Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

PROPIEDADES PROYECTIVAS Y LA COMPACIDAD

PABLO MENDOZA ITURRALDE

DOCTOR EN CIENCIAS

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

PROPIEDADES PROYECTIVAS Y LA COMPACIDAD

PABLO MENDOZA ITURRALDE

DOCTOR EN CIENCIAS

Certifico la tesis
Dr. Vladimir Tkachuk

02/06/2004

Contenido

Introducción **3**

Capítulo 1. Preliminares **7**

1.1 Mapeos cocientes y pseudoabiertos **9**

1.2 Extensión de mapeos **12**

1.3 Espacios dispersos **18**

Capítulo 2. Espacios casi inyectivo–proyectivos **23**

2.1 Un ejemplo bajo CH **25**

2.2 Espacios dispersos y compacidad **29**

Capítulo 3. Espacios cofinitamente proyectivos y espacios conumerablemente proyectivos **35**

3.1 Proyectividad dimensional **36**

3.2 Espacios cofinitamente proyectivos **38**

3.3 Espacios conumerable proyectivos **42**

3.4 Proyectividad conumerable en espacios paracompactos y espacios métricos **46**

Conclusiones **51**

Bibliografía **53**

Introducción

El método de mapeos es una herramienta fuerte en el estudio de los espacios topológicos. En este sentido la noción más fundamental es la de homeomorfismo, es decir, de una biyección continua cuya inversa es continua. Los espacios topológicos se consideran idénticos si entre ellos existe un mapeo homeomórfico. Por lo tanto, en topología, cualquier clasificación se da considerando propiedades que permanecen sin alteración si se aplica un homeomorfismo. Si, en cambio, se consideran mapeos arbitrarios entonces surgen preguntas, que dieron inicio a la creación de los métodos e instrumentos básicos de investigación en la topología. Por ejemplo, si se tiene una clase $\mathcal{P}$ de espacios y una clase $\mathcal{F}$ de mapeos continuos, ¿qué espacios se obtienen de los de $\mathcal{P}$ como imágenes bajo las funciones de $\mathcal{F}$?; ¿qué pasa si tomamos las imágenes inversas de los espacios de $\mathcal{P}$ bajo las funciones de $\mathcal{F}$?

A principios del siglo XX se dió un avance impresionante en el estudio de los espacios topológicos a través de mapeos. Basta mencionar que se probó que:

1) Los espacios primero numerables coinciden con las imágenes abiertas continuas de los espacios metrizables.
2) Los espacios secuenciales son exactamente las imágenes cocientes de los espacios metrizables.
3) Si se toman las imágenes pseudoabiertas de los espacios metrizables, entonces se obtiene la clase de los espacios Fréchet-Urysohn.

Por otra parte, desde mediados del siglo XX se obtuvieron muchos resultados sobre las propiedades proyectivas de los espacios topológicos, es decir, sobre propiedades de un espacio X que se definen en términos de las funciones relacionadas con X. Por ejemplo, el teorema de Kuratowski-Mrówka

[En2] que estipula que un espacio Hausdorff X es compacto si y sólo si la proyección $X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada para todo espacio normal Y. Otro importante grupo de resultados trata sobre todos los mapeos de un cierto espacio. Entre ellos está el teorema de Weinstein-Michael [Mi1] que afirma que toda función continua y cerrada de un espacio normal X sobre un q-espacio Y es periféricamente numerablemente compacta. Otro teorema muy importante en ese estilo es el de Pasynkov [Pa] : si X es un espacio Čech-completo, Y es un espacio paracompacto y $f : X \to Y$ una función abierta, continua y suprayectiva, entonces f es inductivamente perfecta. Usando el teorema de Pasynkov, A.V. Arhangel'skii demostró en [Ar6] que si X es un espacio Čech-completo y Y es Hausdorff, entonces cada función abierta de X sobre Y es k-cubriente.

En [Tk1] se estudiaron de manera sistemática las propiedades proyectivas. En particular se demostró que los teoremas de Pasynkov y Arhangel'skii no determinan la clase de los espacios Čech-completos, es decir, existe un espacio X no Čech-completo tal que cada función de X sobre un espacio paracompacto es inductivamente perfecta. También se caracterizaron los espacios cocientemente proyectivos, los cerradamente y los abiertamente proyectivos. Además se plantearon varios problemas abiertos.

En el primer capítulo de esta tesis se dan los preliminares necesarios y los resultados básicos que se aplican en los teoremas de los capítulos 2 y 3. Algunos de ellos se demuestran con detalle.

En el capítulo 2 se da una caracterización para los espacios pseudoabiertos proyectivos. Bajo CH se obtiene una respuesta parcial negativa al siguiente problema planteado en [Tk]: ¿es cierto que para cada espacio X casi inyectivo-proyectivo segundo numerable existe una descomposición $X = K \cup Z$ donde K es compacto y Z es numerable? El estudio de este problema da origen al estudio de los espacios casi inyectivo-proyectivos. Se prueba en este marco que si X es compacto entonces es casi inyectivo-proyectivo si y sólo si es disperso. Como corolario se establece que si X es pseudocompacto y casi inyectivo-proyectivo entonces es disperso. También se muestra que los espacios Lindelöf P y los espacios dispersos de Lindelöf son casi inyectivo-proyectivos. Se da un ejemplo que muestra que se necesita la compacidad para obtener la proposición X es casi inyectivo-proyectivo si y sólo si es disperso. Se nota que la propiedad de ser casi inyectivo-proyectivo no es preservada por productos numerables si todos los espacios son compactos. Bajo

CH existe un espacio X que es casi inyectivo-proyectivo mientras $X \times X$ no es casi inyectivo-proyectivo. Además se plantean varios problemas abiertos al estudiar los espacios casi inyectivo-proyectivos.

En el capítulo 3 se estudian los espacios cofinitamente proyectivos y los espacios conumerablemente proyectivos. El estudio de estos espacios surge como consecuencia natural de los resultados sobre los espacios casi inyectivo-proyectivos. En la primera parte se introduce el concepto de proyectividad n-dimensional y se presenta una caracterización completa de los espacios proyectivamente n–dimensionales. Probamos también que X es proyectivamente n-dimensional para algún n si y sólo si X no puede mapearse continuamente sobre $[0, 1]$. Usando un resultado del capítulo 2 se prueba que un espacio compacto X es proyectivamente cero-dimensional si y sólo si X es disperso. Se prueba que si X es cofinitamente proyectivo entonces es compacto, y se da una caracterización completa de los espacios cofinitamente proyectivos. También se presenta un ejemplo de un espacio X cofinitamente proyectivo tal que $X \times X$ no es cofinitamente proyectivo.

El concepto de espacio conumerablemente proyectivo es una generalización natural del concepto de espacio cofinitamente proyectivo. Sin embargo se mostrará que estas dos clases de espacios tienen propiedades muy diferentes.

Se demuestra, en particular, que X es conumerablemente proyectivo si y sólo si en X no existe una familia disjunta infinita de subconjuntos cocero no numerables. Se obtiene una caracterización completa de los espacios paracompactos y conumerablemente proyectivos en términos de que el espacio X sea concentrado alrededor de un conjunto finito. También se proporcionan algunos resultados parecidos a los de los espacios cofinitamente proyectivos. Se concluye el capítulo con un teorema que establece que si G es un grupo topológico conumerablemente proyectivo entonces G es numerable.

Los resultados contenidos en este trabajo fueron expuestos y comentados en el Seminario de Topología dirigido por el Dr. Vladimir Tkachuk en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, también fueron expuestos en el Seminario de Topología dirigido por el Dr. Mikhail Tkachenko en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa y en el Seminario de Topología dirigido por el Dr. Angel Tamariz Mascarúa en el Departamento de Matemáticas

de la Facultad de Ciencias de la UNAM. La mayor parte de estos resultados fue presentada también en el Primer Encuentro México-Japón de Topología y sus Aplicaciones en Morelia, México en 1999.

Por último, deseo manifestar mi agradecimiento de manera especial al Dr. Vladimir Tkachuk por su dirección y enseñanzas en la elaboración de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar algunos resultados básicos que son necesarios para la demostración de los resultados de los capítulos 2 y 3. Todos los espacios considerados son Tychonoff. Si X es un espacio, entonces $\tau(X)$ es su topología y $\tau^*(X) = \tau(X) - \{\emptyset\}$. Denotemos por $\mathcal{U}$ la clase de espacios con base numerable. Sea $\mathcal{F}$ una clase de funciones continuas. Un espacio X es llamado $\mathcal{F}$-proyectivo, si cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ es un elemento de $\mathcal{F}$. De esta manera un espacio X es cociente-proyectivo si cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ es cociente. Recordemos que la ω–modificación de un espacio topológico X se obtiene de la siguiente manera: Sea (X, τ) un espacio topológico, la familia B_ω de todos los subconjuntos G_δ en (X, τ) forma una base para una nueva topología τ_ω en X, el espacio $(X, \tau_\omega) = X_\omega$ es llamado la ω-modificación del espacio (X, τ). Un espacio topológico X se llama espacio P si cada G_δ es un conjunto abierto de X. De este modo un espacio topológico es Lindelöf P, si es Lindelöf y espacio P. Una función continua suprayectiva se llama m-compacta si $|\{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ no es compacta}\}| \leq m$. Una función continua y suprayectiva f de un espacio X en un espacio Y es casi compacta si $|\{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ no es compacta}\}| \leq \omega$. Cabe mencionar que la casi compacidad coincide con la ω-compacidad. Un espacio X es casi compacto-proyectivo si cada función continua suprayectiva de X hacia un espacio segundo numerable es casi compacta. Dado $B \subset X$, sea $\tau(B, X) = \{U \in \tau(X) : B \subset U\}$. Un espacio X es disperso si cada subespacio $A \subset X$ tiene un punto aislado. Dos subconjuntos A y B de un espacio topológico se dice que son completamente separados si existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in A$ y $f(x) = 1$ para cada $x \in B$.

Ahora mencionaremos algunas propiedades importantes de las funciones cardinales. Recuerde que una función cardinal es una función f definida en la clase de los espacios topológicos que toma valores en la clase de todos los cardinales y que asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $f(X)$ tal que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par X, Y de espacios homeomórficos.

El ejemplo más obvio de una función cardinal es la cardinalidad $|X|$ de un espacio X.

La función cardinal más conocida es el peso de un espacio X definido por $w(X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una base de X$\}$.

Una función conocida es la densidad, definida como

$d(X) = min\{|D| : D$ es un subconjunto denso en X$\}$.

Una familia de abiertos no vacíos mutuamente ajenos es una familia celular. Esta definición nos permite introducir una nueva función cardinal, la celularidad de X, definida por

$c(X) = sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una familia celular en X$\}$.

Si $c(X) = \omega$, decimos que X satisface ccc o que tiene la propiedad de Souslin.

Es inmediato que $c(X) \leq d(X) \leq w(X)$.

La noción de espacio de Lindelöf da lugar a una nueva función cardinal, el número de Lindelöf de un espacio X, denotado por $l(X)$, y definido como el número cardinal más pequeño κ tal que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad no mayor que κ. De este modo un espacio X es de Lindelöf si y sólo si $l(X) \leq \omega$.

Una red en un espacio topológico X es una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tales que todo conjunto abierto no vacío en X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$. Una red es casi lo mismo que una base; la diferencia consiste en que los miembros de la red no son abiertos necesariamente.

El peso de red de X está definido como

$nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es una red en X$\}$.

Se verifica que $nw(X) \leq |X|$ para todo espacio X, y $w(X) = nw(X)$ para todo espacio compacto X [En].

Una π-base en X es una familia $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos en X tales que si U es abierto y no vacío en X, entonces $V \subseteq U$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. El π-peso de X se define como:

$\pi w(X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una π- base en X$\}$.

y se observa que $d(X) \leq \pi$w(X)$\leq w(X)$.

Sean X un espacio, $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X y $p \in X$. Entonces, $\mathcal{V}$ es una π-base local en p si para cada vecindad U de p existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subseteq U$. Si además se cumple que $p \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una base local en p. Finalmente, si $\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\}=\{p\}$, entonces $\mathcal{V}$ es una seudobase para p. Ahora podemos definir las siguientes funciones cardinales:

$\chi(p, X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una base local en $p\}$;

$\pi\chi(p, X)=min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una π-base local en $p\}$;

$\psi(p, X) = min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una pseudobase para $p\}$.

Otra función cardinal es la extensión de X y está definido como

$e(X) = sup\{|A| : A \subset X$ discreto y cerrado en X$\}$.

1.1 Mapeos cocientes y pseudoabiertos

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre mapeos cocientes y pseudoabiertos que se usan en el capítulo 1.

1.1. Definición. Una función continua suprayectiva $f : X \to Y$ es llamada pseudoabierta si para cada $y \in Y$ y cada abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in Int f(U)$.

El siguiente resultado se encuentra en [Ar2], en esta referencia se muestra que el concepto de pseudoabierto es equivalente al de hereditariamente cociente.

1.2. Teorema. Cada función pseudoabierta es cociente.

Demostración. Tomemos una función continua suprayectiva $f : X \to Y$. Dado un $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, consideremos $y \in U$. Se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto que contiene a $f^{-1}(y)$; por hipótesis $y \in Intf(f^{-1}(U)) = IntU$, y por lo tanto U es abierto en Y y f es una función cociente. □

1.3. Teorema. Un espacio X es cociente-proyectivo si y sólo si cualquier familia discreta de subconjuntos G_δ no vacíos de X es finita.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua suprayectiva y $Y \in \mathcal{U}$. Si f no es cociente entonces existe un conjunto no cerrado $A \subset Y$ tal que $f^{-1}(A)$ es cerrado en X. Como Y es regular y segundo numerable es metrizable, y para todo $A \subset X$, $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $a_n \subset A$ que converge a x. Sea $\{a_n : n \in \omega\} \subset A$ una sucesión convergente a un punto $a \in \bar{A} - A$, y sea $F_n = f^{-1}(a_n)$. Como el conjunto $\bigcup\{F_n : n \in \omega\} = f^{-1}(\{a_n : n \in \omega\} \cup \{a\}) \cap f^{-1}(A)$ es cerrado en X, la familia $\{F_n : n \in \omega\}$ es discreta, porque si $x \in X \setminus \bigcup\{F_n : n \in \omega\} = U$ se tiene que U es una vecindad de x que no intersecta a ninguno de los F_n, si $x \in \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ entonces $x \in F_n$ para alguna n, y $f(x) = a_n$. Sea V una vecindad de a_n tal que $a_m \notin V$ para toda $m \neq n$, como f es continua existe una vecindad W de x tal que $f(W) \subset V$ y $W \cap F_n = \emptyset$ para todo $m \neq n$, lo cual muestra que efectivamente la familia $\{F_n : n \in \omega\}$ es discreta y consiste de subconjuntos G_δ de X no vacíos, lo que prueba la suficiencia.

Supongamos ahora que X es cociente–proyectivo, y $\{F_n : n \in \omega\}$ es una familia discreta de subconjuntos G_δ no vacíos de X. Se puede asumir que $\bigcup\{F_n : n \in \omega\} \neq X$. Sea $y \in X \setminus \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$ existe una función $f_n \in C_p(X, I)$ con las siguientes propiedades:

1) $f_n(F_i) = \{0\}$ para cada $i \in \omega \setminus \{n\}$;

2) $\emptyset \neq f_n^{-1}(1) \subset F_n$;

3) $f_n(y) = 0$.

Sea $f = \triangle\{f_n : n \in \omega\}$ el producto diagonal de las funciones f_n. Entonces $f : X \to f(X) = Y \subset I^\omega$ es una función cociente y $\{z_n : n \in \omega\} \cup \{z\} \subset Y$ donde $z_n(m) = 0$ para $m \neq n$ y $z_n(n) = 1$, mientras $z(n) = 0$ para toda $n \in \omega$. La sucesión $\{z_n\}$ converge a z en Y, i.e., el conjunto $\{z_n : n \in \omega\}$ no es cerrado en Y. Sin embargo $f^{-1}(z_n) \subset F_n$ para toda $n \in \omega$ y $f^{-1}(\{z_n : n \in \omega\}) \subset \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$, de donde $f^{-1}(\{z_n : n \in \omega\})$ es cerrado lo cual es una contradicción, que prueba la necesidad del teorema. $\square$

El siguiente resultado se encuentra en [Ar2] y se utiliza en la prueba del teorema 1.5.

