

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA –
IZTAPALAPA

“TRANSPORTE MULTICANAL EN
HETEROESTRUCTURAS QUE ESTÁN EN
PRESENCIA DE CAMPOS ELÉCTRICOS”

TESIS QUE PRESENTA

MARÍA GUADALUPE MENDOZA FIGUEROA

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)



Casa abierta al tiempo

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Pedro Pereyra Padilla

Asesor

Iztapalapa, México D.F.

Mayo de 2013

*A mi Madre, a mi Padre, a mis hermanos
Tita y Tito, y desde luego a "Antonio",
pero sobre todo para el amor de mi vida,
para ti Santiago.*

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi asesor el Dr. Pedro Pereyra Padilla, por su tiempo y espacio otorgados, así como por sus enseñanzas y paciencia.

Y claro agradecer de manera particular al Dr. Marco Maceda, por todo su apoyo.
En especial a la Superfuerza, por permitirme ser Madre.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCCION | 1 |
| 1. MARCO TEÓRICO | 5 |
| 1.1. La ecuación de Schrödinger | 5 |
| 1.2. Matriz de transferencia \mathbf{M} | 8 |
| 1.3. Matriz de dispersión \mathbf{S} | 17 |
| 1.4. Matriz de transferencia \mathbf{W} | 20 |
| 1.5. Tiempo de retardo de Wigner | 27 |
| 2. DISPERSIÓN POR POTENCIALES UNIDIMENSIONALES (1D) | 31 |
| 2.1. Dispersión por una barrera de potencial inmersa en un campo eléctrico | 32 |
| 2.1.1. Efecto del campo eléctrico en el coeficiente de transmisión T . . | 37 |
| 2.1.2. Difracción de Bragg y su relación con las resonancias del coeficiente de transmisión T | 39 |
| 2.1.3. Efecto del campo eléctrico en el tiempo de retardo de Wigner τ | 39 |
| 2.2. Dispersión por un pozo-triangular y una barrera de potencial sujetos a un campo eléctrico | 41 |
| 2.2.1. Desplazamiento del umbral de transmisión como consecuencia del aumento del campo eléctrico | 44 |
| 2.2.2. Resonancias de T | 50 |

| | |
|---|-----------|
| 2.2.3. Tiempo de retardo τ | 51 |
| 2.3. Dispersión causada por dos barreras de potencial en presencia de un campo eléctrico | 53 |
| 2.3.1. Tunelaje resonante | 56 |
| 2.3.2. Efecto del campo eléctrico en el tiempo de retardo τ | 58 |
| 2.3.3. Dispositivos a base de tunelaje | 59 |
| 3. DISPERSIÓN POR UN POTENCIAL 2D | 67 |
| 3.0.4. Efecto del campo eléctrico transversal en la conductancia G . . . | 78 |
| 3.0.5. Mezcla de canales T_{ij} | 82 |
| 3.0.6. Tiempo de retardo de Wigner τ_{ij} | 84 |
| CONCLUSIONES y PERSPECTIVAS | 86 |
| A. Apéndice A | 91 |
| B. Apéndice B | 95 |
| Bibliografía | 97 |

INTRODUCCIÓN

La vida de hoy no concibe su existencia sin los avances tecnológicos derivados del estudio de las propiedades microscópicas de la materia. La extensión a un nivel microscópico de nuestro entendimiento de las características de los sólidos, es uno de los logros importantes de la física y esto ha dado un gran impulso a los avances de la tecnología actual. Uno de los avances más revolucionarios en la física, en particular en la física del estado sólido, ha sido la invención del transistor a finales de la década de 1940. Desde entonces ha existido una ardua investigación en las heteroestructuras semiconductoras, lo que ha permitido utilizar las propiedades de la estructura de bandas en el diseño de diodos transistores de dimensiones nanoscópicas y la invención y creación de los circuitos integrados junto con una enorme industria tecnológica [1].

El tunelaje resonante de un electrón a través de múltiples barreras de potencial es uno de los fenómenos cuánticos característicos. Una de las peculiaridades más sobresalientes de los sistemas con multibarreras es la existencia de estados resonantes de energía que determinan al tunelaje resonante. El tunelaje resonante tiene lugar cuando la energía de los electrones incidentes llega a ser igual a las energías resonantes de un sistema de multibarreras. Las actividades de investigación sobre tunelaje resonante en multibarreras han ganado ímpetu en los campos experimental y teórico desde el trabajo de Tsu, Esaki y Chang [2, 3, 4]. Esta motivación puede ser atribuida a las

posibles aplicaciones del fenómeno de tunelaje resonante en dispositivos electrónicos de alta velocidad (que incluyen a los láseres), moduladores, fotodetectores y dispositivos de procesamiento de señales. Además, el estudio del tunelaje con multibarreras proporciona una comprensión más profunda del fenómeno de transporte a través de superredes de semiconductores y estructuras similares, tales como arreglos de puntos cuánticos. Por lo tanto, es plausible idear un modelo teórico para el tunelaje resonante de electrones en multibarreras que permita a los experimentalistas fabricar electrónica ultraveloz y dispositivos optoelectrónicos.

El *tiempo de tránsito* es un concepto importante en la teoría de dispersión. En situaciones simples, éste expresa el tiempo que las partículas dispersadas pasan en la región de dispersión. En la teoría de dispersión cuántica, el tiempo de tránsito es relevante en particular en la caracterización de resonancias. Es necesario el entendimiento de la dependencia temporal del tunelaje para la construcción de una teoría cinética para tales sistemas. El tiempo de tránsito en el tunelaje resonante es una de las cuestiones claves referentes al desarrollo de dispositivos electrónicos basados en tunelaje, específicamente es vital para estimar el límite de frecuencias de los dispositivos de tunelaje superveloces.

El objetivo del presente trabajo es llevar a cabo el cálculo y análisis de los coeficientes de transmisión T , la conductancia G y el tiempo de tunelaje τ , para ciertos perfiles potenciales que resultan de la presencia de campos eléctricos longitudinales y transversales, en los que se espera se manifieste “Tunelaje Resonante”. Para su mejor entendimiento y aprovechamiento, el trabajo aquí presentado se divide en tres capítulos.

En el Capítulo *I*, presentamos el formalismo teórico y métodos de solución empleados en la solución de los problemas de dispersión planteados en los Capítulos *II* y *III*.

La teoría revisada en éste capítulo comprende la *ecuación de Schrödinger*, la *matriz de transferencia* \mathbf{M} , la *matriz de dispersión* \mathbf{S} y la relación existente entre ellas, así como el concepto de *matriz de transferencia* \mathbf{W} , la cual conecta funciones de onda y sus derivadas en dos puntos o planos de la región de dispersión, y la relación de semejanza entre las matrices de transferencia \mathbf{M} y \mathbf{W} . Revisaremos la relación de los elementos de estas matrices con las amplitudes de transmisión. Analizamos también, de manera breve, el concepto de conductancia G y la definición del *tiempo de retardo de Wigner* τ en el caso unidimensional.

En el Capítulo *II*, analizaremos el comportamiento del coeficiente de transmisión T y del tiempo de retardo τ , vía las matrices de transferencia \mathbf{M} y \mathbf{W} , para tres perfiles de potencial distintos. El primer perfil consta de una barrera de potencial de $Al_{0.7}Ga_{0.3}As$, conectada a dos capas de $GaAs$ con las que el potencial es cero, la barrera está sujeta a la acción de una fuerza eléctrica longitudinal externa. La siguiente configuración representa una heteroestructura semiconductor formada por $GaAs/Al_{0.7}Ga_{0.3}As/GaAs$, unida a dos capas de $GaAs$ con las que el potencial es cero, la cual está siendo influenciada por una fuerza eléctrica longitudinal externa, lo que hace que la heteroestructura se comporte como un pozo-triangular seguido de una barrera de potencial. Por último, las propiedades de transporte son analizadas para un sistema formado por una heteroestructura de doble barrera $GaAs/Al_{0.7}Ga_{0.3}As/GaAs/Al_{0.7}Ga_{0.3}As/GaAs$, conectada a dos capas de $GaAs$ con las que el potencial es cero, la cual está sujeta a una fuerza eléctrica longitudinal externa, lo que da lugar a que se forme una estructura de pozos-trianguulares y barreras alternantes. En éste último sistema se tendrá tunelaje resonante.

En el Capítulo *III* estudiaremos las propiedades de transporte, tales como la conductancia G , los coeficientes de transmisión T y el tiempo de retardo τ , asociadas a

portadores de carga dispersados por un potencial bidimensional ($2D$) electrificado. El sistema dispersor consiste de un pozo de potencial $2D$ (capa de $GaAs$) entre dos barreras de potencial $2D$ (capa de $Al_{0.7}Ga_{0.3}As$) sujetos, tanto las barreras como el pozo, a una fuerza eléctrica longitudinal y a una fuerza eléctrica transversal, ambas aplicadas de manera externa. Se espera que éste sistema dispersor presente tunelaje resonante y al mismo tiempo que la fuerza eléctrica transversal acople canales.

En particular, los dispositivos a base de tunelaje resonante son de considerable interés, ya que una gran variedad de aplicaciones pueden ser realizadas con gran éxito [5, 6].

Por todo lo mencionado anteriormente, consideramos necesario el estudio teórico del fenómeno del tunelaje resonante en heteroestructuras semiconductoras.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan las nociones de la *teoría de dispersión* en mecánica cuántica, necesarias para el cálculo de la *conductancia* en sistemas mesoscópicos y las propiedades de *transporte electrónico*. Sólo se presenta el formalismo de dispersión independiente del tiempo (en una dimensión), el cual es de interés para los estados estacionarios. Se introduce, primero, la ecuación de Schrödinger, la *matriz de transferencia* \mathbf{M} , la *matriz de dispersión* \mathbf{S} y la *matriz de transferencia* \mathbf{W} , seguidas del concepto de *tiempo de retardo de Wigner* τ .

1.1. La ecuación de Schrödinger

En mecánica clásica, el movimiento de cualquier sistema físico está determinado si se conocen la posición \vec{r} y la velocidad \vec{v} de cada uno de sus puntos como una función del tiempo. Una vez que se sabe esto, se puede determinar cualquier otra variable dinámica de interés. Para determinar la posición y la velocidad de la partícula aplicamos la segunda ley de Newton junto con las condiciones iniciales apropiadas.

La descripción de la mecánica cuántica de este mismo problema es absolutamente diferente. En este caso lo que estamos buscando es la función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ y se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger [7]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.1.1)$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Para poder resolver la ecuación de Schrödinger podemos suponer que el potencial, $V(\vec{r}, t)$, es independiente del tiempo (estados estacionarios). En ese caso, la ecuación se resuelve por el método de separación de variables. Buscamos las soluciones que sean productos del tipo

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})f(t) \quad (1.1.2)$$

siendo ψ función de la posición únicamente y f una función sólo de t .

Para soluciones separables la ecuación de Schrödinger se convierte en

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \Delta \psi + V. \quad (1.1.3)$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.1.3) es una función únicamente del tiempo, y el lado derecho es función sólo de la posición. La única manera en que esto sea posible es si ambos lados son iguales a una *constante*. A esa constante de separación se le llama E . Entonces

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = E \quad (1.1.4)$$

cuya solución es

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar}, \quad (1.1.5)$$

mientras que para la parte espacial tenemos la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (1.1.6)$$

A la ecuación (1.1.6) se le llama *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o estacionaria*, la cual puede escribirse como

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.1.7)$$

con \hat{H}

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \quad (1.1.8)$$

el Hamiltoniano del sistema.

Si la función potencial $V(\vec{r})$ en \hat{H} , es de confinamiento, es decir, existe cuantización de la energía, entonces, las funciones de onda $\psi_n(\vec{r})$ linealmente independientes (*l.i.*), existen sólo para ciertos valores permitidos de la energía $\{E_n\}$ (espectro discreto). Por el contrario, si $V(\vec{r})$ no confina, las funciones de onda $\psi(\vec{r})$ *l.i.*, existen para todo valor de E (espectro continuo). En cada caso, el conjunto de las funciones de onda $\{\psi_n(\vec{r})\}$ y $\{\psi(\vec{r})\}$ forman una base de eigenfunciones del operador \hat{H} . De esta manera, podemos desarrollar cualquier otra función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ en términos de dicha base, es decir,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^N C_j \psi_j(\vec{r}) e^{-iE_j t/\hbar} \quad (1.1.9)$$

donde N indica los estados accesibles al sistema y las C_j son las amplitudes de probabilidad.

1.2. Matriz de transferencia \mathbf{M}

Las matrices de transferencia y sus propiedades fueron usadas en la década de los cincuentas como funciones naturales para describir el espectro electrónico y los procesos de transporte a través de estructuras semiconductoras. Más recientemente, la aproximación de la matriz de transferencia ha llegado a ser familiar en la teoría de dispersión de guías de onda cuánticas.

En esta sección estudiaremos de manera general el efecto de un potencial $V(x)$ sobre partículas (electrones) que inciden en éste. No supondremos nada acerca de la forma de $V(x)$, mismo que puede presentar una o varias barreras, pozos, etc., excepto que $V(x)$ es real y cero fuera de un intervalo finito $[x_1, x_2]$ del eje x . Mostraremos que el efecto del potencial $V(x)$ sobre las partículas incidentes puede ser descrito mediante una matriz \mathbf{M} [8, 9], la cual posee un cierto número de propiedades generales. Dicha matriz es conocida como *matriz de transferencia* \mathbf{M} .

Consideremos un potencial unidimensional (1D) $V(x)$, que es cero fuera de cierto intervalo $[x_1, x_2]$, pero que varía de manera arbitraria dentro de éste (ver Figura 1.1).

La ecuación de Schrödinger que se debe satisfacer en cada región del potencial es:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \right] \psi(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

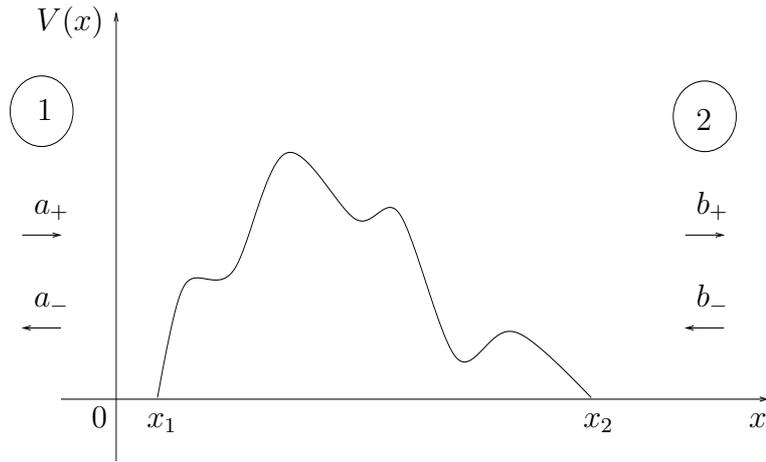


Figura 1.1: Dispersión por un potencial unidimensional arbitrario localizado $V(x)$ (este potencial es arbitrario dentro del intervalo $[x_1, x_2]$ e igual a cero fuera de éste).

En la región 1, donde $x \leq x_1$, una solución que satisface la ecuación (1.2.1) es

$$\psi_1(x) = a_+ e^{ikx} + a_- e^{-ikx} \quad (1.2.2)$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Similarmente, la solución que satisface la ecuación (1.2.1), en la región 2, donde $x \geq x_2$, es

$$\psi_2(x) = b_+ e^{ikx} + b_- e^{-ikx} \quad (1.2.3)$$

La matriz \mathbf{M} es aquella que relaciona los coeficientes a la derecha del potencial con aquellos a la izquierda de éste, es decir,

$$\begin{bmatrix} b_+ \\ b_- \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} a_+ \\ a_- \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

donde \mathbf{M} tiene, en general, la siguiente estructura

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad (1.2.5)$$

y donde α , β , γ y δ son cantidades complejas.

Es fácil mostrar, usando el hecho de que la función $V(x)$ es real, que si $\psi(x)$ (tanto para $x \leq x_1$ como para $x \geq x_2$) es una solución de la ecuación (1.2.1), $\psi^*(x)$ también lo es, lo que implica que

$$\begin{bmatrix} b_+^* \\ b_-^* \end{bmatrix} = \mathbf{M}^* \begin{bmatrix} a_+^* \\ a_-^* \end{bmatrix}. \quad (1.2.6)$$

Si consideramos la operación de reversibilidad temporal, que corresponde físicamente al intercambio de las ondas entrantes por las salientes y simultáneamente a la conjugación compleja de los coeficientes de la combinación lineal, la misma matriz de transferencia \mathbf{M} debe relacionar los coeficientes del estado revertido temporalmente, es decir,

$$\begin{bmatrix} b_-^* \\ b_+^* \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} a_-^* \\ a_+^* \end{bmatrix}, \quad (1.2.7)$$

con \mathbf{M} definida por (1.2.5). Desarrollando (1.2.6) obtenemos

$$b_+^* = \alpha^* a_+^* + \beta^* a_-^* \quad (1.2.8)$$

$$b_-^* = \gamma^* a_+^* + \delta^* a_-^*$$

y al desarrollar (1.2.7), encontramos

$$b_-^* = \alpha a_-^* + \beta a_+^* \quad (1.2.9)$$

$$b_+^* = \gamma a_-^* + \delta a_+^* ,$$

comparando las ecuaciones (1.2.8) y (1.2.9), se obtienen las siguientes relaciones entre los elementos de la matriz \mathbf{M}

$$\alpha^* = \delta \quad (1.2.10)$$

$$\gamma^* = \beta, \quad (1.2.11)$$

por lo tanto \mathbf{M} tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}. \quad (1.2.12)$$

Por otra parte, en mecánica cuántica se define la corriente asociada con alguna función de onda $\psi(x)$ como

$$J(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} - \psi(x) \frac{d\psi^*(x)}{dx} \right]. \quad (1.2.13)$$

Consideremos la ecuación de continuidad

$$\frac{dJ(x)}{dx} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.2.14)$$

En el caso de estados estacionarios, la densidad de probabilidad es independiente del tiempo, de tal manera que el término $\partial \rho(x, t) / \partial t = 0$, por lo que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{dJ(x)}{dx} = 0. \quad (1.2.15)$$

Por lo tanto, la corriente J asociada con un estado estacionario es la misma en todos los puntos del eje x . De acuerdo a la ecuación (1.2.15), la corriente $J(x)$ asociada con

$\psi(x)$ puede ser calculada para cualquier x , eligiendo tanto la forma (1.2.2) o (1.2.3) de $\psi(x)$, i.e.,

$$J_k(x) = \frac{\hbar k}{m} [|a_+|^2 - |a_-|^2] = \frac{\hbar k}{m} [|b_+|^2 - |b_-|^2] \quad (1.2.16)$$

de aquí que

$$[|a_+|^2 - |a_-|^2] = [|b_+|^2 - |b_-|^2]. \quad (1.2.17)$$

Por otro lado, si se consideran las ecuaciones (1.2.4) y (1.2.12), se obtiene la siguiente ecuación

$$[|b_+|^2 - |b_-|^2] = [|\alpha|^2 - |\beta|^2] [|a_+|^2 - |a_-|^2], \quad (1.2.18)$$

que junto con la ecuación (1.2.17) conduce a que debe cumplirse

$$[|\alpha|^2 - |\beta|^2] = Det[\mathbf{M}] = 1. \quad (1.2.19)$$

La expresión (1.2.19) expresa la conservación de corriente para la matriz \mathbf{M} .

Consideremos ahora el caso de un haz de electrones incidiendo desde la izquierda sobre el potencial $V(x)$, mismo que es real en el intervalo finito $[x_1, x_2]$ y cero fuera de él. La situación se ilustra en la Figura 1.2.

El haz es preparado de manera que su amplitud incidente sea $a_+ = 1$, y puesto que incide desde la izquierda, “r” representará la amplitud de las ondas reflejadas de tal manera que $a_- = r$, mientras que “t” representará la amplitud de las ondas transmitidas por lo que $b_+ = t$ y $b_- = 0$. En este caso, la matriz de transferencia \mathbf{M} que nos permitirá determinar las amplitudes de la función de onda a la derecha del potencial ($x \geq x_2$) en función de las amplitudes a la izquierda ($x \leq x_1$), es de la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad (1.2.20)$$

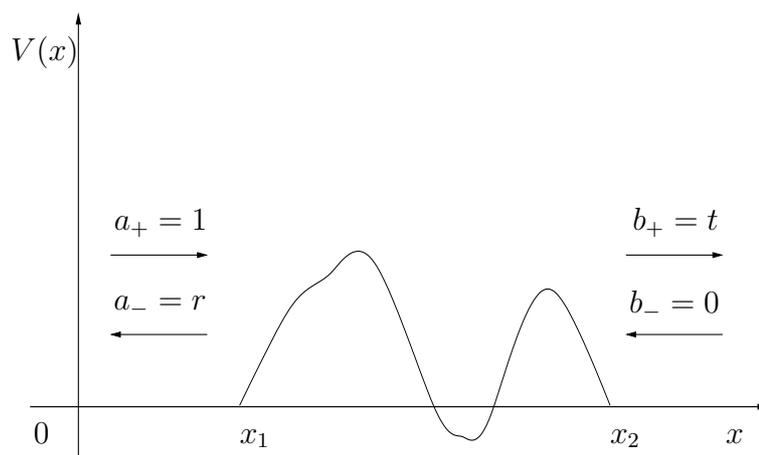


Figura 1.2: Un haz de electrones incide desde la izquierda sobre un potencial $V(x)$. Las amplitudes de dispersión toman los valores $a_+ = 1$, $a_- = r$, $b_+ = t$ y $b_- = 0$.

con \mathbf{M} dada por la ecuación (1.2.12). La ecuación (1.2.20) nos conduce a que

$$r = -\frac{\beta^*}{\alpha^*} \quad (1.2.21)$$

$$t = \frac{\alpha\alpha^* - \beta\beta^*}{\alpha^*} \quad (1.2.22)$$

y usando (1.2.19), obtenemos

$$\alpha^* = \frac{1}{t} \quad (1.2.23)$$

y

$$\beta^* = -\frac{r}{t}. \quad (1.2.24)$$

Con los valores obtenidos para α^* y β^* , podemos expresar a la matriz \mathbf{M} en términos de las amplitudes de transmisión y reflexión

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}. \quad (1.2.25)$$

La propiedad más útil de las matrices de transferencia \mathbf{M} es la “multiplicatividad serial” [9], la cual se define a continuación. Consideremos ahora dos potenciales dispersores, $V_1(x)$ y $V_2(x)$, los cuales tienen asociadas sus respectivas matrices de transferencia, denotadas por \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 . La situación se ilustra en la Figura 1.3.

