento para el diseño de un control en cascada para una clase de sistemas con una entrada de control y una estructura estrictamente retroalimentada. La estructura de control se basa en el uso de la técnica de backstepping<sup>1</sup> y de la estimación del error de modelado. En la construcción de la estructura de control para el sistema de una dimensión se obtiene una ley de control PI equivalente a aquella obtenida en el Capítulo 1, mientras que en el sistema de más de una dimensión, el cual resulta como una extensión del sistema de una dimensión, la estructura de control puede verse como una cascada de controladores PI. Una vez más, aprovechando la estructura del sistema controlador-estimador se hace uso de la teoría de sistemas no-lineales singularmente perturbados para establecer las propiedades de estabilidad del sistema controlado. Mediante simulaciones numéricas se demuestra la efectividad de la estructura en cascada diseñada para un reactor químico.

La principal diferencia en la aplicación de la técnica de diseño con respecto a la del capítulo anterior, se debe a que se está hablando de un sistema en forma estrictamente retroalimentado y de grado relativo  $n$ . Esto nos lleva a una estructura en cascada de controladores tipo PI, la cual suele ser muy utilizada en los procesos químicos, cuando existen retrasos significativos en algunas mediciones del sistema frente a un conjunto de mediciones obtenidas de manera suficientemente rápida, como la temperatura.

### 3.2 Introducción

En esta parte del trabajo se usarán herramientas antes vistas, como la aglomeración de las incertidumbres del modelo en una función denominada error de modelado, su estimación me-

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés, que significa un paso en retroceso. Esto se refiere a que para calcular la entrada *real* de control se requieren las pasadas  $n - 1$  entradas virtuales de control.

diante un observador de orden reducido y el uso de la estructura de control en forma no-lineal singularmente perturbada. La parte novedosa aquí es el diseño de un controlador adaptable de una entrada para sistemas no-lineales transformables a una forma estrictamente retroalimentada (forma canónica de observador, o *strict-feedback*, Kritic, Kanellakopoulos & Kokotovic, 1992), tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n &= f_n(x) + g(x)u,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema (p. ej., en un reactor sería las concentraciones y temperaturas del sistema) y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control (p. ej., flujo de alimentación al reactor, gasto de enfriante, etc.). Las funciones  $f_i$ 's,  $1 \leq i \leq n$  y  $g$  son funciones no-lineales y suaves en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , es decir, son diferenciables. Además, de manera general, se puede suponer que las condiciones iniciales para las funciones  $f_i$ , están en el origen, es decir,  $f_i(0) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Por lo que el origen es un punto de equilibrio del sistema (1) para  $u = 0$ .

Puesto de esta manera, *el objetivo de control es estabilizar al sistema (1) en el origen bajo las siguientes suposiciones:*

**Suposición 3.1** Se tienen medidas de los estados ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

**Suposición 3.2** Las funciones  $f_i$ 's,  $1 \leq i \leq n$ , son desconocidas.

**Suposición 3.3** Las funciones  $g(x)$  están globalmente acotadas en un punto lejano de cero.

El problema de regulación y seguimiento para sistemas como el (3.1) ha sido arduamente estudiado en los últimos años. Se sabe que solo algunos casos particulares han sido resueltos. Entre los casos más representativos se encuentran los siguientes:

a) Las funciones  $f_i$ 's tienen incertidumbre parametrizada de la siguiente forma:

$$f_i(x_1, \dots, x_i) = \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros desconocidos y los componentes de  $\phi_i$ 's son conocidos. Kritic et al. (1992) propusieron para la resolución de este problema un control no-lineal adaptable con funciones de sintonizado para un número de parámetros mínimo. En este trabajo se probó la propiedad de estabilidad global mediante el uso de técnicas de Lyapunov.

b) Las funciones  $f_i$ 's pueden ser vistas como  $f_i(x_1, \dots, x_i) = \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i) + \Delta_i(x, t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donde  $\Delta_i$ 's son funciones desconocidas. Además, se supone que existen una serie de valores  $\rho_i \geq 0$  (los cuales no necesariamente son conocidos) y una serie de funciones  $p_i(x_1, \dots, x_i)$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y un tiempo  $t \geq 0$  se tiene que

$$\|\Delta_i(x, t)\| \leq \rho_i p_i(x_1, \dots, x_i),$$

Usando la técnica de backstepping, también se diseñó un procedimiento de control adaptable para esta clase de sistemas (Polycarpou y Ioannou, 1996).

c) Por otro lado, Karsenti, Lamnabhi-Lagarrigue y Bastin (1996), extendieron el algoritmo de Kristic et al. a la regulación de sistemas con parametrización constante y no-lineal, esto debido a que una re-parametrización lineal de un sistema físico no necesariamente puede llegar a ser representativa. En este sistema, la estructura de las funciones  $f'_i$ s se supone conocida excepto para una serie de parámetros. Esto es, que las funciones  $f'_i$ s pueden escribirse como  $f_i(x_1, \dots, x_i; \theta)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donde  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es un conjunto de parámetros desconocidos. La clave para diseñar un estimador apropiado para estos parámetros desconocidos es que el conjunto de  $\theta$  pertenece a un *conjunto convexo*  $\Theta \in \mathbb{R}^p$ , de diámetro conocido  $d = \max\{\|\theta_1 - \theta_2\| : \theta_1, \theta_2 \in \Theta\}$ . Por otro lado, en el trabajo de Hotzel y Kartsenti (1998) se extienden estos resultados al problema de seguimiento. En ambos trabajos se prueba estabilidad semi-global usando argumentos de la teoría de Lyapunov.

En algunos sistemas, como los reactores químicos con sistema de enfriamiento no se pueden obtener condiciones de convexidad o de linealidad en los parámetros inciertos. Por lo que la estructura de las funciones  $f'_i$ s es poco conocida y las cotas superiores de estas funciones como las que usan Polycarpou y Ioannou pueden ser demasiado conservadoras o inaccesibles, lo cual hace que el uso de técnicas de control adaptable no pueden ser usadas, al menos no en una forma conocida.

Por otro lado, el controlador tipo proporcional-integral (PI) es uno de los más usados en la industria, porque su estructura es simple y porque tiene un gran rango de aplicación (Luyben, 1973). Además, una configuración clásica de control en la industria química es la de tipo cascada, la cual puede ser vista como una retroalimentación parcial de estados (Russo y Bequette, 1997). La mayoría de los diseños de estructuras de control en cascada están basadas en leyes de control tipo P y PI como la función básica de retroalimentación, tanto en el lazo esclavo, como en el lazo maestro de control (Luyben, 1973; Russo y Bequette, 1997; Krishnawasmy, Rangaiah, Jha y Desphande, 1990; Lee, Park y Lee, 1998). El éxito en el control de columnas de destilación (Brambilla, Semino y Scalli, 1994; Wolff y Skogestad, 1996) se debe a estructuras de control cascada.

A lo largo de esta investigación, se ha puntualizado el hecho de que a pesar del uso muy difundido de los controladores tipo PI y PID, no existen resultados teóricos que validen las propiedades de estabilidad de estos controladores y menos si se trata de estructuras de control en cascada que usan controladores PI en los lazos de control.

Por tales razones, el objetivo de este capítulo es presentar un procedimiento de diseño para un control del tipo adaptable para una clase de sistemas no-lineales inciertos con una entrada de control<sup>2</sup> y una estructura estrictamente de retroalimentación (ver ecuación (3.1)), contando únicamente con un conocimiento aproximado de las funciones inciertas (ver Suposición 3.2).

El diseño de la estructura de control se basa en la técnica de backstepping. En cada paso del diseño se construye una estructura intermedia de control, la cual puede ser vista como una ley de control PI. La estabilidad del sistema bajo esta estructura de control en cascada es interpretada usando argumentos de estabilidad de tipo Lyapunov, lo cual se hace al emplear la estructura del sistema a lazo cerrado en una forma singularmente perturbada.

---

<sup>2</sup>una entrada: por sus siglas en inglés "single-input"

Por último, la estructura de control en cascada obtenida en forma de una cascada de controladores PI tiene un significado físico, por lo cual es más fácil de interpretar el funcionamiento del sistema en función de sus parámetros.

El resultado de este capítulo puede verse como una generalización de las propuestas antes reportadas y en particular del trabajo de Russo y Bequette (1997) y Bequette (1988). Para el diseño del controlador se usa la técnica no-lineal de backstepping y en el establecimiento de las propiedades de estabilidad, la teoría de sistemas no lineales singularmente perturbados.

El capítulo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se describe el método de diseño del control y se muestra su equivalencia con un controlador PI para el sistema de una dimensión. En la sección 3 se describe el diseño para la clase de sistemas descritos por la ecuación (3.1) (sistemas de dimensión  $n > 1$ ). Y en la Sección 4 se aplica la estrategia de control mediante simulaciones numéricas en un reactor químico con dinámica en la camisa de enfriamiento.

### 3.3 Sistemas de una dimensión

Para mostrar la técnica de diseño se empezará por la parte más sencilla, la cual corresponde al sistema de una dimensión, para después extender los resultados de estabilidad a los sistemas de dimensión mayor.

Se considera el siguiente sistema de una dimensión

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.2)$$

donde las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son  $C^2$  (es decir, tienen al menos segunda derivada). Si el sistema (3.2) satisface las suposiciones 3.1-3.3, es decir, que  $f(x)$  es una función suave y desconocida, mientras que  $g(x)$  está acotada en un valor diferente de cero para cualquier valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Puesto de esta manera, el problema de una dimensión, se va a introducir una nueva función denominada función del error de modelado  $\eta(t)$ , la cual está asociada al error en el modelo debido a  $f(x)$ , es decir

$$\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(t))$$

Por lo que el sistema (3.2) quedaría como  $\dot{x} = \eta(t) + g(x)u$  y con una función de control como

$$u = \psi(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} [-\eta(t) - \tau_c^{-1}x]/g(x), \quad (3.3)$$

donde  $\tau_c > 0$  es, como en los capítulos anteriores, el tiempo característico a lazo cerrado deseado o impuesto por la entrada de control. Bajo esta función de control el sistema a lazo cerrado sería  $\dot{x} = -\tau_c^{-1}x$ , el cual es linealmente estable. Sin embargo la función  $\psi(x, \eta)$  no puede ser implantada, dado el desconocimiento de la función del error de modelado  $\eta(t)$ . Esto se ha resuelto mediante el empleo de un estimador de orden reducido que usa las señales medidas del sistema. La señal de control aproximada quedará:

$$u = \psi(x, \bar{\eta}) \stackrel{\text{def}}{=} [-\bar{\eta}(t) - \tau_c^{-1}x]/g(x) \quad (3.4)$$

La idea principal para estimar la función  $\eta(t)$  es que dadas las medidas del estado  $x(t)$  y de la entrada de control  $u(t)$ , el error de modelado  $\eta(t)$  es “altamente observable” (Diop y Fliess,

1991). De hecho, de la ecuación (3.2) se ve que  $\eta(t) = x(t) - g(x)[\dot{x}(t)]u(t)$ , es decir, que la función del error de modelado esta representada en terminos de señales medidas y de sus derivadas.

Si decimos que  $a_m = \dot{x} - g(x)u$  es la salida "medida" y además  $a_m = \eta(t)$  para todo  $t \geq 0$ , entonces, para poder estimar la función del error de modelado se propone el siguiente estimador de orden reducido:

$$\dot{\bar{\eta}} = \tau_e^{-1}(a_m - \bar{\eta}) = \tau_e^{-1}(\dot{x} - g(x)u - \bar{\eta}), \quad (3.5)$$

donde  $\tau_e > 0$  es otra vez el tiempo o la constante de estimación.

De los capítulos anteriores se sabe que una versión realizable del observador (3.5) se obtiene al definir una nueva variable denominada  $w \stackrel{def}{=} \tau_e \bar{\eta} - x$ , por lo que una versión equivalente a este estimador esta dada por el siguiente filtro de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -g(x)u - \tau_e^{-1}(w + x), \\ \bar{\eta} &= \tau_e^{-1}(w + x), \end{aligned} \quad (3.6)$$

el cual, como la función estimada del error de modelado es desconocida, es decir,  $\bar{\eta}(0) = 0$  puede ser inicializado como  $w(0) = -x(0)$ . Entonces, la ley de control retroalimentada está compuesta de una función de retroalimentación (ec. (3.4)) y por el estimador de la función del error de modelado (ec. (3.6)), esta ley de control esta compuesta de dos parámetros libres o de sintonización: la constante de tiempo a lazo cerrado  $\tau_c$  y el tiempo de estimación  $\tau_e$ . Una vez establecida la ley de control, ahora se procede a establecer sus propiedades de estabilidad.

### 3.3.1 Análisis de estabilidad

Para realizar el análisis de estabilidad, primero se define el error de estimación como  $e = \eta - \bar{\eta}$  y posteriormente se escribe la entrada de control (3.4) en coordenadas  $(x, e)$ , como:

$$\begin{aligned} u &= v(x, e) \stackrel{def}{=} (-\eta - \tau_c^{-1}x + e)/g(x) \\ &= (-f(x) - \tau_c^{-1}x + e)/g(x). \end{aligned}$$

Se puede ver que la ley de control  $u = v(x, 0)$  es la ley de control ideal con conocimiento perfecto de la dinámica del sistema. Puesto de esta forma, la dinámica del sistema a lazo cerrado estará dada por:

$$\dot{x} = -\tau_c^{-1}x + e.$$

También, se puede ver que la estabilidad dependerá del error de modelado, es decir, que la dinámica del error de modelado deberá ser estable y tender a cero. Además, se sabe que  $\eta(x) = a_m$  para todo  $t \geq 0$ , por lo que la dinámica del error de modelado  $e \in \mathbb{R}$  puede obtenerse de la ec. (3.4) como:

$$\dot{e} = -\tau_e^{-1}e + \dot{\eta} = -\tau_e^{-1}e + \Xi(x, e),$$

donde  $\Xi(x, e) = f'(x)[\tau_c^{-1}x + e]$ . De esta forma se encuentran las ecuaciones de la dinámica del sistema a lazo cerrado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\tau_c^{-1}x + e, \\ \tau_e \dot{e} &= -e + \tau_e \Xi(x, e). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como  $\Xi(0,0) = 0$ , entonces, el origen corresponde a un punto de equilibrio del sistema (3.7). Como el sistema a lazo cerrado solamente depende de dos parámetros de sintonizado, se tiene que una vez fijado  $\tau_c > 0$ , el parámetro de estimación  $\tau_e > 0$  se convierte en el único parámetro de ajuste. Entonces, la idea para estabilizar al sistema (3.7) será escoger un valor de  $\tau_e$  demasiado pequeño de manera que el error de modelado sea cero, es decir, que  $\bar{\eta}(t) \rightarrow \eta(t)$  y que la función de control (ec. (3.4)) converja a la ideal  $u = v(x,0)$ . La ecuación (3.7) se puede considerar como un sistema singularmente perturbado con  $x$  como la variable lenta y  $e$  como la variable rápida.

Ahora bien, sí la variable  $x(t, \tau_e)$  representa la trayectoria del estado  $x$  en el sistema (3.7) y

$$x^*(t) = \exp(-t/\tau_c)x(0)$$

se tiene la solución del sistema lento  $\dot{x} = -\tau_c^{-1}x$  idealmente controlado (es decir, con  $e = 0$ ). Puesto de esta manera el problema de estabilidad del sistema (3.7), este se va a demostrar usando una generalización del Teorema de Tikhonov's hecha por Saberi y Khalil (1984)<sup>3</sup>. Entonces se procede a describirlo en forma de proposición.

**Proposición 3.1** Dados una constante de tiempo a lazo cerrado  $\tau_c > 0$  y un conjunto acotado  $D \subset \mathbb{R}$  de condiciones iniciales  $x_0$ , se sabe de la existencia de una constante de estimación máxima  $\tau_e^{\max}$ , tal que para todo  $0 < \tau_e < \tau_e^{\max}$ , el origen del sistema (3.7) es un punto de equilibrio asintóticamente estable y el conjunto  $D$  esta contenido en la región de atracción  $\Omega$  del sistema. Y para cualquier valor inicial en los estados contenidos en  $\Omega$ , se tiene que uniformemente  $x(t, \tau_e) \rightarrow x^*(t)$  conforme  $\tau_e \rightarrow 0$ , para todo  $t \geq 0$ .