1.4. Teorema. Sea $f : X \to Y$ una función continua sobre. Las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) Para cada $Y' \subset Y$, la restricción f' de f a $X' = f^{-1}(Y')$ es una función cociente de X' sobre Y'.
(b) Para cada $y \in Y$ y cada abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in Intf(U)$, es decir, f es pseudoabierta.
(c) Si $A \subset Y$ y $y \in \overline{A}$ entonces $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)} \neq \emptyset$.

Demostración. En primera instancia se va a probar que $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $U \subset X$ un abierto que contiene a $f^{-1}(y)$. Hagamos $A = Y - f(U)$, $Y' = A \cup \{y\}$, $X' = f^{-1}(Y')$ y $B = f^{-1}(A)$. Entonces $X' = B \cup f^{-1}(y)$ y $U \cap B = \emptyset$. Como $f^{-1}(y) \subset U$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es abierto en X' y (a) implica que $\{y\}$ es abierto en Y', de donde $y \notin \overline{A}$ y $y \in Y - (\overline{Y - (f(U))}) = Intf(U)$.

Para probar que $(b) \Rightarrow (c)$ observe que si $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)} = \emptyset$ entonces $U = X - \overline{f^{-1}(A)} \supset f^{-1}(y)$ y U es abierto en X. Además $f(U) \cap A = \emptyset$ y por (b) tenemos que $y \in Intf(U)$. De aquí $Intf(U) \cap A = \emptyset$ lo que implica que $y \notin \overline{A}$.

Para probar $(c) \Rightarrow (a)$ supongamos que $A \subset Y'$, $B = f^{-1}(A) \subset X'$ y B es cerrado en X'. Si $\widetilde{B} = \overline{B}$, entonces $f^{-1}(Y') = X'$ implica que $f(\widetilde{B}) \cap Y' = A$. Si $y \in \overline{A}$ entonces por (c) se tiene $f^{-1}(y) \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$ y consecuentemente $y \in f(\widetilde{B})$. De este modo si $y \in \overline{A} \cap Y'$ entonces $y \in f(\widetilde{B}) \cap Y' = A$ lo cual nos muestra que A es cerrado en Y', completando la prueba. $\square$

1.5. Teorema. Cada función cociente sobre un espacio Fréchet–Urysohn es pseudoabierta.

Demostración. Tomemos un espacio X y una función cociente $f : X \to Y$ donde Y es un espacio Fréchet–Urysohn. Es suficiente probar que si $A \subset Y$, y $y \in \overline{A}$ entonces $f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)} \neq \emptyset$ (teorema 1.4). Si $y \in \overline{A}$ entonces existe una sucesión $\{y_n : n \in \omega\} \subset A$ que converge a y. Sea $F_n = f^{-1}(y_n)$ para toda $n \in \omega$; hagamos $F = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$. Es suficiente probar que

$f^{-1}(y) \cap \overline{F} \neq \emptyset$. Como f es cociente, tenemos que $\overline{F} \neq F$, y por lo tanto existe $z \in \overline{F} - F$. Se afirma que $z \in f^{-1}(y)$. De otra manera $f(z) \neq y$; como $z \in \overline{F}$ y f es continua tenemos que $f(z) \in \overline{f(F)}$ lo cual implica que existe una sucesión $\{z_n : n \in \omega\} \subset \{y_n : n \in \omega\} \subset f(F)$ que converge a $f(z)$. Sin embargo, la sucesión $\{z_n : n \in \omega\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{y_n : n \in \omega\}$ que converge a y. Por consiguiente la sucesión $\{z_n : n \in \omega\}$ converge a dos puntos diferentes, lo cual es una contradicción que muestra que $y = f(z)$. Por lo tanto $z \in f^{-1}(y) \cap \overline{F} \subset f^{-1}(y) \cap \overline{f^{-1}(A)}$ y nuestra demostración está completa. $\square$

1.2 Extensión de mapeos

En esta sección presentaremos resultados sobre extensión de mapeos y espacios C^*-encajados que se utilizan en los capítulos 2 y 3.

Ahora recordemos la definición de diámetro de un conjunto.

Sea (M, d) un espacio métrico. Para todo $A \subset M$ definimos el diámetro del conjunto A en M de la manera siguiente: $diám(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. El número $diám(A)$ se llama diámetro del conjunto A en (M, d).

También recordemos como se define la bola de radio r centrada en x_0. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, entonces $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$.

1.6. Definición. Sea X un espacio topológico. Supongamos que A es un subconjunto denso de X y $f : A \to Y$ es una función continua del subespacio A en un espacio métrico (Y, d). Diremos que la oscilación de f en $x \in X$ es igual a cero, si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U del punto x tal que $diam(f(A \cap U)) < \epsilon$.

El siguiente resultado se encuentra en [En, lema 4.3.16].

1.7. Teorema. Dado un espacio topológico X, supongamos que A es un subconjunto denso de X y $f : A \to Y$ una función continua del subespacio A en un espacio métrico completo (Y, d). Sea B el conjunto de los puntos de X en los cuales la oscilación de f es cero. Entonces $A \subset B$ y B es G_δ en X. Además existe una función continua $F : B \to Y$, tal que $F|A = f$.

Demostración. Empezaremos por probar que $A \subset B$. Dado un $x \in A$ y un $\epsilon > 0$, existe una $V \in \tau(A)$, con $x \in V$ tal que $f(V) \subset B(f(x), \frac{\epsilon}{3})$. Existe un

$U \in \tau(X)$ tal que $V = U \cap A$. Es claro que U es una vecindad de x. Luego $diam(f(U \cap A)) = diam(f(V))$. Si $y, z \in f(V)$ entonces $y, z \in B(f(x), \frac{\epsilon}{3})$ y $d(y,z) \leq d(y, f(x)) + d(f(x), z) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}$. Por lo tanto, $diam(f(V)) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$. Esto demuestra que $A \subset B$.

Ahora probaremos que B es G_δ. Sea $B_n = \{x \in X :$ existe una vecindad U de x tal que $diam(f(U \cap A)) < \epsilon\}$, es claro que B_n es un conjunto abierto de X. Tomemos $x \in B$ y $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente existe una vecindad U de x tal que $diam(f(U \cap A)) < \frac{1}{n}$, y esto se puede realizar para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde $x \in B_n$ para toda n y $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Por otro lado si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ entonces $x \in B_n$ para toda n y sea $\epsilon > 0$, tomemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ por lo tanto $diam(f(U \cap A)) < \frac{1}{n_0} < \epsilon$, y esto se puede realizar para cada $\epsilon > 0$ de donde $x \in B$. De todo lo anterior se puede concluir que $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es un conjunto G_δ en X.

Fijemos un $x \in B$. Denotemos por $\mathcal{B}_x$ la familia de todas las vecindades del punto $x \in X$. Sea $\mathcal{F}_x = \{\overline{f(U \cap A)} : U \in \mathcal{B}_x\}$. La familia $\mathcal{F}_x$ consiste de subconjuntos cerrados de Y. Demostraremos que $\mathcal{F}_x$ es centrada.

Siendo A denso en X, se tiene que $x \in \overline{A}$. Por consiguiente, $U \cap A \neq \emptyset$ para cualquier $U \in \mathcal{B}_x$. Esto significa que $\mathcal{F}_x$ no tiene elementos vacíos. Luego dadas $U_1, ..., U_n \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $\emptyset \neq \overline{f(U_1 \cap ... \cap U_n \cap A)} \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap ... \cap \overline{f(U_n \cap A)}$, lo cual muestra que $\mathcal{F}_x$ es centrada.

Sea $\epsilon > 0$. Como la oscilación de f en x es igual a cero, existe una vecindad U de x tal que el $diam(f(A \cap U)) < \epsilon$. De aquí se sigue que $diam\overline{f(A \cap U)} = diam(f(A \cap U)) < \epsilon$. Por el teorema de Cantor [En2, teorema 4.3.9] la familia $\mathcal{F}_x$ tiene intersección no vacía.

La intersección $\bigcap \mathcal{F}_x$ no puede tener más de un punto. En efecto, si $y, z \in \bigcap \mathcal{F}_x$ y $y \neq z$ entonces $diam(G) \geq r = d(y,z)$ para cualquier $G \in \mathcal{F}$. Pero ya se vio que para todo $\epsilon > 0$ la familia $\mathcal{F}_x$ tiene elementos de diámetro $< \epsilon$ lo que es contradictorio. Hagamos $F(x) = y$ donde y es el único punto de $\bigcap \mathcal{F}_x$. De este modo obtenemos una función $F : B \to Y$. Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(U \cap A)$ para cualquier vecindad U del punto x. De modo que $f(x) \in \bigcap \mathcal{F}_x$. Pero el conjunto $\bigcap \mathcal{F}_x$ contiene a lo más un punto. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{F}_x = \{f(x)\}$ y $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Ahora sólo falta demostrar que F es una función continua. Sea $x \in B$. Supongamos que W es una vecindad de $F(x)$. Como Y es un espacio métrico, podemos hallar un $\epsilon > 0$ tal que $B(F(x), \epsilon) \subset W$. De acuerdo con la definición de F existe un $U \in \tau(X)$ tal que $x \in U$ y $diam(f(U \cap A)) < \epsilon$. El conjunto $V = U \cap B$ es una vecindad de x en B; vamos a probar que $F(V) \subset B(F(x), \epsilon) \subset W$.

Sea $y \in V$. Como U es vecindad de ambos puntos x, y, el conjunto $G = \overline{f(U \cap A)}$ tiene que pertenecer a $\mathcal{F}_y$ y $\mathcal{F}_y$. De modo que $F(y) \in G$, $F(x) \in G$ y $d(F(y), F(x)) \leq diam(G) = diam(f(U \cap A)) < \epsilon$. Resulta que $f(y) \in B(F(x), \epsilon)$ para cualquier $y \in V$. Por consiguiente $F(V) \subset W$, lo que prueba la continuidad de F en el punto x. $\square$

1.8. Lema. Si P es la familia de todos los subconjuntos G_δ de $\mathbb{R}$ entonces se tiene $|P| = \mathfrak{c}$.

Demostración. Como el conjunto $\{x\}$ es un G_δ para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mathfrak{c} = |\{x : x \in \mathbb{R}\}| \leq |P|$. Sea $\mathcal{B} = \{U_n : n \in N\}$ una base numerable de $\mathbb{R}$; para cada $U \in \tau(\mathbb{R})$ se tiene que $U = \bigcup_{k \in A} U_k$ para algún $A \subset \mathbb{N}$. Por consiguiente $|\tau(\mathbb{R})| \leq |exp(\mathcal{B})| = 2^\omega = \mathfrak{c}$. La familia de subfamilias numerables de $\tau(\mathbb{R})$ tiene la cardinalidad $\leq |\tau(\mathbb{R})|^\omega = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Como cada subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ es intersección de una subfamilia numerable de $\tau(\mathbb{R})$, tenemos que $|P| \leq \mathfrak{c}$. $\square$

1.9. Lema. Sea X un espacio separable. Supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua. Entonces $f^{-1}(y)$ es denso en ninguna parte para toda $y \in Y$ excepto un conjunto numerable.

Demostración. Como X es separable se tiene que $d(X) \leq \omega$, y por lo tanto $c(X) \leq \omega$. Supongamos que la familia γ de los interiores de los $f^{-1}(y)$ que no son densos en ninguna parte es tal que $|\gamma| > \omega$. Para cada $Intf^{-1}(y) \in \gamma$ se tiene que $Int(f^{-1}(y)) \neq \emptyset$. Además $Int(f^{-1}(y)) \cap Int(f^{-1}(y')) = \emptyset$, si $y \neq y'$. Luego la familia γ consta de abiertos no vacíos mutuamente ajenos. Por lo tanto, $c(X) \geq |\gamma| > \omega$ de donde $c(X) > \omega$, lo cual es una contradicción. $\square$

Recuerde que si X y Y son dos espacios topológicos, $C(X, Y)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y, $C(X, \mathbb{R})$ es denotado por $C(X)$. Si X es un espacio, $C^*(X) = \{f \in C(X) :$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que$|f(x)| \leq M$ para cada $x \in X\}$. Note que los miembros de $C^*(X)$ son funciones continuas acotadas de X en $\mathbb{R}$.

1.10. Lema. Si $A = \{f : Y \to \mathbb{R}^\omega : Y$ es un conjunto denso G_δ en $\mathbb{R}$ y f

es continua$\}$ entonces $|A| = \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea Y_γ un denso G_δ en $\mathbb{R}$. Denotemos por B_γ el conjunto de todas las funciones constantes de Y_γ hacia $\mathbb{R}^\omega$; es claro que $|B_\gamma| = \mathfrak{c}$. Por el lema 1.7 se tiene que $|P| = \mathfrak{c}$ donde P es la familia de todos los subconjuntos G_δ en $\mathbb{R}$. De este modo $|A| \geq \sum |B_\gamma| = \mathfrak{c}$. Si Y es un subconjunto denso en $\mathbb{R}$, podemos tomar en Y un subconjunto denso numerable Z. Definamos una función φ de $C(Y, \mathbb{R}^\omega)$ hacia $C(Z, \mathbb{R}^\omega)$ de la siguiente manera: a cada $f \in C(Y, \mathbb{R}^\omega)$ le asociamos $f \mid Z$. Notemos que φ es inyectiva y por lo tanto $|C(Y, \mathbb{R}^\omega)| \leq |C(Z, \mathbb{R}^\omega)| = \mathfrak{c}$. Se sabe por el lema 1.8 que $|P| = \mathfrak{c}$, donde P es la familia de todos los subconjuntos G_δ en $\mathbb{R}$. Por consiguiente $|A| = \sum\{|C(Y, \mathbb{R}^\omega)| : Y \text{ es un denso } G_\delta \text{ en } \mathbb{R}\} \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. □

El siguiente resultado se encuentra en [Por] y nos da un criterio para decidir cuando un subespacio de X es C^*-encajado en X.

1.11. Teorema. Un subespacio S de un espacio X está C^*-encajado en X si y sólo si cualesquiera dos conjuntos completamente separados en S son completamente separados en X.

Demostración. Supongamos que S es C^*-encajado en X. Si A y B son conjuntos completamente separados en S, entonces existe $f \in C^*(S)$ tal que $0 \leq f \leq 1$ y $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$. Por hipótesis existe $g \in C(X)$ tal que $g|S = f$. La función $h(x) = max\{0, min\{g(x), 1\}\} \in C^*(X)$ separa completamente A y B en X.

Ahora supongamos que cualesquiera dos conjuntos completamente separados en S son completamente separados en X y $f \in C^*(S)$. Tomemos $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq M$. Para cada entero positivo n definamos $r_n = (\frac{M}{2})(\frac{2}{3})^n$; entonces $|f| \leq 3r_1$. Sean $f_1 = f$, $A_1 = \{s \in S : f_1(s) \leq -r_1\}$ y $B_1 = \{s \in S : f_1(s) \geq r_1\}$. Los conjuntos A_1 y B_1 son completamente separados en S, y por lo tanto existe $h_1 \in C^*(X)$ tal que $0 \leq h_1 \leq 1$, $h_1(A_1) \subseteq \{0\}$ y $h_1(B_1) \subseteq \{1\}$. Si $g_1 = 2r_1h_1 - r_1$ entonces $g_1 \in C^*(X)$. Además $g_1(A_1) \subset \{-r_1\}$, $g_1(B_1) \subset \{r_1\}$ y $|g_1| \leq r_1$.

