División de Ciencias Básicas e Ingenierías

Posgrado en Ingeniería Química

"ANÁLISIS Y CUANTIFICACIÓN DE NO LINEALIDADES DE PROCESOS QUÍMICOS"

T E S I S

Que para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS (INGENIERÍA QUÍMICA)

P R E S E N T A

M. C. Abigail Marín López

Matrícula: 2213801188

ORCID: 0000-0002-1010-4829

Correo electrónico: marinlopabi@gmail.com

D I R E C T O R

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

J U R A D O

Presidente: Dr. Juan Carlos Echeverría Arjonilla

Secretario: Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapía

Vocal: Dr. Gilberto Espinosa Paredes

Vocal: Dr. Ricardo Aguilar López

Vocal: Dr. Basilio Del Muro Cuéllar

Iztapalapa, Ciudad de México a 17 de diciembre de 2025.

Agradecimientos

- Gracias a mi asesor por su paciencia y apoyo.
- A mis revisores por acrecentar mi conocimiento con sus comentarios.
- A Pancho, Mina, Happy, Cuco y Balto por estar presentes en cada etapa de la realización de esta tesis.
- Un especial agradecimiento al Dr. JAMC por su apoyo constante durante la realización del proyecto.
- Al Dr. H. Puebla por aportar los datos de flujo bifásico utilizados en este proyecto.
- A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación **(Secihti)** por el apoyo financiero obtenido durante el desarrollo del posgrado. CVU 998394.

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada con todo mi ser a mi pequeña gatita Happy que me dio más amor del que puedo entender. Gracias por estar en mis dias más oscuros y compartir tu chispa de alegría conmigo, y con un leve ronroneo mostrarme que todo estará mejor. Te agradezco por ayudarme a reconocer lo belleza de la existencia y por enseñarme que sólo el que se atreve a arriesgarlo todo, entiende realmente el sentido de vivir.

Resumen

La no linealidad constituye un desafío relevante en el análisis y modelado de sistemas dinámicos en ingeniería química, ya que el uso de modelos lineales en datos con dinámicas complejas puede conducir a interpretaciones sesgadas. En esta tesis se propone un enfoque de análisis multiescala para la caracterización de la complejidad, la no linealidad y la memoria temporal en sistemas bifásicos, basado en herramientas de análisis de datos no lineales. La metodología emplea la entropía derivada de la descomposición en valores singulares (SVDEn) como medida de complejidad estructural y un índice de no linealidad (NLI) definido mediante la comparación con datos sustitutos generados por aleatorización de fase. De forma complementaria, se utiliza el exponente de Hurst para evaluar la persistencia temporal de las señales. Este marco permite analizar de manera coherente tanto señales temporales como imágenes, integrando información de los dominios temporal y espacial. El enfoque se aplicó al estudio de cuatro patrones de flujo bifásico en una tubería inclinada. Los resultados muestran que la entropía SVD depende de la escala temporal y de la velocidad superficial del gas, evidenciando el carácter multiescala de las señales. El análisis con datos sustitutos confirma que la información estructural relevante reside en las relaciones de fase del espectro de Fourier, de las cuales emergen las dependencias no lineales, que se manifiestan de forma intermitente y predominantemente a escalas grandes. En el dominio espacial, el análisis de imágenes revela que la entropía SVDEn aumenta al incorporar más valores singulares hasta alcanzar un régimen de saturación, mientras que la aleatorización de fase destruye la coherencia espacial y eleva la entropía, evidenciando dependencias espaciales no lineales. En conjunto, la combinación de SVDEn, NLI y Hurst proporciona una caracterización robusta y multiescala de sistemas complejos, sin asumir modelos dinámicos específicos.

Palabras clave: Flujo bifásico, Entropía; complejidad; no linealidad.

Abstract

Nonlinearity constitutes a significant challenge in the analysis and modeling of dynamic systems in chemical engineering, as the use of linear models for data exhibiting complex dynamics may lead to biased interpretations. In this thesis, a multiscale analysis framework is proposed to characterize the complexity, nonlinearity, and temporal memory of two-phase systems using nonlinear data analysis tools. The methodology employs entropy derived from singular value decomposition (SVDEn) as a measure of structural complexity, together with a nonlinearity index (NLI) defined through comparisons with surrogate data generated by phase randomization. In addition, the Hurst exponent is used to assess the temporal persistence of the signals. This framework enables a coherent analysis of both time series and images, integrating information from the temporal and spatial domains. The approach was applied to the study of four two-phase flow patterns in an inclined pipe. The results show that SVD entropy depends on the temporal scale and the superficial gas velocity, revealing the multiscale nature of the signals. Surrogate data analysis confirms that the relevant structural information is not contained in isolated spectral magnitudes, but in the phase relationships of the Fourier spectrum, from which nonlinear dependencies emerge, appearing intermittently and predominantly at large scales. In the spatial domain, image analysis reveals that SVD entropy increases as more singular values are incorporated into the reconstruction, reaching a saturation regime, while phase randomization destroys spatial coherence and increases entropy, providing evidence of nonlinear spatial dependencies. Overall, the combined use of SVDEn, NLI, and the Hurst exponent provides a robust multiscale characterization of complex systems without assuming specific dynamical models.

Keywords: Two-phase flow, Entropy; complexity; nonlinearity.

Índice general

Agradecimientos I

Dedicatoria III

Resumen V

Abstract VII

1. Introducción 1

2. Objetivos e Hipótesis 3

2.1. Objetivo general . . . 3

2.2. Objetivos particulares . . . 3

2.3. Hipótesis . . . 4

3. Marco teórico 5

3.1. Antecedentes . . . 5

3.2. Estadísticos de series temporales . . . 9

3.2.1. Pruebas estadísticas para evaluar la normalidad . . . 11

3.2.2. Pruebas estadísticas para evaluar la estacionariedad . . . 13

3.2.3. Prueba de Dickey-Fuller aumentada . . . 13

3.2.4. Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) . . . 14

3.2.5. Pruebas estadísticas para evaluar la correlación . . . 15

3.2.6. Coeficiente de correlación de Pearson . . . 16

3.2.7. Coeficiente de correlación de Spearman . . . 16

3.2.8. Transformaciones . . . 17

3.2.9. Pruebas estadísticas para evaluar no linealidad . . . 18
3.3. Modelos teóricos . . . 20
3.3.1. Descomposición en valores singulares . . . 20
3.3.2. Entropía de Shannon . . . 22
3.3.3. Análisis de datos sustitutos . . . 23
3.3.4. Remuestreo Bootstrap . . . 24
3.3.5. Intervalos de confianza . . . 25
3.3.6. Transformada Discreta de Fourier . . . 26
3.3.7. Análisis de rango reescalado . . . 28

4. Metodología **31**
4.1. Pseudocódigo para el análisis de series temporales . . . 35
4.2. Pseudocódigo para el análisis de imágenes . . . 35

5. Casos de estudio **37**
5.1. Señales temporales de flujo bifásico . . . 37
5.1.1. Patrones de flujo Bifásico [48] . . . 39
5.2. Procesamiento de imágenes . . . 41

6. Resultados **43**
6.1. Análisis exploratorio de las series . . . 43
6.1.1. Series temporales de flujo bifásico . . . 43
6.1.2. Estadísticos para las series temporales . . . 48
6.1.3. Diagrama de cajas . . . 50
6.1.4. Histogramas . . . 51
6.1.5. Normalidad de las series temporales . . . 53
6.1.6. Estacionariedad y Heterocedasticidad . . . 57
6.1.7. Modelos estadísticos no lineales . . . 58
6.2. Dimensión Fractal y Exponente de Lyapunov . . . 60
6.3. Análisis de dependencia temporal . . . 65
6.3.1. Autocorrelación . . . 65

6.3.2. Rango Reescalado . . . 66
6.4. Análisis de no linealidad por Entropía SVD . . . 67
6.4.1. Entropía SVD . . . 68
6.4.2. Efecto de la escala en la Entropía SVD . . . 70
6.4.2.1. Entropía SVD a escala temporal de 125 segundos . . . 71
6.4.2.2. Entropía SVD a escala temporal 250 segundos . . . 73
6.4.3. Variación de la escala temporal en un patrón de flujo . . . 75
6.4.4. Entropía SVD con datos sustitutos . . . 79
6.4.5. Índice de no linealidad NLI . . . 87
6.4.6. Plano SVDEn vs NLI . . . 92
6.5. Procesamiento de imágenes . . . 94
6.5.1. Influencia de los valores singulares . . . 95
6.5.2. Entropía SVD . . . 97
6.5.3. SVDEn original vs aleatorización de fases . . . 100

7. Discusiones **103**
7.1. Series temporales de flujo bifásico . . . 103
7.2. Análisis de imágenes . . . 106

8. Conclusiones **109**

Bibliografía **111**

A. Trabajo a futuro **119**

B. Productos derivados **121**
B.1. Artículos publicados . . . 121
B.2. Ponencias en congresos . . . 122

C. Datos complementarios **125**
C.1. Variación de la escala temporal en los patrones de flujo bifásico . . . 125

D. Herramientas de Phyton **129**

E. Códigos fuentes **131**

E.1. Análisis de señales 131

E.2. Análisis de imágenes 132

E.2.1. Entropía de la imagen original 132

E.2.2. Entropía de la imagen con fase aleatorizada 133

Índice de figuras

3.1. Representación geométrica de la descomposición de valores singulares (SVD) aplicada a la esfera unitaria. 21

5.1. Patrones de flujo bifásico analizados: ondulado estratificado (SW), película descendente (FF), flujo anular ondulado (WA) y flujo de deslizamiento líquido (LS). 38

5.2. Cristalización de Tiourea. 42

6.1. Series temporales de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. Las señales representan mediciones de voltaje tomadas a 1000 Hz durante 60 segundos. 44

6.2. Series temporales de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. Las señales representan mediciones de voltaje tomadas a 1000 Hz durante 4 segundos. 46

6.3. Estadísticos de las series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 49

6.4. Diagrama de cajas de las series temporales de patrones de flujo bifásico. . . 51

6.5. Histograma de series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 53

6.6. Gráficos Q-Q para las series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 56

6.7. Dimensión fractal Higuchi de las series temporales de patrones de flujo. . . 62

6.8. Representación de la autocorrelación directa-indirecta. 65

6.9. Exponente de Hurts para los patrones de flujo bifásico. 67

6.10. Entropía SVD de las señales temporales de patrones de flujo bifásico a una escala de 25 segundos: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 70

6.11. Entropía SVD de las series temporales de patrones de flujo a una escala de 125 segundos: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 73

6.12. Entropía SVD para las series temporales de patrones de flujo bifásico a una escala de 250 s: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 75

6.13. Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico SW_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s. 77

6.14. Entropía SVD para las series temporales con datos sustitutos a una escala de 25 segundos. 80

6.15. Entropía SVD para las series temporales con datos sustitutos a una escala de 250 segundos. 82

6.16. Mapa de calor de entropía SVD para los patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. 85

6.17. Índice de no linealidad de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2 a una escala de 25 segundos. 88

6.18. Índice de no linealidad de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2 a una escala de 250 segundos. 90

6.19. Plano SVDEn vs NLI a distintas escalas temporales: a) 25 s y b) 250 s. . . 93

6.20. Cristalización de Tiourea procesada. 94

6.21. Reconstrucción de la imagen procesada usando valores singulares. 95

6.22. Porcentaje de acumulación de información de los valores singulares de la SVD. 96

6.23. Reconstrucción SVD: con a) 16 % de valores singulares y b) original. 97

6.24. Entropía SVD de la imagen procesada con diferente N° de valores singulares. 98

6.25. Entropía SVD de la imagen procesada con aleatorización de fases. 99

6.26. a) Imagen original y b) Imagen con aleatorización de fase. 100

6.27. Entropía SVD para la imagen aleatorizada de la imagen procesada. 101

C.1. Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico FF_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s. 125

C.2. Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico WA_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s. 126

C.3. Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico LS_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s. 127

Lista de tablas

3.1. Descripción de pruebas estadísticas para evaluar la normalidad. 12

3.2. Comparación entre las pruebas de estacionariedad ADF y KPSS [20, 64, 31]. 15

5.1. Descripción de las características de cada patrón de flujo [48]. 40

6.1. Resumen estadístico de las series temporales. 48

6.2. Resultados detallados de las pruebas de normalidad por serie. 54

6.3. Resultados del análisis de estacionariedad. 57

6.4. Resumen de los resultados de las pruebas estadísticas no lineales. 59

6.5. Exponentes de Lyapunov máximos estimados. 63

6.6. Comparación de la entropía SVD media por escala. 78

6.7. Resumen comparativo del comportamiento de la entropía SVD. 86

6.8. Comparación del índice de no linealidad (NLI) para distintos patrones de flujo a diferentes escalas temporales. 91

1. Introducción

La linealidad de un sistema está asociada al cumplimiento de los principios de superposición y homogeneidad; cualquier desviación de estas propiedades implica la presencia de no linealidad. En los sistemas no lineales, la respuesta no es proporcional a la entrada ni corresponde a la suma de respuestas individuales, lo que puede dar lugar a dinámicas complejas e impredecibles, como sensibilidad a las condiciones iniciales, bifurcaciones y la aparición de patrones emergentes. En sentido estricto, prácticamente todos los fenómenos físicos y químicos exhiben algún grado de no linealidad [49], lo que hace indispensable su estudio para comprender adecuadamente la dinámica subyacente de los sistemas reales. En ingeniería química, donde múltiples componentes interactúan simultáneamente, es común recurrir a modelos lineales por su simplicidad; sin embargo, estos modelos suelen ser insuficientes para describir el comportamiento del sistema cuando existen no linealidades inherentes [67, 52]. La aplicación de modelos lineales a datos con dinámicas no lineales puede introducir sesgos en la solución y conducir a conclusiones incorrectas, lo que resalta la necesidad de caracterizar explícitamente las no linealidades para desarrollar modelos más adecuados y confiables.

El entendimiento de las no linealidades resulta particularmente relevante en procesos químicos, ya que impacta directamente en la eficacia, la seguridad y la calidad de operación. Modelos que incorporan efectos no lineales tienden a mejorar la capacidad predictiva, especialmente en procesos no estacionarios, y permiten reducir errores en el diseño, la operación y el control [38]. En el ámbito del control de procesos, identificar el grado y la naturaleza de la no linealidad permite evaluar si estrategias de control relativamente simples, como controladores proporcionales (P) o proporcional–integrales (PI), pueden compensar adecuadamente la dinámica del sistema, evitando la implementación de esquemas más

complejos como los controladores PID. Esta evaluación es particularmente importante en ingeniería química, donde la resolución analítica de sistemas dinámicos no lineales suele ser matemáticamente compleja o incluso intratable, lo que motiva el uso de herramientas de análisis de datos como alternativa práctica para apoyar la toma de decisiones.

Si bien en años recientes han surgido diversas técnicas para el estudio de no linealidades en distintos campos de la ciencia, su aplicación a problemas típicos de la ingeniería química ha sido aún limitada [1, 21]. Este panorama evidencia la necesidad de desarrollar y adaptar metodologías que permitan analizar de manera sistemática la complejidad y la no linealidad de señales e imágenes generadas por procesos químicos. En este contexto, el presente trabajo emplea la entropía basada en la descomposición en valores singulares (SVDEn) para evaluar la complejidad de series temporales asociadas a cuatro patrones comunes de flujo bifásico, así como su extensión al análisis de imágenes. De esta forma, se propone un enfoque metodológico novedoso para la caracterización de no linealidades en señales temporales y espaciales, con el objetivo de contribuir a una mejor comprensión, modelado y predicción de los comportamientos complejos presentes en sistemas químicos reales.

2. Objetivos e Hipótesis

2.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar un método de caracterización de no linealidades contenidas en señales temporales e imágenes asociadas a procesos químicos, con base en herramientas propias del álgebra líneal y el análisis espectral.

2.2. Objetivos particulares

- Identificar la presencia de relaciones no lineales presentes en señales temporales obtenidas de procesos químicos.
- Cuantificar correlaciones no lineales por medio de análisis de la entropía basada en descomposición de valores singulares.
- Evaluar la efectividad del método propuesto basado en la entropía de Shannon y la transformada de Fourier para la caracterización de no linealidades en procesos químicos.
- Implementar el método de caracterización de no linealidades de señales a imágenes derivadas de procesos químicos.

2.3. Hipótesis

Es posible cuantificar las no linealidades presentes en las series temporales e imágenes de procesos químicos utilizando herramientas del álgebra lineal, tales como la transformación de matrices y el uso de los valores propios, para extraer características asociadas a la dinámica no lineal del sistema.

3. Marco teórico

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para comprender el análisis y la cuantificación de no linealidades propuesto para series temporales e imágenes derivadas de procesos químicos. Se analizan los conceptos fundamentales relacionadas con la dinámica no lineal, junto con las técnicas matemáticas y computacionales utilizadas para su análisis.

3.1. Antecedentes

Varios métodos y técnicas se han desarrollado en las últimas décadas para analizar la presencia de no linealidades en series temporales. Además de herramientas estadísticas tradicionales, existen métodos basados en análisis espectral, teoría de la información y diversas variantes de entropía [71, 26]. En general, estos métodos se usan para identificar desviaciones de un comportamiento lineal y permiten caracterizar de manera más precisa la dinámica de sistemas complejos. Uno de los enfoques más utilizados para detectar la presencia de no linealidades en series temporales es la prueba BDS propuesta por Brock, Dechert y Scheinkman [12]. Esta prueba es útil para evaluar si una serie es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.). Si una serie cumple la condición, no se observarán patrones estructurados al reconstruir su espacio de fase. La prueba calcula una estadística que compara la distribución empírica de la serie con la esperada bajo la hipótesis nula de independencia. De esta manera, valores altos del estadístico BDS indican dependencia no lineal y sugieren que los valores pasados pueden predecir los valores futuros de manera no lineal. Este método es valioso porque, aunque entendemos que hay independencia en una sola dimensión, puede haber dependencia en dimensiones superiores [12].

Otro enfoque relevante es la prueba RESET (Regression Equation Specification Error Test) desarrollado por Ramsey en 1969. Esta prueba detecta errores de especificación en los modelos de regresión, verifica si la forma funcional del modelo es adecuada. Si bien su uso tradicional está relacionado con los modelos econométricos, en el contexto de analizar las no linealidades, puede considerarse como una herramienta indirecta: si un modelo presenta mala especificación sistemática, esto se debe a la omisión de los términos no lineales, lo que sugiere que hay una dinámica subyacente más compleja [55].

Tong evidenció que los modelos lineales constituyen el punto de partida natural del análisis de series temporales, y que la detección de no linealidad se realiza evaluando desviaciones respecto a dichos modelos [67]. En este sentido, los modelos lineales clásicos son las aproximaciones más utilizadas en la práctica, y el análisis de residuos es el método más extendido para evaluar la existencia de no linealidad en series temporales [52]. El análisis de residuos implica detectar patrones en los residuos, y si estos son evidentes, el modelo no modela adecuadamente la dinámica del sistema, lo que sugiere la presencia de una estructura no lineal oculta. Aunque este enfoque de modelado a menudo se utiliza como el primero y el más simple, tiene varias desventajas fundamentales. En el caso de un análisis de muestras limitadas puede ser información insuficiente para identificar la no linealidad. Además, la presencia de valores atípicos ("outliers") puede causar una distorsión significativa de las conclusiones.

Como alternativa, los modelos autorregresivos no lineales intentan predecir cómo se comportará una serie temporal en el futuro, utilizando los valores anteriores sin suponer una relación lineal entre estos valores [52, 67]. En otras palabras, el valor en el presente no es simplemente una suma lineal de los valores pasados, sino que se define a partir de una función no lineal. Modelos como *NAR y NARX, (Nonlinear Autoregressive, Nonlinear Autoregressive with Exogenous Inputs*) permiten capturar relaciones complejas entre valores pasados y presentes mediante funciones no lineales. Modelos *GARCH,(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)* permiten modelar la volatilidad variable en el tiempo presente en una serie temporal, caracterizada por la agrupación de periodos de alta y baja varianza. Estos modelos se utilizan para estimar y predecir la varianza futura de los datos, capturando comportamientos no lineales en la dinámica de esta. Aunque estos

modelos han demostrado su eficacia también presentan desafíos significativos; uno de ellos es el alto costo computacional, especialmente en grandes volúmenes de datos, además de un riesgo constante de sobreentrenamiento que afecta la capacidad de generalización [9].

El análisis de no linealidades en señales también ha sido abordada con métodos basados en el análisis espectral y multifractal. La Transformada de Fourier ha sido ampliamente utilizado para caracterizar la estructura frecuencial de señales en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. El espectro de Fourier, permite transformar una serie del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mostrando las frecuencias e intensidades presentes. Sin embargo, tiene limitaciones importantes; como la condición de estacionariedad de la señal, la falta de precisión sobre la localización temporal de las frecuencias, es sensible al ruido y, al operar de forma global sobre la señal, puede inducir interpretaciones ambiguas cuando se analizan sistemas complejos o no lineales [68].

No obstante, para abordar señales no estacionarias y fenómenos multiescala, se han desarrollado herramientas como las wavelets, las cuales permiten una representación conjunta en tiempo y frecuencia, facilitando la identificación de patrones dinámicos no observables mediante técnicas puramente espectrales [19, 39, 42, 70]. Sin embargo, el análisis es sensible a la selección de escalas, ventanas temporales y wavelet base, lo que puede afectar la reproducibilidad e interpretación de los resultados [3, 42, 43].

Debido a estas limitaciones, se sugiere usar estos métodos en conjunto con diferentes enfoques, particularmente aquellos que no se basan directamente en el ámbito de la frecuencia. Esto permitirá lograr un análisis más sólido y seguro sobre la complejidad no lineal en las señales [33].

Los últimos años ha resurgido el interés en los métodos basados en entropía como herramientas para identificar la complejidad estructural, ya que permiten identificar patrones ocultos en las señales. Una señal aleatoria, al carecer de alguna estructura interna tiende a tener un alto valor de entropía, lo que supone un comportamiento impredecible. Por otro lado, una señal determinista, puede tener un valor de entropía más bajo. La baja entropía, por lo tanto, puede indicar la presencia de patrones más repetitivos o estructura interna. Por lo tanto, la entropía como medida cuantitiva de desorden estructural o aleato-

riedad de una serie temporal también puede verse en términos de organización subyacente o complejidad [56].

Existen diferentes tipos de entropía que se emplean en el estudio de señales. La entropía de aproximación *(ApEn)* mide la regularidad de una señal; un número bajo significa que la serie es muy organizada o se repite, mientras que un número alto indica más desorden.

La entropía de permutación *(PermEn)* constituye una de las medidas de complejidad más recientes para el análisis de series temporales, y se fundamenta en la comparación de patrones ordinales extraídos de la señal [8, 72]. Este enfoque permite capturar la estructura dinámica subyacente de la serie sin depender de los valores absolutos de las observaciones, lo que lo hace especialmente robusto frente a ruido y transformaciones monótonas. PermEn es robusta en entornos industriales, un ejemplo de ello es el estudio llevado a cabo por Durán et al. en el 2025 utilizando PermEn para medir la resiliencia de los equipos críticos de una planta desalinizadora, lo que les permitió cuantificar diferencias significativas en los sistemas que utilizan mantenimiento reactivo ante la falla y mantenimiento predictivo, colaborando así a disminuir el número de fallas operativas [22].

Por otro lado, la entropía muestral *(SampEn)* mide la regularidad y la predictabilidad de una serie de tiempo. Este método evalúa la probabilidad de que patrones de datos similares se repitan a lo largo de la serie, lo que permite estimar el grado de predictabilidad del sistema sin depender de la longitud finita de los datos ni introducir sesgos por auto-comparaciones, lo que la convierte en una medida del procesamiento de señales para calcular la repetición de patrones en una serie temporal [56]. Cabe destacar que la entropía muestral ha sido extendida al enfoque multiescala mediante la metodología de entropía multiescala (MSE), la cual permite evaluar la complejidad de una serie temporal a diferentes escalas temporales, proporcionando una caracterización más robusta de sistemas complejos [18]. Finalmente, la entropía difusa *(FuEn)* difiere al usar funciones de pertenencia difusa para estimar la complejidad de la señal demostrando alta tolerancia al ruido y menos sensibilidad al tamaño de muestra [8, 15, 72].

En este contexto, la entropía basada en descomposición en valores singulares *(SVDEn)* se ha propuesto como una herramienta eficaz para el análisis y la cuantificación de no lineali-

dades en series temporales. La idea se encuentra basada en la teoría de la información; se define la entropía como una medida cuantitativa de incertidumbre o cantidad de información contenida en un sistema [45]. En el caso de series temporales, una mayor cantidad de incertidumbre generalmente refleja una diversidad estructural más alta y, también, potencialmente, una mayor cantidad de no linealidad, que resulta difícil de modelar con técnicas convencionales.

A diferencia de otras medidas de entropía, la SVDEn permite cuantificar la distribución de la energía de los valores singulares después de la reconstrucción de la serie, lo cual conduce a una representación compacta más sensible a los patrones ocultos. Por todo esto, la entropía SVD puede ser vista como una alternativa valiosa para el estudio de señales de procesos químicos, contemplando comportamientos complejos desde un punto de vista cuantitativo. En este trabajo, se probó esta metodología en series obtenidas de sistemas experimentales propios de la ingeniería química, lo que permitió verificar su potencial para detectar estructuras no lineales de forma más sensible y robusta. Al introducir la SVDEn, el objetivo no es establecerla como el único indicador de no linealidad. La intención es que, al utilizarla junto a otros enfoques, se logre una visión más amplia de las no linealidades que existen en los datos a analizar, lo que permitirá una comprensión más profunda del sistema de estudio.

3.2. Estadísticos de series temporales

En términos generales, una serie temporal puede definirse como una colección ordenada de observaciones tomadas secuencialmente a lo largo del tiempo. Este tipo de datos es común en una amplia variedad de disciplinas, desde las ciencias sociales, pasando por las económicas, entre muchas otras áreas, como las ingenierías. Es así que, dada su amplia aparición, el análisis estadístico de series temporales es particularmente relevante para obtener información váliosa. De ese modo, los métodos básicos, y particularmente, aquellos que son derivados de la estadística descriptiva, suelen emplearse como primer paso en la caracterización de las señales, en la medida en que pueden ayudar a detectar fluctuaciones, la estacionariad y eventuales anomalías previas a técnicas más avanzadas [27].

El análisis de series temporales busca comprender la estructura interna de los datos, identificar patrones ocultos y encontrar modelos que nos permitan realizar predicciones a partir de ciertas observaciones pasadas. Para ello, es esencial construir una base estadística que permita discernir entre ciertos comportamientos que se pueden deber a procesos lineales, en los cuales las relaciones son proporcionales y existen dependencias simples, y otros que surgen de estructuras no lineales, que pueden incluir retroalimentación o interacciones complejas. En particular, el comportamiento de la no linealidad requiere herramientas que nos permitan identificar dependencias que no son aparentes en las métricas habituales; por tanto, es lógico que resulte necesario la utilización de métricas específicas para abarcar dicha complejidad. De esta manera, se detallan las principales características útiles para la descripción de un conjunto de datos a lo largo del tiempo [67, 52]:

- *Tendencia*: Es el cambio general en el nivel de la serie a través del tiempo, el cual puede ser creciente, decreciente o constante. La identificación de la tendencia es útil en anticipar un comportamiento a largo plazo.

- *Estacionalidad*: Son patrones que tienden a repetirse en intervalos regulares, como días, semanas o años. Este componente está asociado a influencias cíclicas regulares del entorno o del sistema.

- *Ciclos*: Corresponden a fluctuaciones que se repiten a lo largo del tiempo pero sin una periodicidad estrictamente fija. Suelen estar relacionados con factores económicos, sociales o de otra índole externa al sistema.

- *Ruido*: Comprende las variaciones aleatorias que no pueden explicarse por los demás componentes de la serie. Se considera un elemento impredecible e inherente a los sistemas reales.

- *Normalidad*: Es el supuesto que indica que los datos siguen una distribución tipo normal (gaussiana). Este es un supuesto muy utilizado en pruebas paramétricas y diversos modelos estadísticos clásicos.

- *Estacionariedad*: Señala que las propiedades estadísticas de una serie como la media, la varianza y la autocorrelación permanecen constantes a lo largo del tiempo. Este

es un paso obligatorio en la preparación del modelado, ya que la no estacionariedad significa que hay cambios estructurales en la serie.

- *Homocedasticidad*: Se refiere a la característica de tener una varianza que permanece constante a lo largo de toda la serie. Esta cualidad es fundamental para asegurar que ciertas suposiciones estadísticas sean válidas en el análisis.

3.2.1. Pruebas estadísticas para evaluar la normalidad

Cuando se adapta un modelo a una serie temporal, las pruebas de normalidad a menudo se aplican a los residuos; esto es, las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo [12, 55]. Las pruebas de normalidad permiten determinar si los residuos siguen una distribución normal, lo que es un supuesto crítico en muchos modelos lineales estadísticos. Demostrar que el residuo sigue una distribución normal es un proceso fundamental no solo para validar el modelo general, sino también para verificar indirectamente si existe alguna relación no lineal. Por ejemplo, si el residuo no es normal, sugiere que los ajustes del modelo no han capturado completamente la dinámica de la serie; puesto de otra manera, podría haber alguna relación no lineal entre las variables independientes y dependientes. Establecer la normalidad puede ayudar a determinar si el uso de técnicas más avanzadas es necesario en absoluto, o si los métodos de regresión simples son adecuados. Por lo tanto, las pruebas de normalidad son un pre-requisito que puede desprender opciones para investigaciones adicionales y definir tipos de métodos a seguir.

De manera sencilla podemos utilizar el gráfico de cuantiles contra cuantiles (Q-Q) para visualizar si un conjunto de datos sigue una determinada distribución teórica, comúnmente se utiliza la distribución normal, pero se pueden usar otras distribuciones según lo que se requiera [28]. El gráfico se obtiene al calcular los cuantiles de los datos empíricos que se grafican en el eje vertical y se comparan con los cuantiles de la distribución teórica que se desea evaluar y se posicionan en el eje horizontal. Si los puntos del gráfico se alinean sobre la línea recta (y=x), indica que los datos siguen la distribución teórica evaluada. Si los puntos se desvían por encima de la línea diagonal, puede indicar que los datos tienen colas más pesadas que la distribución teórica (es decir, más valores extremos).

Por otro lado, si los puntos se desvían por debajo de la línea diagonal en las colas, puede sugerir que los datos tienen colas más ligeras que la distribución teórica. Estas desviaciones pueden sugerir presencia de dinámicas no lineales, ya que implica respuestas distintas del sistema ante perturbaciones de diferente signo o magnitud. No obstante, esta característica por sí sola no es concluyente y debe complementarse con pruebas estadísticas específicas de no linealidad [67, 69].

Existen diversas pruebas estadísticas que permiten evaluar la normalidad de los datos, cada una con características particulares en cuanto a sensibilidad, robustez y supuestos a cumplir. La Tabla 3.1 presenta algunas de las pruebas más utilizadas en el análisis de series temporales. Las pruebas descritas permiten evaluar la conformidad de los datos con una distribución normal desde distintos enfoques. Su aplicación adecuada depende del tamaño de la muestra, los supuestos del modelo y la sensibilidad deseada frente a desviaciones específicas, como asimetrías o comportamiento en los extremos.

Tabla 3.1: Descripción de pruebas estadísticas para evaluar la normalidad.

Prueba	**Descripción**
Shapiro-Wilk [63]	Evalúa si una muestra proviene de una población con distribución normal. Es especialmente adecuada para muestras pequeñas o medianas; $N < 5000$.
Kolmogorov-Smirnov [5]	Compara la función de distribución empírica de la muestra con una distribución teórica especificada. Tiene menor sensibilidad en los extremos.
Anderson-Darling [6]	Variante del test de Kolmogorov-Smirnov que asigna mayor peso a las colas de la distribución, lo que mejora su capacidad para detectar desviaciones en los extremos.
Jarque-Bera [35]	Basada en los coeficientes de asimetría y curtosis. Evalúa si los momentos muestrales difieren de los esperados en una distribución normal. Es ampliamente utilizada en econometría.

3.2.2. Pruebas estadísticas para evaluar la estacionariedad

En el análisis de series temporales, la estacionariedad constituye un requisito fundamental para la aplicación válida de modelos estadísticos y econométricos tales como ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) y VAR (*Vector Autoregressive*). Los modelos ARIMA permiten describir y predecir la evolución de una serie temporal individual basándose en su comportamiento histórico, en tanto que los modelos VAR facilitan el análisis simultáneo de múltiples series temporales y sus interdependencias dinámicas. Ambas metodologías operan bajo el supuesto de estacionariedad.

De este modo, la estacionariedad de una señal asegura que las propiedades estadísticas de la serie (media, varianza y autocorrelación) permanezcan constantes en el tiempo, lo cual permite realizar inferencias válidas y predicciones confiables. Dentro de los procedimientos más utilizados para evaluar esta condición se encuentran la prueba ADF (Augmented Dickey-Fuller) y la prueba KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin), las cuales, aunque complementarias, se basan en hipótesis nulas opuestas. Asimismo, evaluar la estacionariedad constituye un primer indicio en el análisis de no linealidades, ya que cambios en las propiedades estadísticas de la serie pueden reflejar dinámicas complejas que no son adecuadamente descritas por modelos lineales [30, 67].

3.2.3. Prueba de Dickey-Fuller aumentada

La prueba de Dickey-Fuller aumentada (ADF) es uno de los métodos estadísticos más utilizados para evaluar si una serie temporal es estacionaria. Esta prueba se basa en la estimación de un modelo autorregresivo y la evaluación de la presencia de una raíz unitaria [20]. La formulación de la prueba considera las siguientes hipótesis:

- **Hipótesis nula (H_0):** La serie presenta una raíz unitaria. Es decir, es *no estacionaria*.
- **Hipótesis alternativa (H_1):** La serie es *estacionaria*.

El resultado incluye un test estadístico y su p-valor correspondiente. A medida que el valor del estadístico es más negativo, más cierta será la evidencia en contra de la hipótesis nula.

Para la interpretación del resultado se puede comparar el estadístico con valores críticos prefijados con niveles de significancia más comunes entre 0.01, 0.05 y 0.10, o se puede simplemente utilizar el p valor.

En general, rechazamos la hipótesis nula: si el p-valor es menor o igual que el nivel de significancia o el estadístico de prueba es menor que el valor crítico. Esto significa que la serie es estacionaria. Cuando los valores de p son mayores que el nivel de significancia, se puede decir que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula.
Ambos criterios (p-valor y valor crítico) a menudo nos conducen sorprendentemente a la misma conclusión. Sin embargo, cuando están establecidos niveles de significación específicos resulta útil emplear valores críticos porque en ciertos contextos proporcionan una aproximación más fiable de los resultados. Esta prueba resulta especialmente útil en el análisis de una serie temporal como una etapa preliminar, ya que permite ver si se deben hacer transformaciones a los datos, como la diferenciación antes de ajustar modelos o evaluar no-linealidades.

3.2.4. Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

La prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) constituye un procedimiento estadístico diseñado para evaluar la estacionariedad de una serie temporal en torno a una tendencia determinista. A diferencia de la prueba de Dickey-Fuller aumentada (ADF), cuyo objetivo principal es detectar la existencia de raíces unitarias, la KPSS plantea como hipótesis nula que la serie bajo análisis es estacionaria [64].

En términos prácticos, un valor p reducido conduce al rechazo de la hipótesis nula, lo que implica concluir que la serie no es estacionaria o que presenta una raíz unitaria. Este contraste resulta particularmente relevante en el ámbito del análisis de series temporales, ya que permite determinar si es necesario aplicar transformaciones adicionales como la diferenciación o la eliminación de la tendencia, con el propósito de alcanzar la estacionariedad, condición indispensable para la validez de numerosos modelos econométricos y estadísticos.

La combinación de ambas pruebas ofrece un marco robusto para evaluar la estacionariedad de una serie temporal. La Tabla 3.2 muestra las comparación entre ambas pruebas. Un punto a resaltar es que, mientras la prueba ADF se centra en la detección de raíces unitarias, la prueba KPSS contrasta directamente la hipótesis de estacionariedad. En conjunto, permiten identificar con mayor precisión la naturaleza de la serie y decidir las transformaciones necesarias para garantizar la validez de los modelos aplicados [20, 64, 31].

Tabla 3.2: Comparación entre las pruebas de estacionariedad ADF y KPSS [20, 64, 31].