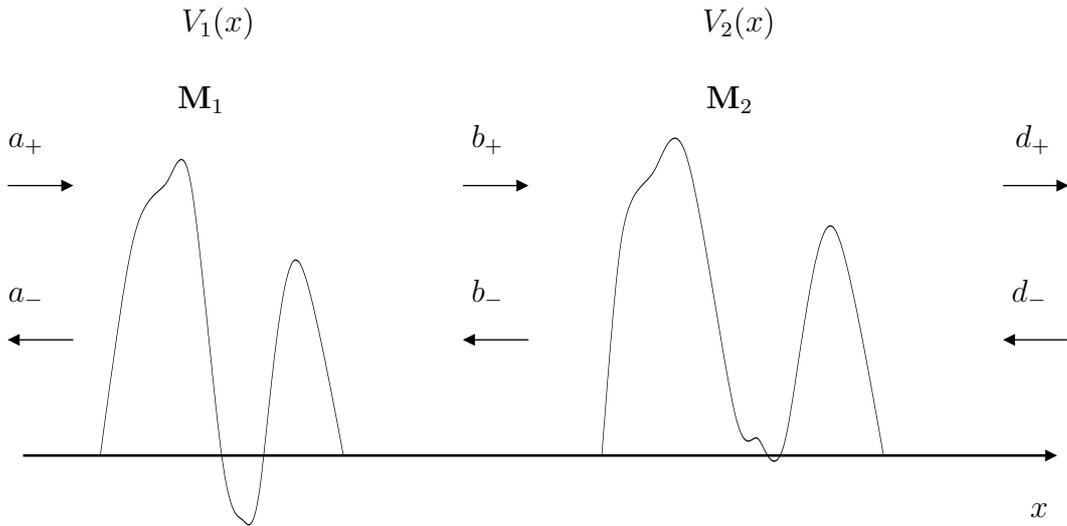


Figura 1.3: Dos potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$, con una región libre de potencial entre ellos; y sus matrices de transferencia asociadas \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 , respectivamente.

La matriz de transferencia \mathbf{M}_1 conecta los coeficientes a_+ y a_- con los coeficientes b_+ y b_- , mientras que \mathbf{M}_2 relaciona los coeficientes b_+ y b_- a los coeficientes d_+ y d_- .

El producto

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \quad (1.2.26)$$

establece una relación directa entre los coeficientes a_+ y a_- con d_+ y d_- , siendo \mathbf{M} la matriz de transferencia del sistema combinado. La ecuación (1.2.26) representa la multiplicatividad serial de las matrices \mathbf{M} .

En sistemas unidimensionales o multidimensionales, es posible reconocer o diferenciar a las partículas cuánticas por sus números cuánticos u otras propiedades físicas. En problemas de transporte se dice que, los “canales están abiertos o propagantes” si el número de onda $k^2 > 0$ y “cerrados o evanescentes” si $k^2 < 0$.

Las propiedades de la matriz \mathbf{M} se pueden generalizar para sistemas con N canales abiertos y un número arbitrario de canales cerrados [9]. Podemos escribir una relación que conecte las amplitudes a la izquierda del potencial con las correspondientes amplitudes a la derecha del potencial, como sigue

$$\mathbf{C}^{(2)} = \mathbf{M}\mathbf{C}^{(1)} \quad (1.2.27)$$

donde los vectores, de dimensionalidad $2N$, $\mathbf{C}^{(1)}$ y $\mathbf{C}^{(2)}$ están definidos por

$$\mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_+^{(2)} \\ \mathbf{b}_-^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.2.28)$$

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_+^{(1)} \\ \mathbf{a}_-^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1.2.29)$$

con \mathbf{a}_+ , \mathbf{a}_- , \mathbf{b}_+ y \mathbf{b}_- vectores de dimensionalidad N . Por lo tanto, la relación entre los

vectores $\mathbf{C}^{(1)}$ y $\mathbf{C}^{(2)}$, es la matriz \mathbf{M} , que tiene la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^\dagger & \alpha^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t^\dagger)^{-1} & r'(t')^{-1} \\ -(t')^{-1}r & (t')^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.2.30)$$

siendo α , β , β^\dagger y α^\dagger matrices de $N \times N$, (\dagger significa transpuesta conjugada). En este caso, la matriz de las amplitudes de transmisión se escribe como

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix}, \quad (1.2.31)$$

mientras que la matriz de coeficientes de transmisión es

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix}. \quad (1.2.32)$$

Una cantidad relevante en la física de sistemas mesoscópicos, es la *conductancia*. Dicha propiedad de los sistemas cuánticos, ha sido de gran importancia práctica en el entendimiento del transporte cuántico de los dispositivos electrónicos. El concepto de conductancia fué replanteado por Landauer [10, 11, 12]. La propuesta de Landauer consiste en considerar al transporte electrónico como una consecuencia del problema de dispersión. La conductancia de Landauer de un conductor unidimensional, limitado entre dos reservorios de fase aleatoria, está dada por

$$G = \frac{e^2}{h}T, \quad (1.2.33)$$

donde T es el coeficiente de transmisión del conductor tratado como un centro dispersor. La expresión (1.2.33) es válida solo en el límite cuántico unidimensional. A partir de entonces una gran variedad de autores intentaron generalizar este resultado a N canales, obteniendo como resultado la relación entre la *conductancia* y el coeficiente de transmisión,

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr}[\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger], \quad (1.2.34)$$

donde \mathbf{t} es la matriz de las amplitudes de transmisión de $N \times N$, que conecta el flujo incidente sobre los canales de un lado de la región desordenada, con el flujo saliente de los canales en el otro lado de dicha región.

1.3. Matriz de dispersión \mathbf{S}

En esta sección, examinaremos el formalismo de la *matriz de dispersión* \mathbf{S} [8, 9], comúnmente llamada sólo *matriz* \mathbf{S} , para el transporte de electrones en heteroestructuras cuánticas.

La matriz \mathbf{S} nos permite calcular las amplitudes de las funciones de onda salientes de un potencial $V(x)$, en términos de las amplitudes de las funciones de onda entrantes de dicho potencial.

La matriz \mathbf{S} , fué introducida por vez primera por *Wheeler* en 1937. En 1940, *Heisenberg*, desarrolló independientemente el concepto de la matriz \mathbf{S} . Heisenberg introdujo

esta idea para estudiar los procesos de dispersión sin considerar una interacción particular. Aunque la matriz \mathbf{S} fué introducida para el estudio de los problemas de dispersión, ésta ha sido ampliamente usada a través de la extensión de sus aplicaciones en circuitos electrónicos y síntesis de redes.

Consideremos la dispersión producida por el potencial $V(x)$ ilustrado en la Figura 1.1. En dicha figura se muestra que a_+ y b_- son los coeficientes de las ondas planas entrantes, es decir, ondas asociadas con partículas provenientes respectivamente desde $x = -\infty$ y $x = \infty$ moviéndose a través de la zona de influencia del potencial. Por otro lado, b_+ y a_- son los coeficientes correspondientes de las ondas planas salientes, asociadas con partículas moviéndose fuera del potencial. Es útil introducir la matriz \mathbf{S} , la cual nos permite calcular las amplitudes de las funciones de onda salientes en términos de las entrantes

$$\begin{pmatrix} b_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_- \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

La matriz \mathbf{S} puede ser expresada en función de los elementos de la matriz \mathbf{M} . Las ecuaciones

$$b_+ = \alpha a_+ + \beta a_- \quad (1.3.2)$$

$$b_- = \beta^* a_+ + \alpha^* a_-, \quad (1.3.3)$$

implican que

$$a_- = \frac{1}{\alpha^*} (b_- - \beta^* a_+). \quad (1.3.4)$$

Sustituyendo esta relación en (1.3.2), obtenemos

$$b_+ = \frac{1}{\alpha^*}(\alpha\alpha^*a_+ - \beta\beta^*a_+ + \beta b_-). \quad (1.3.5)$$

Tomando en consideración (1.2.19), podemos escribir a la matriz \mathbf{S} como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha^*} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\beta^* & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.3.6)$$

Es fácil verificar, usando (1.2.19) nuevamente, que

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = \mathbf{I}, \quad (1.3.7)$$

por lo tanto \mathbf{S} es unitaria.

Consideremos, por ejemplo, una partícula incidente de energía E , proveniente desde la izquierda del potencial $V(x)$. La correspondiente función de onda (recordando las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.3)) es

$$\begin{cases} \text{si } x \leq x_1 : & \psi_1(x) = e^{ikx} + a_- e^{-ikx} \\ \text{si } x \geq x_2 : & \psi_2(x) = b_+ e^{ikx} \end{cases}, \quad (1.3.8)$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Ya que $b_- = 0$, las ecuaciones (1.3.1) y (1.3.6) conducen a

$$t = \frac{1}{\alpha^*} \quad (1.3.9)$$

$$r = -\frac{\beta^*}{\alpha^*}, \quad (1.3.10)$$

por lo que la matriz \mathbf{S} se escribe como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} t & -\frac{r^*t}{t^*} \\ r & t \end{bmatrix}, \quad (1.3.11)$$

la cual satisface la condición de unitariedad asegurando la conservación del flujo de corriente. Si existe invariancia bajo reversibilidad temporal, la matriz \mathbf{S} cumple que

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^* = \mathbf{I}. \quad (1.3.12)$$

Esta ecuación, junto con la relación de unitariedad (1.3.7), conllevan a la propiedad de simetría de la matriz \mathbf{S} , es decir,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (1.3.13)$$

1.4. Matriz de transferencia \mathbf{W}

Existen básicamente dos tipos de matrices de transferencia conocidas: las matrices de transferencia que conectan a las funciones de onda y sus derivadas en dos puntos o planos de la región de dispersión, matrices \mathbf{W} [13, 14], y las matrices de transferencia que relacionan los vectores de estado en esos puntos o planos, conocidas como matrices \mathbf{M} . Ambos tipos de matrices de transferencia están relacionadas una con otra vía una transformación de semejanza. En este trabajo seguimos los métodos y notación desarrollada en [13] y [14].

La matriz de transferencia \mathbf{W} resulta cuando se aplica el método de reducción de orden de la teoría de ecuaciones diferenciales, a la ecuación de Schrödinger. El método a seguir para obtener la matriz \mathbf{W} es rigurosamente válido para potenciales constantes y potenciales seccionalmente constantes. En este trabajo se usará dicho método para potenciales lineales bajo las condiciones expresadas en el apéndice B que se resumen en

la relación

$$fx \ll \frac{\hbar^2 u^2}{m} \quad (1.4.1)$$

para el campo f .

Para ilustrar lo anterior, considérese el potencial ilustrado en la Figura 1.4 y descrito por la ecuación (1.4.2)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ V(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ -\Delta U & x \geq x_2 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

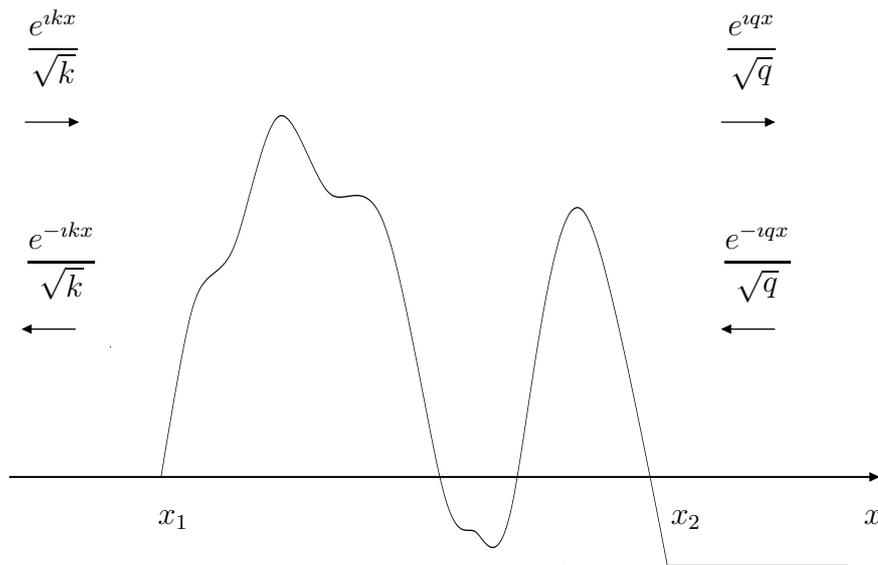


Figura 1.4: Potencial unidimensional $V(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$, con ondas planas entrantes y salientes de ambos lados del potencial

La ecuación de Schrödinger, para el intervalo $[x_1, x_2]$, es

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \varphi = 0. \quad (1.4.3)$$

Si se define el vector

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}, \quad (1.4.4)$$

la ecuación de Schrödinger se escribe como sigue

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u^2(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}, \quad (1.4.5)$$

o bien

$$\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = \mathbf{U}(x)\mathbf{f}(x), \quad (1.4.6)$$

con

$$\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u^2(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.4.7)$$

donde $u^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)$. En la referencia [13] se muestra que (1.4.6) debe satisfacer la siguiente relación:

$$\mathbf{f}(x_2) = \mathbf{W}(x_2 - x_1)\mathbf{f}(x_1), \quad (1.4.8)$$

con la siguiente definición

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) \equiv e^{\mathbf{U}(x_2 - x_1)}. \quad (1.4.9)$$

Para determinar la forma de la matriz $\mathbf{W}(x_2 - x_1)$ consideremos el desarrollo en serie de la función exponencial e^y , que al aplicarlo a la ecuación 1.4.9, la matriz $\mathbf{W}(x_2 - x_1)$

resulta tener la siguiente estructura

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) = \begin{bmatrix} \cosh [u(x_2 - x_1)] & \frac{1}{u} \sinh [u(x_2 - x_1)] \\ u \sinh [u(x_2 - x_1)] & \cosh [u(x_2 - x_1)] \end{bmatrix}, \quad (1.4.10)$$

recordando que $u^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)$.

Una propiedad muy útil de las matrices de transferencia \mathbf{W} , al igual que de las matrices de transferencia \mathbf{M} , es la multiplicatividad serial, es decir,

$$\mathbf{W}(x_3 - x_1) = \mathbf{W}(x_3 - x_2) \cdot \mathbf{W}(x_2 - x_1). \quad (1.4.11)$$

Como se mencionó anteriormente, existe una transformación de semejanza entre las matrices de transferencia \mathbf{M} y \mathbf{W} , tomemos por ejemplo el potencial de la Figura 1.4. Las funciones de onda en las regiones libres de potencial, es decir, en la región $x \leq x_1$ y en la región $x \geq x_2$, son:

Vectores de Estado en la Región 1 ($x \leq x_1$)

$$\varphi_1(x) = \frac{a_1}{\sqrt{k}} e^{ikx} + \frac{b_1}{\sqrt{k}} e^{-ikx}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (1.4.12)$$

la cual permite la formación del “vector de continuidad” para la región $x \leq x_1$, mismo que está determinado por

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_1'(x_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 e^{ikx_1} \\ b_1 e^{-ikx_1} \end{bmatrix}, \quad (1.4.13)$$

que nos permite definir el vector

$$\mathbf{f}_1(x_1) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_1'(x_1) \end{bmatrix}, \quad (1.4.14)$$

mientras que para la región 2 tenemos que

Vectores de Estado en la Región 2 ($x \geq x_2$)

$$\varphi_2(x) = \frac{a_2}{\sqrt{q}}e^{iqx} + \frac{b_2}{\sqrt{q}}e^{-iqx}, \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Delta U + E), \quad (1.4.15)$$

donde nuevamente se forma un vector de continuidad para la región $x \geq x_2$, es decir, un vector de la forma

$$\begin{bmatrix} \varphi_2(x_2) \\ \varphi_2'(x_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iq & -iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2e^{iqx_2} \\ b_2e^{-iqx_2} \end{bmatrix}, \quad (1.4.16)$$

con

$$\mathbf{f}_2(x_2) = \begin{bmatrix} \varphi_2(x_2) \\ \varphi_2'(x_2) \end{bmatrix}. \quad (1.4.17)$$

Ya que la función de la matriz \mathbf{W} es relacionar a las funciones de onda y sus derivadas en dos puntos o planos de la región de dispersión, la relación existente entre el punto x_1 y el punto x_2 , viene dada mediante la expresión

$$\mathbf{f}_2(x_2) = \mathbf{W}(x_2 - x_1)\mathbf{f}_1(x_1) \quad (1.4.18)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iq & -iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2e^{iqx_2} \\ b_2e^{-iqx_2} \end{bmatrix} = \mathbf{W}(x_2 - x_1) \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1e^{ikx_1} \\ b_1e^{-ikx_1} \end{bmatrix} \quad (1.4.19)$$

y desarrollando la ecuación (1.4.19) obtenemos la relación entre la Región 1 y 2 mediante la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} a_2 e^{iqx_2} \\ b_2 e^{-iqx_2} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(x_2, x_1) \begin{bmatrix} a_1 e^{ikx_1} \\ b_1 e^{-ikx_1} \end{bmatrix}, \quad (1.4.20)$$

para finalmente obtener la transformación de semejanza

$$\mathbf{M}(x_2, x_1) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iq & -iq \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{W}(x_2 - x_1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix}, \quad (1.4.21)$$

que permite determinar la matriz \mathbf{M} a partir de la matriz \mathbf{W} y viceversa, al mismo tiempo que resulta posible escribir las amplitudes de transmisión t y reflexión r . Existen problemas donde es complicado emplear el formalismo de la matriz de transferencia \mathbf{M} y resulta necesario recurrir a la matriz de transferencia \mathbf{W} .

Cuando se considera un potencial bidimensional ($2D$), como el siguiente

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1, & \omega_{y1} \leq y \leq \omega_{y2} \\ V(x, y) & x_1 \leq x \leq x_2, & \omega_{y1} \leq y \leq \omega_{y2} \\ -\Delta U & x \geq x_2, & \omega_{y1} \leq y \leq \omega_{y2} \\ \infty & y < \omega_{y1}, & y > \omega_{y2} \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Si $V(x, y)$ es seccionalmente constante o se cumplen las condiciones señaladas en el apéndice B y líneas arriba en la ecuación (1.4.1) se tendrá una matriz de transferencia

\mathbf{W} de la forma

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) = \begin{bmatrix} \cosh [\mathbf{u}(x_2 - x_1)] & \frac{1}{\mathbf{u}} \sinh [\mathbf{u}(x_2 - x_1)] \\ \mathbf{u} \sinh [\mathbf{u}(x_2 - x_1)] & \cosh [\mathbf{u}(x_2 - x_1)] \end{bmatrix}, \quad (1.4.23)$$

donde $\mathbf{u}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\mathbf{V}_{ij} - \mathbf{E} \delta_{ij} + \mathbf{E}_j \delta_{ij})$, y es de dimensión $N \times N$, por lo que la matriz \mathbf{W} es de dimensión $2N \times 2N$, además $\mathbf{E}_j = \text{diag}(E_1, E_2, \dots, E_N)$. Igual que para el caso $1D$, para el caso $2D$ las matrices \mathbf{M} y \mathbf{W} satisfacen la relación

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j^{-1/2} & \mathbf{q}_j^{-1/2} \\ i\mathbf{q}_j^{1/2} & -i\mathbf{q}_j^{1/2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{W}(x_2 - x_1) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_j^{-1/2} & \mathbf{k}_j^{-1/2} \\ i\mathbf{k}_j^{1/2} & -i\mathbf{k}_j^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (1.4.24)$$

donde

$$\mathbf{q}_j^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Delta\mathbf{U} \delta_{ij} + \mathbf{E} \delta_{ij} - \mathbf{E}_j \delta_{ij}) \quad (1.4.25)$$

y

$$\mathbf{k}_j^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\mathbf{E} \delta_{ij} - \mathbf{E}_j \delta_{ij}). \quad (1.4.26)$$

A partir de la ecuación (1.4.24) pueden obtenerse la matriz de amplitudes de transmisión t y reflexión r .

1.5. Tiempo de retardo de Wigner

Desde los primeros años de la mecánica cuántica se han formulado las siguientes preguntas: *¿Cuál es el intervalo promedio de tiempo que pasa una partícula, que “tunela”, en una región clásicamente inaccesible?, ¿Cuánto tiempo pasa una partícula en la barrera de potencial antes de ser transmitida? y ¿Cuánto tiempo pasa una partícula en la barrera antes de ser reflejada?* [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Desde 1930 han existido muchos intentos para responder estas preguntas. Para ello, se han propuesto tres tiempos de interés: el tiempo de residencia $\tau_D(E_k)$, que es el tiempo medio que pasa una partícula incidente de energía E_k en la región de una barrera sin considerar si esta es finalmente transmitida o reflejada; el tiempo de transmisión $\tau_T(E_k)$, que es el tiempo medio correspondiente si la partícula es finalmente transmitida y el tiempo de reflexión $\tau_R(E_k)$, el tiempo medio si es reflejada. Existe considerable polémica y confusión alrededor de estos tiempos. En cuanto al tiempo de residencia τ_D , ha sido identificado con una cantidad τ_d definida dentro del contexto de un problema de dispersión del estado estacionario, como el número promedio de partículas dentro de la región de la barrera dividido por el número promedio de partículas que entran (o dejan) a la barrera por unidad de tiempo.