Sea $n > 1$. Procediendo inductivamente supongamos que para cada $k < n$ tenemos definidas funciones $f_k \in C^*(S)$, conjuntos $A_k, B_k \subset S$, y $g_k \in C^*(X)$ tales que:

(1) $|f_k| \leq 3r_k$;

(2) $A_k = \{s \in S : f_k(s) \leq -r_k\}$;

(3) $B_k = \{s \in S : f_k(s) \geq r_k\}$;

(4) $|g_k| \leq r_k$, $g_k(A_k) \subset \{-r_k\}$, $g_k(B_k) \subset \{r_k\}$.

Sea $f_n = f_{n-1} - g_{n-1}|S$. Entonces $f_n \in C^*(S)$ y por (1) y (4) tenemos que $|f_n| \leq 3r_n$. Defina A_n como $\{s \in S : f_n(s) \leq -r_n\}$ y por B_n el conjunto $\{s \in S : f_n(s) \geq r_n\}$. Se puede encontrar $g_n \in C^*(X)$ tal que $|g_n| \leq r_n$, $g_n(A_n) \subset \{-r_n\}$ y $g_n(B_n) \subset \{r_n\}$.

Por el teorema de Weierstrass y la convergencia de $\sum r_n$ se sigue que si $x \in X$ entonces $\sum g_n(x)$ converge a un número real $g(x)$. Se puede probar que $g \in C(X)$ usando la desigualdad del triángulo y relaciones entre series. Como $\sum r_n = M$ se tiene que $|g| \leq M$ y $g \in C^*(X)$. Como $(g_1 + ... + g_n)|S = (f_1 - f_2) + ... + (f_n - f_{n+1}) = f_1 - f_{n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) = 0$ se sigue que $g(s) = f_1(s) = f(s)$ para cada $s \in S$. De aquí $g|S = f$ y S es C^*-encajado en X. □

El siguiente corolario se encuentra en [Por] y se utiliza en la prueba del teorema 1.14.

1.12. Corolario. Sea K un subespacio compacto de un espacio Tychonoff X. Entonces
(1) K es completamente separado en X de cada conjunto cerrado disjunto de K.
(2) K es C^*-encajado en X.

Demostración. (1) Sea A un cerrado en X y disjunto de K. Para cada $x \in K$ existe $f_x \in C^*(X)$ tal que $0 \leq f_x \leq 1$, $f_x(x) = 0$ y $f_x(A) = 1$. Por compacidad existen puntos $x(1), ..., x(n) \in K$ tales que $K \subset \bigcup\{f^{-1}_{x(i)}[0, 1/2] : i = 1, ..., n\} = B$. Los conjuntos B y $\bigcap\{f^{-1}_{x(i)}(1) : i = 1, ..., n\}$ son disjuntos; además son conjuntos nulos de X que contienen a K y A respectivamente. Entonces K y A son completamente separados en X.

(2) Sean A y B dos conjuntos completamente separados en K. Existen conjuntos nulos Z_1 y Z_2 en K tales que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ y $A \subset Z_1$, $B \subset Z_2$. Como Z_2 es compacto, es completamente separado en X de Z_1 ya que Z_1 es cerrado en X y disjunto de Z_2. Por lo tanto K es C^*-encajado en X por el teorema 1.11. □

El siguiente teorema se encuentra en [Por] y se utiliza en la prueba del teorema 1.14.

1.13. Teorema. Sea S un subespacio C^*-encajado de X. Entonces el conjunto S es C-encajado en X si y sólo si es completamente separado en X de cada conjunto nulo de X y disjunto de S.

Demostración. Supongamos que S es un subespacio C-encajado de X y Z es un conjunto nulo tal que $Z \cap S = \emptyset$. Sea $f \in C(X)$ tal que $Z = f^{-1}(0)$. Definamos g por $g(s) = 1/f(s)$ para cada $s \in S$; entonces $g \in C(S)$. De aquí existe $k \in C(X)$ tal que $k|S = g$. Si $q = fk$ entonces $q \in C(X)$, $q(Z) = \{0\}$ y $q(S) = \{1\}$. De modo que S y Z son completamente separados en X.

Inversamente, supongamos que S es completamente separado en X de cada conjunto cero de X disjunto de él. Sea h un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $(-1, 1)$; tomemos una función arbitraria $f \in C(S)$. Entonces $h \circ f \in C^*(S)$; como S es C^*-encajado en X existe $g \in C^*(X)$ tal que $g|S = h \circ f$. Sea $Z = \{x \in X : |g(x)| = 1\}$. Si $s \in S$ entonces $g(s) = h(f(s)) \in (-1, 1)$ de donde $Z \cap S = \emptyset$. De aquí Z y S son completamente separados en X. Por consiguiente existe $k \in C(X)$ tal que $0 \leq k \leq 1$, $k(Z) = 0$, $k(S) = 1$. De esta manera $h^{-1} \circ (gk) \in C(X)$ y si $s \in S$ entonces se obtiene la igualdad $h^{-1} \circ (gk)(s) = h^{-1}(g(s)k(s)) = h^{-1}(h(f(s)) = f(s)$. Por lo tanto $h^{-1} \circ (gk)|S = f$ y resulta que S es C-encajado en X. $\square$

El siguiente resultado se encuentra en [Por] y se utiliza en el teorema 2.19 para encontrar relación entre espacios compactos y casi-inyectivos.

1.14. Teorema. Cada subespacio compacto de un espacio de Tychonoff X es C-encajado en X.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del corolario 1.12 y el teorema 1.13. $\square$

El siguiente resultado se encuentra en [Ar6] y se utiliza en la prueba del lema 1.17.

1.15. Teorema. Para cada función perfecta suprayectiva $f : X \to Y$ existe un cerrado $F^* \subset X$ tal que $f(F^*) = Y$ y $f|F^*$ es una función perfecta irreducible.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_a : a \in A\}$ la familia de todos los cerrados F_a

en X tales que $f(F_a) = Y$. Definamos el siguiente orden en $\mathcal{F}$: $F_a > F_b$ si y sólo si $F_a \subset F_b$. Recuerde que un subconjunto $C \subset F$ se llama cadena, si $F_a \leq F_b$ ó $F_b \leq F_a$ para todos $F_a, F_b \in C$. Dada una cadena C en $\mathcal{F}$, hagamos $C^\sharp = \cap C$. Primero mostraremos que $C^\sharp \in \mathcal{F}$. Sea $x \in X$; por la definición de $\mathcal{F}$, tenemos que $f^{-1}(f(x)) \cap F_a \neq \emptyset$ para toda $F_a \in \mathcal{F}$. Como X es compacto y C es una familia centrada de subconjuntos cerrados de X, tenemos que $f^{-1}(f(x)) \cap \bigcap C \neq \emptyset$ y por lo tanto $f(C^\sharp) = Y$. Así $C^\sharp \in \mathcal{F}$ y es una cota para C ($C^\sharp > F_a$ para todo $F_a \in C$); por el lema de Zorn existe un cerrado en X tal que $f(F^*) = Y$ y $f|F^*$ es irreducible. El que la función $f|F^*$ sea perfecta es consecuencia de que F^* es cerrado. □

1.3 Espacios dispersos

En esta sección presentaremos algunos resultados de espacios dispersos que son trascendentes en las caracterizaciones de algunos espacios que se dan en los capítulos 2 y 3.

El siguiente resultado se encuentra en [Sh] y se utiliza en la prueba del teorema 1.19

1.16. Lema. Si X es un compacto disperso metrizable, entonces $|X| \leq \omega$.

Demostración. Supongamos que $|X| > \omega$. Sea $X^* = \{x \in X$: existe $V_x \in \tau(x, X)$ con $|V_x| \leq \omega\}$. Por ser X disperso se tiene que $X^* \neq \emptyset$. Además, $\{V_x : x \in X^*\}$ es una cubierta abierta de X^* mismo que es Lindelöf (por ser segundo numerable). De modo que existe un subconjunto numerable $A \subset X^*$ tal que $X^* \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Por lo tanto X^* es numerable. Por otro lado se afirma que $|X \backslash X^*| > 1$. En efecto si $X \backslash X^* = \{x^*\}$, entonces $X = X^* \cup \{x^*\}$ es numerable. Por otro lado se afirma que en $X \backslash X^*$ no hay puntos aislados. En efecto, de otra manera existe $a \in X \backslash X^*$ tal que $U_a \bigcap (X \backslash X^*) = \{a\}$, para algún $U_a \in \tau(a, X)$ y por regularidad existe V_a que no es numerable tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_a$. Por otro lado $\overline{V_a} \backslash \{a\} \subset X^*$, lo que implica que $\overline{V_a}$ es numerable, por el hecho de que X^* es numerable, lo cual nos proporciona una contradicción con el hecho de que V_a es no numerable. Por lo tanto en $X \backslash X^*$ no hay puntos aislados, y como X es disperso esto no es posible. De este modo X es numerable. □

1.17. Lema. La imagen continua de un compacto disperso es un compacto disperso.

Demostración. Sea X un espacio compacto y disperso, tomemos $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Tomemos un conjunto no vacío $A \subset Y$; se puede suponer que A es cerrado en Y. Por ser f continua el conjunto $A' = f^{-1}(A)$ es cerrado en X. Si hacemos $g = f|A' : A' \to A$ se tiene que g es una función perfecta. Por el teorema 1.15 existe un cerrado $A'' \subset A'$ tal que $g(A'') = A$, y la función $g|A''$ es irreducible. Sea $x_0 \in A''$ un punto aislado de A''. El conjunto $A'' - \{x_0\}$ es cerrado en A'' y como $f|A''$ es irreducible, se tiene que $f(A'' - \{x_0\}) \neq A$. Por consiguiente $\{f(x_0)\} = A - f(A'' - \{x_0\})$ es abierto en A y por lo tanto $f(x_0)$ es un punto aislado de A. De aquí podemos concluir que Y es disperso. □

El siguiente teorema se encuentra en [Sh] y se utiliza en la prueba del teorema 2.11 que caracteriza a un espacio compacto casi-inyectivo.

1.18. Teorema. Si X es compacto y no disperso entonces existe una función continua de X sobre $[0, 1]$.

Demostración. Para cada $n \in \omega$ consideramos que $n = \{0, 1, ..., n-1\}$; definamos $Fun = \bigcup\{\{0,1\}^n : n < \omega\}$. Dada una $s \in Fun$, existe un único $n \in \omega$ tal que $s \in \{0,1\}^n$; hagamos $l(s) = n$. Si $s : n \to \{0, 1\}$ definamos para $i = 0, 1$ la función $s^\frown i \in \{0,1\}^{n+1}$ de la siguiente manera: $s^\frown i(j) = s(j)$ para todo $j < n$ y $s^\frown i(n) = i$. Para todo $s \in Fun$ construiremos un cerrado sin puntos aislados $F_s \subset X$. Llevaremos a cabo la construción prometida utilizando la inducción sobre n. Como X no es disperso existe un cerrado no vacío $F_\emptyset \subset X$ sin puntos aislados. Sea $n \in \omega$, $n \geq 1$. Supongamos que para cualquier $s \in \{0,1\}^{n-1}$, tenemos construido un conjunto F_s cerrado en X sin puntos aislados.

Sea $s \in \{0,1\}^{n-1}$. En el conjunto F_s tomemos dos puntos distintos x, y. Es fácil encontrar conjuntos U_0 , U_1 abiertos en F_s tales que $x \in U_0$, $y \in U_1$ y $\overline{U_0} \cap \overline{U_1} = \emptyset$. Hagamos $F_{s^\frown 0} = \overline{U_0}$ y $F_{s^\frown 1} = \overline{U_1}$. Entonces $F_{s^\frown 0}$ y $F_{s^\frown 1}$ son subconjuntos cerrados de X sin puntos aislados, con esto ya tenemos la familia $\{F_s : s \in \{0,1\}^n\}$. Como consecuencia, esta construcción inductiva nos da una familia $\{F_s : s \in Fun\}$ con las siguientes propiedades:
(1) si $s \subset t$ entonces $F_t \subset F_s$;
(2) para todo $n \in \omega$, si $t, s \in \{0,1\}^n$ y $t \neq s$, entonces $F_t \cap F_s = \emptyset$.

Hagamos $F = \bigcap_{n\in\omega}\{\bigcup_{s\in\{0,1\}^n} F_s\}$. Dado cualquier $x \in F$ la propiedad (2) implica que, para todo $n \in \omega$ existe un único $s_n \in \{0,1\}^n$ tal que $x \in F_{s_n}$. Se sigue de (1) y (2) que $s_n \subset s_{n+1}$ para cada $n \in \omega$, y por lo tanto está bien definida la función $s = \bigcup\{s_n : n \in \omega\}$ y $s \in \{0,1\}^\omega$. Haciendo $f(x) = s$ obtenemos una función $f : F \to C = \{0,1\}^\omega$.

Para probar que f es continua tomemos cualquier $x \in F$ y cualquier vecindad abierta V de $f(x)$ en C. Existen $n \in \omega$ y $a_0, ..., a_n \in \{0,1\}$ tales que $f(x) \in W \subset V$ donde $W = \{a_0\} \times ... \times \{a_n\} \times \{0,1\}^{\omega-(n+1)}$. Hagamos $s(i) = a_i$ para todo $i \in (n+1)$. Entonces $s \in Fun$ y $U = F_s \cap F$ es un abierto en F. Es evidente que $x \in U$. Para probar la continuidad de f en x, si $y \in U$ entonces $y \in F_s$ lo que implica que existe una función $t \in \{0,1\}^\omega$ tal que $y \in \bigcap\{F_{t(n)} : n \in \omega\}$ y $t|(n+1) = s$. De modo que $f(y) = t$ y $t \in W$ por que $W = \{u \in \{0,1\}^\omega : u|(n+1) = s\}$. Por ser $y \in U$ arbitrario, acabamos de demostrar que $f(U) \subset W \subset V$ lo que prueba la continuidad de f en el punto x. La función f es suprayectiva porque, dado cualquier $s \in \{0,1\}^\omega$ existe un $x \in \bigcap\{F_{s|n} : n \in \omega\}$; es claro que $f(x) = s$.

Cada compacto metrizable es imagen continua del conjunto de Cantor, así que existe $g : C \to [0,1]$ continua y suprayectiva; si tomamos la función $h = g \circ f : F \to [0,1]$, por el teorema de Tietze-Urysohn existe una función continua $G : X \to [0,1]$ tal que $G \mid F = h$. □

El siguiente teorema se encuentra en [Sh] y se utiliza en la prueba del teorema 2.11.

1.19. Teorema. Un espacio compacto X es disperso si y sólo si cualquier imagen segundo numerable de este espacio es numerable.

Demostración. Sea X un espacio compacto disperso. Sea $f : X \to Y$ continua y suprayectiva para un espacio $Y \in \mathcal{U}$. Por el lema 1.17 el espacio Y es compacto y disperso. Como Y también es metrizable, tenemos que $|Y| \leq \omega$ (veáse el lema 1.16).

Por otro lado supongamos que cualquier imagen segundo numerable del espacio compacto X es numerable. Si X no es disperso existe una función continua y suprayectiva $f : X \to [0,1]$ (teorema 1.18). De esta manera $[0,1]$ sería numerable, lo cual no es cierto. Por consiguiente X es disperso. □

1.20. Teorema. Si un espacio regular Y tiene red numerable entonces existe una condensación de $g : Y \to Z \in \mathcal{U}$.

Demostración. Como Y tiene una red numerable y $l(Y) \leq nw(Y)$ se tiene que Y es Lindelöf, y por lo tanto normal. Se afirma que todo abierto de Y es

F_σ. Denotemos por $\mathcal{N}$ la red numerable de Y; note que $\mathcal{M} = \{\overline{P} : P \in \mathcal{N}\}$ también es una red. De esta manera cada abierto $U \subset Y$ es F_σ, ya que $U = \bigcup\{\overline{V} \in \mathcal{M} : \overline{V} \subset U\}$. Por lo anterior se infiere que Y es perfectamente normal. De modo que para cada $F \in \mathcal{M}$, existe una función continua $g_F : Y \to \mathbb{R}$ tal que $F = (g_F)^{-1}(0)$. La función dada por $g = \triangle\{g_F : F \in \mathcal{M}\}$: $Y \to M = g(Y) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ es continua por ser un producto diagonal de funciones continuas. Si $x \neq y$, entonces existe $F \in \mathcal{M}$ tal que $x \in F$ y $y \notin F$; por consiguiente $g_F(x) = 0$, $g_F(y) \neq 0$ lo cual muestra que $g(x) \neq g(y)$. De aquí se puede concluir que g es inyectiva, es decir, g es la condensación deseada. $\square$

El concepto de ω-modificación y espacio Lindelöf P se define en Preliminares (pág. 7)

1.21. Teorema. Si X es Lindelöf disperso entonces la ω-modificación X_ω de X es Lindelöf P.

Demostración. Por construcción la ω–modificación es un espacio P [Us].