Característica	**ADF**	**KPSS**
H_0	La serie presenta una raíz unitaria (no estacionaria)	La serie es estacionaria
H_1	La serie es estacionaria	La serie no es estacionaria
Tipo	Paramétrica	No paramétrica
Objetivo principal	Detectar presencia de raíz unitaria	Verificar estabilidad de la media (o tendencia)
Sensibilidad	Sensible a autocorrelación y tamaño de muestra	Sensible a cambios estructurales y tendencias suaves
Modelo base	Modelo autorregresivo aumentado	Descomposición en tendencia + ruido estacionario
Rechazo de H_0	Estacionariedad	No estacionariedad
Uso típico	Evaluar si es necesario diferenciar la serie	Confirmar estacionariedad detectada por otras pruebas

3.2.5. Pruebas estadísticas para evaluar la correlación

La caracterización de la estructura de correlación temporal constituye un paso metodológico fundamental previo al análisis de no linealidades. Las pruebas estadísticas de correlación permiten identificar patrones de dependencia lineal y propiedades de memoria en las series, estableciendo una línea base que facilita la distinción entre procesos lineales complejos y comportamientos genuinamente no lineales. Sin esta caracterización preliminar, existe

el riesgo de confundir dependencias lineales residuales o problemas de especificación con evidencia de no linealidad [30, 36, 67].

3.2.6. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson (r), cuantifica el grado de asociación lineal entre dos variables [53]. Este valor oscila entre -1 y $+1$, donde:

- Un valor próximo a $+1$ indica una *correlación positiva fuerte*, esto es que a medida que una variable incrementa la otra tiende a aumentar de manera proporcional.
- Un valor cerca de -1 señala una *correlación negativa fuerte*, en este caso el incremento de una variable se relaciona con la disminución de la otra.
- Un valor igual a 0 implica *ausencia de correlación lineal*, no obstante, no se debe descartar la existencia de una relación no lineal entre las variables involucradas.

El coeficiente de Pearson asume una relación lineal entre las variables y, por lo tanto, no es adecuado para identificar dependencias que no sean lineales. Por lo tanto, la aplicación de esta técnica podría considerarse exploratoria preliminar. De este método, es especialmente útil al comienzo del análisis de series temporales. Si se asume o se sospecha que el vínculo es más complejo o incluso no lineal, se debe considerar un análisis más riguroso.

3.2.7. Coeficiente de correlación de Spearman

El coeficiente de correlación de Spearman (ρ) es una medida no paramétrica que se utiliza para determinar la correlación entre dos variables aleatorias al comparar sus rangos, no sus valores originales [66]. A diferencia de r, ρ no presupone que las variables sigan una distribución normal o que la relación entre ellas sea lineal, lo que hace que el coeficiente de Spearman sea valioso para estudiar correlaciones más generales. Las características que destacan son:

- Rango del coeficiente: ρ varía entre -1 y $+1$. Un valor de $+1$ indica una correlación positiva perfecta entre los rangos (ambas variables aumentan de forma sincronizada),

mientras que -1 representa una correlación negativa perfecta (una variable aumenta mientras la otra disminuye). Un valor cercano a 0 sugiere ausencia de correlación monótona.

- Relaciones monótonas: Spearman permite detectar relaciones *monótonas*, es decir, aquellas en las que una variable tiende a aumentar o disminuir consistentemente respecto a la otra, sin que necesariamente exista una relación lineal estricta.

- Robustez ante valores atípicos: Al basarse en los rangos, este coeficiente es menos sensible a los valores extremos, lo que mejora su desempeño en datos con presencia de outliers.

Por estas razones, el coeficiente de Spearman es una herramienta complementaria a la correlación de Pearson, especialmente adecuada para el análisis exploratorio de series temporales donde se sospechan relaciones no lineales.

3.2.8. Transformaciones

Para un análisis efectivo de los datos de serie temporal, deben aplicarse varias técnicas de preprocesamiento a fin de mejorar la calidad y adaptar las características de los datos a los supuestos en modelos estadísticos. Algunas de estas incluyen el tratamiento de los valores extremos, el manejo adecuado de variables faltantes, y suavizar la serie si es necesario. A través de éstas, la transformación asume un papel sumamente importante ya que modifica la estructura de la serie para hacerla más fácil de analizar, modelar e interpretar. Esto es una operación directa sobre los datos de una serie de tiempo; dependiendo lo que se desea analizar será el tipo de transformación, algunas de las más sobresalientes [10, 31]:

- *Estabilización de la varianza:* si la varianza de la serie aumenta con el nivel de la media (heterocedasticidad), suele recomendarse una transformación logarítmica o de raíz cuadrada. Si bien estas transformaciones hacen el trabajo al homogeneizar la varianza, también hacen que sea fácil ajustar modelos de regresión que suponen homocedasticidad. De lo contrario, si la varianza varía sin una tendencia clara a este

respecto, esta no sería útil, y se prefieren los modelos que permiten la varianza no constante.

- *Eliminación de tendencia o estacionalidad:* Para remover componentes sistemáticos como tendencias o patrones estacionales, se emplea comúnmente la diferenciación. Esta operación consiste en calcular las diferencias sucesivas entre observaciones consecutivas, lo cual permite obtener una serie estacionaria en media.

- *Resaltado de patrones:* En contextos donde se desea destacar tendencias o ciclos de largo plazo, se utilizan técnicas de suavizado como la media móvil o el suavizado exponencial. Por otro lado, si el interés está en identificar periodicidades o estructuras a diferentes escalas temporales, es común aplicar transformadas de Fourier o de Wavelet.

- *Cumplimiento de supuestos estadísticos:* Muchos modelos clásicos requieren que los datos cumplan ciertas condiciones, como normalidad, linealidad o estacionariedad. Por ejemplo, los modelos ARIMA requieren series estacionarias, mientras que los modelos lineales de regresión asumen normalidad y homocedasticidad de los errores. En estos casos, transformaciones como la logarítmica, la raíz cuadrada o la diferenciación permiten adaptar los datos a los requerimientos del modelo.

La elección de una transformación adecuada debe realizarse con base en un análisis exploratorio riguroso, considerando tanto las propiedades estadísticas de la serie como los objetivos del estudio.

3.2.9. Pruebas estadísticas para evaluar no linealidad

Con el propósito de complementar el análisis dinámico de las series temporales y proporcionar evidencia estadística adicional sobre la presencia de no linealidad, se estudiaron diversas pruebas estadísticas ampliamente utilizadas en el análisis de series temporales. Estas pruebas permiten evaluar desviaciones respecto al comportamiento lineal bajo distintos supuestos, tales como independencia, correcta especificación del modelo y cambios

de régimen. A diferencia de los métodos basados en la reconstrucción del espacio de fases, estas pruebas se enfocan en detectar dependencias no lineales desde una perspectiva estadística, por lo que resultan especialmente útiles como herramientas exploratorias y de validación.

- *BDS* La prueba evalúa la hipótesis nula de que una serie temporal es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.). Rechazar esta hipótesis indica la presencia de dependencia temporal o estructura no lineal no capturada por modelos lineales, siendo una prueba sensible a dinámicas caóticas y no lineales en general [12].

- *Tsay*: La prueba de Tsay detecta no linealidades del tipo autorregresivo mediante la comparación entre modelos lineales y modelos con términos cruzados no lineales. Es especialmente adecuada para identificar cambios de régimen y estructuras no lineales dependientes del estado del sistema [69].

- *RESET*: La prueba RESET (Regression Specification Error Test) de Ramsey evalúa errores de especificación en modelos lineales, verificando si existen relaciones no lineales omitidas. Rechazar la hipótesis nula sugiere que la dinámica de la serie no puede describirse adecuadamente mediante un modelo lineal [55].

- *Keenan*: Es una prueba específica para detectar no linealidad cuadrática en series temporales. Analiza si existen componentes no lineales de segundo orden que no son explicadas por un modelo autorregresivo lineal [37].

- *Teräsvirta*: La prueba está diseñada para identificar no linealidades suaves del tipo STAR (Smooth Transition Autoregressive). Evalúa si la dinámica del sistema presenta transiciones graduales entre diferentes regímenes, lo cual es característico de sistemas no lineales suaves [30].

3.3. Modelos teóricos

Antes de proceder al análisis cuantitativo de las series de tiempo e imágenes para identificar las no linealidades presentes, es necesario establecer los conceptos fundamentales sobre los que se construye el enfoque propuesto. En esta sección se presentan los elementos teóricos que sustentan el método de caracterización de no linealidades propuesto para señales e imágenes derivadas de procesos químicos. La comprensión de estos modelos proporciona el marco analítico necesario para interpretar los resultados posteriores y fundamentar la validez de las herramientas utilizadas.

3.3.1. Descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares *(Singular Value Decomposition, SVD)*, es una herramienta matemática para el análisis de estructuras ocultas en datos [29]. Este método factoriza una matriz arbitraria $\mathbf{M}(t_i; n)$ como el producto de tres matrices, cuyas propiedades reflejan las características más importantes del sistema:

$$\mathbf{M}(t_i; n) = \mathbf{U}(t_i; n)\, \mathbf{\Lambda}_X(t_i; n)\, \mathbf{V}^T(t_i; n) \tag{3.1}$$

$\mathbf{U}(t_i; n)$ y $\mathbf{V}(t_i; n)$ son matrices ortogonales unitarias ($\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$), mientras que $\mathbf{\Lambda}_X(t_i; n)$ es una matriz diagonal de tamaño $n \times n$ cuyos elementos diagonales no negativos corresponden con los valores singulares σ_j de la matriz $\mathbf{M}(t_i; n)$.

Estos valores singulares σ_j se obtienen como las raíces cuadradas de los eigenvalores no nulos de la matriz $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$, esto es, $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$. Se ordenan de forma no creciente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$, de modo que los primeros valores contienen la mayor parte de la información del sistema.

Las columnas de $\mathbf{U}(t_i; n)$ se denominan vectores singulares izquierdos, mientras que las columnas de $\mathbf{V}(t_i; n)$ (o las filas de $\mathbf{V}^T(t_i; n)$) corresponden a los vectores singulares derechos. Ambos conjuntos de vectores son ortonormales, es decir, cumplen con las propiedades de ortogonalidad y normalización.

La SVD puede considerarse una generalización de la descomposición espectral para matrices, y tiene la ventaja de ser aplicable a cualquier matriz real o compleja no necesariamente cuadrada. Por esta razón, es ampliamente utilizada en diversas áreas del análisis de datos, compresión de señales, reducción de dimensiones y, en este caso, como base para el análisis de no linealidades en señales e imágenes provenientes de procesos químicos [14].

Desde una perspectiva geométrica, la descomposición en valores singulares puede interpretarse como una transformación de coordenadas que involucra rotaciones y reescalado. Específicamente, la SVD transforma un conjunto de puntos como ejemplo, se presenta el círculo unitario; $\mathbf{V^T}$ genera una rotación inicial de la figura original,$\mathbf{\Lambda_X}$ realiza una deformación (reescalado) que convierte dicho círculo en una elipse, donde los valores singulares representan las magnitudes de dicha transformación en distintas direcciones del espacio, actuando como los semiejes principales de la elipse generada y finalmente, $\mathbf{U}$ genera otra rotación de la elipse en el espacio. Los vectores singulares contenidos en $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ constituyen bases ortonormales para los espacios de columnas y filas de la matriz original $\mathbf{M}$, respectivamente, permitiendo así una representación precisa y compacta de la información estructural contenida en los datos.

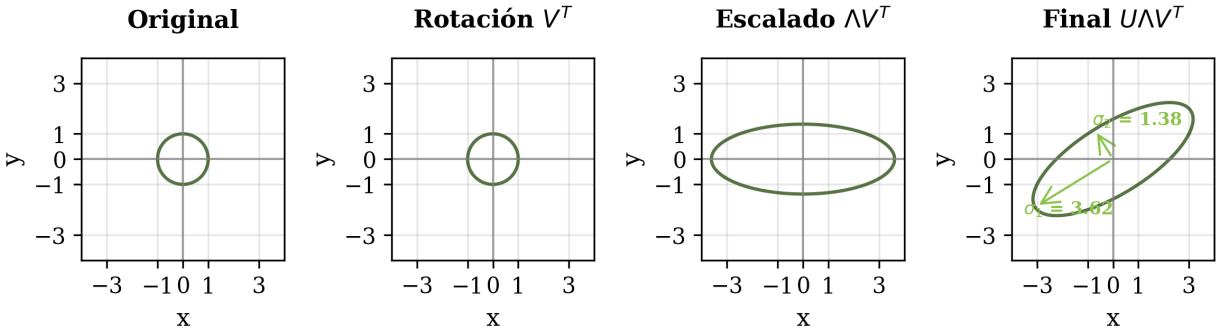


Figura 3.1: Representación geométrica de la descomposición de valores singulares (SVD) aplicada a la esfera unitaria.

Finalmente, la SVD ha demostrado ser una herramienta versátil en innumerables áreas, como el análisis de datos, el procesamiento de imágenes y la reducción de dimensionalidad [29, 23]. Una de sus consecuencias más significativas es su capacidad de reducir las direcciones preferentes de concentración de la información, lo que permite que estructuras complejas sean representadas de manera mucho más simples [29, 36]. En el procesamiento

de imágenes, la SVD proporciona un esquema de reconstrucción de la imagen sobre una cantidad reducida de los valores singulares con una buena calidad visual y, al mismo tiempo, reduce drásticamente el poder computacional requerido sin pérdida de información útil [7]. Como resultado, la SVD se ha convertido en una herramienta poderosa en compresión y filtrado para datos de altas dimensiones.

3.3.2. Entropía de Shannon

La entropía de Shannon es en el marco de la teoría de la información, una medida estadística de la incertidumbre o aleatoriedad que caracteriza una fuente de información [60]. Corresponde al límite teórico de la compresión sin pérdida: el número mínimo de bits que se necesita para codificar óptimamente un mensaje. En el análisis de imágenes o series temporales, mide la cantidad media de información que se encuentra en la distribución de probabilidad de los datos. Valores altos de entropía reflejan mayor incertidumbre, mientras que valores bajos indican estructuras más regulares o deterministas [54]. De esta manera la entropía de Shannon se define como:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i) \tag{3.2}$$

donde H es la entropía normalizada del sistema, p_i es la probabilidad del evento i y N es la cantidad total de estados o de elementos posibles. La entropía alcanza su máxima expresión cuando todos los estados tienen la misma probabilidad (datos equiprobables), ya que multiplica el aporte informativo de cada estado por la probabilidad de dicho estado.

Esta medida se ha convertido rápidamente en una de las medidas estadísticas más utilizadas para evaluar la complejidad de las series temporales por su capacidad para discernir comportamientos aleatorios de estructuras ocultas; una secuencia completamente aleatoria alcanza su entropía máxima, mientras que una secuencia predecible perfectamente, como la repetición de un único símbolo, presenta entropía nula.

3.3.3. Análisis de datos sustitutos

La caracterización de la dinámica subyacente de una serie temporal requiere establecer si su comportamiento puede explicarse mediante un modelo lineal o, de lo contrario, refleja estructuras no lineales. Entendiendo que un proceso *lineal* puede presentarse como una combinación lineal de variables aleatorias generadas por un ruido blanco gaussiano [13, 31]. Para contrastar formalmente esta distinción, el método de "datos sustitutos" (*surrogate data*) es una herramienta útil. El método se fundamenta en un marco de prueba de hipótesis [61, 68, 67]. En este sentido, el análisis de datos sustitutos permite evaluar si la estructura observada en la serie temporal es compatible con una descripción lineal del sistema o si existen evidencias de comportamiento no lineal. El procedimiento implica la comparación de una propiedad específica de la serie original, el estadístico discriminante, con la propiedad estimada del conjunto de datos sustitutos [31].

Sea x_t la serie temporal observada y x_t^{surr} el conjunto de datos sustitutos, y x una o más propiedades de las series temporales que se comparan para evaluar si dicha característica proviene de una dinámica lineal o no. La propiedad a ser probada en este trabajo es la *linealidad* de señales temporales e imágenes ya que la información relacionada con estructuras no lineales está principalmente en las fases del espectro de Fourier [62, 67]. Por lo tanto, la técnica seleccionada se basa en la generación de datos sustitutos que conservan el espectro de potencia de la señal original pero en el que se ha aleatorizado las fases. Con esto, cualquier estructura no lineal está eliminada. Esta metodología proporciona una comparación robusta entre la señal original y sus versiones generadas. Si estas versiones generadas difieren sustancialmente de la original, la hipótesis de linealidad se rechaza, dando un indicio estadístico de las dinámicas no lineales en el sistema considerado [68, 67].

De esta manera, el análisis con datos sustitutos es una herramienta clave para probar la hipótesis de linealidad en sistemas dinámicos, ya que permite diferenciar si las propiedades observadas en una serie temporal se pueden explicar a través de un modelo lineal o, por el contrario, son reflejando dependencias no lineales inherentes al proceso. No obstante, para avanzar hacia una caracterización cuantitativa de no linealidad es necesario complementar este enfoque con indicadores específicos, como el índice de no linealidad. En este contexto,

un enfoque estadístico es necesario para proporcionar una estimación de la variabilidad y confiabilidad de los indicadores obtenidos. Para este propósito, el método de Bootstrap se emplea como herramienta en un marco ampliamente utilizado para el remuestreo y la simulación de datos, lo que permite evaluar la estabilidad estadística de los indicadores de complejidad, la entropía SVD y el NLI, mediante la generación de múltiples sets de pruebas de los datos originales.

3.3.4. Remuestreo Bootstrap

El método "Bootstrap" es una técnica estadística no paramétrica de re-muestreo cuyo objetivo es estimar la distribución de un estadístico a partir de un conjunto finito de datos. Su fundamento radica en generar múltiples muestras aleatorias (con reemplazo) a partir de los datos originales, de modo que cada muestra *Bootstrap* pueda considerarse una posible realización del proceso subyacente. Cada una de estas muestras mantiene el mismo tamaño que la muestra original. Luego, en cada muestra generada, se calcula la estadística de interés, como la media, la mediana, la varianza, la entropía, entre otros. Al repetir este procedimiento un número suficiente de veces, se obtiene una distribución empírica de la estadística, que se utiliza para estimar la variabilidad de la misma, construir intervalos de confianza, etc. Su principal utilidad radica en la estimación de la incertidumbre asociada a un estimador cuando no se dispone de una fórmula exacta o cuando la derivación analítica resulta compleja. A diferencia de los métodos paramétricos, este enfoque no requiere suponer una distribución teórica específica, lo que lo hace especialmente útil en el análisis de series temporales complejas o de naturaleza no lineal, ya que no necesita que se tenga conocimiento previo sobre la distribución subyacente de los datos [59, 24].

Dada una serie temporal original $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ y una medida estadística de interés $Q(x)$ (por ejemplo, la entropía SVD o el índice de no linealidad), se generan N_{ph} réplicas *Bootstrap* mediante muestreo con reemplazo:

$$x^*(N) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}\}, \quad i_k \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

para $N = 1, 2, \ldots, N_{ph}$.

A partir de cada réplica, se calcula la medida correspondiente:

$$Q^*(N) = Q(x^*(N_{ph}))$$

Así, se logra una distribución empírica de la medida Q. Su media y desviación estándar facilitan el cálculo de la incertidumbre vinculada al valor estimado a partir de la serie original.

3.3.5. Intervalos de confianza

La aplicación más común y por la que se eligió el método Bootstrap es la estimación de intervalos de confianza [24]. El intervalo de confianza al nivel de significancia α se define como:

$$\left[Q^{*(\alpha/2)},\, Q^{*(1-\alpha/2)}\right]$$

donde $Q^{*(p)}$ representa el percentil p de la distribución empírica de los valores $Q^*(N_{ph})$. Este enfoque posibilita analizar la estabilidad de las mediciones de complejidad o no linealidad, asegurando que las discrepancias detectadas no sean producto del azar o del alcance restringido de los datos.

Para estimar la significancia estadística de la entropía SVD de los patrones observados, se eligio el método Bootstrap. Esta herramienta permite construir intervalos de confianza del índice de entropía para SVDEn. Esta aproximación es especialmente útil al contrastar el comportamiento de señales reales con datos sustitutos.

El método Bootstrap proporciona una estimación de la incertidumbre asociada a una medida estadística, como los intervalos deconfianza. Por su parte, el análisis con datos sustitutos ofrece información sobre el grado en que las propiedades de una señal pueden ser reproducidas por un modelo lineal asociado. La combinación de ambos métodos aporta robustez en la evaluación de no linealidades, al permitir diferenciar efectos puramente estadísticos y relaciones estructurales reales [24, 68, 61].

3.3.6. Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform) es una herramienta fundamental en el análisis de señales [51]. Descompone una serie temporal en sus respectivos componentes frecuenciales que se caracterizan por la magnitud y fase. Para ello, transforma la serie del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, sin perder ni alterar la información [70]. Asumiendo que, toda serie de tiempo puede expresarse como la suma de exponenciales complejas. Así, la DFT provee una representación frecuencial de la serie de tiempo, capaz de destacar patrones ocultos, estructuras repetitivas, o dinámicas de comportamiento en diferentes escalas temporales.

Dada una secuencia discreta de N muestras $x_0, \ldots, x_{N-1}$, la DFT se define como:

$$\mathcal{F}(k) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kt} \tag{3.3}$$

$\mathcal{F}(k)$ representa el componente frecuencial k-ésimo, i es la unidad imaginaria ($i^2 = -1$) y N es el número total de muestras. Cada componente $\mathcal{F}(k)$ codifica tanto la magnitud como la fase de una frecuencia específica: las frecuencias bajas corresponden a variaciones lentas en la señal, mientras que las altas reflejan cambios rápidos o fluctuaciones abruptas.

La representación polar de la DFT permite expresar cada componente como una sinusoide con amplitud y fase, mediante:

$$\mathcal{F}(k) = |\mathcal{F}(k)|\, e^{j\phi(k)} \tag{3.4}$$

$|\mathcal{F}(k)|$ es el módulo o magnitud del componente, se obtiene de la siguiente manera:

$$|\mathcal{F}(k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(x)^2 + \mathrm{Im}(x)^2} \tag{3.5}$$

y $\phi(k)$ es la fase, determinada mediante:

$$\phi(k) = \arg(x) = \mathrm{atan2}\left(\mathrm{Im}(x), \mathrm{Re}(x)\right) \tag{3.6}$$

La magnitud está relacionada con la cantidad de energía contenida en cada frecuencia y la fase contiene información sobre la organización temporal de los datos. En particular, las estructuras no lineales de una señal están típicamente codificadas en los patrones de correlación entre las fases de la señal, por lo que, las fases son un indicador sensible de la complejidad dinámica subyacente en los datos, misma que en este documento traducimos en términos de no linealidad [62, 67].

Si las fases están distribuidas de manera aleatoria, se espera que la señal no contenga una estructura coherente, esto es, una señal donde no existen patrones o correlaciones internas entre los componentes frecuenciales. Por el contrario, las desviaciones de la aleatoriedad en la distribución de las fases se interpretan como evidencia de interacciones no lineales entre las frecuencias; a saber, fenómenos típicos de sistemas cuya evolución temporal no puede describirse mediante relaciones proporcionales simples. Cuando un sistema no lineal genera una señal, las frecuencias comenzarán a interactuar entre sí: se generarán armónicos y combinaciones que modificarán la estructura espectral. De esta manera, las fases no actúan de manera independiente; en el espectro, habrá correlaciones que reflejarán coordinación pero que será invisible debido a la interpretación usual [11, 39].

En este contexto, la aleatorización de fases en el dominio de Fourier es un método fundamental para evaluar la no linealidad de una señal. El procedimiento mantiene la magnitud del espectro; esto es, mantiene la energía inalterada a lo largo de las frecuencias, pero la fase de la señal original se reemplaza con valores aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Como resultado, se eliminan las correlaciones de fase que introducen cualquier estructura no lineal potencial. Al tomar la transformada inversa se obtiene la señal en el dominio del tiempo con fase aleatorizada. Los datos generados de esta manera, conocidos como series sustitutas, se comparan con la señal original mediante un estadístico discriminante como la entropía basada en la descomposición en valores singulares. Una diferencia significativa entre las entropías con y sin aleatorización de fases indica que la aleatorización destruyó la información estructural presente en la señal original. En otras palabras, esta evidencia se interpreta como indicador de la no linealidad presente en la dinámica del sistema.

En términos más amplios, analizar la no linealidad de una serie temporal implica determinar si su comportamiento puede describirse mediante un modelo lineal, con respecto al cual no hay dependencias entre los componentes, o si presenta interacciones de fase y dinámicas complejas que atestiguan una procedencia no lineal. Esto se fundamenta en la hipótesis de que la serie observada no es más que el producto de un sistema dinámico subyacente que disemina la información a lo largo del tiempo. De esta manera, mediante la comparación de las propiedades de la señal original con las propiedades de sus sustitutos, es factible cuantificar la información perdida a causa de la destrucción de la estructura no lineal, ofreciendo una medición objetiva en cuanto a la dinámica, su complejidad y no linealidad.

3.3.7. Análisis de rango reescalado

El exponente de Hurst (H) es una medida estadística relevante utilizada para caracterizar la memoria a largo plazo o persistencia temporal en una serie de tiempo. Se estima utilizando el análisis de rango reescalado R/S, propuesto por Hurst [34]. Este autor observó que, en muchos procesos naturales, las fluctuaciones no son aleatorias sino que tienen una estructura temporal y que un estado previo influye en un estado futuro. Posteriormente, Mandelbrot y Wallis ampliaron la aplicabilidad del método a varios fenómenos naturales y económicos, mostrando que la relación entre el rango reescalado y el tamaño del intervalo sigue una ley de potencia [44]. Debido a esto, este análisis se ha utilizado en diferentes campos, tales como las finanzas, el estudio del clima y la corrosión de materiales, entre otros [3, 4, 47, 58].

El análisis R/S se basa en el principio de que una serie temporal normalizada presenta un comportamiento que puede ser caracterizado por una relación de ley de potencia con relación al intervalo temporal de observación. Por ende, el exponente de Hurst da una medida cuantitativa sobre el grado de correlación temporal y, junto con la entropía SVD y el análisis de sustitutos puede identificar y caracterizar la estructura compleja y la no linealidad inherentes a los procesos estudiados. Este análisis consiste en dividir la serie en segmentos de diferentes longitudes y calcular para cada uno el rango de las desviaciones

acumuladas respecto a la media, el cual se normaliza dividiéndolo por la desviación estándar del segmento correspondiente. La relación entre el estadístico R/S y la longitud del intervalo temporal se expresa mediante un exponente de ley de potencia conocido como exponente de Hurst (H), el cual se asocia con la presencia de dependencia temporal [43]. De esta manera, el análisis sigue los siguientes pasos:

1. Se normaliza la serie temporal $X(t)$ restando su media:

$$Y(t_i) = X(t_i) - m(t_j) \tag{3.7}$$

2. Se calcula la trayectoria acumulada de la serie centrada:

$$Z(t_j) = \sum_{i=1}^{j} Y(t_i) \tag{3.8}$$

3. Se determina el rango de la trayectoria acumulada:

$$R(t_j) = \text{máx}(Z(t_1), \ldots, Z(t_j)) - \text{mín}(Z(t_1), \ldots, Z(t_j)) \tag{3.9}$$

4. Se calcula la desviación estándar de la serie original:

$$S(t_j) = \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} (X(t_i) - m(t_j))^2} \tag{3.10}$$

5. Finalmente, se obtiene el rango reescalado:

$$\left(\frac{R}{S}\right)(t_j) = \frac{R(t_j)}{S(t_j)} \tag{3.11}$$

La razón adimensional R/S para procesos autosimilares sigue una ley de potencia del tipo:

$$\left(\frac{R}{S}\right)(t_j) = K t_j^H \tag{3.12}$$

Aquí t_j es la escala temporal y H es el exponente de Hurst, el cual se estima como la pendiente en un gráfico logarítmico de R/S frente a t_j. Este exponente permite clasificar la naturaleza de la dependencia de la serie:

- $H=$ 0.5 indica un comportamiento aleatorio (ruido blanco), sin memoria de largo plazo.
- $H < 0.5$ refleja una correlación negativa (antipersistencia): un incremento es seguido por una disminución y viceversa. Sugiere una dinámica más irregular.
- $H >$0.5 sugiere una correlación positiva (persistencia): los incrementos tienden a ser seguidos por otros incrementos.

Por lo tanto, el exponente de Hurst es una medida cuantitativa del grado de correlación temporal en una serie y, junto con la entropía SVD y el análisis de datos sustitutos, permite identificar y caracterizar la estructura compleja asociada con comportamientos no lineales. De esta manera, el análisis R/S surge como una herramienta sólida para describir la estructura temporal de una señal y diferenciar entre los procesos meramente estocásticos y cualesquiera otros que presenten dependencia estructurada en el tiempo.

4. Metodología

En esta sección, se describen detalladamente las herramientas y enfoques utilizados para llevar a cabo el análisis y cuantificación de no linealidades de series temporales e imágenes de procesos químicos.

Dada la serie temporal $X(t_i)_{i=1}^{N_T}$ obtenida como una secuencia ordenada de números reales de longitud N_T, con tiempo inicial t_i. Se toma una subsección de menor longitud con tiempo de retraso.

$$X(t_i,\ n) = X(t_{i-n+1}), \ldots, X(t_{i-1}),\ X(t_i) \tag{4.1}$$

$X(t_i)$ es el valor de la serie en el tiempo i, n es la longitud de la subsección y $X(t_{i-n+1})$ representa el valor más antiguo de la subsección tomada.

De esta manera, se debe probar si la sucesión obtenida es similar a secuencias retrasadas de la misma longitud. Para ello, se construye la siguiente matriz de señales retardadas, las filas están formadas por las subsecuencias retardadas de tamaño n.

$$\mathbf{M}_X\left(t_i,\ n\right) = \begin{bmatrix} X\left(t_i; n\right) \\ X\left(t_{i-1}; n\right) \\ \vdots \\ X\left(t_{i-n+1}; n\right) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Para la construcción de la matriz de señales retardadas, se extraen fragmentos de longitud $2n$ de la serie original restando la media para obtener una señal centrada. Cada fila $X\left(t_{i-n+1}; n\right)$ es una secuencia desplazada de la señal centrada. La similitud de las filas de la matriz refleja la coherencia dinámica del sistema en el intervalo considerado. Si la sucesión es similar a las sucesiones pasadas, las filas de la matriz son mutuamente similares.

Es decir, las filas de la matriz son linealmente dependientes, por consiguiente, corresponde a una matriz correlacionada, lo cual indica determinismo. Esto sugiere que la información se encuentra en un subespacio de dimensión reducida. Por el contrario, si las filas de la matriz son independientes entre sí (no similares) existe una ausencia de correlaciones; lo cual implica que la reducción de la dimensionalidad puede conducir a una importante pérdida de información.

Para analizar las no linealidades de las series temporales se empleó la SVDEn como enfoque adecuado para abordar la interrogante sobre si la matriz M está o no correlacionada y la entropía para saber en qué medida las filas de la matriz son dependientes. De esta manera, la entropía indica el índice del grado de interdependencia de las filas de una matriz [45].

Primero, se aplicó la SVD a la matriz de señales retardadas que conduce a la factorización dada por la Ec. 3.1. Los valores singulares de la matriz reflejan la información de correlación de la serie temporal $X(t_i)$ para un horizonte temporal de n tiempos discretos. De esta manera, podemos construir una medida de complejidad usando los valores singulares de la matriz de señales retardadas [57]. Así, los valores singulares se normalizan:

$$\sigma_j^* \left(t_i; n\right) = \frac{\sigma_j \left(t_i; n\right)}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t_i; n)} \tag{4.3}$$

Esta normalización permite interpretar cada valor singular como una fracción relativa respecto al total, ya que la suma cumple $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^*(t_i; n) = 1$. De este modo, el valor singular normalizado $\sigma_j^* \left(t_i; n\right)$ puede considerarse como una medida de la contribución relativa del j-ésimo componente de la matriz. Posteriormente, se calcula la entropía de la matriz de la siguiente manera:

$$S_{SVD} \left(t_i; n\right) = -\sum_{i}^{n} \sigma_j^* \left(t_i; n\right) \ln \left(\sigma_j^* \left(t_i; n\right)\right) \tag{4.4}$$

La entropía normalizada se calcula al observar que la entropía máxima para una escala de tiempo dada es $ln(n)$. De este modo, $ln(n)$ representa el valor máximo que puede alcanzar la entropía para un conjunto de n eventos posibles. La normalización se realiza dividiendo la entropía real entre este valor máximo, proporcionando así una medida relativa de la

incertidumbre en comparación con la máxima posible en el sistema. Este enfoque permite expresar la entropía en términos de proporción con respecto a su valor máximo teórico.

$$E_{SVD}\left(t_i; n\right) = -\frac{S_{SVD}\left(t_i; n\right)}{\ln\left(n\right)} \tag{4.5}$$

De esta forma la entropía se restringe entre valores de cero y la unidad. Para un proceso no correlacionado no hay direcciones preferenciales de acumulación de información y su entropía es máxima como en procesos aleatorios. Por lo contrario, una matriz donde existen correlaciones refleja direcciones preferentes de acumulación de información y posee una entropía menor a la unidad. Un valor de entropía cercano a cero representa un sistema altamente probable con poca información nueva obtenida. Una mayor entropía sugiere una mayor incertidumbre y complejidad, lo cual puede ser asociado a la presencia de no linealidades.

Una cuestión interesante es si la serie temporal $\{X(t_i)\}_{i=1}^{N_T}$ fue generada por un proceso estocástico no lineal. En este sentido, el análisis de datos sustitutivos surge como enfoque para comprobar la no linealidad de las series temporales. Se utiliza la entropía mediante SVD como estadístico discriminante para evaluar la presencia de no linealidades. La hipótesis nula establece que la señal original puede ser explicada por un proceso lineal, y por tanto, cualquier desviación respecto a los datos sustitutos sugiere no linealidad.

El procedimiento seguido fue el siguiente:

1. *Transformada de Fourier:* se transforma la señal original del dominio del tiempo $X(t_i; n)$ al dominio de frecuencia, obteniendo $Z(f_i; n) = Z_{\mathrm{Re}}(f_i; n) + jZ_{\mathrm{Im}}(f_i; n)$.

2. *Aleatorización de fase:* se generan $N_{\mathrm{ph}} = 1500$ secuencias con fase aleatoria mediante datos sustitutos. El procedimiento de aleatorización altera la estructura de fase y preserva el espectro de potencia.

3. *Reconstrucción temporal:* se aplica la transformada inversa de Fourier a cada secuencia para obtener series temporales con fase aleatorizada $X_{\mathrm{ph}}(t_i; n)$.

4. *Cálculo de entropía SVD:* se estima la entropía SVD de cada una de las N_{ph} señales aleatorizadas.

5. *Intervalo de confianza:* se construye un intervalo de confianza del 95 % con las entropías generadas, representando el comportamiento esperado bajo la hipótesis de linealidad.

6. *Comparación estadística:* se realiza un análisis estadístico de los valores de entropía SVD para probar la hipótesis nula de que la serie temporal con fase aleatorizada tiene la misma entropía SVD que la serie temporal original. Se compara la entropía de la señal original con el intervalo de confianza. Si la entropía cae fuera de los límites del intervalo, se rechaza la hipótesis nula y se concluye la existencia de no linealidades.

La aplicación numérica se llevó a cabo siguiendo las siguientes indicaciones:

I. Se toma la longitud n de la muestra como representación de la escala temporal. De este modo, se requieren $2n$ observaciones para realizar el análisis.

II. El análisis SVD se llevó a cabo sobre una ventana móvil de tamaño comprendido entre 5 y 80 observaciones.

III. Se consideran $N_{ph} = 1500$ muestras de fase aleatoria para obtener los intervalos de confianza del 95 % del análisis estadístico.

Con base en este análisis, se definió el *índice de no linealidad (NLI)*:

$$\text{NLI}(t_i, n) = 100 \times \frac{\text{máx}\,(0,\ LL(t_i, n) - E_{\text{SVD}}(t_i, n))}{E_{\text{SVD}}(t_i, n)} \tag{4.6}$$

$LL(t_i, n)$ representa el límite inferior del intervalo de confianza y $E_{\text{SVD}}(t_i, n)$ la entropía de la señal original. Un valor positivo de este índice indica la presencia de componentes no lineales en la señal, siendo su magnitud proporcional a la intensidad de la desviación respecto al comportamiento lineal esperado.