En la década de los cincuentas, usando el análisis de un paquete de ondas, Bohm, Eisenbud y Wigner [21, 22], obtuvieron una expresión para el tiempo de retardo, τ , en colisiones binarias. En el controversial campo de los *tiempos de tunelaje*, el *tiempo de retardo de Wigner* es aceptado como aquel que mide el retraso sufrido por el centroide de un paquete de ondas debido a un proceso de dispersión. En el caso de dispersión elástica, el tiempo de retardo de Wigner τ está dado en términos de la derivada de la fase de la amplitud de transmisión θ_t respecto a la energía como sigue

$$\tau = \hbar \frac{\partial \theta_t}{\partial E}. \quad (1.5.1)$$

La definición (1.5.1) es válida para sistemas unidimensionales. Para el análisis del tiempo de retardo es necesario tener en cuenta la definición de la matriz de transferencia (ecuación (1.2.25)), así como propiedades de los números complejos.

En general, un número complejo se representa de la siguiente manera:

$$z = a + ib \quad (1.5.2)$$

donde a es la parte real del número complejo z y b la parte imaginaria de z (a y b reales). Por otro lado, un número complejo también es representado como

$$z = |z|e^{i\theta} \quad (1.5.3)$$

siendo $|z|$ el módulo de z y θ la fase de z . Las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) implican que

$$\theta = \arctan \left[\frac{b}{a} \right]. \quad (1.5.4)$$

Una vez obtenida la amplitud de transmisión compleja (a partir de (1.2.25)) y considerando la ecuación (1.5.4), se obtiene la fase de la amplitud de transmisión θ_t como

$$\theta_t = \arctan \left[\frac{t_i}{t_r} \right], \quad (1.5.5)$$

donde t_r y t_i son las partes real e imaginaria de la amplitud de transmisión t . Para determinar el tiempo de retardo τ , es necesario aplicar la definición (1.5.1) a la fase de la amplitud de transmisión θ_t , es decir,

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left[\arctan \left(\frac{t_i}{t_r} \right) \right], \quad (1.5.6)$$

por lo que el tiempo de retardo τ [23] se puede escribir como

$$\tau = \frac{t_r \frac{\partial t_i}{\partial E} - t_i \frac{\partial t_r}{\partial E}}{|t|^2}, \quad (1.5.7)$$

donde $|t|^2$ es la probabilidad de transmisión.

Capítulo 2

DISPERSIÓN POR POTENCIALES UNIDIMENSIONALES ($1D$)

Desde los años tempranos de la mecánica cuántica, se han calculado las propiedades de transmisión para potenciales unidimensionales finitos [24, 25, 26]. La evaluación de las amplitudes de dispersión a través de sistemas periódicos finitos con sección transversal finita, es de interés en mecánica cuántica y teoría de la dispersión, como en el entendimiento de los procesos de mezcla de canales físicos y transmisión resonante en heteroestructuras, superredes, puntos cuánticos, etc.

El surgimiento de nuevas tecnologías ha hecho posible la fabricación de guías de onda semiconductoras de dimensiones cuánticas, así como de muchas otras estructuras diminutas y dispositivos electrónicos, abriendo un nuevo capítulo en la física del estado sólido. El punto es que, mediante la investigación de ciertos sistemas particulares, podemos estudiar efectos interesantes, algunas veces inesperados y ocultos.

En este capítulo se ilustra la aplicación de los principales conceptos de la teoría de dispersión, en una dimensión, para partículas sin spin, en el caso de tres perfiles de potencial diferentes. El primer perfil lo constituye una barrera, de altura V_0 y ancho b , conectada a dos conductores en los que el potencial es cero. En este sistema se aplica,

sobre la barrera, un campo eléctrico f , paralelo a la dirección de crecimiento (el eje x). En el segundo caso el dispositivo consta de la misma barrera, más un tramo de longitud a del conductor que está a su derecha y otro tramo de longitud a del conductor que está a su izquierda. Se aplica un campo eléctrico f a este dispositivo de manera que se tiene un pozo-triangular seguido de una barrera. Por último, analizamos el caso de dos barreras de potencial, de ancho b separadas por un pozo de longitud a más un tramo del conductor, de longitud a que está a la izquierda y otro de longitud a que está a la derecha de las barreras. También en este sistema se aplica un campo eléctrico f , teniendo así una configuración de pozos y barreras triangulares alternadas. El transporte electrónico en cada uno de los perfiles será analizado para diferentes valores del campo eléctrico f . A la vez discutiremos el problema del tiempo de transporte en cada una de las configuraciones. Para cada caso obtendremos la matriz de transferencia \mathbf{W} , la matriz de transferencia \mathbf{M} , la amplitud de transmisión t , el coeficiente de transmisión T y el tiempo de retardo τ .

Antes de analizar las propiedades de transporte a través de las heteroestructuras mencionadas anteriormente, es útil recalcar que el método de la matriz \mathbf{W} es válido bajo las condiciones expresadas en el apéndice B, por lo que los resultados obtenidos serán aproximados en este sentido.

2.1. Dispersión por una barrera de potencial inmersa en un campo eléctrico

El problema de dispersión que estudiaremos en esta sección está ilustrado esquemáticamente en la Figura 2.1 y descrito por la función $V(x)$ a continuación:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, & (1) \\ -fx + V_0 & 0 \leq x \leq b, & V_0 > 0, & (2) \\ -\Delta U & x \geq b, & (3) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

En este caso, el potencial a analizar consiste de una barrera de ancho b y altura V_0 , sujeta a una fuerza eléctrica longitudinal externa f . Analizaremos la física del transporte electrónico de este problema para diferentes valores de f , compatibles con la condición mostrada en el apéndice B.

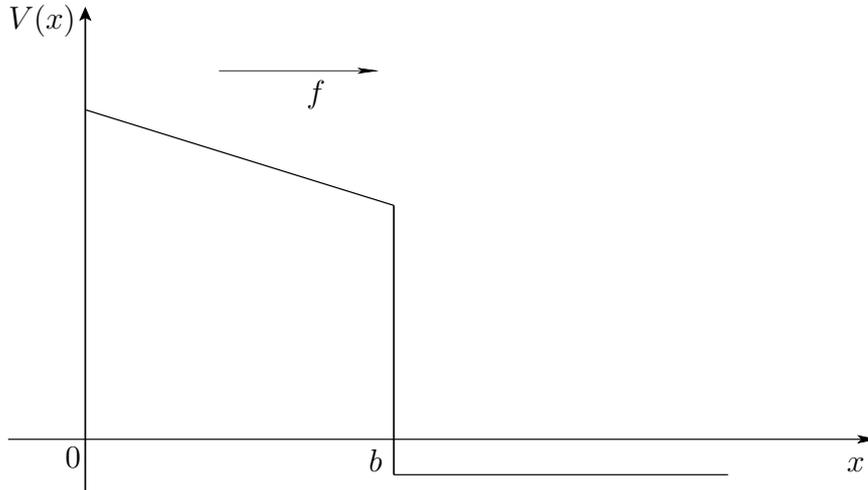


Figura 2.1: Dispersión por una barrera de potencial $1D$, sujeta a una fuerza eléctrica longitudinal externa f .

Para resolver el problema de dispersión producido por el potencial (2.1.1) consideraremos el formalismo de la matriz de transferencia \mathbf{W} . Para ello es necesario introducir la ecuación de Schrödinger en la región donde $0 \leq x \leq b$, es decir, la ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E - fx)\varphi = 0. \quad (2.1.2)$$

Si consideramos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{2mV_0}{\hbar^2} \\ k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ r^2 &= \frac{2mf}{\hbar^2} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

la ecuación (2.1.2) se transforma en la ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = [p^2 - k^2 - r^2x]\varphi. \tag{2.1.4}$$

El formalismo de la matriz \mathbf{W} requiere definir el vector $\phi(x)$ tal que

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}. \tag{2.1.5}$$

permita reescribir la ecuación de Schrödinger de la siguiente manera

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^2 - k^2 - r^2x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}. \tag{2.1.6}$$

Si definimos a la matriz $\mathbf{U}(x)$ como

$$\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^2 - k^2 - r^2x & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.1.7}$$

la ecuación (2.1.6) se transforma en una ecuación de primer orden

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \mathbf{U}(x)\phi(x), \tag{2.1.8}$$

cuya solución es

$$\phi(x_2) = e^{\mathbf{U}(x_2-x_1)}\phi(x_1), \quad (2.1.9)$$

la cual se puede expresar como

$$\phi(x_2) = \mathbf{W}(x_2 - x_1)\phi(x_1), \quad (2.1.10)$$

donde $\mathbf{W}(x_2 - x_1)$ es la matriz de transferencia que conecta al vector de onda $\phi(x_1)$ con el vector $\phi(x_2)$. La matriz de transferencia \mathbf{W} , en la región $0 \leq x \leq b$ del potencial 2.1.1, la escribiremos de la siguiente manera

$$\mathbf{W}(b - 0) = \exp \left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ u^2 & 0 \end{array} \right) b \right] \quad (2.1.11)$$

en donde $u^2 = p^2 - k^2 - r^2b/2$. Si desarrollamos la función exponencial de la ecuación (2.1.11) en serie de potencias, la representación alternativa de $\mathbf{W}(b - 0)$ es

$$\mathbf{W}(b - 0) = \begin{bmatrix} \cosh [u b] & \frac{1}{u} \sinh [u b] \\ u \sinh [u b] & \cosh [u b] \end{bmatrix}. \quad (2.1.12)$$

En el Capítulo *I* vimos que otra matriz que relaciona funciones de onda en dos puntos es la matriz de transferencia \mathbf{M} , que en nuestro problema es la matriz que satisface la relación

$$\begin{bmatrix} a_3 e^{iqb} \\ b_3 e^{-iqb} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(b, 0) \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Obtendremos esta matriz porque nos permite determinar directamente las amplitudes

de dispersión.

La función de la matriz de transferencia \mathbf{W} es relacionar a las funciones de onda y sus derivadas en dos puntos o planos de la región de dispersión, la relación existente entre el punto 0 y el punto b , viene expresada por

$$\phi_3(x_2 = b) = \mathbf{W}(b - 0)\phi_1(x_1 = 0) \quad (2.1.14)$$

con

$$\phi_1(x_1 = 0) = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (2.1.15)$$

y

$$\phi_3(x_2 = b) = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iq & -iq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 e^{iqb} \\ b_3 e^{-iqb} \end{bmatrix}. \quad (2.1.16)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16) en la ecuación (2.1.14), obtendremos la expresión para la matriz \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iq & -iq \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{W}(b - 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \quad (2.1.17)$$

donde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $q^2 = 2m(\Delta U + E)/\hbar^2$. De manera que la matriz \mathbf{M} tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad (2.1.18)$$

con

$$\alpha = -\frac{\sqrt{q}}{2iq\sqrt{k}} \left(-iq \cosh[ub] - u \sinh[ub] + ik \left(-iqu^{-1} \sinh[ub] - \cosh[ub] \right) \right) \quad (2.1.19)$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{q}}{2iq\sqrt{k}} \left(-iq \cosh[ub] - u \sinh[ub] - ik \left(-iqu^{-1} \sinh[ub] - \cosh[ub] \right) \right) \quad (2.1.20)$$

$$\gamma = -\frac{\sqrt{q}}{2iq\sqrt{k}} \left(-iq \cosh[ub] + u \sinh[ub] + ik \left(-iqu^{-1} \sinh[ub] + \cosh[ub] \right) \right) \quad (2.1.21)$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{q}}{2iq\sqrt{k}} \left(-iq \cosh[ub] + u \sinh[ub] - ik \left(-iqu^{-1} \sinh[ub] + \cosh[ub] \right) \right) \quad (2.1.22)$$

que representan las amplitudes de dispersión.

2.1.1. Efecto del campo eléctrico en el coeficiente de transmisión T

A partir de la ecuación (2.1.18) es inmediato obtener la amplitud de transmisión t (elemento α de \mathbf{M}). Por lo tanto, la amplitud de transmisión t va a estar representada por la siguiente ecuación

$$t = \frac{2i\sqrt{k}\sqrt{q}}{iq \cosh[ub] - u \sinh[ub] + ik \cosh[ub] + \frac{kq}{u} \sinh[ub]} \quad (2.1.23)$$

recordemos que $u^2 = p^2 - k^2 - r^2b/2$; consiguientemente el coeficiente de transmisión se obtendrá como $T = tt^*$, es decir,

$$T = \frac{4kq}{4kq + (q - k)^2 + (q - k)^2 \sinh^2[ub] + \frac{(u^2 + kq)^2 \sinh^2[ub]}{u^2}} \quad (2.1.24)$$

Los resultados mostrados en la Figura 2.2 corresponden a una barrera de potencial de altura $V_0 = 0.23$ eV (que se forma en la banda de conducción cuando una capa de $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$, con masa efectiva $m_{Al_{0.3}Ga_{0.7}As} = 0.1 m_e$, se intercala entre los “leads” de $GaAs$ ($m_{GaAs} = 0.067 m_e$)) con ancho $b = 10$ nm, ambos valores fijos. La barrera está sujeta a una fuerza longitudinal externa f (eV/nm).

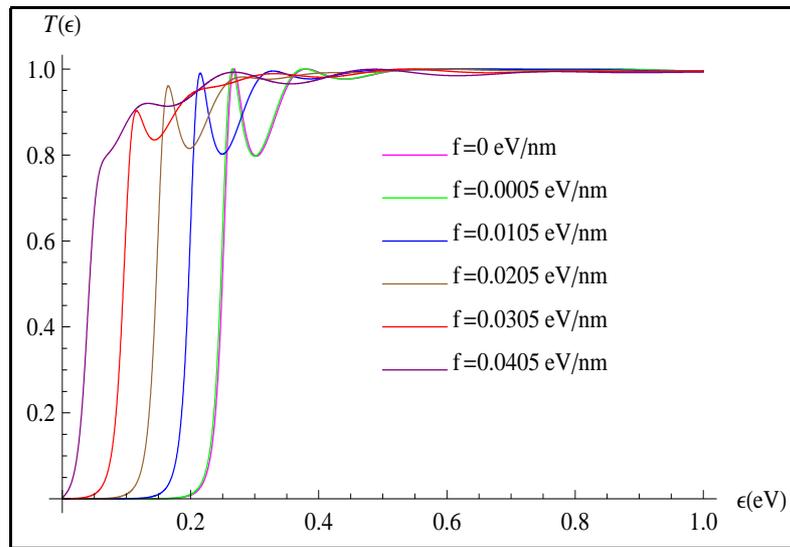


Figura 2.2: El coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ como función de la energía ϵ (eV), variando la fuerza eléctrica longitudinal externa f (eV/nm). $T(\epsilon)$ aumenta ya que la barrera se vuelve más transparente a las partículas incidentes.

Cuando $f = 0$ eV/nm, el coeficiente de transmisión corresponde al de una barrera de potencial rectangular. En ese caso se sabe que T toma valores muy pequeños cuando $\epsilon_F < V_0$. El valor de T crece rápidamente cuando $\epsilon_F \sim V_0$. Si $f \neq 0$ la energía ϵ_F para la cual T crece, es cada vez más pequeña conforme f crece, como se puede ver en la Figura 2.2. Esto se debe a que el ancho efectivo de la barrera que “sienten” las partículas incidentes es cada vez menor.

2.1.2. Difracción de Bragg y su relación con las resonancias del coeficiente de transmisión T

Por otro lado, si consideramos la expresión para el coeficiente de transmisión, ecuación (2.1.24), podemos observar que cuando $\epsilon_F > V_0$ el coeficiente de transmisión T es resonante, en cuyo caso los “*senos hiperbólicos*” se transformarán en “*senos trigonométricos*”. Se puede ver que las resonancias de T se obtienen para energías ϵ que satisfacen la ecuación $[u b] = n\pi$, por lo que $\text{sen}[u b] = 0$. Bajo ésta condición, se obtiene el comportamiento límite para el coeficiente de transmisión (Figura 2.3), representado por la siguiente expresión

$$T \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{(q-k)^2}{4kq}} \quad (2.1.25)$$

Las resonancias del coeficiente de transmisión T se obtienen a partir de la siguiente ecuación

$$E = V_0 - \frac{fb}{2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mb^2} n^2 \quad (2.1.26)$$

donde n es un entero. Además cabe notar que en las resonancias $T \leq 1$ y que $T = 1$ si $k = q$.

2.1.3. Efecto del campo eléctrico en el tiempo de retardo de Wigner τ

Una cantidad física importante es el tiempo de retardo de Wigner τ , que se determina a partir de la expresión

$$\tau = \frac{t_r \frac{\partial t_i}{\partial E} - t_i \frac{\partial t_r}{\partial E}}{|t|^2} \quad (2.1.27)$$

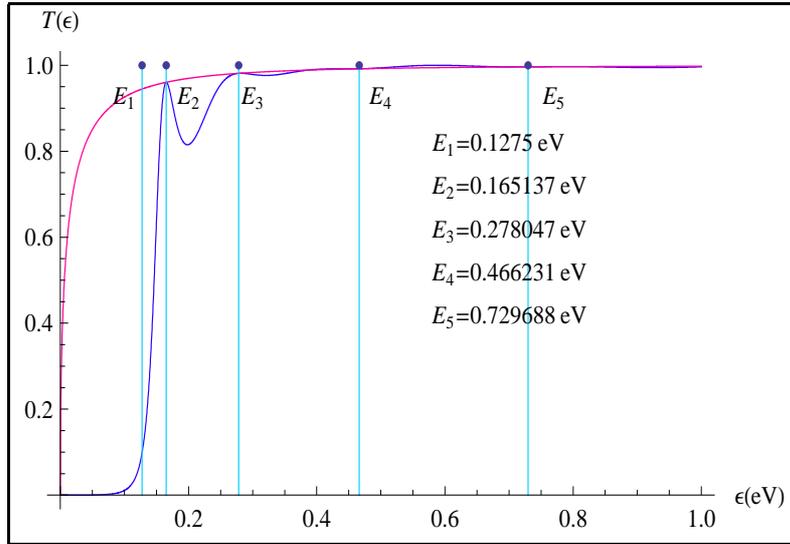


Figura 2.3: Coeficiente de Transmisión Límite, T_l (línea rosa), contrastado con el Coeficiente de Transmisión Total, T_t (línea azul). Se muestra que T_l pasa por los puntos máximos de T_t . En este caso T_t y T_l fueron obtenidos para $f = 0.0205$ eV/nm.

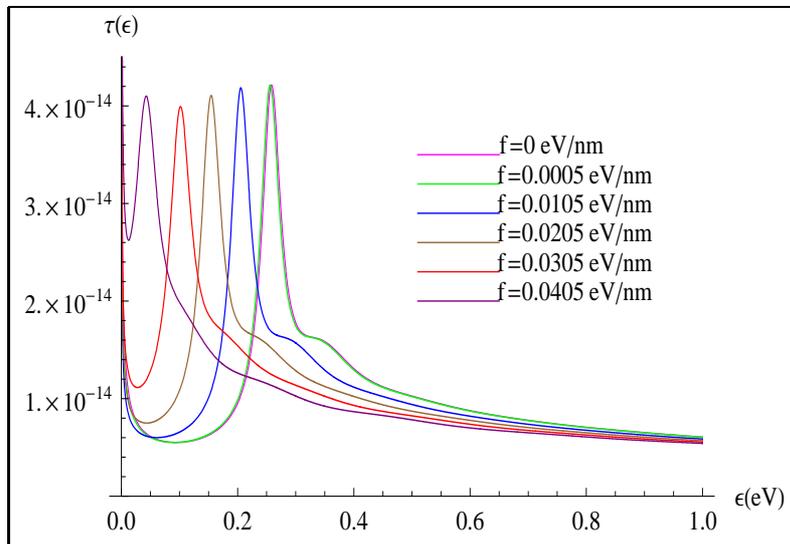


Figura 2.4: El tiempo de retardo de Wigner $\tau(\epsilon)$ como función de la energía ϵ (eV), variando la fuerza eléctrica longitudinal externa f (eV/nm). Con el aumento de la fuerza $\tau(\epsilon)$ disminuye.

Para el potencial (2.1.1), el tiempo de retardo de Wigner $\tau(\epsilon)$ se puede graficar como función de la energía ϵ (eV), variando nuevamente la fuerza eléctrica f (eV/nm), (ver Figura 2.4). En cada caso el tiempo de retardo se grafica manteniendo constantes las masas efectivas $m_{Al_{0.3}Ga_{0.7}As}$ y m_{GaAs} , el ancho $b = 10$ nm y la altura $V_0 = 0.23$ eV de la barrera de potencial. Existen ciertos valores de la energía, a las que llamaremos energías de transmisión resonante ϵ_r , donde T es resonante, y donde se localizan los máximos del tiempo de retardo τ . Para éstas ϵ_r , donde τ es máximo, los estados se *ven* ampliados, es decir, las partículas incidentes tienen tiempos de permanencia mayores. Cuando $f \neq 0$, los estados maximizados disminuyen conforme f crece, debido a que la barrera de potencial se vuelve más transparente a las partículas incidentes provocando que éstas pasen menos tiempo en ella, por lo que el tiempo de retardo se vuelve cada vez menor.

2.2. Dispersión por un pozo-triangular y una barrera de potencial sujetos a un campo eléctrico

En esta sección analizaremos nuevamente las propiedades de transporte electrónico para un potencial unidimensional descrito por la siguiente función

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, & (1) \\ -fx & 0 \leq x \leq a, & (2) \\ -fx + V_0 & a \leq x \leq b + a, & V_0 > 0, & (3) \\ -fx & b + a \leq x \leq 2a + b, & (4) \\ -\Delta U & x \geq 2a + b, & (5) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

El potencial se encuentra esquematizado en la Figura 2.5. El dispositivo a analizar

consta de una barrera de potencial de altura V_0 y ancho b más un tramo, de longitud a , de los conductores que están a su izquierda y a su derecha. Se aplica un campo eléctrico f a este dispositivo de manera que se tiene un pozo triangular seguido de una barrera.