Supongamos que M es una cubierta abierta de X_ω. Consideremos el conjunto $V = \bigcup\{Int_X(\bigcup\lambda) : \lambda \subset M, |\lambda| \leq \omega\}$. Si $X = V$, entonces para todo $x \in X$ existen $V_x \in \tau(x, X)$ y λ_x una subfamilia numerable de M tales que $V_x \subset \bigcup\lambda_x$. Como $X = \bigcup\{V_x : x \in X\}$ y $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, por ser X Lindelöf existe una subcubierta numerable $\{V_{x_n} : n \in \omega\}$ tal que $X = \bigcup\{V_{x_n} : n \in \omega\}$ y entonces $\bigcup\{\lambda_{x_n} : n \in \omega\}$ es una subcubierta numerable de X_ω, lo cual nos muestra que X_ω es Lindelöf. Observemos que el mismo argumento muestra que cada cerrado en X y contenido en V es Lindelöf en X_ω.

Por otro lado probaremos que el caso $X \backslash V \neq \emptyset$ es imposible, lo cual nos muestra efectivamente que X_ω es Lindelöf. Supongamos lo contrario y, usando el hecho de que X es disperso, fijemos un punto aislado x en $X \backslash V$. Tomemos una vecindad U del punto x en X tal que $\overline{U} \subset \{x\} \cup V$. Tenemos que $x \in A$ para alguna $A \in M$ ya que M es cubierta. Como A es abierto en X_ω se puede elegir una familia γ de abiertos en X tal que $|\gamma| \leq \omega$ y $x \in \bigcap\gamma \subset A$. Los conjuntos de la forma $\overline{U} \backslash G$, donde $G \in \gamma$, son cerrados en X y están contenidos en V; por la observación anterior tenemos que $l(\overline{U} \backslash G) \leq \omega$, note que $\overline{U} \backslash G$ se considera como subespacio de X_ω. De esta manera para cada $G \in \gamma$ existe una subfamilia $\lambda_G \subset M$ tal que $|\lambda_G| \leq \omega$ y $\bigcup\lambda_G \supset \overline{U} \backslash G$. Observemos que para $\lambda = (\bigcup\{\lambda_G : G \in \gamma\}) \bigcup\{A\}$ se tiene que $x \in U \subset Int_X(\overline{U}) \subset Int_X(\bigcup\lambda) \subset V$. Esta contradicción con $x \in X \backslash V$

prueba que el caso $X \neq V$ es imposible. $\square$

Capítulo 2

Espacios casi inyectivo–proyectivos

Introducción. Sea X un espacio topológico. Si todas las funciones continuas de X pertenecen a una clase dada, se pueden conocer propiedades topológicas del espacio X. Muchos resultados de esta naturaleza fueron obtenidos antes de 1961. Entre ellos se tienen los siguientes: un espacio Tychonoff X es compacto si y sólo si cada función continua definida en X con la imagen de Hausdorff es cerrada. Un espacio Hausdorff X es compacto si y sólo si la proyección $X \times Y \to Y$ es cerrada para cada espacio normal Y [Ku].

Uno de los artículos en el que se estudiaron estas propiedades de manera sistemática es [Tk], donde se consideran las clases de espacios de Tychonoff para los cuales cada función continua sobre un espacio segundo numerable pertenece a una clase dada $\mathcal{F}$. En [Tk1] tales espacios son llamados $\mathcal{F}$-proyectivos. De las caracterizaciones de este artículo se destaca la siguiente: un espacio X es cociente-proyectivo (i.e. cada función continua suprayectiva $f : X \to Y$ es cociente si $w(Y) \leq \omega$) si y sólo si cada familia discreta de subconjuntos G_δ no vacíos de X es finita [Tk1]. El mismo criterio se aplica para los espacios pseudoabierto-proyectivos que es una observación con la que empieza este capítulo. En el citado artículo Tkachuk prueba que todas las funciones de un espacio X sobre espacios segundo numerables son m-compactas si y sólo si $|\beta X \backslash X| \leq m$. En base a ideas similares surge el estudio de propiedades de los espacios casi compacto-proyectivos [Tk1, teorema 3.19]. Se da bajo CH en [Me1], una respuesta parcial negativa a un problema planteado en [Tk1]: ¿es cierto que, para cada espacio X casi inyectivo-proyectivo segundo numerable, existe una descomposición $X = K \cup Z$ tal que K es compacto y Z es numerable? También se prueba que un espacio compacto X es disperso si y sólo si X es casi inyectivo-proyectivo, y se presenta un espacio Y que no es compacto, ni disperso, pero que es casi inyectivo-proyectivo.

La siguiente observación responde a la pregunta 3.8 planteada en [Tk1].

2.1. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes para cada espacio X:
(1) X es pseudoabierto–proyectivo.
(2) X es cociente–proyectivo.
(3) Cada familia discreta de subconjuntos G_δ no vacíos de X es finita.

Demostración. Es evidente que (1) $\Rightarrow$ (2), ya que cada función pseudoabierta es cociente (teorema 1.2). (2) $\iff$ (3) por el teorema 1.3. Ahora probaremos que (3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que (3) es cierto. Entonces cada función continua $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ es cociente [Tk1]. Por otra parte cada función cociente sobre un espacio Fréchet-Urysohn es pseudoabierta (ver el teorema 1.4 o [Ok]), de lo que podemos deducir que f es pseudoabierta. $\square$

En [Tk1] se estudian los espacios casi compacto-proyectivos lo cual motiva el estudio de espacios con propiedades similares.

2.2. Definición. Una función continua y suprayectiva f de un espacio X en un espacio Y es casi compacta si $|\{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ no es compacta}\}| \leq \omega$.

2.3. Proposición. Si $X = Y \cup Z$, donde Y es compacto y $|Z| \leq \omega$, entonces X es casi compacto-proyectivo.

Demostración. Dada una función $f : X \to T \in \mathcal{U}$, consideremos el conjunto $A = \{y \in T : f^{-1}(y) \text{ no es compacta}\}$. Entonces para cualquier $y \in A$ se tiene que $f^{-1}(y) \cap Z \neq \emptyset$. Tomemos $g(y) = x_y \in f^{-1}(y) \cap Z$. Afirmamos que $g : A \to Z$ es inyectiva. En efecto, tomemos $y_1, y_2 \in A$ tales que $g(y_1) = g(y_2)$. Como se cumple $x_{y_1} = x_{y_2}$, aplicando f obtenemos $y_1 = f(x_{y_1}) = f(x_{y_2}) = y_2$. De este modo $y_1 = y_2$ y g es inyectiva. Por consiguiente $|A| \leq |Z| \leq \omega$ y X es casi compacto–proyectivo.

La proposición anterior muestra que es natural plantear la siguiente pregunta [Tk1]: ¿es cierto que un espacio segundo numerable X es casi compacto–proyectivo sólo cuando $X = Y \cup Z$, donde Y es compacto y $|Z| \leq \omega$? Se prueba en [Me1, teorema 2.5] que bajo CH, la respuesta es negativa.

2.4. Definición. Una función f de un espacio X sobre un espacio Y es casi inyectiva si $|\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leq \omega$.

2.1 Un ejemplo bajo CH

En esta sección se va a construir un ejemplo de un espacio X casi–compacto–proyectivo que no cumple con la descomposición $X = Y \cup Z$, donde Y es compacto y $|Z| \leq \omega$.

2.5. Ejemplo. Bajo CH, existe un subespacio X denso de $\mathbb{R}$ tal que:
(1) Cada función $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ es casi inyectiva.
(2) X no puede expresarse como $K \cup Z$, donde K es compacto y Z es numerable.

Demostración. El método usado en este ejemplo se encuentra en [Tk2]. Se va a construir un subespacio denso $X \subset \mathbb{R}$ tal que, para cada espacio métrico separable Y y cada función continua $f : X \to Y$, las fibras de f son unipuntuales para casi todos los puntos de Y, i.e., el conjunto $\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}$ es numerable.

Por el lema 1.10 y (CH), existe una numeración $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de todas las funciones f que tienen las siguientes propiedades :

(i) f es continua y $P = \mathrm{dom}(f)$ es un subconjunto denso G_δ de $\mathbb{R}$;
(ii) $f : P \to \mathbb{R}^\omega$ y $f(P)$ es no numerable.

Para cada $\alpha < \omega_1$, sea F_α=dom(f_α) y $G_\alpha = f_\alpha(F_\alpha)$. Aplicando el teorema 1.9 vemos que el conjunto $P_\alpha = \{y \in G_\alpha : \mathrm{Int}_{F_\alpha}(f_\alpha^{-1}(y)) \neq \emptyset\}$ es numerable.

2.5.1. Lema. El conjunto $f_\alpha^{-1}(y)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, para cada $\alpha < \omega_1$ y cada punto $y \in G_\alpha \backslash P_\alpha$.

Demostración. Supongamos que el lema es falso, i.e., para algún $\alpha < \omega_1$ y para algún $y \in G_\alpha \backslash P_\alpha$, se tiene que $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\overline{f_\alpha^{-1}(y)}) \neq \emptyset$. Por el hecho de que

F_α es denso en $\mathbb{R}$, se infiere que $F_\alpha \cap \mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\overline{(f_\alpha^{-1}(y))} \neq \emptyset$, así que

$$\emptyset \neq F_\alpha \cap \mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\overline{(f_\alpha^{-1}(y))} \subset F_\alpha \cap \overline{f_\alpha^{-1}(y)} = \overline{f_\alpha^{-1}(y)}^{F_\alpha} = f_\alpha^{-1}(y),$$

y por lo tanto $\mathrm{Int}_{F_\alpha}(f_\alpha^{-1}(y)) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción ya que $y \in G_\alpha \backslash P_\alpha$. Consecuentemente $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\overline{f_\alpha^{-1}(y)}) = \emptyset$, i.e., $f_\alpha^{-1}(y)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para todo $y \in G_\alpha \backslash P_\alpha$. $\triangle$

Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ la enumeración de todos los intervalos abiertos no triviales con extremos racionales en $\mathbb{R}$. Elijamos recursivamente $x_\alpha \in \mathbb{R}$ para cada $\alpha < \omega_1$ de la siguiente manera. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario. Supongamos que hemos escogido puntos $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ para algún $\beta > 0$, $\beta < \omega_1$. Existe $k \in \omega$ tal que $\beta = \beta_0 + k$, donde β_0 es un ordinal límite o $\beta_0 = 0$. Observe que el lema 2.5.1 implica que $f_\gamma^{-1}(f_\gamma(x_\alpha))$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para todos $\alpha < \beta$ y $\gamma < \beta$ tales que $f_\gamma(x_\alpha) \notin P_\gamma$. Puesto que I_k tiene la propiedad de Baire, se puede elegir un punto

$$x_\beta \in I_k \backslash \Big[\bigcup \Big\{ f_\gamma^{-1}(f_\gamma(x_\alpha)) : \alpha < \beta, \gamma < \beta, f_\gamma(x_\alpha) \notin P_\gamma \Big\} \qquad (*)$$
$$\bigcup \Big\{ x_\alpha : \alpha < \beta \Big\} \Big],$$

lo que muestra que nuestra construcción puede continuarse hasta obtener puntos $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ con la propiedad $(*)$ para cada $\beta < \omega_1$. Sea $X = \Big\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\Big\}$. Ahora probaremos que X tiene las propiedades prometidas. Note que X es un subespacio denso de $\mathbb{R}$. Tomemos cualquier función continua suprayectiva $f : X \to Y$, donde Y es segundo numerable. El espacio Y se puede sumergir en $\mathbb{R}^\omega$, i.e., podemos considerar que f es una función continua de X en $\mathbb{R}^\omega$. Aplicando el teorema 1.7, existe una función continua $F : D \to \mathbb{R}^\omega$ con $F \mid X = f$ donde D$\subset \mathbb{R}$ es un conjunto G_δ tal que $X \subset D$, y $\mathbb{R} = \overline{X} \subset \overline{D}$, de donde D es denso en $\mathbb{R}$. . Si $f(X)$ es numerable entonces f es casi inyectiva. Si $|f(X)| > \omega$ entonces $|F(D)| > \omega$ y F satisface (i) y (ii). Por lo tanto existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $F = f_{\alpha_0}$ y $D = F_{\alpha_0}$. De modo que $f = f_{\alpha_0}|X$.

2.5.2. Lema. Sea $A = \{f(x_\beta) : \beta \leq \alpha_0\} \cup P_{\alpha_0}$. Entonces A es un subconjunto numerable de Y y $|f^{-1}(y)| = 1$ para cada $y \in Y \setminus A$.

Demostración. Se tiene que P_{α_0} es numerable por el lema 1.9, y A es numerable ya que es la unión de dos conjuntos numerables. Si $y \in Y \setminus A$, entonces existe $\beta > \alpha_0$ tal que $y = f(x_\beta) = f_{\alpha_0}(x_\beta)$. Si $|f^{-1}(y)| > 1$ entonces existe $\beta' > \alpha_0$, $\beta' \neq \beta$ para el cual $f(x_{\beta'}) = f_{\alpha_0}(x_{\beta'}) = f(x_\beta) = f_{\alpha_0}(x_\beta)$. Si $\beta' < \beta$ entonces para $\alpha = \beta'$ y $\gamma = \alpha_0$ se tiene $f_\gamma(x_\alpha) \notin P_\gamma$, lo cual muestra que $f_\gamma^{-1}(f_\gamma(x_\alpha)) = f_{\alpha_0}^{-1}(f_{\alpha_0}(x_\beta)) = f_{\alpha_0}^{-1}(y)$ está contenido en la unión de las fibras en $(*)$. Por otro lado $x_\beta \in X \setminus f_{\alpha_0}^{-1}(f_{\alpha_0}(x_{\beta'}))$ lo que es una contradicción. El caso $\beta' > \beta$ se maneja analógamente si tomamos como $\gamma = \alpha_0$ y $\alpha = \beta$. $\triangle$

Del lema 2.5.2 se sigue que f es casi inyectiva, y por ser f arbitraria, cada función continua de X sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. Falta verificar la condición (2) del ejemplo. Supongamos que $X = Y \cup Z$, donde Y es compacto y Z es numerable. Por ser Y un conjunto compacto en $\mathbb{R}$, es acotado en $\mathbb{R}$, i.e., $Y \subset (a, b)$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Fuera de (a, b), los puntos de X forman un conjunto numerable y existe un k tal que $I_k \subset (b+1, b+2)$. El conjunto $X \cap (b+1, b+2) \subset Z$ es numerable. Por otra parte el conjunto $T = \{x_{\alpha+k} : \alpha \text{ es un ordinal límite } \} \subset I_k \cap X \subset X \cap (b+1, b+2)$ es no numerable y por lo tanto $|X \cap (b+1, b+2)| > \omega$ lo que nos proporciona una contradicción. $\square$

2.6. Observación. Es fácil ver que la misma demostración brinda el resultado bajo el axioma de Martin. La enumeración respectiva de las funciones f_α se haría hasta $\mathfrak{c}$ y la elección del punto x_β (en el paso β) sería posible porque el axioma de Martin implica la k-propiedad de Baire para cualquier $k < \mathfrak{c}$.

El siguiente ejemplo da una respuesta parcial negativa al problema 3.19 de [Tk1].

2.7. Corolario. Bajo CH, existe un subespacio X de $\mathbb{R}$ tal que cada función continua $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ es casi compacta y no existe una descomposición $X = K \cup Z$, tal que K sea compacto y Z numerable.