**Prueba en el Apéndice 3 ■**

Por otro lado, siguiendo un procedimiento similar al realizado en el Capítulo 1, para obtener la estructura de la ley de control compuesta por las ecuaciones (3.4) y (3.7), se supone que la entrada de control esta sujeta a saturaciones, es decir, que  $u = \text{Sat}[\psi(x, \bar{\eta})]$ . Sí además se define  $u_c \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, \bar{\eta}) = -(\bar{\eta} + \tau_c^{-1}x)/g(x)$  como la entrada de control "calculada", se tiene que de (3.7)

$$\dot{w} = \tau_c^{-1}x - g(u - u_c).$$

Además como  $\bar{\eta} = \tau_e^{-1}(w + x)$ , se tiene que la expresión de la entrada de control calculada estará dada por

$$\begin{aligned} u_c &= [-\bar{\eta} + \tau_c^{-1}x]/g(x) = [(\tau_c^{-1} + \tau_e^{-1})x - \tau_e^{-1}w]/g(x) \\ &= [(\tau_c^{-1} + \tau_e^{-1})x + \tau_e^{-1}\tau_c^{-1} \int x(\sigma)d\sigma + \tau_e^{-1} \int g(x(\sigma))\{u(\sigma) - u_c(\sigma)\}d\sigma]/g(x) \end{aligned}$$

donde el término  $\sigma$  es usado como un argumento de integración y también se puede observar que la ley de control es equivalente a un controlador PI con una estructura para prevenir saturaciones (ARW, Khothare et al., 1994), la ganancia  $K_c$  y el tiempo integral  $\tau_I$  de este controlador PI están dadas por las siguientes expresiones:

$$K_c = (\tau_e^{-1} + \tau_c^{-1})/g(x) \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>Para más referencias se puede ver también el trabajo de Esfandari y Khalil, 1992.

$$\tau_I = \tau_e \tau_c (\tau_e^{-1} + \tau_c^{-1}).$$

Puede observarse que el par  $(\tau_e, \tau_c)$  define una ganancia  $K_c$  y un tiempo integral  $\tau_I$  únicos. Como se ha visto y mencionado con anterioridad, esta parametrización provee de manera directa el tiempo de asentamiento a lazo cerrado mediante  $\tau_c$  y la tasa o velocidad de convergencia de la estimación del error de modelado mediante el término  $\tau_e^{-1}$ , por lo que la ley de control PI así obtenida puede interpretarse como un controlador adaptable, en donde la adaptación proviene de la estimación del error de modelado (ec. (3.6)) y el parámetro de adaptación corresponde al término  $\tau_e$ .

También se puede notar que existe una equivalencia entre la parametrización de la ganancia y la del tiempo integral (ec. (3.8)), de manera que  $K_c$  y  $\tau_I$  son invariantes ya sea cuando  $\tau_c \rightarrow \tau_e$  o cuando  $\tau_e \rightarrow \tau_c$ . Esto significa que  $\tau_c$  y  $\tau_e$  inducen el mismo efecto en el desempeño del controlador PI, sin embargo, el límite descrito en la Proposición 3.1  $x(t, \tau_e) \rightarrow x^*(t)$  cuando  $\tau_e \rightarrow 0$  impone una restricción en la designación de valores de  $\tau_c$  y  $\tau_e$ . Entonces, entre más pequeño sea el valor para  $\tau_e$ , será más pequeño el valor máximo permitido de estimación ( $\tau_e^{\max}$ ), lo cual limita el desempeño del sistema a lazo cerrado. Esta limitación también se ve afectada por la influencia de las dinámicas no modeladas y por el ruido en las mediciones del sistema (Morari y Zafriou, 1989). Estos factores limitan el valor mínimo permitido del tiempo de estimación ( $\tau_e^{\min}$ ), de manera que el desempeño descrito por  $\tau_c$ , es decir que  $x(t, \tau_e) \rightarrow x^*(t)$ , no puede ser alcanzado.

De esta forma, se puede ver que existe un margen de estabilidad definido por los límites  $\tau_e^{\max} - \tau_e^{\min}$ , lo que justifica el acuerdo que comunmente existe en control entre el desempeño y estabilidad robusta (Morari y Zafriou, 1989), por lo que entre más se encuentre restringido el desempeño nominal (esto debido a valores pequeños de  $\tau_e$ ), menor será el margen de estabilidad.

Por otro lado, la estructura del controlador saturado permite obtener un esquema para prevenir saturaciones o ARW, el cual está contenido en el término

$$\tau_e^{-1} g(x)[u - u_c], \quad (3.9)$$

con esto se evita que el controlador se quede saturado y que sea capaz de alcanzar el desempeño nominal prescrito.

La estructura para prevenir saturaciones en las acciones de control es proporcionada de manera natural por el esquema de estimación del error de modelado (ec. (3.6)). Debido al esquema ARW el filtro de primer orden (3.6), también es capaz de estimar de manera asintótica la función del error de modelado a pesar de que existan saturaciones en la entrada de control.

La designación de  $\tau_e$  demasiado pequeño puede agrandar la región de atracción manteniendo una regulación semi-global. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la disminución de la ganancia de adaptación  $\tau_e$  puede variar la ganancia de alta frecuencia del controlador, lo cual resulta en esfuerzos grandes y costosos del control, excitando dinámicas no modeladas del sistema, causando la degradación del desempeño e imposibilitando la regulación requerida del sistema controlado. De acuerdo con lo establecido en la Proposición 3.1 esto representa una región máxima de atracción  $\Omega^{\max}$  alcanzable.

En muchos casos prácticos la función  $f(x)$  no es totalmente desconocida, con frecuencia se cuenta con un estimado aproximado de ella  $\bar{f}(x)$ . En estos casos la función incierta  $f(x)$  puede descomponerse en dos partes una conocida ( $\bar{f}(x)$ ) y otra desconocida ( $f^*(x)$ ), de tal forma que

la ley de control se convierte en:

$$u = -\bar{f}(x)/g(x) + [-(\tau_c^{-1} + \tau_e^{-1})x - \tau_c^{-1}\tau_e^{-1} \int_t^0 x(\sigma)d\sigma]/g(x),$$

así expresada, la ley incluye un pre-compensador compuesto<sup>4</sup> y un controlador PI. Debido al conocimiento aproximado de la función  $f(x)$  se espera que este controlador tenga una mejor regulación.

Una vez establecidos los resultados de estabilidad para sistemas de una dimensión, se procede a trabajar con sistemas de dimensión mayor.

### 3.4 Sistemas de mayor dimensión ( $n > 1$ )

La idea desarrollada en la sección anterior de cancelar las no linealidades del sistema y estimar el error de modelado serán usadas en esta sección. Por lo que se define a las funciones del error de modelado como

$$\eta_i(t) \stackrel{def}{=} f_i(x_1(t), \dots, x_i(t)), \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

El diseño de la ley de control para el sistema (3.1) se basará en el siguiente cambio de coordenadas (Kistic et al. 1992 y Polycarpou y Ioannou 1996):

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_{i-1}), \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \quad (3.10)$$

donde  $\bar{\eta}_i(t)$ 's son las funciones estimadas de  $\eta_i(t)$  y  $\alpha_0 = 0$ . Las funciones  $\alpha_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , corresponden a una función intermedia de control (Kistic et al., 1992), las cuales serán escogidas utilizando un procedimiento de backstepping. Las variables  $z_i$ 's pueden verse como el error de seguimiento entre los estados actuales  $x_i$ 's y las funciones de control intermedias  $\alpha_i$ 's. El diseño es recursivo ya que el cálculo de  $\alpha_i$  requiere del valor anterior  $\alpha_{i-1}$ . Cada función intermedia  $\alpha_i$  puede escribirse como  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \beta$ , donde  $\bar{\alpha}_i$  se diseña de acuerdo con un procedimiento de backstepping (Kistic et al., 1992), mientras que las funciones  $\beta$  se pueden diseñar siguiendo el mismo procedimiento hecho en la sección anterior, por lo que corresponden a una función del tipo PI.

#### 3.4.1 Estimación de las funciones del error de modelado

Las funciones o señales del error de modelado  $\eta_i(t)$ , para todo  $1 \leq i \leq n$  son altamente observables, ya que de hecho:

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \dot{x}_i(t) - x_{i+1}(t), \quad \text{para todo } 1 \leq i < n \\ \eta_n(t) &= \dot{x}_n(t) - \gamma u(t). \end{aligned}$$

Como en el los sistemas de dimensión  $n = 1$ , se puede sacar provecho de la propiedad de observación de las funciones del error de modelado mediante las medidas del sistema y de sus

---

<sup>4</sup> $\bar{f}(x)/g(x)$  y también denominado *dc-bias*

derivadas, haciendo uso de un observador de orden reducido. Entonces, si  $a_{mi} = \dot{x}_i(t) - \pi_i$  es la salida "medida", donde  $\pi_i = x_{i-1}$  para todo  $1 \leq i < n$ , y  $\pi_n = \gamma u$ , se tiene:

$$\dot{\bar{\eta}}_i = \tau_e^{-1}(a_{mi} - \bar{\eta}_i) = \tau_e^{-1}(\dot{x}_i(t) - \pi_i - \bar{\eta}_i), \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \quad (3.11)$$

Como en el sistema de una dimensión para poder implantar este observador, se define la variable filtrada como  $w_i \stackrel{def}{=} \tau_e \bar{\eta}_i - x_i$ , con lo cual el esquema de estimación (3.11) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= -\pi_i - \bar{\eta}_i, \\ \bar{\eta}_i &= \tau_e^{-1}(w_i + x_i), \end{aligned} \quad (3.12)$$

el cual puede ser inicializado como  $w_i(0) = -x_i(0)$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Puede verse que con el esquema de estimación anterior se tiene un marco de diseño equivalente que si se usará el error de modelado  $\eta_i(t)$ .

### 3.4.2 El uso de la técnica de backstepping y el diseño del control

La entrada de control va a ser diseñada usando, como ya se dijo, un procedimiento de backstepping (Krstic et al., 1992). Para esto se define al error  $i$ -ésimo de estimación como  $e_i = \eta_i - \bar{\eta}_i$ . Como el procedimiento de diseño es recursivo se describe en los siguientes pasos.

*Paso 1* Se procede a un cambio de variables  $z_2 = x_2 - \alpha_1$  para escribir la dinámica de  $z_1$  como

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) \quad (3.13)$$

donde  $\alpha_1$  será la entrada de control que va a estabilizar la parte nominal del sistema (3.13). Para "cancelar" los efectos de la función no-lineal  $f_1(x_1)$  que además se considera desconocida, se escoge la entrada de control intermedia como:

$$\alpha_1(x_1, \bar{\eta}_1) = -\bar{\eta}_1 - \tau_c^{-1} z_1 = -\bar{\eta}_1 - \tau_c^{-1} x_1 \quad (3.14)$$

Se puede ver que la entrada de control intermedia  $\alpha_1$  depende únicamente de señales conocidas. De esta forma, el sistema a lazo cerrado (3.12), (3.14) es

$$\dot{z}_1 = -\tau_c^{-1} z_1 + z_2 + e_1. \quad (3.15)$$

Dado que el diseño del controlador se basa en un procedimiento en cascada, en este punto del diseño se puede permitir la presencia de  $z_2$  en (3.15). Pero si  $x_2$  fuera el control actual, se debe hacer que  $z_2 \equiv 0$ , por lo que la ecuación del sistema a lazo cerrado (3.15) sería estable cuando el error de estimación  $e_1$  fuera cero, es decir, nos encontraríamos en el sistema de una dimensión, en el cual la entrada de control  $x_2$  sería equivalente a un controlador PI con ganancia y tiempo integral como los descritos en (3.8) y  $g(x) = 1$ .

*Paso 2* Se hace el cambio de variables:  $z_3 = x_3 - \alpha_2$  para escribir la dinámica de  $z_2$  ( $\dot{z}_2$ ) como

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + f_2 + \tau_c^{-1}(x_1 + f_1) + \tau_e^{-1} e_1 \quad (3.16)$$

y se usa  $\alpha_2$  para estabilizar la parte nominal  $(z_1, z_1)$  del sistema (3.15),(3.16). Para “cancelar” los efectos de las no linealidades en  $f_1$  y  $f_2$  se escoge a la entrada intermedia de control como

$$\alpha_2(x_1, x_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = -\bar{\eta}_2 - \tau_c^{-1}z_2 - \tau_c^{-1}(x_2 + \bar{\eta}_1),$$

la cual después de una sustitución de  $\alpha_1$  se convierte en

$$\alpha_2(x_1, x_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = -\bar{\eta}_2 - \tau_c^{-2}x_1 - 2\tau_c^{-1}(x_2 + \bar{\eta}_1), \quad (3.17)$$

Se puede observar que, de manera equivalente para  $\alpha_1$  la función de control intermedia  $\alpha_2$  depende solamente de señales conocidas. El sistema a lazo cerrado (3.16), (3.17) está dado por:

$$\dot{z}_2 = -\tau_c^{-1}z_2 + z_3 + e_2 - \tau_c^{-1}e_1 + \tau_e^{-1}e_1, \quad (3.18)$$

Como el procedimiento del diseño de control es en cascada. en este punto se permite la presencia de  $z_3$  en (3.18). Pero sí  $x_3$  fuera la entrada de control real, entonces se debe hacer que  $z_3 \equiv 0$  y la ecuación del sistema a lazo cerrado (3.15)-(3.18) sería estable cuando los errores de estimación  $e_1$  y  $e_2$  fueran cero. Además, la entrada de control  $x_3$  sería un controlador PI con ganancias parametrizadas como en la ec. (3.8) más el término  $\tau_c^{-1}(x_2 + \bar{\eta}_1)$ .

*Paso 3* Se usa el cambio de variables  $z_4 = x_4 - \alpha_3$  para escribir la dinámica de  $z_3$  como

$$\dot{z}_3 = z_4 + \alpha_3 + f_3 + \tau_c^{-2}(x_2 + f_1) + 2\tau_c^{-1}(x_3 + f_2) + \tau_e^{-1}[e_2 + 2\tau_c^{-1}e_1] \quad (3.19)$$

y en esta ocasión se usa  $\alpha_3$  para estabilizar la parte nominal de la dinámica del sistema  $(z_1, z_2, z_3)$ . Mientras que para cancelar los efectos de las funciones  $f_1, f_2$  y  $f_3$ , se escoge a la entrada intermedia de control como

$$\alpha_3(x_1, x_2, x_3, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3) = -\bar{\eta}_3 - \tau_c^{-1}z_3 - \tau_c^{-2}(x_2 + \bar{\eta}_1) - 2\tau_c^{-1}(x_3 + \bar{\eta}_2),$$

la cual después de la sustitución de  $\alpha_2$ , puede escribirse como

$$\alpha_3(x_1, x_2, x_3, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3) = -\bar{\eta}_3 - \tau_c^{-3}x_1 - 3\tau_c^{-2}(x_2 + \bar{\eta}_1) - 3\tau_c^{-1}(x_3 + \bar{\eta}_2), \quad (3.20)$$

Mientras que la ecuación del sistema a lazo cerrado de (3.19), (3.20) es

$$\dot{z}_3 = -\tau_c^{-1}z_3 + z_4 + e_3 + \tau_c^{-2}e_1 + 2\tau_c^{-1}e_2 + \tau_e^{-1}[e_2 + 2\tau_c^{-1}e_1] \quad (3.21)$$

Como el procedimiento de diseño es en cascada, en esta parte se tolera la presencia de  $z_4$  en (3.21). Sí  $x_4$  fuera la entrada de control actual, entonces se tendría que hacer que  $z_4 \equiv 0$  y la ecuación del sistema a lazo cerrado sería estable cuando los errores de estimación  $e_1, e_2$  y  $e_3$  fueran cero.

**Paso i** Se usa el cambio de coordenadas  $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$  para escribir la dinámica de  $z_i$  como

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + f_i + \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j-1}(x_{j+1} + f_j) + \tau_e^{-1} \left[ e_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} a_{i,j+1} e_j \right], \quad (3.22)$$

donde  $a_{i,j}$  es el coeficiente  $j$ th del polinomio de Hurwitz :

$$P_{i-1} = (s + \tau_c^{-1})^{i-1} = s^{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} a_{i,j} s^j, \quad (3.23)$$

Y de hecho

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i-1-j \end{bmatrix} \tau_c^{-i-1+j},$$

Ahora se usa a la entrada de control intermedia  $\alpha_i$  para estabilizar el sistema  $(z_1, \dots, z_i)$ , así que se escoge como

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_i, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_i) = -\bar{\eta}_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{i+1,j}(x_{j+1} + \bar{\eta}_j), \quad (3.24)$$

donde  $\bar{\eta}_0 = 0$ . Con esto el sistema a lazo cerrado (3.22)-(3.24) queda de la siguiente forma

$$\dot{z}_i = -\tau_c^{-1} z_i + z_{i+1} + e_i + \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j-1} e_j + \tau_e^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{i-2} a_{i,j+1} e_j + e_{i-1} \right] \quad (3.25)$$

Como en los pasos anteriores, el diseño del controlador es en cascada por lo que en esta parte del proceso se permite la presencia de  $z_{i+1}$  en (3.25), sin embargo, si  $x_{i+1}$  fuera la entrada actual de control entonces se haría que  $z_{i+1} \equiv 0$  y la ecuación del sistema a lazo cerrado sería estable si los errores de estimación  $e_j$  para  $1 \leq j \leq i$  fueran cero.

**Paso n** Con el cambio de variables  $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$  se escribe la dinámica del sistema  $z_n$  como

$$\dot{z}_n = f_n + gu + \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j-1}(x_{j+1} + f_j) + \tau_e^{-1} [e_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} a_{n,j+1} e_j], \quad (3.26)$$

En esta ocasión la entrada de control será la real  $u$  para estabilizar la parte nominal de todo el sistema  $z$ , por lo que se escoge que sea de la forma:

$$u = \left[ -\bar{\eta}_n - \tau_c^{-1} z_n - \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n+1,j}(x_{j+1} + \bar{\eta}_j) \right] / g(x),$$

la cual después de sustituirle la entrada de control intermedia  $\alpha_{n-1}$  queda escrita como:

$$u = \left[ -\bar{\eta}_n - \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1,j} (x_{j+1} + \bar{\eta}_j) \right] / g(x) \quad (3.27)$$

Mientras que el sistema completo a lazo cerrado puede verse como

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\tau_c^{-1} z_i + z_{i+1} + e_i + \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j-1} e_j + \\ &\tau_c^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{i-2} a_{i,j+1} e_j + e_{i-1} \right], \quad \text{para todo } i \leq i \leq n \\ \dot{z}_n &= -\tau_c^{-1} z_n + e_n + \tau_c^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j-1} e_j \\ &\tau_c^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{i-2} a_{i,j+1} e_j + e_{i-1} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

el cual puede ser considerado como una parte lineal estable con todos sus polos localizados en  $-\tau_c^{-1} < 0$  y sujeto al error de estimación en forma lineal y perturbada, con parámetro de perturbación  $\tau_e^{-1}$ .