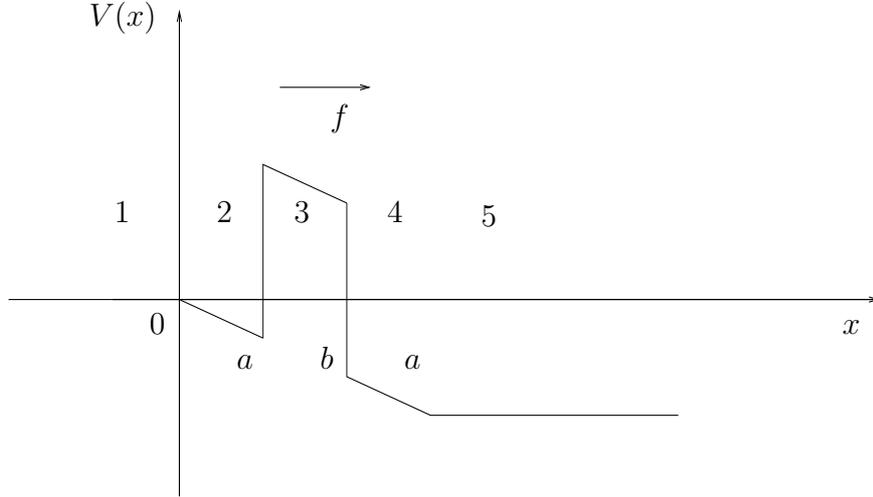


Figura 2.5: Dispersión por un pozo-triangular y una barrera de potencial $1D$, sujetos a una f externa longitudinal.

Nuevamente queremos encontrar las matrices $\mathbf{W}(x_j - x_i)$ que nos permitan relacionar las regiones (1) y (5) del potencial arriba mencionado y obtener la matriz de transferencia \mathbf{M} , que determina la amplitud de transmisión t y posteriormente la probabilidad de transmisión $T = tt^*$. Para ello consideremos el siguiente procedimiento. La ecuación de Schrödinger asociada a la región (2) de (2.2.1) es

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - (-k^2 - r^2x)\varphi = 0 \quad (2.2.2)$$

donde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $r^2 = 2mf/\hbar^2$. Cuando aplicamos el método de reducción de orden a la ecuación (2.2.2), la matriz de transferencia $\mathbf{W}(a - 0)$ correspondiente se obtiene por la ecuación

$$\mathbf{W}_2(a-0) = \begin{bmatrix} \cosh [u_2 a] & \frac{1}{u_2} \sinh [u_2 a] \\ u_2 \sinh [u_2 a] & \cosh [u_2 a] \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

con $u_2^2 = -k^2 - r^2 a/2$.

Analicemos ahora el intervalo comprendido entre $a \leq x \leq b+a$. La ecuación de Schrödinger en la región 3, está expresada de la siguiente manera

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = (p^2 - k^2 - r^2 x)\varphi(x) \quad (2.2.4)$$

donde $p^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ y $r^2 = \frac{2mf}{\hbar^2}$. Si aplicamos el método de reducción de orden a (2.2.4), la matriz de transferencia $\mathbf{W}((b+a)-a)$ se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\mathbf{W}_3((b+a)-a) = \begin{bmatrix} \cosh [u_3 b] & \frac{1}{u_3} \sinh [u_3 b] \\ u_3 \sinh [u_3 b] & \cosh [u_3 b] \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

con $u_3^2 = p^2 - k^2 - r^2(2a+b)/2$.

En la región (4), $b+a \leq x \leq 2a+b$, la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - (-k^2 - r^2 x)\varphi(x) = 0 \quad (2.2.6)$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $r^2 = 2mf/\hbar^2$. Nuevamente aplicamos reducción de orden a (2.2.6),

de manera que la matriz de transferencia $\mathbf{W}((2a + b) - (b + a))$ que obtenemos está representada por la siguiente función

$$\mathbf{W}_4((2a + b) - (b + a)) = \begin{bmatrix} \cosh [u_4 a] & \frac{1}{u_4} \sinh [u_4 a] \\ u_4 \sinh [u_4 a] & \cosh [u_4 a] \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

donde $u_4^2 = -k^2 - \frac{r^2}{2}(2(a + b) + a)$.

Por lo tanto, la matriz de transferencia $\mathbf{W}((2a + b) - 0)$, que relaciona a las regiones (1) y (5), queda determinada mediante el producto de las matrices $\mathbf{W}(x_j, x_i)$ de cada región (multiplicatividad serial de matrices de transferencia), es decir,

$$\mathbf{W}((2a + b) - 0) = \mathbf{W}_4((2a + b) - (b + a)) \cdot \mathbf{W}_3((b + a) - a) \cdot \mathbf{W}_2(a - 0), \quad (2.2.8)$$

la cual define a la matriz de transferencia $\mathbf{M}(2a + b, 0)$ asociada, vía la transformación de semejanza siguiente

$$\mathbf{M}(2a + b, 0) = -\frac{1}{2iq} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} -iq & -1 \\ -iq & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{W}(2a + b - 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix}, \quad (2.2.9)$$

y por lo tanto del coeficiente de transmisión.

2.2.1. Desplazamiento del umbral de transmisión como consecuencia del aumento del campo eléctrico

Para determinar la amplitud de transmisión t correspondiente al potencial (2.2.1), consideramos nuevamente la definición de matriz de transferencia \mathbf{M} , de donde obtenemos el siguiente valor para t ,

$$\begin{aligned}
t^* = & 2 \iota \sqrt{k} \sqrt{q} \left/ \left(-g_1 \cosh[u_2 a] - u_2 g_2 \sinh[u_2 a] - \iota \left[q u_2 g_3 \sinh[u_2 a] + q g_4 \cosh[u_2 a] \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \iota \left[-\frac{k}{u_2} g_1 \sinh[u_2 a] + -k g_2 \cosh[u_2 a] \right] + k q \left[g_3 \cosh[u_2 a] + g_4 \frac{\sinh[u_2 a]}{u_2} \right] \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

con

$$g_1 = u_4 \cosh[u_3 b] \sinh[u_4 a] + u_3 \cosh[u_4 a] \sinh[u_3 b] \tag{2.2.11}$$

$$g_2 = \cosh[u_4 a] \cosh[u_3 b] + \frac{u_4}{u_3} \sinh[u_4 a] \sinh[u_3 b] \tag{2.2.12}$$

$$g_3 = \frac{1}{u_4} \cosh[u_3 b] \sinh[u_4 a] + \frac{1}{u_3} \cosh[u_4 a] \sinh[u_3 b] \tag{2.2.13}$$

$$g_4 = \cosh[u_4 a] \cosh[u_3 b] + \frac{u_3}{u_4} \sinh[u_4 a] \sinh[u_3 b] \tag{2.2.14}$$

mientras que el coeficiente de transmisión T está representado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
T = & 4 k q \left/ \left((1/2 u_2^2 u_3^2 u_4^2) \left(y_1 u_4^2 \cosh^2[au_4] + y_2 u_3^2 \cosh^2[bu_3] + \right. \right. \right. \\
& + y_3 u_2 (k^2 + u_2^2) u_3 \sinh[2au_2] + y_4 \sinh^2[au_2] + \\
& + (1/2) u_2^2 \cosh^2[au_2] \left[8 k q u_3^2 u_4^2 - k^2 (q^2 - u_4^2) (u_3^2 + u_4^2) + \right. \\
& + u_3^2 (q^2 - u_4^2) (u_3^2 + u_4^2) + (k^2 + u_3^2) \cosh[2bu_3] \left((q - u_4)(q + u_4)(-u_3 + u_4)(u_3 + u_4) + \right. \\
& \left. \left. \left. + (q^2 + u_4^2)(u_3^2 + u_4^2) \cosh[2au_4] \right) + (q^2 + u_4^2) y_5 \right] \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
y_1 = & 2(qu_2^2 + ku_3^2)^2 \sinh^2[au_2] \sinh^2[bu_3] + \\
& + u_2(k^2 + u_2^2)u_3(q^2 + u_3^2) \sinh[2au_2] \sinh[2bu_3]
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & 2(-kq + u_2^2)^2 u_4^2 \cosh^2[au_4] \sinh^2[au_2] + 2(qu_2^2 + ku_4^2)^2 \times \\
& \times \sinh^2[au_2] \sinh^2[au_4] + u_2(k^2 + u_2^2)u_4(q^2 + u_4^2) \sinh[2au_2] \sinh[2au_4]
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\begin{aligned}
y_3 = & (q^2 u_3^2 + u_4^4) \sinh[2bu_3] \sinh^2[au_4] + u_3 u_4 (q^2 + u_4^2) \sinh^2[bu_3] \sinh[2au_4]
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

$$\begin{aligned}
y_4 = & 2(kqu_3^2 - u_2^2 u_4^2)^2 \sinh^2[bu_3] \sinh^2[au_4] + u_3(u_2^4 + k^2 u_3^2)u_4(q^2 + u_4^2) \times \\
& \times \sinh[2bu_3] \sinh[2au_4]
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$$\begin{aligned}
y_5 = & (k - u_3)(k + u_3)(u_3 - u_4)(u_3 + u_4) \cosh[2au_4] + \\
& + 2u_3(k^2 + u_3^2)u_4 \sinh[2bu_3] \sinh[2au_4]
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Para el potencial (2.2.1), el coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ se grafica como función de la energía ϵ (eV) y la fuerza eléctrica f . La altura de la barrera tiene un valor igual a $V_0 = 0.23$ eV, mientras que los anchos de pozo y barrera son $a = 10$ nm y $b = 20$ nm respectivamente. En el caso de $f = 0$ eV/nm, el coeficiente de transmisión corresponde al de una barrera de potencial rectangular para la cual $T < 1$ cuando $\epsilon_F < V_0$. T aumenta rápidamente cuando $\epsilon_F \sim V_0$. El aumento de la fuerza eléctrica f , para $\epsilon_F < V_0$, provoca que la energía ϵ para la cual T crece se corra a la izquierda de V_0 ,

ya que la altura promedio y el ancho promedio de la barrera (cuando $f \sim V_0$) que “sienten” los electrones es cada vez menor, es decir, la barrera es más transparente a éstos, produciendo una transmisión mayor (ver Figuras 2.6 y 2.7). El incremento en la fuerza eléctrica provoca que la región comprendida entre $0 \leq x \leq a$, se comporte como un pozo de potencial triangular cada vez más pronunciado, propiciando que los niveles energéticos de éste se traslapen con los niveles resonantes de la región correspondiente a la barrera (región 3), originando un coeficiente de transmisión cuyas resonancias se superponen, ver Figuras 2.8 y 2.9.

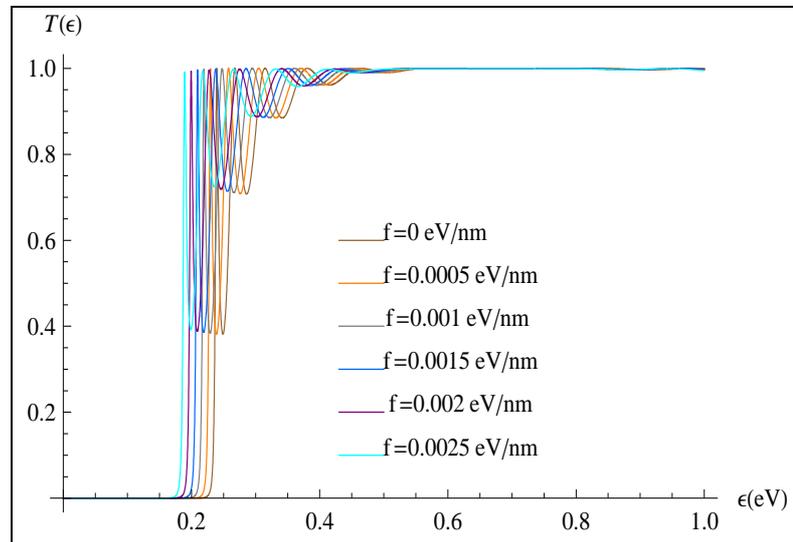


Figura 2.6: El coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ como función de la energía ϵ (eV) y la fuerza eléctrica f (eV/nm). El aumento de f (eV/nm) induce una transmisión para $\epsilon_F \leq V_0$.

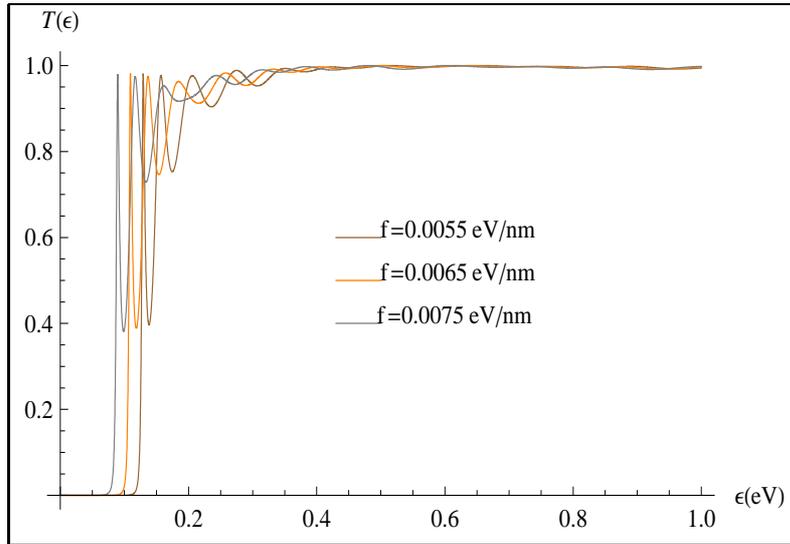


Figura 2.7: El aumento de f (eV/nm) torna a la barrera de potencial más transparente respecto a las partículas incidentes, produciendo un aumento en $T(\epsilon)$.

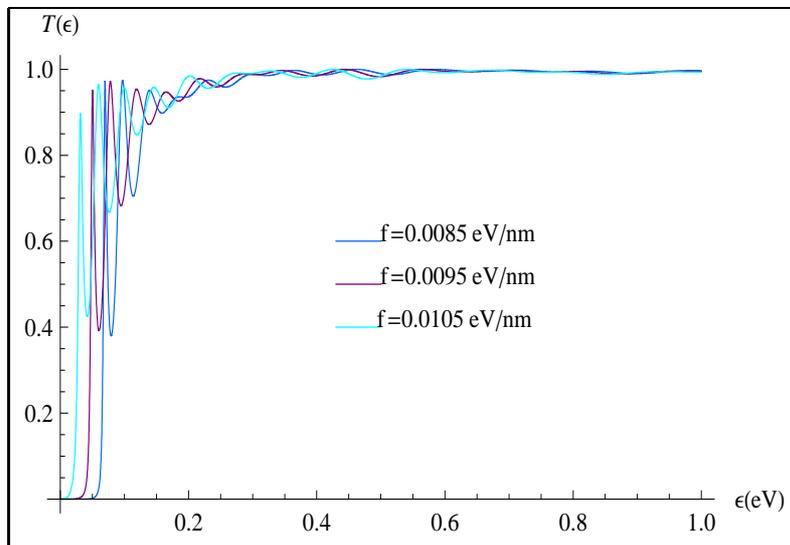


Figura 2.8: El aumento de la fuerza eléctrica f (eV/nm) origina que los niveles energéticos del pozo de potencial triangular se traslapen con los niveles resonantes de la barrera.

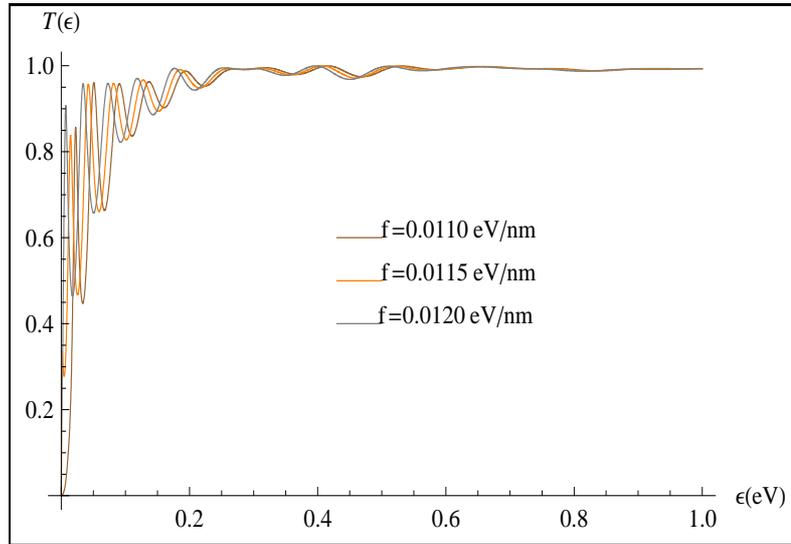


Figura 2.9: El aumento de la fuerza eléctrica f (eV/nm) origina que los niveles energéticos del pozo de potencial triangular se traslapen con los niveles resonantes de la barrera.

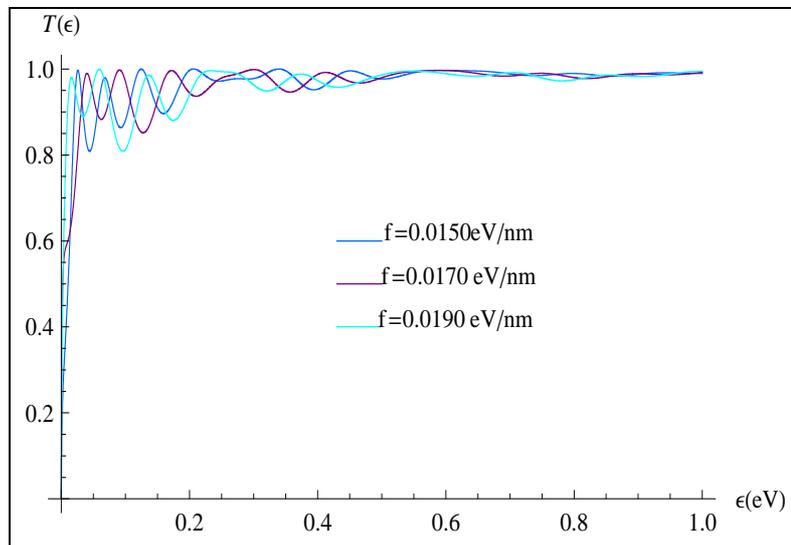


Figura 2.10: El aumento de la fuerza eléctrica f (eV/nm) origina que los niveles energéticos del pozo de potencial triangular se traslapen con los niveles resonantes de la barrera.

El aumento en la fuerza eléctrica provoca que el efecto dominante del potencial (2.2.1) se aproxime al de un pozo.

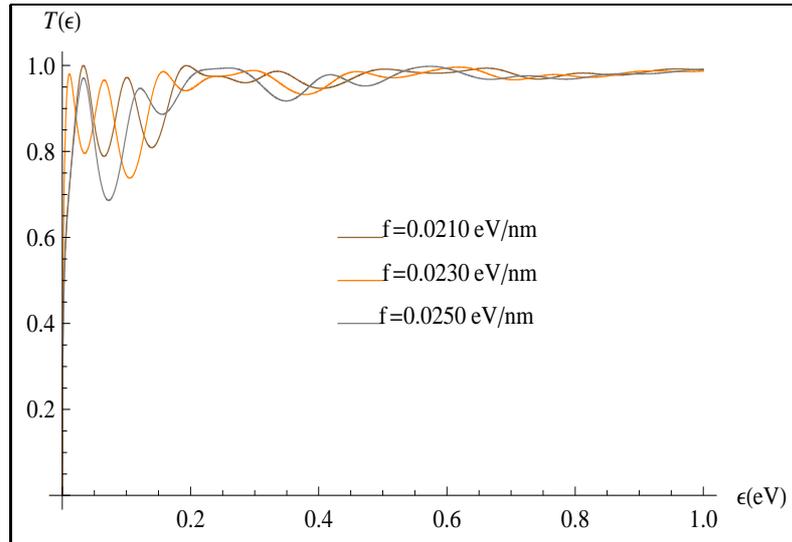


Figura 2.11: El comportamiento del coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ se aproxima al de un pozo de potencial, para una f (eV/nm) creciente.

2.2.2. Resonancias de T

Por otra parte, si analizamos la expresión para el coeficiente de transmisión, ecuación (2.2.15), observamos que cuando $\epsilon_F > V_0$, T es resonante, es decir, los “*senos hiperbólicos*” se convierten en “*senos trigonométricos*” y si además se satisface que el argumento $[u_3 b] = n \pi$, entonces $\sin[u_3 b] = 0$, de manera que el coeficiente de transmisión tiene el

siguiente comportamiento límite

$$\begin{aligned}
T \rightarrow & 4 k q / (1/2 u_2^2 u_3^2 u_4^2) \left(u_3^2 \left(2(-kq + u_2^2)^2 u_4^2 \cosh^2[au_4] \sinh^2[au_2] + \right. \right. \\
& + 2(qu_2^2 + ku_4^2)^2 \sinh^2[au_2] \sinh^2[au_4] + \\
& + u_2(k^2 + u_2^2)u_4(q^2 + u_4^2) \sinh[2au_2] \sinh[2au_4] \left. \right) + \\
& + (1/2)u_2^2 \cosh^2[au_2] \left(8kqu_3^2u_4^2 - k^2(q^2 - u_4^2)(u_3^2 + u_4^2) + \right. \\
& + u_3^2(q^2 - u_4^2)(u_3^2 + u_4^2) + (k^2 + u_3^2) \left((q - u_4)(q + u_4)(-u_3 + u_4)(u_3 + u_4) + \right. \\
& + (q^2 + u_4^2)(u_3^2 + u_4^2) \cosh[2au_4] \left. \right) + (q^2 + u_4^2) \\
& \left. \left. \left((k - u_3)(k + u_3)(u_3 - u_4)(u_3 + u_4) \cosh[2au_4] \right) \right) \right) \quad (2.2.21)
\end{aligned}$$

Apartir de la Figura 2.12, se puede observar que el comportamiento límite del coeficiente de transmisión describe una envolvente para el coeficiente de transmisión total pasando por las resonancias de éste, las cuales están dadas aproximadamente por la siguiente ecuación

$$E = V_0 - \frac{f(2a + b)}{2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mb^2} n^2 \quad (2.2.22)$$

Se resalta el hecho de que en las resonancias $T \leq 1$.

2.2.3. Tiempo de retardo τ

Al igual que para el potencial (2.1.1), el tiempo de retardo $\tau(\epsilon)$ asociado con el potencial (2.2.1) muestra un comportamiento similar, es decir, en las energías resonantes ϵ_r , donde τ es máximo, existen estados en los que las partículas incidentes tienen tiempos de permanencia mayores, pero con el aumento de la fuerza eléctrica estos se ven disminuidos debido a que la barrera se vuelve más transparente a las partículas incidentes, por lo que el tiempo de retardo disminuye, ver Figura 2.13.