Demostración. En el ejemplo 2.5, X es el espacio prometido, ya que si consideramos cualquier espacio segundo numerable Y y cualquier función continua suprayectiva $f : X \to Y$, se tiene que

$$|\{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ no es compacto}\}| \leq |\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leq \omega. \quad \square$$

2.8. Corolario. Bajo CH, existe un espacio segundo numerable X tal que cada función continua suprayectiva de X es casi inyectiva y no existe una descomposición $X = K \cup Z$ tal que K sea compacto y Z numerable.

Demostración. Como X tomemos el espacio del ejemplo 2.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua suprayectiva. Como X es segundo numerable, el espacio Y tiene una red numerable y por el teorema 1.20 existe una condensación $g : Y \to Z \in \mathcal{U}$. Para la función $g \circ f : X \to Z$ se tiene que $|\{z \in Z : |(g \circ f)^{-1}(z)| > 1\}| \leq \omega$ y por lo tanto

$$|\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| = |\{z \in Z : |(g \circ f)^{-1}(z)| > 1\}| \leq \omega.$$

Como consecuencia, cada función continua suprayectiva de X es casi inyectiva. □

En base al ejemplo 2.5 surge el planteamiento del siguiente problema:

2.9. Problema. ¿Existe en ZFC un espacio X segundo numerable que sea casi inyectivo-proyectivo y no pueda expresarse como $K \cup Z$, donde K sea compacto y Z numerable?

Ahora se establecerán algunas caracterizaciones para espacios que tienen la propiedad de ser casi inyectivo-proyectivos.

2.10. Lema. Supongamos que X es casi inyectivo-proyectivo. Entonces cada imagen continua de X tiene la misma propiedad.

Demostración. Sea $g : X \to Y$ una función continua suprayectiva. Dada una función $f : Y \to Z \in \mathcal{U}$ hagamos $B = \{z \in Z : |f^{-1}(z)| > 1\}$; tenemos que demostrar que $|B| \leq \omega$. Consideremos la función $f \circ g : X \to Z$. El conjunto $C = \{z \in Z : |(f \circ g)^{-1}(z)| > 1\}$ es numerable ya que X es casi inyectivo-proyectivo. Por lo tanto se tiene que $|C| \leq \omega$. Obsérvese que $B \subset C$. En efecto si $z \in B$, entonces existen por lo menos dos puntos distintos $c, d \in f^{-1}(z)$. Como $c, d \in Im(g)$ existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $g(x_0) = c$, $g(x_1) = d$. Además $(f \circ g)^{-1}(z) = g^{-1}(f^{-1}(z)) \supset g^{-1}(\{c, d\}) \supset \{x_0, x_1\}$, de donde $|(f \circ g)^{-1}(z)| > 1$ lo cual muestra que $z \in C$. Por lo tanto $B \subset C$ y $|B| \leq \omega$, lo cual muestra que Y es casi inyectivo-proyectivo.

Recordemos que un espacio X es disperso si cada subespacio no vacío $A \subset X$ tiene un punto aislado.

2.2 Espacios dispersos y compacidad

En esta sección se presentan resultados sobre espacios compactos dispersos, espacios Lindelöf dispersos y espacios que resultan ser dispersos bajo ciertas condiciones.

2.11. Teorema. Un espacio compacto X es casi-inyectivo proyectivo si y sólo si X es disperso.

Demostración. Para probar la suficiencia, tomemos un espacio compacto X tal que cada función continua de X sobre un espacio segundo numerable sea casi inyectiva. Si X no es disperso, existe una función continua suprayectiva $f : X \to [0, 1]$ (veáse el teorema 1.18). Aplicando el lema 2.10, se puede concluir que cada función continua de $[0, 1]$ sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. Pero esto no es cierto ya que para la función continua suprayectiva $f : [0, 1] \to [0, 1/4]$ definida por $f(x) = (x - 1/2)^2$, se tiene que $|\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| > \omega$, lo cual es una contradicción [Me1].

Para probar la necesidad, supongamos que X es disperso. Sea $f : X \to Y \in \mathcal{U}$. Un espacio compacto es disperso si y sólo si cada imagen segundo numerable de este espacio es numerable (ver el teorema 1.19). De este modo $|Y| \leq \omega$, y como consecuencia $|\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leq |Y| \leq \omega$. □

2.12. Corolario. Si X es un espacio compacto metrizable, entonces X es numerable si y sólo si X es casi inyectivo-proyectivo.

2.13. Corolario. Si X es pseudocompacto y casi inyectivo-proyectivo entonces X es disperso.

Demostración. Se establecerá que cada función continua de βX sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. Sea $F : \beta X \to Z \in \mathcal{U}$; hagamos $f = F|X$. Si se define $Z' = f(X)$, entonces Z' es compacto por ser pseudocompacto y segundo numerable y Z' es casi inyectivo-proyectivo por el lema 2.10. Como $\overline{X}^{\beta X} = \beta X$ tenemos que $Z' = \overline{Z'}^{Z} = Z$. Así que $f(\beta X) = Z'$, de donde por el corolario 2.12, el espacio Z' es numerable. De lo anterior podemos concluir que cada función continua de βX sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. Por el teorema 2.11 el espacio βX es disperso; como $X \subset \beta X$, tenemos que X también es disperso. □

2.14. Corolario. Si X es numerablemente compacto y es casi inyectivo-proyectivo entonces X es disperso.

El teorema 2.11 muestra que es natural el siguiente planteamiento:

2.15. Problema. Supongamos que X es numerablemente compacto y disperso. ¿Es cierto que X es casi inyectivo-proyectivo?

2.16. Teorema. Si X es Lindelöf P o Lindelöf disperso entonces X es casi inyectivo-proyectivo.

Demostración. Consideremos primero el caso cuando X es Lindelöf P. Tomemos cualquier $f : X \to Y \in \mathcal{U}$. El espacio Y tiene base numerable, y por lo tanto $\{y\}$ es un conjunto G_δ en Y para todo $y \in Y$. De modo que $f^{-1}(y)$ es un G_δ y como X es un espacio P, el conjunto $f^{-1}(y)$ es abierto para todo $y \in Y$. Por otra parte $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$, i.e., $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf, existe un $C \subset Y$ tal que $|C| \leq \omega$, y $X = \bigcup_{y \in C} f^{-1}(y)$. De aquí $Y = f(X) = f(\bigcup_{y \in C} f^{-1}(y)) = C$ y $|Y| = |C| \leq \omega$. Finalmente deducimos que $|\{y \in Y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leq |Y| \leq \omega$.

En el caso cuando X es Lindelöf disperso, la ω-modificación $(X)_\omega$ de X es Lindelöf P por el teorema 1.21, y se tiene que cada función continua suprayectiva $f : (X)_\omega \to Y \in \mathcal{U}$ es casi inyectiva. Además X is imagen continua de su ω-modificación $(X)_\omega$, y como consecuencia del lema 2.10 se tiene que X es casi inyectivo-proyectivo. □

El siguiente ejemplo muestra que no se puede omitir la compacidad en el teorema 2.11.

2.17. Ejemplo. Existe un espacio no compacto Y que no es disperso y es casi inyectivo-proyectivo.

Demostración. Sea X la extensión de Lindelöf en un punto de un espacio discreto no numerable D. Notemos que X es un espacio Lindelöf P. Se sabe que si Y es Lindelöf P, entonces el grupo libre $F(Y)$ del espacio Y es Lindelöf P [Tka]. De esta manera cada función continua de $F(X)$ sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva por el teorema 2.16. Además $F(X)$ no es disperso, porque si asumimos lo contrario, entonces $F(X)$ tendría un punto aislado. Pero los grupos topológicos son espacios homogéneos, por lo cual $F(X)$ sería discreto y numerable. Esta contradicción muestra que $F(X)$ no es disperso. □

Note que $\mathbb{Q}$ da una situación paralela al ejemplo 2.17 en el caso numerable.

2.18. Teorema. Supongamos que Y está C–encajado en X.
a) Si X casi inyectivo-proyectivo entonces también lo es Y.
b) Si cada función continua suprayectiva de X es casi inyectiva entonces cada función continua suprayectiva de Y también es casi inyectiva.

Demostración. Consideremos primero el caso a). Sea $f : Y \to Z$ una función continua suprayectiva para un $Z \in \mathcal{U}$. Podemos considerar que $Z \subset \mathbb{R}^\omega$ y $f = \triangle_{n\in\omega} f_n$, donde $f_n : Y \to \mathbb{R}$ para cada $n \in \omega$. Como Y está C-encajado en X, para cada $n \in \omega$ existe una función continua $F_n : X \to \mathbb{R}$ tal que $F_n|Y = f_n$. Además, para la función $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $F(x) = \{F_n(x)\}_{n\in\omega}$ se tiene que $F \mid Y = f$. La contención

$$\{z \in Z : |f^{-1}(z)| > 1\} \subseteq \{z \in Z : |F^{-1}(z)| > 1\}$$

y la suposición que X es casi inyectivo-proyectivo implican que cada función continua de Y sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva.

Falta probar b). Sea $f : Y \to Z$ una función suprayectiva donde Z es un subespacio de $\mathbb{R}^\kappa$ para algún cardinal κ y $f = \triangle_{l<k} f_l$, donde $f_l : Y \to \mathbb{R}$. Como Y está C-encajado en X, para cada $l < k$ existe una función continua $F_l : X \to \mathbb{R}$ tal que $F_l|Y = f_l$. Además para la función $F : X \to \mathbb{R}^\kappa$ definida por $F(x) = \{F_l(x)\}_{l<k}$ se tiene que $F|Y = f$. La contención

$$\{z \in Z : |f^{-1}(z)| > 1\} \subseteq \{z \in Z : |F^{-1}(z)| > 1\}$$

implica que cada función continua de Y es casi inyectiva. □

2.19. Corolario. Sea X un espacio casi inyectivo-proyectivo y Y un subespacio cerrado de X.
(1) Si X es normal, entonces Y es casi inyectivo-proyectivo.
(2) Si Y es compacto, entonces Y es casi inyectivo-proyectivo.

Demostración. En ambos casos el subespacio Y está C–encajado en X; por el teorema 1.14 y por el teorema 2.18, cada función continua de Y sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. □

2.20. Problema. Sea X un espacio casi inyectivo-proyectivo. Supongamos que $F \subset X$ es un subespacio cerrado de X. Es cierto que F es casi inyectivo-proyectivo?

2.21. Corolario. En el espacio X del ejemplo 2.5, cada subespacio compacto es numerable.

Demostración. Aplicando el corolario 2.19, se tiene que para cada compacto $K \subset X$, cada función continua de K sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. Aplicando el corolario 2.12 se concluye que K es numerable. $\square$

2.22. Teorema. Si X_i es compacto y X_i es casi inyectivo-proyectivo para toda $i \leq n$, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es casi inyectivo-proyectivo.

Demostración. Por el teorema 2.11, cada X_i es disperso. Además el producto de una familia finita de espacios dispersos es un espacio disperso. Como dicho producto es compacto, por el teorema 2.11 cada función continua de este producto sobre un espacio segundo numerable es casi inyectiva. $\square$

2.23. Observación. Observe que para el espacio de dos puntos todas sus funciones continuas son casi-inyectivas. Sin embargo, el producto numerable de espacios de dos puntos es homeomorfo al conjunto de Cantor C que es un espacio compacto, no disperso y por el teorema 2.11 no todas las funciones continuas de C son casi inyectivas. De modo que esta propiedad no es preservada por productos infinitos.

2.24. Ejemplo. Bajo CH, existe un espacio X que es casi inyectivo-proyectivo, mientras $X \times X$ no lo es.

Demostración. Tomemos como X el espacio construido en el ejemplo 2.5. Considere la proyección de $X \times X$ sobre su primera coordenada. Note que $\pi^{-1}(y) = \{y\} \times X$ para cada $y \in X$. De esta manera $X = \{y \in X : |\pi^{-1}(y)| > 1\}$. Si cada función continua de $X \times X$ sobre un espacio segundo numerable fuera casi inyectiva, el espacio X sería numerable. $\square$

En base al ejemplo 2.24 surge el planteamiento del siguiente problema abierto:

2.25. Problema. ¿Existe en ZFC un espacio X casi inyectivo-proyectivo tal que $X \times X$ no tenga la propiedad de ser casi inyectivo-proyectivo?

En relación con el corolario 2.13 se tiene el siguiente ejemplo.

2.26. Ejemplo. Existen espacios pseudocompactos dispersos que pueden aplicarse continuamente sobre $[0, 1]$, y por lo tanto no son casi-inyectivo proyectivos.

Demostración. En [Mr] se prueba que existen espacios de Mrówka que pueden aplicarse continuamente sobre $[0, 1]$. Notemos que los espacios de Mrówka pueden ser construidos de la siguiente manera: Sea γ una familia casi disjunta e infinita de subconjuntos infinitos de ω. Extendiendo γ si es necesario podemos suponer que γ es maximal. Para cada $A \in \gamma$ tome un punto $x_A \notin \omega$. En el conjunto $\omega \cup \{x_A : A \in \gamma\}$ se introduce una topología τ de la siguiente manera: si $x \in \omega$ entonces $\{x\} \in \tau$. Si $x = x_A$ entonces la base en x consiste de los conjuntos $\{x_A\} \cup (A - B)$ donde $B \subset \omega$ es finito. El conjunto $\omega \cup \{x_A : A \in \gamma\}$, con la topología descrita anteriormente es llamado el espacio de Mrówka [Mr]. También se tiene que cada espacio de Mrówka es pseudocompacto y disperso [Mr]. Además cada espacio de Mrówka, que pueda aplicarse continuamente sobre $[0, 1]$ [Mr] no es casi inyectivo-proyectivo, porque si lo fuera por el lema 2.10 el espacio $[0, 1]$ sería casi inyectivo-proyectivo, lo cual no es posible por el teorema 2.11. $\square$

Capítulo 3

Espacios cofinitamente proyectivos y espacios conumerablemente proyectivos

Introducción. En este capítulo se introducen y se estudian dos clases proyectivas que surgen como un desarrollo lógico del estudio de los espacios casi inyectivo-proyectivos. Se estudian primero los espacios proyectivamente n-dimensionales. Se demuestra que un espacio X es proyectivamente n-dimensional si y sólo si X es proyectivamente cero-dimensional. Resulta que cada espacio casi inyectivo–proyectivo es proyectivo de dimensión cero. Además, en la clase de espacios compactos la proyectividad cero–dimensional coincide con el ser casi inyectivo–proyectivo. Un espacio X se llama cofinitamente proyectivo si, para cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $A \subset Y$ tal que $|f^{-1}(y)| < \omega$ para cada $y \in Y \backslash A$. Un espacio X es conumerablemente proyectivo si, para cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $A \subset Y$ tal que $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para cada $y \in Y \backslash A$. Los principales resultados de este capítulo se obtuvieron acerca de los espacios cofinitamente proyectivos y los espacios conumerablemente proyectivos. Se prueba en este capítulo que X es cofinitamente proyectivo si y sólo si X es una unión finita de espacios compactos primarios, i.e., compactificaciones de Alexandroff de espacios discretos. Se establece también que X es conumerablemente proyectivo si y sólo si en X no existe una familia infinita disjunta de conjuntos conulos no numerables. Por otra parte se prueba que si X es paracompacto entonces X es conumerable proyectivo si y sólo si X está concentrado alrededor de un conjunto finito, i.e., existe un conjunto finito $B \subset X$ tal que, para cada abierto $U \in \tau(X)$, si $B \subset U$ entonces $|X \backslash U| \leq \omega$. Se muestra que no todos los espacios conumerablemente proyectivos son concentrados alrededor de un conjunto finito. Por último, se prueba que cada grupo topológico conumerablemente proyectivo es numerable [Me 2].

3.1 Proyectividad dimensional

En esta sección se introduce el concepto de proyectividad dimensional, de hecho se da una caracterización para que un espacio X sea proyectivamente n-dimensional. Algunas consecuencias de este concepto nos sirven para deducir resultados en las secciones 3.2 y 3.3.

3.1. Definición. Dado un $n \in \omega$ un espacio X es proyectivamente n-dimensional si, para cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, se tiene que $dimY \leq n$.