Dada la filosofía de diseño en cascada para este tipo de sistemas es fácil de entender que una vez que se sigue la forma recursiva, cada paso no es más que el diseño de un control PI, como se mostró en el primer capítulo de este trabajo más los términos adicionales debidos al error de modelado aumentado en cada etapa del sistema. Lo que se tiene aquí es una estructura de controladores PI en cascada más otros términos de precompensación.

Una vez dado el procedimiento de diseño, lo que ahora queda es validar el funcionamiento del controlador. Para esto se va a usar el hecho de que la estructura del sistema a lazo cerrado contiene una parte lineal en los estados, más una funcionalidad dependiente de la dinámica de los errores de estimación. Se debe asegurar que los errores de estimación tiendan a cero, es decir, que su dinámica sea estable y más rápida que la dinámica de los estados, lo que lleva al estudio de la dinámica de los errores de estimación.

### 3.4.3 Dinámica de los errores de estimación

Como en el sistema de una dimensión, las incertidumbres son retroalimentadas al sistema ya que  $\eta_i = f_i(x_1(t), \dots, x_i(t))$ . Por lo que la dinámica de los errores de estimación se encuentra afectada por las dinámicas  $\dot{\eta}_i$ , lo cual no pasaría si se tratará de incertidumbre en los parámetros.

Para el desarrollo de las dinámicas de las incertidumbres se usará la ecuación (3.11), de donde:

$$\dot{e}_i = -\tau_e^{-1} e_i + \dot{\eta}_i, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \quad (3.29)$$

Pero como  $\eta_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_i(t))$ , la dinámica del error de estimación se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -\tau_e^{-1} e_i + \sum_{j=1}^i f_{ij}(x_{i+j} + f_j), \quad \text{para todo } 1 \leq i < n, \\ \dot{e}_n &= -\tau_e^{-1} e_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_{nj}(x_{i+j} + f_j) + f_{nn}[f_n + gu], \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ . Así pues, la dinámica del sistema a lazo cerrado se encuentra gobernada por las ecuaciones (3.28) y (3.30). Con estos elementos se hace posible establecer el análisis de las propiedades de estabilidad del sistema.

### 3.4.4 Análisis de estabilidad

Para facilitar el manejo de las ecuaciones se definen los vectores del error de estimación y de las incertidumbres como  $e = (e_1, \dots, e_n)^T$  y  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ . Ahora bien, si la dinámica del vector de perturbaciones fuera cero, es decir que  $\dot{\eta} = 0$ , la dinámica del error de estimación sería  $\dot{e} = -\tau_e^{-1}e$ , estable para valores de  $\tau_e > 0$ . Si esto sucede, las dinámicas del sistema a lazo cerrado estarían representadas por dos sistemas en cascada lineales asintóticamente estables, lo cual implicaría una propiedad de estabilidad asintótica global, es decir, que tanto  $z(t)$  (el estado) como  $e(t)$  (el error) tienden a cero de manera asintótica. Sin embargo, como el error de modelado  $\eta(t)$  es retroalimentado la estabilidad no es global.

De acuerdo al análisis hecho mediante teoría de sistemas no-lineales singularmente perturbados para sistemas de una dimensión, sería deseable encontrar un valor de la constante de estimación  $\tau_e > 0$  suficientemente pequeño, tal que  $e(t) = \eta(t) - \bar{\eta}(t) \rightarrow 0$  de manera rápida, con lo cual el sistema controlado (3.28) tendería a ser asintóticamente estable una vez que la parte del error es cancelada. Esto no se aplica a sistemas de mayor dimensión porque existen términos del orden de  $\tau_e^{-1}$ , tales como  $\tau_e^{-1}[\sum_{j=1}^{i-2} a_{i,j+1}e_j + e_{i-1}]$ , los cuales cuando  $\tau_e$  tome valores arbitrariamente pequeños inducirán fenómenos de desestabilización (por ejemplo, sobredisparos) en el esquema de control, por lo que este tipo de términos pueden ser vistos como obstrucciones en la convergencia del “seguimiento” de la señal  $z \in \mathbb{R}^n$  a cero.

En las ideas originalmente presentadas por Kristic et al. (1992), para el diseño de estructuras de control usando un método de backstepping, se consideró que para la estabilidad del paso  $i$ -ésimo se usaba una función de Lyapunov recursiva del tipo  $V_i = V_{i-1} + z_i^2/2 + \tau_e e_i^2/2$ , con  $V_0 = 0$ . De acuerdo con esto, la estimación para el error de modelado podía llevarse a cabo mediante  $\bar{\eta}_1 = \tau_e^{-1}x_1$  y así de manera recursiva.

Si se realizan una serie de manipulaciones algebraicas en el esquema de estimación aquí presentado, se llegaría a la conclusión de que la estructura del sistema a lazo cerrado (ecs. (2.26) y (2.28)) es equivalente a las funciones de Lyapunov empleadas en el esquema presentado por Kristic et al. (1992). Por lo que el problema de desestabilización provocado por los términos  $\mathcal{O}(\tau_e^{-1})$  está inducido también por la retroalimentación de la señal del error de modelado. De hecho como  $\eta_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_i(t))$ , entonces, para lograr un efecto de estabilización retroalimentada, se requeriría de  $n-i$  derivadas de  $\eta_i(t)$  (ver por ejemplo, Kristic et al. (1992)). Pero solo se están considerando los estimados de la señal del error de modelado  $\eta_i(t)$  y no el de sus derivadas, los efectos de los términos  $\mathcal{O}(\tau_e^{-1})$  siguen sin ser cancelados. Este tipo de obstrucción debido a  $\mathcal{O}(\tau_e^{-1})$  en la estabilidad de  $z(t)$ , parece ser común a los sistemas de control diseñados mediante un procedimiento de backstepping, bajo un conocimiento incierto del modelo (ver Suposición 3.2), por lo que este tipo de problemas requiere de una atención especial para su comprensión, que no forma parte de este trabajo.

De acuerdo con lo mencionado en los párrafos anteriores, se puede ver que la señal de seguimiento  $z(t)$  no puede ser llevada de manera arbitraria a cero cuando se usan valores de la constante de estimación  $\tau_e$  demasiado pequeños. Por lo que se debe buscar una alternativa que

resuelva el problema de estabilidad del controlador aquí propuesto. Para lograrlo se parte del hecho de que la entrada de control (3.27) es equivalente a la siguiente función:

$$u = v(x) \stackrel{def}{=} \left[ -f_n - \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1,j}(x_{j+1} + f_j) \right] / g(x) \quad (3.31)$$

con  $f_0 = 0$ .

En (3.31) el término entre corchetes es una retroalimentación lineal de las señales  $x_i + f_{i-1}$  para  $1 \leq i \leq n$ , el cual puede verse como un estado parcialmente retroalimentado (ver Russo y Bequette, 1997). Por lo que, de acuerdo a esta representación de la estructura en la entrada de control, se realiza un cambio de coordenadas  $x = T(\omega)$ , tal que:

$$\omega_i = x_i + f_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}), \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \quad (3.32)$$

por lo que la entrada de control (3.27) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u &= v(\omega, e) \\ &= \left[ -\phi_n(\omega) + e_n - \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1,j}(\omega_{j+1} - e_{j+1}) \right] / \gamma(\omega) \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $\phi_n(\omega) = f_n(T(\omega))$  y  $\gamma(\omega) = g(T(\omega))$ . Por otro lado, el sistema (3.1) expresado también en coordenadas  $\omega$  queda:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= \omega_{i+1} + \sum_{j=2}^i \mathcal{D}_{i-1,j-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})\omega_j, \quad \text{para todo } 1 \leq i < n, \\ \dot{\omega}_n &= \phi_n(\omega) + \sum_{j=2}^n \mathcal{D}_{n-1,j-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})\omega_j + \gamma(\omega)u, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde  $\mathcal{D}_{ij}(\omega_1, \dots, \omega_i) = f_{ij}(T(\omega))$ . De esta manera, el sistema controlado (3.33), (3.34) se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= \omega_{i+1} + \sum_{j=2}^i \mathcal{D}_{i-1,j-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1})\omega_j, \quad \text{para todo } 1 \leq i < n \\ \dot{\omega}_n &= - \sum_{j=1}^n a_{n+1,j}\omega_j + \sum_{j=2}^n \mathcal{D}_{n-1,j-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})\omega_j + e_n + \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1,j}e_{j+1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por otro lado, la dinámica del error de estimación bajo el nuevo cambio de coordenadas queda

como

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= -\tau_e^{-1}e_i + \sum_{j=1}^i \mathcal{D}_{ij}(\omega_1, \dots, \omega_i)\omega_j, \quad \text{para todo } 1 \leq i < n, \\ \dot{e}_n &= -\tau_e^{-1}e_n + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}_{nj}(\omega_1, \dots, \omega_n)\omega_j + \mathcal{D}_{nn}(\omega)[\phi(\omega) + \gamma(\omega)v(\omega, e)].\end{aligned}\tag{3.36}$$

En una notación más compacta, el sistema dinámico a lazo cerrado compuesto por las ecuaciones (3.35) y (3.36) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= A\omega + N(\omega) + \mathcal{L}_1(e) \\ \tau_e \dot{e} &= -e + \tau_e \mathcal{L}_1(\omega, e)\end{aligned}\tag{3.37}$$

en el cual la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz compañera de los coeficientes

$$\begin{aligned}N(\omega) &= \begin{bmatrix} -a_{n+1,0}, -a_{n+1,1}, \dots, -a_{n+1,n-1}, \\ 0, \sum_{j=2}^2 \mathcal{D}_{i,j-1}(\omega_1)\omega_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}_{n,j}(\omega_1, \dots, \omega_n)\omega_j \end{bmatrix}^T, \\ \mathcal{L}_1(e) &= \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, e_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1,j}e_{j+1} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

y el término  $\mathcal{L}_2(\omega, e)$  corresponde al término residual  $\dot{e} + \tau_e^{-1}e$ . Cabe remarcar que el polinomio característico descrito en la matriz  $A$  corresponde a aquel descrito en la ecuación (3.23) ( $P_n(s)$ ), por lo que la matriz  $A$  es Hurwitz.

El cambio de coordenadas propuesto que nos lleva a la representación del sistema a lazo cerrado (3.37) en coordenadas  $(\omega, e)$ , tiene la ventaja de que los términos que  $\mathcal{O}(\tau_e^{-1})$  no se encuentran ya presentes en la dinámica del sistema de coordenadas  $\omega$ . De esta manera, al igual que en el sistema de una dimensión, el sistema dinámico a lazo cerrado (3.37) se encuentra en una forma no-lineal singularmente perturbada, por lo que se pueden usar los resultados de Khalil y Saberi (1984) para establecer sus propiedades de estabilidad.

Como un pre-requisito para establecer las propiedades de estabilidad del sistema a lazo cerrado (3.37), se deben establecer primero las propiedades del sistema nominal  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$ . Como primera observación del sistema nominal se tiene que como  $N(0) = 0$  entonces, el origen es un punto de equilibrio del sistema nominalmente controlado. A continuación se proponen las propiedades de estabilidad del sistema nominal.

**Proposición 3.1** Existe un valor de la constante de tiempo a lazo cerrado denominada  $\tau_e^{\max} > 0$ , tal que el origen del sistema nominal  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$  es asintóticamente estable para todo  $0 < \tau_e < \tau_e^{\max}$ .

**Prueba** Ver en el Apéndice 3. ■

De acuerdo con el resultado antes presentado, se puede notar que no es posible una colocación

arbitraria de polos del sistema a lazo cerrado. Esto coincide con los resultados obtenidos por Russo y Bequette (1997). De hecho esto es una característica de los diseños de control en cascada.

Además, el hecho de que el origen es un punto asintóticamente estable del sistema nominalmente controlado  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$ , para cualquier valor de la constante de tiempo a lazo cerrado siempre y cuando cumpla con los límites  $0 < \tau_c < \tau_c^{\max}$ . Se tiene que el origen es una región de atracción con un tamaño dependiente de  $\tau_c$  y de  $\Omega_0(\tau_c)$ .

Conforme a los comentarios anteriores a continuación se establece una extensión del resultado de estabilidad para sistemas de más de una dimensión, como una extensión del resultado obtenido para sistemas de una dimensión (ver Proposición 3.1).

Sea  $\tau_c > 0$  una constante de tiempo del sistema a lazo cerrado que cumpla  $0 < \tau_c < \tau_c^{\max}$  y dado cualquier conjunto compacto  $D \subset \Omega_0(\tau_c)$  de condiciones iniciales  $\omega_0$ , existe una constante de estimación máxima  $\tau_e^{\max}$ , tal que para cualquier valor comprendido entre  $0 < \tau_e < \tau_e^{\max}$ , el origen del sistema (3.37) es asintóticamente estable y el conjunto  $D$  se encuentra contenido en la región de atracción  $\Omega$ . Además, para cualquier condición inicial de los estados contenidos en  $\Omega$  se cumple que

$$\omega(t, \tau_e) \rightarrow \omega^*(t) \text{ cuando } \tau_c \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

de manera uniforme para todo  $t \geq 0$ , donde  $\omega(t, \tau_e)$  y  $\omega^*(t)$  son las soluciones del sistema reducido o nominal  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$ .

**Prueba** ver en el Apéndice 3 ■

Respecto de los resultados de estabilidad presentados se hacen los siguientes comentarios:

1. En el sistema de una dimensión se determinó la propiedad de estabilidad semiglobal para todo el espacio de estados  $\mathbb{R}$  y para cualquier  $\tau_c > 0$ . Mientras que para sistemas de dimensión mayor se ha establecido la propiedad de estabilidad semiglobal con respecto al conjunto  $\Omega_0(\tau_c) \subseteq \mathbb{R}^n$  y para todo  $\tau_c < \tau_c^{\max}$ .
2. La relación entre el tamaño de la región de atracción y  $\tau_c$  es un problema que sigue abierto. Sin embargo, un resultado deseable sería que conforme  $\tau_c$  decrezca, el tamaño de la región de atracción  $\Omega(\tau_c)$  aumente. En el ejemplo presentado en este capítulo se estudia esta dependencia.
3. A pesar de que el procedimiento de diseño se presentó para sistemas en forma estrictamente retroalimentada (ec. (3.1)), los primeros  $n - 1$  pasos se pueden considerar iguales para sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_{i+1}, c), & \text{para todo } 1 \leq i \leq n - 1, \\ \dot{x}_n &= f_n(x, c) + g(x)u, \\ \dot{c} &= \psi(x, c), \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$  representa la dinámica interna de un estado no medido. Para completar el diseño de la etapa  $n$ -ésima para este tipo de sistemas se requiere que ciertas condiciones

de factibilidad sean cumplidas (ver Kanellakopoulus, Kokotovic y Morse, 1991). Dichas condiciones están relacionadas con la posible inversión<sup>5</sup> del sistema (3.38) para la salida  $y = x_1$ .

3. Se puede observar que el grado relativo del mapa entrada-salida del sistema  $u \rightarrow x_1$  es igual a la dimensión del sistema (3.1), por lo que se dice que es una planta únicamente con polos (“all-poles”), es decir, que no contiene ningún cero. Una generalización para el tipo de sistemas (3.39) corresponde a aquel en el cual el número de ceros de la planta está representado por la dinámica cero del sistema  $\dot{c} = \psi(x, c)$  (Isidori, 1989). Cuando esto suceda, es decir que existan estados internos no observables, se debe imponer una suposición de mínima fase (como sucede en los Capítulos 1 y 2), para asegurar la existencia de una función de Lyapunov  $V(c)$  tal que  $\dot{V} = [\partial_c V, \psi(0, c)] \leq -\beta(c)$  y  $\beta(c)$  es una función de clase  $KL$  (ver Khalil, 1992). El tamaño de  $\beta(c)$ , por así decirlo, define la velocidad de convergencia de los estados internos, es decir, entre mayor sea  $\beta(c)$  se obtendrá un mejor desempeño del sistema a lazo cerrado, mientras que por el contrario, entre más pequeña sea  $\beta(c)$  el desempeño del sistema a lazo cerrado se verá degradado.

Desde el punto de vista de la teoría de sistemas lineales, esto es equivalente a tener ceros en el lado izquierdo del plano complejo (Maciejowski, 1994):

Cabe mencionar que el control de sistemas *de fase no mínima* sigue siendo un problema abierto.