La partícula sufre un retraso menor con el aumento de la fuerza eléctrica.

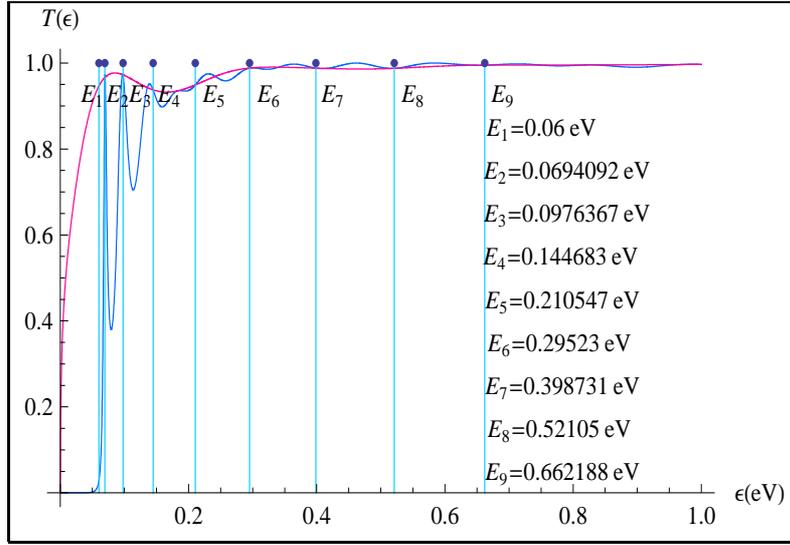


Figura 2.12: Se muestra el coeficiente de transmisión total T_t (línea azul) junto con el comportamiento límite de éste T_l (línea roja). Se puede observar que T_l traza una envolvente para T_t . Esta envolvente pasa por las resonancias de T_t . Tanto T_l como T_t se obtuvieron para $f = 0.0085$ eV/nm.

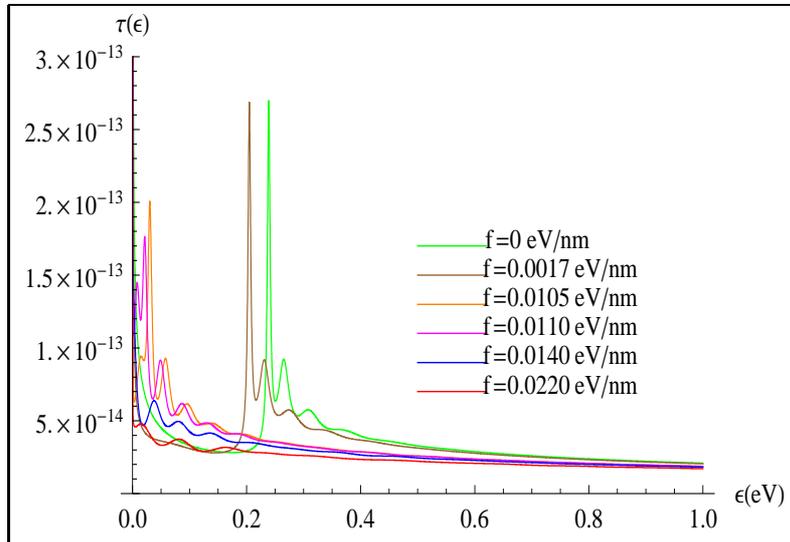


Figura 2.13: Tiempo de retardo $\tau(\epsilon)$ en función de la energía ϵ (eV) variando la fuerza eléctrica f (eV/nm). Conforme f (eV/nm) aumenta, $\tau(\epsilon)$ disminuye.

2.3. Dispersión causada por dos barreras de potencial en presencia de un campo eléctrico

Consideremos ahora el caso de dos barreras de potencial de ancho b , separadas por un pozo de potencial de longitud a más un tramo del conductor, de longitud a , que está a la izquierda y otro a la derecha de las barreras. El dispositivo es sometido a la acción de una fuerza eléctrica longitudinal externa f . Tal configuración se describe en seguida (ver Figura 2.14).

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, & (1) \\ -fx & 0 \leq x \leq a, & (2) \\ -fx + V_0 & a \leq x \leq b + a, & V_0 > 0, & (3) \\ -fx & b + a \leq x \leq 2a + b, & (4) \\ -fx + V_0 & 2a + b \leq x \leq 2a + 2b, & (5) \\ -fx & 2a + 2b \leq x \leq 3a + 2b, & (6) \\ -\Delta U & x \geq 3a + 2b, & (7) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

La matriz de transferencia \mathbf{W} del sistema, estará dada por el producto de las matrices $\mathbf{W}(x_j, x_i)$ de cada una de las regiones, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(3a + 2b - 0) &= \mathbf{W}_6((3a + 2b) - (2a + 2b)) \cdot \mathbf{W}_5((2a + 2b) - (2a + b)) \cdot \\ &\quad \mathbf{W}_4((2a + b) - (b + a)) \cdot \mathbf{W}_3((b + a) - a) \cdot \mathbf{W}_2(a - 0) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

El cálculo de las matrices $\mathbf{W}(x_j, x_i)$ en cada región del potencial (2.3.1) es similar al realizado previamente para los potenciales (2.1.1) y (2.2.1), de manera que las matrices $\mathbf{W}(x_j, x_i)$ están definidas a través de las siguientes relaciones.

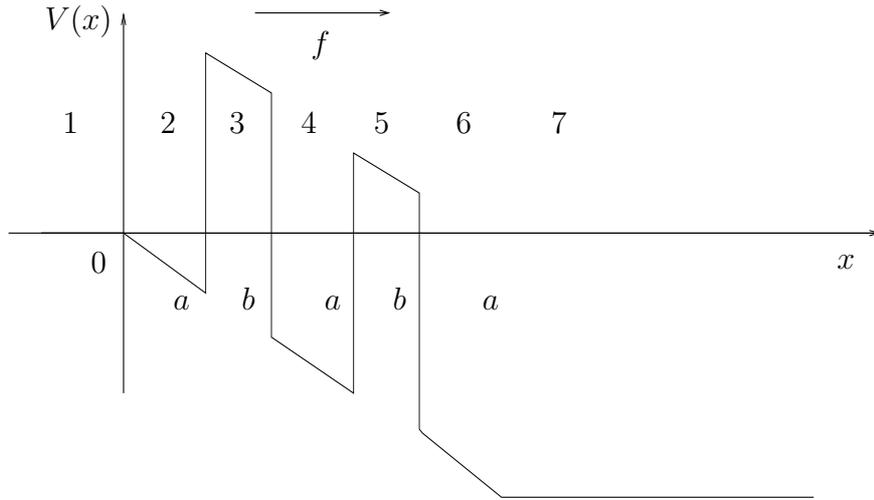


Figura 2.14: Dispersión por dos barreras de potencial unidimensionales, bajo la acción de una fuerza eléctrica.

Para la región 2, la matriz de transferencia \mathbf{W} es

$$\mathbf{W}_2(a-0) = \begin{bmatrix} \cosh [u_2 a] & \frac{1}{u_2} \sinh [u_2 a] \\ u_2 \sinh [u_2 a] & \cosh [u_2 a] \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

siendo $u_2^2 = -k^2 - r^2 a/2$. La matriz de transferencia \mathbf{W} para la región comprendida entre $a \leq x \leq b+a$, está dada por

$$\mathbf{W}_3((b+a)-a) = \begin{bmatrix} \cosh [u_3 b] & \frac{1}{u_3} \sinh [u_3 b] \\ u_3 \sinh [u_3 b] & \cosh [u_3 b] \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

con $u_3^2 = p^2 - k^2 - r^2(2a+b)/2$. Para la región (4) la matriz de transferencia \mathbf{W} se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{W}_4((2a+b)-(b+a)) = \begin{bmatrix} \cosh [u_4 a] & \frac{1}{u_4} \sinh [u_4 a] \\ u_4 \sinh [u_4 a] & \cosh [u_4 a] \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

donde $u_4^2 = -k^2 - r^2(2(a+b) + a)/2$. En la región (5) la matriz de transferencia es

$$\mathbf{W}_5((2a+2b) - (2a+b)) = \begin{bmatrix} \cosh [u_5 b] & \frac{1}{u_5} \sinh [u_5 b] \\ u_5 \sinh [u_5 b] & \cosh [u_5 b] \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

considerando que $u_5^2 = p^2 - k^2 - r^2(2(a+b+a) + b)/2$. Finalmente la matriz de transferencia \mathbf{W} para la región (6) se expresa como

$$\mathbf{W}_6((3a+2b) - (2a+2b)) = \begin{bmatrix} \cosh [u_6 a] & \frac{1}{u_6} \sinh [u_6 a] \\ u_6 \sinh [u_6 a] & \cosh [u_6 a] \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

con $u_6^2 = -k^2 - r^2(2(a+b+a+b) + a)/2$; mientras que la relación de semejanza entre la matriz $\mathbf{M}((3a+2b), 0)$ y la matriz $\mathbf{W}((3a+2b) - 0)$ conserva la estructura anterior, es decir,

$$\mathbf{M}((3a+2b), 0) = -\frac{1}{2iq} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} -iq & -1 \\ -iq & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{W}((3a+2b) - 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

donde $p^2 = 2mV_0/\hbar^2$, $k^2 = 2mE/\hbar^2$, $r^2 = 2mf/\hbar^2$ y $\mathbf{W}((3a+2b) - 0)$ se determina a partir de (2.3.2). La amplitud t y coeficiente $T = tt^*$ de transmisión para el potencial (2.3.1) se obtienen de manera similar que en los casos previos, es decir, a partir de la matriz de transferencia $\mathbf{M}((3a+2b), 0)$.

2.3.1. Tunelaje resonante

El coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ se grafica como función de la energía ϵ (eV) variando la fuerza eléctrica f (eV/nm). Al igual que para los potenciales (2.1.1) y (2.2.1), cuando se grafica el coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ se mantiene constante la altura de la barrera de potencial $V_0 = 0.23$ eV, así como el ancho de pozo $a = 20$ nm y el ancho de barrera $b = 10$ nm. Para $f = 0$ eV/nm el coeficiente de transmisión es el de dos barreras en ausencia de fuerza eléctrica, mismo que muestra resonancias aisladas en la región donde $\epsilon_F < V_0$. Las resonancias aisladas en la doble barrera (DB) ocurren cuando la energía del portador incidente llega a ser aproximadamente igual al nivel de energía de los electrones confinados en los pozos formados en las regiones (2) y (4). Este fenómeno es conocido como Tunelaje Resonante (TR) a través de una DB [27]. Cuando se incrementa la magnitud de la fuerza eléctrica, el potencial se torna más transparente a las partículas incidentes, y eventualmente, el electrón pasa por encima de las barreras al mismo tiempo que siente la aceleración de la fuerza eléctrica y una región casi cero de potencial, de aquí que la zona de resonancias aisladas se haga más estrecha y la región de transmisión continua se amplie a energías menores que la de la barrera. La aplicación de una fuerza eléctrica a una DB introduce una diferencia entre las transmisiones de las dos barreras, haciendo disminuir por abajo de la unidad la transmisión total en la zona de resonancias aisladas.

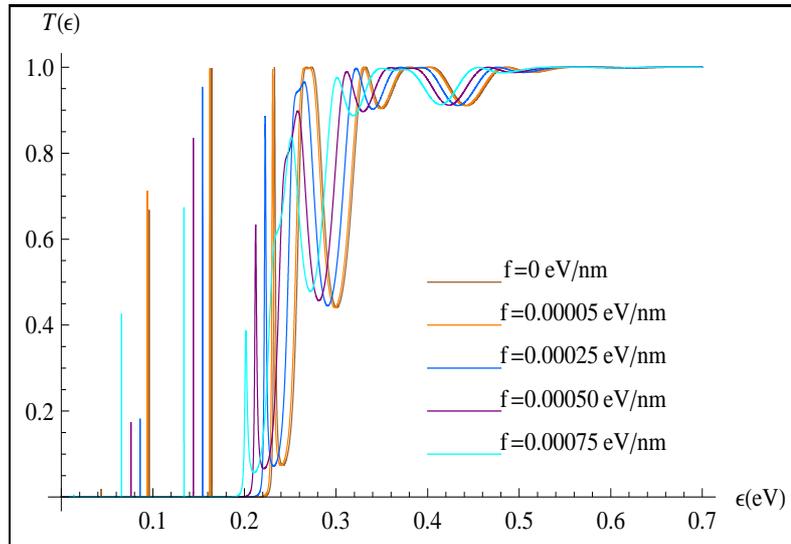


Figura 2.15: El coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ como función de la energía ϵ (eV). Al aumentar f (eV/nm), $T(\epsilon)$ aumenta. Las resonancias aisladas son consecuencia del TR en la DB .

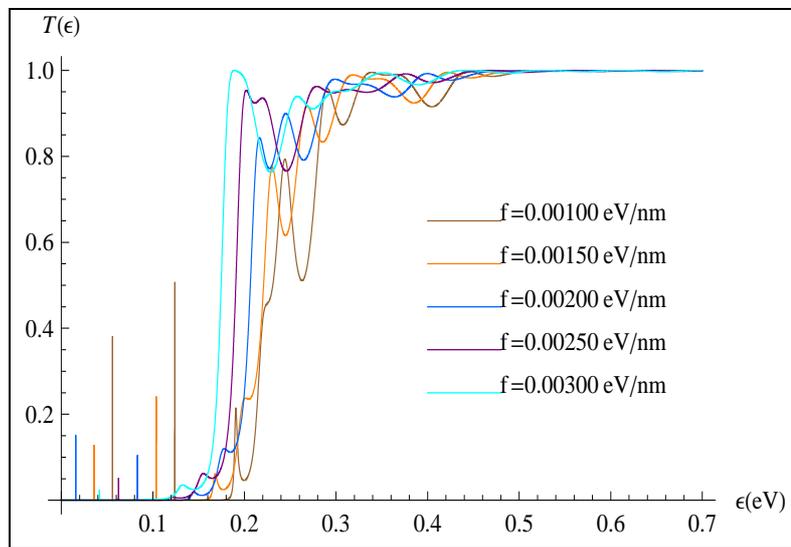


Figura 2.16: Coeficiente de transmisión $T(\epsilon)$ como función de la energía ϵ (eV). El aumento de f (eV/nm) hace que las resonancias aisladas disminuyan por abajo de la unidad.

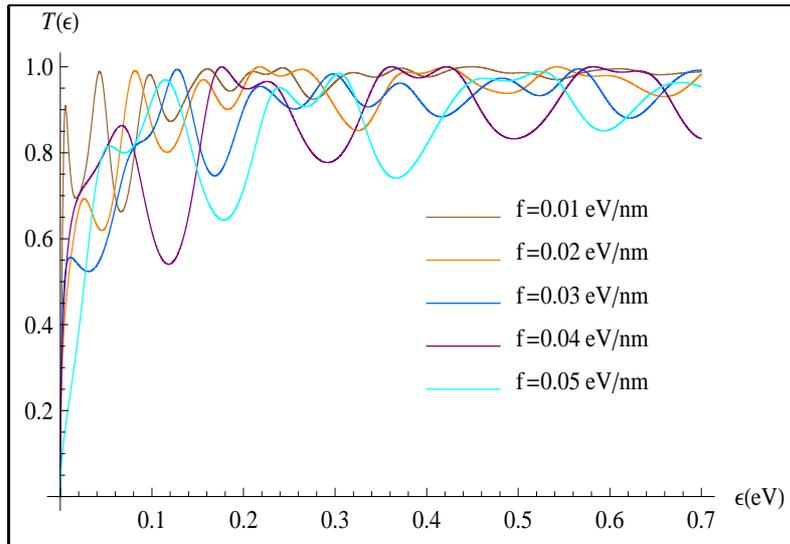


Figura 2.17: Para fuerzas eléctricas muy grandes el TR desaparece. Se observa mezcla de niveles energéticos del pozo triangular con niveles resonantes de la primera barrera. El comportamiento de $T(\epsilon)$ se aproxima al de un pozo de potencial.

El comportamiento resonante del coeficiente de transmisión es análogo al que describe un interferómetro óptico Fabry-Perot.

2.3.2. Efecto del campo eléctrico en el tiempo de retardo τ

El tiempo de retardo de Wigner $\tau(\epsilon)$, en el caso del potencial (2.3.1), reporta el mismo comportamiento que para los potenciales (2.1.1) y (2.2.1), es decir, con el aumento de la fuerza eléctrica el ancho efectivo del potencial que “sienten” los electrones es cada vez menor lo que se traduce en un tiempo de retardo menor.

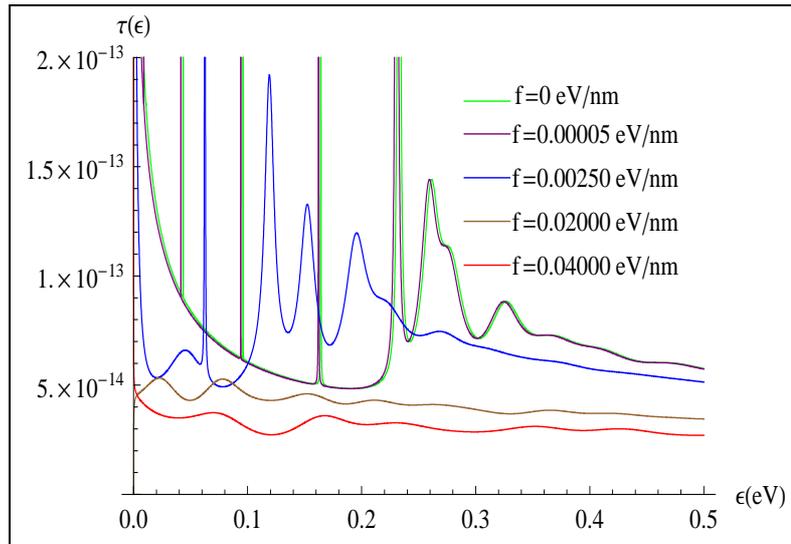


Figura 2.18: Tiempo de retardo $\tau(\epsilon)$ en función de la energía ϵ (eV), variando la fuerza eléctrica f (eV/nm). Con el aumento de f (eV/nm), $\tau(\epsilon)$ disminuye.

2.3.3. Dispositivos a base de tunelaje

La formación de resonancias cuánticas aisladas y el fenómeno de transporte cuántico en heteroestructuras, han abierto la puerta al diseño y fabricación de dispositivos opto-electrónicos; donde muchos de ellos utilizan como estructura básica a la doble barrera [3]. La posibilidad de producir barreras casi perfectas y estructuras cuánticas ultradelgadas, ha dado lugar al desarrollo de métodos de crecimiento de capas semiconductoras, así como a la invención y demostración de una gran cantidad de dispositivos semiconductores, con muy alto rendimiento en aplicaciones estándares o con nuevas funcionalidades.

Una clasificación de estos dispositivos se obtiene considerando el flujo de corriente principal a través del dispositivo: los dispositivos con transporte paralelo a las interfaces y los dispositivos basados en transporte perpendicular.

Dispositivos electrónicos a base de transporte paralelo

Los *transistores de efecto de campo* FET (field effect transistor) son los más representativos de los dispositivos con transporte paralelo. En los FETs la corriente entre dos contactos, fuente (source) y sumidero (drain), es controlada por el voltaje de un tercer electrodo, compuerta (gate), la cual está eléctricamente aislada de la corriente que se genera entre la fuente y el sumidero. La función de este dispositivo es simple en principio: En un circuito lógico éste funciona como un switch, es decir, dependiendo del voltaje de la compuerta, la conexión entre la fuente y el sumidero se corta o cierra. En circuitos analógicos, una pequeña variación temporal del voltaje en la compuerta genera una variación temporal de la corriente entre la fuente y el sumidero. La sensibilidad del dispositivo, y el tiempo de respuesta, está relacionado con el ancho de las resonancias aisladas que encontramos en los sistemas de doble barrera [28].

El transistor “clásico” más importante (con respecto al volumen de producción industrial) es el *MESFET* (metal epitaxial semiconductor field effect transistor) a base de *GaAs*. Existen nuevas heteroestructuras de FETs que han sido desarrolladas en los últimos años: el *TEGFET* (two dimensional electron gas field effect transistor), también llamado *MODFET* (modulation doped field effect transistor), o *SDHT* (selectively doped heterojunction transistor), dependiendo de la manufactura. Todos ellos tienen características en común tanto con los *MESFETs* como con los *MOSFETs* (metal oxide silicon field effect transistor). La estructura de estos dispositivos está basada en la alternancia de capas de *AlGaAs* y *GaAs*. Se ha observado que para estos dispositivos la disminución en la longitud del “gate”, hasta el orden de $1 \mu m$, produce velocidades altas para los electrones que lo atraviesan. En aplicaciones analógicas, la aplicación más interesante de transistores de heterouniones es para la amplificación a muy altas frecuencias del ruido. Se han logrado frecuencias de 94 GHz en un transistor de $0.25 \mu m$

de longitud en el “gate”. Esto también está relacionado con el ancho de las resonancias aisladas en la DB .

A diferencia de los circuitos basados en $GaAs$, los circuitos a base de Si requieren una tecnología mucho más compleja por lo que no están disponibles en el mercado. Por esta razón los circuitos de computadoras están fabricados con tecnología $GaAs$. El nivel de integración en circuitos $GaAs$ ha aumentado tremendamente, los procesos tecnológicos más recientes permiten un millón de transistores en un chip.