4.1. Pseudocódigo para el análisis de series temporales

```
Entrada: Serie temporal X(t), escala n, N_ph = 1500
1. Extraer subserie de longitud 2n
2. Centrar la serie (restar media)
3. Construir matriz de señales retrazadas M (t_i, n)
4. Aplicar SVD y calcular E_SVD (t_i, n)
5. Generar N_ph series sustitutas
6. Para cada serie sustituta: a. Repetir pasos 2-4 y guardar E_SVD_surr
7. Calcular IC del 95% con E_SVD_surr
8. Comparar E_SVD (t_i, n) con IC
9. Si E_SVD < LL: Calcular NLI(t_i, n) Salida: Gráfico de entropía y NLI
```

4.2. Pseudocódigo para el análisis de imágenes

El procedimiento para analizar imágenes mediante entropía SVD sigue una lógica análoga a la utilizada en series temporales. En este caso, se parte de una imagen en escala de grises, que se interpreta como una matriz bidimensional de intensidades de píxeles. Sobre esta matriz se aplica la SVD, lo cual permite capturar las direcciones principales de variabilidad espacial. A partir de los valores singulares normalizados, se calcula la entropía de Shannon, la cual se utiliza como una métrica de complejidad estructural de la imagen. Esta entropía se compara con un conjunto de imágenes aleatorizadas que conservan ciertas propiedades estadísticas de la imagen original, generadas mediante la aleatorización de fase. La comparación se realiza a través del intervalo de confianza del 95 %, y la entropía de la imagen original. De este modo, la metodología permite detectar patrones espaciales que podrían estar asociados con comportamientos no lineales.

```
Entrada: Imagen I (en escala de grises), N_ph = 1500
1. Obtener matriz de intensidad I(x, y)
2. Aplicar descomposición SVD
3. Normalizar los valores singulares
```

```
4. Calcular entropía SVD
5. Normalizar entropía
6. Generar N_ph imágenes sustitutas:
     - Obtener la matriz en el dominio de Fourier
     -Aleatorizar la fase de la imagen
     - Calcular entropía SVD para cada una
     - Almacenar los N_ph valores E_SVD_surr
8. Construir el intervalo de confianza (IC) del 95% con E_SVD_surr
9. Comparar E_SVD de la imagen original con IC:
     - Si E_SVD < límite inferior del IC → evidencia de organización/no linealidad
10.  Calcular un índice de no linealidad
Salida: E_SVD original, intervalo de confianza, NLI
```

5. Casos de estudio

5.1. Señales temporales de flujo bifásico

Para el análisis de la complejidad y no linealidad en series temporales, se utilizaron los datos experimentales de flujo bifásico descendente reportados por Moguel et al. [48]. La instalación experimental comprendía una tubería de policarbonato transparente con inclinación variable y un sistema de circulación que mantenía la temperatura constante a 20°C. En este sistema, el aceite era bombeado desde un tanque de almacenamiento mediante una bomba de cavidad progresiva, mientras que el suministro de aire provenía de un compresor de tornillo rotativo seco. El control del caudal de gas se realizaba a través de dos válvulas ubicadas arriba de los caudalímetros. El sistema experimental fue diseñado cuidadosamente con la intención de modificar las condiciones de flujo y la geometría para obtener distintos regímenes de flujo.

La señal fue obtenida mediante un sensor de capacitancia de dos hilos, instalado en la sección de prueba de la tubería. Este sensor consiste en un par de filamentos paralelos atravesando el diámetro de la sección transversal. La capacitancia varía en función del contenido de líquido ya que la permitividad eléctrica del líquido es mayor que la del gas. El sensor convierte esta variación en voltaje y este constituye una medida instantánea de la fracción de la mezcla. El rango de respuesta del voltaje está comprendido entre 0 y 5V, siendo el voltaje máximo cuando la tubería sólo contiene líquido. Esta fracción se traduce en una señal de voltaje a través de un sistema de adquisición basado en una tarjeta de E/S multifunción y un programa desarrollado en LabVIEW.

Debido a las condiciones ambientales, el sensor fue calibrado diariamente, considerando como referencia la respuesta de voltaje de la tubería completamente vacía; esto es, sólo gas ($V_{\min}$) y completamente llena ($V_{\max}$); sólo líquido. La serie temporal se normalizó $V_0 = \frac{V - V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}}$. De este modo, se aseguró la comparación entre series bajo distintas condiciones experimentales. Las señales fueron muestreadas durante 1 minuto a 1000 Hz, generando series de 60,000 datos para cada patrón de flujo. Las series corresponden a diversas combinaciones de velocidades de gas-líquido y ángulo de inclinación de la tubería, y presentan distintos niveles de variabilidad y amplitud. De esta manera, las señales de voltaje resultan útiles para caracterizar patrones de flujo bifásico, ya que reflejan directamente la fracción de cada fase [65, 48].

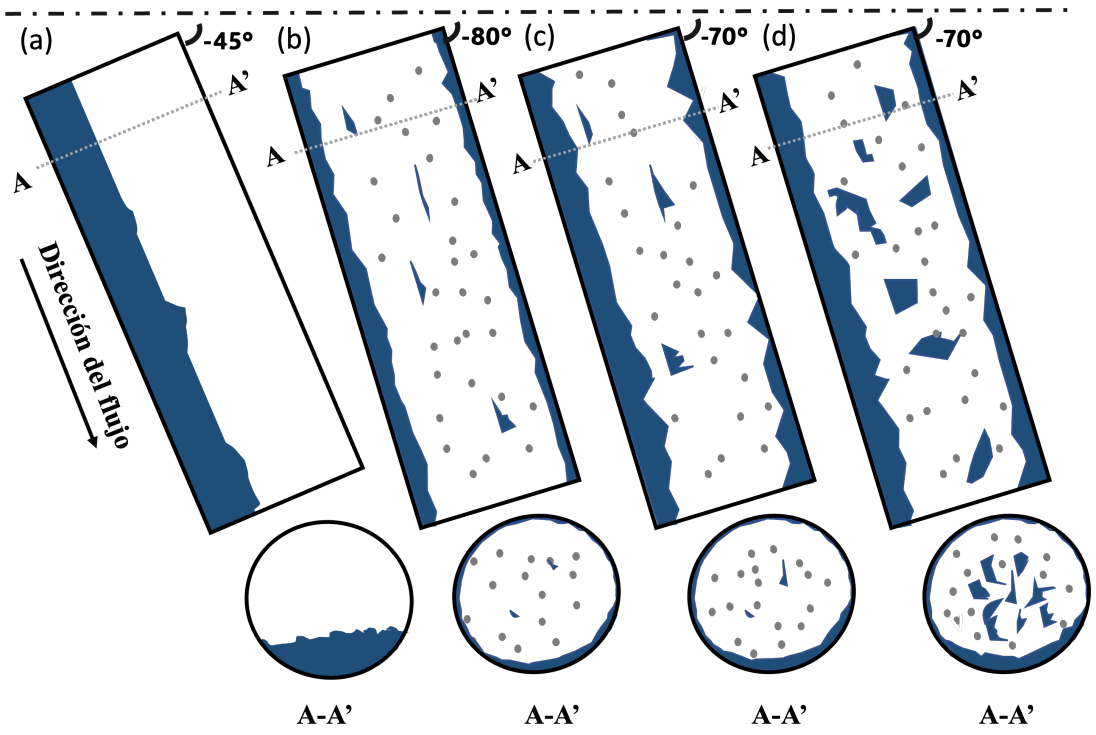


Figura 5.1: Patrones de flujo bifásico analizados: ondulado estratificado (SW), película descendente (FF), flujo anular ondulado (WA) y flujo de deslizamiento líquido (LS).

Las series muestran un comportamiento aparentemente aleatorio, lo que motiva el análisis de una perspectiva de complejidad y no linealidad. En la Figura 5.1 se ilustran los patrones de flujo considerados: el flujo estratificado ondulado (SW), y tres subclasificaciones del flujo anular: película descendente (FF), anular ondulado (WA) y deslizamiento líquido (LS).

Estos patrones fueron previamente caracterizados mediante un análisis de su estructura ondulatoria y topología con el uso de cámaras de alta velocidad [2, 48].

5.1.1. Patrones de flujo Bifásico [48]

- *Ondulado estratificado (SW):* Los fluidos se distribuyen en capas, donde el líquido fluye por la parte inferior de la tubería y el gas por la parte superior. Sobre la superficie del líquido se propagan pequeñas ondas en dirección del flujo, cuyas amplitudes y frecuencias dependen de la diferencia de velocidades entre las fases. El aumento en la velocidad superficial del gas genera un esfuerzo cortante sobre la interfaz, desestabilizando la superficie líquida. Este patrón ocurre típicamente en tuberías con baja inclinación y velocidades superficiales moderadas a altas del gas.

- *Película descendente (FF):* El líquido escurre formando una película delgada adherida a las paredes de la tubería, mientras el gas fluye por el centro. Este régimen aparece en condiciones de caudales bajos tanto de gas como de líquido. La estabilidad de la película está gobernada por el equilibrio entre fuerzas gravitacionales, tensión superficial, viscosidad y esfuerzo cortante ejercido por el gas. Algunas ondulaciones o inestabilidades surgen favoreciendo la transición hacia otros patrones de flujo.

- *Anular ondulado (WA):* Se presenta cuando el gas fluye a altas velocidades y el líquido a velocidades moderadas o altas. El líquido forma una película anular continua en las paredes, mientras el gas circula centralmente. Este régimen se caracteriza por la presencia de ondas interfaciales erráticas con amplitudes y frecuencias variables, generadas por el elevado esfuerzo cortante del gas. En configuraciones cercanas a la vertical, la gravedad intensifica estas perturbaciones.

- *Deslizamiento líquido (LS):* En este patrón, el líquido forma una película gruesa adherida a las paredes, pero parte de este líquido se desprende de la interfaz y cae en forma de chorros o tapones (*slugs*), debido a la acción combinada de la gravedad y el esfuerzo cortante. Entre los tapones de líquido se observan regiones de gas con dispersión líquida. El flujo es intermitente, alternando entre fases líquidas y

gaseosas, lo que genera importantes variaciones de presión, velocidad y composición. Este patrón se favorece en tuberías descendentes, donde la acumulación gravitacional propicia la formación de tapones.

Las características de estos patrones están determinadas por las velocidades superficiales del gas y del líquido, así como por el ángulo de inclinación de la tubería.

El flujo ondulado estratificado (SW) es relevante en aplicaciones industriales como transporte de petróleo y gas, sistemas de refrigeración y aire acondicionado, intercambiadores de calor y reactores multifásicos. El flujo película descendente (FF) es deseable en procesos de transferencia de calor debido a su alta área interfacial y bajo espesor, lo que minimiza la resistencia térmica. Por otro lado, el régimen anular ondulado (WA) es de interés en torres de destilación, columnas de absorción y reactores de lecho empacado, ya que las ondulaciones mejoran el contacto entre fases. Finalmente, el patrón de deslizamiento líquido (LS) presenta un flujo pulsante útil para modelar fenómenos transitorios complejos en sistemas multifásicos descendentes.

Las características experimentales de las ocho series temporales analizadas correspondientes a los cuatro patrones de flujo se detallan en la Tabla 5.1, las condiciones experimentales reportadas son; la velocidad superficial del líquido V_{SL} (m/s), la velocidad superficial del gas V_{SG} (m/s), y el ángulo de inclinación de la tubería θ (grados) [48].

Las combinaciones de estas condiciones definen la configuración hidrodinámica de cada experimento y permiten analizar cómo varía el comportamiento dinámico y la complejidad temporal de las señales asociadas a distintos regímenes de flujo multifásico.

Tabla 5.1: Descripción de las características de cada patrón de flujo [48].

Patrón de flujo	SW_1	SW_2	FF_1	FF_2	WA_1	WA_2	LS_1	LS_2
V_{SL}	0.5	0.5	0.05	0.05	0.7	0.7	0.7	0.7
V_{SG}	0.5	0.7	0.5	0.5	3	4	0.5	1
θ	-45	-45	-80	-85	-70	-70	-70	-70

5.2. Procesamiento de imágenes

En numerosos procesos químicos, el comportamiento del sistema es analizado a través de imágenes representativas del fenómeno. En este sentido, la imagen analizada en esta sección fue capturada durante un experimento de cristalización de tiourea. En el proceso de lixiviación de plata utilizando una solución acuosa de tiourea como agente complejante, se observó una cristalización espontánea del complejo tiourea-plata, resultado de condiciones específicas de enfriamiento controlado [50].

La lixiviación permitió la disolución selectiva de la plata formando complejos estables en solución. Posteriormente, la solución fue filtrada, quedando humedad residual atrapada en el papel filtro. La muestra permaneció en reposo por un periodo de aproximadamente 48 a 72 horas. Durante este tiempo, el enfriamiento lento y progresivo de la solución concentrada favoreció la cristalización ordenada del complejo, permitiendo:

- Nucleación controlada: la baja velocidad de cristalización propició la formación de un número reducido de núcleos cristalinos.
- Crecimiento estructurado: los cristales se desarrollaron con morfologías regulares y bien definidas.
- Morfología característica: se obtuvieron cristales con simetría propios del complejo tiourea-plata.

Este tipo de cristalización lenta favorece una organización molecular más óptima, lo cual se traduce en una estructura cristalina de mayor calidad en comparación con la precipitación rápida.

La imagen fue capturada con una cámara óptica convencional a una resolución de 768×1024 píxeles. Se observan formaciones dendríticas; es decir, estructuras ramificadas que emergen durante el crecimiento del cristal, las cuales pueden ser indicativas de un proceso no lineal afectado por gradientes de concentración o condiciones locales del medio.

Esta imagen fue seleccionada para el análisis de no linealidades mediante el método propuetso basado en entropía SVD, comparando su complejidad espacial con la de imágenes

aleatorizadas que preservan características estadísticas globales. El objetivo fue identificar patrones organizados que no pueden ser explicados por azar, proporcionando evidencia visual y cuantitativa de autoorganización y comportamiento no lineal [43].



Figura 5.2: Cristalización de Tiourea.

6. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de no linealidades en señales temporales e imágenes asociadas a procesos químicos. Para el procesamiento de los datos se emplearon las herramientas estadísticas seleccionadas con base en la naturaleza de las señales e imágenes estudiadas, así como en los objetivos planteados en la investigación. Los cálculos fueron realizados utilizando los métodos implementados en Python y las paqueterías descritas en los datos complementarios, ejecutados en una computadora personal sin necesidad de paralelizar el cómputo. Los resultados se organizan en función de los casos de estudio considerados, y se discuten a partir de su relevancia física, patrones identificados y evidencia cuantitativa de comportamiento no lineal.

6.1. Análisis exploratorio de las series

6.1.1. Series temporales de flujo bifásico

En primer lugar se realizó un análisis exploratorio de las series temporales para conocer las características de cada patrón de flujo. Posteriormente se analizó cada serie por métodos estadísticos básicos, métodos basados en modelos lineales, métodos básados en la teoría del caos hasta llegar a la propuesta indicada.

La Figura 6.1 presenta las series temporales de voltaje asociadas a los cuatro distintos patrones de flujo analizados. Además, se presentan las señales con sus respectivas variaciones. El flujo FF sufrió una modificación en el ángulo de inclinación de la tubería, mientrás que para los otros flujos la velocidad superficial del gas fue incrementada.

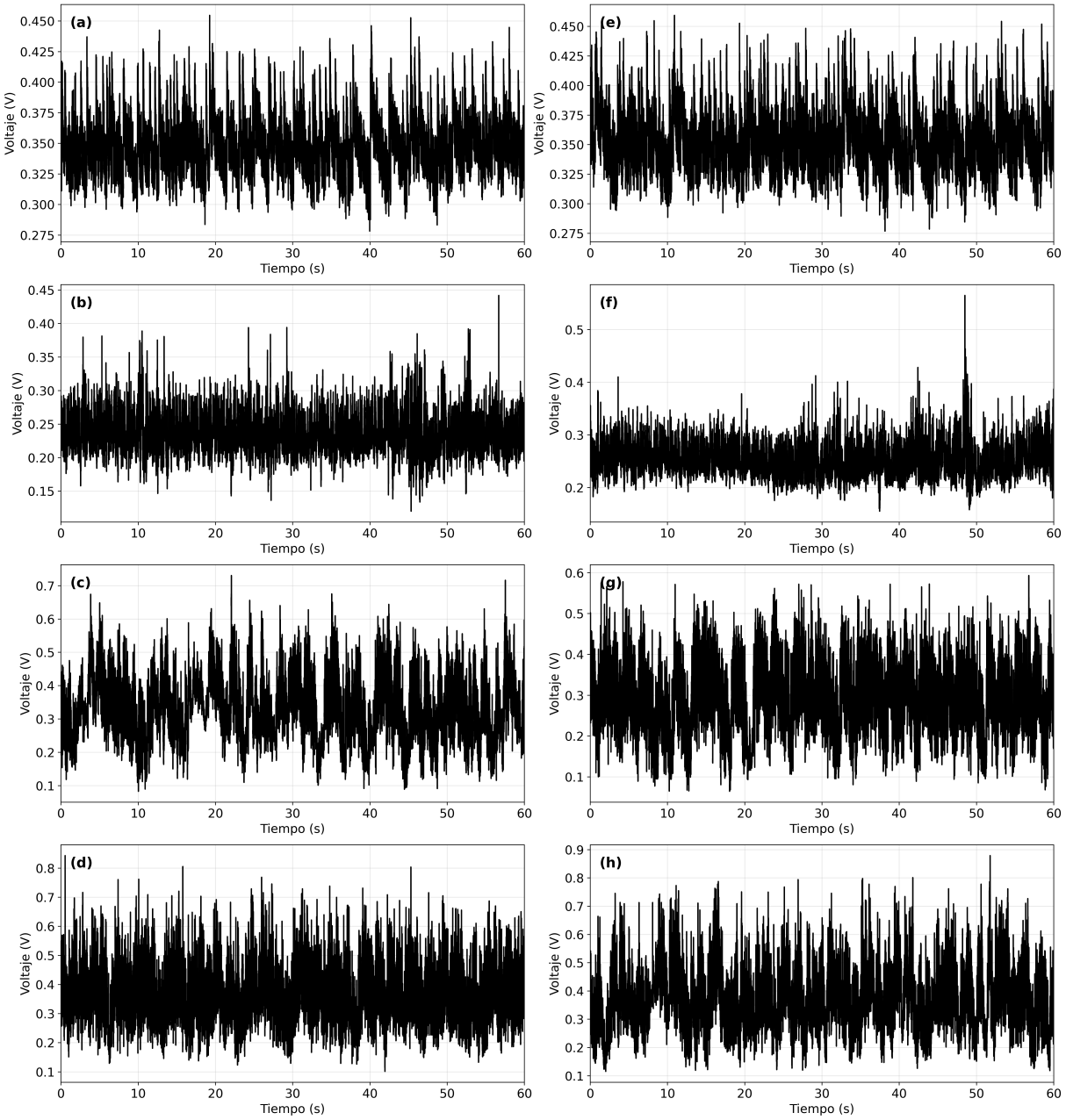


Figura 6.1: Series temporales de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. Las señales representan mediciones de voltaje tomadas a 1000 Hz durante 60 segundos.

Para el primer patrón de flujo la variación de voltaje oscila entre 0.27 hasta 0.45. Para FF los rangos son ligeramente menores, de 0.15 hasta 0.35 con pocos picos fuera de este rango, más marcado en la Figura 6.1.b. Para WA los valores del voltaje van desde 0.1 hasta 0.6. Para LS los voltajes varían desde 0.15 hasta 0.7. De manera general, todas las señales exhiben un comportamiento aparentemente aleatorio, con diferencias notables en

los rangos de amplitud y en la estructura temporal, lo que evidencia una posible dinámica compleja caracterizada por fluctuaciones de alta frecuencia que reflejan la naturaleza del régimen bifásico. El orden de menor a mayor rango de voltaje obtenido fue: SW $\rightarrow$ FF $\rightarrow$ WA $\rightarrow$ LS. Estas variaciones sugieren diferencias en la configuración del flujo, atribuibles a la interacción dinámica entre las fases líquida y gaseosa de cada patrón.

Para conocer los componentes típicos de cada serie temporal se utilizarón diversos métodos clásicos, como el diagrama de cajas en conjunto con el criterio de Tukey que se basa en el rango intercuartil (IQR). Para evaluar la estacionariedad de las señales se aplicó la prueba ADF considerando como hipótesis nula la no estacionariedad en las series. Asimismo, se aplico la prueba KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) para verificar los resultados con la hipótesis nula de estacionariedad. Para determinar la estacionalidad en las series de los patrones de flujo se utilizó la descomposición de tendencia estacional (STL) que utiliza modelos de regresión para descomponer la serie en componentes de tendencia, estacionalidad y residuo.

En particular, la señal correspondiente al patrón de flujo SW presenta una estacionalidad marcada; esto es, se distinguen ciclos de disparo-relajación repetitivos seguidos de decaimientos con reinicios abruptos aproximadamente cada 0.5 segundos. Esto se ilustra en la Figura 6.2 que muestra las señales correspondientes a los patrones de flujo para 4 segundos. El patrón de flujo SW presenta grandes discontinuidades (Figura 6.2.a y Figura 6.2.e), asociadas con la propagación y disipación de ondas de gran amplitud en la superficie descendente del líquido. Se observan caídas y elevaciones rápidas de tensión, lo cual sugiere el paso intermitente de las fases líquida y gaseosa frente al sensor. Esta dinámica implica una interacción continua y coherente con las ondas en la interfaz líquido-gas. La Figura 6.2.e muestra caídas más pronunciadas. Esto puede atribuirse al incremento en la velocidad del gas de 0.5 a 0.7 m/s, lo que confirma la reproducibilidad del fenómeno con un mínimo desfase.

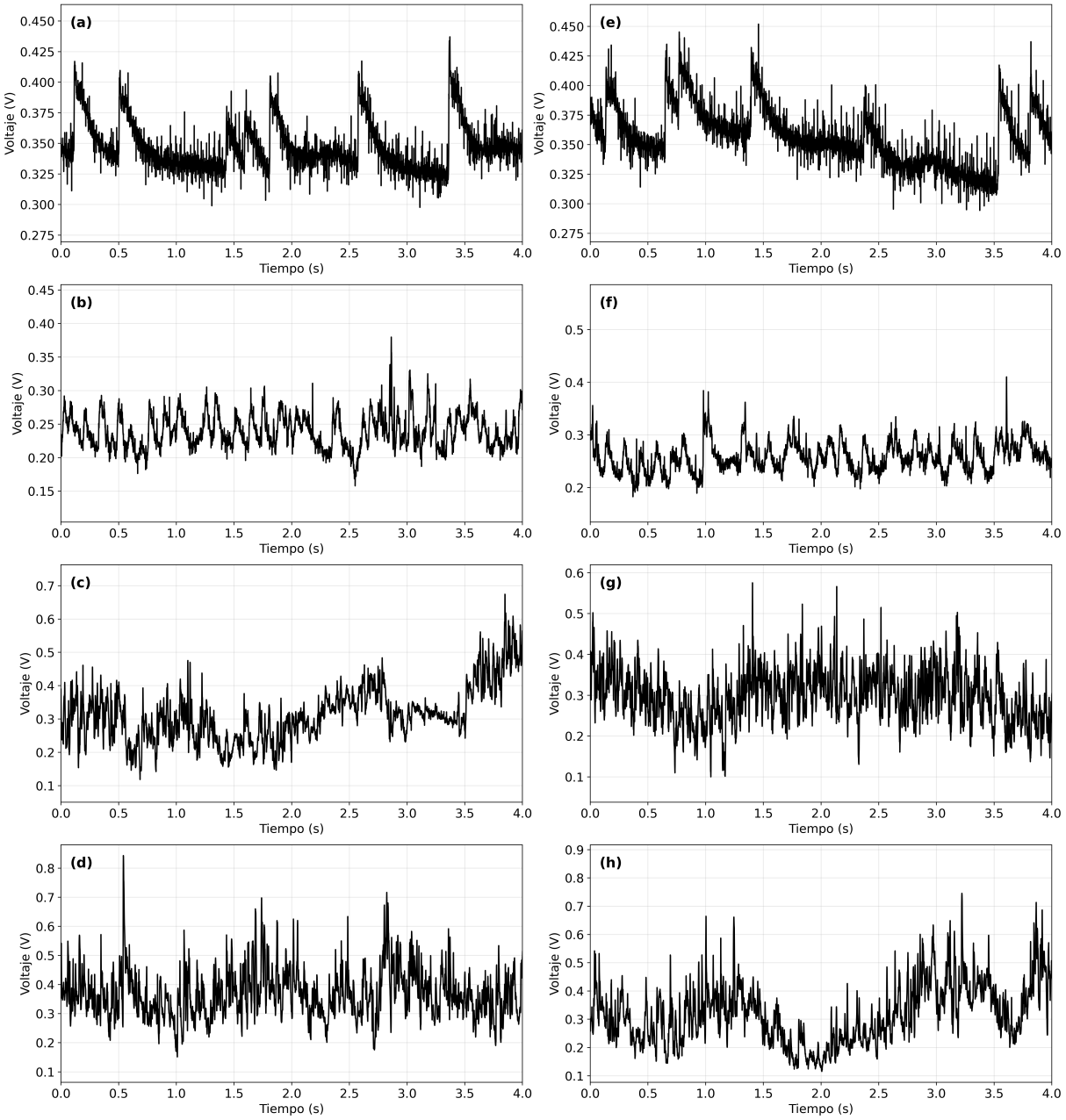


Figura 6.2: Series temporales de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2. Las señales representan mediciones de voltaje tomadas a 1000 Hz durante 4 segundos.

Para el patrón de flujo FF (Figura 6.2.b y Figura 6.2.f), no se observan discontinuidades marcadas en comparación con el patrón de flujo anterior. En este caso, las señales carecen de saltos abruptos o transiciones violentas, y presentan un comportamiento más regular y continuo. Aunque las señales son más ruidosas, exhiben oscilaciones sostenidas alrededor del valor promedio relativamente constante, lo cual sugiere un flujo estable y ordenado

a lo largo del tiempo. La similitud entre las Figuras 6.2.b y 6.2.f muestra una buena reproducibilidad del patrón bajo condiciones similares, lo que arroja una mezcla bifásica constante. Por un lado, la Figura 6.2.b tiene su señal sobre un valor promedio constante, junto con algunos picos y ninguna trayectoria diferenciable.

Las señales correspondientes al patrón de flujo WA (Figura 6.2.c y g) no mostraron discontinuidades bruscas como fue el caso de SW, pero el mismo fue altamente errático. En este régimen, la velocidad del gas es significativamente mayor que la del líquido, lo que resulta en un esfuerzo cortante sustancial en la interfaz, que fomenta la formación de ondas irregulares que llevan la fase líquida. Dado que hay fluctuaciones rápidas y aparentemente periódicas, la dinámica parece caótica y turbulenta.

Para el patrón de flujo deslizamiento del líquido, la Figura 6.2.h muestra una ligera tendencia al aumento, que se puede explicar por el espesamiento constante de la película de líquido o por la acumulación de líquido localmente sobre las paredes de la tubería. La señal revela la coexistencia de componentes de alta frecuencia, en forma de ondas pequeñas e inestables, y baja frecuencia, en forma de cambios graduales, lo que refuerza la hipótesis de que la señal es multiescala. En contraste, la Figura 6.2.d presentó una señal más estable, con una dispersión uniforme y solo picos aislados de corta duración.

En el caso de las señales correspondientes al flujo LS, se puede ver un patrón mucho más violento e inestable en comparación con todos los demás regímenes. Las señales oscilan con amplitudes muy grandes, de aproximadamente 0.2 a 0.7 V, lo que sugiere la naturaleza de las transiciones de pasar de una fase a otra. Esto puede deberse a cambios bruscos en la cantidad de película líquida al gas interactuar con la fase líquida acumulada. La señal, en este caso, no tiene una regularidad aparente y es altamente dinámica; de hecho, la Figura 6.2.d muestra que la heterocedasticidad es altamente significativa, mientras que en la Figura 6.2.h hay una señal más modulada, quizás debido a los ciclos de acumulación y liberación de líquido.

6.1.2. Estadísticos para las series temporales

La Tabla 6.1 muestra los índices estadísticos obtenidos para las series temporales analizadas. Para el patrón de flujo SW, el valor medio cercano a 0.35 V sugiere un comportamiento estable; incluso al aumentar la velocidad superficial del gas, el régimen permanece similar. Para el flujo FF, la media se reduce a aproximadamente 0.24 V, acompañada de una curtosis mayor a la unidad, lo cual indica una leve leptocurtosis, probablemente asociada a pequeñas fluctuaciones en la señal debido al cambio de inclinación de la tubería. Para el patrón de flujo WA la media esta en 0.32 V y para LS en 0.35 V. La Tabla 6.1 muestra los valores de los estadísticos obtenidos para cada una de las ocho series analizadas.

Tabla 6.1: Resumen estadístico de las series temporales.

Serie	**Media**	**DE**	**Varianza**	**Asimetría**	**Curtosis**
SW_1	0.348	0.020	4.263E-04	0.909	0.941
SW_2	0.352	0.021	4.820E-04	0.857	0.680
FF_1	0.235	0.028	7.941E-04	0.497	0.993
FF_2	0.252	0.029	8.586E-04	0.624	1.094
WA_1	0.322	0.087	7.718E-03	0.174	-0.216
WA_2	0.283	0.076	5.830E-03	-0.070	-0.177
LS_1	0.354	0.090	8.208E-03	0.648	0.694
LS_2	0.358	0.102	1.058E-02	0.529	0.473

La Figura 6.3 muestra los valores de los estadísticos que surgen de modificar los parámetros operativos como la velocidad superficial del gas o el ángulo de inclinación de la tubería. Se observa que al aumentar la velocidad superficial del gas, la media y mediana se ven impactadas de forma más significativa provocando una reducción para el flujo WA, evidenciando una mayor sensibilidad del sistema. Mientrás que para los flujos SW y LS el aumento no genero una diferencia considerable en las medias y medianas, esto puede su-

gerir un comportamiento más robusto frente a cambios operativos. Para el patrón de flujo FF la modificación del ángulo de inclinación de la tubería generó una ligera modificación en las media y mediana, sin embargo, estás no son significativas. Un punto interesante es que si se realiza la caraterización sólo considerando este estadístico de tendencia central no se observa una diferencia aparente entre los patrones de flujo. En cambio, al observar la desviación estandar (DE) para los flujos involucrados la diferencia entre patrones es más evidente. Esto sugiere, que tomar la media como valor discriminatorio de patrones de flujo produce un resultado erronéo.

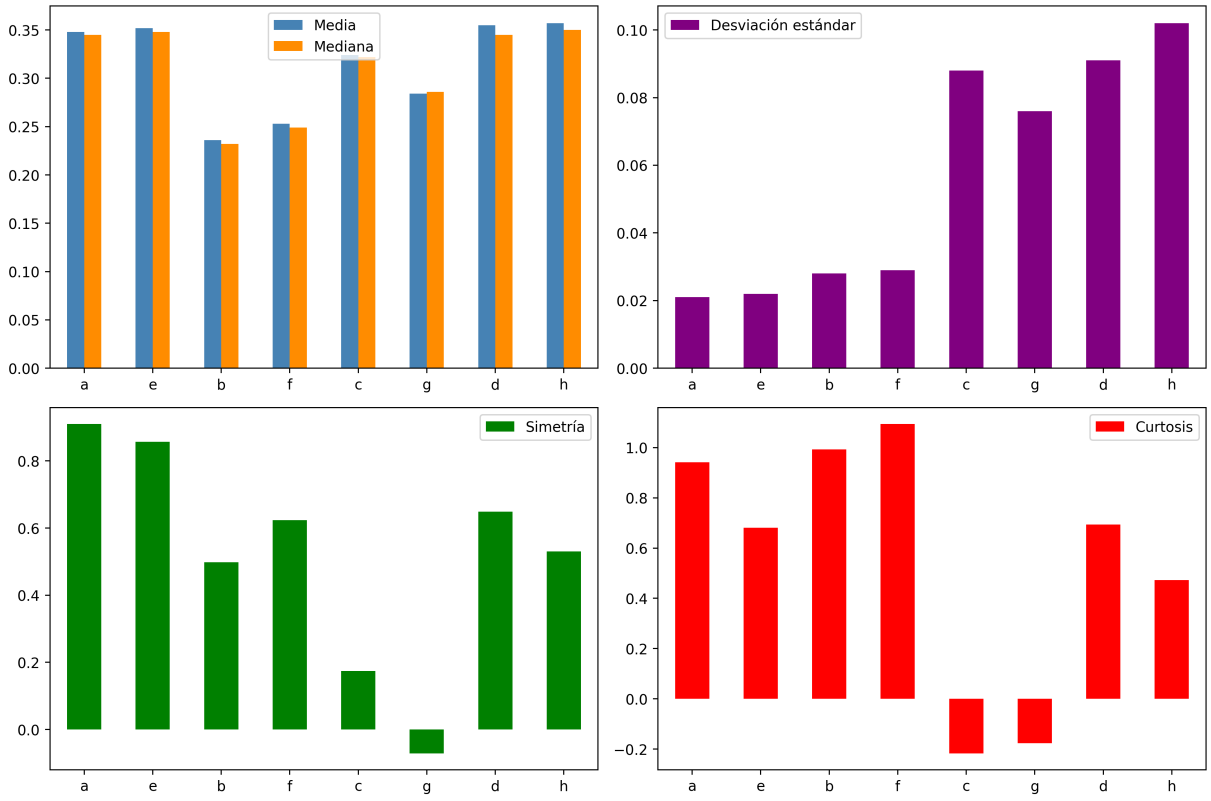


Figura 6.3: Estadísticos de las series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

.

6.1.3. Diagrama de cajas

La Figura 6.4 presenta los diagramas de caja correspondientes a las series temporales de cada patrón de flujo analizado para la series completas de 60 segundos. Para el patrón de flujo SW, las distribuciones son compactas, con medianas cercanas a 0.34 V, con IQR estrecho, esto indica poca variabilidad en los datos. Los valores atípicos fuera de los bigotes indican outliers o colas pesadas. Al aparecer más datos en un lado, hay asimetría. Este patrón de flujo refleja una baja amplitud y alta repetibilidad de las oscilaciones, lo que sugiere una interfaz relativamente estable. En el caso de la señal FF, las medianas están en el rango de 0.22–0.26 V, con una inmediata dispersión y la presencia de datos atípicos tanto bajos como altos, con asimetría. Esto señala una señal más irregular, con ráfagas y mayor burbujeo que provocan transiciones rápidas en la fracción de gas.

Para el patrón WA, aparece un aumento significativo de la variabilidad: los bigotes se extienden desde valores bajos cerca de 0.1 V hasta picos mayores de 0.5 V y acompañados de muchos valores atípicos. Este comportamiento señala grandes modulaciones relacionadas con el arrastre de película líquida y la aparición de ondas irregulares. Por último, el patrón LS presenta la mayor dispersión del conjunto, con un IQR amplio, colas asimétricas hacia valores altos alrededor de 0.8–0.9 V y abundantes datos atípicos. Estas características reflejan el paso intermitente de tapones de líquido y gas por el sensor, generando ráfagas de voltaje elevadas.

En conjunto, la secuencia observada desde SW $\rightarrow$ FF $\rightarrow$ WA $\rightarrow$ LS evidencia un aumento progresivo en la variabilidad y la intermitencia de las señales, coherente con la transición hacia regímenes de flujo más complejos. Sin duda, se confirma que el análisis de la variabilidad genera un marco sencillo para discriminar entre distintos patrones de flujo, ya que permite caracterizar cada señal de manera independiente sin depender exclusivamente de la etiqueta experimental.

Los puntos situados fuera de los bigotes en los diagramas de caja corresponden a valores atípicos identificados según el criterio de Tukey, considerando los factores $k = 1.5$ (atípicos moderados) y $k = 3.0$ (atípicos severos). Bajo el primer umbral $k = 1.5$, los porcentajes de valores atípicos no superaron el 5 % en ningún caso; SW_1 presentó un 4.34 %, SW_2 un

3.67 %, FF_1 un 1.30 %, FF_2 un 1.02 %, WA_1 un 0.35 %, WA_2 un 0.37 %, LS_1 un 1.82 % y LS_2 un 1.43 %. Al aplicar el criterio más estricto de $k = 3.0$, la proporción de valores extremos se redujo significativamente: 0.06 % para SW_1, 0.04 % para SW_2, 0.08 % para FF_1, 0.05 % para FF_2, y menos del 0.05 % para los patrones restantes (WA_1, WA_2, LS_1 y LS_2), siendo nula en algunos casos.

En conjunto, se observa que los valores atípicos moderadamente alejados del IQR (con k =1.5) son más frecuentes que los extremos severos (con $k = 3.0$), cuya incidencia es prácticamente despreciable. Esto indica que, si bien existen fluctuaciones puntuales en las señales, éstas no comprometen la estructura general de los datos.