El siguiente lema es conocido, pero damos su demostración porque es trascendente en la prueba de los teoremas posteriores.

3.2. Lema. Si el espacio X no es de dimensión cero entonces existe una función continua suprayectiva $f : X \to I$.

Demostración. Como X no es de dimensión cero, se puede elegir un $x \in X$ y una vecindad U de x tal que $U \neq X$ y no existe un abierto-cerrado W tal que $x \in W \subset U$. Por otro lado, como X es completamente regular existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ con $f(x) = 1$ y $f|(X \backslash U) \equiv 0$. Si existiera un $t \in (0, 1) \backslash f(X)$ el conjunto $W = f^{-1}((t, 1])$ sería abierto-cerrado y $x \in W \subset U$, lo cual nos da una contradicción. Esto muestra que $f(X) = [0, 1]$. □

3.3. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes para cada espacio X:
(1) X es proyectivamente cero-dimensional;
(2) X es proyectivamente n-dimensional para algún $n \in \omega$;
(3) X no puede mapearse continuamente sobre I;
(4) X no puede mapearse continuamente sobre un espacio segundo numerable infinito-dimensional.

Demostración. Es evidente que (1) $\Rightarrow$ (2). Asumamos que (2) es cierto y existe una función continua suprayectiva $f : X \to I$. Tomemos una función continua suprayectiva $g : I \to I^\omega$ y notemos que $h = g \circ f$ manda X continuamente sobre I^ω lo cual es una contradicción con el hecho de que cada imagen continua segundo numerable de X tiene dimensión $\leq n$. Esto prueba que (2) $\Rightarrow$ (3).

Supongamos que X puede aplicarse continuamente sobre un espacio Y que no es cero-dimensional. Aplicando el lema 3.2 se concluye que Y puede aplicarse continuamente sobre I. La composición de las funciones muestra que X puede aplicarse continuamente sobre I y prueba que (3) $\Rightarrow$ (4) y (3) $\Rightarrow$ (1).

Para finalizar la prueba basta probar que (4) $\Rightarrow$ (3). Asumamos que $f : X \to I$ es una función continua suprayectiva. Tomemos una función continua suprayectiva $g : I \to I^\omega$; es claro que la función $h = g \circ f : X \to I^\omega$ es continua y suprayectiva. Por ser I^ω infinito-dimensional se tiene que (4) $\Rightarrow$ (3) y la demostración es completa. $\square$

Note que por el teorema anterior cada espacio proyectivamente cero-dimensional es cero-dimensional.

Existen espacios cero-dimensionales que no son proyectivamente cero-dimensionales, tal es el caso del conjunto de Cantor.

3.4. Corolario. Si X es casi inyectivo-proyectivo entonces X es proyectivamente cero-dimensional.

Demostración. Por el teorema 3.3 es suficiente probar que X no puede aplicarse continuamente sobre I. Si existiera una función $f : X \to I$ continua y suprayectiva entonces I sería casi inyectivo-proyectivo (ver lema 2.10) lo que no es cierto por el corolario 2.12. $\square$

3.5. Corolario. Sea X un espacio proyectivamente cero-dimensional. Entonces:
(1) Cada imagen continua de X es proyectivamente cero-dimensional.
(2) Si Y está C^*-encajado en X entonces Y es proyectivamente cero-dimensional.
En particular, si X es normal y proyectivamente cero-dimensional entonces también lo es cada subespacio cerrado de X.

Demostración. La afirmación en (1) es una consecuencia inmediata de la definición. Para probar (2) supongamos que Y no es proyectivamente cero-dimensional y tomemos una función continua suprayectiva $f : Y \to I$. Por el hecho de ser Y C^*-encajado en X existe una función continua $g : X \to I$ tal que $g|Y = f$. Entonces X puede mapearse continuamente sobre I y por lo tanto X no es proyectivamente cero-dimensional (vease el teorema 3.3). □

3.6. Corolario. Un espacio compacto X es proyectivamente cero-dimensional si y sólo si X es disperso.

Demostración. Para probar la necesidad tomemos un espacio compacto X que sea proyectivamente cero-dimensional. Si X no es disperso, entonces existe una función continua suprayectiva $f : X \to [0, 1]$ (teorema 1.18), lo que es una contradicción con el teorema 3.3.

Para la suficiencia supongamos que X es disperso. Se sigue del teorema 2.11 que X es casi inyectivo–proyectivo. Por el corolario 3.4 el espacio X es proyectivamente cero-dimensional. □

3.7. Ejemplo. Existe un espacio pseudocompacto disperso que no es proyectivamente cero-dimensional.

Demostración. De [Mr] se conoce que existen espacios M de Mrówka que pueden aplicarse continuamente sobre $[0, 1]$. El espacio M es pseudocompacto, disperso y no es proyectivamente cero-dimensional. □

Ahora se tiene el siguiente problema abierto:

3.8. Problema. Sea X un espacio proyectivamente cero-dimensional. ¿Es $X \times X$ proyectivamente cero-dimensional?

3.2 Espacios cofinitamente proyectivos

En esta sección se introduce el concepto de espacio cofinitamente proyectivo, que resulta como consecuencia del estudio de los espacios casi–inyectivo–proyectivos. Se da una caracterización completa de los espacios cofinitamente proyectivos.

3.9. Definición. Un espacio X es cofinitamente proyectivo si, para cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $A \subset Y$ tal que $|f^{-1}(y)| < \omega$ para cada $y \in Y \setminus A$.

3.10. Teorema. Si X es cofinitamente proyectivo, entonces cada imagen continua de X es cofinitamente proyectiva.

Demostración. Supongamos que Y es una imagen continua de X, i.e., existe una función continua suprayectiva $f : X \to Y$. Dada $g : Y \to Z \in \mathcal{U}$, consideremos la composición $g \circ f : X \to Z \in \mathcal{U}$. Como X es cofinitamente proyectivo existe un conjunto finito $A \subset Z$ con $|(g \circ f)^{-1}(y)| < \omega$ para cada $y \in Z \backslash A$. Consecuentemente $|f^{-1}(g^{-1}(y))| < \omega$ y $|g^{-1}(y)| < \omega$ para todo $y \in Z \backslash A$. Esto prueba que Y es cofinitamente proyectivo. $\square$

3.11. Ejemplo. El espacio $[0, 1]$ no es cofinitamente proyectivo.

Demostración. Supongamos lo contrario. Como $[0, 1] \times [0, 1]$ es una imagen continua de $[0, 1]$, el teorema 3.10 implica que $[0, 1] \times [0, 1]$ es cofinitamente proyectivo. Pero la proyección $p : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ tiene un número infinito de fibras no numerables. Por lo tanto ninguno de los espacios $[0, 1]$ y $[0, 1] \times [0, 1]$ es cofinitamente proyectivo. $\square$

3.12. Teorema. Si X es cofinitamente proyectivo, entonces X es proyectivamente cero-dimensional.

Demostración. Si X no es proyectivamente cero-dimensional, entonces existe una función continua suprayectiva $f : X \to [0, 1]$ (lema 3.3). El teorema 3.10 implica que $[0, 1]$ es cofinitamente proyectivo lo cual contradice lo establecido en el ejemplo 3.11. $\square$

3.13. Lema. Si X es cofinitamente proyectivo, entonces X es cero-dimensional.

En el ejemplo 3.33 se da un ejemplo de un espacio proyectivamente cero-dimensional (ver corolario 3.6) que no es cofinitamente proyectivo.

3.14. Lema. Si X es cofinitamente proyectivo, entonces es pseudocompacto.

Demostración. Si $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, entonces existe un conjunto finito $A \subset Y$ tal que $|f^{-1}(y)| < \omega$ para cada $y \in Y \backslash A$. Por consiguiente $|\{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ no es compacto }\}| \leq |A| < \omega$. Por lo tanto cada función de X sobre un espacio con base numerable no es compacta solamente en un número finito de puntos y por el teorema 3.14 de [Tk1] se puede concluir que X es pseudocompacto. $\square$

3.15. Ejemplo. La compactificación de Alexandroff $A(D)$ de un espacio discreto D es un espacio cofinitamente proyectivo.

Demostración. Sea $A(D) = D \cup \{a\}$ donde a es el único punto no aislado de $A(D)$. Tomemos una función continua suprayectiva $f : A(D) \to Y \in \mathcal{U}$, y un punto arbitrario $y \in Y \setminus \{f(a)\}$. Como f es continua, el subespacio $f^{-1}(y)$ es compacto y discreto en $A(D)$, de donde $f^{-1}(y)$ es finito. $\square$

3.16. Lema. Si X es regular y $F \subset X$ es un conjunto cerrado infinito entonces existe una familia $\{V_i\}_{i\in\omega} \subset \tau^*(X)$ tal que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ y $F \cap V_j \neq \emptyset$ para todas $i, j \in \omega$ con $i \neq j$.

Demostración. Usaremos inducción. Supongamos que tenemos los subconjuntos abiertos $V_0, V_1, ..., V_n - 1$, tales que la familia $\{\overline{V_0}, \overline{V_1}, ..., \overline{V}_{n-1}\}$ es ajena, $V_k \cap F \neq \emptyset$ con $1 \leq k \leq n-1$ y $F_{n-1} = F \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{V_k}$ es un conjunto infinito. Elijamos $a, b \in F_{n-1}$ con $a \neq b$. Por regularidad de X existen $U, V \in \tau^*(X)$ para los cuales $a \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus (\bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{V_k} \cup \{b\})$ y $b \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus (\bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{V_k} \cup \overline{U})$.

Sea $V_n = \{U \text{ si } \overline{U} \cap F \text{ es finito, y } V \text{ en cualquier otro caso}\}$

Luego, la sucesión $\{V_i\}_{i\in\omega}$ así obtenida satisface lo requerido. $\square$

3.17. Teorema. Cada espacio X cofinitamente proyectivo tiene solamente un número finito de puntos no aislados.

Demostración. Sea Y el conjunto de todos los puntos no aislados de un espacio X cofinitamente proyectivo. Claramente Y es un subespacio cerrado de X. Si Y es infinito, el lema 3.16 implica que existe una familia $\{V_i\}_{i\in\omega} \subset \tau^*(X)$ tal que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ y $Y \cap V_j \neq \emptyset$ para todos $i, j \in \omega$ con $i \neq j$. Tome $x_j \in Y \cap V_j$ para cada $j \in \omega$ y considere el conjunto $Z = \{x_n : n \in \omega\}$ que es discreto. Como X es cero-dimensional, para cada $n \in \omega$ existe un conjunto abierto-cerrado U_n tal que $x_n \in U_n \subset V_n$. Definamos una función f sobre X por $f|U_n \equiv \frac{1}{n}$ y $f(x) = 0$ para todo $x \notin \bigcup_{n\in N} U_n$. Se observa que $f|U_n$ es continua para cada $n \in \omega$. Tomemos cualquier $x \notin \bigcup_{n\in N} U_n$ y una vecindad $(-\epsilon, \epsilon)$ del punto $f(x) = 0$. Para cualquier n con $\frac{1}{n} < \epsilon$ se tiene que $f(W) \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset (-\epsilon, \epsilon)$ para $W = X - \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Esto muestra que f es continua en x. Observemos que $U_n \subset f^{-1}(\frac{1}{n})$ y U_n es infinito ya que x_n no es aislado. De modo que f tiene un número infinito de fibras infinitas lo cual contradice el hecho de que X es cofinitamente proyectivo. $\square$

3.18. Lema. Si X es pseudocompacto y tiene solamente un número finito de puntos no aislados, entonces X es compacto.

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de X; tomemos una enumeración $\{x_1, ..., x_n\}$ del conjunto de puntos no aislados de X. Cada x_i pertenece a algún V_{α_i} de la cubierta. Debido a que X es pseudocompacto se tiene que $Y = X\backslash\bigcup_{1\leq i\leq n} V_{\alpha_i}$ es un conjunto finito, y por lo tanto existen $\beta_1, ..., \beta_m \in A$ tales que $Y \subset \bigcup_{1\leq j\leq m} V_{\beta_j}$. Por lo anterior se tiene que $X = \{x_1, ..., x_n\}\bigcup[X\backslash\{x_1, ..., x_n\}] \subset V_{\alpha_1}\cup...\cup V_{\alpha_n}\bigcup_{1\leq j\leq m} V_{\beta_j}$, lo cual muestra que X es compacto. $\square$

3.19. Teorema. Si X es cofinitamente proyectivo, entonces X es compacto.

Demostración. Como X es cofinitamente proyectivo, el teorema 3.14 implica que X es pseudocompacto. Por el teorema 3.17, X tiene un número finito de puntos no aislados y aplicando el lema 3.18 se puede concluir que X es compacto. $\square$

3.20. Lema. Cualquier unión finita de espacios cofinitamente proyectivos es un espacio cofinitamente proyectivo.

Demostración. Sea $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ donde cada X_i es cofinitamente proyectivo y $f : X \to Z \in \mathcal{U}$ considere las funciones $f_i = f|X_i$ y sea $Z_i = f(X_i)$. Como X_i es cofinitamente proyectivo existe un conjunto finito $A_i \subset Z_i$ tal que $|f_i^{-1}(z)| < \omega$ para todo $z \in Z_i\backslash A_i$. Observe que el conjunto $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ es finito y $f^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(x)$ para todo $x \in Z$. Si $x \notin A$, el conjunto $f^{-1}(x)$ es finito por ser $f_i^{-1}(x)$ finito para cada $i \leq n$. $\square$

Ahora daremos una caracterización completa de los espacios cofinitamente proyectivos.

3.21. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes para cada espacio X:
(1) X es cofinitamente proyectivo.
(2) X es un espacio compacto con un número finito de puntos no aislados.
(3) X es una unión discreta de un número finito de compactificaciones de Alexandroff de espacios discretos.

Demostración. Primero mostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2); supongamos que X es cofinitamente proyectivo; el teorema 3.19 implica que X es compacto y por el teorema 3.17 el espacio X tiene un número finito de puntos no aislados.

Ahora supongamos que se cumple la propiedad (2), y tomemos una enumeración $\{x_1, ..., x_n\}$ del conjunto de puntos no aislados de X. Elijamos una familia disjunta $\{U_1, ..., U_n\}$ de abierto-cerrados de X tales que $x_i \in U_i$ para todo $i \leq n$. Si $U = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$, entonces $X \backslash U$ es finito y cada U_i es un espacio compacto primario. Además $X = X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$ donde $X_1 = U_1 \cup (X \backslash U)$ y $X_i = U_i$ para todo $i \in \{2, ..., n\}$. Es claro que cada X_i es un espacio compacto primario y la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) está probada.

Ahora si se cumple (3), entonces $X = X_1 \oplus X_2 \oplus .. \oplus X_n$ donde cada X_i es un espacio compacto primario. El ejemplo 3.15 muestra que cada X_i es cofinitamente proyectivo. Aplicando el lema 3.20 se tiene que X es cofinitamente proyectivo y (3) $\Rightarrow$ (1). □

3.22. Corolario. Si X es una unión finita de sucesiones convergentes entonces X es cofinitamente proyectivo.

Demostración. Como cada sucesión convergente es un espacio cofinitamente proyectivo, el espacio X es cofinitamente proyectivo por el lema 3.20. □

3.23. Ejemplo. Existe un espacio X que es cofinitamente proyectivo, y sin embargo $X \times X$ no es cofinitamemte proyectivo.

Demostración. Si X es una sucesión convergente, el espacio $X \times X$ tiene un número infinito de puntos no aislados. Por el teorema 3.17 el cuadrado de X no es cofinitamente proyectivo. □

3.3 Espacios conumerablemente proyectivos

El concepto de espacio conumerablemente proyectivo es una generalización de la noción de espacio cofinitamente proyectivo. Sin embargo veremos que estas dos clases de espacios tienen propiedades muy diferentes. También se obtiene una caracterización completa de los espacios conumerablemente proyectivos.

3.24. Definición. Un espacio X es conumerablemente proyectivo si, para cada función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $A \subset Y$ tal que $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para cada $y \in Y \backslash A$.