Dispositivos electrónicos a base de transporte perpendicular

El *transistor de efecto de campo* (FET, 1920 – 1930) fué descubierto antes que el *transistor bipolar* (1947), pero no se disponía de la tecnología necesaria para fabricarlos masivamente. Es por ello que el transistor bipolar llegó a ser utilizado antes que los FETs. El transistor bipolar a su vez, fué el sustituto de la válvula termoiónica de tres electrodos o *triodo*. El primer semiconductor que realmente funcionó como dispositivo electrónico estaba pensado para transporte perpendicular a través de barreras creadas por dopaje bipolar, como en los diodos $p-n$ y los transistores bipolares de Ge y Si . Aunque el MOSFET ha llegado a ser la estructura más empleada en los circuitos integrados a gran escala, los dispositivos basados en transporte vertical aún sobreviven, aunque su tecnología es considerablemente más compleja. Una limitación importante para la operación a altas frecuencias de los dispositivos FET es el tiempo que les toma a los portadores de carga atravesar la región activa bajo el *gate*, así que la longitud del *gate* debe ser reducida tecnológicamente tanto como sea posible; por lo que puede ser de gran ventaja utilizar transporte perpendicular en heterouniones y de esta manera incrementar la velocidad de los portadores de carga [28].

El dispositivo perpendicular más simple y el más estudiado es el *diodo de doble barrera* basado en el efecto de tunelaje resonante. El diodo de doble barrera muestra

una *diferencial negativa de la resistencia*. El diodo de doble barrera se parece mucho al diodo de tunelaje clásico o diodo Esaki, el cual es una unión $p-n$ altamente dopada. La principal diferencia entre el diodo de doble barrera y el diodo Esaki es que, el diodo de doble barrera tiene un dopaje bastante bajo. La diferencial negativa de la resistencia, para el diodo de doble barrera, persiste hasta 2.5 THz, es decir, tiene tiempos de respuesta bastante rápidos, 10^{-13} s. El desarrollo de osciladores basados en diodos de doble barrera se ha llevado a cabo, principalmente, por un grupo del MIT; ellos obtuvieron frecuencias de 420 GHz con una potencia de salida de $0.2 \mu\text{W}$. El diodo empleado, por el grupo del MIT, tenía barreras de $AlAs$ cuyo ancho era de 1.1 nm.

Para el potencial (2.1.1), el tiempo de respuesta es aproximadamente del orden de 10^{-14} s, mientras que las frecuencias se espera oscilen alrededor de 30 THz. En el caso del potencial (2.2.1) los tiempos de respuesta están entre $10^{-14} - 10^{-13}$ s, con frecuencias del orden de 70 THz.

El transistor bipolar es el dispositivo de transporte vertical estándar. En éste una base tipo- p crea una barrera para los electrones que se propagan desde un emisor tipo- n hasta un colector tipo- n . La ventaja de esta estructura es que el ancho de la base, que tienen que atravesar los electrones, es muy corto.

Con las mejoras tecnológicas se han desarrollado otros dispositivos de transporte vertical, entre ellos los dispositivos *THETA* (tunneling hot electron transistor amplifier), *HET* (hot electron transistor), *RBT* (resonant-tunneling bipolar transistor) y el *RHET* (resonant-tunneling hot electron transistor). El *RHET* puede usarse para crear funciones lógicas como el *NOR*: Si se añaden los valores lógicos de dos variables en la base, puede verse que la corriente del colector será muy alta si y sólo si una de las variables es alta; si ambas son bajas o ambas son altas la corriente del colector será baja. El *RBT* difiere del *RHET* solo por el hecho de que la base tiene dopaje tipo- p .

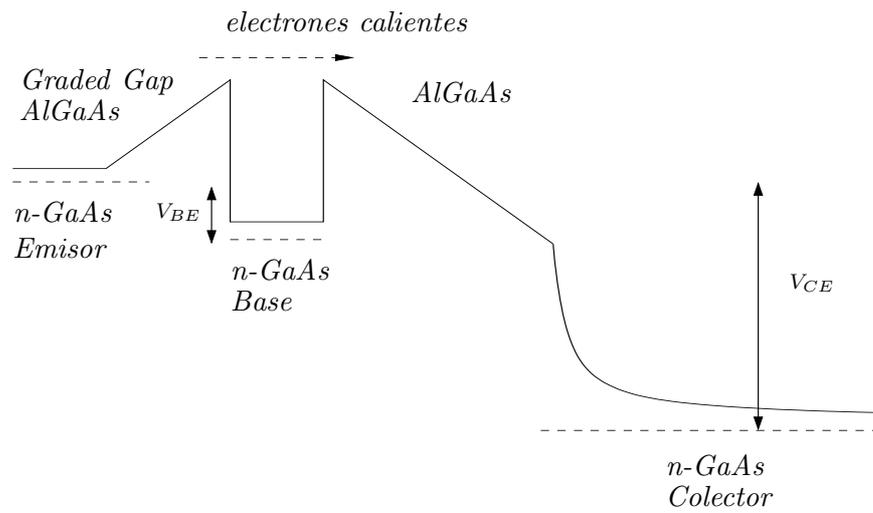


Figura 2.19: Diagrama de bandas de conducción de un HET.

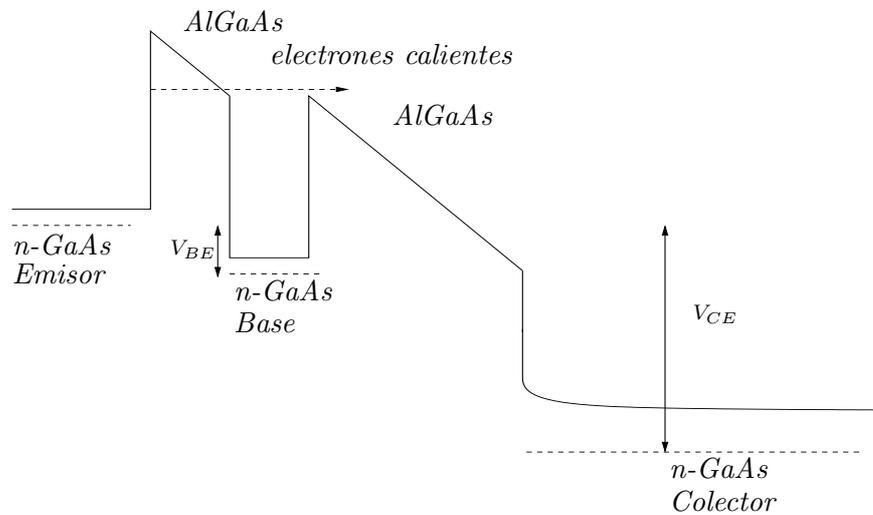


Figura 2.20: Diagrama de bandas de conducción de un THETA.

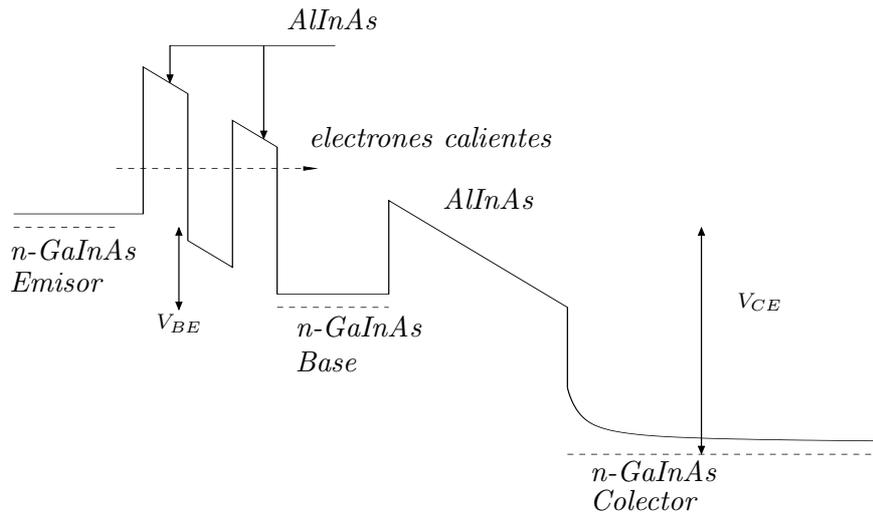


Figura 2.21: Diagrama de bandas de conducción de un RHET.

Entre los dispositivos más sobresalientes se encuentran los *transistores a base de tunelaje resonante*. Estos tienen un transistor bipolar *npn* [29], con un pozo cuántico en la región de la *base* en lugar de una capa graduada [30]. La Figura 2.22 muestra el diagrama de bandas de un transistor bipolar con tunelaje resonante, bajo condiciones de funcionamiento. El voltaje entre la unión *emisor-base* es tal que los electrones en el emisor tunean de manera resonante a través de uno de los niveles de energía del pozo y son “recolectados” por la unión *base-colector*. Sólo cuando tales condiciones de resonancia son satisfechas, los electrones suministrados desde el emisor alcanzan el colector y dan lugar a la acción del transistor. En este caso el tunelaje resonante es alcanzado no por la aplicación de un campo eléctrico a la doble barrera formada, sino por la variación de la energía de los electrones incidentes. De esta manera la simetría de la doble barrera se conserva, lográndose que para todas las frecuencias resonantes, el coeficiente de transmisión resonante sea cercano a la unidad, como en un resonador Fabry-Perot. En la Figura 2.22 los electrones son lanzados balísticamente en el pozo

a partir de la banda de conducción situada en la interface emisor-base. El transistor bipolar a base de tunelaje resonante opera en temperatura ambiente.

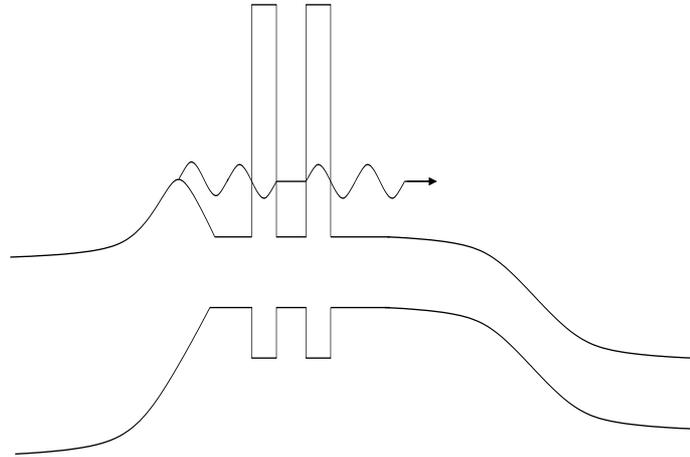


Figura 2.22: Transistor bipolar a base de tunelaje resonante.

Capítulo 3

DISPERSIÓN POR UN POTENCIAL 2D

Sorprendentes avances se han generado, durante los últimos años, en la fabricación de microtecnología, haciendo posible confinar a los electrones de un gas electrónico bidimensional (GE2D), inmersos en una heteroestructura semiconductor, a regiones con una extensión lateral de unos cuantos nanómetros (nm), resultando en guías de onda cuánticas muy reducidas, puntos cuánticos, etc. [31, 32]

Los sistemas de electrones bidimensionales han sido estudiados extensivamente porque llegó a ser factible su construcción, por ejemplo en una interface de $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$ a bajas temperaturas, y porque se mostró que la conductancia está directamente relacionada a las propiedades de transmisión del sistema. Esta relación es conocida como fórmula de Landauer,

$$G = \frac{2e^2}{h} T \quad (3.0.1)$$

donde G denota la conductancia y T el coeficiente de transmisión total.

En este capítulo nuevamente consideraremos los conceptos de las matrices de transferencia \mathbf{W} y \mathbf{M} , aplicados ahora a un $GE2D$, con los electrones moviéndose a través

de un potencial electrificado $V(x, y)$. De la misma manera que para el caso $1D$, se debe determinar la probabilidad de transmisión total T a través del sistema dispersor o la bien conocida conductancia G .

A continuación analizaremos el comportamiento del coeficiente de transmisión T para el caso de dos barreras de potencial bidimensionales, de altura V_0 y ancho b , separadas por un pozo de longitud a y conectadas a dos conductores con los que el potencial es cero. Este sistema está sujeto a una fuerza eléctrica longitudinal externa f y a una fuerza eléctrica transversal externa ϕ . De igual manera, discutiremos el caso del tiempo de transporte τ que resulta del proceso dispersivo.

El problema de dispersión mencionado anteriormente está descrito por la ecuación (3.0.2).

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y + V_0 & 0 \leq x \leq a, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y & a \leq x \leq a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y + V_0 & a + b \leq x \leq 2a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -\Delta U & x \geq 2a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ \infty & y < 0, & y > \omega_y \end{cases} \quad (3.0.2)$$

El potencial $V(x, y)$ se muestra en la Figura 3.1.

Se espera que en este caso el campo eléctrico transversal induzca mezcla de canales. A continuación analizaremos el potencial (3.0.2) de acuerdo al formalismo de la matriz de transferencia \mathbf{W} , para lo cual se considera la siguiente ecuación general de

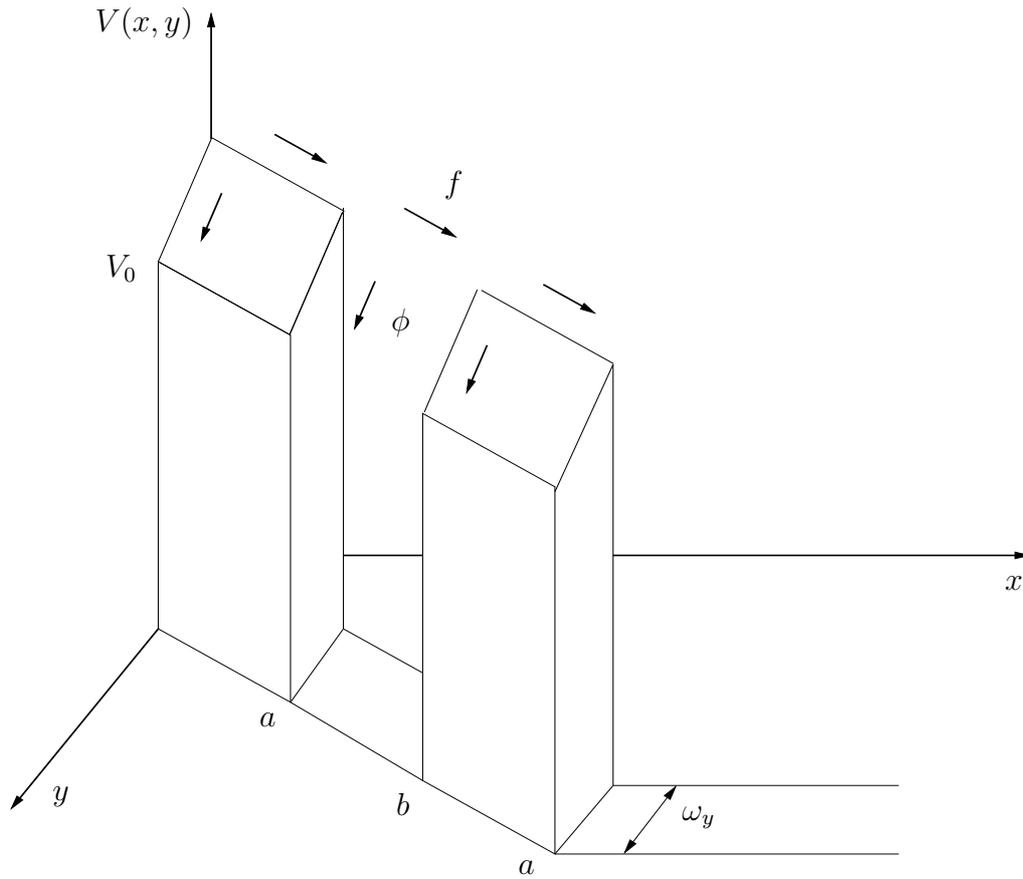


Figura 3.1: Dispersión por un potencial bidimensional, bajo la acción de una fuerza longitudinal f y una fuerza transversal ϕ .

Schrödinger $2D$ independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + V(x, y) \psi(x, y) = E \psi(x, y). \quad (3.0.3)$$

Fuera de la región de dispersión, donde $x \leq 0$ y $V(x, y) = 0$, la ecuación de Schrödinger es separable en las direcciones transversal x y longitudinal y , es decir, la ecuación de Schrödinger acepta soluciones que sean productos de la forma $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$.

Para soluciones separables tenemos entonces una ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X(x)Y(y) + V(x, y)X(x)Y(y) = EX(x)Y(y). \quad (3.0.4)$$

Debido a que el potencial (3.0.2) puede escribirse como $V(x, y) = V(x) + V(y)$, la ecuación de Schrödinger se transforma en

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + V(y) = E \quad (3.0.5)$$

para que el lado derecho y el lado izquierdo de la ecuación (3.0.5) sean iguales es necesario que $E = E_x + E_y$, es decir, que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + V(x) = E_x \quad (3.0.6)$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + V(y) = E_y. \quad (3.0.7)$$

Analicemos lo que ocurre en la dirección transversal y , considerando la ecuación (3.0.7). En este caso (fuera de la región de dispersión) $V(x, y) = 0$, por lo tanto $V(y) = 0$, de manera que la ecuación (3.0.7) se transforma en

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E_y Y(y) \quad (3.0.8)$$

cuya solución está dada por

$$Y(y) = ae^{ik_y y} + be^{-ik_y y}. \quad (3.0.9)$$

Para la dirección transversal se deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$Y(y = 0) = 0 \quad (3.0.10)$$

$$Y(y = \omega_y) = 0 \quad (3.0.11)$$

que producen las siguientes soluciones en la dirección transversal

$$\phi_j(y) = Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\omega_y}} \operatorname{sen} \left[\frac{j\pi y}{\omega_y} \right], \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.0.12)$$

con

$$E_j = E_y = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m \omega_y^2} j^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.0.13)$$

Las soluciones (3.0.12) forman un conjunto completo de funciones de onda, mismas que pueden utilizarse para desarrollar la función de onda total $\psi(x, y)$ donde el potencial no necesariamente es separable. En ese caso $\psi(x, y)$ queda expresada como

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y) X_j(x). \quad (3.0.14)$$

Si se sustituye la función de onda (3.0.14) en la ecuación de Schrödinger (3.0.3), obtenemos un sistema de ecuaciones acopladas (mediante el potencial $V(x, y)$) de la forma [13]

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y) X_j''(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 \pi^2}{\omega_y^2} \phi_j(y) X_j(x) - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} (V(x, y) - E) \phi_j(y) X_j(x) = 0 \quad (3.0.15)$$

donde hemos considerado que

$$X_j''(x) \equiv \frac{d^2 X_j(x)}{dx^2}, \quad (3.0.16)$$

por lo que finalmente nos resulta la siguiente ecuación

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y) X_j''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} (V(x, y) - E + E_j) \phi_j(y) X_j(x) = 0. \quad (3.0.17)$$

Si se multiplica a la ecuación (3.0.17) por $\int_0^{\omega_y} \phi_i^*(y) dy$, esta se transforma en

$$\sum_{j=1}^{\infty} X_j''(x) \int_0^{\omega_y} \phi_i^*(y) \phi_j(y) dy - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\omega_y} (V(x, y) - E + E_j) \phi_i^*(y) \phi_j(y) X_j(x) dy = 0. \quad (3.0.18)$$

Ya que las soluciones a la dirección transversal forman un conjunto completo de funciones de onda, se debe satisfacer entonces la siguiente condición,

$$\int_0^{\omega_y} \phi_i^*(y) \phi_j(y) dy = \delta_{ij}. \quad (3.0.19)$$

Si se aplica la definición de la delta de Kronecker δ_{ij} a la ecuación (3.0.18), ésta se reduce a

$$\sum_{j=1}^{\infty} X_j''(x) \delta_{ij} - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} (-E + E_j) X_j(x) \delta_{ij} - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \int_0^{\omega_y} \phi_i^*(y) V(x, y) \phi_j(y) dy = 0 \quad (3.0.20)$$

o bien

$$X_i''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (-E + E_i) X_i(x) - \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}(x) X_j(x) = 0 \quad (3.0.21)$$

donde

$$V_{ij}(x) = \int_0^{\omega_y} \phi_i^*(y) V(x, y) \phi_j(y) dy \quad (3.0.22)$$

son los elementos de la matriz de acoplamiento $V_{ij}(x)$.