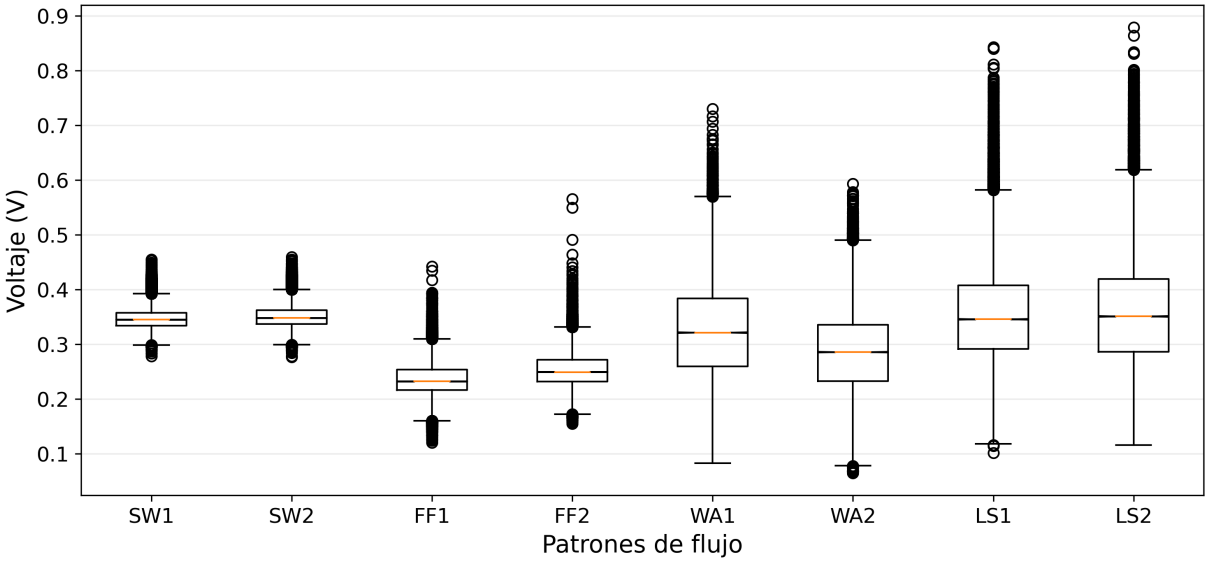


Figura 6.4: Diagrama de cajas de las series temporales de patrones de flujo bifásico.

6.1.4. Histogramas

La Figura 6.5 muestra los histogramas correspondientes a las series analizadas para cada patrón de flujo. Para el flujo SW (Figuras 6.5.a y 6.5.e), se observa una distribución simétrica, angosta y centrada alrededor de 0.35 V, con baja dispersión, leve asimetría positiva y forma cercana a la gaussiana. Esta forma refleja un comportamiento regular y repetitivo, propio de un régimen estable con poca variabilidad.

Para el patrón de flujo FF (Figuras 6.5.b y 6.5.f) se obtienen histogramas un poco más dispersos que el flujo anterior y un notable ajuste a la derecha, con un pico más pronunciado

con mediana. En particular, la Figura 6.5.f muestra un mayor sesgo y un aumento en la curtosis, esto sugiere la presencia de eventos esporádicos de mayor voltaje y una dinámica más intermitente.

Las Figuras 6.5.c y 6.5.g correspondientes al patrón WA muestra que los histogramas son más aplanados y anchos, con distribuciones de tipo mesocúrtico. El aumento en la dispersión y la presencia de múltiples valores alejados del centro reflejan una mayor variabilidad en la señal, coherente con la turbulencia generada por las ondas de película y el arrastre de gotas. La forma general sugiere un sistema más complejo, posiblemente caótico.

Por último, en el caso del flujo LS, Figura 6.5.d y Figura 6.5.h, se encuentran unas distribuciones aún más amplias que para los demás casos, con colas muy pronunciadas hacia valores altos de voltaje y asimetría positiva más marcadas. Tales características son indicativas de fenómenos transitorios intensos, como el paso de grandes tapones de líquido o gas, y reflejan un régimen altamente intermitente. En resumen, en los histogramas hay una progresión desde distribuciones estrechas y simétricas; SW hacia formas más dispersas, sesgadas y con colas muy pronunciadas WA y LS, lo que refleja un aumento de la complejidad correspondiente al flujo. Estos resultados sugieren que la forma del histograma puede ser un primer descriptor sencillo y útil para detectar cambios en el régimen dinámico y la presencia de no linealidades en los sistemas bifásicos.

Las series de los flujos WA y LS presentarón ACF con memoria larga, difícil de explicar con un modelo ARMA. Comportamientos intermitentes, picos grandes, asimetrías, cambios de amplitud en el tiempo. Físicamente, el régimen WA viene de resolver Navier–Stokes no lineales con interfaz libre altamente inestable, de manera natural, el sistema físico es no lineal. De esta forma es razonable plantear que el comportamiento observado (intermitencia, picos de gran amplitud y memoria larga) no es típico de un proceso lineal gaussiano estacionario; por ello, suponemos que WA y LS contienen dependencias no lineales que serán cuantificadas posteriormente.

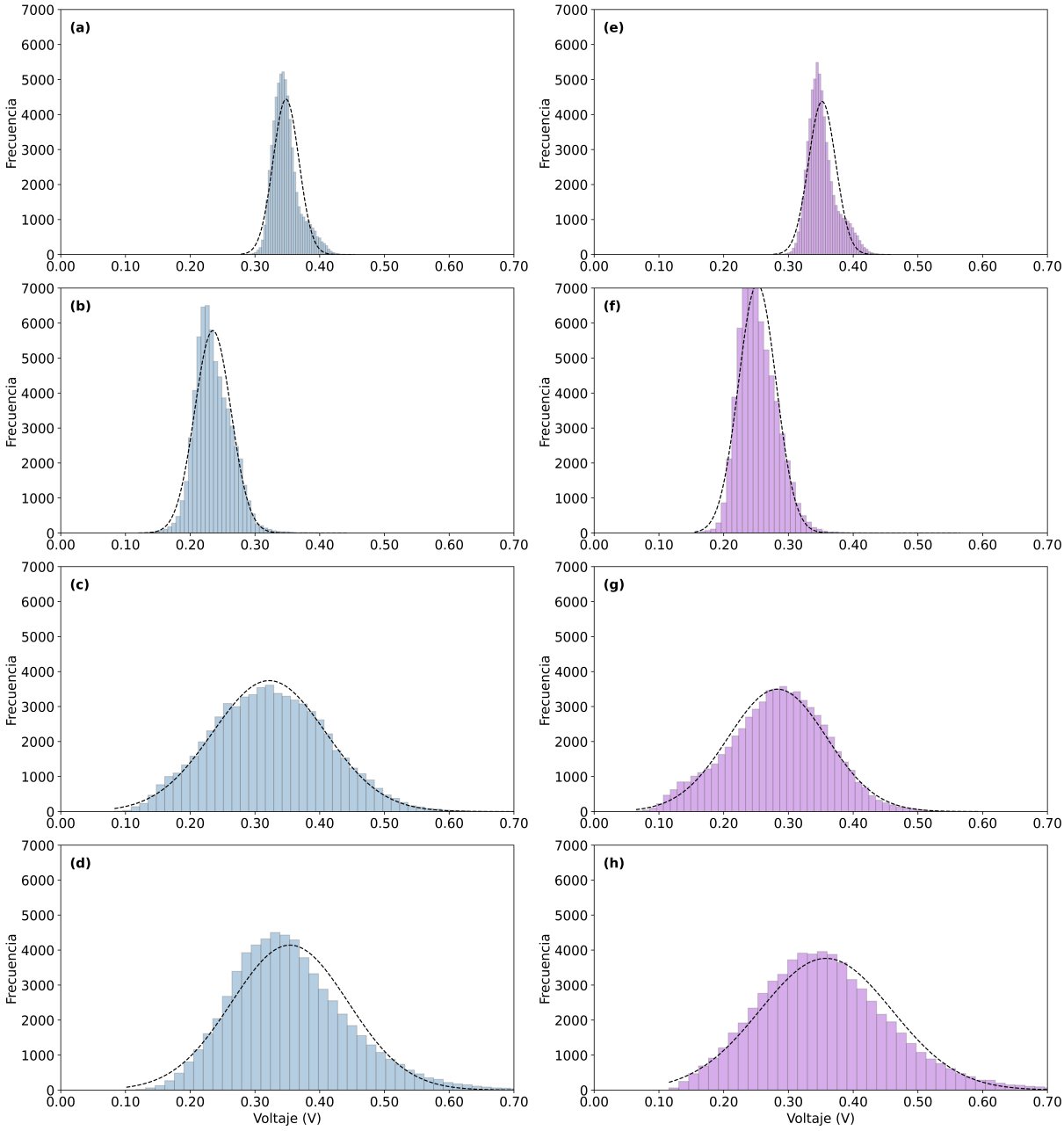


Figura 6.5: Histograma de series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

6.1.5. Normalidad de las series temporales

Previo a la aplicación de métodos no lineales, se evaluó la normalidad de las series temporales mediante distintas pruebas estadísticas complementarias: Jarque–Bera, Shapiro–Wilk, Kolmogorov–Smirnov y Anderson–Darling. La prueba de Jarque–Bera permitió analizar

la desviación respecto a la normalidad a partir de la asimetría y curtosis de las señales, mientras que las demás pruebas contrastan la distribución empírica con una distribución normal teórica. En todos los casos, los valores de p obtenidos fueron inferiores al nivel de significancia $\alpha = 0.05$, lo que conduce al rechazo sistemático de la hipótesis nula de normalidad. Para evaluar la normalidad por la prueba Shapiro-Wilk la serie fue seccionada por partes con longitudes no mayores a 5000 datos. De esta prueba se concluye que los datos estudiados tienen una desviación significativa a la normalidad. Asimismo, los estadísticos de Anderson–Darling superaron ampliamente los valores críticos al 5 %, reforzando la evidencia de distribuciones no gaussianas en las series analizadas. Estos resultados confirman que las señales presentan estructuras estadísticas complejas, justificando el uso de herramientas no lineales para su análisis y cuantificación.

Tabla 6.2: Resultados detallados de las pruebas de normalidad por serie.

Serie	**JB**	**W**	**p (SW)**	A^2	**D (KS)**	**Normal**
SW_1	11020.89	0.9459	$< 0{,}05$	900.64	0.0817	No
SW_2	8927.83	0.9574	$< 0{,}05$	969.11	0.0891	No
FF_1	5191.16	0.9822	$< 0{,}05$	265.99	0.0515	No
FF_2	7230.46	0.9804	$< 0{,}05$	301.47	0.0506	No
WA_1	441.91	0.9964	$< 0{,}05$	29.48	0.0160	No
WA_2	135.17	0.9969	$< 0{,}05$	46.87	0.0157	No
LS_1	5683.43	0.9772	$< 0{,}05$	311.37	0.0483	No
LS_2	3533.22	0.9799	$< 0{,}05$	168.04	0.0343	No

Para válidar estos resultados se incluyo el método gráfico Q-Q, éstos se pueden visualizar en la Figura 6.6. Los gráficos Q–Q correspondientes a las series analizadas evidencian desviaciones sistemáticas respecto a la recta de referencia asociada a una distribución normal. En la mayoría de los casos, se observa una curvatura pronunciada y discrepancias

en los cuantiles extremos, lo que indica la presencia de asimetría y colas pesadas en las distribuciones empíricas. Estas desviaciones son particularmente notorias en los valores altos, donde los cuantiles muestrales se apartan significativamente de los cuantiles teóricos. En conjunto, los gráficos Q–Q confirman visualmente los resultados obtenidos mediante las pruebas estadísticas, reforzando la conclusión de que las series temporales no siguen una distribución gaussiana.

En conjunto, se comprobó que las series no son normales. Para los patrones de flujo SW, FF y LS se tienen desviaciones fuertes en los extremos superiores derechos; esto debido a la curtosis, colas pesadas. Esta desviación a la normalidad puede ser debida a los picos de voltaje por ruptura de burbujas, turbulencias o cambios súbitos en el régimen de flujo. Para el patrón WA se observa un comportamiento más simétrico con poca desviación en comparación con los otros regímenes, aún así las series son no normales. En conjunto, las series no siguen una distribución normal, tienen colas más pesadas que la normal, muestran eventos extremos. Esto es compatible con procesos físicos turbulentos/no lineales. De esta manera, la estructura estadística de las series no puede explicarse con modelos lineales gaussianos, lo que justifica un análisis más extenso y detallado.

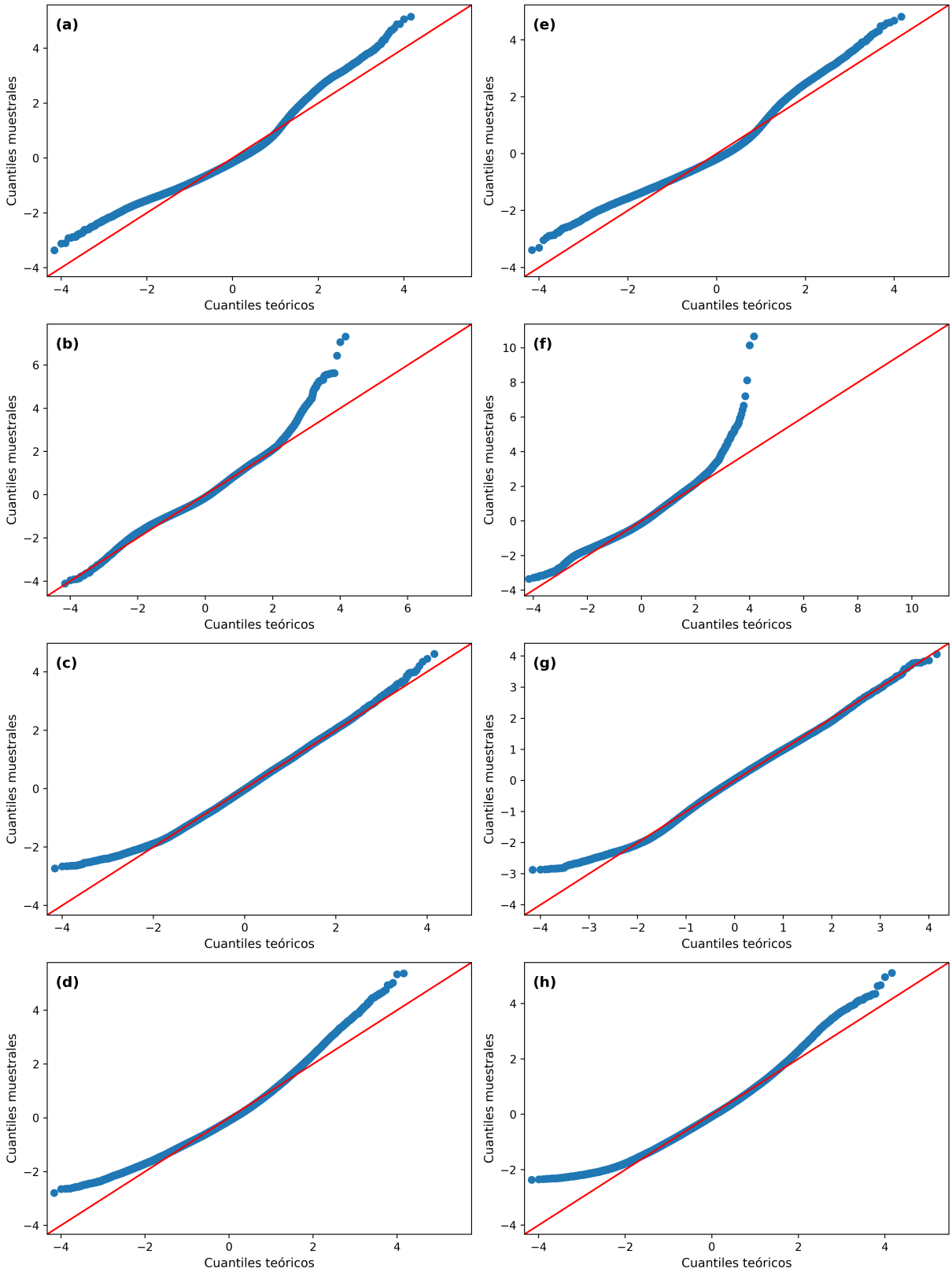


Figura 6.6: Gráficos Q-Q para las series temporales de patrones de flujo en dos fases: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

6.1.6. Estacionariedad y Heterocedasticidad

En esta sección se presentan los resultados del análisis de estacionariedad y heterocedasticidad de las series temporales estudiadas. La estacionariedad fue evaluada mediante el uso combinado de indicadores descriptivos y pruebas estadísticas formales, lo que permitió caracterizar el comportamiento en media de las series. De manera complementaria, la heterocedasticidad fue analizada a través de modelos de tipo ARCH (Heteroscedasticidad Autoregresiva Condicional) que modela la variabilidad de los datos en el tiempo. El análisis conjunto de estos resultados permite establecer las propiedades estadísticas básicas de las series y proporciona un marco adecuado para la interpretación de los análisis posteriores.

Tabla 6.3: Resultados del análisis de estacionariedad.

Serie	**ADF**	**KPSS**	**Diagnóstico conjunto**
SW_1	Estacionaria	Estacionaria	Estacionaria
SW_2	Estacionaria	Estacionaria	Estacionaria
FF_1	Estacionaria	No estacionaria	Estacionaria con tendencia
FF_2	Estacionaria	No estacionaria	Estacionaria con tendencia
WA_1	Estacionaria	No estacionaria	Estacionaria con tendencia
WA_2	Estacionaria	Estacionaria	Estacionaria
LS_1	Estacionaria	Estacionaria	Estacionaria
LS_2	Estacionaria	Estacionaria	Estacionaria

Específicamente, para el patrón SW las señales mostrarón ser periódicas, estacionarias en media, con estacionalidad clara. Lo que sugiere que podrían modelarse razonablemente con un modelo lineal; sinusoidal más ruido, o con componente estacional. En éstas señales son candidatas a tener no linealidades sútiles.

Para las series correspondientes al flujo FF son estacionarias según la prueba ADF; sin embargo, la prueba KPSS indicó no estacionariedad. La discrepancia observada entre las pruebas es consistente con la presencia de tendencias determinísticas, por lo que el análisis en conjunto demostró que dichas series fueron influenciadas por la tendencia. De esta manera, se clasificarón como estacionarias con tendencia. Asimismo, la varianza pequeña y el comportamiento casi ruido coloreado con tendencia muy suave indica que el modelo no ha capturado toda la estructura temporal de los datos y podría mejorarse. De esta manera, si existe no linealidad, será débil.

De manera general, todas las series son estacionarias de primer orden; esto es, media casí constante. Sin embargo, todas las series mostrarón heterocedasticidad. Esta propiedad fue obtenida con el modelo ARCH (Heteroscedasticidad Autoregresiva Condicional) que modela la variabilidad de los datos en el tiempo. De esta manera, la heterocedasticidad refleja una estructura dinámica en la varianza que no es capturada por modelos lineales simples. Sin embargo, su presencia es un indicio de complejidad temporal que motiva la aplicación de pruebas específicas de no linealidad y análisis complementarios.

6.1.7. Modelos estadísticos no lineales

Con base en la caracterización previa de los estadísticos de las señales, la estacionariedad y heterocedasticidad se presentan a continuación los resultados derivados de la aplicación de modelos y pruebas estadísticas no lineales. Dichos métodos permiten evaluar desviaciones respecto al comportamiento lineal y detectar dependencias dinámicas de mayor complejidad presentes en las series temporales analizadas.

El resultado fue concluyente en las pruebas estudiadas; BDS, Ramsey, Keenan, Tsay y Teräsvirta con un nivel de significancia igual a 0.05. La evidencia obtenida a partir de las distintas pruebas estadísticas no lineales, se reflejan en la Tabla 6.4. Cada prueba evalúa diferentes formas de desviación respecto al comportamiento lineal, por lo que su análisis conjunto permite una caracterización más robusta de la dinámica subyacente en las series temporales estudiadas.

De manera general, casi todas las pruebas rechazan la hipótesis nula lo que indica la presencia de estructuras dinámicas que no pueden ser explicadas adecuadamente por modelos lineales clásicos. Aún, usando distintos niveles de incrutación de para la prueba BDS el resultado fue el rechazo. En algunas series se observó que no todas las pruebas estadísticas no lineales condujeron al rechazo de la hipótesis nula de linealidad. Este comportamiento es consistente con el hecho de que cada prueba es sensible a distintos tipos de no linealidad y dependencia dinámica. Por tanto, la ausencia de rechazo en ciertas pruebas no implica necesariamente un comportamiento lineal, sino que puede reflejar una no linealidad débil o de naturaleza específica. Cabe destacar que, aun en estos casos, la prueba BDS mostró un rechazo robusto de la hipótesis nula, lo que sugiere la presencia de dependencia dinámica que no puede ser explicada por procesos lineales simples. De esta forma, se comprueba que existen depencias en las series, lo que justifica un análisis riguroso de no linealidad.

Tabla 6.4: Resumen de los resultados de las pruebas estadísticas no lineales.

Serie	**Ramsey**	**Keenan**	**Tsay**	**Teräsvirta**	**BDS**
SW_1	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
SW_2	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
FF_1	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
FF_2	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
WA_1	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
WA_2	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
LS_1	No	Sí	Sí	No	Sí
LS_2	Parcial	Sí	Sí	Sí	Sí

Los resultados obtenidos mostraron, que si bien las series temporales analizadas presentan estacionariedad en media, exhiben características dinámicas complejas que no pueden ser descritas adecuadamente mediante modelos lineales clásicos. La presencia de heterocedas-

ticidad, junto con la evidencia consistente de dependencia y no linealidad identificada a través de las pruebas estadísticas aplicadas, indica que la dinámica de los sistemas estudiados es intrínsecamente no lineal. En particular, el rechazo robusto de la hipótesis nula en la prueba BDS, complementado por los resultados de las pruebas de Ramsey, Keenan, Tsay y Teräsvirta, proporciona una base estadística sólida para justificar el uso de metodologías avanzadas de análisis no lineal.

Este análisis resultó necesario para distinguir apropiadamente entre fenómenos de no estacionariedad, no normalidad y el manejo inadecuado de los estadísticos en las series estudiadas. Complementariamente, los modelos estadísticos no lineales empleados para el diagnóstico indicaron valores menores a cero en el p valor, esto indica el rechazo de la hipótesis nula y la presencia de estructuras de dependencia compatibles con procesos no lineales. Si bien, los resultados exhibidos no constituyen una prueba concluyente de no linealidad, se observa la presencia de patrones atípicos respecto a los procesos lineales gaussianos simples, como es la asímetría y la heterocedasticidad. Esta evidencia justifica el planteamiento de una hipótesis de no linealidad para las series analizadas.

6.2. Dimensión Fractal y Exponente de Lyapunov

La evidencia estadística presentada hasta este punto indica que las series temporales analizadas exhiben estructuras dinámicas que no pueden ser descritas adecuadamente mediante modelos lineales clásicos. Si bien las pruebas estadísticas no lineales permiten identificar desviaciones respecto a la hipótesis de linealidad, estas no proporcionan información directa sobre la naturaleza geométrica ni la estabilidad dinámica de los sistemas subyacentes.

Con el fin de caracterizar la complejidad geométrica y la irregularidad temporal de las señales analizadas, se estimó la dimensión fractal con el método de Higuchi. Esta métrica permite cuantificar el grado de rugosidad o complejidad de una señal directamente en el dominio temporal, siendo especialmente útil para sistemas donde las trayectorias presentan estructuras no suaves y posibles comportamientos no lineales. A diferencia de enfoques puramente estadísticos, la dimensión fractal proporciona una medida estructural de la señal, permitiendo comparar patrones dinámicos entre distintos regímenes de flujo.

En la Figura 6.7 se muestran los valores obtenidos para cada una de las series temporales analizadas. Se observa que todas las señales presentan valores comprendidos aproximadamente entre 0.82 y 0.98, lo que evidencia diferencias claras en el grado de rugosidad y complejidad temporal entre las series. En particular, las series del patrón FF exhiben los valores más elevados de dimensión fractal, cercanos a 0.98, lo que sugiere una mayor irregularidad y variabilidad local en su dinámica temporal. En contraste, las series SW_1 y WA_1 presentan los valores más bajos, alrededor de 0.82-0.84, indicando trayectorias temporales relativamente más suaves y con menor complejidad geométrica. El resto de las series (SW_2, WA_2, LS_1 y LS_2) muestran valores intermedios, asociados a un comportamiento de complejidad moderada. Cabe señalar que los valores mostrados corresponden a la pendiente obtenida del ajuste log-log del método de Higuchi, la cual representa el exceso de rugosidad respecto a una curva de dimensión unitaria; por ello, para recuperar la dimensión fractal geométrica completa de la trayectoria temporal en el plano (t, x) es necesario sumar una unidad a estas estimaciones, situando los valores finales dentro del rango teórico esperado $[1-2]$. De manera general, todas las series presentarón complejidad en distinto grado.

Cabe aclarar que el método de Higuchi describe el comportamiento de escalamiento de las variaciones incrementales de una serie temporal discreta. En este contexto, la pendiente estimada no representa una dimensión geométrica en el sentido clásico, sino una medida relativa de la rugosidad de la señal, asociada al grado de irregularidad temporal. En particular, dicha pendiente cuantifica el exceso de rugosidad con respecto a una curva suave de dimensión unitaria, por lo que los valores obtenidos pueden ser menores que uno sin que ello implique una inconsistencia física. Sin embargo, para recuperar la dimensión fractal geométrica completa de la señal, es necesario sumar una unidad a la estimación, de modo que $D = 1 - \text{slope}$, lo cual permite una interpretación adecuada de la complejidad de la señal, donde valores cercanos a 1 indican trayectorias suaves y valores próximos a 2 reflejan una mayor irregularidad y rugosidad temporal.

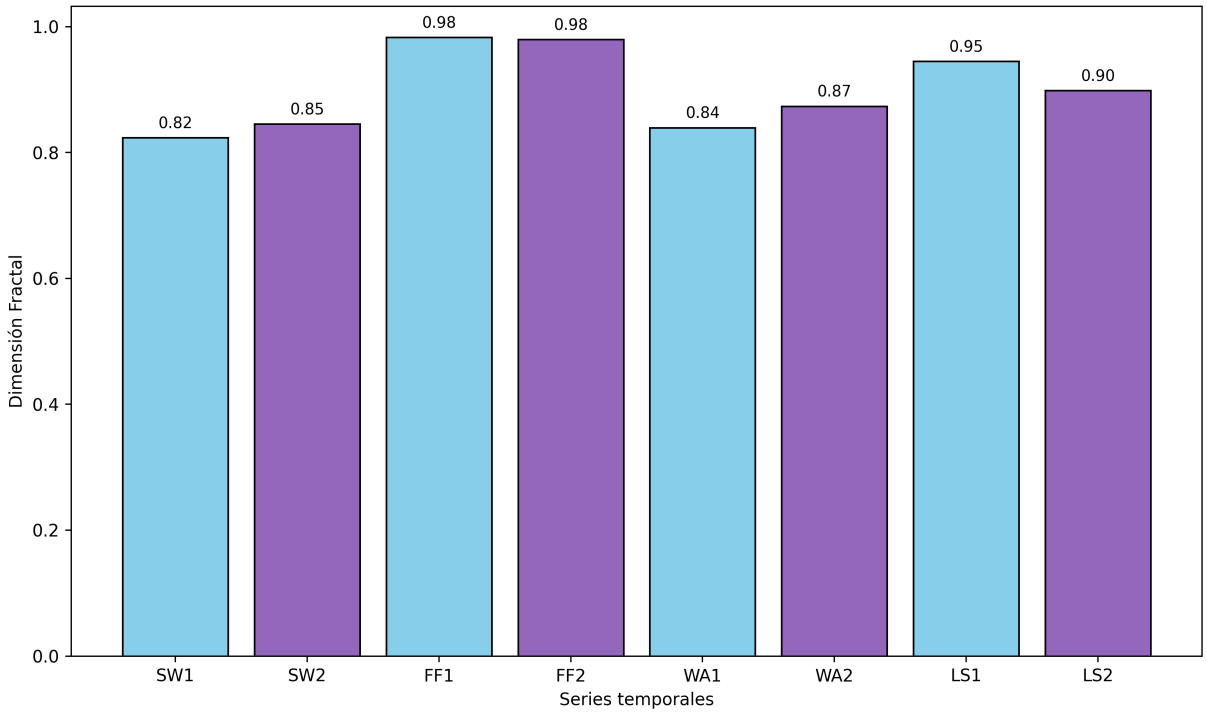


Figura 6.7: Dimensión fractal Higuchi de las series temporales de patrones de flujo.

Si bien la dimensión fractal permite caracterizar la rugosidad y complejidad geométrica de las series temporales, este descriptor no proporciona información directa sobre la estabilidad dinámica del sistema ni sobre la sensibilidad de su evolución ante perturbaciones iniciales o sobre la no linealidad. Por esta razón, resulta metodológicamente prudente complementar dicho análisis mediante el cálculo del exponente de Lyapunov, el cual cuantifica la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial entre trayectorias inicialmente cercanas en el espacio de fases. Un exponente de Lyapunov positivo constituye una condición necesaria para la presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales y, por ende, de comportamiento caótico, mientras que valores cercanos a cero o negativos se asocian con dinámicas periódicas o estables.

En el contexto de la cuantificación de no linealidades, la evaluación del exponente de Lyapunov permite distinguir si la complejidad geométrica observada en las señales se acompaña de una dinámica intrínsecamente inestable y no lineal, o si, por el contrario, puede ser explicada por fluctuaciones de origen lineal o estocástico. En consecuencia, este análisis representa un paso fundamental para sustentar, de manera rigurosa, la posterior cuantificación de no linealidades en las series temporales analizadas.

La Tabla 6.5 presenta los valores del exponente de Lyapunov máximo estimados para las series temporales analizadas, junto con los parámetros de reconstrucción del espacio de fases utilizados (retardo temporal τ y dimensión de incrustación). En la mayoría de las series se obtienen valores positivos del exponente de Lyapunov, lo que indica la presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, característica fundamental de sistemas con dinámica no lineal y comportamiento caótico. Aunque los valores numéricos del exponente son pequeños, su signo positivo es suficiente para evidenciar la divergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fases, lo cual es consistente con la naturaleza compleja de los procesos analizados.

En contraste, la serie FF_2 presenta un valor del exponente de Lyapunov negativo; clasificado como estable, lo que sugiere una dinámica más regular y predecible en comparación con el resto de las señales. Este comportamiento puede asociarse a un régimen de flujo con menor grado de complejidad dinámica o a una dominancia de componentes periódicas, lo cual resulta coherente con los valores relativamente menores observados en otras métricas de no linealidad. La coexistencia de series con comportamiento caótico y estable dentro del mismo conjunto de datos refuerza la capacidad de los métodos aplicados para discriminar entre distintos regímenes dinámicos y aporta solidez a la caracterización global de la no linealidad del sistema.

Tabla 6.5: Exponentes de Lyapunov máximos estimados.

Serie	$\boldsymbol{\tau}$	**Emb_Dim**	**Exponente de Lyapunov**	**Interpretación**
SW_1	11	15	0.000271	Caótico
SW_2	37	15	0.000447	Caótico
FF_1	3	15	0.002463	Caótico
FF_2	25	15	-0.000480	Estable
WA_1	58	15	0.009244	Caótico
WA_2	28	15	0.000798	Caótico
LS_1	24	15	0.002058	Caótico
LS_2	56	15	0.003378	Caótico

A partir de los resultados obtenidos mediante la dimensión fractal y el exponente de Lyapunov, se logró caracterizar la complejidad geométrica y la estabilidad dinámica de las series temporales analizadas, evidenciando la presencia de comportamientos no lineales y, en la mayoría de los casos, sensibilidad a las condiciones iniciales. Estas métricas permiten describir propiedades estructurales y dinámicas del sistema en el espacio de fases; sin embargo, no proporcionan información directa sobre la persistencia temporal ni la memoria estadística de las señales.

Con el objetivo de complementar este análisis y profundizar en la caracterización temporal de las series, a continuación se introduce el análisis de dependencia temporal, el cual se enfoca en cuantificar la existencia de correlaciones de largo y corto alcance. Para ello, se emplean el exponente de Hurst y la función de autocorrelación, herramientas que permiten evaluar la presencia de memoria, persistencia o antipersistencia en las señales, proporcionando una visión integral de la dinámica subyacente desde el punto de vista temporal.

6.3. Análisis de dependencia temporal

6.3.1. Autocorrelación

Una característica de suma importancia en las series temporales es la autocorrelación. La interrogante es saber si las series están o no correlacionadas. Para esto se utilizó la función de Autocorrelación (ACF) que indica qué tanto un valor depende de sus valores pasados. Esta prueba toma en cuenta la autocorrelación directa que representan las relaciones inmediatas y la indirecta que se atribuye a la relación que parece de la interacción de valores intermedios. Además, se verificarón los resultados con la Función de Autocorrelación Parcial (PACF) que muestra sólo la autocorrelación directa. la Figura 6.8 se ilustra la correlación directa e indirecta.

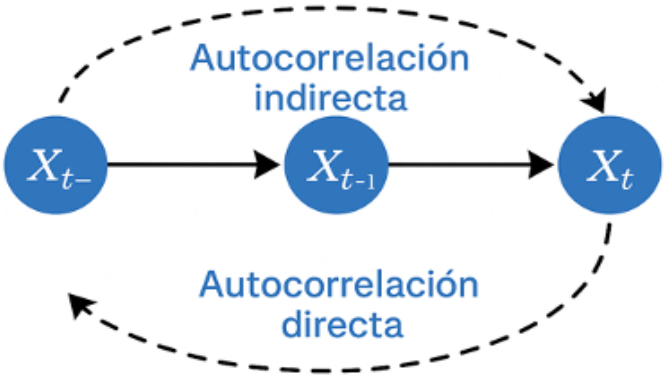


Figura 6.8: Representación de la autocorrelación directa-indirecta.

Si la serie no esta correlacionada las pruebas decaen rápidamente, de lo contrario las pruebas muestran valores altos en varios retrasos. Las funciones de autocorrelación para las señales mostraron valores elevados en todos los retrasos analizados, decayendo de manera lenta. Esto indica que las series presentan una fuerte dependencia temporal persistente. Es decir, alta memoria temporal.

Asimismo, se utilizó la prueba Ljung-Box para detectar autocorrelación de los residuos de un modelo ARIMA. La prueba Ljung-Box soporta la hipótesis nula que indica que los residuos son independientes, esto es, sin autocorrelación. De esta prueba se obtuvo valores

cercanos a cero para el p valor, lo cual confirma estadísticamente la presencia de autocorrelación significativa para las ocho series analizadas. Se demuestra que no es un efecto aleatorio; todas las series tienen dependencia temporal fuerte. Los datos tienen memoria, los valores futuros dependen fuertemente de los pasados; esto es, datos persistentes.

6.3.2. Rango Reescalado

La valoración de la memoria de largo alcance en las señales temporales de los patrones de flujo en consideración se llevó a cabo mediante el análisis de Hurst. Como se muestra en la Figura 6.9, todos los valores obtenidos están por encima del umbral de 0.5, lo que significa que las señales en consideración son persistentes. Es decir, las fluctuaciones actuales continuarán en la misma dirección en el tiempo. Los valores más altos se observan en los patrones SW_2 con H = 0.91 y SW_2 con 0.93, que coinciden con altas entropías y bajos índices de no linealidad y, por lo tanto, sugieren trayectorias combinadas suaves y estructuradas. Los valores más bajos se logran en los patrones FF_1 con H = 0.79 y FF_2 con 0.81, lo que significa que son menos persistentes y más irregulares en el tiempo, pero siguen siendo suficientes para un comportamiento no aleatorio.

En los patrones WA y LS, los valores del exponente de Hurst se ubican en un rango intermedio-alto H = 0.91 para WA_1, 0.87 para WA_2, 0.83 para LS_1 y 0.88 para LS_2, lo que indica que, pese a la presencia de no linealidades, las señales mantienen cierta estructura en escalas grandes. En particular, el patrón WA_1 muestra una persistencia alta como la de SW_1, mientras que el incremento de la velocidad en WA_2 reduce ligeramente dicha persistencia. De forma similar, el flujo LS conserva una memoria significativa, y se observa un incremento de complejidad a mayor velocidad. En conjunto, estos resultados sugieren que los patrones SW y WA exhiben las trayectorias más organizadas y correlacionadas a largo plazo, mientras que el flujo FF es el patrón más irregular con señales más intermitentes, y LS representa un régimen estructurado.