Por el otro lado, los procesos químicos con entradas múltiples por lo general contiene ceros en el lado derecho del plano complejo (Sistu y Bequette, 1996), lo cual puede limitar de manera drástica el desempeño y la robustez de los sistemas a lazo cerrado. De hecho, el problema de sistemas de fase no mínima puede ajustarse al procedimiento de diseño del tipo de backstepping mediante una “aproximación” de fase-mínima, sin embargo aunque el tratamiento de este problema podría resultar interesante no existen resultados concluyentes (ver por ejemplo, Benvenuti, Di Benedetto y Grizzle, 1994). En el trabajo de Isidori (2000), se realizó un procedimiento para robustificar cierta clase de sistemas no lineales de fase no mínima, esto se hace al utilizar ciertas propiedades de colocación de polos que poseen los sistemas lineales de fase no mínima, que pueden extenderse para sistemas no lineales. Sin embargo, aunque estos resultados representan una herramienta valiosa para el diseño de controladores retroalimentados, solamente pueden aplicarse a cierta clase de sistemas no lineales de fase no mínima.

Dentro de este marco de discusión, cabe mencionar que el resultado establecido en la Proposición 3.1 solamente asegura estabilidad robusta del sistema y que, aunque este tipo de robustez permite un desempeño aceptable, se considera importante establecer un resultado de manera directa al desempeño del sistema a lazo cerrado.

En el estudio del control de sistemas no-lineales, el tema de desempeño robusto es un problema que sigue abierto y que implica relaciones matemáticas muy complicadas como las ecuaciones del tipo Hamilton-Jacobi-Bellman. Para el tipo de sistemas que se está tratando, se

---

<sup>5</sup> conocida también como “left-invertibility”, por sus siglas en inglés.

puede observar que el límite (3.38) establece un criterio de desempeño alcanzable, ya que como  $\omega_1(t) = y(t)$ , entonces se tiene que  $y(t, \tau_e) \rightarrow y^*(t)$  de manera uniforme conforme  $\tau_e \rightarrow 0$ , esto significa que el desempeño logrado mediante el control en cascada con conocimiento perfecto del sistema (ec. (3.31)) es recuperado de manera uniforme mediante el control de PI's en cascada (3.27).

El desempeño nominal del sistema a lazo cerrado se determina mediante una selección apropiada de la constante de tiempo a lazo cerrado, es decir, que cuanto menor sea el valor de  $\tau_c > 0$ , la convergencia del sistema a lazo cerrado será más rápida. De hecho las dinámicas nominales del sistema son  $\dot{z}_i = -\tau_c^{-1}z_i + \chi(z_{i+1}, \dots, z_n)$ , lo cual implica que el término  $\chi(z_{i+1}, \dots, z_n)$  tiende a desaparecer, con lo que las señales de control intermedias  $\alpha_i(t)$  se comportan de forma exponencial ( $+\exp(-t/\tau_c)z_i$ ) en la vecindad del origen.

También cabe mencionar, que existe una conexión entre la estructura de control resultante del procedimiento de backstepping y el método de "gain scheduling". Por un lado, la idea del "gain scheduling" es diseñar un controlador basándose en una familia de plantas que se desarrollan a lo largo de una trayectoria, mientras que el controlador resultante es variante en el tiempo debido a la "adaptación" de los parámetros a la trayectoria de los estados. Además, el procedimiento del backstepping trata de empalmar las trayectorias  $x_i(t)$  a la entrada virtual de control  $\alpha_{i-1}(t)$ . De esta forma en el paso  $i$ -ésimo del diseño de backstepping puede verse como un "gain scheduling"<sup>6</sup> a lo largo de las trayectorias generadas por  $\dot{z}_i = x_i(t) - \alpha_{i-1}(t)$ .

Hasta aquí se han establecido las propiedades de estabilidad y de desempeño del controlador diseñado por la técnica de backstepping, por lo que a continuación se establecen algunas guías del sintonizado para este tipo de controladores en cascada.

### 3.4.5 La estabilidad y sus consecuencias en el sintonizado

Los resultados de estabilidad presentados y los comentarios hechos a propósito sugieren las siguientes guías de sintonizado:

- (a) Como primer paso se deberá escoger la constante de tiempo a lazo cerrado  $\tau_c$ , de tal manera que se induzca el desempeño nominal deseado  $x^*(t)$ . En la vecindad del origen, el sistema  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$  se comportará de manera lineal, es decir, como  $\dot{\omega} = A\omega$  (de hecho,  $N(\omega)$  es del orden  $\omega^2$ ), el cual tiene como polinomio característico a (A.3), cuyas raíces son del orden de  $-\tau_c^{-1}$ . Por lo que las trayectorias del sistema convergerán de manera local a  $x^*(t)$  con una velocidad proporcional a  $-\tau_c^{-1}$ .
- (b) Escoger una valor de la constante de estimación  $\tau_e$  suficientemente pequeño, de tal forma que la convergencia robusta del sistema sea asegurada, es decir que se obtenga un buen desempeño de manera rápida y sin desestabilizar el sistema. De acuerdo al límite (3.38) impuesto en la Proposición 3.1, el desempeño nominal inducido por la elección de  $\tau_c$  será alcanzado conforme  $\tau_e \rightarrow 0$ , es decir, conforme el error de modelado sea estimado rápidamente.

Cabe mencionar que una ventaja del procedimiento de backstepping presentado es que una vez escogida la constante  $\tau_c$ , la sintonización dependerá únicamente del parámetro  $\tau_e$ . A pesar

<sup>6</sup>O ganancia programada, que es un método de diseño de controladores con ganancia variable.

de que este tipo de guías de sintonizado tiene una gran aceptación práctica en la industria, se hacen los siguientes comentarios al respecto:

- (1) De manera contraria a lo que pasa en los controladores tradicionales PI's, se tiene que con la configuración de las ganancias parametrizadas en este trabajo (ec. (3.8)), la mejora en el desempeño entrada-salida (mediante la elección de  $\tau_c$ ) se encuentra desacoplado de la sensibilidad del controlador (la cual depende de  $\tau_e$ ).
- (2) La sintonización del sistema de controladores en cascada obtenidos mediante el procedimiento de backstepping, se puede llevar a cabo de una manera fácil y con un significado físico de los parámetros del sistema siempre y cuando no se encuentren activadas dinámicas no-modeladas y ruidos de medición. Por lo que la robustez del sistema a lazo cerrado se verá incrementada de manera monótonica decreciente con respecto a  $\tau_e^{-1}$ .

Hasta aquí se ha realizado el desarrollo de un procedimiento de diseño de controladores PI en cascada y se han descrito sus propiedades de estabilidad en conjunto con una propuesta en los márgenes de robustez y desempeño y la interacción que entre ellos existe, así como también se han descrito unas guías de sintonizado derivadas de los resultados de estabilidad. Por lo que a continuación solo queda probar el funcionamiento via simulaciones numéricas de los controladores diseñados.

### 3.5 Ejemplo

Se considerará un reactor químico en el cual se llevan a cabo  $m$  número de reacciones químicas frente a un número  $n$  de especies químicas. Un modelo adimensional del sistema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \delta T_j - \delta T + q(T_j - T) + \beta^T R(c, T), \\ \dot{T}_j &= \delta_4(T - T_j) + \delta_1(T_{jf} - T_j)u, \\ \dot{c} &= q(c_f - c) + ER(c, T), \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde:

- .  $T, T_j$  y  $c \in \mathbb{R}^n$  son la temperatura del reactor, la temperatura del sistema de enfriamiento y la concentración del reactor, respectivamente.<sup>7</sup>
- .  $R(c, T) \in \mathbb{R}^m$  es el vector que contiene las velocidades de reacción.
- .  $E \in \mathbb{R}^{q \times m}$  es la matriz de coeficientes estequiométricos.
- .  $\beta \in \mathbb{R}^m$  es el vector que contiene los calores de reacción.
- .  $\delta > 0$  es el coeficiente de transferencia de calor
- .  $q$  es el flujo de alimentación de especies químicas

---

<sup>7</sup>El subíndice "f" denota las condiciones de alimentación.

.  $\delta_1$  es la razón de volúmenes entre el reactor y el sistema de enfriamiento.

La variable manipulada corresponde a  $u$  que es el flujo de entrada al sistema de enfriamiento, mientras que las temperaturas  $T$  y  $T_j$  son las variables o estados medidos.

El objetivo de control es regular la temperatura del reactor  $T$  a una temperatura de operación previamente seleccionada y denominada  $T_{ref}$ . Las variables dimensionales y parámetros como  $\delta_4 = \delta\delta_1\delta_2$ ,  $q$ ,  $\beta$ , etc., son descritos en la Tabla 3.1. Para el diseño del control se tomo en cuenta lo siguiente:

- (a) La relación de volumen  $\delta_1 > 0$  es conocida, mientras que un estimado del coeficiente de transferencia de calor  $\bar{\delta} > 0$  es conocido.
- (b) Las temperaturas de entrada  $T_f$  y  $T_{jf}$ , las temperaturas del reactor  $T$  y del sistema de enfriamiento  $T_j$  y el flujo de entrada al reactor son medidos.
- (c) La expresión de la velocidad de reacción  $R(c, T)$  es altamente incierta. Y como una situación extrema de diseño se considera que es *desconocida*.
- (d) La reacción isotérmica  $\dot{c} = q(c_f - c) + ER(c, \bar{T})$  es asintóticamente estable al punto de equilibrio  $\bar{c} \in \mathbb{R}^q$ . Esto puede verse como una condición de fase mínima de la dinámica no observable del sistema, puesto que las concentraciones del sistema no son medidas.

Como primera parte del diseño se va a cambiar la estructura del sistema (3.40) a la forma (3.39), para lo cual se hace un cambio de variables de la forma  $x_1 = T$  y  $x_2 = \delta T_j$ . Mientras que las funciones  $f_i^s$  se pueden descomponer en su forma conocida  $\bar{f}_i$  y desconocida  $f_i^*$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(x) &= -\bar{\delta}x_1 + q(T_f - x_1), \\ f_1^*(x, c) &= (\delta - \bar{\delta})(x_1 - \bar{\delta}^{-1}x_2) + \beta^T R(c, x_1),\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_2(x) &= \bar{\delta}_4(\bar{\delta}x_1 - x_2) \\ f_2^*(x, c) &= (\delta\delta_4 - \bar{\delta}\bar{\delta}_4)(x_1 - \bar{\delta}^{-1}x_2),\end{aligned}\tag{3.41}$$

De hecho,  $g(x) = \bar{\delta}\delta_1(T_{jf} - \bar{\delta}^{-1}x_2)$ . Si se define que  $\eta_i(t) = f_i^*(x(t), c(t))$  como las señales de los errores de modelado, entonces, siguiendo el procedimiento desarrollado en la Sección 3, la ley de control correspondiente se puede expresar como:

$$u = [-\bar{\eta}_2 - \bar{f}_2(x) - \tau_c^{-2}(x_1 - T_{ref}) - 2\tau_c^{-1}(x_2 + \bar{\eta}_1 + \bar{f}_1(x))/g(x),\tag{3.42}$$

donde  $T_{ref}$  es el punto de operación deseado y los estimados de las funciones del error de modelado  $\bar{\eta}_1$  y  $\bar{\eta}_2$  se obtienen mediante el siguiente esquema de estimación:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -x_2 - \bar{f}_1(x) - \bar{\eta}_1, & \bar{\eta}_1 &= \tau_e^{-1}(w_1 + x_1), \\ \dot{w}_2 &= -g(x)u - \bar{f}_2(x) - \bar{\eta}_2, & \bar{\eta}_2 &= \tau_e^{-1}(w_2 + x_2)\end{aligned}\tag{3.43}$$

Para las simulaciones numéricas se ha tomado el ejemplo estudiado por Russo y Bequette (1997), el cual consiste de una reacción sencilla  $R(c, T) = \phi c \kappa(T)$ , en donde la función  $\kappa(T)$  esta dada por la expresión de Arrhenius.

Los valores de los parámetros se encuentran listados en la Tabla 3.2 y corresponden a los utilizados en el trabajo señalado, en el se muestra que el reactor exhibe un comportamiento de ignición/extinción.

Como una situación extrema para demostrar la eficacia del controlador diseñado, se toma al punto de operación deseado como un punto de operación inestable a lazo abierto, es decir  $T_{ref} = 2.7$ . También se supone que el flujo de entrada al sistema de enfriamiento (entrada de control  $u$ ) esta restringido a tomar valores en el intervalo  $[0, 2]$ . Por otro lado, como el tiempo de residencia tiene un valor de 1, entonces se toma a la constante de tiempo a lazo cerrado igual, es decir que  $\tau_c = 1.0$ .

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento del sistema controlado para las condiciones iniciales  $c_0 = 1$ ,  $T_{j0} = 0$ , el valor del tiempo de estimación como  $\tau_e = 0.1$  y tres diferentes valores para la condición iniciales de la temperatura del reactor ( $T_0$ ). Se puede observar que el controlador (3.42)-(3.43) es capaz de conducir la temperatura del reactor al punto de operación deseado en todas las condiciones iniciales del reactor, a pesar de existir incertidumbres en la tasa de reacción y en los fenómenos de transferencia de calor.

Para probar el comportamiento del controlador diseñado bajo perturbaciones, se hizo un cambio en el punto de operación a  $t = 15$  y una perturbación en la concentración de entrada al reactor de +10% a  $t = 25$ , por lo que en la Figura 3.2 se muestra el comportamiento del reactor controlado para  $\tau_c = 1.0$  y tres diferentes valores del tiempo de estimación  $\tau_e$ . En estas simulaciones se puede observar que el esquema del control en cascada propuesto hace un buen rechazo de las perturbaciones y sobre todo las que se realizan en la concentración de entrada al reactor, que es una variable no medida.

Por último, se considera importante resaltar que el desempeño del controlador se mejora si se escogen valores cada vez más pequeños de  $\tau_e$ , sin embargo, como ya se menciono, valores demasiado pequeños de  $\tau_e$  pueden excitar dinámicas no modeladas del sistema, lo cual traerá como consecuencia desestabilizar el sistema a lazo cerrado.

Tabla 3.1

Variables y parámetros dimensionales

$x_1 = \frac{C_a}{C_{af0}}$	$x_2 = \frac{T-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma$	$x_3 = \frac{T_c-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma$
$q_c = \frac{Q_c}{Q_0}$	$\gamma = \frac{E_a}{RT_{f0}}$	$\kappa(x_2) = \exp \left  \frac{x_2}{1+x_2/\gamma} \right $
$\beta = \frac{(-\Delta H)C_{af0}}{\rho C_p Q_0}$	$\delta = \frac{UA}{\rho C_p Q_0}$	$\phi = \left( \frac{V}{Q_0} \right) k_0 e^{-\gamma}$
$q = \frac{Q}{Q_0}$	$\tau = \left  \frac{Q_0}{V} \right  t$	$\delta_1 = \frac{V}{V_c}$
$\delta_2 = \frac{\rho C_p}{\rho_c C_{pc}}$	$x_{1f} = \frac{C_{af}}{C_{af0}}$	$x_{2f} = \frac{T_f-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma, x_{3f} = \frac{T_{cf}-T_{f0}}{T_{f0}} \gamma$

Tabla 3.2

Valores de los parámetros

Parámetro	Caso 1	Caso 2	Parámetro	Caso 1	Caso 2
$\phi$	0.11	0.072	$\delta_1$	10	10
$\beta$	7.0	8.0	$\delta_1$	1.0	1.0
$\delta$	0.5	0.3	$x_{1f}$	1.0	1.0
$\gamma$	20	20	$x_{2f}$	0.0	0.0
$q$	1.0	1.0	$x_{3f}$	-1.0	-1.0

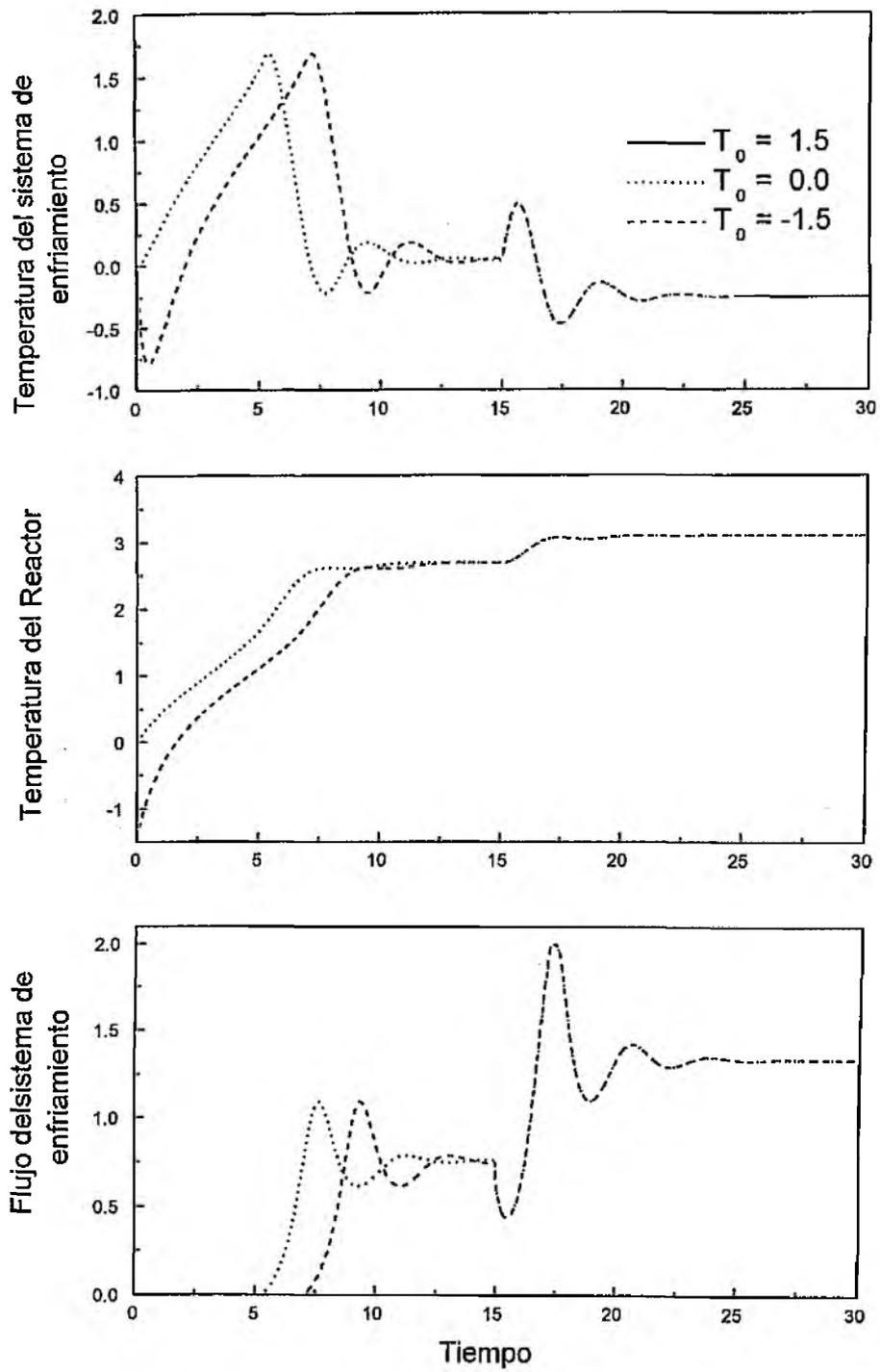


Figura 3.1 Desempeño del sistema controlado.