3.25. Teorema. Un espacio X es conumerablemente proyectivo si y sólo si no existe una familia infinita disjunta de subconjuntos conulos no numerables de X.

Demostración. Para probar la necesidad supongamos que existe una familia infinita disjunta $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos conulos no numerables de X. Para cualquier n tomemos una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n^{-1}(0) = X\backslash U_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([1/k,1])$ es no numerable por lo cual existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n^{-1}([1/k_n,1])| > \omega$. En un espacio métrico cada cerrado es un conjunto nulo. Si $P_n = f_n^{-1}([1/k_n,1])$, entonces P_n es un conjunto nulo. Los conjuntos $P_n = f_n^{-1}([1/k_n,1])$ y $X\backslash U_n$ son funcionalmente separados, porque cada dos conjuntos funcionalmente cerrados disjuntos son completamentes separados [En], así que existe una función continua $g_n : X \to [0,1/n]$ con $g_n|(X\backslash U_n) \equiv 0$ y $g_n|P_n \equiv 1/n$. La función $g : X \to [0,1]$ dada por $g = \sum\{g_n : n \in \omega\}$ es continua y, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P_n \subset g^{-1}(1/n)$. Como $|g^{-1}(1/n)| > \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la función g tiene un número infinito de fibras no numerables, así que X no es conumerablemente proyectivo.

Para probar la suficiencia supongamos que el espacio X no es conumerablemente proyectivo. Entonces alguna función continua suprayectiva $f : X \to Y \in \mathcal{U}$ tiene un número infinito de fibras no numerables, i.e., existe un conjunto infinito $A \subset Y$ tal que $f^{-1}(a)$ es no numerable para cada $a \in A$. Tomemos un conjunto discreto infinito $B = \{x_n : n \in \omega\} \subset A$. Se puede elegir una familia disjunta $\{W_n\}_{n\in\omega} \subset \tau(Y)$ tal que $x_n \in W_n$ para cada $n \in \omega$. Si $U_n = f^{-1}(W_n)$ para toda $n \in \omega$ entonces $\{U_n\}_{n\in\omega} \subset \tau(X)$ es una familia infinita disjunta de conjuntos conulos no numerables. $\square$

3.26. Definición. Decimos que el espacio X es localmente numerable en un punto $x \in X$ si existe un conjunto numerable $U \in \tau(x,X)$. El espacio X es localmente numerable si es localmente numerable en todos sus puntos.

3.27. Teorema. Sea X un espacio conumerablemente proyectivo. Entonces existe un conjunto finito $A \subset X$ tal que X es localmente numerable en todos los puntos de $X\backslash A$.

Demostración. Probaremos primero que el conjunto $A = \{x \in X : |U| > \omega$ para todo $U \in \tau(x,X)\}$ es finito. En efecto, si no es así, entonces existe un conjunto discreto infinito $D = \{d_n : n \in \omega\} \subset A$. Tomemos una familia disjunta $\{U_n\}_{n\in\omega} \subset \tau(X)$ tal que $d_n \in U_n$. Existe una familia disjunta $\{V_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos cocero tal que $d_n \in V_n \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como cada V_n es no numerable se obtiene una contradicción con el teorema 3.25.

De este modo $|A| < \omega$ y para cada $z \in X \backslash A$ existe una $V_z \in \tau(z, X)$ tal que $|V_z| \leq \omega$. $\square$

3.28. Teorema. Si X es conumerablemente proyectivo, entonces cada imagen continua de X es conumerablemente proyectiva.

Demostración. Supongamos que Y es una imagen continua de X, i.e., existe una función continua suprayectiva $f : X \to Y$. Dada $g : Y \to Z \in \mathcal{U}$, consideremos la composición $g \circ f : X \to Z \in \mathcal{U}$. Como X es conumerablemente proyectivo existe un conjunto finito $A \subset Z$ con $|(g \circ f)^{-1}(y)| \leq \omega$ para $y \in Z \backslash A$. Consecuentemente $|f^{-1}(g^{-1}(y))| \leq \omega$ y $|g^{-1}(y)| \leq \omega$ para todo $y \in Z \backslash A$. Esto prueba que Y es conumerablemente proyectivo. $\square$

3.29. Ejemplo. El espacio $[0, 1]$ no es conumerablemente proyectivo.

Demostración. $[0, 1]$ no es localmente numerable en ningún punto. $\square$

3.30. Teorema. Cada espacio X conumerablemente proyectivo es proyectivamente cero-dimensional.

Demostración. Si X no es proyectivamente cero-dimensional, entonces existe una función continua suprayectiva $f : X \to [0, 1]$ (lema 2.3). El teorema 3.28 implica que $[0, 1]$ es conumerablemente proyectivo lo que contradice lo establecido en el ejemplo 3.29. $\square$

3.31. Teorema. Si X es numerablemente compacto y conumerablemente proyectivo entonces X es disperso.

Demostración. Si X es numerablemente compacto cada sucesión encajada de cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía y se puede realizar la construcción del teorema 1.18. Si X no es disperso, entonces existe una función $f : X \to [0, 1]$ continua y suprayectiva (teorema 1.18). Aplicando el teorema 3.28 se concluye que $[0, 1]$ es conumerablemente proyectivo, lo que es falso. Esta contradicción muestra que X es disperso. $\square$

3.32. Corolario. Si X es un espacio compacto metrizable, entonces X es conumerablemente proyectivo si y sólo si X es numerable.

3.33. Ejemplo. Existe un espacio X que es compacto y disperso, pero que no es conumerablemente proyectivo.

Demostración. Dado un cardinal $\kappa \geq \omega$ denotemos por $D(\kappa)$ el espacio discreto de cardinalidad κ y consideremos el espacio $X = A(D(\omega)) \times A(D(\omega_1))$, recuerde que $A(D(\kappa))$ es la compactificación de Alexandroff de $D(\kappa)$. El espacio X es compacto y disperso; sin embargo la función proyección $A(D(\omega)) \times A(D(\omega_1)) \to A(D(\omega))$ tiene un número infinito de fibras no numerables, por lo cual X no es conumerablemente proyectivo. $\square$

3.34. Teorema. Si un espacio X es conumerablemente proyectivo y Y es un subespacio C^*-encajado de X, entonces Y es conumerablemente proyectivo.

Demostración. Sea $f : Y \to Z$ una función continua suprayectiva para algún $Z \in \mathcal{U}$. Podemos asumir que $Z \subset I^\omega$, y por lo tanto $f = \triangle_{n\in\omega} f_n$ donde $f_n : Y \to I$ es una función continua para cada $n \in \omega$. Como Y es C^*-encajado, existe una función continua $F_n : X \to I$ tal que $F_n|Y = f_n$ para cada $n \in \omega$. La función $F = \triangle_{n\in\omega} F_n : X \to Z' \supset Z$ manda X sobre algún $Z' \subset I^\omega$ con $Z' \supset Z$. Por ser X conumerablemente proyectivo existe un conjunto finito $A \subset Z'$ tal que $|F^{-1}(y)| \leq \omega$ para todo $y \in Z' \backslash A$. De $f^{-1}(y) \subset F^{-1}(y)$ se concluye que $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para toda $y \in Z \backslash A$. Por lo tanto Y es conumerablemente proyectivo. $\square$

3.35. Corolario. Si X es pseudocompacto, entonces βX es conumerablemente proyectivo si y sólo si X es conumerablemente proyectivo.

Demostración. Es claro que X está C^*-encajado en βX, así que aplicando el teorema 3.34 se tiene que X es conumerablemente proyectivo si βX lo es. Ahora supongamos que X es conumerablemente proyectivo y βX no lo es. Por el teorema 3.25 podemos encontrar una familia $\{O_n : n \in \omega\}$ ajena de subconjuntos conulos no numerables de βX. Como la familia $\mathcal{O} = \{O_n \cap X : n \in \omega\}$ es disjunta y consiste de subconjuntos conulos de X, todos los elementos de $\mathcal{O}$ excepto un número finito son numerables por el teorema 3.33. Tomemos un $n \in \omega$ tal que $O_n \cap X$ es numerable. Como O_n es una unión numerable de conjuntos compactos, existe un compacto no numerable $F \subset O_n$. Por la normalidad de βX podemos encontrar un abierto $U \subset \beta X$ que cumple $F \subset U \subset \overline{U} \subset O_n$. Observemos que $\overline{U} = \overline{U \cap X}$. Sin embargo, $P = cl_X(U \cap X) \subset O_n \cap X$ es compacto por ser un pseudocompacto numerable de X. Como consecuencia, el conjunto $U \subset \overline{U \cap X} \subset \overline{P} = P$ es numerable lo cual es una contradicción. $\square$

3.36. Corolario. Si X es numerablemente compacto, entonces βX es conumerablemente proyectivo si y sólo si X es conumerablemente proyectivo.

3.37. Corolario. Cada pseudocompacto conumerablemente proyectivo es disperso.

Demostración. Si X es pseudocompacto y conumerablemente proyectivo, entonces βX es conumerablemente proyectivo por el corolario 3.35. Por el teorema 3.31, βX es disperso, así que X también lo es. $\square$

3.38. Definición. Decimos que el espacio X está concentrado alrededor del conjunto $B \subset X$, si para todo $U \in \tau(B, X)$, el conjunto $X \backslash U$ es numerable.

3.4 Proyectividad conumerable en espacios paracompactos y espacios métricos

En esta sección se da una caracterización completa de los espacios paracompactos conumerablemente proyectivos. Se prueba también que cada grupo G topológico conumerablemente proyectivo es numerable.

3.39. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes para cada espacio X:
(1) X es Lindelöf y conumerablemente proyectivo.
(2) X es paracompacto y conumerablemente proyectivo.
(3) X está concentrado alrededor de un conjunto finito B.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2), es inmediata ya que cada espacio Lindelöf es paracompacto.

Supongamos que se cumple (2), i.e., X es paracompacto y conumerablemente proyectivo. Por el teorema 3.27 el espacio X es localmente numerable en todos los puntos de $X \backslash Y$ para algún conjunto finito $Y \subset X$. Para cada $U \in \tau(Y, X)$, el conjunto $X \backslash U$ es paracompacto y conumerablemente proyectivo por el teorema 3.34. Supongamos que $D \subset X \backslash U$ es un conjunto discreto cerrado no numerable con $|D| = \omega_1$. Como $X \backslash U$ es normal por colecciones existe una familia discreta $\{U_d : d \in D\} \subset \tau(X \backslash U)$ tal que U_d es un conjunto conulo y $d \in U_d$ para todo $d \in D$. Se puede encontrar una familia disjunta $\{D_n : n \in \omega\}$ tal que $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ y $|D_n| = \omega_1$ para toda $n \in \omega$. Si $U_n = \bigcup\{U_d : d \in D_n\}$ para todo $n \in \omega$, entonces $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia infinita disjunta de conjuntos conulos no numerables en $X \backslash U$ lo que contradice el teorema 3.25. Esto muestra que cada subconjunto discreto cerrado de $X \backslash U$ es numerable, i.e., $e(X \backslash U) = \omega$. Como $X \backslash U$ es paracompacto y tiene extensión numerable se tiene que $X \backslash U$ es Lindelöf. Para cada punto $z \in X \backslash U$ fije una $V_z \in \tau(z, X)$ con $|V_z| \leq \omega$. Por ser $X \backslash U$ Lindelöf, la cubierta $\{V_z : z \in X \backslash U\}$ de $X \backslash U$ tiene una subcubierta numerable $\{V_{z_n}\}_{n \in \omega}$. Por consiguiente $X \backslash U = \bigcup_{n \in \omega} V_{z_n}$ y cada V_{z_n} es numerable, lo que muestra que $|X \backslash U| \leq \omega$ y la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) está probada.

Supongamos que X está concentrado alrededor de un conjunto finito $B = \{x_1, ..., x_n\}$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, elija para cada $i \leq n$, un conjunto $U_i \in \mathcal{U}$ con $x_i \in U_i$. Como $B \subset U = U_1 \cup ... \cup U_n$ el conjunto $X \backslash U$ es numerable. Existe un conjunto numerable $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ con $X \backslash U \subset \bigcup \mathcal{U}'$. La familia $\mathcal{U}' \cup \{U_1, ..., U_n\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ lo que prueba que X es Lindelöf. Es fácil ver que cada espacio que está concentrado alrededor de un conjunto finito es conumerablemente proyectivo y por lo tanto se probó (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

En base al teorema anterior se tiene el siguiente problema abierto:

3.40. Problema. Supongamos que X es un espacio metacompacto y conumerablemente proyectivo. ¿ X estará concentrado alrededor de un conjunto finito?

3.41. Ejemplo. El espacio ω_1 es conumerablemente proyectivo y no está concentrado alrededor de un conjunto finito.

Demostración. Para cada $Z \in \mathcal{U}$ se puede considerar que $Z \subset \mathbb{R}^\omega$, por lo cual basta analizar funciones continuas de ω_1 hacia $\mathbb{R}$. Cada función continua $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ es eventualmente constante, es decir, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $f(\alpha) = f(\alpha_0)$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Como consecuencia, cada función continua $f : \omega_1 \to Z \in \mathcal{U}$ es eventualmente constante. Si $A = \{f(\gamma_0)\}$, y $y \in Z \backslash A$, entonces $f^{-1}(y) \subset \gamma_0$ lo que muestra que $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para cada $y \in Z \backslash A$. Esto prueba que ω_1 es conumerablemente proyectivo. Si ω_1 es concentrado alrededor de un conjunto finito $B = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, donde $\alpha_1 < ... < \alpha_n$, para el conjunto abierto $U = \{\alpha : \alpha < \alpha_n + 1\}$ se tiene que $B \subset U$ y $|X \backslash U| \leq \omega$ lo cual es falso. $\square$

3.42. Ejemplo. Existen modelos de ZFC en los cuales se tiene un espacio X perfectamente normal que es conumerablemente proyectivo, sin que esté concentrado alrededor de un conjunto finito.

Demostración. El espacio X de Ostaszewsky [Os] es perfectamente normal, no numerable, numerablemente compacto, y para cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ se tiene $|F| \leq \omega$ ó $|X \backslash F| \leq \omega$. Sea $f : X \to Y$ donde $Y \in \mathcal{U}$. Si $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para todo $y \in Y$ entonces se tiene el resultado. Si $|f^{-1}(y_0)| > \omega$ para algún $y_0 \in Y$ entonces $|X \backslash \{f^{-1}(y_0)\}| \leq \omega$, y por lo tanto $f^{-1}(y) \subset X \backslash \{f^{-1}(y_0)\}$ y $|f^{-1}(y)| \leq \omega$ para cada $y \in Y \backslash \{y_0\}$.

Si X está concentrado alrededor de un conjunto finito B entonces por ser X perfectamente normal se tiene $X \backslash B = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ donde cada F_n es cerrado en X y numerable por $X \backslash F_n \in \tau(B, X)$. Por consiguiente, $X = \bigcup\{F_n : n \in \omega\} \cup B$ es numerable lo que es una contradicción.

Del ejemplo anterior surgen los siguientes problemas abiertos:

3.43. Problema. ¿Existe en ZFC un ejemplo de un espacio perfectamente normal conumerablemente proyectivo que no esté concentrado alrededor de un conjunto finito?

3.44. Problema. ¿Existe un espacio realcompacto que sea conumerablemente proyectivo que no esté concentrado alrededor de un conjunto finito?