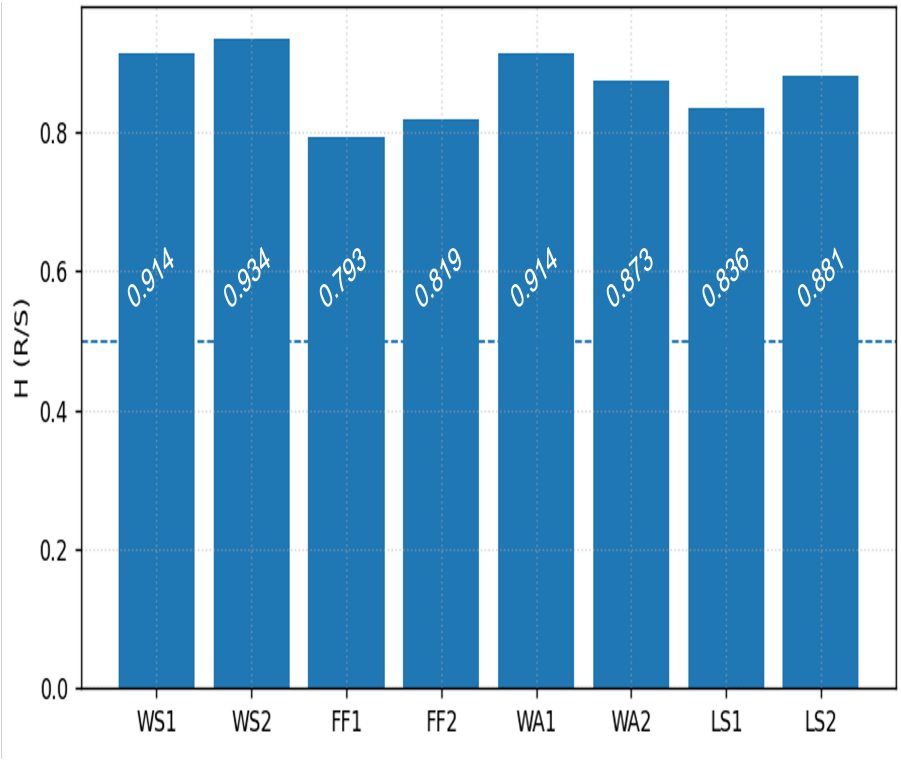


Figura 6.9: Exponente de Hurts para los patrones de flujo bifásico.

6.4. Análisis de no linealidad por Entropía SVD

En esta sección se presentan los resultados del análisis de no linealidad mediante Entropía basada en la Descomposición en Valores Singulares (SVD) aplicada a las series temporales bajo estudio. A diferencia de las pruebas estadísticas previamente reportadas; cuyo objetivo es detectar desviaciones respecto a supuestos lineales a través de criterios de hipótesis, la entropía SVD proporciona una medida cuantitativa del grado de complejidad estructural del atractor reconstruido en el espacio de fases, al evaluar cómo se distribuye la energía/información en los valores singulares asociados a la dinámica embebida. En este sentido, valores de entropía más altos se asocian con una distribución más uniforme entre modos (mayor complejidad), mientras que valores más bajos indican concentración en pocos modos dominantes (dinámica más regular o más "organizada").

Los resultados que se muestran a continuación se discuten en conjunto con la evidencia obtenida en secciones previas (normalidad, estacionariedad, heterocedasticidad y pruebas

estadísticas de no linealidad), con el objetivo de construir una interpretación integrada de la naturaleza dinámica de cada serie y establecer una base sólida para los análisis posteriores de dependencia temporal y caracterización geométrica de la dinámica.

6.4.1. Entropía SVD

Para el desarrollo del análisis de no linealidad en cada serie temporal se tomo como punto de partida la entropía SVD. Primero, se construyó la matriz de señales retardadas utilizando ventanas móviles y un salto temporal de 20 segundos. A partir de la SVD, se calculó la entropía de Shannon normalizada en función del tiempo para cada señal.

La Figura 6.10 muestra la entropía SVD para cada patrón de flujo. La línea roja discontinua indica el valor promedio a una escala de 25 segundos, una ventana que permite capturar la dinámica local del sistema. Esta escala es particularmente sensible a fluctuaciones rápidas, transiciones de régimen y variaciones instantáneas. Para los flujos SW_1 y SW_2 (Figuras 6.10.a y 6.10.e), se observan valores altos y relativamente estables de entropía, lo cual sugiere un comportamiento estocástico con alta complejidad. Al aumentar la velocidad del gas de 0.5 a 0.7, se presentan descensos puntuales más marcados (Figura 6.10.e), lo que sugiere una mayor organización temporal en ciertos intervalos. Este comportamiento es congruente con los resultados previos de Lyapunov positivo y dimensión fractal elevada, indicando una dinámica caótica bien desarrollada pero relativamente estable en el tiempo.

Para los patrones FF_1 y FF_2 (Figuras 6.10.b y 6.10.f), la entropía presenta una mayor variabilidad temporal en la SVDEn, con caídas más pronunciadas. Estas disminuciones reflejan episodios de mayor dominancia de ciertos modos singulares, lo que puede asociarse a intervalos donde la dinámica se vuelve transitoriamente más regular o correlacionada. Este comportamiento es consistente con una aparente no linealidad intermitente, detectada mediante las pruebas estadísticas y análisis de dependencia temporal. Al modificarse el ángulo de inclinación de la tubería de $-80°$ a $-85°$, se reduce la frecuencia de caídas extremas, lo que podría reflejar una atenuación parcial de la dinámica intermitente del flujo.

En los casos WA_1 y WA_2 (Figuras 6.10.c y 6.10.g), se evidencian valores promedio de entropía más bajos acompañados de descensos abruptos recurrentes, lo que indica una dinámica altamente cambiante a esta escala. Esto sugiere que el sistema explora continuamente distintas configuraciones en el espacio de fases, reflejando una dinámica caótica más intensa, en concordancia con el mayor exponente de Lyapunov observado para esta señal. Además, el incremento de la velocidad del gas intensifica las oscilaciones, lo que sugiere un aumento en la inestabilidad del flujo.

Finalmente, los patrones de los flujos LS (Figuras 6.10.d y 6.10.h) presentan las entropías medias más bajas, alrededor de 0.74. A medida que se eleva la velocidad del gas, se observa un aumento de la variabilidad de la entropía y, por lo tanto, puede indicar una posible transición a estados más caóticos o no lineales. En general, SVDEn muestra valores ligeramente menores en promedio y una dispersión notable. Esto indica que, aunque el sistema mantiene un comportamiento complejo, existe una mayor concentración temporal de energía en algunos modos dominantes, sugiriendo una estructura dinámica menos rica que en los otros patrones de flujo, pero aún claramente no lineal.

En términos generales, los valores de SVDEn se encuentran en un rango moderado–alto de 0.70–0.93 aproximadamente, lo que indica que, a esta escala, las señales exhiben dinámicas complejas. Las diferencias entre señales reflejan distintos grados de organización dinámica, desde caos bien desarrollado hasta comportamientos más intermitentes o cercanos a regímenes estables.

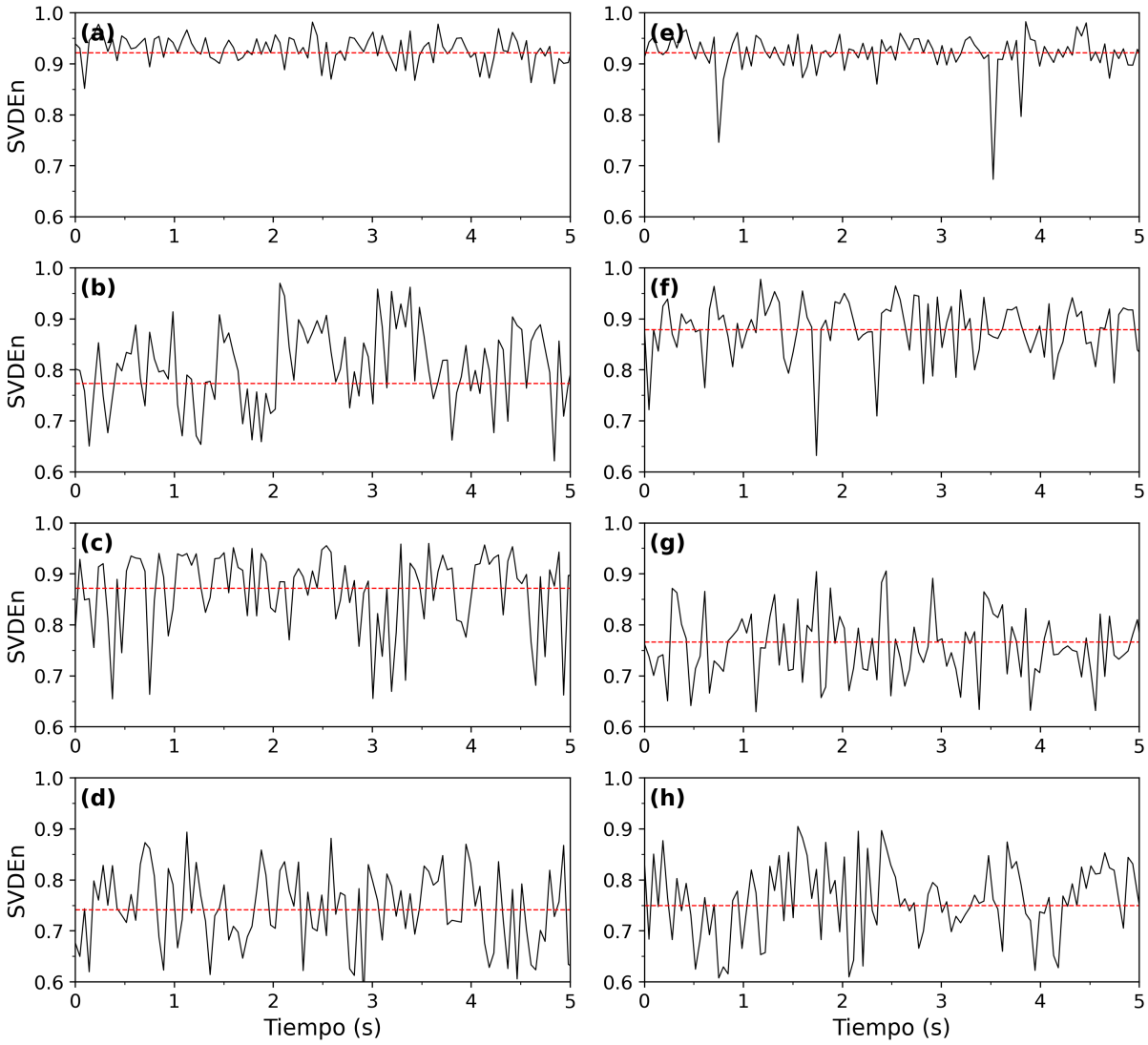


Figura 6.10: Entropía SVD de las señales temporales de patrones de flujo bifásico a una escala de 25 segundos: a) SW_1, b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

6.4.2. Efecto de la escala en la Entropía SVD

Con el fin de profundizar en la caracterización de la dinámica subyacente de las series temporales analizadas, se llevó a cabo un análisis de la SVDEn considerando diferentes escalas temporales. Este enfoque permite identificar transiciones en las dinámicas del sistemas. Por tanto, identificar cambios en la complejidad y el grado de organización de la señal al variar la escala de observación. El análisis multiescala resulta particularmente relevante en el estudio de procesos químicos, ya que estos pueden exhibir dinámicas diferenciadas

dependiendo del intervalo temporal considerado, reflejando la coexistencia de fenómenos rápidos y lentos. En este contexto, la entropía SVD proporciona una medida cuantitativa robusta para comparar la estructura dinámica de las señales a distintas escalas, sirviendo como base para la posterior evaluación de no linealidades y la comparación con datos sustitutos.

6.4.2.1. Entropía SVD a escala temporal de 125 segundos

Se analizó una escala temporal de 125 segundos con el objetivo de evaluar la influencia del tamaño de ventana sobre la cuantificación de la no linealidad. La Figura 6.11 muestra los resultados obtenidos para las series correspondientes a los distintos regímenes de flujo. Una escala de 125 segundos, corresponde a una ventana intermedia que integra información dinámica de mayor alcance temporal. A diferencia de la escala de 25 segundos, esta escala suaviza las fluctuaciones rápidas. De esta manera, esta escala permite evaluar la persistencia de la complejidad dinámica en intervalos más largos.

Para el flujo ondulado estratificado SW, (Figuras 6.11.a y 6.11.e), la entropía SVD se conserva alta y estable, con caídas puntuales bien definidas. Estas reducciones sugieren la presencia de transiciones dinámicas de mayor duración, las cuales se manifiestan claramente a esta escala, indicando una dinámica caótica con episodios de reorganización interna. A pesar del aumento en la velocidad del gas superficial, no hubo cambios significativos en la posición de estos indicadores. En comparación con el análisis en la ventana de tiempo de 25 segundos, donde se estudiaron variaciones mucho más rápidas, aquí, con una ventana más amplia, todas las oscilaciones se vuelven más lentas y menos frecuentes.

La entropía SVD para el flujo FF, (Figuras 6.11.b y 6.11.f) es moderada con oscilaciones suaves alrededor de su valor medio. A diferencia de la escala anterior, las fluctuaciones extremas disminuyen, lo que indica que la dinámica intermitente detectada a escalas cortas se promedia a escalas mayores. La serie, FF_1, muestra oscilaciones suaves con amplitud marginal, y la señal FF_2 muestra una entropía moderada–alta, con fluctuaciones persistentes pero acotadas. En comparación con la escala de 25 segundos, la dinámica parece más homogénea, lo que refuerza la interpretación de un sistema con no linealidad débil o intermedia, coherente con los resultados del exponente de Lyapunov cercanos a cero. A

pesar de que todas las caídas dramáticas a 25 segundos se suavizaron en 125 segundos, la entropía general se mantiene alta.

Para el patrón anular ondulado WA (Figura 6.11.c y Figura 6.11.g) se mantiene una entropía promedio claramente inferior a las medias de los flujos SW y FF, lo que implica menor irregularidad aunque esté parcialmente oculta. Para WA_2 el cambio en la velocidad superficial de gas ayuda a disminuir la dispersión de la entropía, lo que refleja que las fluctuaciones disminuyen rápidamente, se hacen más rápidas y más reducidas. Esto sugiere una estructura dinámica más organizada. La señal conserva una dinámica compleja sostenida, lo que sugiere que los mecanismos no lineales responsables del caos operan de manera coherente incluso cuando se integran escalas temporales más largas. Esto es consistente con su mayor dimensión fractal y exponente de Lyapunov positivo.

Por último, las entropías promedio del flujo LS (Figura 6.11.d y Figura 6.11.h) son las más bajos de todas. Se observan oscilaciones suaves y bien contenidas. Este comportamiento refleja una dinámica no lineal persistente, aunque con mayor regularidad interna que las señales con entropía más alta, confirmando su carácter caótico moderado.

El orden relativo de entropía promedio entre los patrones de flujo se conserva respecto al análisis con escala de 25 segundos (Figura 6.10), siguiendo la secuencia: SW> FF> WA > LS. Este comportamiento indica que la clasificación de la complejidad entre los regímenes se mantiene ante variaciones en la escala.

El análisis con una escala de 125 segundos permite resaltar las tendencias globales del sistema y suavizar las variaciones locales, mientras que el análisis con una escala de 25 segundos es más sensible a los cambios rápidos y transitorios característicos de cada régimen. Este contraste evidencia la utilidad de un enfoque multiescala para caracterizar adecuadamente la complejidad dinámica de los flujos bifásicos.

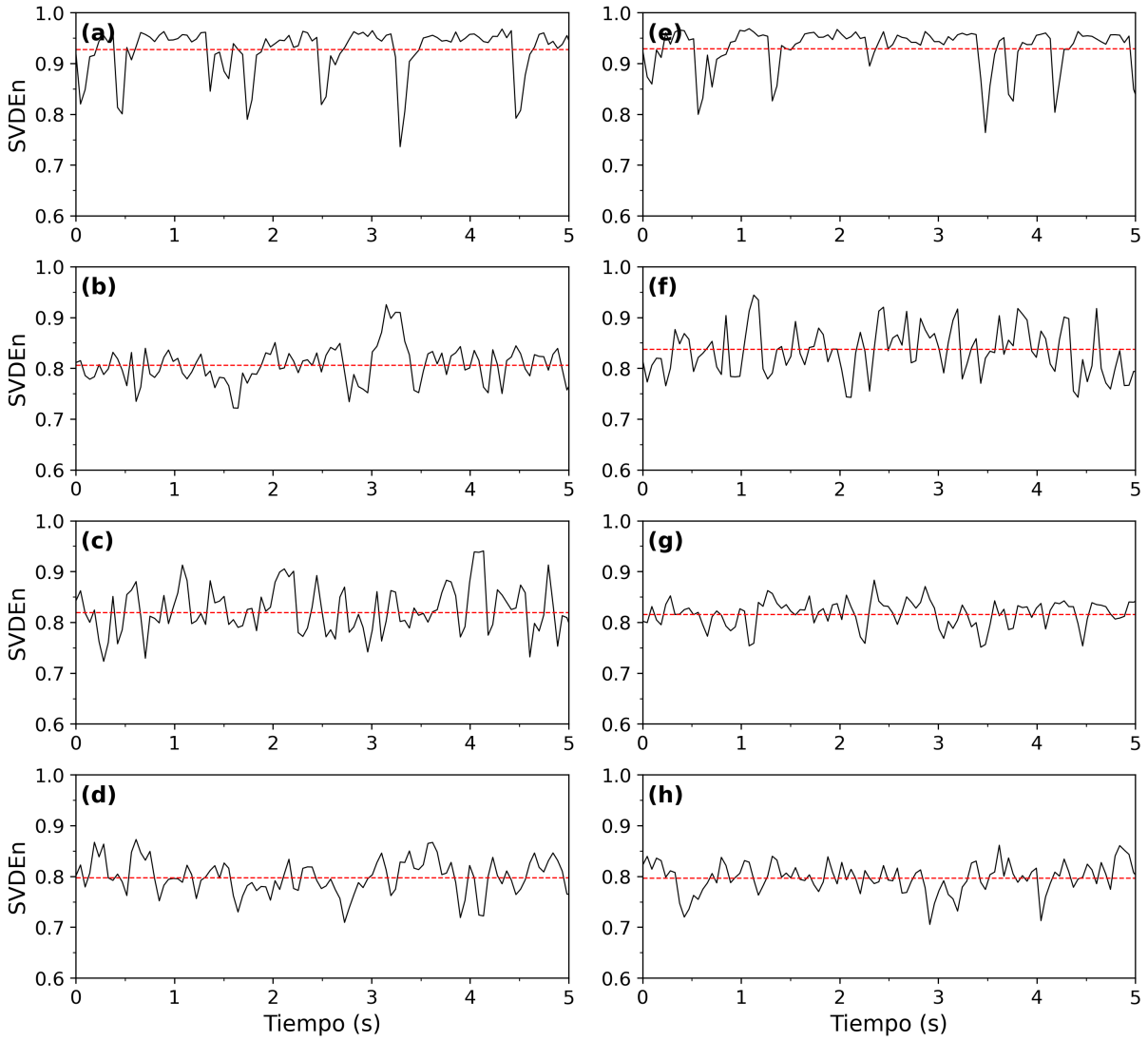


Figura 6.11: Entropía SVD de las series temporales de patrones de flujo a una escala de 125 segundos: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

6.4.2.2. Entropía SVD a escala temporal 250 segundos

Se consideró un aumento en la escala igual a 250 segundos con el fin de tener mayor rango para la evaluación de la no linealidad de las series. Esta escala corresponde a una ventana larga que integra información dinámica de gran alcance temporal. De esta manera, permite evaluar la estructura global y la persistencia de los mecanismos que gobiernan la dinámica del sistema, filtrando en gran medida las fluctuaciones rápidas observadas en escalas menores. Las Figura 6.12 muestra los resultados obtenidos para las señales analizadas.

Para el patrón ondulado estratificado SW (Figuras 6.12.a y 6.12.e), la entropía se mantiene alta y estable, con descensos bien definidos. Este comportamiento representa la naturaleza compleja del flujo. En comparación con escalas menores, la señal exhibe una dinámica caótica robusta y persistente.

Para el patrón de flujo FF (Figuras 6.12.b y 6.12.f), las fluctuaciones se reducen y se distribuyen de forma más equitativa en torno a la media. Además, se mantiene la diferencia en la variabilidad entre FF_1 y FF_2, reflejando la influencia del ángulo de inclinación de la tubería. A esta escala, la dinámica intermitente observada en 25 segundos queda completamente promediada, revelando un comportamiento no lineal persistente pero estructuralmente organizado, lo cual es coherente con el exponente de Lyapunov.

En el caso del flujo anular ondulado WA (Figuras 6.12.c y 6.12.g), la entropía promedio continúa siendo ligeramente menor que en los flujos SW y FF. Las curvas presentan ondulaciones suaves, de baja amplitud, y cercanas al valor medio. El incremento en la velocidad superficial del gas en WA_2 parece reducir aún más la dispersión, sin introducir cambios abruptos en el comportamiento dinámico. Esto indica que la señal conserva una alta complejidad dinámica incluso a escalas largas, sugiriendo que los mecanismos caóticos subyacentes actúan de manera coherente a lo largo del tiempo, en concordancia con su dimensión fractal.

Finalmente, para el flujo en régimen LS (Figuras 6.12.d y 6.12.h), se mantienen los valores más bajos de entropía promedio, coherentes con una dinámica más periódica. LS_1 presenta una entropía media de aproximadamente 0.82, mientras que LS_2 muestra una media similar pero con oscilaciones más cortas y de menor amplitud, lo que sugiere una ligera estabilización atribuida al aumento en la velocidad del gas.

En resumen, el análisis con escala de 250 segundos permite una lectura más clara de las diferencias estructurales entre los patrones de flujo. Se atenúa la variabilidad local y se consolida el orden relativo de complejidad previamente observado: SW > FF$\approx$ WA > LS. Esta escala temporal más amplia resalta las tendencias globales del sistema y evidencia que, si bien los efectos del aumento de velocidad son visibles, su impacto es más moderado cuando se consideran escalas temporales más extensas.

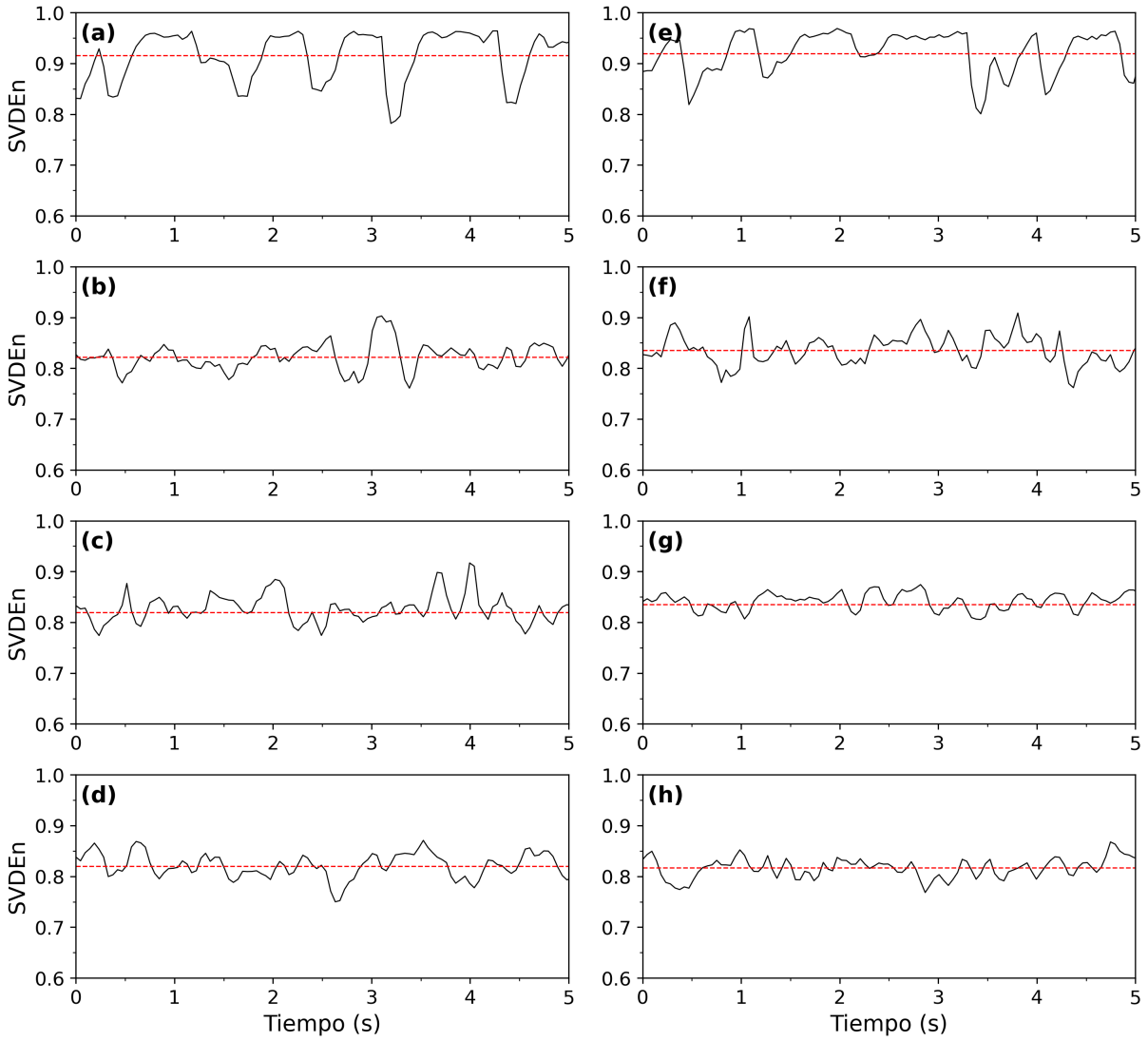


Figura 6.12: Entropía SVD para las series temporales de patrones de flujo bifásico a una escala de 250 s: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

6.4.3. Variación de la escala temporal en un patrón de flujo

La Figura 6.13 muestra la evolución temporal de la entropía SVDEn para el patrón de flujo SW_1, a tres escalas de tiempo diferentes: 25, 125 y 250 segundos. En la primera escala (Figura 6.13.a), la entropía se mantiene en altos valores estables, alrededor del 0.90-0.93 con oscilaciones rápidas de amplitud baja y caídas poco profundas. La ausencia de descensos pronunciados indica una estructura dinámica estable y poca intermitencia a esta escala.

Al incrementa la escala de tiempo a 125 segundos (Figura 6.13.b), se observa una mayor variabilidad en la entropía SVD, con descensos abruptos y recurrentes por debajo del valor medio. Estos mínimos indican episodios donde la dinámica se concentra temporalmente en un número reducido de modos dominantes, lo que es consistente con la aparición de estructuras dinámicas organizadas o transiciones internas del sistema. Este comportamiento revela que, a escalas intermedias, emergen mecanismos dinámicos que no son evidentes a escalas más cortas, reflejando una mayor sensibilidad a efectos no lineales y posibles procesos de interacción entre múltiples escalas. Para la escala de 250 segundos (Figura 6.13.c), las oscilaciones rápidas se reducen en gran medida, y se observa la transformación en un patrón de señal más suave con descensos más amplios y continuos. Éstos descensos más pronunciados sugieren episodios de fuerte organización dinámica, donde la complejidad efectiva del atractor disminuye significativamente, mientras que los intervalos de entropía elevada indican fases de comportamiento más complejo o desordenado. Esta alternancia sugiere que estas zonas de entropía reducida podrían relacionarse con intervalos en que la interfase entre líquido y gas es más regular en su comportamiento o estructura.

Para el patrón SW_1 se obtuvo una dinámica cuya complejidad se manifiesta de manera más clara a escalas intermedias y largas. La dependencia explícita de la entropía con la escala refuerza la hipótesis de que el sistema no puede describirse adecuadamente mediante un modelo lineal único, y justifica la aplicación posterior de métricas complementarias de no linealidad y dependencia temporal. Esto resalta la importancia de la multiescala análisis para revelar diferentes formas de la complejidad dinámica en señales provenientes de flujos bifásicos.

En conjunto, estos resultados evidencian que la entropía SVD es sensible a la escala temporal de análisis, no solo para el flujo SW sino para todas las series estudiadas. Las Figuras correspondientes a los demás regímenes de flujo se encuentran en el Apéndice A.1 de los datos complementarios.

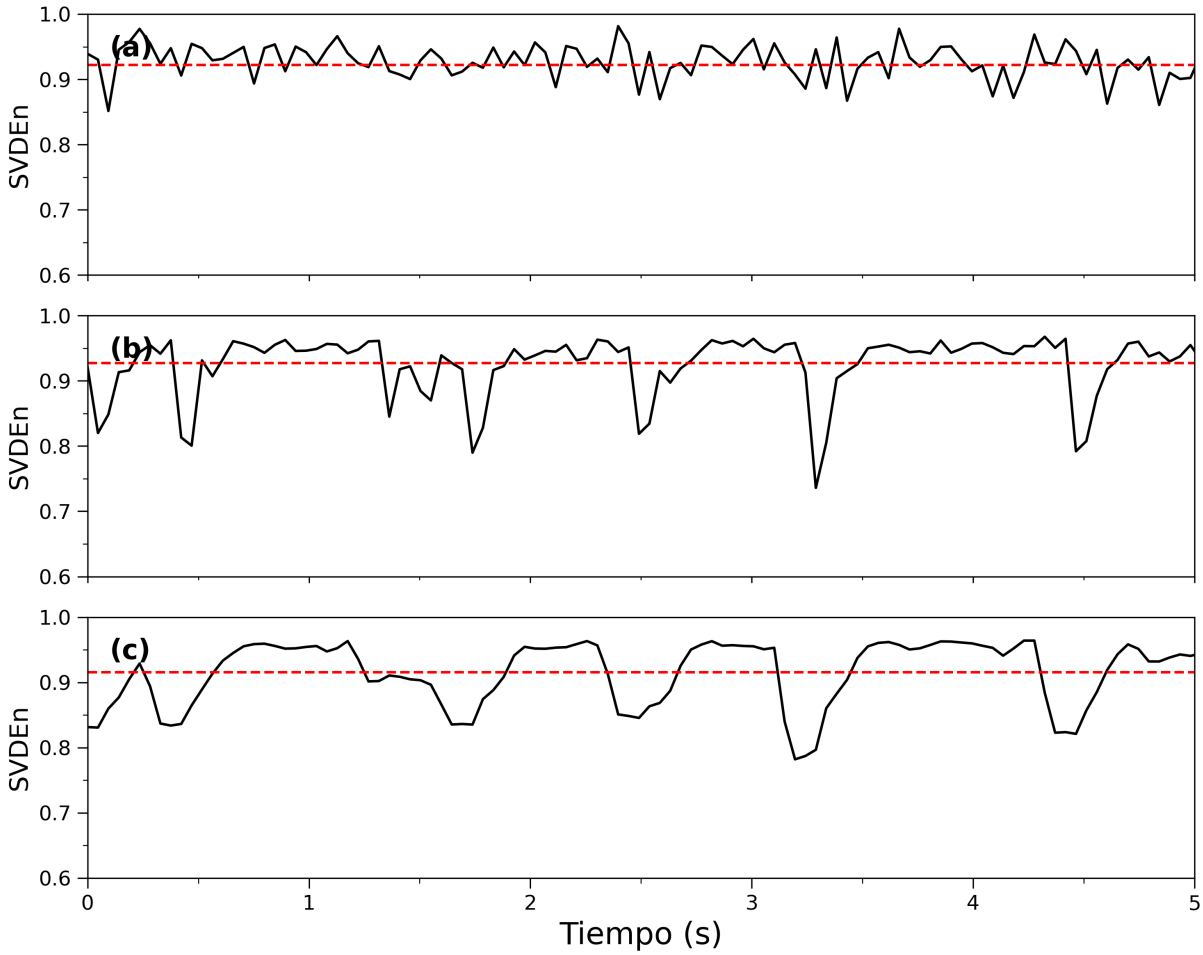


Figura 6.13: Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico SW_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s.

En la Tabla 6.6 se incluyen los promedios los valores de entropía SVD obtenidos para cada patrón de flujo bifásico, calculados a las tres escalas de análisis: 25, 125 y 250 segundos. De los datos, podemos destacar que el patrón de flujo SW muestra las entropías promedio más altas de todos los flujos analizados en todas las escala. Esto sugiere una persistente y alta complejidad a través de distintas escalas temporales.

Por el contrario, los patrones LS tuvieron las entropías más bajas. Esto refleja su carácter determinista, y en efecto se produce un ligero incremento de la entropía media a mayores escalas, quizás debido a las perturbaciones inducidas por el aumento de la velocidad gas. Los patrones intermedios, FF y WA, presentan valores de entropía media entre los dos opuestos y muestran una mayor sensibilidad a las condiciones del flujo, como ángulos de

inclinación de la tubería y el cambio en la velocidad superficial del gas. En general, el orden relativo de SVDEn se conserva en todas las escalas como SW >FF > WA> LS, lo que refuerza la validez del análisis multiescala mediante entropía SVD como herramienta para caracterizar dinámicamente los patrones de flujo.

Tabla 6.6: Comparación de la entropía SVD media por escala.

Patrón	**25 s**	**125 s**	**250 s**	**Tendencia general**
SW_1	≈ 0.93	≈ 0.92	≈ 0.92	Alta, estable
SW_2	≈ 0.93	≈ 0.92	≈ 0.91	Alta, estable
FF_1	≈ 0.81	≈ 0.81	≈ 0.82	Media, moderada
FF_2	≈ 0.83	≈ 0.82	≈ 0.82	Media, variable
WA_1	≈ 0.78	≈ 0.78	≈ 0.79	Media-baja, estable
WA_2	≈ 0.78	≈ 0.78	≈ 0.79	Media-baja, estable
LS_1	≈ 0.74	≈ 0.75	≈ 0.82	Baja, estable
LS_2	≈ 0.75	≈ 0.76	≈ 0.82	Baja, estable

El análisis comparativo de la entropía SVD a las escalas temporales de 25, 125 y 250 segundos evidencia de manera clara el carácter multiescala de la dinámica no lineal presente en las señales analizadas. A la escala corta de 25 segundos, la entropía SVD presenta fluctuaciones rápidas y de gran amplitud, reflejando la sensibilidad de la dinámica local a cambios transitorios, lo que pone de manifiesto la presencia de no linealidades activas a corto alcance temporal. Al incrementar la escala a 125 segundos, dichas fluctuaciones se atenúan y la entropía converge hacia valores más estables, indicando que los mecanismos no lineales detectados a escalas cortas persisten y se integran en una estructura dinámica más coherente. Finalmente, a la escala de 250 segundos, la entropía SVD exhibe una estabilidad notable, con variaciones suaves alrededor de valores elevados, lo que confirma que la complejidad observada no es un efecto local o transitorio, sino una propiedad intrínseca y robusta del sistema. En conjunto, este comportamiento jerárquico demuestra que la

entropía SVD no solo captura la complejidad dinámica, sino que permite distinguir entre la dinámica local, intermedia y global del sistema, consolidándose como una herramienta adecuada para la cuantificación multiescala de la no linealidad en procesos químicos.

6.4.4. Entropía SVD con datos sustitutos

La Figura 6.15 muestra la entropía SVD en función del tiempo para las series correspondientes a los distintos patrones de flujo bifásico, calculada a una escala de 25 segundos. Cada subfigura presenta la entropía real, la banda de confianza de 95 % generada mediante señales sustitutas por aleatorización de la fase (sombreado gris) con el comportamiento esperado bajo la hipótesis nula de linealidad y la entropía promedio marcada con una línea roja discontinua. En el patrón de flujo SW (Figuras 6.14.a y 6.14.e), la entropía se mantiene alta y relativamente estable, con descensos puntuales que, en su mayoría, se encuentran dentro del intervalo de confianza. Este comportamiento sugiere que, para estas señales, la complejidad estructural puede explicarse en gran medida por propiedades lineales, sin evidenciar desviaciones significativas que indiquen la presencia dominante de no linealidades fuertes a esta escala temporal.

Los patrones FF_1 y FF_2 (Figuras 6.14.b y 6.14.f) presentan oscilaciones amplias y frecuentes, reflejando mayor irregularidad; el incremento en la inclinación de la tubería no disminuye la variabilidad global. La entropía real se encuentra en su mayor parte sobre la banda de confianza. Sin embargo, se observan episodios en los que la entropía SVD de la serie original presenta desviaciones sistemáticas respecto a la banda de confianza generada por los datos sustitutos.

En los patrones WA (Figuras 6.14.c y 6.14.g), la entropía media es menor con caídas recurrentes, lo cual indica un régimen menos complejo y más determinista; el aumento en la velocidad superficial del gas incrementa la amplitud de las fluctuaciones. Para las señales se observa que el intervalo de confianza da lugar a no linealidades emergentes. En particular, se identifican caídas abruptas que exceden el límite inferior del intervalo de confianza. Este comportamiento no puede ser reproducido por los datos sustitutos, lo que constituye un indicio claro de la presencia de estructuras dinámicas no lineales subyacentes.