Para el potencial (3.0.2), la ecuación de Schrödinger correspondiente está dada por la ecuación (3.0.20), la cual se puede reescribir de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{ij} X_j''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} [(-E + E_j) \delta_{ij} + V_{ij}(x)] X_j(x). \quad (3.0.23)$$

En la ecuación (3.0.23) solo consideramos la suma sobre los estados conductores (ver apéndice A), de tal manera que la ecuación (3.0.23) se transforma en

$$\sum_{j=1}^N \delta_{ij} X_j''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^N \left[(-E + E_j) \delta_{ij} + V_{ij}(x) \right] X_j(x). \quad (3.0.24)$$

Si se aplica el método de reducción de orden a la ecuación (3.0.24) y se construye un vector $\varrho_j(x)$, tal que $\varrho_j(x) = X_j(x)$ y $\varrho_{j+N}(x) = X_j'(x)$ con $j = 1, 2, \dots, N$, se obtiene entonces

$$\varrho_j(x) = \begin{bmatrix} X_j(x) \\ X_j'(x) \end{bmatrix} \quad (3.0.25)$$

por lo que la ecuación de Schrödinger (3.0.24) se reduce a

$$\sum_{j=1}^N \delta_{ij} \frac{d\varrho_j(x)}{dx} = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}(x) \varrho_j(x) \quad (3.0.26)$$

donde $\mathbf{U}(x)$ está definida por

$$\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \delta_{ij} \\ \frac{2m}{\hbar^2} [V_{ij}(x) + (-E + E_j) \delta_{ij}] & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.0.27)$$

La solución de (3.0.26) se obtiene como

$$\varrho_i(x_2) = e^{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x) dx} \varrho_i(x_1), \quad (3.0.28)$$

o bien

$$\varrho_i(x_2) = \mathbf{W}(x_2 - x_1) \varrho_i(x_1), \quad (3.0.29)$$

con

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) = e^{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x) dx}. \quad (3.0.30)$$

Consideremos ahora la siguiente definición

$$\mathbf{u}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left[(-E + E_j) \delta_{ij} + V_{ij}(x) \right] \quad (3.0.31)$$

entonces la matriz $\mathbf{U}(x)$ toma la forma

$$\mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \delta_{ij} \\ \mathbf{u}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.0.32)$$

por lo que

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) = e^{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x) dx} \quad (3.0.33)$$

y considerando el desarrollo en serie de la función exponencial, la matriz de transferencia $\mathbf{W}(x_2 - x_1)$ se expresa como

$$\mathbf{W}(x_2 - x_1) = \begin{bmatrix} \cosh[\mathbf{u}(x_2 - x_1)] & \mathbf{u}^{-1} \sinh[\mathbf{u}(x_2 - x_1)] \\ \mathbf{u} \sinh[\mathbf{u}(x_2 - x_1)] & \cosh[\mathbf{u}(x_2 - x_1)] \end{bmatrix}. \quad (3.0.34)$$

Para determinar de manera explícita la forma de la matriz \mathbf{W} es necesario considerar al potencial (3.0.2). Consideremos primero la región donde $0 \leq x \leq a$. En esta región, la matriz $\mathbf{U}(x)$ está dada por la ecuación (3.0.27) y los elementos de acoplamiento $V_{ij}(x)$ vienen dados a continuación

$$V_{ij}(x) = \begin{cases} -fx - \frac{\phi\omega_y}{2} + V_0, & \text{si } i = j \\ -\frac{\phi\omega_y}{\pi^2} \left(-\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j)^2} + \frac{\cosh[(i-j)\pi]}{(i-j)^2} - \frac{\cosh[(i+j)\pi]}{(i+j)^2} \right), & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.0.35)$$

mientras que la matriz de transferencia $\mathbf{W}_1(a - 0)$ resulta

$$\mathbf{W}_1(a - 0) = \begin{bmatrix} \cosh[\mathbf{u}_1 a] & \mathbf{u}_1^{-1} \sinh[\mathbf{u}_1 a] \\ \mathbf{u}_1 \sinh[\mathbf{u}_1 a] & \cosh[\mathbf{u}_1 a] \end{bmatrix} \quad (3.0.36)$$

donde \mathbf{u}_1^2 está definida de la siguiente manera

$$\mathbf{u}_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \begin{cases} -E + E_i - \frac{fa}{2} - \frac{\phi\omega_y}{2} + V_0, & \text{si } i = j \\ -\frac{\phi\omega_y}{\pi^2} \left(-\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j)^2} + \frac{\cosh[(i-j)\pi]}{(i-j)^2} - \frac{\cosh[(i+j)\pi]}{(i+j)^2} \right), & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.0.37)$$

Para la región comprendida entre $a \leq x \leq a+b$, la matriz de transferencia $\mathbf{W}_2(a+b-a)$ resulta ser

$$\mathbf{W}_2(a+b-a) = \begin{bmatrix} \cosh[\mathbf{u}_2 b] & \mathbf{u}_2^{-1} \sinh[\mathbf{u}_2 b] \\ \mathbf{u}_2 \sinh[\mathbf{u}_2 b] & \cosh[\mathbf{u}_2 b] \end{bmatrix} \quad (3.0.38)$$

con

$$\mathbf{u}_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \begin{cases} -E + E_i - \frac{f(2a+b)}{2} - \frac{\phi\omega_y}{2}, & \text{si } i = j \\ -\frac{\phi\omega_y}{\pi^2} \left(-\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j)^2} + \frac{\cosh[(i-j)\pi]}{(i-j)^2} - \frac{\cosh[(i+j)\pi]}{(i+j)^2} \right), & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.0.39)$$

y finalmente para la región $a+b \leq x \leq a+b+c$, la matriz de tranferencia $\mathbf{W}_3(a+b+$

$c - (a + b)$) está determinada por

$$\mathbf{W}_3(a + b + c - (a + b)) = \begin{bmatrix} \cosh[\mathbf{u}_3 c] & \mathbf{u}_3^{-1} \sinh[\mathbf{u}_3 c] \\ \mathbf{u}_3 \sinh[\mathbf{u}_3 c] & \cosh[\mathbf{u}_3 c] \end{bmatrix} \quad (3.0.40)$$

con

$$\mathbf{u}_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \begin{cases} -E + E_i - \frac{f(2(a+b)+c)}{2} - \frac{\phi\omega_y}{2} + V_0, & \text{si } i = j \\ -\frac{\phi\omega_y}{\pi^2} \left(-\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j)^2} + \frac{\cosh[(i-j)\pi]}{(i-j)^2} - \frac{\cosh[(i+j)\pi]}{(i+j)^2} \right), & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.0.41)$$

Recordando la propiedad de multiplicatividad serial de las matrices de transferencia $\mathbf{W}(x_2 - x_1)$, la matriz de transferencia total se obtiene mediante la relación

$$\mathbf{W}(a + b + c - 0) = \mathbf{W}_3(a + b + c - (a + b)) \cdot \mathbf{W}_2(a + b - a) \cdot \mathbf{W}_1(a - 0) \quad (3.0.42)$$

La matriz de transferencia $\mathbf{W}(a + b + c - 0)$ está relacionada con la matriz de transferencia \mathbf{M} a través de la relación de semejanza siguiente

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} q_j^{-1/2} \delta_{ij} & q_j^{-1/2} \delta_{ij} \\ \imath q_j^{1/2} \delta_{ij} & -\imath q_j^{1/2} \delta_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{W}(2a + b - 0) \cdot \begin{bmatrix} k_j^{-1/2} \delta_{ij} & k_j^{-1/2} \delta_{ij} \\ \imath k_j^{1/2} \delta_{ij} & -\imath k_j^{1/2} \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.0.43)$$

con

$$k_j^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_j) \quad (3.0.44)$$

y

$$q_j^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2} (\Delta U + E - E_j). \quad (3.0.45)$$

Recordando la estructura de la matriz de transferencia multicanal \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t^\dagger)^{-1} & r'(t')^{-1} \\ -(t')^{-1}r & (t')^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.0.46)$$

siendo α , β , γ y δ matrices de $N \times N$, ((\dagger) significa transpuesta conjugada). En este caso, la matriz de las amplitudes de transmisión se escribe como

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \quad (3.0.47)$$

mientras que la matriz de coeficientes de transmisión será

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix}. \quad (3.0.48)$$

Las amplitudes de transmisión están directamente relacionadas con la conductancia G mediante la fórmula de Landauer

$$G = \frac{e^2}{h}T = \frac{e^2}{h}Tr[\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger]. \quad (3.0.49)$$

Los elementos \mathbf{T}_{ij} de la matriz T , describen la transmisión de los elementos desde el canal j al canal i . Cuando no existe acoplamiento de canales, la matriz T es diagonal. Cuando la interacción mezcla canales, entonces los \mathbf{T}_{ij} son distintos de cero.

3.0.4. Efecto del campo eléctrico transversal en la conductancia G

Por lo anterior, es inmediato calcular la conductancia de Landauer G a partir de la matriz de transferencia \mathbf{M} . A continuación se grafica dicha conductancia, para el potencial (3.0.2), en función de la energía ϵ , variando las fuerzas eléctricas externas longitudinal f y transversal ϕ . Mantendremos fijos los siguientes parámetros: la altura V_0 , el ancho b de las barreras, las masas efectivas m_{GaAs} y $m_{Al_{0.3}Ga_{0.7}As}$ y el ancho de pozo a . Aquí estudiamos el caso de dos canales abiertos o modos conductores ($N = 2$). El caso en el que $f = 0$ eV/nm y $\phi = 0$ eV/nm corresponde a la transmisión de dos barreras rectangulares bidimensionales ($DB2D$), donde están presentes resonancias aisladas para energías ϵ menores que la correspondiente energía umbral ϵ_{oj} . En la Figura 3.2 se aprecian los umbrales de energía, la del primer canal está alrededor de 0.27 eV, mientras que la del segundo canal se encuentra cercana a 0.4 eV. En cada uno de los canales se presenta TR a través de la $DB2D$. Cuando $f = 0$ eV/nm y $\phi = 0$ eV/nm no se presenta mezcla de canales, es decir no existe transferencia de corriente de un canal conductor a otro, de manera que $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Si variamos ligeramente la magnitud de la fuerza eléctrica longitudinal f y mantenemos $\phi = 0$ eV/nm, para $\epsilon \leq \epsilon_{oj}$, podemos observar que el “tamaño” de las resonancias aisladas disminuye y a la vez los umbrales ϵ_{oj} se desplazan hacia la izquierda (Figura 3.3). Lo anterior se debe a que con el aumento de la fuerza longitudinal f el potencial se torna más transparente a los portadores incidentes. Por otra parte, si ahora fijamos la fuerza longitudinal f y variamos la fuerza transversal ϕ , primeramente podemos observar que las resonancias aisladas también se corren a la izquierda de ϵ_{oj} , aunque advertimos que la traza no es muy sensible al campo transversal, sin embargo, veremos que en el análisis de los elementos \mathbf{T}_{ij} hay un intercambio de flujo considerable de un canal a otro. Podemos

observar también que conforme la fuerza eléctrica transversal ϕ crece la magnitud de las resonancias aumenta, ya que la región de tunelaje promedio se incrementa, generando a la vez nuevas resonancias aisladas.

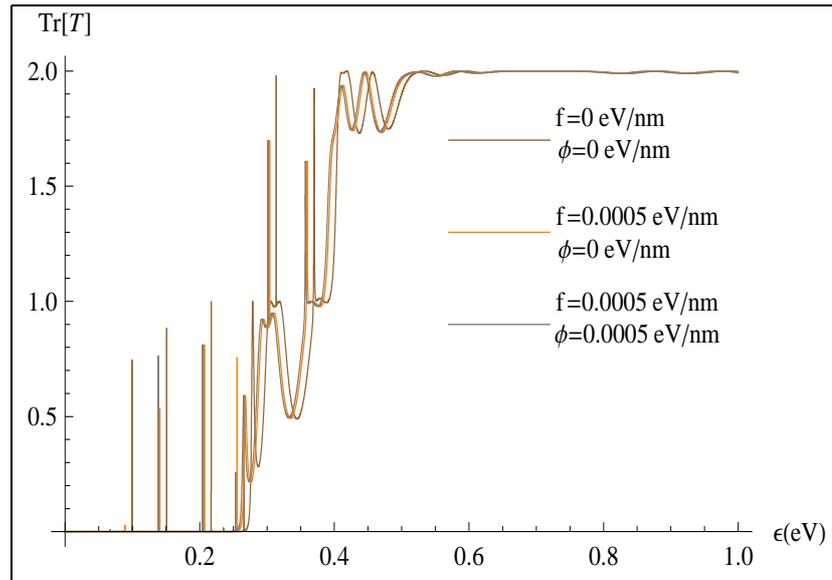


Figura 3.2: Conductancia de Landauer, $G = Tr[T]$, para un $GE2D$, en una heteroestructura formada por $GaAs/AlGaAs/GaAs$ y sujeta a una fuerza eléctrica longitudinal externa f y a una fuerza eléctrica transversal externa ϕ .

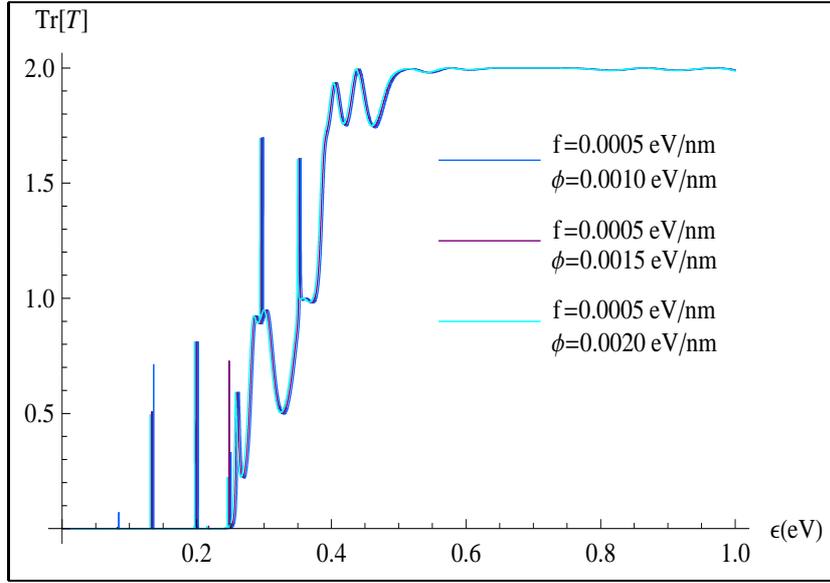


Figura 3.3: Conductancia de Landauer G para un $GE2D$. Cuando f y ϕ son diferentes de cero, las resonancias aisladas presentes se corren a la izquierda de su correspondiente energía umbral ϵ_{oj} .

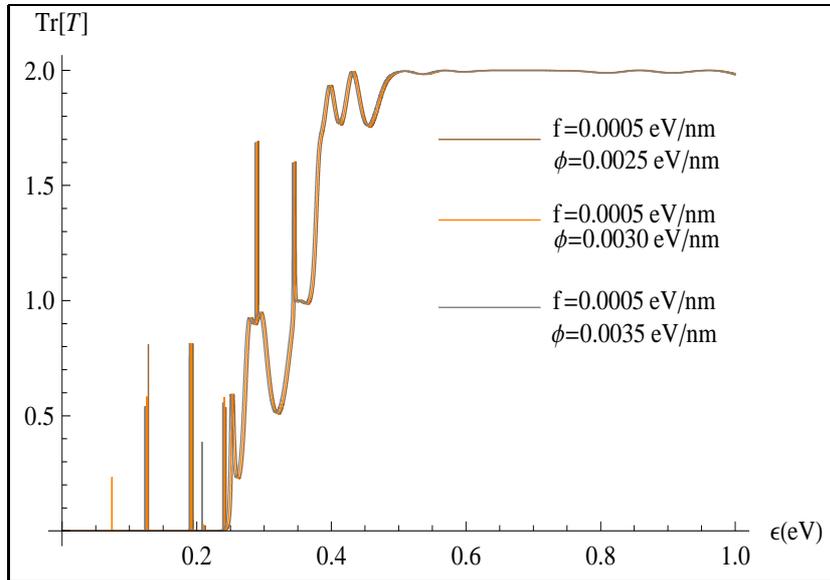


Figura 3.4: El incremento de la fuerza transversal ϕ provoca que se originen nuevas resonancias aisladas en el coeficiente de transmisión y que las ya presentes aumenten su magnitud.

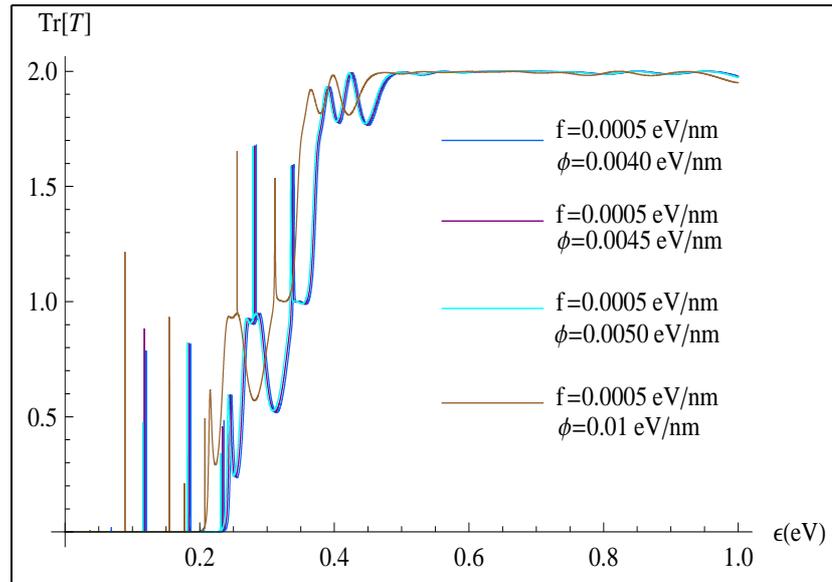


Figura 3.5: La magnitud de cierta resonancia aislada, correspondiente con el primer canal, sobrepasa la unidad, debido a que el campo eléctrico transversal ϕ acoplado fuertemente los canales de transmisión.

Aunque este sistema es muy interesante desde el punto de vista físico, sólo se mostrarán ciertos resultados relacionados con la conductancia de Landauer.

3.0.5. Mezcla de canales T_{ij}

Los coeficientes de transmisión individuales, T_{ij} , fueron calculados para los mismos parámetros que la conductancia. Aquí podemos apreciar tunelaje resonante para cada uno de los canales por separado (ver Figuras 3.6 y 3.7). La mezcla de canales conductores se presenta cuando la fuerza eléctrica ϕ es diferente de cero, lo que genera una transferencia de flujo de un canal conductor a otro (ver Figura 3.8).

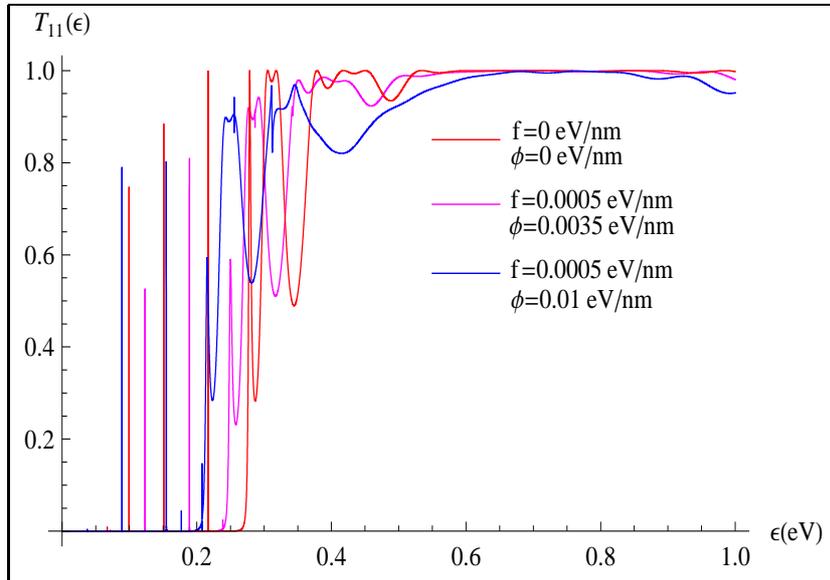


Figura 3.6: Coeficientes de Transmisión, con distintos valores de f y ϕ , para el Canal 1. T_{11} presenta resonancias aisladas para $\epsilon \leq \epsilon_{oj}$.

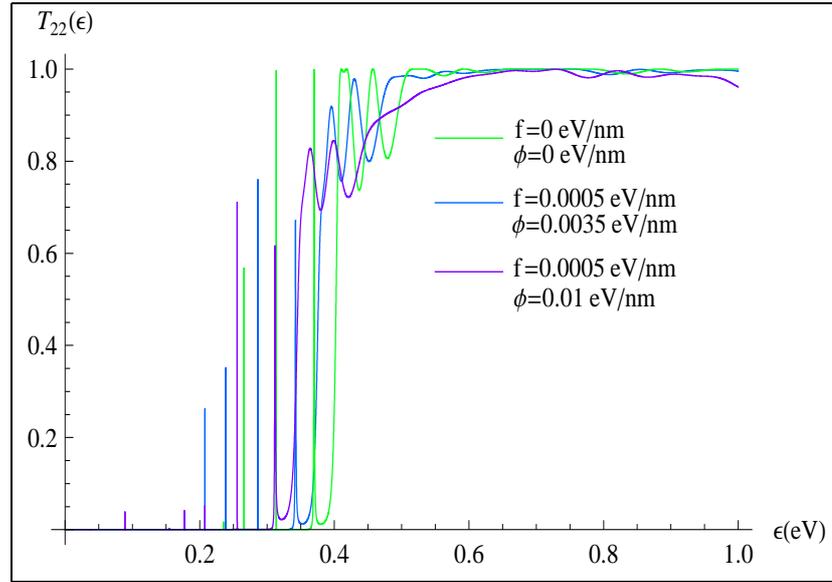


Figura 3.7: Coeficientes de Transmisión para el Canal 2. Las resonancias aisladas también están presentes para T_{22} cuando $\epsilon \leq \epsilon_{oj}$.

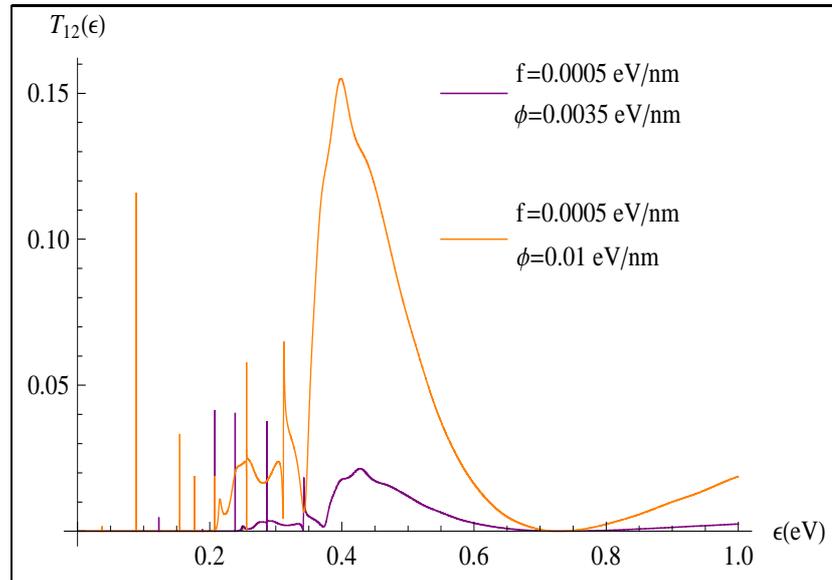


Figura 3.8: El coeficiente de Transmisión T_{12} representa la mezcla de los Canales 1 y 2, cuando $f \neq 0$ y $\phi \neq 0$. Claramente se aprecia un aumento en la mezcla de canales cuando la fuerza eléctrica transversal ϕ aumenta. Las resonancias aisladas también están presentes para los coeficientes T_{12} .

3.0.6. Tiempo de retardo de Wigner τ_{ij}

El tiempo de retardo de Wigner $\tau_{ij}(\epsilon)$ presenta un comportamiento máximo para aquellas energías donde ocurren las resonancias en G , en dichas energías existen estados extendidos en los que los portadores incidentes tienen tiempos de permanencia mayores. Los estados extendidos disminuyen cuando la magnitud de f y ϕ se incrementa, ocasionando que el tiempo de retardo se vuelva cada vez menor.