3.45. Teorema. Si X es segundo numerable y conumerablemente proyectivo, entonces X es numerable.

Demostración. Como X es Lindelöf, el teorema 3.39 implica que existe un conjunto finito $B = \{x_1, ..., x_n\} \subset X$ alrededor del cual X está concentrado. Elijamos conjuntos disjuntos $U_1, ..., U_n \in \tau(X)$ con $x_i \in U_i$ para cada i. Para cada $i \leq n$ existe una familia $\{U_i^k\}_{k \in \omega} \subset \tau(X)$ tal que $U_i^{k+1} \subseteq U_i^k \subset U_i$ para toda $k \in \omega$ y $\bigcap_{k \in \omega} U_i^k = \{x_i\}$. El conjunto $A_k = X \backslash \bigcup_{i \leq n} U_i^k$ es numerable para toda $k \in \omega$ y se tiene que $X \backslash B = \bigcup_{i \in \omega}, A_i$, de donde $|X| \leq \omega$. □

3.46. Corolario. Si X es metrizable y conumerablemente proyectivo, entonces X es numerable.

Demostración. Cada espacio metrizable es paracompacto, y cada espacio paracompacto conumerablemente proyectivo es Lindelöf por el teorema 3.39. De esta manera X es segundo numerable. Aplicando el teorema 3.45, se puede concluir que X es numerable. □

3.47. Corolario. Si G es un grupo topológico conumerablemente proyectivo entonces G es numerable.

Demostración. Supongamos que $|G| \geq \omega$. Se tiene que el conjunto $Y =$

$\{x \in G : |U| > \omega$ para todo $U \in \tau(x, G)\}$ es finito por el teorema 3.27. Para cada $U \in \tau(Y, G)$ y cada punto $z \in G \backslash U$ existe una $V_z \in \tau(z, G)$ tal que $|V_z| \leq \omega$. Como los grupos topológicos son espacios homogéneos, cada punto de G tiene una vecindad numerable. Esto muestra que $\psi(G) \leq \omega$. Cada grupo topológico con pseudocaracter numerable admite una condensación sobre un espacio metrizable M [Ar1]. Aplicando el corolario 3.46 y el teorema 3.28 se tiene que M es numerable. Como $|G| = |M|$ se puede concluir que G también es numerable. $\square$

Del último teorema surgen de manera natural los siguientes problemas abiertos:

3.48. Problema. Sea G un grupo topológico casi inyectivo-proyectivo segundo numerable. ¿Es G numerable ?

3.49. Problema. Sea X un espacio homogéneo conumerablemente proyectivo. ¿Es X numerable?

Conclusiones

En el capítulo 2 se da una respuesta parcial a un problema planteado en [Tk], lo que motiva el estudio de los espacios casi–inyectivo proyectivos. Además se prueba que un espacio compacto X es disperso si y sólo si X es casi inyectivo–proyectivo, y se presenta un espacio que no es compacto, ni disperso, pero que es casi inyectivo–proyectivo. Además se obtienen caracterizaciones adicionales como:

1) Si X es Lindelöf P o Lindelöf disperso entonces X es casi inyectivo-proyectivo.

2) Si suponemos que Y está C-encajado en X, y X es casi-inyectivo proyectivo entonces también lo es Y.

3) Bajo CH, existe un espacio X que es casi inyectivo-proyectivo, mientras $X \times X$ no es casi inyectivo-proyectivo.

En el capítulo 3 se introducen dos nuevas clases de espacios proyectivos que surgen como consecuencia del estudio de los espacios casi inyectivo-proyectivos. Se demuestra que un espacio X es proyectivamente n–dimensional si y sólo si X es proyectivamente cero-dimensional. También se prueba que si X es cofinitamente proyectivo, entonces X es compacto.

Se obtiene un resultado que caracteriza a los espacios cofinitamente proyectivos, diciéndonos que un espacio X es cofinitamente proyectivo si y sólo si X es una unión finita de espacios compactos primarios. También se prueba que si X es cofinitamente proyectivo, entonces X es compacto.

Por otra parte se prueba que si X es paracompacto, entonces X es conumerable proyectivo si y sólo X está concentrado alrededor de un conjunto finito. Además esto es equivalente a que X es Lindelöf y conumerablemente proyectivo. Por otro lado se prueba que un espacio X es conumerablemente proyectivo si y sólo si no existe una familia infinita disjunta de subconjuntos conulos no numerables de X.

Bibliografía

[Al1] P. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Proc. Akad. Amsterdam **28** (1925), 997–999.

[Al2] P. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Math. Ann. **96** (1927), 555–571.

[Are] R. Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific. J. Math. **2** (1952), 11–22.

[Ar1] A. Arhangel'skiĭ, *Classes of topological groups*, Uspekhi Mat. Nauk **36:3** (1981), 128-146.

[Ar2] A. Arhangel'skiĭ, *Some types of quotient mappings and the relations between classes of topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **153** (1963), 743–746. (en ruso; traducción a inglés: Soviet Math. Dokl. **4** (1963), 1726–1729).

[Ar3] A. Arhangel'skiĭ, *On quotient mappings defined on metric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **155** (1964), 247–250 (en ruso; traducción a inglés: Soviet Math. Dokl. **5** (1964), 368–371).

[Ar4] A. Arhangel'skiĭ, *Open and near open mappings. Connections between spaces*, Trudy Moskov. Mat. Obsc.**15** (1966), 181–223 (en ruso; traducción a inglés: Trans. Mosc. Math. Soc. **15** (1966), 204–250).

[Ar 5] A. Arhangel'skiĭ, *Perfect mappings and condensations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **8** (1967), 1217–1220 (en ruso; traducción a inglés: Soviet Math. Dokl. **8** (1967), 1217–1220).

[Ar6] A.V. Arkhangel'skiĭ, and V.I. Ponomarev, *Foundations of General Topology in Problems and Exercises*, Nauka, Moscow, 1974.

[Bae] R. W. Baer and F. Levi, *Stetige Funktionen in topologischen Räumen*, Math. Zeitschr. **34** (1932), 110–130.

[Bal] V. K. Balachandran, *A mapping theorem for metric spaces*, Dike Math. J. **22** (1955), 461–464.

[Bu1] D. K. Burke, *Closed properties*, Surveys in General Topology (G. M. Reed, ed.), New York 1980, 1–32.

[Bu2] D. K. Burke, *Covering properties*, Handbook of Set–theoretic Topology (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), Amsterdam 1984, 347–422.

[Cha] J. Chaber, *Remarks on open–closed mappings*, Fund. Math. **74** (1974), 197–208.

[Cob1] M. M. Coban, *On the behavior of metrizability under quotient s–mappings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **166** (1966), 562–565 (en ruso; traducción a inglés: Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 141–144).

[Cob2] M. M. Coban, *Perfect mappings defined on spaces of countable type*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. (1967), no. **6**, 87–93 (en ruso).

[Com] W. W. Comfort, *Topological groups*, Handbook of Set–theoretic Topology (K. Kunen y J. E. Vaughan, eds.), Amsterdam 1984, 1143–1263.

[Con] R. W. Connell, E. H., and J. D. McKnight, *On properties characterizing pseudocompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 500–506.

[Dou] E. K. van Douwen, *A regular space on which every continuous real-valued function is constant*, Nieuw Archief voor Wiskunde **20** (1972), 143–145.

[Dow1] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non–compact spaces*, Amer. J. Math. **69** (1947), 200–242.

[Dow2] C. H. Dowker, *An imbedding theorem for paracompact metric spaces*, Duke Math. J. **14** (1947), 639–645.

[En1] R. Engelking, *Closed mappings on complete metric spaces*, Fund. Math. **70** (1971), 103–107.

[En2] R. Engelking, *General Topology*, PWW, Warsaw, 1977.

[En3] R. Engelking, *Dimension Theory*, Amsterdan 1978.

[Fi] N. J. Fine y L. Gillman, *Extension of continuous functions in* βN*,* Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 376–381.

[Fl] J. Flachsmeyer, *Topologische Projektivräume*, Math. Nachr. **26** (1963), 57–66.

[Fo] J. R. Fogelgren y R. A. McCoy, *Some toplogical properties defined by homemorphism groups*, Arch. der Math. **22** (1971), 528–533.

[Ge] K. R. Gentry, *Some properties of the induced maps*, Fund. Math. **66** (1969), 55–59.

[Gu] A. V. Gubbi, *On products of projective Tychonov spaces*, Abstracts Amer. Math. Soc. **6** (1985), 87.

[Hag] A. W. Hager, *Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 156–163.

[Hau1] F. Hausdorff, *Über halbstetige Finktionen und deren Verallgemeinerung*, Math. Zeitschr. **5** (1919), 292–309.

[Hau2] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math. **16** (1930), 353–360.

[Hau3] F. Hausdorff, *Uber innere Abbidungen*, Fund. Math. **23** (1934), 279–291.

[Hau4] F. Hausdorff, *Erweiterung einer stetigen Abbildungen*, Fund. Math. **30** (1938), 40–47.

[Her] H. Herrlich, *Wann sind alle stetigen Abbildungen in* Y *konstant?*, Math. Zeitschr. **90** (1965), 152–154.

[Hur1] W. Hurewicz, *Ueber stetige Bilder von Punktmengen*, Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), 1014–1017.

[Hur2] W. Hurewicz, *Ueber stetige Bilder von Punktmengen (Zweite Mitteilung)*, Proc. Akad. Amsterdam **30** (1927), 159–165.

[Hur3] W. Hurewicz, *Uber Einbettung separabler Raume in gleichdimensionale kompakte Raume*, Monatsh. für Math. und Phys. **37** (1930), 199–208.

[Is] T. Isiwata, *Mappings and spaces*, Pacific J. Math. **20** (1967), 455–480.

[Ju] I. Juhász, *Cardinal functions in topology ten years later*, Math. Centre Tracts **123**, Amsterdam 1980.

[Ka] M. Katětov, *On real–valued functions in topological spaces*, Fund. Math. **38** (1951), 85–91.

[Ke] H. G. Kellerer, *Stetige Funktionen auf Produkträumen*, Arch. der Math. **19** (1968), 79–82.

[Ku] K. Kuratowski, *Evaluation de la classe boreliénne d'un ensemble de points a l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. 17 (1931), 249–272.

[La] N. Lašnev, *Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965), 756–758 (en ruso: traducción a inglés: Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1504–1506.)

[Li] Y. F. Lin, *A note on the Wallace theorem*, Portugalie Math. **19** (1960), 199–201.

[Lo] O. V. Lokucievskiĭ, *An example of an open mapping of a one–dimensional compactum onto the Hilbert cube*, Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. **165**, Mat. **7** (1954), 118–130.

[Ma] S. Mazur, *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952), 229–238.

[Mc] P. McDougle, *Mapping and space relations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 320–323.

[Me1] P. Mendoza-Iturralde, *An example of a space whose all continuous mappings are almost injective*, Comment. Math. Univ. Carolinae **42,3** (2001), 535-544.

[Me2] P. Mendoza-Iturralde and V.V. Tkachuk, *Cofinitely and co-countably projective spaces*, Appl. Gen. Topology 3 no.2 (2002) 185-195.

[Mi1] E. Michael, *A note on closed maps and compact sets*, Israel J. Math. **2** (1964), 173–176.

[Mi2] E. Michael, *Local compactness and Cartesian products of quotient maps and k–spaces*, Ann. Inst. Fourier **18** (1968), 281–286.

[Mi3] E. Michael, *Bi–quotient maps and Cartesian products of quotient maps*, Ann. Inst. Fourier **18** (1968), 287–302.

[Mi4] E. Michael, *On representing spaces as images of metrizable and related spaces*, General Topology and Appl. **1** (1971), 329–343.

[Mi5] E. Michael, *A theorem on perfect maps*, Proc. Amer. math. Soc. **28** (1971), 633–634.

[Mr] S. Mrówka, *Some set-theoretic constructions in topology*, Fund. Math. **94** (1977), 83-92.

[Mo1] Morita, K. *On closed mappings and dimension*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 161-165.

[Mo2] Morita, K., Hanai, S. *Closed mappings and metric space*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 10-14.

[No1] Noble, N. *A note on z-closed projections*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 73-76.

[No2] Noble, N. *Products with closed projections*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 381-391.

[No3] Noble, N. *Products with closed projections II*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 169-183.

[No4] Noble, N., Ulmer, M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 329-339.

[Ok] N.G. Okromeshko, *Properties of quotient maps and representation as continuous images*, Candidate Dissertation, Moscow, 1982 (Russian).

[Ol] Olson, R. C. *Bi-quotient maps, countably bi-sequential spaces, and related topics*, General Topology and Appl. **4** (1974), 1-28.

[Os] A. Ostaszewski, *On countably compact perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. **14:2** (1976), 505–516.

[Pa] B.A. Pasynkov, *On open mappings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **175** (1967), 292-295. (Soviet Math. Dokl.**8** 1967, 853-856)

[Par] A.S. Parhomenko, *On one-to-one continuous mappings*, Mat. Sb. (N.S.) **5(47)** (1939), 197-210

[Pol1] E. Pol (Puzio, E., Puzio-Pol, E.), E. Pol *An open-perfect mapping of a hereditarily disconnected space onto a connected space*, Fund. Math. **86** (1974), 271-278.

[Pol2] R. Pol, *On category raising and dimension-raising open mappings with discrete fibers*, Coll. Math. **44** (1981), 65-76.

[Po1] V.I. Ponomarev, *Open mappings of normal spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **126** (1959), 716-718.

[Po2] V.I. Ponomarev, *On closed mappings*, Uspekhi Mat. Nauk 14 (1959), no. 4, 203-206.

[Po3] V.I. Ponomarev, *Axioms of countability and continuous mappings*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. **8** (1960), 127-133.

[Po4] V.I. Ponomarev, *Properties of topological spaces preserved under multivalued mappings*, Mat. Sb. (N.S.) **51(93)** (1960), 515-536. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **2, 38** (1964), 119-140)

[Po5] V.I. Ponomarev, *On paracompact spaces and their continuous mappings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **143** (1962), 46-49. (Soviet Math. Dokl **3** (1962), 347-350)

[Po6] V.I. Ponomarev, *On the invariance of strong paracompactness under open perfect mappings*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. **10** (1962), 425-428

[Po7] V.I. Ponomarev, *On the absolute of a topological space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **149** (1963), 26-29. (Soviet Math. Dokl. **4** (1963), 299-302)

[Po8] V.I. Ponomarev, *Spaces co-absolute with metric spaces*, Uspehi Mat. Nauk **21** (1966), no. 4, 101-132. (Russian Math. Surveys **21** (1966), no. 4, 87-113)

[Por] J.R. Porter, R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[Ru] M.E. Rudin, M. Starbird, *Products with a metric factor*, General Topology and Appl. **5** (1975), 235-248.

[Šč] E. Ščepin, *Sur les applications continues des cubes de Tihonov*, C.R. Acad. Paris Sér. A-B **288** (1979), A257-A260.

[Šn] V.E. Šneider, *Continuous images of Souslin and Borel sets. Metrization theorems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **50** (1945), 77-79.

[Sh] B.E. Shapirovsky, *On mappings onto Tychonoff cubes* (Uspekhi Mat. Nauk, **35:3** (1980), 122–130.

[Ta1] A.D. Taĭmanov, *On extension of continuous mappings of topological spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **31** (73) (1952), 459-463.

[Ta2] A.D. Taĭmanov, *On closed mappings. I*, Mat. Sb. (N.S.) **36 (78)** (1955), 349-352.

[Ti] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, J. für die reine und angew.* Math. **145** (1915), 9-14.

[Tka] M.G. Tkachenko, *The Souslin property in free topological groups over compact spaces*, Math. Notes 1983 34, 790–793

[Tk1] V.V. Tkachuk, *Spaces that are projective with respect to classes of mappings*, Trans. Moscow Math. Soc. 1988 **50** (1988), 139-156.

[Tk2] V.V. Tkachuk, *Remainders over discretes–some applications*, Vestnik Mosk. Univ. Ser. Matematika, 1990 vol. 45, no. 4, 18-21.

[Us] V.V. Uspenskij, *On spectrum of frequencies of function spaces.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1982 37, no.1, 31-35.

[Va1] I.A. Vaĭnšteĭn, *On closed mappings of metric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **57** (1947), 319-321

[Va2] I.A. Vaĭnšteĭn, *On closed mappings*, Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. **155** Mat. **5** (1952), 3-53.

[Wh] G.T. Whyburn, *Open and closed mappings*, Duke Math. J. **19** (1950), 69-74.

[Wo] R.G. Woods, *A survey of absolutes of topological spaces*, Topological structures II, Pt. II (Proceedings of the Symposium in Amsterdan. October 31-November 2, 1978), Math. Centre Tracts 116, Amsterdam 1979, 323-362.