Finalmente, en LS_1 y LS_2 (Figuras 6.14.d y 6.14.h), la entropía es de las más bajas del conjunto analizado. Y aunque oscila alrededor del valor medio, se aprecia un aumento en la variabilidad y en la frecuencia de excursiones hacia los extremos de la banda de confianza. Este patrón sugiere una dinámica más irregular, en la cual coexisten componentes lineales y no lineales, dando lugar a una complejidad estructural intermedia que no es completamente capturada por el modelo lineal implícito en los datos sustitutos. De todos los flujos analizados este patrón mostró mayor no linealidad en comparación con los otros regímenes de flujo.

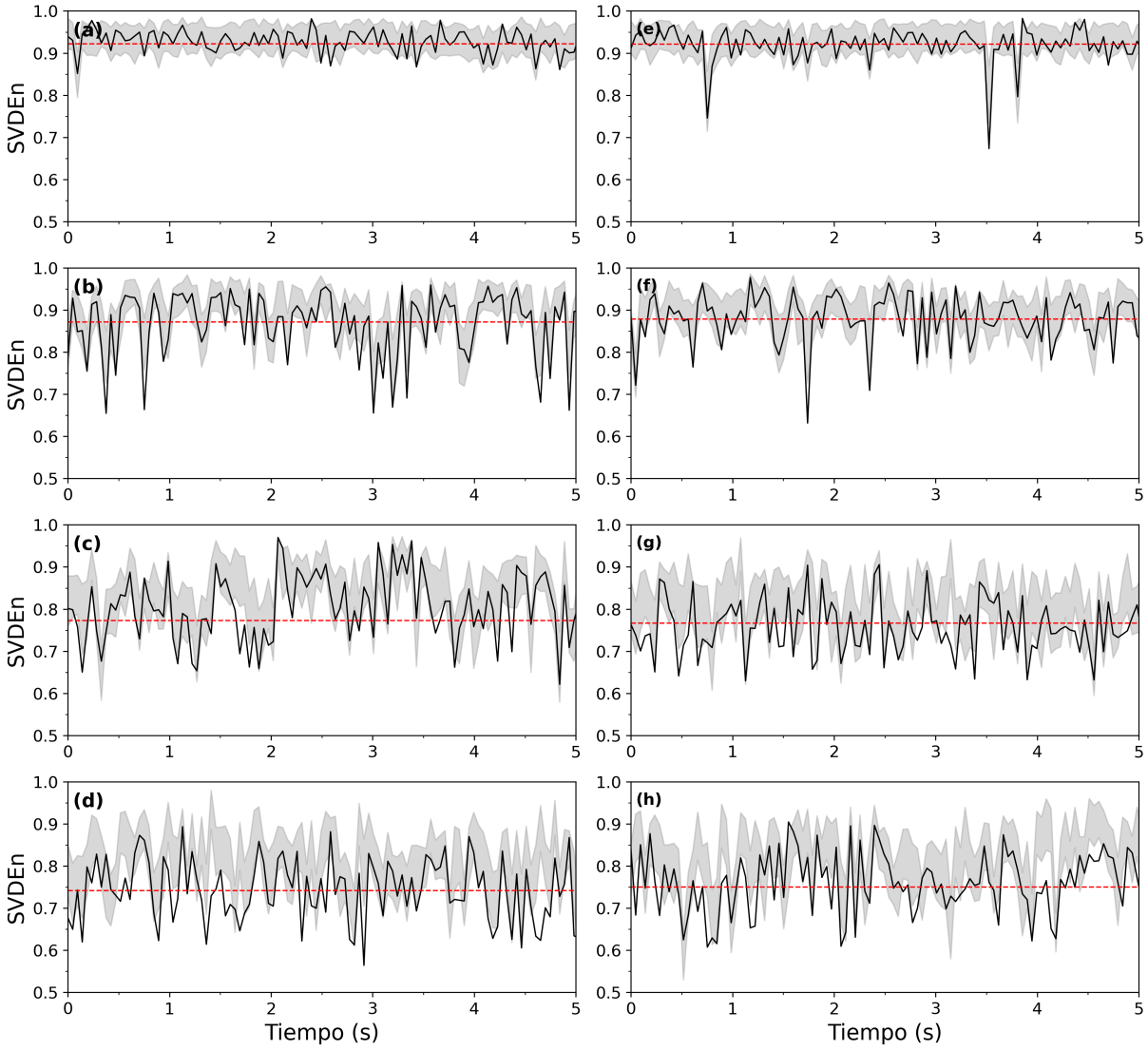


Figura 6.14: Entropía SVD para las series temporales con datos sustitutos a una escala de 25 segundos.

En conjunto, la comparación entre las series originales y la banda de confianza obtenida a partir de datos sustitutos permite inferir que las desviaciones observadas en la entropía SVD no son atribuibles únicamente a efectos estadísticos lineales o al contenido espectral de las señales. Por el contrario, los resultados sugieren que la no linealidad detectada está asociada a una complejidad estructural inherente a la dinámica del proceso, reflejando la presencia de mecanismos causales no lineales que gobiernan la evolución temporal de las series analizadas.

Se realizó el análisis similar con una escala de 250 segundos, en general los resultados fueron semejantes. La Figura 6.15 presenta la evolución temporal de la entropía SVD para las ocho señales analizadas a esta escala, junto con la banda de confianza estimada a partir de datos sustitutos. La curva negra corresponde a la entropía SVD de las series originales, mientras que la región sombreada en gris representa el intervalo de confianza asociado a la hipótesis nula de linealidad. La línea roja punteada indica el valor medio de la entropía SVD obtenida a partir de los datos sustitutos.

Para el patrón de flujo SW (Figuras 6.15.a y 6.15.e), se observa que la entropía SVD de las series originales presenta oscilaciones bien definidas, con episodios recurrentes de descensos pronunciados que alcanzan o rebasan el límite inferior de la banda de confianza. Estos eventos reflejan reducciones temporales del número efectivo de grados de libertad del sistema, lo cual sugiere la presencia de reorganizaciones dinámicas que no son completamente reproducidas por los datos sustitutos, aun a escalas temporales largas.

Para los flujos FF y WA (Figuras 6.15.b, f, c y g), la entropía SVD oscila alrededor del valor medio de los sustitutos, pero se identifican desviaciones locales persistentes, tanto por debajo como por encima de dicho promedio. En particular, se observan eventos transitorios caracterizados por caídas abruptas de la entropía, que indican episodios de mayor organización estructural. La recurrencia de estos eventos sugiere que, aunque la dinámica global se aproxima al comportamiento esperado bajo la hipótesis nula, subsisten componentes no lineales que se manifiestan de forma intermitente.

Para el patrón de flujo LS, las señales muestran un comportamiento relativamente más estable, con fluctuaciones de menor amplitud y una mayor permanencia dentro de la

banda de confianza. No obstante, incluso en estos casos se aprecian excursiones locales hacia valores bajos de entropía, lo que indica que la dinámica no es puramente lineal y conserva cierta complejidad estructural residual.

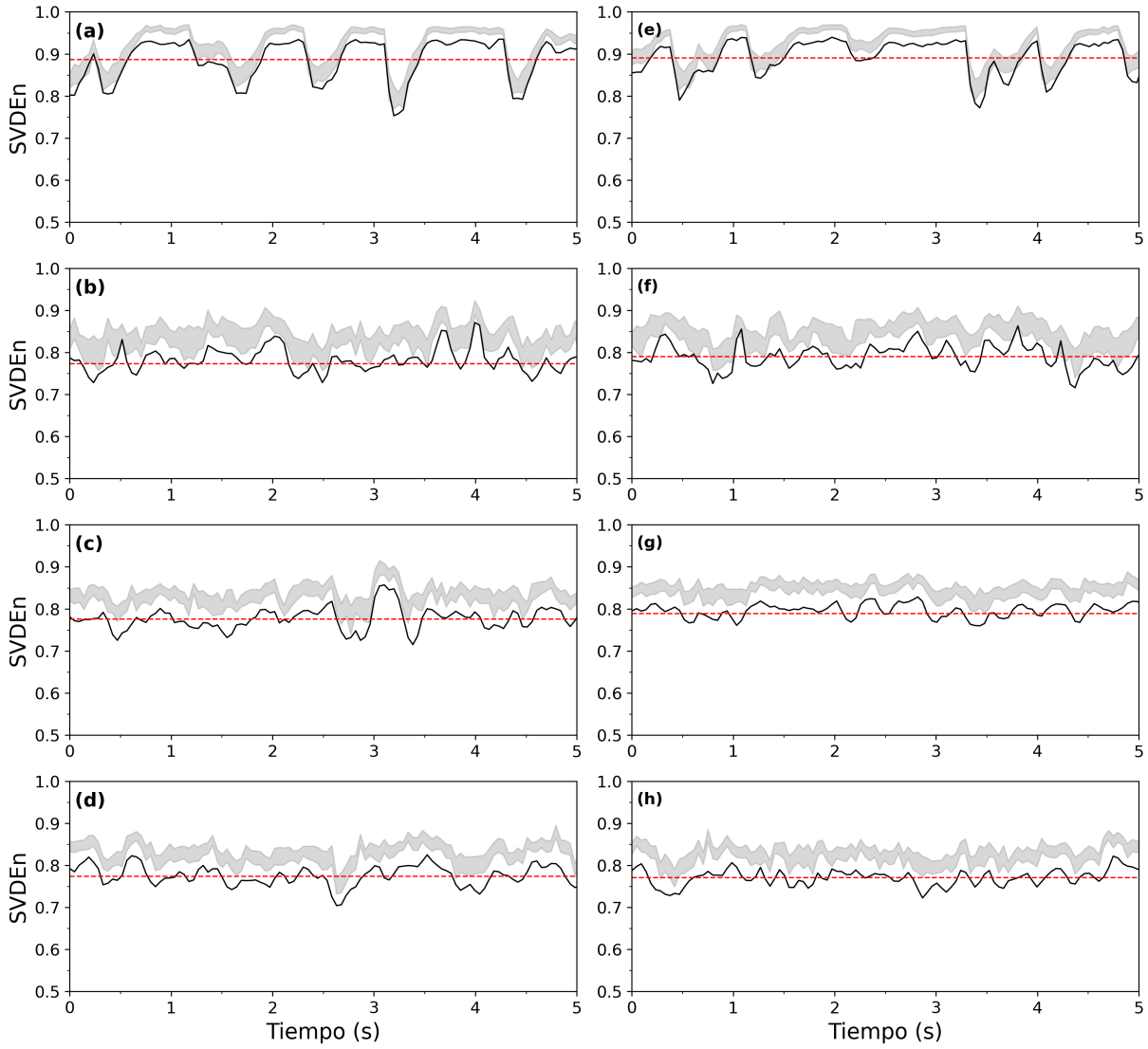


Figura 6.15: Entropía SVD para las series temporales con datos sustitutos a una escala de 250 segundos.

En conjunto, los resultados muestran que el aumento de la velocidad superficial del gas afecta de forma diferencial a cada patrón: en regímenes complejos y estables como SW apenas modifica la entropía, mientras que en flujos periódicos o inestables puede amplificar las fluctuaciones y alterar su complejidad dinámica.

El análisis a la escala de 250 segundos evidencia que, si bien el promedio de la entropía SVD tiende a alinearse con el valor medio de los datos sustitutos, la dinámica temporal conserva oscilaciones significativas y eventos estructurales que no pueden ser explicados únicamente por propiedades lineales. Estos resultados indican que la no linealidad del sistema persiste a escalas temporales largas, manifestándose principalmente a través de episodios intermitentes de reorganización dinámica, lo que refuerza la interpretación de la complejidad estructural como un rasgo inherente del proceso analizado.

Con el objetivo de profundizar en la caracterización multiescala de la complejidad dinámica de las series analizadas, a continuación se presentan los mapas de calor de la SVDEn en función del tiempo y de la escala temporal. Esta representación permite visualizar de manera simultánea la evolución temporal de la entropía y su dependencia con la escala de análisis, proporcionando una perspectiva integral de cómo se organiza la complejidad estructural del sistema a diferentes horizontes temporales.

La Figura 6.16 presenta los mapas de calor de la entropía SVD para las ocho series temporales correspondientes a los distintos patrones de flujo bifásico. La escala de colores representa valores bajos de entropía en tonos morados y valores altos en amarillo, con un rango normalizado de 0 a 1. Los mapas fueron calculados mediante una ventana móvil con tamaño variable de 50 observaciones. En todos los casos analizados se observa que la entropía SVD tiende a incrementarse con la escala, lo cual sugiere que la complejidad del sistema se vuelve más evidente a medida que se integran comportamientos más globales de la señal. Adicionalmente, cada patrón de flujo exhibe una firma distintiva en el dominio escala-tiempo, permitiendo caracterizar su dinámica específica.

Para el flujo SW, (Figura 6.16.a y Figura 6.16.e), las bandas oscuras en las escalas más pequeñas indican baja entropía, mientras que a escalas intermedias y grandes se presenta un color verde-azulado que refleja valores medios de entropía SVD, acompañados por aumentos puntuales coincidentes con los eventos bruscos de las señales originales. Para FF (Figuras 6.16.b y 6.16.f), el flujo tiene una distribución de entropía media interrumpida por bandas de alta entropía detectadas en las formaciones estratificadas verticales que se repite a lo largo de varias escalas. Estas bandas intermitentes corresponden a eventos no

estacionarios persistentes en el tiempo, lo que sugiere una dinámica fluctuante durante todo el experimento.

En cuanto a WA, (Figuras 6.16.c y 6.16.g), se observa zonas específicas de mayor entropía en comparación con los flujos anteriores, con predominio de verde-amarillo, particularmente en las escalas medias y grandes, y con zonas de entropía baja en las escalas inferiores. No obstante, la comparación entre WA_1 y WA_2 el cambio en la velocidad superficial del gas sugiere un aumento de la superficie de entropía alta dejando las zonas de baja entropía a escalas más bajas, esto significa que la complejidad alta es sostenida. Este comportamiento sugiere un régimen más estacionario en escalas grandes, con variaciones significativas solo en escalas pequeñas.

Finalmente, para el patrón de flujo película deslizante (LS_1 y LS_2, Figuras 6.16.d y 6.16.h), se registran las entropías más elevadas en comparación con los demás regímenes. Los mapas muestran zonas uniformes de alta entropía en casi todo el rango de escalas y tiempos, con escasas regiones de baja entropía. Esta homogeneidad sugiere un comportamiento altamente complejo pero cuasi-estacionario, donde las estructuras dinámicas se mantienen estables a través de escalas múltiples, incluso ante el aumento de la velocidad superficial del gas.

La figura evidencia que la entropía SVD presenta una marcada dependencia con la escala temporal, mostrando valores más bajos en escalas pequeñas y un incremento progresivo conforme aumenta la escala de análisis. Este comportamiento sugiere que, a escalas cortas, la dinámica del sistema se encuentra más organizada, mientras que a escalas mayores emerge una mayor complejidad estructural asociada a la interacción de múltiples mecanismos dinámicos. Asimismo, se observan regiones temporales con variaciones abruptas de la entropía que persisten a través de varias escalas, lo cual indica la presencia de transiciones dinámicas y estructuras coherentes multiescala. En conjunto, estos resultados refuerzan la naturaleza no lineal del sistema y ponen de manifiesto que su complejidad no es uniforme, sino dependiente tanto del tiempo como de la escala temporal considerada.

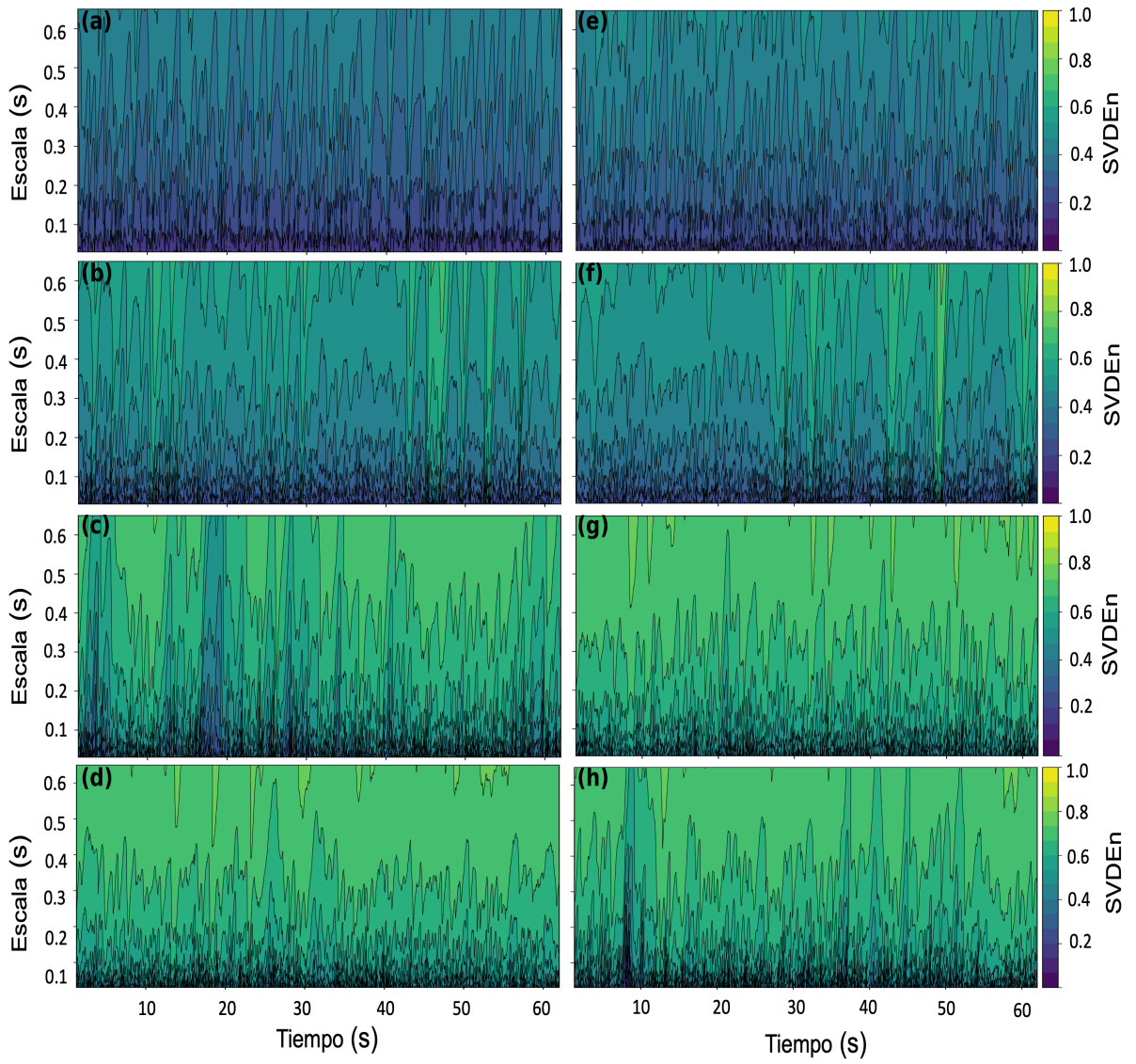


Figura 6.16: Mapa de calor de entropía SVD para los patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2.

La Tabla 6.7 presenta los principales hallazgos derivados del análisis multiescala mediante mapas de calor de entropía SVD. Se comparan los distintos patrones de flujo en términos del comportamiento general de la entropía, su evolución con el aumento de la escala, la influencia de la velocidad superficial del gas, y el grado aparente de estacionariedad. En todos los casos se observa un aumento de la entropía conforme se incrementa la escala, aunque la magnitud y naturaleza de este cambio varía entre patrones. El patrón SW presenta una entropía baja-media estable, con ligera variación frente al cambio de velocidad. El flujo FF muestra una dinámica más intermitente con bandas verticales de alta entropía

a diferentes escalas. El patrón WA evidencia una entropía elevada y sostenida en escalas medias y altas, con menor dispersión al incrementar la velocidad. Finalmente, el patrón LS presenta las entropías más altas y uniformes del conjunto, reflejando un comportamiento cuasi-estacionario y altamente complejo. Esta síntesis permite visualizar con claridad cómo la complejidad dinámica y la sensibilidad a los cambios operativos dependen del tipo de patrón de flujo analizado.

Tabla 6.7: Resumen comparativo del comportamiento de la entropía SVD.

Patrón	**SVDEn**	**Aumento de escala**	**Aumento de velocidad**
SW	Entropía baja-media (0.2-0.6); franjas oscuras a baja escala	Incremento de entropía con la escala	Cambios mínimos con tendencia general estable
FF	Entropía media con bandas verticales de alta entropía (≈ 0.9)	Aumento de entropía en múltiples escalas, eventos intermitentes	Incrementa variabilidad al modificar inclinación
WA	Entropía alta predominante en escalas medias-altas	Entropía baja sólo en escalas pequeñas	Mayor área de entropía alta con mayor velocidad
LS	Entropía alta y uniforme, pocas zonas de baja entropía	Alta entropía sostenida en todas las escalas	Aumento de variabilidad con mayor velocidad del gas

6.4.5. Índice de no linealidad NLI

El índice de no linealidad fue definido como la distancia de la SVDEn a la cota inferior del intervalo de confianza generado por datos sustitutos. Si la entropía cae dentro del intervalo de confianza (banda gris), el índice toma el valor de cero, lo cual es un comportamiento compatible con la hipótesis nula que indica linealidad.

La Figura 6.17 muestra el porcentaje del índice de no linealidad para las series exploradas para una escala de 25 segundos. Para el patrón de flujo SW,(Figura 6.17.a y Figura 6.17.e) la señal presenta picos pequeños y aislados (aproximadamente 1–10 %), de modo que la no linealidad es muy baja y se modifica ligeramente con el aumento de la velocidad del gas. Para el flujo FF, la Figura 6.17.b muestra picos moderados a altos con porcentajes que van desde los 5 % a 18 % sobre todo entre 1–2 segundos y cerca de 4 segundos, mientras que para FF_2 se observan menos picos de no linealidad, esto sugiere que el cambio en la inclinación de la tubería provoca un flujo más determinista. Para el patrón de flujo WA la no linealidad es moderada pero más dispersa en el tiempo. La Figura 6.17.c (WA_1) presenta picos frecuentes de 5 hasta 15 %, y la Figura 6.17.g (WA_2) incrementa tanto el porcentaje de índice de no linealidad alcanzando aproximadamente 20 %, esto sugiere que a mayor velocidad superficial del gas se eleva el índice NLI para este régimen de flujo. Para el caso del patrón de flujo deslizamiento del líquido se exhibe mayor intensidad del índice NLI. La Figura 6.17.d que corresponde a LS_1 exhibe picos repetidos entre 5–25 %, con un máximo antes de los 5 segundos. La Figura 6.17.h correpondiente con LS_2 sigue una tendencia alta desde 0 hasta 4 segundos. El orden de no linealidad presente en los patrones de flujo es: $LS_1 \geq LS_2 > WA_2 \geq FF_1 \geq WA_1 \geq FF_2 \gg SW_2 \approx SW_1$.

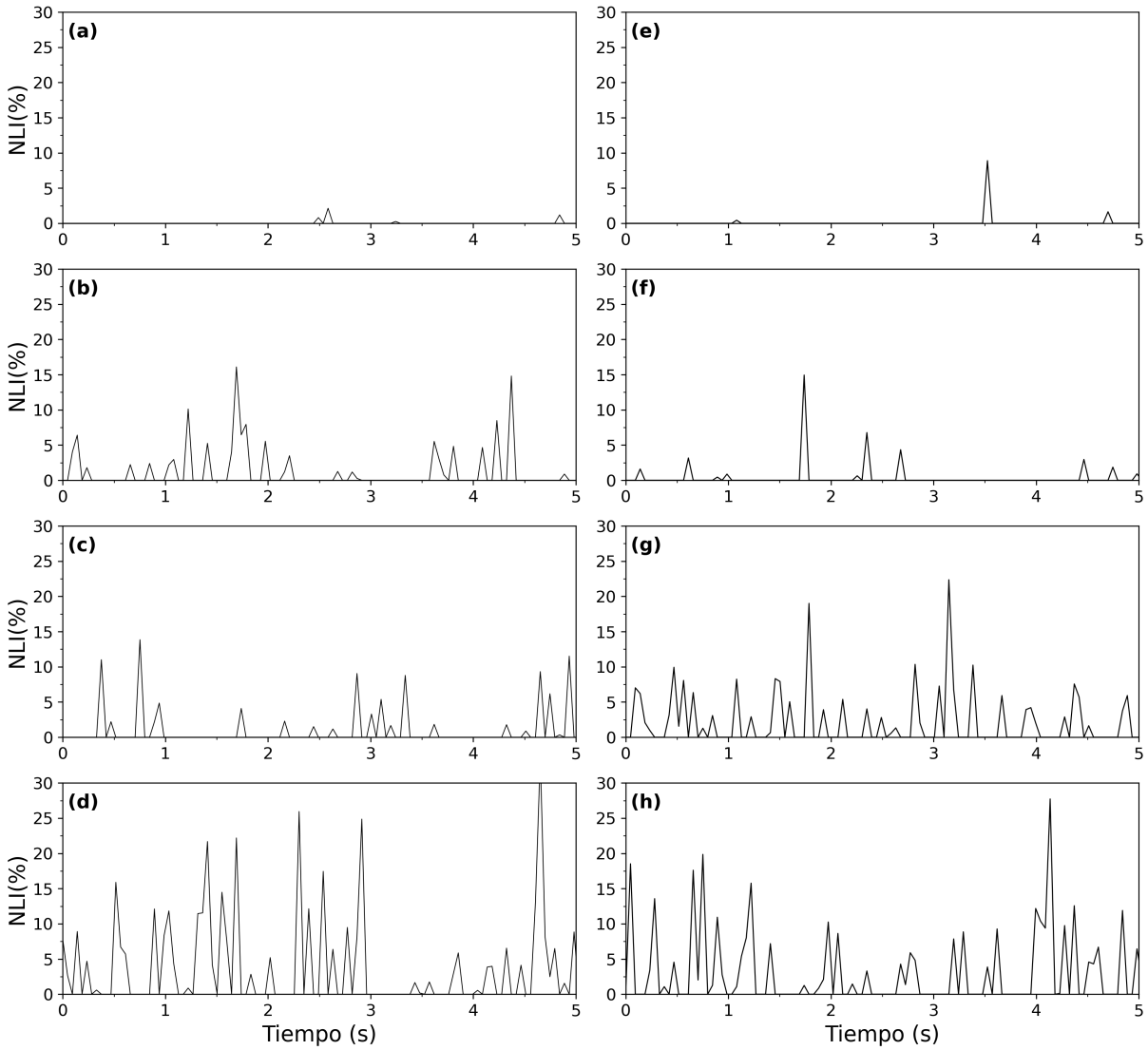


Figura 6.17: Índice de no linealidad de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2 a una escala de 25 segundos.

La Figura 6.18 el índice de no linealidad para las ocho señales analizadas a una escala de 250 segundos. A diferencia de lo observado a la escala menor, en este caso el NLI presenta valores persistentemente distintos de cero en la mayoría de las señales, con fluctuaciones continuas a lo largo del tiempo. Para el patrón de flujo SW,(Figura 6.17.a y Figura 6.17.e) aunque los valores del NLI son relativamente bajos, se mantiene una desviación sistemática respecto a cero, lo que indica la presencia de no linealidad débil pero sostenida. Éstas no linalidades no superan el 5 %.

Para los patrones de flujo FF (Figuras b y f), WA (Figuras c y g) y LS (Figuras d y h) se observan niveles de NLI moderados a elevados, con oscilaciones frecuentes y picos que alcanzan valores que superan el 10 %, reflejando una contribución no lineal más pronunciada a esta escala temporal. Este comportamiento sugiere que, al considerar escalas de tiempo largas, la dinámica del sistema integra efectos acumulativos de interacciones no lineales, dando lugar a una no linealidad más persistente y menos intermitente que la observada a la escala de 25 segundos. En conjunto, estos resultados ponen de manifiesto que la intensidad y la persistencia de la no linealidad dependen de la escala temporal, reforzando la naturaleza multiescala del proceso analizado. largas.

Este análisis se realizó a tres escalas distintas; 25, 125 y 250 segundos obteniendo el mismo orden de índice NLI. Además, se confirma que a una ventana de 25 segundos se potencía la detección de intermitencias: el aumento de velocidad superficial del gas intensifica el índice NLI en WA, genera un pequeño cambio para SW y mantiene alta para el flujo LS y el cambio de inclinación de la tuberia reduce los picos del índice NLI para FF. A 25 segundos, el índice de no linealidad presenta valores cercanos a cero durante la mayor parte del tiempo, con picos aislados que indican episodios transitorios de comportamiento no lineal. En contraste, a 250 segundos el NLI mantiene valores consistentemente distintos de cero y de mayor magnitud, lo que evidencia una no linealidad persistente en la dinámica del sistema. Estos resultados indican que las interacciones no lineales se manifiestan con mayor claridad al considerar escalas temporales largas, consolidándose como un rasgo estructural del proceso y no únicamente como fluctuaciones locales. Un punto relevante a explorar es si los efectos no lineales involucrados operan a escalas temporales suficientemente largas, de modo que a escalas pequeñas no se hsn logrado desarrollar y, por lo tanto, no logran ser capturados. En este sentido, los resultados sugieren que dichas interacciones no lineales emergen y se vuelven observables únicamente cuando el sistema es analizado a escalas temporales mayores.

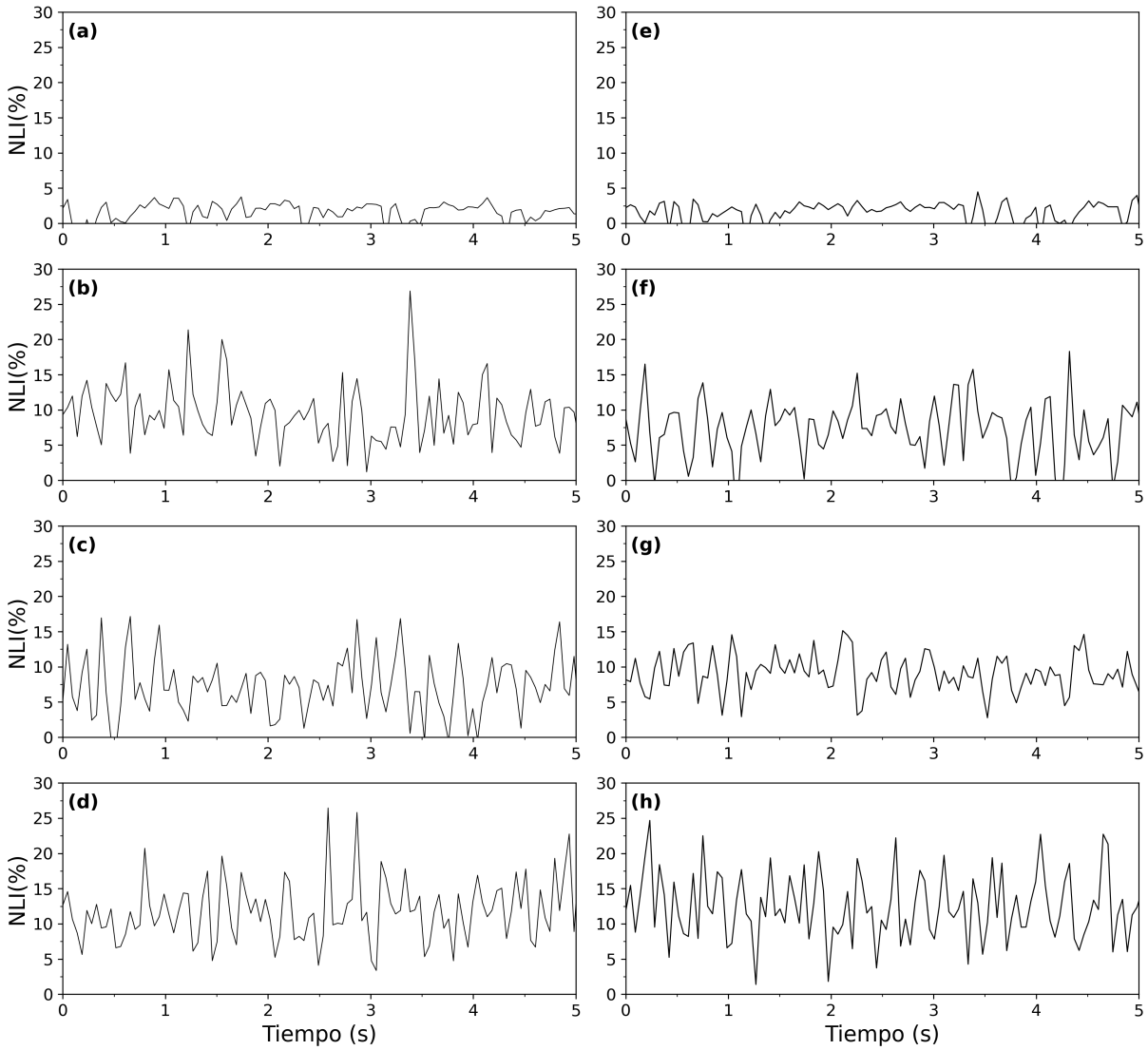


Figura 6.18: Índice de no linealidad de patrones de flujo bifásico: a) SW_1 , b) FF_1, c) WA_1, d) LS_1, e) SW_2, f) FF_2, g) WA_2 y h) LS_2 a una escala de 250 segundos.

La Tabla 6.8 resume los principales hallazgos del índice de no linealidad (NLI) para los diferentes patrones de flujo analizados para una escala de 25 s. Se observa que los patrones de flujo LS presentan los valores más altos y persistentes de NLI, lo que indica una complejidad no lineal más marcada, mientras que los flujos SW presentan los índices más pequeños casi nulos lo que sugiere un comportamiento predominantemente lineal. Para el flujo FF el índice NLI varía moderadamente y se ve afectado por el cambio en la inclinación de la tubería. Finalmente, el flujo WA se observa más picos y de mayor porcentaje de NLI al aumentar la velocidad del gas. En conjunto, esta métrica refuerza la capacidad

del análisis multiescala para revelar diferencias dinámicas sutiles entre patrones de flujo.

Tabla 6.8: Comparación del índice de no linealidad (NLI) para distintos patrones de flujo a diferentes escalas temporales.

Patrón	**Escala**	**% NLI**	**Nivel**	**Observación**
SW_1	25 s	0–10	Bajo–nulo	No linealidad débil e intermitente; comportamiento dominado por componentes lineales.
SW_2	250 s	2–6	Bajo	Persisten valores bajos de NLI; la dinámica permanece mayormente lineal.
FF_1	25 s	5–18	Moderado	Picos localizados de NLI asociados a reorganizaciones dinámicas transitorias.
FF_2	250 s	8–15	Moderado	No linealidad más persistente; menor intermitencia y mayor integración temporal.
WA_1	25 s	5–20	Moderado	Eventos dispersos de no linealidad; dependencia con la velocidad superficial del gas.
WA_2	250 s	10–18	Moderado	Incremento en la persistencia del NLI; efectos no lineales acumulativos.
LS_1	25 s	$\sim$31	Alta	No linealidad intensa con picos prolongados y repetidos.
LS_2	250 s	20–30	Alta	No linealidad sostenida y dominante; comportamiento estructuralmente no lineal.

6.4.6. Plano SVDEn vs NLI

Con el objetivo de analizar de manera conjunta la complejidad estructural y el grado de no linealidad presentes en las señales temporales, se introduce el plano definido por la entropía SVD y el índice de no linealidad. Este plano permite integrar en una sola representación dos métricas complementarias: la entropía SVD, que cuantifica la complejidad de la señal y el índice NLI, que evalúa la desviación significativa respecto al comportamiento lineal esperado mediante comparaciones con datos sustitutos. La evolución de los patrones en este plano para distintas escalas temporales proporciona información clave sobre la dependencia de los efectos no lineales con la escala de observación.

La Figura 6.19 muestra el plano SVDEn versus NLI para los distintos regímenes de flujo analizados, considerando las escalas temporales de 25 y 250 segundos. En cada subfigura, las líneas punteadas vertical y horizontal representan los valores medios globales de SVDEn y NLI, respectivamente, y se utilizan como referencia para identificar agrupamientos y transiciones dinámicas.

Para la escala de 25 segundos (Figura 6.19a), se observa una clara separación entre los regímenes tipo deslizamiento de líquido, caracterizados por valores bajos de SVDEn y NLI elevados, y los regímenes de flujo onduladoestratificado (WA), que presentan valores intermedios en ambas métricas. Por otro lado, los regímenes de flujo rápido (FF y SW) se concentran en la región de alta entropía SVD y bajo índice de no linealidad, lo que sugiere una dinámica dominada por componentes más aleatorias o cuasi-lineales a esta escala.