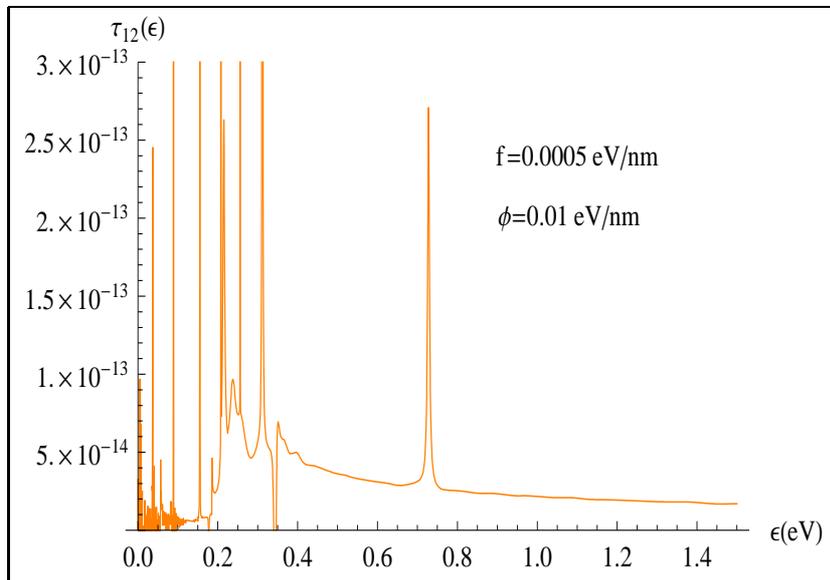


Figura 3.9: Tiempo de retardo $\tau_{12}(\epsilon)$. El tiempo de retardo disminuye conforme f y ϕ aumentan.

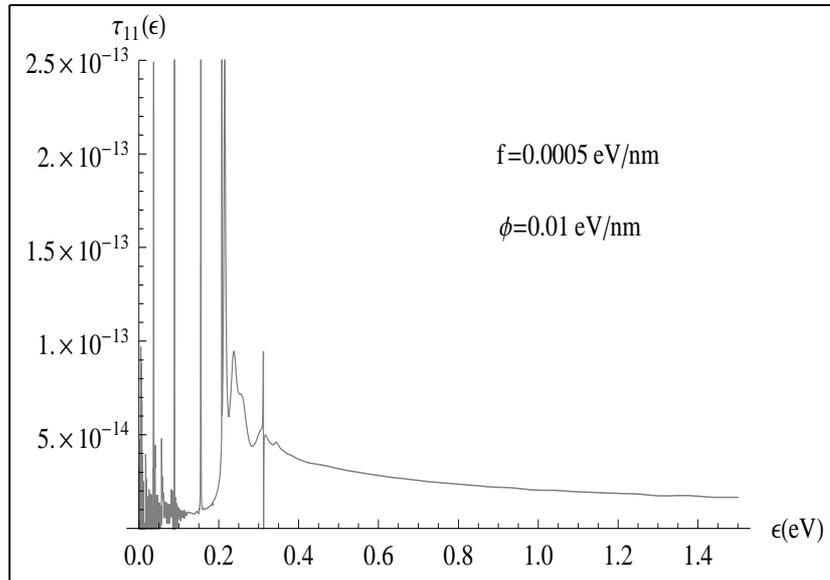


Figura 3.10: Tiempo de retardo $\tau_{11}(\epsilon)$

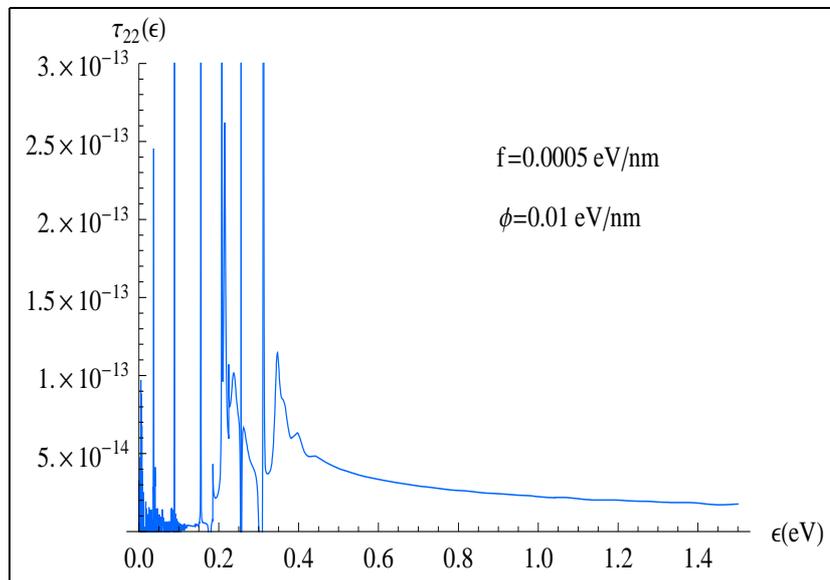


Figura 3.11: Tiempo de retardo $\tau_{22}(\epsilon)$

CONCLUSIONES y PERSPECTIVAS

Aún existe mucho territorio fértil e inexplorado en el área de las estructuras con presencia de tunelaje cuántico. El presente y el futuro de las estructuras de tunelaje es prometedor, especialmente en vista del alto nivel de interés tecnológico en el campo. Nosotros creemos que el entendimiento teórico de ciertas heteroestructuras, posibilita la creación experimental y comercial de dispositivos electrónicos, además de plantear, en lo sucesivo, nuevos puntos de partida en el estudio de las heteroestructuras [4].

En este trabajo hemos analizado las propiedades de transporte electrónico para tres perfiles de potencial $1D$, sujetos a la acción de una fuerza eléctrica longitudinal externa. También analizamos el transporte electrónico para un potencial $2D$ bajo la acción de un campo eléctrico longitudinal y un campo eléctrico transversal, ambos externos. Del Capítulo *II* podemos concluir que, en el caso del perfil de potencial de la sección 2.1, donde una barrera de $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ se intercala entre los “leads” de $GaAs$, el incremento de la fuerza eléctrica hace que la barrera se torne más transparente a las partículas incidentes en ésta, mientras que el tiempo de retardo de Wigner es aproximadamente del orden de 10^{-14} s. Para el potencial de la sección 2.2, que está formado por una barrera de $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ situada a la derecha de un pozo-triangular de $GaAs$, nuevamente el aumento de la fuerza eléctrica produce que los portadores incidentes “sientan” más

transparente a la barrera, dando lugar a que los niveles del pozo triangular se traslapen con los niveles resonantes de la barrera adjunta. Nuevamente el tiempo de retardo disminuye conforme se aumenta la fuerza eléctrica, en este caso se registran tiempos en un rango de 10^{-14} - 10^{-13} s. En el caso del potencial 2.50, una heteroestructura de doble barrera de $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ y pozos de $GaAs$, el coeficiente de transmisión presenta una zona de resonancias aisladas, las cuales se originan cuando la función de onda que “escapa” desde el pozo se superpone coherentemente con la función de onda reflejada en la primer barrera, en la misma dirección. Este fenómeno es conocido como tunelaje resonante coherente a través de una doble barrera. Al introducir una fuerza eléctrica a la doble barrera la magnitud de las resonancias aisladas disminuye por abajo de la unidad. Cuando la fuerza eléctrica llega a ser considerablemente grande, el tunelaje resonante desaparece. Para esta heteroestructura los tiempos de retardo de Wigner son del orden de 10^{-13} - 10^{-12} s.

Del Capítulo *III* podemos concluir que, cuando no están presentes campos eléctricos longitudinales y transversales, la transmisión que se tiene es la de *DB2D* con resonancias aisladas en cada canal. La sola presencia de la fuerza eléctrica longitudinal provoca que la región de las resonancias aisladas, en cada canal, se haga más estrecha. Cuando esta presente la fuerza eléctrica transversal ϕ al mismo tiempo que la longitudinal f , existe mezcla de canales conductores. Esta mezcla es más notoria conforme ϕ aumenta. Los tiempos de tunelaje τ_{ij} , disminuyen conforme f y ϕ aumentan.

Recientemente el transporte dependiente del spin en nanoestructuras semiconductoras, ha ganado gran interés en el campo de la spintrónica [33, 34, 35]. El tunelaje de electrones dependiente del spin, se ha convertido en sujeto de estudio con respecto a la búsqueda de la introducción del spin no-magnético efectivo. Una aplicación de ello es la

creación de los filtros de spin que no requieran de un campo magnético y que permitan la manipulación del spin mediante la aplicación de un voltaje. Por lo tanto, consideramos que una posible extensión al trabajo aquí presentado, consistiría en plantear una heteroestructura donde se incluyan las interacciones spin-campo, spin-órbita, etc., además de desarrollar la teoría correspondiente para analizar las características básicas del proceso de transporte.

Por todo lo anterior, podemos concluir que el estudio del tunelaje resonante, a través de sistemas de doble barrera $1D$ y $2D$, es de gran utilidad en el entendimiento y desarrollo apropiados de dispositivos experimentales a base de tunelaje resonante.

Apéndice A

Consideremos la dispersión causada por el siguiente potencial:

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y + V_0 & 0 \leq x \leq a, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y & a \leq x \leq a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -fx - \phi y + V_0 & a + b \leq x \leq 2a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ -\Delta U & x \geq 2a + b, & 0 \leq y \leq \omega_y \\ \infty & y < 0, & y > \omega_y \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

El potencial de dispersión es real e independiente del tiempo. La ecuación de Schrödinger que describe el problema es la siguiente

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + V(x, y) \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad (\text{A.2})$$

con las condiciones de frontera

$$\psi(x, y = 0) = \psi(x, y = \omega_y) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Para la ecuación (A.2) se proponen soluciones separables del tipo $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ y junto con el hecho de que $V(x, y) = V(x) + V(y)$, se obtiene la siguiente ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + V(y) = E \quad (\text{A.4})$$

donde

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + V(x) = E_x \quad (\text{A.5})$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + V(y) = E_y. \quad (\text{A.6})$$

por lo tanto:

$$E = E_x + E_y. \quad (\text{A.7})$$

En la región transversal ($x \leq 0$ y $V(y) = 0$) con las condiciones de frontera

$$Y(y = 0) = Y(y = \omega_y) = 0, \quad (\text{A.8})$$

las soluciones de la ecuación (A.6) están dadas por

$$Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{\omega_y}} \text{sen} \left[\frac{j\pi y}{\omega_y} \right] \quad (\text{A.9})$$

con energías iguales a

$$E_{yj} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{\omega_y^2} j^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (\text{A.10})$$

Las soluciones (A.9) son ortonormales, es decir,

$$\int_0^{\omega_y} Y_i(y) Y_j(y) dy = \delta_{ij} \quad (\text{A.11})$$

El índice j en la función (A.9) denota los canales transversales [9]. Supóngase que la energía E tiene un valor fijo. Aquellos canales para los cuales $E_{yj} \leq E$ corresponden a los denominados *canales abiertos*. Si

$$N < \frac{k\omega_y}{\pi} < N + 1, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (\text{A.12})$$

entonces existen N canales abiertos.

Cualquier función $\psi(x, y)$ puede siempre desarrollarse en términos de la base ortonormal $Y_j(y)$ del modo siguiente:

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) Y_j(y) \quad (\text{A.13})$$

Si se sustituye la ecuación (A.13) en (A.2) y se toma el producto escalar de ambos lados de esa ecuación con $Y_i(y)$, con la siguiente definición:

$$V_{ij}(x) = \int_0^{\omega_y} Y_i(y)V(x,y)Y_j(y)dy \quad (\text{A.14})$$

se obtiene una serie de ecuaciones acopladas de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 - k_{yi}^2\right)X_i(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}(x)X_j(x) \quad (\text{A.15})$$

Para la región del potencial donde $x \geq 2a + b$ los elementos de la matriz de potencial $V_{ij}(x)$ están dados por

$$V_{ij}(x) = -\Delta U \delta_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

por lo que (A.15) se convierte en

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 + u^2 - k_{yi}^2\right)X_i(x) = 0, \quad u^2 = \frac{2m\Delta U}{\hbar^2} \quad (\text{A.17})$$

En este caso, para los canales abiertos tenemos que $k_{yi}^2 < k^2 + u^2$, de tal manera que $k_{xi}^2 \in \Re$ ($k_{xi}^2 = k^2 + u^2 - k_{yi}^2$). En este caso la solución de la ecuación (A.17) (en la región asintótica cuando $x \rightarrow \infty$) es

$$X_i(x) = ae^{ik_{xi}x} + be^{-ik_{xi}x} \quad (\text{A.18})$$

y la corriente asociada será

$$J = \frac{\hbar k_{xi}}{m} (|a|^2 - |b|^2) \quad (\text{A.19})$$

Por otra parte, para los *canales cerrados*, se tiene que $k_{yi}^2 > k^2 + u^2$ y por lo tanto $k_{xi}^2 \in \Im$, dando lugar a funciones de onda que decaen exponencialmente (en la región asintótica cuando $x \rightarrow \infty$),

$$X_i(x) = be^{-\kappa_{xi}x}, \quad \kappa_{xi} = i\kappa, \quad (\text{A.20})$$

con la correspondiente corriente

$$J = 0 \tag{A.21}$$

En general, asintóticamente, cuando $|x| \rightarrow \infty$, sólo los canales abiertos contribuyen a la función de onda, mientras que la contribución de los canales cerrados es exponencialmente decreciente [9].

Apéndice B

La matriz \mathbf{W} resulta cuando se aplica el método de reducción de orden de la teoría de ecuaciones diferenciales a la ecuación de Schrödinger. La matriz de transferencia \mathbf{W} conecta a las funciones de onda y sus derivadas en dos puntos o planos de la región de dispersión, es decir, existe una relación del tipo

$$\phi(x) = \mathbf{W}(x, 0)\phi(0), \quad (\text{B.1})$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(ux) & u^{-1} \sinh(ux) \\ u \sinh(ux) & \cosh(ux) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\phi(x) \equiv \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Considérese el siguiente potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -fx + V_0, & 0 \leq x \leq b, \quad V_0 > 0 \\ -\Delta U, & x \geq b \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

mismo que tiene asociada la siguiente ecuación de Schrödinger

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = u^2\varphi \quad (\text{B.5})$$

con

$$u^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (-fx + V_0 - E). \quad (\text{B.6})$$

Si desarrollamos a la ecuación (B.2) en sus componentes, obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\varphi(x) = \cosh(ux)\varphi(0) + \frac{1}{u} \sinh(ux)\varphi'(0) \quad (\text{B.7})$$

$$\varphi'(x) = u \sinh(ux)\varphi(0) + \cosh(ux)\varphi'(0). \quad (\text{B.8})$$

Tómese ahora la derivada de la ecuación (B.7)

$$\varphi'(x) = \left(\sinh(ux)\varphi(0) + \frac{1}{u} \cosh(ux)\varphi'(0) \right) u \left(1 - \frac{mfx}{\hbar^2 u^2} \right) + \frac{1}{u^2} \sinh(ux)\varphi'(0) \frac{mf}{\hbar^2 u} \quad (\text{B.9})$$

y simplificandola tenemos que

$$\varphi'(x) = \left(u \sinh(ux)\varphi(0) + \cosh(ux)\varphi'(0) \right) \left(1 - \frac{mfx}{\hbar^2 u^2} \right) + \frac{mf}{\hbar^2 u^2} \frac{\sinh(ux)}{u} \varphi'(0). \quad (\text{B.10})$$

Para que la ecuación (B.10) sea igual a la ecuación (B.8) es necesario se satisfaga que

$$\frac{mfx}{\hbar^2 u^2} \ll 1, \quad (\text{B.11})$$

en cuyo caso se debe cumplir la siguiente relación:

$$fx \ll \frac{\hbar^2 u^2}{m} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{2m}{\hbar^2} (-fx + V_0 - E) \quad (\text{B.12})$$

$$fx \ll \frac{2}{3}(V_0 - E) \quad (\text{B.13})$$

por lo que el término

$$\frac{mf}{\hbar^2 u^2} \frac{\sinh(ux)}{u} \varphi'(0), \quad (\text{B.14})$$

también es despreciable. Por lo tanto, finalmente tenemos

$$\varphi'(x) \approx u \sinh(ux)\varphi(0) + \cosh(ux)\varphi'(0). \quad (\text{B.15})$$

Bibliografía

- [1] W. T. Griffith, *Física Conceptual*. Mc Graw-Hill/Interamericana, 2008.
- [2] L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu. *Appl. Phys. Lett.* **22** (1973) 562.
- [3] F. Capasso, “Band-gap engineering for new photonic and electronic devices,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **265** (1988) 112–119.
- [4] E. R. Brown, W. D. Goodhue, T. C. L. G. Sollner, and H. Q. Le, “Microwave and Millimeter-Wave Resonant-Tunnelling Devices,” in *Physics of Quantum Electron Devices* (F. Capasso, ed.), pp. 147–180, Springer Verlag, 1990.
- [5] E.S. Jeng, Y.F. Chen, C.C. Chang, K.M. Peng, S.W. Chou, C.W. Ho, C.F. Huang, and J. Gong. *Solid-State Electronics*, **68**, (2012) 73–79.
- [6] James G. Champlain, Richard Magno, Doewon Park, Harvey S. Newman, and J. Brad Boo. *Electronics*, **67**, (2012) 105–108.
- [7] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [8] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics*. Wiley-Interscience, 2006.

- [9] Pier A. Mello and Narendra Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [10] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas *Phys. Rev. B* **31** (May, 1985) 6207–6215.
- [11] R. Landauer, “Electrical transport in open and closed systems,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **68** (1987) 217–228. 10.1007/BF01304229.
- [12] A. Douglas Stone and A. Szafer, “What is measured when you measure a resistance?- The Landauer formula revisited,” *IBM J. Res. Develop.* **32** (1988) 384–413.
- [13] A. Anzaldo-Meneses and P. Pereyra, “Sylvester theorem and the multichannel transfer matrix method for arbitrary transverse potential profile inside a wave guide,” *Annals of Physics* **322** (2007) 2114–2128.
- [14] Pedro Pereyra and Edith Castillo, “Theory of finite periodic systems: General expressions and various simple and illustrative examples,” *Phys. Rev. B* **65** (May, 2002) 205120.
- [15] D. Sokolovski and L. M. Baskin, “Traversal time in quantum scattering,” *Phys. Rev. A* **36** (Nov, 1987) 4604–4611.
- [16] M. Büttiker, “Larmor precession and the traversal time for tunneling,” *Phys. Rev. B* **27** (May, 1983) 6178–6188.
- [17] G. Iannaccone, “General relation between state density and dwell times in mesoscopic systems,”. QUANT-PH/9511004.
- [18] E. H. Hauge and J. A. Stovneng, “Tunneling times: a critical review,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 917–936.

- [19] R. Landauer and Th. Martin, “Barrier interaction time in tunneling,” *Rev. Mod. Phys.* **66** (Jan, 1994) 217–228.
- [20] Hiromi Iwamoto, Verísimo M. de Aquino, Valdir C. Aguilera-Navarro, Mario Goto, and Donald H. Kobe, “Relationship between dwell, transmission and reflection tunnelling times,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (March, 2004) 3599–3606.
- [21] C. R. Leavens and G. C. Aers, “Dwell time and phase times for transmission and reflection,” *Phys. Rev. B* **39** (Jan, 1989) 1202–1206.
- [22] Eugene P. Wigner, “Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift,” *Phys. Rev.* **98** (Apr, 1955) 145–147.
- [23] P. Pereyra, “Closed Formulas for Tunneling Time in Superlattices,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (Feb, 2000) 1772–1775.
- [24] R. A. Smith, *Wave Mechanics of Crystalline Solids*. Chapman and Hall, London, 1961.
- [25] Philip F. Bagwell. *J. Phys.: Condens. Matter* **2** (1990) 6179–6188.
- [26] Philip F. Bagwell. *Phys. Rev. B* **41** (1990) 10354–10371.
- [27] W. D. Goodhue, P. K. Tannenwald, C. D. Parker, T. C. L. G. Sollner, and D. D. Peck, “Resonant tunneling through quantum wells at frequencies up to 2.5 THz,” *Appl. Phys. Lett.* **43** (1983) 588.
- [28] Claude Weisbuch and Borge Vinter, *Quantum Semiconductor Structures Fundamentals and Applications*. Academic Press, INC.
- [29] S. M. Sze, *Semiconductor Devices: Physics and Technology*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.

- [30] F. Capasso and R. A. Kiehl. *J. Appl. Phys.* **58** (1985) 1366.
- [31] Daniel Boese, Markus Lischka, and L. E. Reichl, “Resonances in a two-dimensional electron waveguide with a single δ -function scatterer,” *Phys. Rev. B* **61** (Feb, 2000) 5632–5636.
- [32] Sergio E. Ulloa, Eleuterio Castaño, and George Kirczenow, “Ballistic transport in a novel one-dimensional superlattice,” *Phys. Rev. B* **41** (Jun, 1990) 12350–12353.
- [33] M. V. Petrychuk, A. E. Belyaev, and A. M. Kurakin. *Appl. Phys. Lett.* **91** (2007) 222112.
- [34] J. Gong, X. X. Liang, and S. L. Ban. *Phys. Rev. B.* **76** (2007) 045316.
- [35] Stephen J. Emelett and Kenneth Vaccaro. *J. Appl. Phys.* **95** (2004), no. 5.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Fecha : 02/05/2013

Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA) de la alumna MARIA GUADALUPE MENDOZA FIGUEROA, matrícula 205384053, quien cumplió con los 144 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha tres de mayo del 2013 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

TRANSPORTE MULTICANAL EN HETEROESTRUCTURAS QUE ESTAN EN PRESENCIA DE CAMPOS ELECTRICOS

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 204 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBADA

JURADO

Presidente

DR. JOSE LOIS JIMENEZ RAMIREZ

Secretario

DR. ROMAN LINARES ROMERO

Vocal

DR. RAFAEL BAQUERO PARRA

UNIDAD IZTAPALAPA

Coordinación de Sistemas Escolares

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, DF, CP 09340 Apdo. Postal 555-320-9000, Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax: 5804-4876