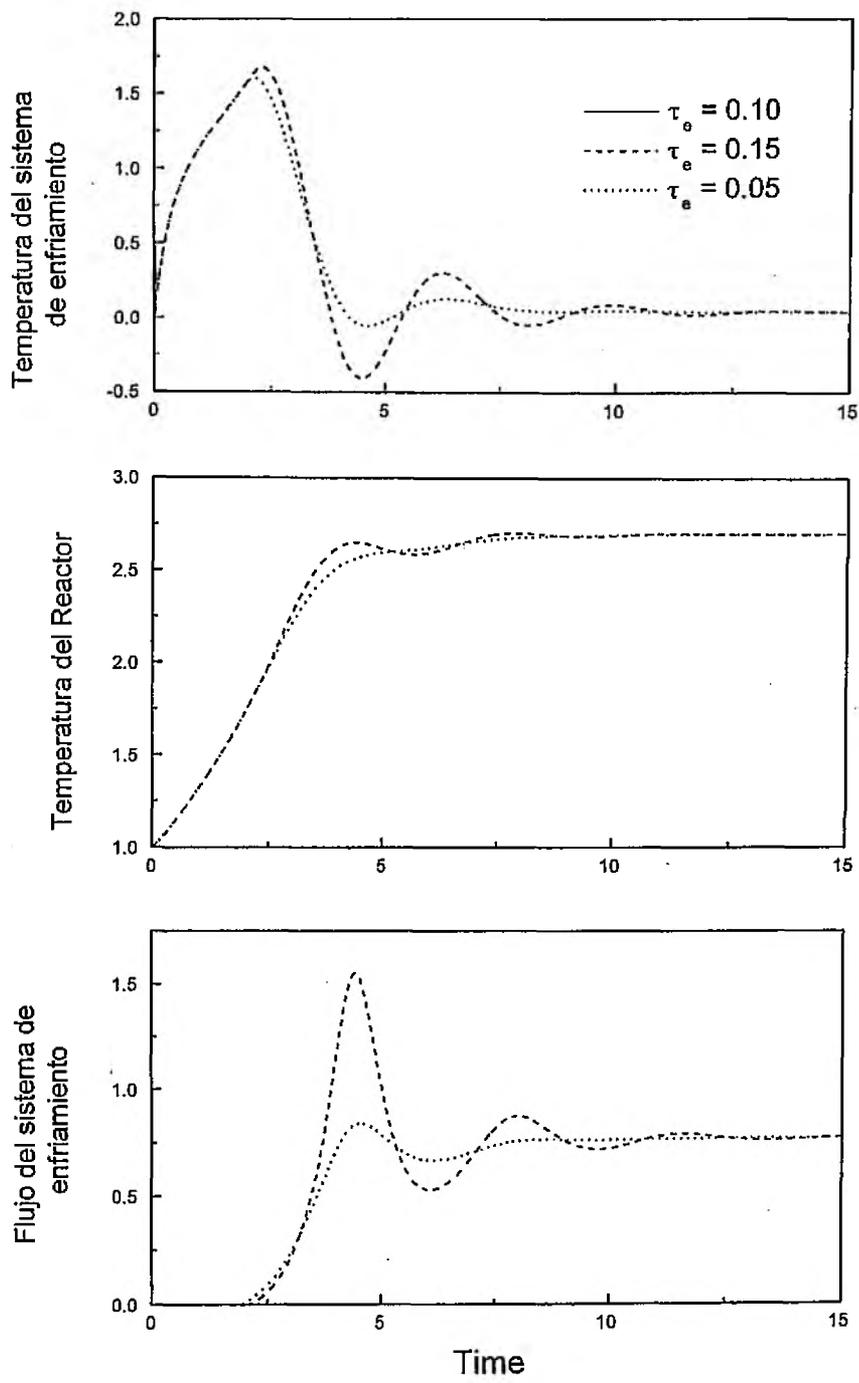


Figura 3.2 Desempeño del reactor controlado para diferentes valores de  $\tau_e$ .

### 3.6 Conclusiones

Se presentó un procedimiento de diseño para un esquema de control adaptable en señales, para la regulación de sistemas no lineales con funcionalidades altamente no lineales y desconocidas.

Se aprovechó el hecho de que las incertidumbres en el modelo eran altamente observables, con lo cual su estimación se llevo a cabo mediante una serie de observadores de orden reducido o filtros.

En el sistema de una dimensión se encontró que la estructura del controlador propuesto equivale a un PI, el cual posee una propiedad de estabilidad semiglobal. En los sistemas de mayor dimensión, se hizo una extensión de estos resultados mediante un diseño del tipo backstepping. Sin embargo, diferente a lo que sucedió en el sistema de una dimensión, la extensión no fué directa por que existían términos del orden  $\tau_e^{-1}$  que desestabilizaban al controlador conforme  $\tau_e \rightarrow 0$ . Para corregir esto se tuvo que hacer un cambio de coordenadas mediante el uso de una función parcial de retroalimentación.

En el procedimiento de backstepping se demostró que la estructura del controlador equivalía a una serie de PI's en cascada más unos términos adicionales debidos a las funciones del error de modelado. El esquema de control mostró buenos resultados cuando fué aplicado a un RTAC con dinámica en el sistema de enfriamiento.

### 3.7 Apéndice 3

**Prueba de la Proposición 3.1.** Para realizar la prueba se tomo en cuenta lo siguiente: (i) La dinámica del sistema lento es de la forma:  $\dot{x} = -\tau_c^{-1}x$ , que es lineal y exponencialmente estable al origen, y (ii) que existen dos constantes positivas  $v_1$  y  $v_2$  independientes de  $\tau_e$ , de tal manera que acotan al término no lineal  $\Xi(x, e)$  en (3.7) como sigue

$$\|\Xi(x, e)\| \leq v_1 \|x\| + v_2 \|e\|$$

para cualquier valor  $(x, e) \in D \times \mathbb{R}$ . Por lo que el resultado presentado en la Proposición 3.1 se prueba de manera directa como una aplicación del Teorema 1 del trabajo de Efsandiari y Khalil (1992). ■

**Prueba de la Proposición 3.2.** Se sabe que la linealización de Taylor alrededor del origen del sistema  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$  está dada por  $\dot{\omega} = (A + \Delta A)\omega$ , donde  $\Delta A_{ij} = D_{i-1, j-1}(0, \dots, 0)$  para todo  $1 \leq i$  y  $j \leq n$ . Entonces, el sistema linealizado  $\dot{\omega} = (A + \Delta A)\omega$  puede verse como un sistema lineal más una perturbación aditiva  $\Delta A\omega$ . También se tiene de que las constantes  $\{-a_{n+1,0}, -a_{n+1,1}, \dots, -a_{n+1,n-1}\}$  pueden escribirse como

$$a_{n+1,j} = \tau_c^{-n+j} \beta_j, \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq n-1, \quad (\text{A.1})$$

donde el término  $\beta_j$ 's corresponde a constantes positivas. Con estos hechos se va a demostrar que para valores suficientemente pequeños de  $\tau_c > 0$  la matriz  $A + \Delta A$  es Hurwitz, con lo cual el sistema  $\dot{\omega} = (A + \Delta A)\omega$  sería estable. Entonces, como  $D_{ij}(\omega_1, \dots, \omega_i) = f_{ij}(T(\omega))$  se tiene que  $\Delta A_{i1} = 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Se tiene que el término  $\Delta A_{ij} = 0$  para  $j > i$ , es decir, se sabe que  $\Delta A$  es una matriz triangular inferior con todos los primeros términos de la primera columna igual a cero. Bajo esta estructura, el polinomio característico de la matriz  $A + \Delta A$

puede escribirse como

$$s^n + \sum_{j=1}^n \delta_{j-1}(\tau_c^{-1}) s^{j-1} = 0 \quad (\text{A.2})$$

en el cual el término  $\delta_{j-1}(\tau_c^{-1})$  es una función polinomial de grado  $n-j-1$  y con un coeficiente superior igual a  $\tau_c^{-n+j-1} \beta_{j-1}$ . Además, como el polinomio

$$s^n + \sum_{j=1}^n \tau_c^{-n+j-1} \beta_{j-1} s^{j-1} = 0 \quad (\text{A.3})$$

es Hurwitz para cualquier valor de  $\tau_c > 0$ , con un argumento sencillo de localización de polos se puede concluir que existe un valor positivo denominado  $\tau_c^{\max} > 0$  tal que el polinomio dado en la ecuación (A.2) es Hurwitz para cualquier valor de  $0 < \tau_c < \tau_c^{\max}$ . Con esto se concluye la prueba. ■

**Prueba de la Proposición 3.3.** Para realizar esta demostración se hace uso de lo siguiente: (i) de la Proposición 3.2 se sabe que la dinámica del sistema lento  $\dot{\omega} = A\omega + N(\omega)$  es lineal y exponencialmente estable alrededor del origen; (ii) el sistema rápido  $\tau_e \dot{e} = -e$  es exponencialmente estable alrededor del origen; y (iii) existen tres constantes positivas de  $v_1$  a  $v_3$  independientes de  $\tau_e$  tales que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(e)\| &\leq v_1 \|e\| \\ \|\mathcal{L}_2(\omega, e)\| &\leq v_2 \|\omega\| + v_3 \|e\| \end{aligned}$$

para todo el par  $(\omega, e) \in D \times \mathbb{R}^n$ . Con lo cual el resultado se obtiene directamente de la aplicación del Teorema 1 del trabajo de Esfandiari y Khalil (1992). ■

### 3.8 Bibliografía

- Brambilla, A., Semino, D., & Scali, D. (1994). Design and control selection of cascade loops in distillation. *IFAC workshop on integration of process design and control*, Baltimore, MD, 171-177.
- Benvenuti, L., Benedetto, A. D., & Grizzle, J. W. (1994). Approximate output tracking for nonlinear non-minimum phase systems with an application to flight control. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 4, 397-414.
- Bequette, B. W. (1988). Practical approaches to nonlinear control, a review of process applications. In Barber, C. Kravaris, NATO ASI Series, Vol. E. Dordrecht: Kluwer.
- Diop, D., Fliess M. (1991). On nonlinear observability. In *Proceedings of the first European Control Conference*, 152-157.
- Esfandiari, F., & Khalil, K. K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of Control*, 56, 1007-1037.
- Hotzel, R., & Karsenti, L. (1998). Adaptive tracking strategy for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, 1272-1279.

- Isidori, A. (2000). A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45, 1817-1827.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear control systems*. New York: Springer Verlag.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V., & Morse, A. S. (1991). Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1241-1253.
- Karsenti, L., Lamnabhi-Lagarrigue, F., & Bastin, G. (1996). Backstepping technique extended to nonlinear parametrization. *Systems & Control Letters*, 27, 87-97.
- Khalil, H. K. (1992). *Nonlinear systems*. New York: McMillan.
- Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M., & Nett, C. N. (1994). A unified study of anti-windup designs. *Automatica*, 30, 1869-1883.
- Krishnaswamy, P. R., Rangaiyah, J. P., Jha, R. K., & Desphande, P. B. (1990). When to use cascade control. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 29, 2163-2166.
- Kristic, M., Kanellakopoulos, I., & Kokotovic, P. V. (1992). Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems & Control Letters*, 19, 177-185.
- Lee, Y., Park, S., & Lee, M. (1998). PID controller tuning to obtain desired closed loop responses for cascade control systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 37, 1859-1865.
- Luyben, W. (1973). Parallel cascade control. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 12, 463-471.
- Maciejowski, J. M. (1994). *Multivariable feedback design*. Workingham, England: Addison-Wesley.
- Morari, M., & Zafiriou, E. (1989). *Robust process control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Polycarpou, M. M., & Ioannou, P. A. (1996). A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica*, 32, 423-427.
- Russo, L. R., & Bequette, B. W. (1997). State space versus input/output representations for cascade control of unstable systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 36, 2271-2278.
- Saberi, A., & Khalil, H. K. (1984). Decentralized stabilization of a class of nonlinear interconnected systems. *International Journal of Control*, 36, 803-818.
- Sistu, P. B., & Bequette, B. W. (1996). Nonlinear model predictive control: closed-loop stability analysis. *AIChE. Journal*, 42, 3388-3401.
- Wolff, E. A., & Skogestad, S. (1996). Temperature cascade control of distillation columns. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 35, 475-484.

## Capítulo 4

# Conclusiones generales

En este trabajo se desarrollaron técnicas robustas de control para algunas clases de reactores químicos continuos. En la parte del diseño se procedió en dos pasos: en el primero se diseñó un control retroalimentado, para lo cual se agruparon las incertidumbres del modelo en una función denominada error de modelado. En el segundo paso se desarrolló un esquema de estimación mediante el uso de observadores de orden reducido para estimar la función del error de modelado. Se encontró que el conjunto controlador-observador presentaba una estructura clásica de control tipo PI/PID. Para la implantación del control se usó una versión del tipo retroalimentada, ya que en ella se usaba la estimación del error de modelado.

Para el primer sistema de estudio, el cual correspondió a un sistema de grado relativo 1, se desarrolló un controlador clásico PI, más algunos términos adicionales debidos a la saturación del controlador y al uso de algunas cotas en los parámetros desconocidos.

Para el segundo sistema de estudio, que correspondió a un sistema de grado relativo 2, se desarrolló un controlador clásico PID más los términos adicionales de precompensación y los derivados a la saturación de la entrada de control.

Para el tercer sistema de estudio, el cual correspondió a un sistema en forma estrictamente retroalimentada y de grado relativo  $n$ , se construyó una cascada de controladores PI's más los términos adicionales debidos a la retroalimentación de los errores de modelado.

La estructura del controlador se dividió en dos subsistemas: uno derivado de la dinámica del sistema a lazo cerrado y otro derivado de la dinámica de los errores de estimación. Ambos se encontraban interconectados, de manera que para demostrar la estabilidad de cada subsistema se requería del otro. Desde un punto de vista práctico se tenía que estimar más rápido de lo que se controlaba, esto se vio reflejado en la escalación de la dinámica de los errores de estimación mediante el tiempo de estimación  $\tau_e$ . Esto derivó en una estructura de sistemas de dinámicas con diferentes tiempos de respuesta, haciendo posible la determinación de las propiedades de estabilidad mediante el uso de algunos resultados establecidos para sistemas singularmente perturbados.

En el tercer sistema de estudio se requirió de un cambio de coordenadas para no inducir fenómenos de desestabilización debidos a los términos del orden  $\tau_e^{-1}$ . Principalmente, los resultados de estabilidad se basan en los siguientes hechos:

- La dinámica no observada de la concentración es estable para una temperatura constante, es decir, se tomó una suposición de fase mínima.

- Con lo anterior, se estableció que la dinámica nominal del sistema a lazo cerrado es estable para  $\tau_c > 0$  y esto se cumple para la vecindad del origen. Entonces, la parte dependiente de la dinámica de los errores de estimación se desvanecerá en el origen.
- Para determinar la estabilidad de la dinámica de los errores de estimación se recurrió al hecho de que las funciones y parámetros inciertos son funciones acotadas, con lo cual se estableció que existía un  $\tau_e^{\max}$ , de tal manera que cuando se escogiera al tiempo de estimación en un intervalo  $0 < \tau_e < \tau_e^{\max}$ , la estabilidad del sistema quedaría asegurada.

Por lo que en la determinación de las propiedades de estabilidad se observó que se requería de la sintonización de dos parámetros, el tiempo característico a lazo cerrado ( $\tau_c$ ) y el tiempo de estimación ( $\tau_e$ ), y que existía un compromiso en su designación para establecer la robustez y la recuperación del desempeño del sistema controlado. Así que una vez establecido uno sólo se requería determinar el otro haciendo uso de los límites impuestos en el establecimiento de las propiedades de estabilidad.