En contraste, la escala de 250 segundos (Figura 6.19b), se observa un incremento significativo del índice de no linealidad para los regímenes LS, WA y FF, alcanzando valores máximos de NLI, mientras que los regímenes de tipo SW permanecen con entropías SVD altas pero con niveles de no linealidad relativamente bajos. Este resultado sugiere que ciertos mecanismos no lineales de evolución lenta no se desarrollan completamente a escalas pequeñas y sólo se manifiestan de manera clara cuando se analizan escalas temporales mayores, reforzando la hipótesis de una dependencia multiescala de los efectos no lineales en el sistema bifásico.

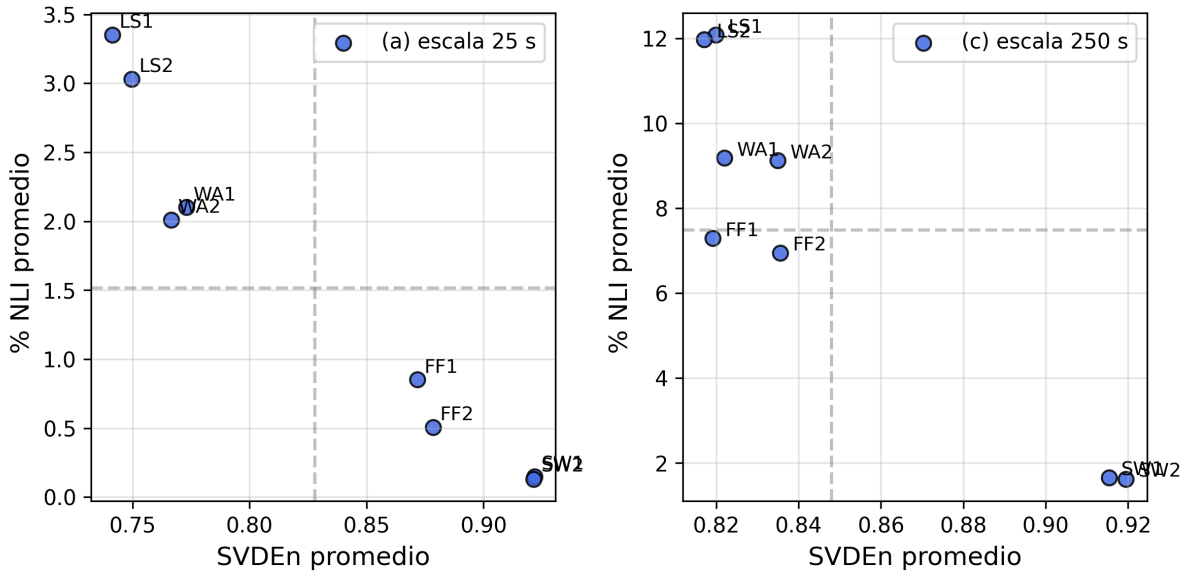


Figura 6.19: Plano SVDEn vs NLI a distintas escalas temporales: a) 25 s y b) 250 s.

En conjunto, el análisis en el plano SVDEn–NLI evidencia que la complejidad estructural y el grado de no linealidad no evolucionan de manera monótona con la escala temporal, sino que responden a mecanismos dinámicos con tiempos característicos distintos. Mientras que a escalas pequeñas las no linealidades se manifiestan principalmente en regímenes altamente organizados, y a escalas intermedias parecen atenuarse, a escalas grandes emergen con mayor intensidad, particularmente en los regímenes LS, WA y FF. Este comportamiento sugiere que los efectos no lineales involucrados son de naturaleza lenta y acumulativa, de modo que no logran desarrollarse plenamente en ventanas temporales cortas y sólo se capturan de manera robusta cuando se consideran escalas temporales suficientemente grandes. Estos resultados refuerzan la necesidad de un enfoque multiescala para la caracterización adecuada de la dinámica no lineal en sistemas bifásicos complejos.

6.5. Procesamiento de imágenes

Se realizó el análisis de no linealidad sobre la imagen seleccionada siguiendo un procedimento simlar al procesamiento de series. En la Figura 6.20 se muestra la imagen seleccionada para el análisis de no linealidad. La estructura observada presenta una morfología ramificada con apariencia dendrítica, característica de ciertos procesos de crecimiento cristalino. La imagen fue convertida a escala de grises con el fin de conservar únicamente la información estructural y eliminar la influencia del color. Posteriormente, se aplicó la descomposición en valores singulares para identificar los componentes principales de su matriz, a partir de los cuales se calculó la entropía normalizada. Esta medida, permitió cuantificar el grado de complejidad y desorden en la distribución de energía de la imagen, proporcionando un indicador del comportamiento de la estructura. Los valores obtenidos se emplearon en la estimación del índice de no linealidad, lo que permitió comparar la magnitud de las desviaciones respecto al comportamiento lineal.



Figura 6.20: Cristalización de Tiourea procesada.

6.5.1. Influencia de los valores singulares

La Figura 6.21 muestra la reconstrucción de la imagen procesada mediante descomposición en valores singulares. En este análisis, la imagen original presentó un total de $k = 1200$ valores singulares, a partir de los cuales se evaluó la reconstrucción considerando subconjuntos reducidos, con valores que varían entre 10 y 150. Para valores pequeños de k, como $k = 10$ ó $k = 30$, la imagen reconstruida conserva las estructuras dominantes del patrón, presentando una pérdida significativa de detalles finos. Conforme el número de valores singulares incluidos en la reconstrucción aumenta, la calidad de la imagen mejora de manera progresiva, reflejando una recuperación gradual de las texturas y contornos. Para $k = 150$, la imagen reconstruida resulta prácticamente indistinguible de la imagen original, lo que evidencia que una fracción reducida de los valores singulares es suficiente para capturar la información más relevante del sistema. De esta manera, es posible identificar la contribución relativa de cada componente singular a la forma y textura de la imagen, distinguiendo entre la información estructural dominante y el detalle fino o el ruido asociado a componentes de menor energía.

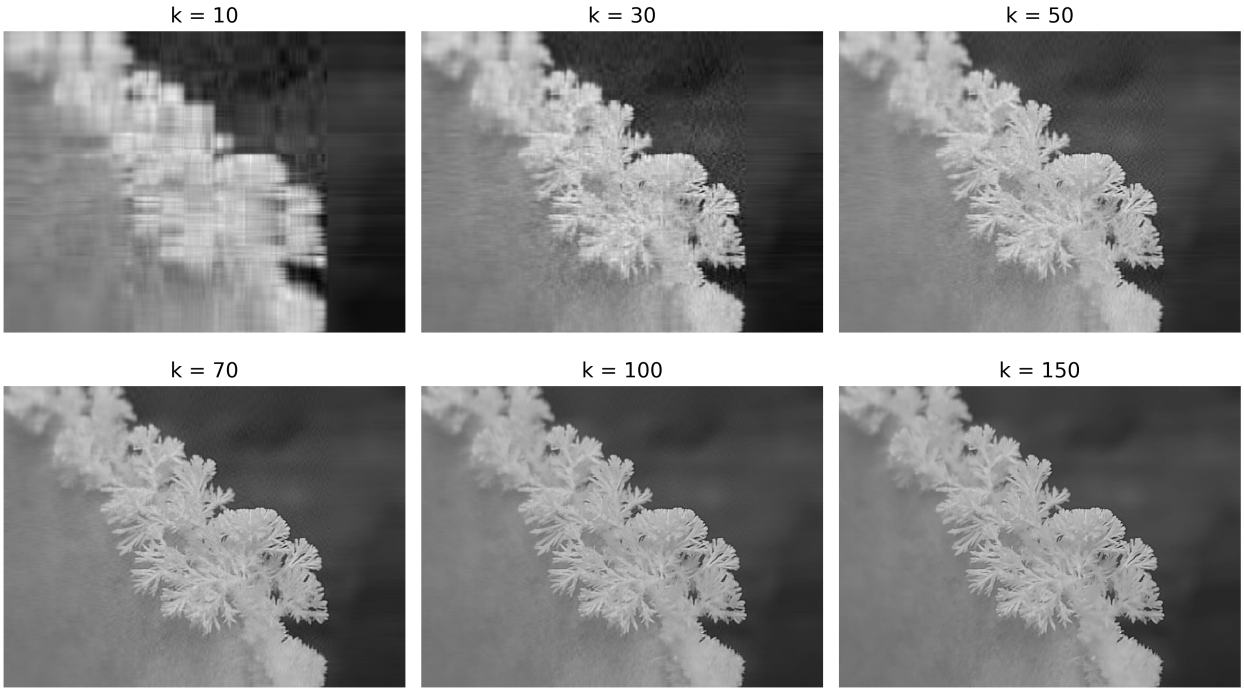


Figura 6.21: Reconstrucción de la imagen procesada usando valores singulares.

Con el fin de evaluar el número óptimo de valores singulares necesarios para la reconstrucción de la imagen, la Figura 6.22 muestra el porcentaje acumulado de información en función del número de valores singulares. La curva presenta un incremento pronunciado en los primeros valores singulares, lo que indica que estos concentran la mayor parte de la información (energía) de la imagen original. La línea azul señala que se requieren 196 valores singulares para alcanzar el 95 % de acumulación de información. A partir de este umbral, la pendiente de la curva tiende a estabilizarse, lo que sugiere que los valores singulares restantes aportan una contribución marginal a la reconstrucción de la imagen.

Este comportamiento confirma que la mayor parte de la información estructural de la imagen se concentra en los primeros valores singulares. En este caso, la reconstrucción con los primeros 196 valores singulares equivalente al 16 % de los valores singulares fue suficiente para conservar más del 90 % de la información original, lo que evidencia la alta redundancia y la eficiencia de la SVD para representar la estructura esencial de la imagen con un número reducido de componentes.

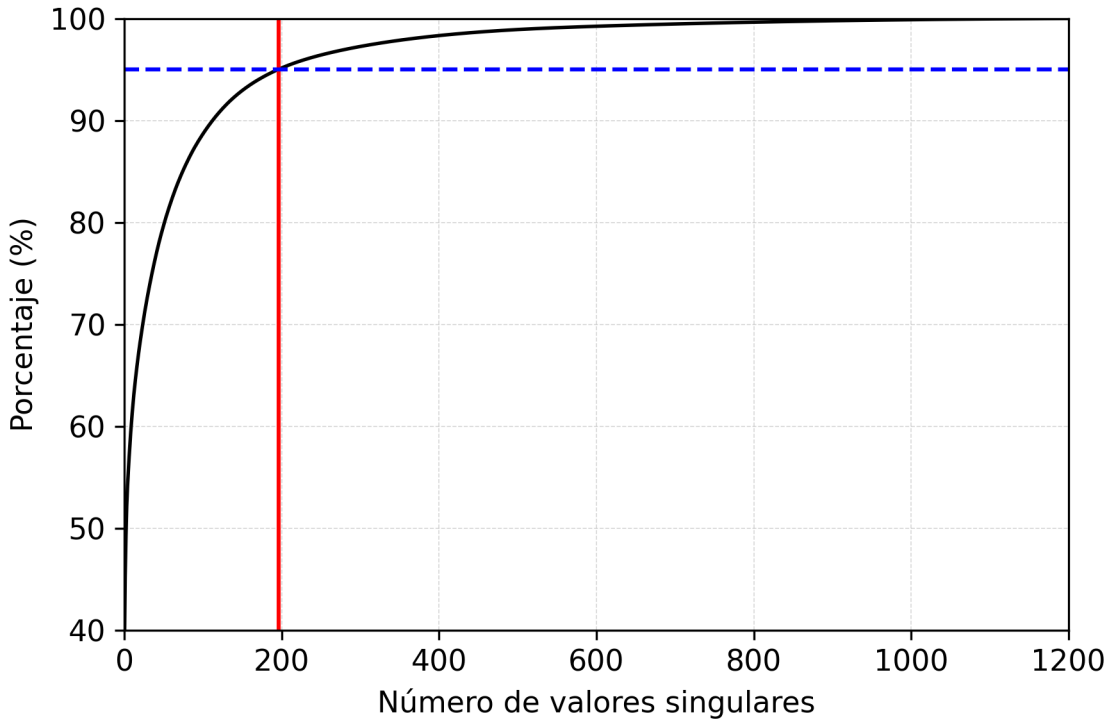


Figura 6.22: Porcentaje de acumulación de información de los valores singulares de la SVD.

La Figura 6.23 presenta la comparación entre la imagen original y la reconstrucción obtenida utilizando únicamente el 16 % de los valores singulares. Se observa que, a pesar de emplear una fracción reducida de componentes, la imagen reconstruida conserva con alta fidelidad las estructuras principales y las texturas características del patrón cristalino de tiourea. Las diferencias visuales entre ambas imágenes son mínimas y se limitan principalmente a ligeras variaciones en el contraste y en los detalles de alta frecuencia. Este resultado confirma que la mayor parte de la información relevante de la imagen se encuentra concentrada en los primeros valores singulares, mientras que los valores restantes aportan contribuciones marginales a la reconstrucción.

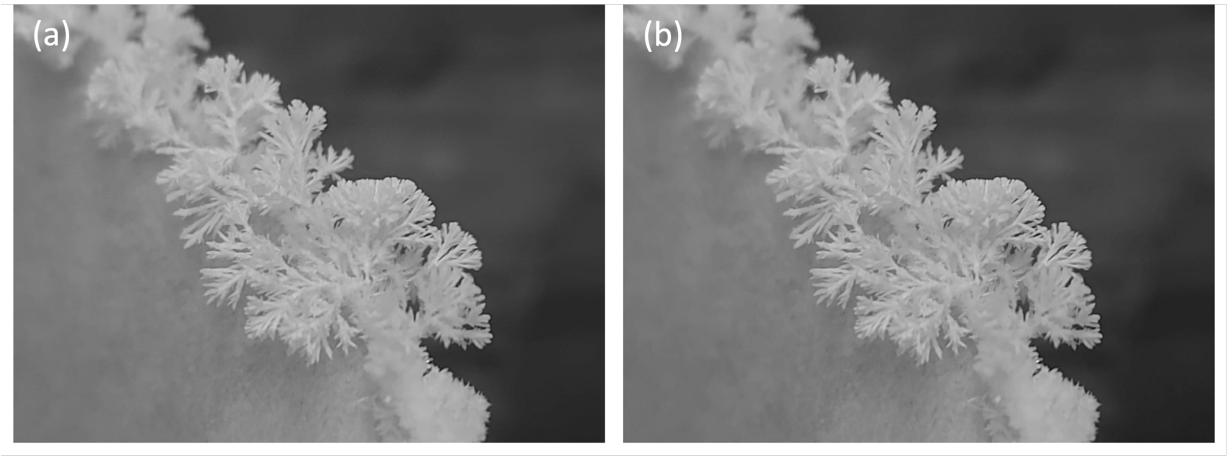


Figura 6.23: Reconstrucción SVD: con a) 16 % de valores singulares y b) original.

Este comportamiento respalda el uso de métricas basadas en la distribución de los valores singulares, como la entropía SVD, para caracterizar la complejidad estructural de la imagen.

6.5.2. Entropía SVD

La Figura 6.24 muestra la relación entre la SVDEn y el porcentaje acumulado de información de la imagen en función del número de valores singulares k. Cada punto representa una reconstrucción de la imagen con un número específico de valores singulares. Se observa una tendencia creciente de la entropía SVDEn conforme aumenta el porcentaje de información acumulada. Para valores bajos de k la entropía presenta valores reducidos,

lo que indica una estructura altamente ordenada y con baja complejidad. A medida que se incorporan más componentes la entropía aumenta gradualmente, reflejando una mayor diversidad de patrones y un incremento en la complejidad estructural de la imagen.

Finalmente, para valores elevados de k mayores a 300 la SVDEn no cambia significativamente, más bien, crece lento hasta alcanzar el 100 % de la infromación total del sistema. Esto sugiere que la incorporación de componentes adicionales no aporta información significativa nueva, sino principalmente ruido o redundancia. Este comportamiento confirma que la entropía SVDEn es sensible al contenido informativo de la imagen y puede emplearse como un indicador cuantitativo de la complejidad presente en la estructura analizada.

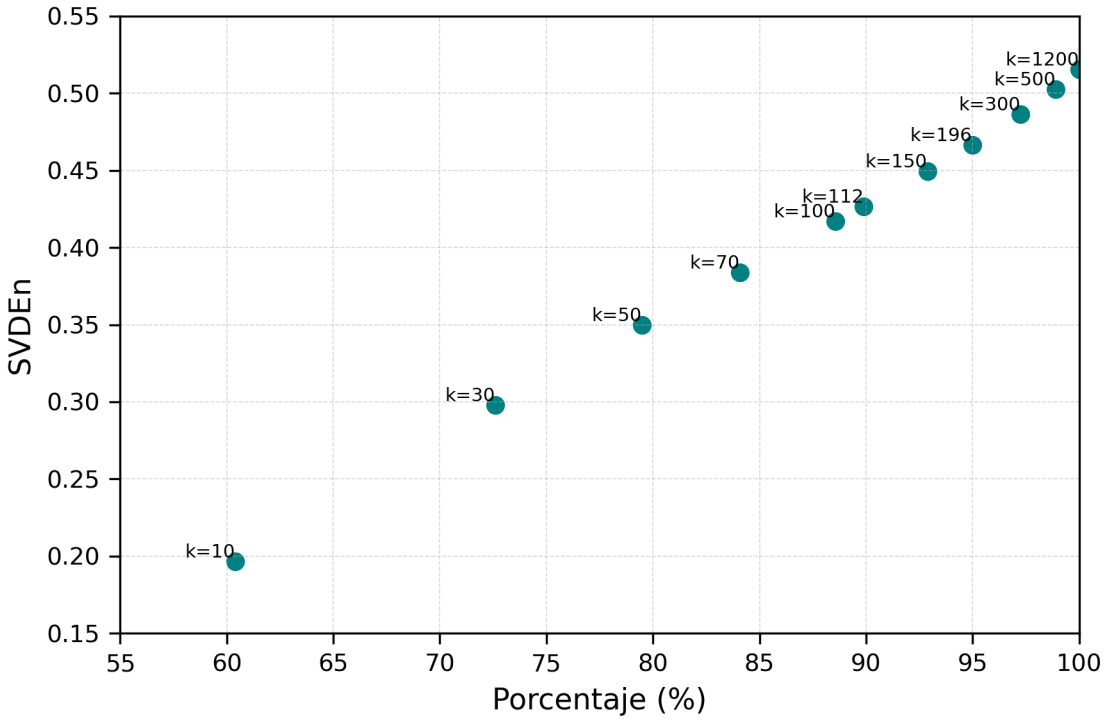


Figura 6.24: Entropía SVD de la imagen procesada con diferente N° de valores singulares.

Con el fin de evaluar la significancia estadística de la entropía SVD obtenida para la imagen original, se generó un conjunto de datos sustitutos mediante aleatorización de la fase. La Figura 6.25 presenta el histograma de los valores obtenidos de la SVDEn calculados a partir de dicho conjunto de datos sustitutos. En el eje horizontal se representan los valores de entropía, mientras que en el eje vertical se muestra la frecuencia de aparición de dichos valores dentro del conjunto de realizaciones sustitutas.

La distribución observada corresponde a la variabilidad estadística esperada bajo la hipótesis nula de linealidad. Las líneas verticales punteadas en color azul delimitan el intervalo de confianza (IC) del 90 %, mientras que la línea discontinua en color rojo indica el valor de la entropía calculada para la imagen original igual a 0.515. Se observa que este valor se encuentra por debajo del límite inferior del intervalo de confianza, lo que indica que la entropía de la imagen original es significativamente menor que la obtenida a partir de los datos sustitutos generados por aleatorización de fase. Este resultado sugiere que la organización estructural de la imagen no puede ser explicada únicamente por un comportamiento lineal, sino que presenta un mayor grado de orden y coherencia espacial que el esperado bajo la hipótesis de linealidad. Por lo tanto, la imagen analizada exhibe una componente no lineal estadísticamente significativa, evidenciada por la separación del valor de entropía experimental respecto al intervalo de confianza definido por los datos sustitutos.

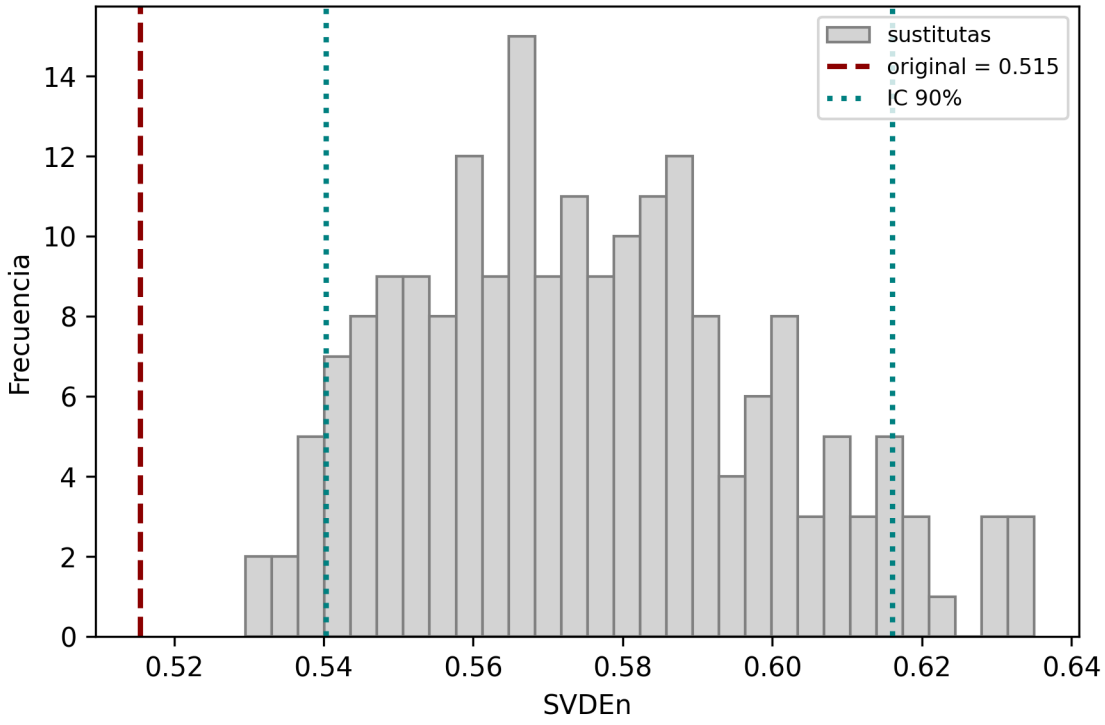


Figura 6.25: Entropía SVD de la imagen procesada con aleatorización de fases.

Este análisis valida el uso de la entropía SVD como una medida sensible para detectar desviaciones del comportamiento lineal en la estructura espacial de imágenes asociadas a patrones de flujo.

6.5.3. SVDEn original vs aleatorización de fases

La Figura 6.26 muestra la diferencia entre la imagen original y su imagen sustituta, generada aleatorizando la fase según se describió previamente. Mientras que la imagen original presenta una estructura cristalina claramente definida, principalmente bajos ordenados de retardos, y contornos de alta resolución que reflejan la coherencia morfológica del sistema, la imagen sustituta muestra una textura difusa y homogénea sin ninguna de las formas y los bordes característicos de la imagen original. Dicha disimilitud ilustra claramente el efecto de la aleatorización de fase: mientras que el espectro de amplitud se conserva, todas las correlaciones espaciales se eliminan y la estructura pierde toda su organización interna, convirtiéndose efectivamente en una distribución aleatoria en apariencia.

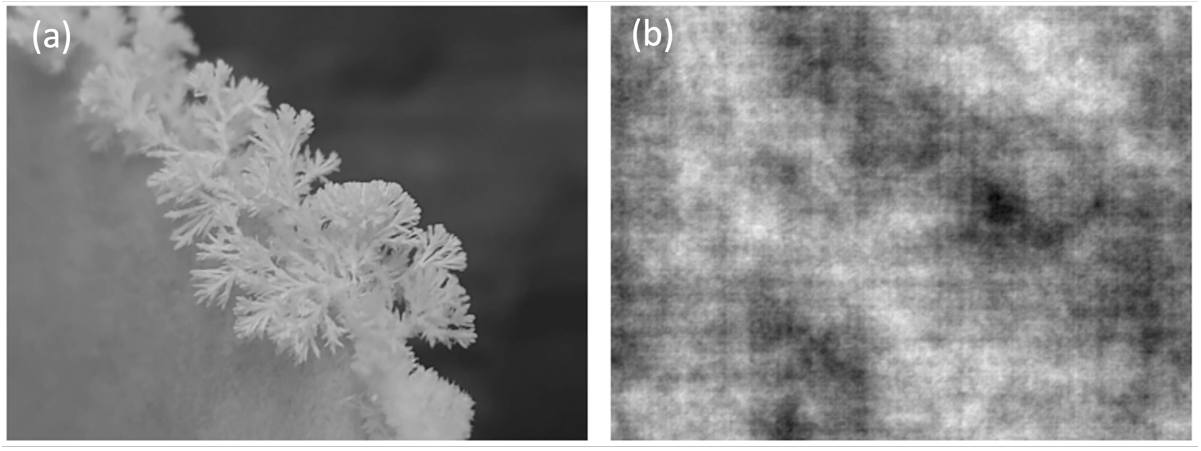


Figura 6.26: a) Imagen original y b) Imagen con aleatorización de fase.

La Figura 6.27 muestra la variación de la entropía SVD en función del número de valores singulares k considerados en la reconstrucción de la imagen. Se presentan dos curvas: una correspondiente a la imagen original (línea azul) y otra asociada a la imagen sustituta generada mediante aleatorización de la fase (línea naranja). En ambos casos, la entropía SVDEn aumenta de manera monótona conforme se incrementa el número de componentes k, lo que refleja la incorporación progresiva de información y de detalle estructural en la reconstrucción. No obstante, se observa que la curva correspondiente a la imagen con fase aleatorizada presenta valores de entropía sistemáticamente mayores que los de la imagen original, particularmente para valores elevados de k (mayores a 300). Esta dife-

rencia persistente indica que la imagen original conserva una organización estructural más ordenada, mientras que la aleatorización de la fase introduce una mayor dispersión de la energía entre los modos singulares, incrementando artificialmente la complejidad medida por la entropía.

Esta diferencia indica que la aleatorización de la fase destruye las correlaciones inherentes a la estructura original, genera una imagen más desordenada, por lo tanto un aumento de la entropía. De esta manera la información de la imagen se distribuye de manera más uniforme entre los valores singulares, es decir, ya no hay valores singulares dominantes que representen estructuras claras o patrones; todos aportan casi por igual. Esta distribución uniforme implica mayor entropía, porque el sistema se volvió más "aleatorio" o desordenado. En contraste, la imagen original conserva un grado de orden y coherencia estructural que se traduce en valores de entropía menores. Este comportamiento es característico de sistemas con no linealidades presentes, donde las dependencias entre componentes no pueden describirse mediante una combinación lineal simple.

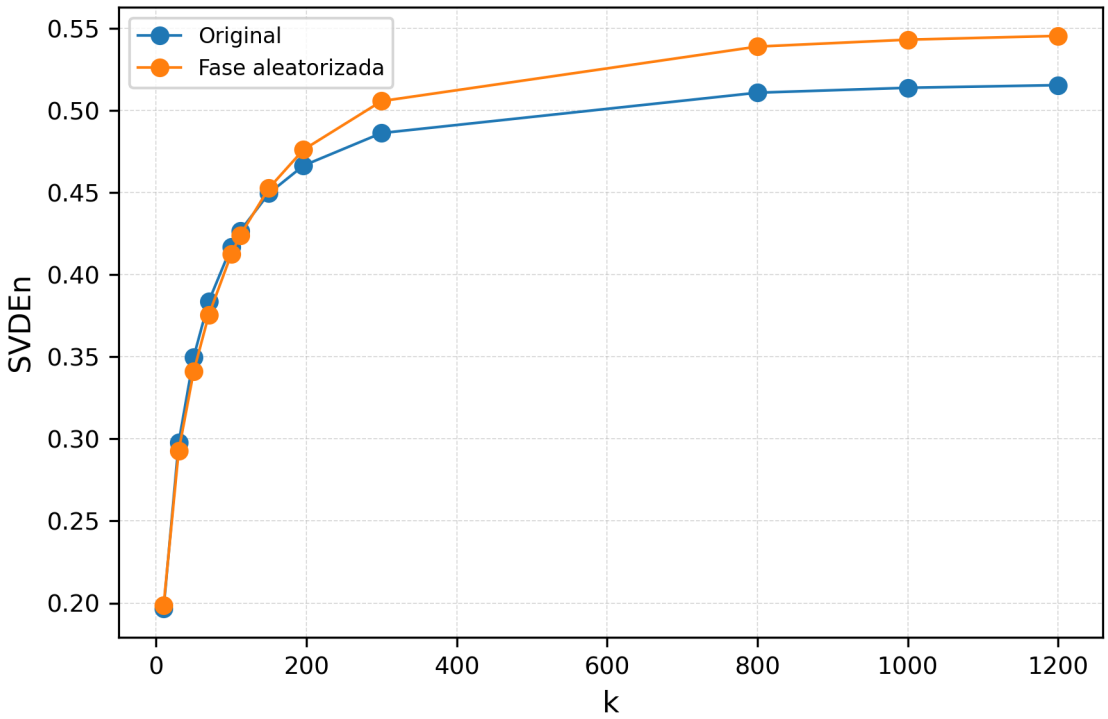


Figura 6.27: Entropía SVD para la imagen aleatorizada de la imagen procesada.

7. Discusiones

El análisis conjunto de la entropía SVD, el índice de no linealidad y el exponente de Hurst proporciona una caracterización integral de la dinámica temporal de los regímenes de flujo bifásico analizados. Estas métricas describen dimensiones complementarias del sistema: la SVDEn cuantifica la complejidad estructural asociada a la distribución de energía entre modos dominantes; el NLI evalúa el grado de desviación respecto al comportamiento lineal esperado, a partir de comparaciones con datos sustitutos generados mediante aleatorización de fase y bandas de confianza; mientras que el exponente de Hurst permite identificar la presencia de memoria temporal y persistencia en las fluctuaciones del sistema. En conjunto, este enfoque multivariado ofrece una visión más completa de la organización dinámica del flujo que la obtenida mediante un único descriptor.

7.1. Series temporales de flujo bifásico

En el caso de las señales temporales, valores elevados de SVDEn indican la coexistencia de múltiples componentes activos y una mayor dispersión de la energía, característica de sistemas complejos dominados por interacciones múltiples o por la superposición de procesos lineales y ruido. Por el contrario, valores bajos de entropía corresponden a dinámicas más organizadas, donde la energía se concentra en un número reducido de modos dominantes, típicamente asociadas a comportamientos deterministas o cuasi periódicos. Sin embargo, esta medida por sí sola no permite discriminar la naturaleza lineal o no lineal del sistema. El índice NLI resulta clave en este punto, ya que cuantifica explícitamente la presencia de dependencias no lineales: incluso señales con baja entropía pueden exhibir valores elevados de NLI cuando contienen estructuras no armónicas, saturaciones o mecanismos de

bifurcación que no pueden ser explicados por modelos lineales.

La comparación sistemática entre la entropía de las señales originales y la obtenida tras la aleatorización de fase confirma que la información estructural relevante del flujo no reside únicamente en el contenido espectral, sino en las relaciones de fase que vinculan las componentes de frecuencia. La destrucción de esta coherencia de fase modifica de manera sustantiva la entropía SVD, evidenciando que la complejidad observada surge de dependencias temporales genuinas y no de un simple reparto de energía por bandas espectrales. Este resultado respalda la pertinencia del uso de datos sustitutos como referencia para evaluar la no linealidad en sistemas experimentales complejos.

Esta distinción se manifiesta claramente al comparar los distintos regímenes de flujo. El patrón LS presenta valores bajos de entropía, coherentes con su dinámica más regular, pero exhibe un NLI apreciable, lo que revela la presencia de una estructura ordenada con componentes no lineales subyacentes. En contraste, el régimen SW muestra una entropía elevada asociada a la activación simultánea de múltiples modos, aunque su comportamiento puede aproximarse al de un sistema lineal, ya que su complejidad proviene principalmente de la superposición de fenómenos lineales y ruido. Estos resultados ponen de manifiesto que complejidad y no linealidad no son conceptos equivalentes: una señal puede ser altamente compleja sin ser no lineal, o bien no lineal sin presentar un alto grado de desorden, dependiendo del origen físico de sus correlaciones internas.

El análisis multiescala confirma que la dinámica de los regímenes bifásicos es intrínsecamente dependiente de la escala temporal y que las métricas SVDEn y NLI capturan aspectos distintos de esta organización. La entropía SVD refleja la diversidad de patrones y su evolución con la escala y las condiciones operativas: en el régimen SW se observa una tendencia hacia comportamientos más ordenados a horizontes temporales largos, mientras que en los regímenes WA, LS y FF la entropía aumenta de manera casi monótona con la escala. A una escala fija, el incremento de la velocidad del gas tiende a elevar la entropía; en contraste, la no linealidad se concentra en regiones específicas del espacio de parámetros y alcanza una meseta al ampliar la ventana temporal, lo que sugiere la integración progresiva de las fluctuaciones locales.

El análisis de la relación entre SVDEn y NLI, particularmente en escalas cortas donde la correlación de Spearman y Pearson entre ambas métricas es cercana a cero, confirma que una mayor variabilidad en la SVDEn no implica necesariamente una mayor no linealidad. Este resultado justifica el uso conjunto de ambas medidas y permite una discriminación más robusta de los distintos regímenes de flujo. El mapeo bidimensional SVDEn–NLI da lugar a agrupamientos consistentes con el comportamiento físico de cada régimen, lo que abre la posibilidad de utilizar estas métricas como herramientas de clasificación y diagnóstico. Desde una perspectiva operativa, los resultados sugieren la conveniencia de un esquema de monitoreo dual y multiescala: la entropía SVDEn puede emplearse para detectar cambios globales en la estructura del flujo asociados a variaciones de velocidad o inclinación, mientras que el índice NLI resulta especialmente sensible a transiciones dinámicas o eventos no lineales que interrumpen la dinámica de base.

El análisis de rango reescalado complementa esta caracterización al mostrar que el aumento de la velocidad del gas conduce a un incremento del exponente de Hurst, indicando una mayor persistencia temporal. Este comportamiento sugiere que condiciones operativas más energéticas favorecen la formación de estructuras coherentes de mayor duración, como ráfagas u ondas persistentes, mientras que una mayor inclinación de la tubería tiende a estabilizar la dinámica temporal. En conjunto, los resultados obtenidos a partir de SVDEn, NLI y Hurst confirman que la complejidad, la no linealidad y la memoria temporal constituyen dimensiones complementarias de la dinámica del flujo bifásico, y permiten explicar de manera coherente la influencia de las condiciones operativas sobre la organización temporal del sistema.

Finalmente, el análisis a escalas temporales de 125 y 250 segundos muestra que las señales conservan valores elevados de entropía SVD, lo que indica que la no linealidad es una propiedad intrínseca del sistema y no un artefacto asociado a fluctuaciones locales. El aumento de la escala temporal conduce a una reducción progresiva de la variabilidad, evidenciando un proceso de auto-promediado dinámico mediante el cual las fluctuaciones rápidas se integran en una estructura global más estable. A estas escalas, se identifica con mayor claridad una jerarquía de complejidad entre las señales, distinguiendo aquellas con un comportamiento caótico más robusto de aquellas con dinámicas más organizadas

o cercanas a regímenes estables. Este resultado refuerza la idea de que ciertos mecanismos no lineales requieren horizontes temporales amplios para desarrollarse plenamente y ser capturados de forma efectiva por las métricas analizadas.

7.2. Análisis de imágenes

La extensión del enfoque basado en entropía SVD y en el índice de no linealidad al dominio espacial permitió corroborar la capacidad del método para detectar y cuantificar la no linealidad estructural presente en la imagen analizada. Al aplicar la descomposición en valores singulares a la imagen, se observó que la entropía SVDEn aumenta progresivamente conforme se incrementa el número de valores singulares k utilizados en la reconstrucción. Este comportamiento refleja la incorporación gradual de información estructural más detallada al considerar componentes de menor energía. No obstante, a partir de un cierto umbral, el crecimiento de la entropía tiende a estabilizarse, lo que indica que los valores singulares de menor magnitud aportan principalmente ruido o información redundante.