El máximo desempeño alcanzable de los controladores robustos es recuperar el comportamiento del control realimentado ideal. Se observó que en todos los casos esto se llevaba a cabo haciendo tender al tiempo de estimación a valores suficientemente pequeños.

Se encontró que para evitar el fenómeno de “peaking” o sobredisparo, debido al estimador de alta ganancia, se debía saturar la entrada de control, lo cual también representa la imposición de los límites de operación física de los elementos finales de control como válvulas. Sin embargo, se ha reportado en literatura reciente que no sólo se puede evitar este fenómeno con la saturación de las entradas de control, sino también acotando los estados medidos.

*El principal resultado de la investigación realizada, corresponde al hecho de que se demostró que contrario a lo que se creía, un controlador PI/PID es capaz de establecer resultados de estabilidad semi-globales al trabajar con sistemas no lineales, como lo son los RTAC.*

*También se determinó el lugar que ocupan estos controladores clásicos en el estudio de la teoría de control moderno, al usar un control de tipo retroalimentado y un esquema de observación de orden reducido.*

*La parametrización que de ellos se obtiene sale de manera natural, lo cual establece un conjunto de ganancias dependientes del tiempo característico a lazo cerrado y del tiempo de estimación. Esto provee un significado físico de lo que el sistema impone para su control, ya que el tiempo característico a lazo cerrado se escoge del orden del tiempo natural del sistema. Por lo que una vez establecido un comportamiento deseado, solo queda elegir el tiempo de estimación, el cual debe ser más rápido que el tiempo característico y debe cumplir los límites impuestos por el análisis de estabilidad.*

Con los esquemas de control diseñados, también se puede obtener la recuperación de la región de atracción del sistema haciendo que el tiempo de estimación tienda a valores muy pequeños, sin embargo esto puede ocasionar problemas de sobredisparo, deterioro en la recuperación de desempeño e incluso desestabilización del sistema controlado, por lo que se remarca de nuevo el compromiso que existe entre desempeño y robustez: *a donde se quiere llegar, como se quiere llegar y a que costo.*

Entre las ventajas y desventajas que la técnica de control desarrollada presenta.

*Ventajas:*

1. El esquema de control diseñado provee una manera más sencilla de sintonizar un controlador PI/PID.
2. Se da una mejor comprensión del funcionamiento de los controladores PI/PID en RTAC.
3. A diferencia de lo que pasa en control adaptable tradicional, la adaptación u observación se hace en señales, por lo que se usan menos ecuaciones. Con esto se simplifica la programación del controlador.
4. Los resultados presentados para el control en cascada de JCR, se pueden considerar como una generalización de los trabajos antes realizados. Con esto se logra el establecimiento de propiedades de estabilidad semiglobales de controladores PI en cascada.
5. Con respecto a los trabajos realizados en el control de JCR's, se cuenta con una estructura más sencilla de diseño, lo que se facilita su uso y entendimiento.

*Desventajas:*

1. La técnica de control diseñada no fué probada con ruido de medición. Existe la posibilidad de que el esquema de control sufra un deterioro en su funcionamiento si hay ruido de medición.
2. Pueden existir parámetros variantes en el tiempo, para este caso no se presentaron resultados de estabilidad concretos, por lo que existe la incertidumbre del funcionamiento del controlador diseñado.
3. El uso de la técnica de backstepping genera el problema de que se están retroalimentando los errores de modelado y sus  $n - i$  derivadas. Esto genera obstrucción en la estabilidad del diseño en cascada.
4. El funcionamiento del esquema de control diseñado no se garantiza para sistemas de fase no mínima.

Una vez establecidas las conclusiones generales del trabajo a continuación se mencionan algunos problemas que siguen abiertos.

## 4.1 Problemas Abiertos

Las propiedades de estabilidad fueron desarrolladas sin tomar en cuenta la influencia del ruido de medición, ni la activación de dinámicas no modeladas, por lo que esto es un tema de investigación a futuro, en el marco de diseño de controladores robustos tipo PI/PID.

Por otro lado, el problema de seguimiento de trayectorias fué implícitamente tomado en cuenta en el tercer sistema de estudio, para la cascada o cascadas intermedias, como una función de un punto de operación impuesto. Sin embargo, el problema de seguimiento de trayectorias en reactores por lotes, es un problema que no se ha tratado mediante el tipo de controladores aquí diseñados, así que es un tema que se considera a futuro.

Tampoco se estableció de manera estricta, el desarrollo de una técnica de sintonización, ya que únicamente se desarrollaron algunas guías de sintonizado derivadas de los resultados de estabilidad.

El problema del control de dinámicas no observables, del tipo fase no mínima, es un problema muy difícil de trabajar. Como ya se mencionó en el Capítulo 3, podría trabajarse como su descomposición en una parte nominal de fase mínima y otra de fase no mínima al incluirla en el error de modelado. Sin embargo no existen trabajos concluyentes que sirvan de guía para su tratamiento, por lo que es un problema que deberá considerarse a futuro, ya que existen procesos químicos, como las unidades de FCC en la industria del petróleo, que tienen características de fase no mínima.

En la industria de procesos, generalmente se toma como entrada de control el flujo de alimentación al reactor de algún reactivo o incluso en reactores de polimerización, a la entrada de iniciador. En este trabajo no se tomó en cuenta esta entrada de control, que posiblemente representaría un proceso más real y con mayor significado físico para la gente de operación en planta. Por lo que se debe tomar en cuenta un futuro desarrollo de esquemas de control en esta dirección, ya que se facilitaría el entendimiento por parte de la gente de la industria y su posible implantación en un proceso real. Cabría esperar que no existirían cambios considerables en cuanto a las condiciones del problema y a los resultados de estabilidad. También se sugiere la aplicación de esta técnica de diseño de controladores para un proceso industrial.

El problema de la transmisión de los errores de modelado en los esquemas en cascada parece ser un problema común que causa desestabilización en el desarrollo de esquemas de control por el método de backstepping, ya que se requieren de los estimados de las funciones de los errores de modelado y de sus  $n - i$  derivadas, por que al estar induciendo la retroalimentación de la señal del error de modelado se provocan términos del tipo  $\mathcal{O}(\tau_e^{-1})$ , los cuales causan inestabilidades al hacer tender  $\tau_e \rightarrow 0$ . Como ya se mencionó en el Capítulo 3, esto parece ser común a sistemas de control diseñados mediante un procedimiento de backstepping bajo un conocimiento incierto del modelo, por lo que este tipo de problemas requiere de una atención especial para su comprensión, lo cual no forma parte de este trabajo y se considera un problema abierto.

# Capítulo 5

## Herramientas

En esta parte del trabajo se pusieron las herramientas usadas en la determinación de las propiedades de estabilidad de los tres capítulos anteriores. También se presentan algunos conceptos preliminares de estabilidad.

### 5.1 La estabilidad de sistemas dinámicos

Como un primer paso se establecerán algunos conceptos de estabilidad para ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{h.1})$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t \geq 0$ .

Se dice que el sistema definido en (h.1) es autónomo o invariante en el tiempo si  $f$  no es una función dependiente de  $t$  y se dice que es no autónomo o variante en el tiempo si sucede lo contrario. También se dice que es lineal si  $f(t, x) = A(t)x$  para alguna  $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  o de lo contrario es no lineal.

Para establecer los conceptos de estabilidad se va a suponer que  $f(t, x)$  es una función continua en  $t$ . Con esto se quiere decir que existen un número finito de puntos discontinuos en un conjunto compacto.

También se define a  $B_h$  como una “bola” cerrada de radio “ $h$ ” y centrada en el 0 del espacio de funciones  $\mathbb{R}^n$ .

Las propiedades del sistema (h.1) van a ser clasificadas de acuerdo a los criterios que se muestran a continuación:

- Locales si se cumplen para todo  $x_0$  en alguna bola  $B_h$ .
- Globales si se cumplen para toda  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .
- En cualquier bola cerrada si se cumplen para toda  $x_0 \in B_h$ , para cualquier valor de  $h$ .
- Uniformes si son ciertas para cualquier valor de  $t_0 \geq 0$ .

Se da por hecho que las propiedades son ciertas al menos localmente.

Ahora se mencionan las consecuencias de imponer condiciones de tipo Lipschitz.

**Condiciones Lipschitz**

Se dice que una función  $f$  es Lipschitz en  $x$  si para algún  $h > 0$  existe una constante  $l \geq 0$  tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq l |x_1 - x_2| \quad (\text{h.2})$$

para cualquier valor de  $x_1, x_2 \in B_h$  y  $t \geq 0$ . La constante  $l$  es llamada *constante de Lipschitz*. Con esto se define las funciones de Lipschitz locales, mientras que para el caso de funciones globales se tiene que cumplen la condición (h.2) para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  y las funciones que son Lipschitz en cualquier bola satisfacen la misma condición para todo  $x_1, x_2 \in B_h$  con  $l$  posiblemente dependiente de  $h$ . Además, se supone que la propiedad Lipschitz de las funciones es uniforme, es decir, que  $l$  no depende de  $t$ .

Si una función  $f$  es Lipschitz en  $x$ , entonces es continua en  $x$ . Por otro lado, si  $f$  tiene derivadas parciales continuas y acotadas en  $x$ , entonces también es Lipschitz, lo cual de manera formal se denota como:

$$D_2 f := \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (\text{h.3})$$

por lo que  $\|D_2 f\| \leq l$ , entonces  $f$  es Lipschitz con una constante  $l$ .

Cabe mencionar que de la teoría de ecuaciones diferenciales se sabe que  $f$  esta acotada localmente y el hecho de que  $f$  sea localmente Lipschitz en  $x$  implica la existencia y la unicidad de soluciones del sistema (h.1) en algun intervalo de tiempo, para una  $x \in B_h$ .

#### Definición de punto de equilibrio

$x$  se denomina como punto de equilibrio de (h.1) si  $f(t, x) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .

Mediante el traslado del origen a un punto de equilibrio  $x_0$ , se puede hacer que el origen sea un punto de equilibrio, esto es de gran ayuda, sobre todo en cuestión de notación, por lo que de aquí en adelante se va asumir al origen como un punto de equilibrio.

**Proposición H.1.** Si  $x = 0$  es un punto de equilibrio de (h.1),  $f$  es Lipschitz en  $x$  con una constante  $l$  y es continua por tramos con respecto a  $t$ . Entonces, la solución  $x(t)$  de (h.1) satisface lo siguiente:

$$|x_0| \exp[l(t - t_0)] \geq |x(t)| \geq |x_0| \exp[-l(t - t_0)] \quad (\text{h.4})$$

conforme  $x(t)$  se aproxime a  $B_h$ .

**Prueba de la Proposición h.1** Se puede ver que  $|x|^2 = x^T x$  implica que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} |x|^2 \right| &= 2|x| \left| \frac{d}{dt} |x| \right| \\ &= 2 \left| x^T \frac{d}{dt} x \right| \leq 2|x| \left| \frac{d}{dt} x \right| \end{aligned} \quad (\text{h.5})$$

por lo que

$$\left| \frac{d}{dt} |x| \right| \leq \left| \frac{d}{dt} x \right| \quad (\text{h.6})$$

Como  $f$  es una función Lipschitz se tiene que

$$-l|x| \leq \frac{d}{dt} |x| \leq l|x| \quad (\text{h.7})$$

además, existe una función positiva  $s(t)$  tal que

$$\frac{d}{dt}|x| = -l|x| + s \quad (\text{h.8})$$

Ahora bien, resolviendo (h.8)

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x_0| \exp[-l(t-t_0)] + \int_0^t \exp[-l(t-\tau)] s(\tau) d\tau \\ &\geq |x_0| \exp[-l(t-t_0)] \end{aligned} \quad (\text{h.9})$$

La otra desigualdad se comprueba de manera similar usando (h.7). ■

La Proposición H.1 implica que las soluciones que comienzan dentro de  $B_h$  se mantienen allí al menos en un intervalo de tiempo finito. Puesto de otro modo, dado un intervalo de tiempo, se sabe que las soluciones se mantendrán en  $B_h$  mientras que las condiciones iniciales sean suficientemente pequeñas. Además, el hecho de que  $f$  sea globalmente Lipschitz implica que  $x \in L_{\infty\epsilon}$ , por lo que la Proposición H.1 también dice que  $x$  no puede tender a cero más rápido que de manera exponencial.

### 5.1.1 Definiciones de estabilidad

De manera informal, se puede decir que  $x = 0$  es un punto de equilibrio si las trayectorias  $x(t)$  se mantienen cerca de 0 si las condiciones iniciales  $x_0$  se encuentran cerca de 0.

### 5.1.2 Definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov

$x = 0$  se denomina como un punto de equilibrio *estable* del sistema (h.1), si para todo  $t_0 \geq 0$  y  $\epsilon > 0$  existe una función  $\delta(t_0, \epsilon)$  tal que

$$|x_0| < \delta(t_0, \epsilon) \implies |x(t)| < \epsilon, \text{ para todo } t \geq t_0$$

donde  $x(t)$  es la solución de (h.1) comenzando de  $x_0$  a  $t_0$ .

#### Definición de estabilidad uniforme

$x = 0$  se denomina como punto de equilibrio *uniformemente estable* de (h.1) si en la definición anterior  $\delta$  se puede escoger de manera independiente de  $t_0$ .

De manera intuitiva, se puede decir que la definición anterior expresa que un punto de equilibrio no se desestabiliza con el tiempo. A continuación se define la estabilidad asintótica.

#### Definición de estabilidad asintótica

$x = 0$  se denomina como un punto de equilibrio *asintóticamente estable* de (h.1) si

(a)  $x = 0$  es un punto de equilibrio de (h.1)

(b)  $x = 0$  es un atractor, es decir, para todo  $t_0 \geq 0$  existe una función  $\delta(t_0)$  tal que

$$|x_0| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

#### Definición de estabilidad asintótica uniforme

$x = 0$  se denomina como un punto de equilibrio *uniformemente asintóticamente estable* (u.a.e.) de (h.1) si

- (a)  $x = 0$  es un punto de equilibrio uniformemente estable de (h.1)
- (b) si las trayectorias de  $x(t)$  convergen a 0 de manera uniforme en  $t_0$ . De manera más precisa, existe  $\delta > 0$  y una función  $\gamma(\tau, x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0$  para todo  $x_0$  y

$$|x_0| < \delta \implies |x(t)| \leq \gamma(t - t_0, x_0), \text{ para todo } t \geq 0$$

La definición anterior es de naturaleza local, ya que solo involucra vecindades en el origen. Por lo que a continuación se establece la estabilidad asintótica y *global*.

#### Definición de estabilidad asintótica y global

$x = 0$  se denomina como un punto de equilibrio *globalmente asintóticamente estable* del sistema (h.1), si es asintóticamente estable y además  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ , para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Se puede observar que las definiciones de estabilidad asintótica no implican ni cuantifican la velocidad de convergencia, por lo que a continuación se define la velocidad de convergencia exponencial.

#### Definición de estabilidad exponencial y la velocidad de convergencia

$x = 0$  se denomina como un punto de equilibrio exponencialmente estable de (h.1) si existen unas constantes  $m, \alpha > 0$  tales que la solución  $x(t)$  satisface que

$$|x(t)| \leq m \exp[-\alpha(t - t_0)] |x_0| \tag{h.10}$$

para todo  $x_0 \in B_h$  y  $t \geq t_0 \geq 0$ . Donde la constante  $\alpha$  se denomina como *la velocidad de convergencia*.

La estabilidad global y exponencial significa que (h.10) se satisface para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Mientras que la estabilidad exponencial en cualquier bola cerrada es similar excepto que  $m$  y  $\alpha$  son funciones de  $h$ . Además se supone que la estabilidad exponencial es uniforme con respecto a  $t_0$ .

### 5.1.3 Estabilidad de Lyapunov

A continuación se revisan algunos de los conceptos claves y resultados de la teoría de estabilidad de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (h.1).

El llamado segundo método de Lyapunov permite determinar las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio de sistemas como el (h.1), sin tener que integrar de manera explícita o resolver la ecuación diferencial. El método se basa en una generalización de la idea de que si la "la función de energía" asociada a un sistema esta disminuyendo, entonces el sistema tenderá al equilibrio. Para comprender y usar este método es necesario definir que se entiende por energía del sistema y su medición, es decir que se entiende por las funciones de energía. Para este fin se definen primero las funciones de clase  $K$ .

#### Definición de funciones de clase $K$

Una función  $\alpha(\epsilon) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , pertenece a la clase  $K$  (es decir,  $\alpha(\cdot) \in K$ ), si es continua, estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ .

### Definición de funciones localmente positivas definidas

Una función continua  $v(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ , se denomina como una función localmente definida positiva (f.l.d.p.) sí para algún  $h > 0$  y algún  $\alpha(\cdot) \in K$  se tiene que

$$v(t, 0) = 0 \text{ y } v(t, x) \geq \alpha(|x|), \text{ para todo } x \in B_h \text{ y } t \geq 0$$

Con lo cual se puede decir que una f.l.d.p. es "localmente una función de energía". Mientras que las funciones globales denominadas como "funciones de energía" se les llama funciones definidas positivas (f.d.p.) y se describen a continuación.

### Definición de funciones definidas positivas

Una función continua  $v(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , se dice que es una función definida positiva (f.d.p.) sí para algún  $\alpha(\cdot) \in K$  se cumple que

$$v(t, 0) = 0 \text{ y } v(t, x) \geq \alpha(|x|), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t \geq 0$$

y la función  $\alpha(p) \rightarrow \infty$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

### Teoremas de estabilidad de Lyapunov

De manera general, se puede decir que estos teoremas establecen que cuando una función  $v(t, x)$  es f.p.d. o f.l.d.p. y  $dv/dt(t, x) \leq 0$ , entonces se puede definir la estabilidad de un punto de equilibrio, para lo cual se obtiene la derivada de  $v$  a lo largo de las trayectorias del sistema (h.1) como

$$\left. \frac{dv(t, x)}{dt} \right|_{\dot{x}=f(t, x)} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} f(t, x) \quad (\text{h.11})$$

A continuación se enuncian los teoremas básicos de estabilidad de Lyapunov.

### Teoremas básicos de Lyapunov

**Teorema H.1.** Sí  $v(t, x)$  es una función continuamente diferenciable, entonces se tiene que

Condiciones en $v(t, x)$	Condiciones en $-\dot{v}(t, x)$	Conclusiones
f.l.d.p.	$\geq 0$ , localmente	estable
f.l.d.p., decreciente	$\geq 0$ , localmente	uniformemente estable
f.l.d.p.	f.l.d.p.	asintóticamente estable
f.l.d.p., decreciente	f.l.d.p.	uniformemente asintóticamente estable
f.p.d.	f.d.p.	globalmente u.a.s

**Prueba del teorema H.1** ver Vidyasagar (1978).

Una vez establecidos el teorema anterior se procede hacer uso de un ejemplo tomado del Vidyasagar (1978) para su aplicación. El ejemplo consiste de un sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{h.12})$$

con la siguiente función definida positiva (f.p.d.)

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{h.13})$$

La derivada de  $v$  esta dada por

$$\dot{v}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (\text{h.14})$$

de tal forma que  $-\dot{v}$  es una f.l.d.p. (en  $B_h$ , donde  $h < 1$ ), lo cual establece una propiedad de estabilidad asintótica al origen. El origen no es un punto de equilibrio asintóticamente globalmente estable. Este sistema puede mostrar un ciclo límite circular de radio 1, esto se ve al realizar un cambio a coordenadas polares en (h.14), se puede mostrar que para todo  $x \in B_h$ :

$$\dot{v} \leq -2(1 - h^2)v \quad (\text{h.15})$$

con lo que:

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(0) \exp[-2(1 - h^2)t] \\ |x(t)| &\leq |x(0)| \exp[-(1 - h^2)t], \text{ para todo } t \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{h.16})$$

y de hecho, se sabe que  $x = 0$  es un punto de equilibrio local y exponencialmente estable. Se puede observar que la función de Lyapunov ( $v$ ) es de hecho el cuadrado de la norma del estado.

#### *Algunos comentarios*

Con los teoremas de Lyapunov se establecen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de un sistema como el (h.1). Cabe mencionar que el Teorema **converso** de H.1 también es cierto, es decir, que si un punto de equilibrio es estable, entonces existe una f.l.d.p.  $v(t, x)$  con  $\dot{v}(t, x) \leq 0$ . Sin embargo, la utilidad del Teorema H.1 y de su converso se encuentra limitada porque no existe una forma generalizada para generar las funciones de Lyapunov. Una excepción a la regla se da para los sistemas exponencialmente estables, como a continuación se menciona.

#### **Teoremas de estabilidad exponencial**

La utilidad de establecer teoremas de estabilidad exponencial se debe a dos razones: (i) la primera es que la estabilidad para algoritmos de adaptación, como es el caso de adaptación de parámetros y de señales, la estabilidad exponencial significa convergencia de los algoritmos usados. (ii) La segunda es por que resulta útil medir la velocidad de convergencia.

A continuación se describe un Teorema que será de utilidad par establecer algunos resultados relacionados con la estabilidad exponencial y la existencia de una función de Lyapunov específica.

**Teorema H.2 Teorema converso de Lyapunov.** Si existe una función  $f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con primeras derivadas parciales acotadas y contínuas en  $x$  y es también contínua en  $t$  para todo  $x \in B_h$  con  $t \geq 0$ . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a)  $x = 0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable de

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{h.17})$$

b) Existe una función  $v(t, x)$  y algunas constantes en  $h'$  estrictamente positivas denominadas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , tales que para todo  $x \in B_{h'}$  y  $t \geq 0$  se tiene lo siguiente

$$\alpha_1 |x|^2 \leq v(t, x) \leq \alpha_2 |x|^2 \quad (\text{h.18})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv(t, x)}{dt} \right|_{\dot{x}=f(t, x)} &\leq -\alpha_3 |x|^2 \\ \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right| &\leq \alpha_4 |x| \end{aligned}$$

donde la derivada en (h.17) esta tomada a lo largo de las trayectorias de (h.16), es decir

$$\left. \frac{dv(t, x)}{dt} \right|_{\dot{x}=f(t, x)} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} f(t, x) \quad (\text{h.19})$$

El Teorema H.2 es conocido como uno de los teoremas conversos de Lyapunov. Su prueba es constructiva ya que provee una función de Lyapunov explícita  $v(t, x)$ , esto lo coloca en una situación invaluable. A continuación se realiza la prueba del teorema y se derivan valores explícitos de las constantes involucradas en (h.18).

**Prueba del Teorema H.2.** (a) implica (b)

(i) Si se denomina como  $p(\tau, x, t)$  a la solución en el tiempo  $\tau$  de (h.17) comenzando a  $x(t), t$  y si también se designa la siguiente función:

$$v(t, x) = \int_t^{t+T} |p(\tau, x, t)|^2 d\tau \quad (\text{h.20})$$

donde  $T > 0$  se define en (ii). De las condiciones de estabilidad exponencial y de tipo Lipschitz

$$m |x| \exp[-\alpha(\tau - t)] \geq |p(\tau, x, t)| \geq |x| \exp[-l(\tau - t)] \quad (\text{h.21})$$

y de la primera desigualdad en (h.18) se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: = (1 - \exp(-2/T))/2l, \\ \alpha_2 &: = m^2(1 - \exp(-2\alpha T))/2\alpha \end{aligned} \quad (\text{h.22})$$

(ii) Ahora bien, derivando (h.20) con respecto a  $t$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dv(t, x)}{dt} &= |p(t+T, x, t)|^2 - |p(t, x, t)|^2 + \\ &\int_t^{t+T} \frac{d}{dt} (|p(\tau, x, t)|^2) d\tau \end{aligned} \quad (\text{h.23})$$

Se puede ver que  $d/dt$  es la derivada con respecto a las condiciones iniciales en el tiempo  $t$  y se calcula a lo largo de las trayectorias de (h.17). Por definición, la solución de  $p$  es

$$p(\tau, x(t + \Delta t), t + \Delta t) = p(\tau, x(t), t) \quad (\text{h.24})$$

para todo  $\Delta t$ , por lo que el término en la integral en el intervalo  $[t, t+T]$  es cero. El segundo término en la parte derecha de (h.23) se simplifica a  $|x|^2$ , mientras que el primero se encuentra

relacionado con  $|x|^2$  debido a la suposición de estabilidad exponencial. Por lo que se sigue que

$$\frac{dv(t, x)}{dt} \leq -(1 - m^2 \exp(-2\alpha T)) |x|^2 \quad (\text{h.25})$$

De la segunda desigualdad en (h.18) se tiene que dado un  $T > (1/\alpha) \ln m$  y

$$\alpha_3 := 1 - m^2 \exp(-2\alpha T) \quad (\text{h.26})$$

(iii) Derivando (h.20) con respecto a  $x_i$ , se tiene que

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} = 2 \int_t^{t+T} \sum_{j=1}^n p_j(\tau, x, t) \frac{\partial p_j(\tau, x, t)}{\partial x_i} d\tau \quad (\text{h.27})$$

Bajo las suposiciones anteriores, la derivada parcial de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales satisface:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial p_j(\tau, x, t)}{\partial x_i} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{d}{d\tau} p_j(\tau, x, t) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} [f_j(\tau, p(\tau, x, t))] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \Big|_{\tau, p(\tau, x, t)} \cdot \frac{\partial p_k(\tau, x, t)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{h.28})$$

excepto para todos los posibles puntos discontinuos de  $f(\tau, x)$ . Con esto se denota que

$$\begin{aligned} Q(\tau, x, t) &:= \partial p_i(\tau, x, t) / \partial x_j \\ A_{ij} &:= \partial f_i(t, x) / \partial x_j \end{aligned} \quad (\text{h.29})$$

por lo que la ecuación (h.28) se convierte en

$$\frac{d}{d\tau} Q(\tau, x, t) = A(p(\tau, x, t)) \cdot Q(\tau, x, t) \quad (\text{h.30})$$

La ecuación (h.30) define a  $Q(\tau, x, t)$  cuando se integra de  $\tau = t$  a  $\tau = t + T$ , para condiciones iniciales de  $Q(\tau, x, t) = I$ . Por lo que  $Q(\tau, x, t)$  es la matriz de transición asociada con la matriz variante en el tiempo  $A(p(\tau, x, t), \tau)$ . También se puede suponer que  $\|A(\cdot, \cdot)\| \leq k$  para algún  $k$ , por lo que

$$\|Q(\tau, x, t)\| \leq \exp[k(\tau - t)] \quad (\text{h.31})$$

y usando de nuevo la propiedad de estabilidad exponencial, la ecuación (h.28) se convierte en:

$$\left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right| \leq 2 \int_t^{t+T} m |x| \exp[(k - \alpha)(\tau - t)] d\tau \quad (\text{h.32})$$

por lo que el tercer termino en (h.18) queda como:

$$\alpha_4 := 2m(\exp[(k - \alpha)(\tau - t)] - 1)/(k - \alpha) \quad (\text{h.33})$$

Cabe hacer notar que la función  $v(t, x)$  está únicamente definida para  $x \in B_{h'}$  con  $h' = h/m$ , si se desea garantizar que  $p(\tau, x, t) \in B_h$  para todo  $\tau \geq t$ . Entonces:

(b) *implica* (a)

En esta dirección la demostración es directa, ya que usando únicamente (h.18) se obtiene que

$$\begin{aligned} m & : = \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right]^{1/2}, \\ \alpha & : = \frac{1}{2} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{aligned} \quad (\text{h.34})$$

■

De acuerdo a lo discutido en función de la estabilidad de Lyapunov, se puede decir que la función  $v(t, x)$  puede interpretarse como un promedio de la norma cuadrada del estado a lo largo de las soluciones del sistema (h.17). El Teorema H.2 se usa para establecer la existencia de una función de Lyapunov correspondiente a un sistema exponencialmente estable.

## 5.2 Teorema del Mapeo de contracción

La teoría de la contracción para el control de sistemas no lineales se basa en un análisis diferencial exacto de convergencia. Esta teoría se aplica para determinar las propiedades de estabilidad y en el diseño de sistemas de control para procesos químicos.

La estabilidad se puede ver de acuerdo con el comportamiento de un sistema para alcanzar una trayectoria nominal o un punto de equilibrio. El análisis de contracción significa que al hablar de estabilidad no se requiere del conocimiento explícito de lo que una trayectoria nominal es, ya que de manera intuitiva se puede saber si un sistema es estable en alguna región, si las condiciones iniciales o las perturbaciones temporales son "olvidadas", es decir, si el comportamiento final del sistema es independiente de las condiciones iniciales, con lo cual todas las trayectorias convergen a la trayectoria nominal. Esto muestra que la estabilidad puede analizarse de manera diferencial y no de manera integral como en la teoría de Lyapunov, tampoco se requiere buscar alguna transformación global del estado como en la linearización retroalimentada.

### Resultado básico de convergencia

Si se considera el flujo local dado en un punto  $x$  esto permite el análisis de convergencia entre dos trayectorias vecinas. Si todas las trayectorias vecinas convergen entre sí (es decir, tienen un comportamiento de contracción), entonces se puede concluir que existe convergencia global exponencial a una trayectoria. Para ejemplificar esto, se puede pensar en el flujo de un fluido de dimensión  $n$ , en el cual  $\dot{x}$  representa el vector de velocidades de dimensión  $n$  de la posición  $x$  en el tiempo  $t$ , este tipo de sistemas se puede representar con la siguiente relación diferencial exacta

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \delta x, \quad (\text{h.35})$$

en la cual se supone que  $f(x, t)$  es una función continuamente diferenciable y donde  $\delta x$  representa el desplazamiento virtual, es decir, de manera formal  $\delta x$  define una forma lineal diferencial y tangencial en tanto que  $\delta x^T \delta x$  se encuentra asociada a una forma tangencial cuadrática y



**Definición H.1** Dado un sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , se denomina a una región del espacio como una **contracción** si el Jacobiano  $\partial f / \partial x$  es negativo definido de manera uniforme en esa región.

Donde el hecho de que  $\partial f / \partial x$  sea negativo definido de manera uniforme significa que

$$\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \text{ tal que } \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right] \leq -\beta I < 0$$

Si ahora se considera a una bola constante de radio centrado alrededor de una trayectoria dada, tal que la bola se mantenga como una región de contracción a cualquier tiempo ( $\forall t \geq 0$ ), entonces, por que cualquier longitud dentro de la bola decrece de manera exponencial, cualquier trayectoria que comience en la bola permanece en ella y convergerá de manera exponencial a la trayectoria dada (ver Figura 2h).

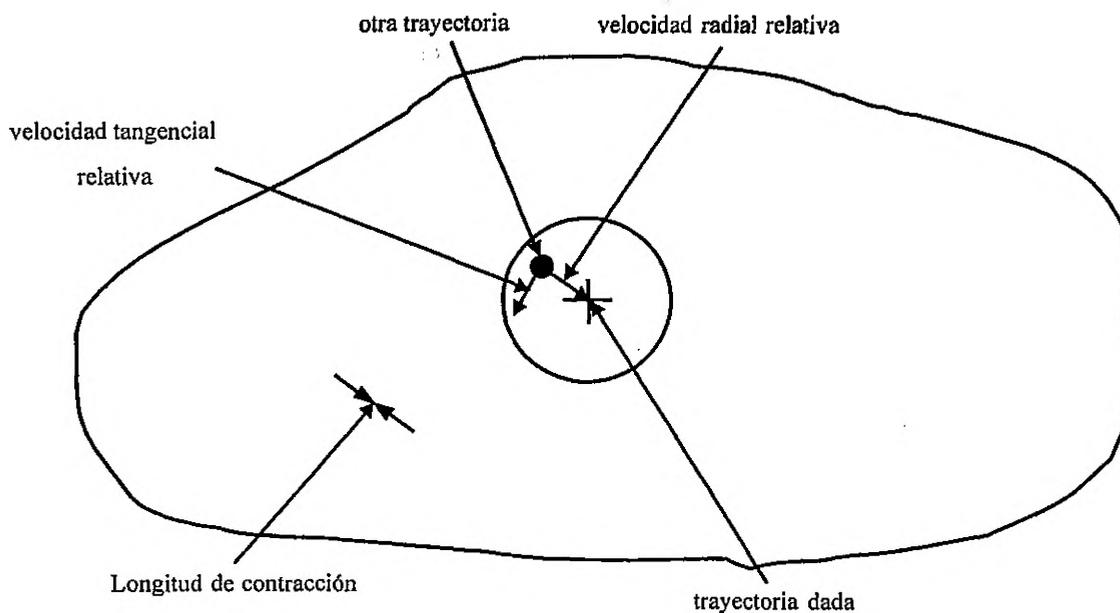


Figura 2h Esquema de la convergencia de dos trayectorias.

Lo anterior permite establecer el siguiente teorema:

**Teorema H.3** Dada la ecuación del sistema  $\dot{x} = f(x, t)$ , cualquier trayectoria que comience en una bola de radio constante centrado alrededor de una trayectoria previamente dada y contenida a cualquier tiempo en una región de contracción, esta trayectoria permanecerá en la bola y convergerá a la trayectoria dada.

Aun más, la convergencia exponencial de la trayectoria dada se garantiza si toda la región del espacio es una región de contracción.

Una vez establecida una región de contracción, se tiene que dada una trayectoria contenida en esta región, cualquier otra trayectoria que llegue a ésta región se pegará a la trayectoria predeterminada y convergerá de manera exponencial a ella.

### 5.3 Estabilidad asintótica en problemas singularmente perturbados

El Teorema 2 del trabajo de Hoppensteadt (1974), establece las condiciones de estabilidad asintótica de sistemas singularmente perturbados.

Se tomará un problema reducido  $(P_0, \dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon))$  con solución  $x = x_0(t)$  y  $y = y_0(t)$ , la cual existe y es válida para  $0 \leq t < \infty$ . Se supone que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas y con derivadas acotadas con respecto a  $t, \varepsilon$  y los componentes de  $x$  y  $y$  son del orden  $N + 2$  en algún tubo alrededor de  $(x_0, y_0)$  y para  $\varepsilon$  cerca de cero. También existe una función  $\phi(t, x)$  que define la bifurcación de  $g(t, x, y, 0) = 0$  en la cual se encuentra  $(x_0, y_0)$ , es decir, que cuando  $y_0(t) = \phi(t, x_0(t))$ , para todo  $t \geq 0$  y  $g(t, x, \phi(t, x), 0) = 0$  para todo  $0 \leq t < \infty$  se tiene que  $|x - x_0(t)| \leq \Delta$  (donde  $\Delta$  es un número positivo).

Bajo estas suposiciones existen dos condiciones de estabilidad, las cuales se enuncian a continuación:

SI Si el sistema lineal (condición de estabilidad para el sistema reducido  $P_0$ )

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z \quad (\text{h.37})$$

donde  $A(t) = (f_x - f_y g_y^{-1} g_x)(t, x_0(t), y_0(t), 0)$ , es exponencialmente asintóticamente estable, es decir, que si  $\Phi(t)$  representa a la matriz fundamental del sistema y esta definida como

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \text{identidad},$$

entonces existen unas constantes positivas  $k$  y  $\alpha$  tales que

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq k \exp[-\alpha(t - s)]$$

para  $0 \leq s \leq t < \infty$ . La notación  $f_x$ , etc., se usa para denotar a la matriz Jacobiana  $(\partial f_i / \partial x_j)$ .

SII Los valores propios de la matriz Jacobiana  $g_y(t, x_0(t), y_0(t), 0)$  tienen parte real menor a algún número negativo dado para todo  $0 \leq t < \infty$ , (condición de estabilidad para el problema  $P_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon)$  para  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

La condición SI garantiza que la solución  $x = x_0(t)$  de

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \phi(x, t), 0) \quad (\text{h.38})$$

es asintóticamente estable. Si se denota a  $D$  como el dominio de atracción, se tiene que si  $\xi \in D$ , la solución de (h.38) es única, tiene a  $\xi$  como su valor inicial y se aproxima a  $x_0(t)$  conforme

$t \rightarrow \infty$ .

Sí se restringe a  $D$  de tal forma que todos los valores propios de la matriz  $g_y(0, \xi, \phi(0, \xi), 0)$  tenga parte real negativa para  $\xi \in D$  y sí ahora se considera al “tiempo rápido” del sistema obtenido de un problema de perturbación singular ( $P_\varepsilon$ ) al hacer  $t = \varepsilon\tau$  y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces:

$$\frac{dY}{d\tau} = g(0, \xi, \phi(0, \xi) + Y, 0) \quad (\text{h.39})$$

La condición SII y la restricción  $D$  asegura que para cada  $\xi \in D$ , la solución cero de este sistema es asintóticamente estable. Sí se denota al dominio de atracción como  $E_\xi$  de tal forma que sí  $Y(0) + \phi(0, \xi) \in E_\xi$ , entonces la solución  $Y(\tau)$  de la ecuación (h.39) se encuentra determinada por las condiciones iniciales  $Y(0)$  y por la existencia de  $\tau \geq 0$  y además se aproxima a cero conforme  $\tau \rightarrow \infty$ . Bajo estos lineamientos del problema singularmente perturbado ( $P_\varepsilon$ ) y si las condiciones SI y SII se cumplen, entonces el problema  $P_\varepsilon$  es asintóticamente estable y su dominio de estabilidad está determindo por los problemas auxiliares (h.38) y (h.39), este resultado se encuentra en el siguiente teorema.

**Teorema H.3** Sí las condiciones SI y SII se satisfacen, si  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  y  $(\tilde{x}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon))$  son las soluciones de  $P_\varepsilon$ , de tal manera que  $(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon))$  y  $(\tilde{x}(0, \varepsilon), \tilde{y}(0, \varepsilon))$  definen a las funciones  $(\xi(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$  y  $(\tilde{\xi}(\varepsilon), \tilde{\eta}(\varepsilon))$ , respectivamente, las cuales son (i) funciones suaves de  $\varepsilon$  a  $\varepsilon = 0$ , y (ii) satisfacen que  $\xi_0 \equiv \xi(0)$ ,  $\tilde{\xi}_0 \equiv \tilde{\xi}(0) \in D$  y  $\eta(0) \in E_{\xi_0}$ ,  $\tilde{\eta}(0) \in E_{\tilde{\xi}_0}$ , entonces para un valor suficientemente pequeño de  $\varepsilon > 0$  esas soluciones existen en todo el intervalo  $0 \leq t < \infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) - (\tilde{x}(t, \varepsilon), \tilde{y}(t, \varepsilon))] = 0$$

Con esto queda establecido el Teorema 2 del trabajo de Hoppensteadt (1974).

### 5.3.1 Teorema del valor inicial para sistemas no lineales singularmente perturbados

Los Teoremas usados de los trabajos de Saberi y Khalil (1984) y Esfandiari y Khalil (1992), con respecto a la estabilidad de sistemas no lineales singularmente perturbados, se establecerán en los siguientes tres apartados:

**Apartado 1** Se probará un teorema de valor inicial para el intervalo semi-infinito  $[0, \infty)$  para sistemas no lineales autónomos y singularmente perturbados. Se considera el siguiente sistema singularmente perturbado:

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad x \in B_x \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{h.40})$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \quad y(0) = y_0, \quad y \in B_y \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{h.41})$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro pequeño. Si el par  $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$  representa la solución del sistema (h.20)-(h.41), el propósito es estudiar el desempeño asintótico de este par conforme  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  en el intervalo de tiempo semi-infinito  $[0, \infty)$  y relacionarlo con las soluciones de los sistemas reducido y de capa límite. El sistema reducido se define al

hacer  $\varepsilon = 0$  en (h.40),(h.41) y escogiendo la condición inicial de  $y(0) = y_0$  para obtener

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{h.42})$$

$$0 = g(x, y, 0) \quad (\text{h.43})$$

Y se hacen las siguientes suposiciones

**A1:** (h.43) tiene una sola raíz denominada

$$y = h(x) \quad (\text{h.44})$$

en  $B_x \times B_y$ . Si se sustituye (h.44) en (h.42) se obtiene

$$\dot{x} = f(x, h(x), 0), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{h.45})$$

La solución de (h.45) se denota mediante  $x_s(t)$ . Con esto, la solución del sistema de capa límite se define al sustituir  $\tau = t/\varepsilon$  en (h.41) y haciendo  $\varepsilon = 0$  para obtener

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y(\tau), 0), \quad y(0) = y_0 \quad (\text{h.46})$$

donde  $x$  es un parámetro que toma valores en  $B_x$ . La solución de (h.46) se denota mediante  $y_f(\tau; x)$ . Bajo esto se supone que las siguientes condiciones se cumplen para todo  $(x, y) \in B_x \times B_y$ ,

**A2:**  $f, g$  y  $h$  son funciones continuas en sus argumentos y lo suficientemente suaves para asegurar la existencia de una solución única para (h.40), (h.41), (h.45) y (h.47).

**A3:** El origen  $(x = 0, y = 0)$  es un punto de equilibrio único de (h.40), (h.41), es decir que se cumple lo siguiente

$$0 = f(0, 0, \varepsilon), \quad 0 = g(0, 0, \varepsilon)$$

**A4:** El sistema reducido (h.45) tiene una función de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(i) \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x), 0) \leq -\alpha_1 \psi^2, \quad \alpha_1 > 0 \quad (\text{h.47})$$

$$(ii) \quad \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y, 0) - f(x, h(x), 0)] < \beta_1 \psi(x) \phi(y - h(x)) \quad (\text{h.48})$$

donde  $\psi(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son funciones escalares de los argumentos vectoriales y también son funciones continuas definidas positivas.

**A5:** El sistema de capa límite tiene una función de Lyapunov  $W(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ , la cual se desvanece únicamente en  $y = h(x)$ , tal que:

$$(i) \quad 0 < p_1(\|y - h(x)\|) \\ \leq W(x, y) \leq p_2(\|y - h(x)\|)$$

para algunas funciones de clase  $K$  denominadas  $p_1(\cdot)$  y  $p_2(\cdot)$ ,

$$(ii) \quad \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y, 0) \leq \alpha_2 \phi^2(y - h(x)), \quad (h.49)$$

$$\alpha_2 > 0$$

$$(iii) \quad \frac{\partial W}{\partial y} [g(x, y, \varepsilon) - g(x, y, 0)] \leq \varepsilon \gamma_2' \phi^2(y - h(x)) + \varepsilon \beta_2' \psi(x) \phi(y - h(x)) \quad (h.50)$$

$$(iv) \quad \frac{\partial W}{\partial y} f(x, y, \varepsilon) \leq \gamma_2'' \phi^2(y - h(x)) + \beta_2'' \psi(x) \phi(y - h(x)) \quad (h.51)$$

Donde las constantes  $\beta_1, \beta_l, \gamma_1, \gamma_2', \gamma_2'', \beta_2'$  y  $\beta_2''$  son no negativas. La existencia de  $V(x)$  garantiza que  $x = 0$  sea un punto de equilibrio asintóticamente estable de (h.45). Si se tiene  $v_0 > 0$  tal que

$$L_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq v_0\} \subset B_x \quad (h.52)$$

Entonces,  $L_R$  es el dominio de atracción de (h.45). La existencia de  $W(x, y)$  garantiza que  $y = h(x)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (h.46). El hecho de que  $\alpha_2$  sea independiente de  $x$  implica que  $y_f(\tau; x) \rightarrow h(x)$  conforme  $\tau \rightarrow \infty$  de manera uniforme en  $x$ . Si  $w_0 > 0$  tal que para cada  $x \in B_x$  se tiene que

$$L_B(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid W(x, y) \leq w_0\} \subset B_y \quad (h.53)$$

Entonces, se tiene que  $L_B$  es el dominio de atracción de (h.46). Con lo cual ahora se define a  $L$  como

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \frac{V(x)}{v_0} + \frac{W(x, y)}{w_0} \leq 1 \right\} \quad (h.54)$$

De (h.52) y (h.53) se puede observar que  $L \subset B_x \times B_y$ . Con base en esto se puede establecer el siguiente teorema de los trabajos de Saberi y Khalil (1984) y Esfandiari y Khalil (1992, Teorema 1).

**Teorema H.4** Si se supone que A1-A5 se cumplen, entonces existe un  $\varepsilon^* > 0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , el punto de equilibrio  $(x = 0, y = 0)$  es asintóticamente estable. Para todo  $(x_0, y_0) \in L$  las siguientes expresiones se cumplen de manera uniforme en el intervalo  $[0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &\rightarrow x_s(t) \\ y_\varepsilon(t) &\rightarrow h(x_s(t)) + y_f(\tau; x_0) - h(x_0), \end{aligned} \quad (h.55)$$

conforme  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

## 5.4 Estabilización retroalimentada robusta de reactores químicos

En esta parte se establecerán las suposiciones tomadas del artículo de Viel y Bastin (1997), las cuales fueron usadas para definir la estabilidad asintótica global de la dinámica de la temperatura en el reactor controlado (Capítulo 1, Prueba de la proposición 1.2).

**Suposición H.1** (*Principio de conservación de masa*<sup>1</sup>). Existe un vector positivo de dimensión  $n$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ , para  $\omega_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $\omega^T C = 0$ , donde  $C$  es la matriz estequiométrica de dimensión  $C = n \times m$ , de un reactor tanque agitado continuo (RTAC) donde se llevan a cabo  $m$  reacciones por  $n$  especies químicas.

Esta suposición implica que en el sistema reaccionante se conserva la masa, en otras palabras, se puede decir que lo que se produce en el sistema reaccionante no puede ser mayor a lo que se consume. Esto es de gran utilidad para establecer resultados en el acotamiento de las concentraciones en el reactor químico descrito en la ecuación (1.1) del Capítulo 1.

**Lema A.1** (*Acotamiento uniforme*). Bajo la suposición H.1, las concentraciones denotadas por  $x_i(t)$  no serán negativas para todo  $x_i(t) \geq 0$  y además se admite como un dominio positivo e invariante en el conjunto compacto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i, x_i \geq 0, \omega^T x \leq \omega^T x^{in}\}$ .

**Prueba** La dinámica de la ecuación de la concentración  $i$ -ésima esta dada por

$$\dot{x}_i = \sum_j c_{i,j} r_j(x, T) + d(x_i^{in} - x_i)$$

y se tiene que  $\dot{x}_i (x_i = 0) \geq 0$  ya que  $\sum c_{i,j} r_j(x, T) \geq 0$  cuando  $x_i = 0$ . Entonces, las concentraciones no serán negativas debido a que  $x_i(0) \geq 0, \forall i$ . Si se define a  $Z$  como  $Z = \omega^T x$ , se tiene que por la Suposición H1:  $\dot{Z} = -d(Z - \omega^T x^{in})$ . Por lo que  $Z(t) \leq \omega^T x^{in}$  para  $Z(0) \leq \omega^T x^{in}$ . Además el conjunto compacto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i, x_i \geq 0, \omega^T x \leq \omega^T x^{in}\}$  es invariante y positivo en la dinámica de la ecuación (1.1) del Capítulo 1. ■

## 5.5 Estabilización robusta de sistemas lineales inciertos:estabilización cuadrática

En esta parte se relata el Teorema 2.7 mostrado en el artículo de Khargonekar, Petersen y Zhou (1990), con el fin de comprobar la existencia de una función cuadrática del tipo  $V_e(e) = e^T P_e e$ ,  $P_e > 0$ , tal que  $V_e$  sea una función para el modelo rápido (Lema 2.3 del Capítulo 2).

El Teorema 2.7 establece que un sistema incierto (donde la norma de la incertidumbre es acotada), es cuadráticamente estable sí y sólo sí, cierta "ganancia pequeña"<sup>2</sup> de la función de transferencia es menor que 1. También se enuncia un corolario al Teorema 2.7 (Corolario 2.8), en él se dice que cierto conjunto de matrices admite una función cuadrática de Lyapunov común sí y solo sí cierta condición en la "ganancia pequeña" se cumple. A continuación se proponen

<sup>1</sup>La cantidad de masa que entra a un sistema es igual a la que sale.

<sup>2</sup>del inglés "small gain"

las condiciones en las cuales el problema se estableció. Como ya se mencionó, el resultado se relaciona con la estabilidad cuadrática de un sistema lineal autónomo y con cierta condición en la “ganancia pequeña”, entonces, se considera el siguiente sistema incierto:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_0 + DF(t)E]x(t) \\ \|F(t)\| &\leq 1 \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

En el siguiente teorema se muestra la existencia de una función de Lyapunov para el sistema incierto  $(\Sigma)$ , la cual es equivalente a una condición en la “ganancia pequeña”.

**Teorema 2.7** El sistema  $(\Sigma)$  es cuadráticamente estable, sí y solo sí satisface, las siguientes condiciones:

$$(2.7i) \quad A_0 \text{ es una matriz estable}$$

$$(2.7ii) \quad \|E(sI - A_0)^{-1}D\|_{\infty} < 1$$

Entonces, únicamente se requiere de la existencia de una función de Lyapunov para el conjunto de matrices  $\mathbb{A}$  para asegurar la estabilidad cuadrática del sistema  $(\Sigma)$ , de acuerdo a este hecho se enuncia el siguiente corolario del Teorema 2.7

**Corolario 2.8** Sí se considera que el siguiente conjunto de matrices  $\mathbb{A} := \{A = A_0 + DFE : F \text{ es real, } \|F\| \leq 1\}$ , entonces, existe una matriz definida positiva  $P$  tal que:

$$A^T P + PA < 0, \quad \text{para toda } A \text{ en } \mathbb{A}$$

sí y solo sí las condiciones (2.7i) y (2.7ii) se satisfacen.

Para terminar, el Teorema 2.7 puede interpretarse como que el teorema de la pequeña ganancia es necesario y suficiente para establecer la estabilidad cuadrática del sistema  $(\Sigma)$ . Además, en este caso, el Corolario 2.8 muestra que el problema de encontrar una función de Lyapunov compuesta se debe a la aplicación de el “teorema de la ganancia pequeña” y que varios de los resultados existentes en esta dirección pueden ser vistos como una aplicación de este teorema.

## 5.6 Bibliografía

- Esfandiari, F., & Khalil, H.K. (1992). Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *Int. J. Control*, 56, 1007-1037.
- Feinberg, M. (1987). Chemical reaction network structure and the stability of isothermal reactors-I The deficiency zero and deficiency one theorems. *Chem. Eng. Sci.*, 29, 2229-2268.
- Gavalas, G.R.(1968). *Nonlinear Differential Equations of Chemical Reacting Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Hoppensteadt, F. (1974). Asymptotic stability in singular perturbation problems. II: problems having matched asymptotic expansion solutions. *J. of Differential Equations*, 15, 510-521.

- Khargonekar, P.P., Petersen, I.R., & Zhou, K. (1990). Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and  $H^\infty$  control theory. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35, 356-361.
- Lohmiller, W., & Slotine, J. (2000). Nonlinear process control using contraction theory. *AIChE J.*, 46, 588-596.
- Massera, J.L. (1956). Contribution to stability theory. *J. Differential Equations*, 64, 182-206.
- Saberi, A., & Khalil, H. K. (1984). Decentralized stabilization of a class of nonlinear interconnected systems. *International Journal of Control*, 36, 803-818.
- Sastry, S., & Bodson, M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Vidyasagar, M. (1978). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Viel, F., Jacob, F., & Bastin, G. (1997). Robust feedback stabilization of chemical reactors. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42, 473-481.
- Viel, F., Jadot, F. & Bastin, G. (1997) Global stabilization of exothermic chemical reactors under input constraints, *Automatica*, 33, 1437-1448.