La aleatorización de fase produce una modificación sustancial en la organización espacial de las imágenes. Las imágenes sustitutas pierden la coherencia estructural observada en los datos originales y presentan una textura más difusa, acompañada de un incremento en la entropía SVD. Este aumento se asocia a una redistribución más uniforme de la energía entre los valores singulares, resultado de la destrucción de las correlaciones espaciales originales. En contraste, la imagen original conserva valores de entropía más bajos y muestran patrones espaciales organizados, lo que evidencia que la información relevante no está contenida únicamente en la magnitud espectral, sino fundamentalmente en la organización de las fases y las correlaciones espaciales.

La diferencia sistemática entre las entropías de las imágenes originales y aquellas con fase aleatorizada constituye una evidencia clara de la presencia de dependencias no lineales en la organización espacial. En este contexto, el análisis conjunto de la entropía SVDEn y el índice de no linealidad permite describir, desde perspectivas complementarias, la transición orden–desorden en la estructura de las imágenes: mientras la entropía captura el grado global de complejidad y dispersión de la información, el NLI cuantifica la desviación

respecto a un comportamiento lineal de referencia, reforzando la interpretación de las diferencias estructurales observadas.

En conjunto, la combinación de la entropía SVDEn y el índice de no linealidad proporciona una caracterización coherente y consistente de la complejidad estructural de las imágenes. Estas métricas permiten analizar de manera complementaria la organización espacial y las dependencias no lineales presentes, estableciendo una base sólida para el desarrollo de metodologías avanzadas de análisis multiescala aplicables al estudio de sistemas complejos representados en forma de imágenes.

8. Conclusiones

La entropía SVD mostró ser un indicador robusto para caracterizar la complejidad estructural tanto en señales temporales como en imágenes asociadas a distintos regímenes bifásicos. La comparación entre los datos originales y sus correspondientes sustitutos con fase aleatorizada mostró que la información estructural relevante no reside en las componentes espectrales de forma aislada, sino en las relaciones de fase que gobiernan la organización temporal y espacial del sistema, evidenciando la presencia de dependencias no lineales intrínsecas.

El análisis con datos sustitutos, mediante bandas de confianza, permitió detectar no linealidades que no son evidentes en el dominio temporal directo. Los resultados indican que la no linealidad se manifiesta de forma intermitente y principalmente a escalas temporales largas, mientras que a escalas cortas su contribución es despreciable. En términos promedio, los regímenes LS y WA presentaron los mayores valores del índice de no linealidad, en contraste con SW y FF, cuyo comportamiento puede aproximarse a uno esencialmente lineal bajo ciertas condiciones operativas.

La entropía SVD mostró una marcada dependencia con la escala temporal, confirmando el carácter no estacionario de las señales. En particular, los regímenes WA y LS mantuvieron niveles elevados de entropía en un amplio rango de escalas, mientras que SW exhibió una tendencia hacia dinámicas más ordenadas a horizontes temporales largos. El incremento de la velocidad del gas favoreció el aumento de la entropía, especialmente a escalas grandes, mientras que la inclinación de la tubería tuvo una influencia marginal.

La baja correlación observada entre la entropía SVD y el índice de no linealidad confirma que complejidad y no linealidad describen propiedades distintas del sistema. Mientras la entropía caracteriza la estructura global y su dependencia con la escala, el índice de no

linealidad identifica episodios no lineales localizados que interrumpen la dinámica de base, justificando el uso complementario de ambas métricas.

En el dominio espacial, el análisis de imágenes mostró que la entropía SVDEn aumenta al incorporar más valores singulares en la reconstrucción hasta alcanzar un régimen de saturación, indicando que la información estructural se concentra en un número limitado de componentes dominantes. La comparación con imágenes con fase aleatorizada evidenció un aumento significativo de la entropía y la pérdida de coherencia espacial, confirmando que la organización de fase es un elemento clave de la estructura no lineal.

En síntesis, la combinación de la entropía SVD y el índice de no linealidad proporciona una caracterización multidimensional y coherente de sistemas complejos, permitiendo distinguir entre complejidad estructural y no linealidad dinámica. Este enfoque multiescala constituye una herramienta sólida para el análisis, diagnóstico y monitoreo de procesos complejos representados en dominios temporales y espaciales.

Bibliografía

[1] Alexander, R., Campani, G., Dinh, S., & Lima, F. V. (2020). Challenges and opportunities on nonlinear state estimation of chemical and biochemical processes. Processes, 8(11), 1462.

[2] Al-Ruhaimani, F., Pereyra, E., Sarica, C., Al-Safran, E., Chung, S., & Torres, C. (2018). A study on the effect of high liquid viscosity on slug flow characteristics in upward vertical flow. Journal of Petroleum Science and Engineering, 161, 128-146.

[3] Alvarez-Ramirez, J., Cisneros, M., Ibarra-Valdez, C., & Soriano, A. (2002). Multifractal Hurst analysis of crude oil prices. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 313(3-4), 651-670.

[4] Alvarez-Ramirez, J., Alvarez, J., Rodriguez, E., & Fernandez-Anaya, G. (2008). Time-varying Hurst exponent for US stock markets. Physica A: statistical mechanics and its applications, 387(24), 6159-6169.

[5] An, K. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge didistribuzione. Giorn Dell'inst Ital Degli Att, 4, 89-91.

[6] Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. The annals of mathematical statistics, 193-212

[7] Andrews, H., & Patterson, C. L. I. I. I. (2003). Singular value decomposition (SVD) image coding. IEEE transactions on Communications, 24(4), 425-432.

[8] Bandt, C., & Pompe, B. (2002). Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. Physical review letters, 88(17), 174102.

[9] Blasques, F., Koopman, S. J.,& Lucas, A. (2020). Nonlinear autoregressive models with optimality properties. Econometric Reviews, 39(6), 559-578.

[10] Box, G. E., & Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 26(2), 211-243.

[11] Brunner, M. I., Bárdossy, A., & Furrer, R. (2019). Stochastic simulation of streamflow time series using phase randomization. Hydrology and Earth System Sciences, 23(8), 3175-3187.

[12] Broock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D., & LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. Econometric reviews, 15(3), 197-235.

[13] Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2009). Time series: theory and methods. Springer science & business media.

[14] Caraiani, P., & Lazarec, A. V. (2021). Using entropy to evaluate the impact of monetary policy shocks on financial networks. Entropy, 23(11), 1465.

[15] Cheng, X., Wang, P., & She, C. (2020). Biometric identification method for heart sound based on multimodal multiscale dispersion entropy. Entropy, 22(2), 238.

[16] Cheng, C., Sa-Ngasoongsong, A., Beyca, O., Le, T., Yang, H., Kong, Z., & Bukkapatnam, S. T. (2015). Time series forecasting for nonlinear and non-stationary processes: a review and comparative study. Iie Transactions, 47(10), 1053-1071.

[17] Chellappa, S., Feng, L., & Benner, P. (2024). Accurate error estimation for model reduction of nonlinear dynamical systems via data-enhanced error closure. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 420, 116712.

[18] Costa, M., Goldberger, A. L., & Peng, C. K. (2002). Multiscale entropy analysis of complex physiologic time series. Physical review letters, 89(6), 068102.

[19] Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets. Society for industrial and applied mathematics.

[20] Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. Journal of the American statistical association, 74(366a), 427-431.

[21] Dobbelaere, M. R., Plehiers, P. P., Van de Vijver, R., Stevens, C. V., & Van Geem, K. M. (2021). Machine learning in chemical engineering: strengths, weaknesses, opportunities, and threats. Engineering, 7(9), 1201-1211.

[22] Durán, O., Salas, C., & Peña, A. (2025). Resilience Assessment in a Seawater Pumping Station Using Ordinal Patterns and Permutation Entropy Approach. Journal of Marine Science and Engineering, 13(2), 261.

[23] Eckart, C., & Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. Psychometrika, 1(3), 211-218.

[24] Efron, B. (1992). Bootstrap methods: another look at the jackknife. In Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution (pp. 569-593). New York, NY: Springer New York.

[25] Epstein, I. R., & Pojman, J. A. (1998). An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos. Oxford university press.

[26] Fatima, S. S. W., & Rahimi, A. (2024). A review of time-series forecasting algorithms for industrial manufacturing systems. Machines, 12(6), 380.

[27] Fulcher, B. D., Little, M. A., & Jones, N. S. (2013). Highly comparative time-series analysis: the empirical structure of time series and their methods. Journal of the Royal Society Interface, 10(83), 20130048.

[28] Gnanadesikan, R., & Wilk, M. B. (1968). Probability plotting methods for the analysis of data. Biometrika, 55(1), 1-17.

[29] Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix computations. JHU press.

[30] Granger, C. W., & Teräsvirta, T. (1993). Modelling nonlinear economic relationships. oxford university Press.

[31] Hamilton, J. D. (2020). Time series analysis. Princeton university press.

[32] Hamed, K. H., & Rao, A. R. (1998). A modified Mann-Kendall trend test for autocorrelated data. Journal of hydrology, 204(1-4), 182-196.

[33] Heathcote, A., & Elliott, D. (2016). Nonlinear dynamical analysis of noisy time series. In Nonlinear dynamical systems analysis for the behavioral sciences using real data (pp. 117-148). CRC Press.

[34] Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. Transactions of the American society of civil engineers, 116(1), 770-799.

[35] Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. Economics letters, 6(3), 255-259.

[36] Kantz, H., & Schreiber, T. (1945). Nonlinear Time Series Analysis. American history, 1861(1900).

[37] Keenan, D. M. (1985). A Tukey nonadditivity-type test for time series nonlinearity. Biometrika, 72(1), 39-44.

[38] Komorník, J., Komorníková, M., Mesiar, R., Szökeová, D., & Szolgay, J. (2006). Comparison of forecasting performance of nonlinear models of hydrological time series. Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C, 31(18), 1127-1145.

[39] Lancaster, G., Iatsenko, D., Pidde, A., Ticcinelli, V., & Stefanovska, A. (2018). Surrogate data for hypothesis testing of physical systems. Physics Reports, 748, 1-60.

[40] Laut, I., & Räth, C. (2016). Surrogate-assisted network analysis of nonlinear time series. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 26(10).

[41] Luyben, W. L. (1989). Process modeling, simulation and control for chemical engineers. McGraw-Hill Higher Education.

[42] Mallat, S. G. (1989). Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of L2(R). Transactions of the American mathematical society, 315(1), 69-87.

[43] Mandelbrot, B. T. (1965). Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi-application a la loi climatologique de he Hurst. Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances del Academie des Sciences, 260(12), 3274-3277.

[44] Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1969). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. Water resources research, 5(5), 967-988.

[45] Marin-Lopez, A., Martinez-Cadena, J. A., Soto-Cortes, G., Puebla, H., & Alvarez-Ramirez, J. (2025). Non-linear Analysis of Two-Phase Flow Fluctuation by Means of SVD Entropy Surrogate Data Analysis. Fluctuation and Noise Letters, 24(4), 2550035-295.

[46] Marlin, T. E., & Marlin, T. E. (1995). Process control: designing processes and control systems for dynamic performance (Vol. 2). New York: McGraw-Hill.

[47] Meraz, M., Rodriguez, E., Femat, R., Echeverria, J. C., & Alvarez-Ramirez, J. (2015). Statistical persistence of air pollutants (O3, SO2, NO2 and PM10) in Mexico City. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 427, 202-217.

[48] Moguel-Castañeda, J. G., Rocha-Lara, C. E., Ramirez-Castelan, C. E., Soto-Cortes, G., Hernandez-Martinez, E., & Puebla, H. (2021). Two-phase flow-patterns identification in oil/gas pipelines based on fractal analysis. The Canadian Journal of Chemical Engineering, 99(4), 874-883.

[49] Morin, E. (1992). From the concept of system to the paradigm of complexity. Journal of social and evolutionary systems, 15(4), 371-385.

[50] Muñoz-Hernández, E. J., Ruiz-Sánchez, Á., Palacios-Beas, E. G., Reyes-Pérez, M., Urbano-Reyes, G., & Juárez-Tapia, J. C. (2023). Disolución de plata en relaves: evaluación del sistema Tiourea-Oxalato. Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI, 11, 156-160.

[51] Oppenheim, A. V. (1999). Discrete-time signal processing. Pearson Education India.

[52] Ozaki, T. (1985). 2 Non-linear time series models and dynamical systems. Handbook of statistics, 5, 25-83.

[53] Pearson, K. (1895). VII. Note on regression and inheritance in the case of two parents. proceedings of the royal society of London, 58(347-352), 240-242.

[54] Pincus, S. M. (1991). Approximate entropy as a measure of system complexity. Proceedings of the national academy of sciences, 88(6), 2297-2301.

[55] Ramsey, J. B. (1969). Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 31(2), 350-371.

[56] Richman, J. S., & Moorman, J. R. (2000). Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. American journal of physiology-heart and circulatory physiology, 278(6), H2039-H2049.

[57] Sabatini, A. M. (2000). Analysis of postural sway using entropy measures of signal complexity. Medical and Biological Engineering and Computing, 38, 617-624.

[58] Sanchez-Ortiz, W., Andrade-Gómez, C., Hernandez-Martinez, E., & Puebla, H. (2015). Multifractal Hurst analysis for identification of corrosion type in AISI 304 stainless steel. International Journal of Electrochemical Science, 10(2), 1054-1064.

[59] Schreiber, T. (2000). Measuring information transfer. Physical review letters, 85(2), 461.

[60] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. The Bell system technical journal, 27(3), 379-423.

[61] Schreiber, T., & Schmitz, A. (2000). Surrogate time series. Physica D: Nonlinear Phenomena, 142(3-4), 346-382.

[62] Schreiber, K., Modest, H. I., & Räth, C. (2018). Phase walk analysis of leptokurtic time series. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 28(6).

[63] Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). Biometrika, 52(3-4), 591-611.

[64] Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. Journal of Econometrics.

[65] Soedarmo, A., Soto-Cortes, G., Pereyra, E., Karami, H., & Sarica, C. (2018). Analogous behavior of pseudo-slug and churn flows in high viscosity liquid system and upward inclined pipes. International Journal of Multiphase Flow, 103, 61-77.

[66] Spearman, C. (1961). The proof and measurement of association between two things.

[67] Tong, H. (1990). Non-linear time series: a dynamical system approach. Oxford university press.

[68] Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B., & Farmer, J. D. (1992). Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. Physica D: Nonlinear Phenomena, 58(1-4), 77-94.

[69] Tsay, R. S. (1986). Nonlinearity tests for time series. Biometrika, 73(2), 461-466.

[70] Wang, Z. (1984). Fast algorithms for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 32(4), 803-816.

[71] Wang, Y., & Shang, P. (2018). Analysis of Shannon-Fisher information plane in time series based on information entropy. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 28(10).

[72] Zunino, L., Soriano, M. C., & Rosso, O. A. (2012). Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach. Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 86(4), 046210.

A. Trabajo a futuro

Los resultados abren diversas líneas de investigación orientadas a profundizar en la comprensión de la no linealidad en sistemas complejos. En particular, el carácter multiescala e intermitente de la no linealidad observado en las series sugiere que la escala temporal desempeña un papel fundamental en las dependencias no lineales. En este trabajo se encontró que, para ciertos regímenes, la no linealidad se manifiesta principalmente a escalas grandes, mientras que a escalas cortas el comportamiento puede aproximarse a uno lineal. Sin embargo, este comportamiento no necesariamente es general y podría diferir en sistemas de distinta naturaleza, donde los mecanismos dominantes operan en otras escalas. El estudio comparativo con señales provenientes de otras áreas permitiría evaluar la generalidad de estos hallazgos.

Un aspecto relevante es en profundizar en la interpretación física de los episodios intermitentes de no linealidad identificados mediante el NLI. Resulta de interés analizar su relación con transiciones dinámicas, inestabilidades incipientes o cambios estructurales del sistema, así como establecer vínculos más directos entre las métricas estadísticas y los mecanismos físicos subyacentes.

Desde una perspectiva metodológica, el enfoque basado en entropía SVD y datos sustitutos puede extenderse a otros tipos de señales e imágenes de sistemas complejos. Asimismo, la incorporación de esquemas adaptativos para la selección de escalas y ventanas temporales podría mejorar la detección automática de regiones donde la no linealidad es significativa. Finalmente, el desarrollo de herramientas de diagnóstico y monitoreo multiescala basadas en la entropía SVD y el índice de no linealidad representa una línea prometedora de investigación aplicada, con potencial para la detección temprana de cambios dinámicos y transiciones de régimen en sistemas complejos.

B. Productos derivados

Los avances y los resultados relevantes de esta investigación se han compartido en varios foros académicos y presentaciones en congresos científicos; además, se han publicado algunos artículos.

B.1. Artículos publicados

- **Marin-López**, A., Martínez-Cadena, J.A., Martínez-Martínez, F., & Alvarez-Ramírez, J. (2023). Surrogate multivariate Hurst exponent analysis of gait dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 172, 113605. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113605 .

- **Marin-López**, A., Puebla, H., Martínez-Cadena, J.A., & Alvarez-Ramírez, J. (2023). Entropy and Hurst Analysis for the Determination of Two-Phase Flow Time Series Complexity. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 22(3). https:/rmiq.org/iqfvp/Numbers/V22/

- **Marin-López**, A., Martínez-Martínez, F., Martínez-Cadena, J.A., & Alvarez-Ramírez, J. (2024). Multiscale SVD Entropy for the Analysis of Gait Dynamics, *Biomedical Signal Processing and Control*, 87, 105439. https://doi.org/10.1016/j.bspc.2023.105439

- **Marin-López**, A., Martínez-Cadena, J.A., Soto-Cortes, G., Puebla, H., & Alvarez-Ramírez, J. (2025). Non-linear Analysis of Two-Phase Flow Fluctuation by Means of SVD Entropy Surrogate Data Analysis, *Fluctuation and Noise Letters*, 24(4), 2550035-295. https://doi.org/10.1142/S021947752550035X.

B.2. Ponencias en congresos

- *Primer Simposio Internacional de Divulgación del Posgrado en Ingeniería Química, SIDPIQ*. Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), CDMX."Entropía de Shannon como medida de no linealidad de series temporales de flujo bifásico en tubería inclinada", agosto-2023.

- *Primer Simposio Internacional de Divulgación del Posgrado en Ingeniería Química, SIDPIQ*. Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), CDMX."Entropía de Shannon como medida de no linealidad de series temporales de flujo bifásico en tubería inclinada", agosto-2023.

- *Segundo Foro Nacional de Divulgación de la Ingeniería Química y su Relación con otras Áreas*, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Tabasco. "Caracterización de no linealidades en Series Temporales Mediante Medidas Basadas en Entropía de Shannon", octubre-2023.

- *Seminario de Ciencia de Datos del Departamento de Matemáticas*, Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), CDMX. "Entropía de Shannon como medida de no linealidad de series temporales", abril-2024.

- *IV Simposio de Optimización Aplicada a la Ingeniería Química*, Tecnológico de Monterrey, Monterrey, Nuevo León. "Evaluación de la No linealidad en Series Temporales de Flujos Bifásicos mediante Entropía", octubre-2024.

- *Segundo Simposio Internacional de Divulgación del Posgrado en Ingeniería Química y XX semana de Licenciatura en IQ*. Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), CDMX. "Análisis de dinámicas no lineales en series temporales de procesos químicos", octubre-2024.

- *XVII Congreso Mexicano de Inteligencia Artificial*, Universidad Panamericana, CDMX. "Analysis of SVD Entropy Variability in EEG: Impact of Arithmetic Activity by Hemisphere", mayo-2025.

- *Foro UAM-IMP: Hacía un futuro energético nacional sostenible*. Instituto Mexicano del Petróleo, CDMX. "Evaluación del comportamiento no lineal en señales de flujo mediante técnicas multiescala", junio-2025.

C. Datos complementarios

C.1. Variación de la escala temporal en los patrones de flujo bifásico

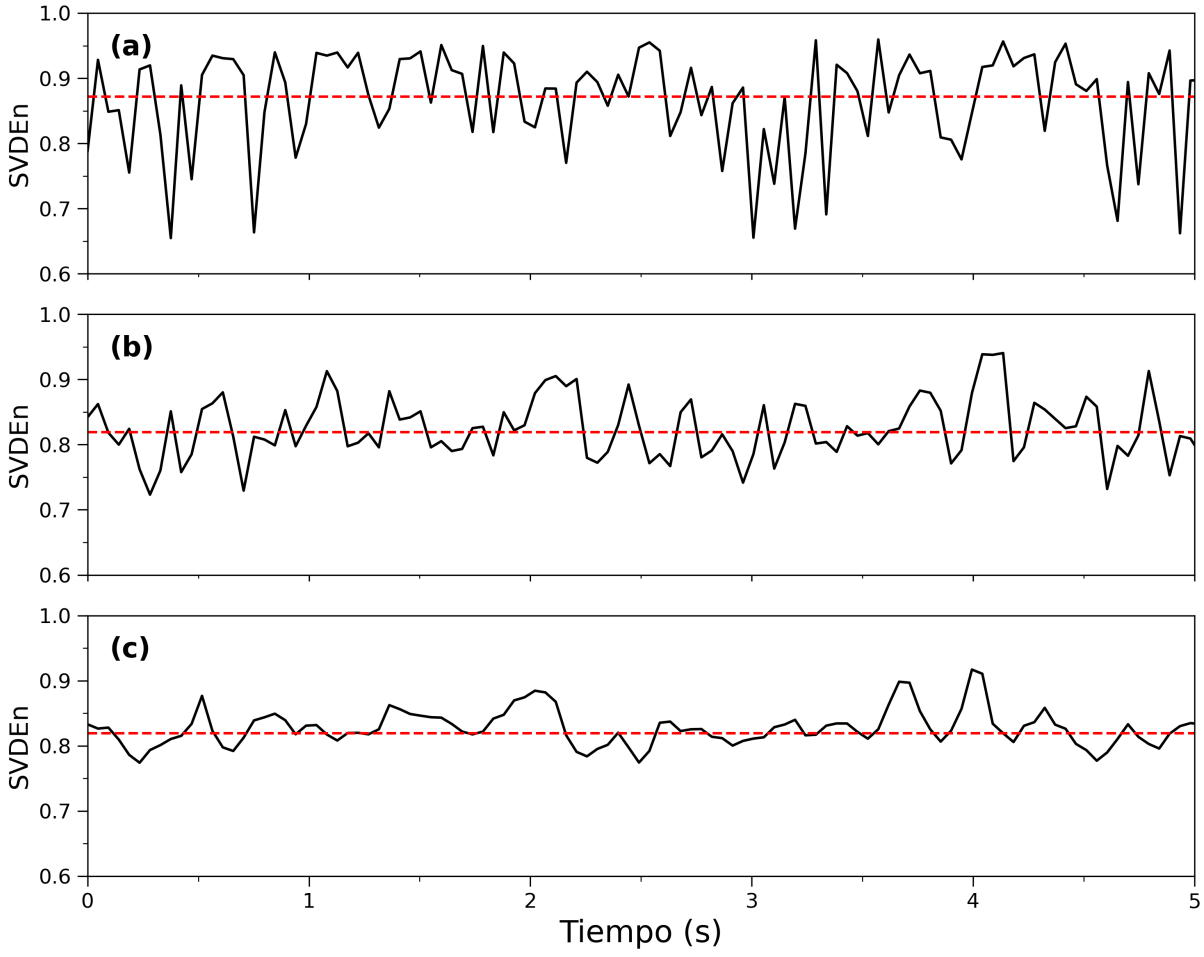


Figura C.1: Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico FF_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s.

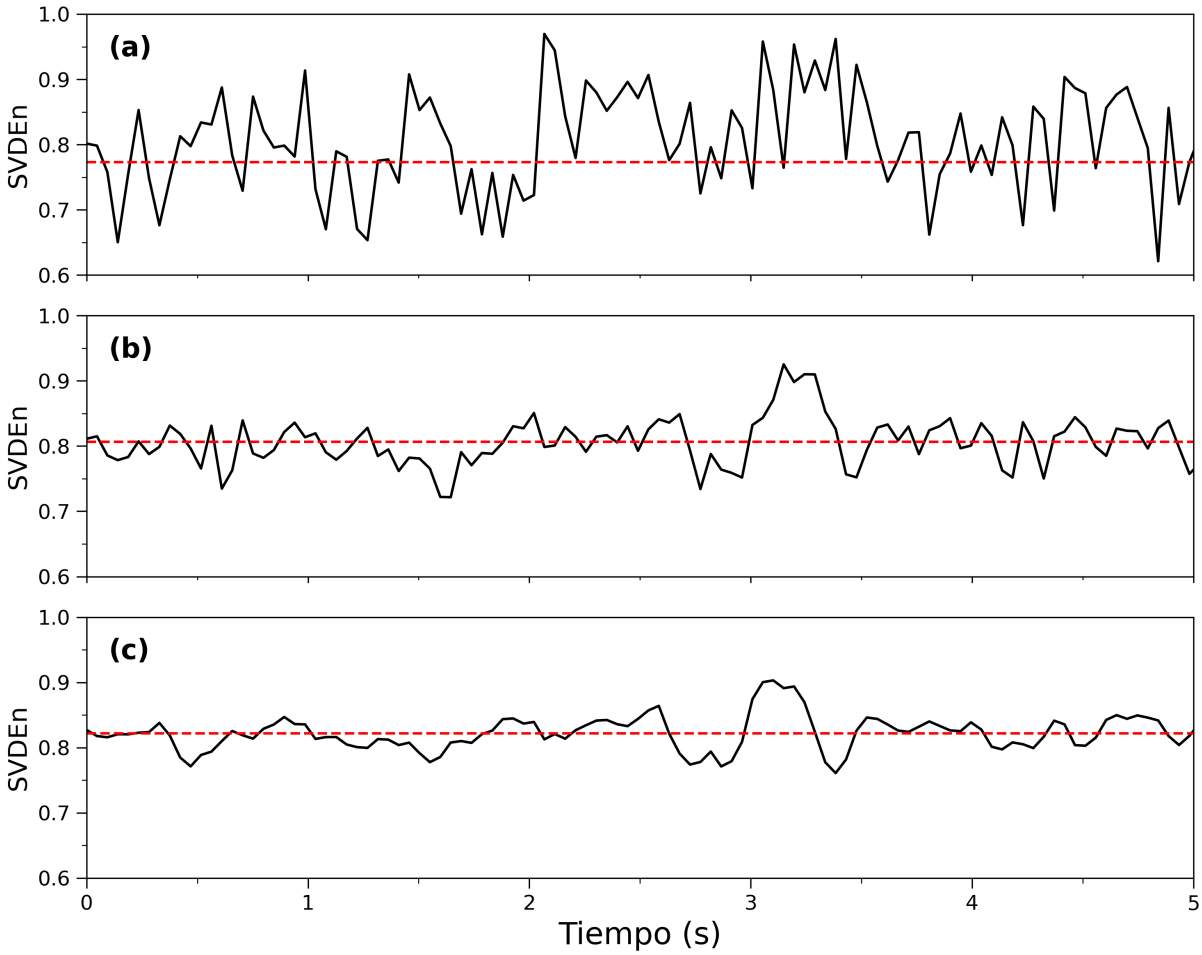


Figura C.2: Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico WA_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s.

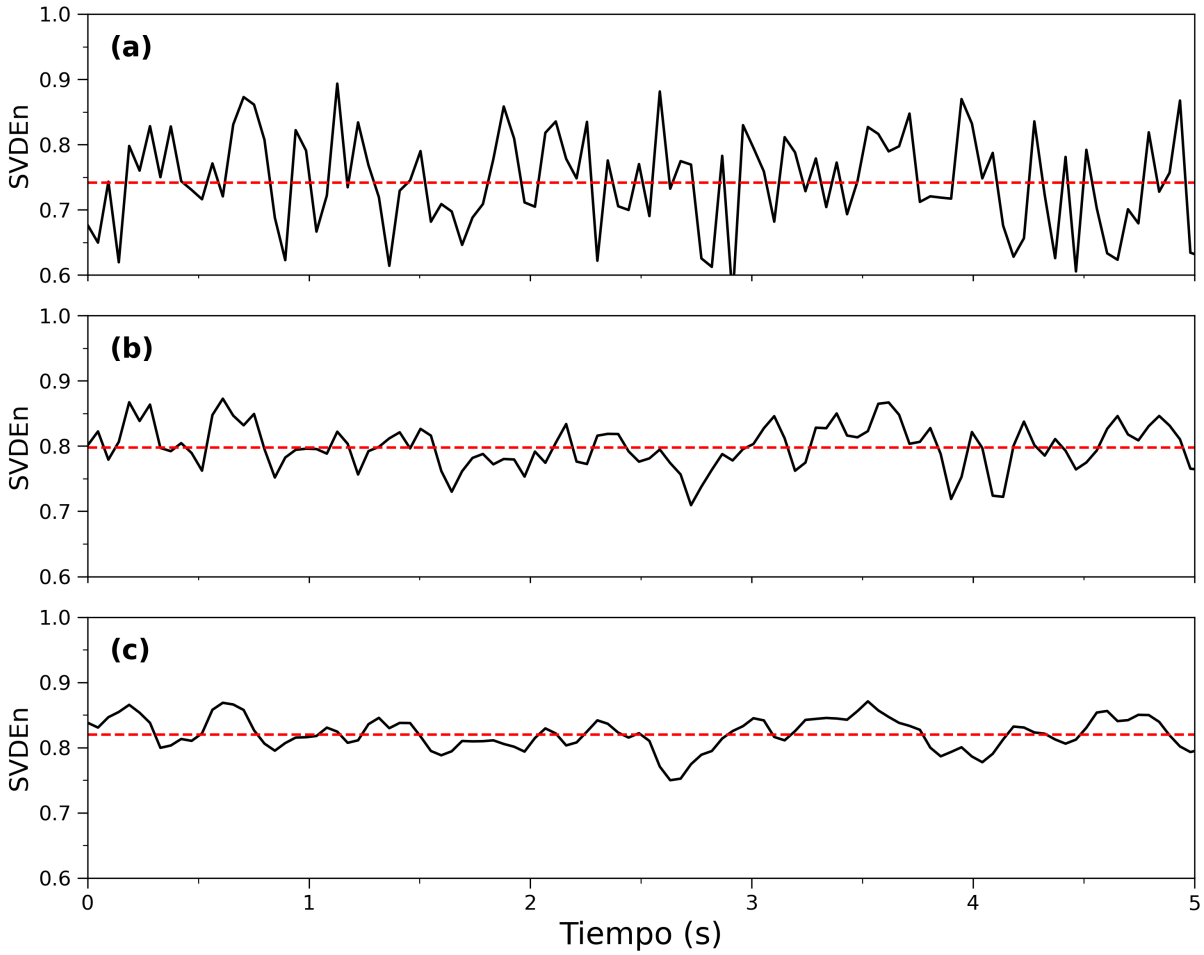


Figura C.3: Entropía SVD para el patrón de flujo bifásico LS_1 a distintas escalas: a) 25 s, b) 125 s, c) 250 s.

D. Herramientas de Phyton

Para el análisis de las series temporales se utilizaron las siguientes librerías de Python:

- **Numpy:** Es la librería utilizada por excelencia para computación científica y análisis numérico. Incluye un amplio número de funcionalidades para realizar operaciones vectoriales y matriciales.
- **Pandas:** Construida sobre Numpy, es una librería que sirve para manipular y analizar datos en Python. Ofrece estructuras de datos y operaciones para manipular tablas numéricas y series temporales.
- **Matplotlib:** Es una librería que sirve para generar gráficos a partir de listas o arrays en Python y su extensión matemática Numpy.
- **Seaborn:** Esta librería que se construye sobre Matplotlib y proporciona una interfaz más sencilla y atractiva para crear gráficos estadísticos. Facilita la creación de gráficos más complejos y estéticamente agradables, como mapas de calor, gráficos de violín, gráficos de correlación, etc.
- **Statsmodels:** Esta librería dispone a una gran cantidad de funciones diseñadas para realizar análisis exploratorios, el modelo, estimación de modelos estadísticos y algunos estadísticos de ensayos.
- **SciPy:** Contiene módulos para la optimización, álgebra lineal, integración, interpolación, funciones de caracter especiales, Tranformadas de Fourier, el procesamiento de señales y de imagen, resolución de ecuciones diferenciales y otras muchas tareas más para la ciencia e ingeniería.

E. Códigos fuentes

E.1. Análisis de señales

```
 # 1. Función para entropía SVD normalizada
def entrop(A):
    U, S, V = svd(A, full_matrices=False)
    p = S / np.sum(S)
    H = -np.sum(p * np.log(p)) / np.log(len(S))
    return H
# 2. Matriz de señales retardadas
def matriz_retar(señal, n):
    A = np.empty((n, n))
    for i in range(n):
        A[i] = señal[i:i + n]
    return A
# 3. Aleatorización de fase
def aleatorizar_fase_1d(signal):
    N = len(signal)
    fft_result = np.fft.fft(signal)
    mag = np.abs(fft_result)
    phase = np.angle(fft_result)

    phase_new = phase.copy()
```

```
    if N % 2 == 0:
        # N par: hay componente Nyquist
        num_rand = N // 2 - 1
        random_phases = np.random.uniform(0, 2 * np.pi, num_rand)
        phase_new[1:N//2] = random_phases
        phase_new[N//2+1:] = -random_phases[::-1]
    else:
        # N impar: no hay componente Nyquist
        num_rand = (N - 1) // 2
        random_phases = np.random.uniform(0, 2 * np.pi, num_rand)
        phase_new[1:N//2+1] = random_phases
        phase_new[N//2+1:] = -random_phases[::-1]
    fft_surrogate = mag * np.exp(1j * phase_new)
    surrogate = np.fft.ifft(fft_surrogate).real
    return surrogate
```

E.2. Análisis de imágenes

E.2.1. Entropía de la imagen original

```
 #Función que lee una imagen, la convierte a escala de grises y devuelve una matriz
def leer_grises(path, normalizar=True):
    try:
        # 1. Abrir la imagen
        img = Image.open(path)
        # 2. Convertirla a modo 'L' (escala de grises)
        img = img.convert('L')
        # 3. Convertir la imagen a un arreglo NumPy tipo float64
        arr = np.asarray(img, dtype=np.float64)
        # 4. Normalizar los valores entre 0 y 1
```

```
        if normalizar:
            arr /= 255.0
        return arr
        except:
        return None

# Función que calcula la entropía SVD de una matriz 2D
def entrop(A):
    # Descomposición en valores singulares (SVD)
    U, s, VT = svd(A)
    rango = len(s)
    suma_s = np.sum(s)
    # Entropía normalizada
    sum_sig = 0
    for k in range(rango):
        pk = s[k] / suma_s
        sum_sig += pk * log(pk)
    H_F = (-1 / log(rango)) * sum_sig
    return H_F
```

E.2.2. Entropía de la imagen con fase aleatorizada

```
 #Función que calcula la entropía SVD normalizada de una matriz 2D aplicando aleatoriz
def entrop(A):
    # Transformada de Fourier 2D
    DF = fft2(A)              # Espectro complejo
    M_DF = np.abs(DF)         # Magnitud
    Fa = np.angle(DF)         # Fase
    # Aleatorización de la fase
    fase_flat = Fa.flatten()          # Convertimos la fase en vector 1D
```

```
    np.random.shuffle(fase_flat)       # Mezclamos aleatoriamente los valores
    ALE = fase_flat.reshape(Fa.shape)  # Reconstruimos la matriz aleatoria
    #  Reconstrucción del espectro
    F = M_DF * np.exp(1j * ALE)        # Espectro con misma magnitud, fase aleatoria
    I_F_AL = ifft2(F).real             # Señal reconstruida
    #Descomposición en valores singulares (SVD)
    U, s, VT = svd(I_F_AL)                  # SVD de la matriz con fase aleatorizada
    rango = len(s)
    suma_s = np.sum(s)
    # Entropía normalizada
    sum_sig = 0
    for k in range(rango):
        pk = s[k] / suma_s
        sum_sig += pk * log(pk)

    H_F = (-1 / log(rango)) * sum_sig
    return H_F
```

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00100
Matrícula: 2213801188

ANÁLISIS Y CUÁNTIFICACIÓN DE NO LINEALIDADES DE PROCESOS QUÍMICOS.



ABIGAIL MARIN LOPEZ
ALUMNA

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 17 del mes de diciembre del año 2025 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JUAN CARLOS ECHEVERRIA ARJONILLA
DR. BASILIO DEL MURO CUELLAR
DR. RICARDO AGUILAR LOPEZ
DR. GILBERTO ESPINOSA PAREDES
DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (INGENIERÍA QUÍMICA)

DE: ABIGAIL MARIN LOPEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. JUAN CARLOS ECHEVERRIA ARJONILLA

VOCAL

DR. BASILIO DEL MURO CUELLAR

VOCAL

DR. RICARDO AGUILAR LOPEZ

VOCAL

DR. GILBERTO ESPINOSA PAREDES

SECRETARIO

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA