

# Asesores

---

Dr. Marco A. Núñez Peralta

Departamento de Física

Asesor

---

Dr. Héctor Juárez Valencia

Departamento de Matemáticas

Coasesor

Abstract

---

Dr. Richard A. Smith  
Department of Psychology  
Arizona State University

---

Dr. Richard A. Smith  
Department of Psychology  
Arizona State University

# Sinodales

---

Dr. Alfredo Nicolás Carrizosa

Departamento de Matemáticas

---

Dr. Marco A. Barranco Jimenez

Departamento de Matemáticas

I.P.N

---

Dr. Marco A. Núñez Peralta

Departamento de Física

1900

Dr. Albert M. Nichols, M.D.

Department of Medicine

Dr. William A. Barrett, M.D.

Department of Medicine

1901

Dr. William A. Barrett, M.D.

Department of Medicine

# Índice

Introducción	IX
<b>1. Dinámica de un fluido en un sistema de referencia inercial</b>	<b>1</b>
1.1. Coordenadas lagrangianas y eulerianas . . . . .	1
1.2. Cálculo del cambio de una propiedad con el tiempo, flujo estacionario y no estacionario . . .	3
1.3. Termodinámica de un fluido e hipótesis de equilibrio local . . . . .	7
1.3.1. Termodinámica de gases ideales . . . . .	7
1.3.2. Hipótesis de equilibrio y termodinámica de un flujo . . . . .	12
1.4. Ecuaciones de movimiento en un sistema inercial . . . . .	15
1.4.1. Ecuación de continuidad . . . . .	15
1.4.2. Ecuación de momentum . . . . .	17
1.5. Ecuaciones de Bernoulli en un sistema de referencia inercial . . . . .	20
1.6. Tensor de esfuerzos (Apéndice) . . . . .	23
<b>2. Ecuaciones de movimiento relativas a la Tierra</b>	<b>31</b>
2.1. Ecuaciones en un sistema cartesiano $y^1y^2y^3$ fijo a la Tierra . . . . .	31
2.1.1. Ecuaciones en el sistema de referencia primario $Y^1Y^2Y^3$ . . . . .	37
2.1.2. Ecuaciones en un sistema $x^1x^2x^3$ fijo a la tierra con origen en un punto $(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$ . .	39
2.2. Modelo elipsoidal terrestre . . . . .	43
2.3. Ecuaciones de momentum aproximadas y su región de validez . . . . .	45
2.4. Ecuaciones en coordenadas curvilíneas ortogonales $s^i$ definidas en el sistema $Y^1Y^2Y^3$ . . . .	46
2.4.1. Ecuaciones en coordenadas esféricas $\lambda, \phi, r$ . . . . .	52
2.4.2. Ecuaciones en coordenadas curvilíneas <i>esféricas</i> $x_s, y_s, z_s$ . . . . .	56
2.5. Coordenadas de proyección $x_p y_p z_p$ . . . . .	58
2.6. Ecuaciones de Bernoulli en un sistema fijo a la Tierra . . . . .	62
2.7. Modelo MM5 version 2 . . . . .	66
2.8. Modelo MM5 version 3 . . . . .	67
<b>3. Simplificación de las ecuaciones meteorológicas</b>	<b>71</b>
3.1. Existencia de un estado de referencia atmosférico . . . . .	71
3.2. Estimación del valor de referencia $\psi^{(0)}(z_s, t)$ con un flujo bidimensional. . . . .	76
3.2.1. Estimación de $p^{(0)}(z_s, t)$ . . . . .	77
3.2.2. Región de validez de la descomposición estándar $\psi(t, \mathbf{r}) = \psi_0(z) + \bar{\psi}(t, \mathbf{r})$ . . . . .	78
3.3. Estimación del orden de magnitud del cociente $\psi_1(\mathbf{r}, t) / \psi_0(\mathbf{r}, t)$ . . . . .	79
3.3.1. Resultados con el flujo $\mathbf{v}$ sobre una topografía bidimensional . . . . .	79
3.4. Estados de referencia hidrostáticos: Isotérmico, adiabático e isocórico . . . . .	80
3.5. Simplificación de la ecuación para $w_s$ . . . . .	84
3.6. Ecuación de continuidad profunda $\nabla \cdot \rho(z_s) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ . . . . .	86



<b>4. Ecuaciones en coordenadas generalizadas independientes del tiempo</b>	<b>89</b>
4.1. Formas covariante y contravariante de un vector	91
4.2. Forma tensorial de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	92
4.3. Velocidad, símbolos de Christoffel y aceleración	94
4.4. Forma tensorial de $\nabla$ , $\nabla \cdot$ y relación entre $\Gamma_{ij}^k$ y $g_{ij}$	97
4.5. Forma tensorial de las ecuaciones de continuidad y momentum	99
4.6. Ecuaciones de momentum en coordenadas generalizadas	101
4.7. El modelo RAMS	102
4.8. El modelo HOTMAC	104
4.9. El modelo ARPS	105
4.10. Fórmula lagrangiana para la aceleración	106
4.11. Coordenadas curvilíneas ortogonales $s^i$ en forma tensorial	108
4.12. Ecuaciones en coordenadas $y^1 = s^1, y^2 = s^2, y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3)$	109
<b>5. Ecuaciones en coordenadas dependientes del tiempo</b>	<b>113</b>
5.1. Coordenadas curvilíneas ortogonales dependientes del tiempo	113
5.2. Ecuaciones con $y^1 = x_s, y^2 = y_s, y^3 = p_0(z_s, t)$ y su simplificación	117
5.3. Ecuaciones en coordenadas $y^1 = s^1, y^2 = s^2, y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3, t)$	121
5.4. Ecuaciones con la presión como coordenada vertical	124
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>127</b>

100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200

1. Introduction  
2. Literature Review  
3. Methodology  
4. Results  
5. Discussion  
6. Conclusion  
7. References  
8. Appendix  
9. Glossary  
10. Index

# Introducción

Los Modelos de Mesoescala son aquellos que cuentan con resolución horizontal y vertical. Estos fenómenos son a menudo forzados por la topografía, las líneas costeras ó están vinculados con la convección. Algunos de los fenómenos más severos, como tornados y sistemas de convección, ocurren a mesoescala; mientras que la visibilidad, la turbulencia y el estado del mar entre otros, pueden variar enormemente en solo pocos kilómetros, y tener un tremendo impacto sobre las cálculos internos que realiza un modelo numérico.

Los modelos computacionales de mesoescala se han convertido en una herramienta importante para estudios de calidad del aire y para el análisis meteorológico operacional.

En este trabajo se analizan de forma detallada los modelos MM5 version 2,3 HOTMAC, RAMS, ARPS usados en México. Los resultados muestran que tales modelos tienen inconsistencias que limitan su uso en algunas aplicaciones.

Los flujos atmosféricos a mesoescala están descritos por escalas temporales y espaciales horizontales pequeñas. Esto significa que la escala horizontal está del orden de pocos kilómetros más no para varios centenares de kilómetros para la cual es usada [1 p.1] . La escala horizontal de los flujos atmosféricos a mesoescala  $L$  es del orden  $10^3$  Km o mas pequeño [2, p. 10], los flujos atmosféricos pueden ser estudiados en un sistema de coordenadas  $xyz$  con el plano  $xy$  tangente a un punto en la tierra, el eje  $z$  y el vector unitario  $\mathbf{k}$  son orientados en dirección opuesta a la gravedad  $\mathbf{g}$ . En este sistema de referencia  $\mathbf{g}$  es aproximado por  $-\mathbf{gk}$  con  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  y la ecuación de momento resultante usada en la literatura de mesoescala [1-16] es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{gk} - 2\bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1)$$

En los **capítulos 1 y 2** se han desarrollado las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la atmósfera sobre la *esfera* terrestre, visto desde diferentes sistemas de coordenadas. También se ha calculado que la región de validez de las ecuación de momentum aproximada es de de  $150\text{Km} \times 150\text{Km}$ . Además, se ha demostrado con un argumento puramente geométrico que el modelo elipsoidal terrestre [49] es más adecuado para estudiar la dinámica atmosférica, relegando al modelo esférico a un modelo de carácter local. Es por esta razón, que queda pendiente el planteamiento de toda la teoría desarrollada en este trabajo utilizando el modelo elipsoidal terrestre, con el fin de poder desarrollar modelos que realmente sean adecuados a escala global. En el **Capítulo 3** se discute la simplificación de tales ecuaciones mediante la definición de un estado de referencia atmosférico, así como estados de referencia hidrostáticos: Isotérmico, adiabático e isocórico, también la simplificación de la ecuación de momentum y continuidad. En el **Capítulo 4** se obtienen las ecuaciones en coordenadas generalizadas *independientes del tiempo* tales como la posición, la velocidad, la aceleración, las formas tensoriales del gradiente, la divergencia y el rotacional así como las ecuaciones de continuidad y de momentum por último hacemos un análisis detallado de los modelos atmosféricos RAMS, HOTMAC, ARPS utilizando las herramientas antes descritas. En el **Capítulo 5** se desarrolla el mismo conjunto de ecuaciones que las del capítulo 4 con la diferencia que ahora las coordenadas generalizadas van a ser dependientes del tiempo, es decir que con estas herramientas tenemos una base sólida para desarrollar mejores modelos atmosféricos.

# Introduction

The purpose of this study is to investigate the effects of a new educational program on the learning outcomes of students in a secondary school. The study was conducted over a period of six months, during which time the program was implemented in a classroom of 25 students. The program focused on developing critical thinking and problem-solving skills through a series of interactive activities and projects. The results of the study will be discussed in detail in the following sections.

The study was designed to evaluate the impact of the program on students' academic performance, as well as their attitudes towards learning and their ability to apply their knowledge in real-world situations. The data collected during the study will be analyzed to determine the effectiveness of the program and to identify any areas for improvement.

The program was implemented in a classroom of 25 students, who were divided into two groups: a control group and an experimental group. The control group followed the traditional curriculum, while the experimental group followed the new program. The program consisted of a series of lessons, each focusing on a specific skill or concept. The lessons were designed to be interactive and engaging, with students working in small groups and participating in various activities. The program was evaluated using a variety of methods, including pre-tests, post-tests, and student self-reports.

The results of the study showed that the experimental group performed significantly better than the control group on the post-test. This suggests that the program was effective in improving students' learning outcomes. The program also had a positive impact on students' attitudes towards learning and their ability to apply their knowledge in real-world situations.

The study also found that the program had a positive impact on students' self-confidence and their ability to work in groups. This suggests that the program was effective in developing students' social skills and their ability to collaborate with others. The program was well-received by the students, and they enjoyed the interactive and engaging nature of the lessons.

The program was implemented in a classroom of 25 students, who were divided into two groups: a control group and an experimental group. The control group followed the traditional curriculum, while the experimental group followed the new program. The program consisted of a series of lessons, each focusing on a specific skill or concept. The lessons were designed to be interactive and engaging, with students working in small groups and participating in various activities. The program was evaluated using a variety of methods, including pre-tests, post-tests, and student self-reports.

The results of the study showed that the experimental group performed significantly better than the control group on the post-test. This suggests that the program was effective in improving students' learning outcomes. The program also had a positive impact on students' attitudes towards learning and their ability to apply their knowledge in real-world situations.

The study also found that the program had a positive impact on students' self-confidence and their ability to work in groups. This suggests that the program was effective in developing students' social skills and their ability to collaborate with others. The program was well-received by the students, and they enjoyed the interactive and engaging nature of the lessons.

The program was implemented in a classroom of 25 students, who were divided into two groups: a control group and an experimental group. The control group followed the traditional curriculum, while the experimental group followed the new program. The program consisted of a series of lessons, each focusing on a specific skill or concept. The lessons were designed to be interactive and engaging, with students working in small groups and participating in various activities. The program was evaluated using a variety of methods, including pre-tests, post-tests, and student self-reports.

# Capítulo 1

## Dinámica de un fluido en un sistema de referencia inercial

Para describir la dinámica de un fluido respecto a la Tierra comenzaremos con su descripción relativa a un sistema cartesiano  $X^1 X^2 X^3$  con origen en el centro de la esfera terrestre como se aprecia en la figura 1.1. Supondremos que tal sistema constituye un **sistema de referencia inercial** con vectores base unitarios  $\hat{X}_i$  y daremos a conocer diferentes conceptos y relaciones como a continuación se describe. En la sección 1.1 definiremos las coordenadas lagrangianas, eulerianas y su transformación entre ellas. En sección 1.2 introduciremos la forma general en la cambia una propiedad  $F$  con el tiempo ya sea en flujo estacionario o no estacionario. En la sección 1.3 y 1.4 estudiaremos la termodinámica para proporcionar relaciones generales entre las variables macroscópicas  $T, P, \rho, E$ , etc así como la importancia de la hipótesis de equilibrio local que nos permite utilizar la segunda ley de la termodinámica considerando que nuestro sistema termodinámico es una partícula de fluido y por su pequeñez, está básicamente en equilibrio termodinámico, también deduciremos las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia inercial (ecuación de continuidad y ecuación de momentum). En la sección 1.5 deducimos la ecuación de Bernoulli en un sistema de referencia inercial que nos permite encontrar constantes de movimiento a partir de la ecuación de momentum.

### 1.1. Coordenadas lagrangianas y eulerianas

Si  $X^i$  son las coordenadas de una partícula de fluido en un instante  $t$ , su vector de posición está dado por

$$\mathbf{R}(t) = X^i \hat{X}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

donde  $\hat{X}_i$  son los vectores base canónicos del sistema cartesiano e inercial  $X^1 X^2 X^3$ . La triada de *coordenadas instantáneas*  $X^i$  reciben el nombre de **coordenadas eulerianas**. En lo que sigue usaremos la notación  $X \equiv (X^1, X^2, X^3)$  para referirnos a tales coordenadas. Las coordenadas  $X_0^i = X^i|_{t_0}$  que tiene una partícula

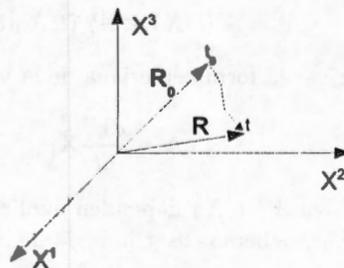


Figura 1.1: Sistema de referencia inercial  $X^i$ .

en un "instante inicial"  $t_0$  reciben el nombre de **coordenadas lagrangianas** y nos referiremos a dicha triada como  $X_0$ . Existe una relación entre coordenadas eulerianas y lagrangianas que denotamos en la forma

$$X = X(t, X_0) = T(X_0). \quad (1.2)$$

Es razonable suponer que partículas diferentes ocupan lugares diferentes en cualquier instante  $t$ , por lo que la ecuación (1.2) define una relación uno a uno entre las coordenadas lagrangianas  $X_0$  y eulerianas  $X$  de una partícula. Esto significa que podemos despejar y obtener a las primeras en términos de las segundas para obtener una relación de la forma

$$X_0 = X_0(t, X) = T^{-1}(X) \quad (1.3)$$

donde  $T^{-1}$  denota la transformación inversa de  $T$ . Dado que las relaciones (1.2) y (1.3) no son lineales en general, los símbolos  $T$  y  $T^{-1}$  no deben interpretarse como matrices. El vector de velocidad de una partícula de fluido está dado por

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{dX^i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i = V_L^i \hat{\mathbf{X}}_i, \quad (1.4)$$

donde usamos el hecho de que los vectores base  $\hat{\mathbf{X}}_i$  asociados a un sistema de referencia inercial no rotan ni cambian su magnitud con el tiempo de manera que

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_i}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

y definimos

$$V_L^i \equiv V_L^i(t, X_0) = \frac{dX^i(t, X_0)}{dt}.$$

Las componentes  $V_L^i$  sólo dependen de las coordenadas lagrangianas por lo que podemos referirnos a (1.4) como la *forma lagrangiana* de  $\mathbf{V}$ . Si sustituimos la expresión (1.3) de las coordenadas lagrangianas en términos de la eulerianas obtenemos las componentes de  $\mathbf{V}$  en términos de éstas últimas

$$V_E^i(t, X) \equiv V_L^i(t, X_0(t, X)) \quad (1.6)$$

con lo que llegamos a lo que podemos llamar la *forma euleriana* de la velocidad

$$\mathbf{V} = V_E^i \hat{\mathbf{X}}_i.$$

Para simplificar la notación en lo que sigue omitiremos el subíndice  $E$  al referirnos a cantidades en coordenadas eulerianas. Si derivamos la velocidad en su forma lagrangiana (1.4) obtenemos la aceleración en forma lagrangiana

$$\mathbf{A}(t, X) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV_L^i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i = A_L^i \hat{\mathbf{X}}_i$$

donde

$$A_L^i = A_L^i(t, X_0) \equiv \frac{d^2 X^i}{dt^2} = \frac{d^2 X^i(t, X_0)}{dt^2}$$

son las componentes lagrangianas de  $\mathbf{A}$ . Para obtener la forma euleriana de  $\mathbf{A}$  tenemos dos caminos. El primero consiste sustituir las coordenadas lagrangianas por su expresión en términos de las eulerianas,

$$A^i = A^i(t, X) \equiv A_L^i(t, X_0(t, X)).$$

El segundo camino consiste en derivar la forma euleriana de la velocidad

$$\mathbf{A} = \frac{dV^i}{dt} \hat{\mathbf{X}}_i$$

Dado que las componentes eulerianas  $V^i(t, X)$  dependen explícitamente e implícitamente de  $t$  a través de las coordenadas eulerianas  $X^i(t, X_0)$ , debemos usar la regla de la cadena para calcular la derivada temporal total

$$A^i = \frac{dV^i}{dt} := \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\text{cte.}} + \frac{dX^i}{dt} \frac{\partial V^i}{\partial X^i}. \quad (1.7)$$

Para obtener la forma euleriana de  $A$  debemos sustituir las componentes de la velocidad  $\frac{dX^i}{dt}$  por su forma euleriana  $V^i$ . En esta forma llegamos a

$$A^i = \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{X=\text{cte.}} + V^j \frac{\partial V^i}{\partial X^j}.$$

Esta expresión puede simplificarse si introducimos el operador gradiente

$$\nabla = \hat{X}_i \frac{\partial}{\partial X^i}$$

con el cual las componentes eulerianas de la aceleración quedan como sigue

$$A^i = \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{X=\text{cte.}} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V^i. \quad (1.8)$$

## 1.2. Cálculo del cambio de una propiedad con el tiempo, flujo estacionario y no estacionario

El procedimiento usado para obtener las formas euleriana y lagrangiana de la aceleración puede usarse para obtener las formas euleriana y lagrangiana de la rapidez de cambio instantánea de una propiedad  $F$  de una partícula (como la masa, la temperatura o la densidad). Si

$$F_L = F_L(t, X_0) \quad (1.9)$$

da el valor en un instante  $t$  de una propiedad  $F$  de una partícula de fluido localizada inicialmente en  $X_0$ , entonces

$$\frac{d}{dt} F_L \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_L(t + \Delta t, X_0) - F_L(t, X_0)}{\Delta t} \quad (1.10)$$

es la derivada ordinaria que se enseña en el primer curso de cálculo ya que que  $t$  es la única variable y  $X_0$  sólo es un parámetro para distinguir a una partícula de otra. Podemos referirnos a  $F_L$  como la **forma lagrangiana** de la propiedad  $F$  y  $\frac{d}{dt} F_L$  como la derivada lagrangiana de  $F$ . Para obtener la expresión de  $F_L$  en términos de las coordenadas eulerianas  $X$  de la partícula, sustituimos el lado derecho de (1.3) en (1.9). La composición resultante

$$F = F(t, X) \equiv F_0(t, X_0(t, X)) \quad (1.11)$$

constituye la **forma euleriana** de la propiedad  $F$ . Entonces, resulta claro que para calcular la derivada temporal de  $F$  sólo debemos aplicar la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{X}^i \frac{\partial F}{\partial X^i}.$$

En términos del operador gradiente (1.7) y la definición (2) podemos escribir

$$\frac{d}{dt} F = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) F. \quad (1.12)$$

Dado que  $F$  es arbitraria obtenemos la identidad

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (1.13)$$

donde el lado izquierdo se aplica a una función  $F$  en su forma lagrangiana  $F_L$  y el lado derecho a su forma euleriana  $F$ . Podemos llamar  $\frac{d}{dt} F$  como la *derivada euleriana* de  $F$ .

**NOTA.** La literatura estándar de mecánica de fluidos usa el *mismo* símbolo  $F$  para referirse a las funciones  $F(t, X)$  y  $F_L(t, X_0)$  que, en general, *son diferentes*. Por ejemplo, si tenemos

$$F(t, X) = X^i$$

y la parcela tiene velocidad constante, entonces  $X^i = V^i t + X_0^i$  y  $F_L(t, X_0) = V^i t + X_0^i$ . De donde obtenemos

$$F(t, X) \neq F_L(t, Y)$$

por lo que en general  $F(t, X)$  y  $F_L(t, X_0)$  dependen en forma diferente de sus argumentos  $t, X$  y  $X_0$ . Si el mismo símbolo  $F$  se usa para  $F_L$ , no hay forma de distinguir entre las derivadas  $dF/dt$  y  $dF_L/dt$ , lo que motiva el uso de la notación  $DF/Dt$  para referirse a la derivada  $dF_L/dt$ ,

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{dF_L}{dt},$$

y  $dF/dt$  se calcula en forma euleriana de manera que la ec. (1.3) queda como sigue

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F.$$

Esta es precisamente la expresión reportada en la literatura estandar para referirse la relación entre las derivadas lagrangiana (o material) y euleriana. Para evitar confusión mientras exponemos los conceptos básicos para describir la cinemática de una partícula de fluido, usaremos  $F$  y  $F_L$  para referirnos a las expresiones de una propiedad  $F$  en coordenadas eulerianas, lagrangianas, respectivamente.

Ahora veamos el significado físico de los términos en (1.9). Si  $F_L = F_L(t, X_0)$  es el valor *instantáneo* de una propiedad  $F$  que atribuimos a una partícula de fluido localizada originalmente en  $X_0$ , la **derivada lagrangiana**

$$\frac{d}{dt} F_L \tag{1.14}$$

mide la rapidez instantánea con la que la propiedad  $F$  cambia en el interior de la partícula sin importar su posición instantánea  $X$ ! En otras palabras,  $\frac{d}{dt} F_L$  es la rapidez de cambio que mide con un aparato que viaja en el "interior" de la partícula. Derivando la identidad

$$F_L = F$$

obtenemos la relación

$$\frac{d}{dt} F_L = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_X + \mathbf{V} \cdot \nabla F. \tag{1.15}$$

que podemos usar para obtener el significado de los términos en el lado derecho. En efecto, reescribiendo tenemos

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_X = \frac{d}{dt} F_L - \mathbf{V} \cdot \nabla F. \tag{1.16}$$

De acuerdo con la regla de la cadena, el término  $\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_X$  se calcula manteniendo constantes a las coordenadas eulerianas  $X$ . Habiendo calculado tal término podemos sustituir  $X$  por las coordenadas  $X_f$  de un punto *fijo* en el espacio. Haciendo esto es claro que la expresión

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{X=X_f} \tag{1.17}$$

"mide el cambio de  $F$  en  $X_f$ " por lo que el término  $\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{X=X_f}$  recibe el nombre de **derivada local**. Por ejemplo, si el fluido está en movimiento y colocamos un aparato para medir  $F$  en  $X_f$ , el cambio instantáneo registrado por el aparato es exactamente la derivada local. La identidad muestra que el *cambio local* en un punto  $X_f$  se debe, en general, a la *superposición* de dos factores: (i) el cambio  $\frac{d}{dt} F_L$  de  $F$  en el interior de cada partícula, y (ii) a la distribución espacial (cuantificada por  $\nabla F$ ) de la propiedad  $F$  combinada con el

movimiento (cuantificado por  $\mathbf{V}$ ) del fluido. Veamos algunos casos particulares: a) Si el fluido está en reposo ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) tenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=x_f} = \frac{d}{dt} F_L$$

por lo que la derivada local  $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=x_f}$  mide exactamente el cambio de  $F$  en el interior de una partícula

localizada en  $X_f$ . b) Si el valor de  $F$  no cambia en el interior de cada partícula tenemos  $\frac{d}{dt} F_L = 0$ , pero si el fluido está en movimiento ( $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ ) y el valor de  $F$  cambia de una partícula a otra (de manera que  $\nabla F \neq \mathbf{0}$ ) la derivada local

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=x_f} = -\mathbf{V} \cdot \nabla F$$

mide un cambio en  $F$  debido efecto combinando del movimiento del fluido y la variación espacial de  $F$  en éste.

c) Si un aparato localizado en un punto fijo del espacio  $X_f$  no registra cambio en la propiedad  $F$ , tenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=x_f} = 0 \text{ y por tanto}$$

$$\frac{d}{dt} F_L - \mathbf{V} \cdot \nabla F = 0,$$

lo que significa que el cambio de  $F$  en el interior de una partícula se compensa exactamente con la distribución no uniforme de  $F$  en el fluido y el movimiento de éste, de manera que se cumple

$$\frac{d}{dt} F_L = \mathbf{V} \cdot \nabla F. \quad (1.18)$$

Este último caso da lugar a la siguiente definición. Decimos que un flujo es **estacionario** cuando al medir una propiedad  $F$  en un punto arbitrario  $X_f$  pero fijo, ésta no cambia su valor conforme transcurre el tiempo; es decir,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x=x_f} = 0 \quad \text{para cada } X_f. \quad (1.19)$$

En este caso la forma lagrangiana  $F_L(t, X_0)$  sigue siendo una función de  $t$  y  $X_0$ , pero la forma euleriana  $F$  se simplifica ya que (1.19) implica que  $F$  no depende explícitamente del tiempo por lo que podemos escribir

$$F = F(X) \quad (1.20)$$

La función  $F(X)$  sólo depende en forma *implícita* del tiempo  $t$  a través de las coordenadas eulerianas  $X^i = X^i(t, X_0)$ . Si al menos una propiedad  $F$  depende explícitamente del tiempo, diremos que el flujo es no **estacionario**.

Si  $X^i = X^i(t, X_0)$  són las coordenadas en un instante  $t$  de una partícula localizada en  $X_0$  en el instante  $t_0$ , entonces

$$V_L^i(t, X_0) = \frac{d}{dt} X^i(t, X_0) \quad (1.21)$$

son las componentes de la velocidad en forma lagrangiana. Si sustituimos las coordenadas  $X_0^i$  por su expresión (1.3) en términos de las correspondientes coordenadas eulerianas, obtenemos la forma euleriana

$$V^i(t, X) \equiv V_L^i(t, X_0^i = X_0^i(t, X)) \quad (1.22)$$

Combinando (1.21) y (1.22) obtenemos el *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{d}{dt} X^i = V^i(t, X) \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Bajo condiciones muy generales, este sistema tiene una única solución que satisface la condición inicial

$$X |_{t_0} = X_0 \quad (1.24)$$

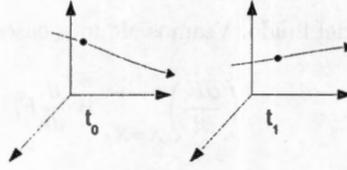


Figura 1.2: Trayectoria de dos partículas que pasan por un mismo punto  $X_f$  cuando el flujo es no estacionario.

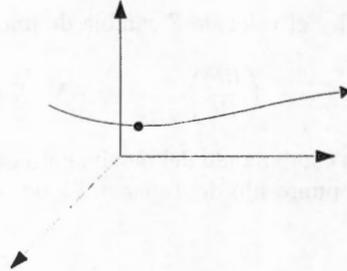


Figura 1.3: Trayectoria de dos partículas que pasan por un mismo punto  $X_0$  cuando el flujo es estacionario.

Por ejemplo, basta con pedir que cada componente  $V^i(t, X)$  sea una función continua de  $t$  y  $X^i$  y satisfaga la condición de Lipschitz en las variables  $X^i$ . En esta forma, podemos decir que la solución del problema de valores iniciales (1.23)-(1.24) da la forma en que las coordenadas eulerianas  $X$  dependen de  $t$  y las lagrangianas  $X_0$ . En otras palabras, si conocemos el campo de velocidad  $V$  en su forma euleriana podemos obtener la forma  $X^i(t, X_0)$  en que las coordenadas eulerianas dependen  $t$  y  $X_0$ . De acuerdo con este resultado podemos decir que el campo de velocidad  $V$  es una de las variables fundamentales para describir el movimiento de un fluido.

Si la forma euleriana  $V^i(t, X)$  depende explícitamente del tiempo  $t$ , las trayectorias de partículas que pasan por un mismo punto  $X_f$  en instantes diferentes  $t_0$  y  $t_1$ , serán, en general, diferentes como se aprecia en la figura 1.2. Si consideremos un *flujo estacionario*, la forma euleriana de  $V$  no depende explícitamente del tiempo  $t$  y el sistema (1.23) tiene la forma

$$\frac{d}{dt}X^i = V^i(X) \quad (1.25)$$

En el ámbito matemático este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias recibe el nombre de **sistema autónomo**. En este caso partículas que pasan por un mismo punto  $X_0$  en instantes diferentes  $t_0$  y  $t_1$ , siguen la misma trayectoria como se ilustra en la figura 1.3.

De acuerdo con nuestra definición de flujo estacionario cada propiedad  $F$  del fluido satisface (1.19). Si, *adicionalmente*,  $F$  tampoco cambia en el interior de cada partícula  $\left(\frac{d}{dt}F_L = 0\right)$ , la ecuación (1.15) se reduce a

$$V \cdot \nabla F = 0. \quad (1.26)$$

Recíprocamente si (1.26) se cumple, entonces  $\frac{d}{dt}F = 0$ .

Nótese que para un flujo estacionario la relación  $\frac{d}{dt}F_L = 0$  equivale a decir que el valor una propiedad  $F$  es el mismo sobre la trayectoria de cada partícula. Podemos resumir este último resultado como sigue.

**Proposición 1.1.** Si un flujo es estacionario y la ecuación (1.26) tiene lugar en cada punto del fluido, entonces  $\frac{d}{dt}F_L = 0$  y la propiedad  $F$  es constante sobre la trayectoria de cada partícula, aunque el valor de  $F$  puede cambiar de una partícula (o trayectoria) a otra, como se indica en la figura 1.4.

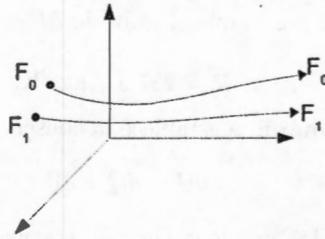


Figura 1.4: Conservación de una propiedad  $F$  sobre la trayectoria de una partícula en un flujo estacionario.

### 1.3. Termodinámica de un fluido e hipótesis de equilibrio local

Una de las virtudes de la teoría termodinámica es la de proporcionar relaciones generales entre las variables macroscópicas de un sistema sin necesidad de considerar los procesos moleculares detrás de tales propiedades. La atmósfera se comporta *localmente* (es decir, en una pequeña región alrededor de cada punto del espacio) como un *gas ideal* por lo que comenzaremos por revisar brevemente la descripción termodinámica de un gas ideal.

#### 1.3.1. Termodinámica de gases ideales

La **Ley cero** de la termodinámica parte de la noción de equilibrio térmico para establecer la existencia de una relación entre las variables macroscópicas que definen un estado de equilibrio, relación que recibe el nombre de **ecuación de estado**. La ecuación de estado de un gas ideal en un *recipiente finito* es

$$pV = NkT$$

de donde  $k$  es la *constante de Boltzmann*,  $N$  es el número de partículas en un volumen  $V$  y  $T$  es la temperatura del gas. Por otro lado la relación entre la presión  $p$  y la energía cinética promedio  $\langle mv^2/2 \rangle$  de las moléculas del gas, es

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle$$

Comparando lo anterior obtenemos

$$kT = \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle$$

lo que puede tomarse como la definición de la **escala absoluta de temperatura**. Reescribiendo la ecuación de estado

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{k}{m} T = \frac{M}{V} \frac{k}{m} T$$

aparece la masa  $M = Nm$  del gas contenido en  $V$ , la densidad

$$\rho = \frac{M}{V}$$

y la constante

$$\mathcal{R} = \frac{k}{m}$$

la cual depende de la masa  $m$  de las partículas del gas. Así llegamos a la ecuación de estado usada en meteorología

$$p = \rho \mathcal{R} T.$$

Podemos reescribir

$$\mathcal{R} = \frac{N_0 k}{N_0 m} = \frac{\mathcal{R}_0}{M}$$

donde  $N_0$  es el número de Avogrado y  $\mathcal{R}_0 = N_0 k = 8,314 \text{ J/mol}^\circ\text{K}$  es la constante universal de los gases. La atmósfera es una mezcla de gases por lo que el valor de  $M$  es un promedio de las masas de tales gases y, aproximadamente, tenemos

$$\mathcal{R} = 287 \text{ J/kg}^\circ\text{K}.$$

La primera ley de la termodinámica establece la conservación de la energía

$$dU = dQ + dW \quad (1.27)$$

para procesos reversibles o irreversibles, donde la *energía interna*  $U$  es un atributo de cada sistema físico,  $dQ$  es el calor que fluye a través de las fronteras del sistema y  $dW$  es la resultante del trabajo realizado por y sobre el sistema. En el caso de un gas ideal tenemos

$$dW = -pdV$$

con lo cual la primera ley toma la forma

$$dU = dQ - pdV$$

Esta relación da lugar a la definición de la capacidad calorífica a volumen constante

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V.$$

Reescribiendo la primera ley en términos de la entalpia  $H \equiv U + pV$  obtenemos

$$dH = dQ + Vdp$$

con lo cual definimos la capacidad calorífica a presión constante

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

La relación entre  $C_p$  y  $C_V$  se obtiene derivando la identidad

$$H(T, p) = U(T, V) + pV(T, p)$$

lo que da

$$C_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Para calcular la derivada de  $U$  usamos la identidad (proporcionada por la regla de la cadena)

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} \right)_p = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial}{\partial V} \right)_T \right] U(T, V),$$

lo que nos da

$$C_p = C_V + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (1.28)$$

Por otro lado, la Ley de Joule establece que la energía interna de un *gas ideal* no depende del volumen

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0. \quad (1.29)$$

Combinando este resultado con la ecuación de estado, la ecuación (1.28) se reduce a la relación deseada

$$C_p = C_V + Nk. \quad (1.30)$$

En la deducción de (1.30) hemos trabajado con la primera ley en su forma original, donde aparecen variables extensivas  $U$ ,  $Q$ ,  $W$ ,  $V$ , siendo la presión  $p$  la única variable intensiva. Trabajar con la ecuación

de estado usada en meteorología  $p = \rho \mathcal{R}T$  implica trabajar con la densidad  $\rho = \frac{M}{V}$ , (la cual es una variable intensiva), en lugar del volumen. Usando la relación

$$dV = d\frac{M}{\rho} = -\frac{M}{\rho^2}d\rho$$

la primera ley toma la forma

$$dU = dQ + M\frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Dividiendo entre  $M$  obtenemos

$$d\left(\frac{U}{M}\right) = d\left(\frac{Q}{M}\right) + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Esta expresión sugiere trabajar con *variables intensivas* que denotaremos con minúsculas

$$u = \frac{U}{M} \quad q = \frac{Q}{M}$$

Así tenemos

$$h \equiv \frac{H}{M} = \frac{U + pV}{M} = u + \frac{p}{\rho}$$

de donde se obtiene

$$dh = du + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

En términos de las variables  $u$ ,  $q$  y  $h$ , la primera ley toma las siguientes formas

$$du = dq + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad (1.31)$$

$$dh = dq + \frac{1}{\rho}dp.$$

Definiendo

$$c_v = \frac{C_v}{M}, \quad c_p = \frac{C_p}{M},$$

la relación (1.31) queda como sigue

$$c_p = c_v + R. \quad (1.32)$$

donde usamos  $\frac{Nk}{M} = \frac{Nm}{M} \frac{k}{m} = \frac{k}{m} = \mathcal{R}$ . Si usamos la primera ley en la forma (1.31) obtenemos

$$c_v = \left(\frac{du}{dT}\right)_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

De acuerdo con la ley de Joule la energía interna de un *gas ideal*  $u$  no depende de  $\rho$  por lo que la primera ley reduce a

$$du = c_v dT$$

y siendo  $T$  la única variable independiente, podemos integrar para obtener

$$u = c_v T + u^*$$

donde suponemos que  $c_v$  es constante y  $u^*$  es una constante de integración que podemos considerar como 0 para obtener la entalpía para un gas ideal

$$h = u + \frac{p}{\rho} = c_v T + RT = (c_v + R)T = c_p T. \quad (1.33)$$

Dado que la entalpía es una función de estado, esta expresión es válida aún cuando el gas se someta a un proceso reversible o irreversible.

**Ejemplo 1.1.** Como aplicación de (1.32) consideremos un gas ideal sometido a un **proceso adiabático** (reversible o irreversible). En tal caso la primera ley junto con la ley de Joule conducen a la ecuación

$$c_v dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

que podemos integrar con ayuda de la ecuación de estado  $p = \rho \mathcal{R}T$ :

$$c_v \frac{dT}{T} = \frac{\mathcal{R}}{\rho} d\rho \rightarrow d \ln T = \frac{\mathcal{R}}{c_v} d \ln \rho$$

por tanto

$$T = C \rho^{R/c_v}$$

donde  $C$  es una constante de integración. Si conocemos un par de valores de  $T_*$  y  $\rho_*$  en cualquier etapa del proceso adiabático tenemos

$$T_* = C \rho_*^{R/c_v}$$

con lo cual obtenemos

$$T = T_* \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^{R/c_v} \quad (1.34)$$

De acuerdo con la ecuación de estado  $p = \rho \mathcal{R}T$  el par de valores  $(T_*, \rho_*)$  define una presión dada por  $p_* = \rho_* \mathcal{R}T_*$  la cual nos permite reescribir la ecuación (1.34) en términos de la presión:

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\rho T}{\rho_* T_*} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_*} = \frac{p T_*}{p_* T} \rightarrow \frac{T}{T_*} = \left( \frac{p}{p_*} \right)^{R/c_v} \left( \frac{T_*}{T} \right)^{R/c_v}$$

entonces

$$\left( \frac{T}{T_*} \right)^{R/c_v + 1} = \left( \frac{p}{p_*} \right)^{R/c_v}$$

pero la ecuación (1.32) equivale a  $c_p/c_v = R/c_v + 1$ , por tanto

$$T = T_* \left( \frac{p}{p_*} \right)^{R/c_p} \quad (1.35)$$

En forma análoga obtenemos la relación entre  $\rho$  y  $p$ :

$$\frac{T}{T_*} = \frac{p}{p_*} \left( \frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-1} = \left( \frac{p}{p_*} \right)^{R/c_p} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_*} = \left( \frac{p}{p_*} \right)^{1-R/c_p} = \left( \frac{p}{p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

donde usamos  $1 - \frac{R}{c_p} = \frac{c_v}{c_p}$  y definimos

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} \quad (1.36)$$

Por tanto

$$\rho = \rho_* \left( \frac{p}{p_*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (1.37)$$

Las relaciones (1.36) y (1.37) reciben el nombre de **ecuaciones de Poisson**.

La **segunda ley de la termodinámica** establece la existencia de una variable de estado  $S$  conocida como **entropía** y para procesos reversibles de un gas tiene lugar la relación

$$dU = TdS - pdV \quad (1.38)$$

En términos de variables intensivas la segunda ley toma la forma

$$du = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.39)$$

donde definimos  $s = S/M$ . Despejando obtenemos

$$ds = \frac{du}{T} - \frac{p}{T\rho^2} d\rho$$

En el caso de un gas ideal, podemos invocar la ley de Joule y la ecuación de estado  $\frac{p}{T\rho} = R$  para obtener

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{p}{T\rho^2} d\rho = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.40)$$

Dado que  $T$  y  $\rho$  son las únicas variables independientes, tenemos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right) = \frac{c_v}{T} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right) = -\frac{R}{\rho}$$

Si calculamos las derivadas cruzadas obtenemos

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \rho \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \rho} = 0 \quad (1.41)$$

por lo cual la ecuación (1.41) es una *diferencial exacta* que podemos integrar

$$ds = d \ln T^{c_v} - d \ln \rho^R = d \ln \frac{T^{c_v}}{\rho^R}$$

para obtener *la entropía de un gas ideal* sometido a un proceso adiabático y reversible

$$s = c_0 + \ln \frac{T^{c_v}}{\rho^R}$$

Usando la ecuación de estado sustituimos  $\rho$  por  $p$ ,

$$p = \rho RT \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{p} \rightarrow \frac{T^{c_v}}{\rho^R} = R^R \frac{T^{c_v}}{p^R},$$

para obtener

$$s = c_0 + \ln R^R + \ln \frac{T^{c_v}}{p^R}$$

Para eliminar la constante de integración basta con conocer un par de valores  $p_*, T_*$  con los cuales tenemos

$$s_* = c_0 + \ln R^R + \ln \frac{T_*^{c_v}}{p_*^R}$$

de lo cual se obtiene

$$s - s_* = \ln \frac{T^{c_v}}{p^R} - \ln \frac{T_*^{c_v}}{p_*^R} = \ln \left(\frac{T}{T_*}\right)^{c_v} \left(\frac{p_*}{p}\right)^R \quad (1.42)$$

La entropía  $s$  es una variable un "exótica" para los meteorólogos quienes prefieren usar la variable  $\Theta$  definida por la relación

$$c_p = \ln \frac{\Theta}{\Theta_*} \equiv s - s_*$$

lo que equivale a

$$\frac{\Theta}{\Theta_*} = \frac{T}{T_*} \left(\frac{p}{p_*}\right)^{R/c_p} \quad (1.43)$$

Aunque esta relación se obtuvo a partir de la segunda ley para procesos irreversibles (1.39), podemos tomarla como la *definición* de la **temperatura potencial**  $\Theta$ .

### 1.3.2. Hipótesis de equilibrio y termodinámica de un flujo

La segunda ley de la termodinámica establece que para procesos reversibles tiene lugar la relación (1.38). Esta relación supone que el sistema está cerca del equilibrio termodinámico, es decir, no hay diferencias significativas entre los valores de sus propiedades termodinámicas en distintos puntos del sistema. Sin embargo, *las propiedades de un fluido en movimiento pueden cambiar significativamente de valor de un punto a otro*. En este caso el fluido constituye un *sistema fuera de equilibrio termodinámico* y, en consecuencia, la relación termodinámica (1.38) no es válida. Podemos evitar esta dificultad si consideramos que nuestro sistema termodinámico es una partícula de fluido y que, por su pequeñez, está básicamente en equilibrio termodinámico. Esta hipótesis recibe el nombre de **hipótesis del equilibrio local**. De acuerdo con esta hipótesis el valor de cada variable termodinámica pueden diferir de una partícula a otra por lo que ahora tales variables son funciones de la posición de cada partícula. Por ejemplo, si usamos el subíndice  $L$  para denotar el valor de una variable termodinámica como función de las *coordenadas lagrangianas* de cada partícula, tenemos

$$u_L = u_L(t, X_0), \quad s_L = s_L(t, X_0), \quad T_L = T_L(t, X_0), \quad \text{etc.},$$

y la segunda ley (1.13) toma la forma

$$du_L = T_L ds_L - p_L dV_L \quad \rightarrow \quad du_L = T_L ds_L - \frac{p_L}{\rho_L^2} d\rho_L \quad (1.44)$$

Si las variables termodinámicas son "funciones bien comportadas" de  $t$ , las derivadas respecto a  $t$  están bien definidas y las diferenciales en (1.44) están dadas por

$$du_L = \frac{du_L}{dt} dt, \quad ds_L = \frac{ds_L}{dt} dt, \quad dV_L = \frac{dV_L}{dt} dt$$

y la segunda ley en su forma (1.44) equivale a la relación siguiente

$$\frac{du_L}{dt} = T_L \frac{ds_L}{dt} - p_L \frac{dV_L}{dt}. \quad (1.45)$$

Para reescribir lo anterior en *forma euleriana* basta con sustituir las coordenadas lagrangianas  $X_0$  por su expresión en coordenadas eulerianas (1.3). Por ejemplo

$$u(t, X) \equiv u_L(t, X_0 = X_0(t, X))$$

donde omitimos el subíndice  $L$  para indicar a una variable en su *forma euleriana*. Así, la relación termodinámica (1.45) toma la forma

$$du = TdS - pdV, \quad (1.46)$$

donde ahora usamos el hecho de que cada función depende de  $t$  y  $X^i$  para obtener la expresión de las diferenciales, por ejemplo, para la energía interna tenemos

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial X^i} dX^i.$$

De acuerdo con la definición (1.7) de  $\nabla$  y la relación (1.1), podemos escribir

$$\frac{\partial u}{\partial X^i} dX^i = \nabla u \cdot d\mathbf{R}$$

con lo cual llegamos a la expresión

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \nabla u \cdot d\mathbf{R} \quad (1.47)$$

válida para flujos estacionarios y *no* estacionarios. Si el flujo es estacionario tenemos

$$du = \nabla u \cdot d\mathbf{R}.$$

De acuerdo con la hipótesis de equilibrio local podemos hacer uso de las relaciones termodinámicas encontradas anteriormente si pensamos que ahora nuestro sistema termodinámico es una partícula de fluido.

Un **flujo ideal** se define como un fluido en movimiento en el cual no hay disipación de energía por efecto de la viscosidad. En este caso podemos suponer que el intercambio de calor entre las partículas del fluido es nulo, por lo que podemos referirnos al flujo como un **flujo adiabático**. Adicionalmente, la segunda ley (para cada partícula) establece que la entropía de cada partícula  $s$  permanece constante por lo que podemos referirnos a un flujo adiabático como **flujo isoentrópico**. Es importante recordar que la entropía puede variar de una partícula a otra.

**Ejemplo 1.2.** En el caso de un flujo *ideal e isoentrópico* (no necesariamente de gas ideal) la segunda ley (1.31, 1.46) se reduce a

$$dh = \frac{1}{\rho} dp \quad (1.48)$$

donde  $h$ ,  $p$  y  $\rho$  son propiedades de una partícula arbitraria del fluido.

a) Si el flujo *no* es estacionario esta ecuación establece una relación entre las diferenciales

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial h}{\partial t} dt + \nabla h \cdot d\mathbf{R} \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial t} dt + \nabla p \cdot d\mathbf{R} . \end{aligned}$$

b) En el caso particular de un *flujo estacionario* tenemos

$$\begin{aligned} dh &= \nabla h \cdot d\mathbf{R} = \frac{\partial h}{\partial X^i} dX^i \\ dp &= \nabla p \cdot d\mathbf{R} = \frac{\partial p}{\partial X^i} dX^i . \end{aligned}$$

Dado que los incrementos  $dX^i$  son *independientes* concluimos que tienen lugar las relaciones

$$\frac{\partial h}{\partial X^i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X^i}$$

que pueden sintetizarse en la relación

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p .$$

c) En el caso *no* estacionario los incrementos  $dx^i$  siguen siendo independientes, pero ya no podemos concluir que (1.48) es válida. Por ejemplo, si  $dx^2 = dx^3 = 0$ , tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x^1} dx^1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1} dx^1 .$$

donde la presencia de las derivadas temporales ya no permite concluir que la igualdad  $\frac{\partial h}{\partial x^1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1}$  es válida. Esta expresión sólo es válida cuando el flujo es estacionario.

**Ejemplo 1.3.** a) Como caso particular del ejemplo anterior consideremos un flujo *ideal e isoentrópico* de gas ideal. En tal caso la relación (1.32) y las ecuaciones de Poisson (1.34 -1.37) son válidas ya que son atributos de cada partícula que no cambian con el tiempo, aun cuando el flujo *no* sea estacionario. La expresión (1.33) para la entalpía

$$h = c_p T \quad (1.49)$$

no cambia, sólo que ahora consideramos que  $h$  y  $T$  dependen del tiempo y posición instantánea de la partícula en consideración:  $h = h(t, X)$ ,  $T = T(t, X)$ . Las ecuaciones de Poisson tiene un cambio ligero, por ejemplo, la relación (1.35) debe escribirse en la forma

$$T = T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{R/c_p} \quad (1.50)$$

donde agregamos el subíndice  $00$  para indicar que  $T_{00}$  y  $p_{00}$  son los valores de temperatura y presión que la partícula de fluido bajo estudio tenía en el punto  $X_0 \equiv X|_{t=t_0}$  e instante  $t_0$ . Así, la entalpía queda como sigue.

$$h = c_p T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{R/c_p}$$

y la ecuación (1.48) toma la forma

$$\frac{1}{\rho} dp = d c_p T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{R/c_p}$$

b) En el caso de un flujo estacionario esta ecuación toma la forma

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla c_p T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{R/c_p} \quad (1.51)$$

que usaremos para obtener una *primera integral* de la *ecuación de movimiento* para un flujo de gas ideal.

**NOTA.** Los valores  $T_{00}$ ,  $p_{00}$  puede estimarse si suponemos que el *movimiento* comienza de un estado de referencia hidrostático. Otra opción es considerar que el movimiento en el instante  $t_0$  es una perturbación de un estado de referencia. Regresaremos mas adelante a esta discusión cuando hayamos establecido la existencia de un estado de referencia atmosférico.

**Ejemplo 1.4.** Un **flujo isotérmico** como aquel donde *la temperatura de cada partícula permanece constante*, aunque puede cambiar de una partícula a otra. Si tenemos un flujo de gas ideal la sola ecuación de estado  $p = \rho RT$  permite reescribir el término  $\rho^{-1} \nabla p$  que aparece en la ecuación de movimiento:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{RT}{p} \nabla p = RT \nabla \ln \rho = \nabla RT \ln p.$$

Este resultado es válido para flujos estacionarios y *no* estacionarios y tampoco requiere de hipótesis termodinámicas adicionales.

**Ejemplo 1.5.** Un **flujo isocórico** se define como aquel flujo donde *la densidad de cada partícula permanece constante*. En el caso de un flujo isocórico tenemos simplemente

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \rho_{00}^{-1} p$$

donde  $\rho_{00}$  es la densidad de una partícula en  $X_0|_{t_0}$ .

Un flujo *estacionario* de gas ideal que sea a) adiabático, b) isotérmico ó c) isocórico tiene la propiedad de que la densidad sólo depende la presión

$$\rho = \rho(p).$$

En el caso adiabático está relación es la ecuación de Poisson (1.37). En el caso isotérmico es inmediato que  $\rho = \frac{p}{RT}$ , y en el isocórico es obvio. En dinámica de flujos geofísicos, se dice que un flujo estacionario es **barotrópico** cuando la densidad sólo depende de la presión. En este caso si definimos

$$P[p] \equiv \int^p \frac{ds}{\rho(s)}$$

entonces

$$\frac{dP}{dp} = \rho^{-1}$$

con lo cual obtenemos la relación

$$\rho^{-1} \nabla p = \nabla P[p]$$

que usamos para integrar la ecuación de movimiento.

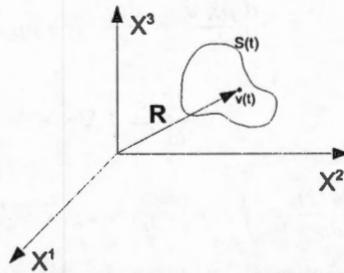


Figura 1.5: Volumen  $V(t)$  de parcelas delimitada por la frontera  $S(t)$

## 1.4. Ecuaciones de movimiento en un sistema inercial

Establecida la forma de calcular la variación temporal de alguna propiedad  $Q$ , a continuación estudiaremos dos propiedades muy importantes: la masa, y el momentum de una parcela de aire encerrada en un volumen arbitrario  $V$ .

### 1.4.1. Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen  $V(t)$  que en cada instante contiene a las mismas parcelas y sea  $S(t)$  la superficie que delimita a  $V(t)$ . Si el sistema está en movimiento el volumen  $V(t)$  se deformará con el tiempo como ilustra la figura 1.5. Si en cada instante  $t$  medimos la distribución espacial de la densidad de masa obtendremos dicha densidad en términos de las coordenadas instantáneas de las parcelas,  $\rho(t, X)$ , y la masa contenida en  $V(t)$  será

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho(t, X) dV(t).$$

Dado que el volumen  $V(t)$  está constituido por las mismas partículas de fluido su masa  $M(t)$  permanece constante por lo que tenemos

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0$$

lo que equivale a la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, X) dV(t) = 0 \quad (1.52)$$

la cual constituye una primera versión de la *ecuación de continuidad*.

Para obtener la *forma diferencial* de la ecuación de continuidad debemos reescribir la integral en el lado derecho de la relación siguiente

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, X) dV(t). \quad (1.53)$$

Ya que la región de integración  $V(t)$  cambia con el tiempo conviene reescribir la integral en términos de una integral con límites independientes del tiempo  $t$ . Esto puede hacerse reemplazando las coordenadas eulerianas  $X$  por las lagrangianas  $X_0$  [ec.(1.2)]. Este cambio de variable transforma la región  $V(t)$  por aquella  $V(t_0)$  que ocupaban las parcelas en el instante  $t_0$  (ver fig. 1.3) y la integral se transforma como sigue

$$\int_{V(t)} \rho(t, X) dV(t) = \int_{V(t_0)} \rho_L(t, X_0) J dV(t_0)$$

donde usamos  $\rho(t, X) = \rho_L(t, X_0)$  y  $J$  es el jacobiano de la transformación (1.2). Así tenemos

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t_0)} \rho_L(t, X_0) J dV(t_0) = \int_{V(t_0)} \frac{d \rho_L J}{dt} dV(t_0)$$

donde

$$\frac{d \rho_L J}{dt} = \frac{d \rho_L}{dt} J + \rho_L \frac{dJ}{dt}$$

y, como se demuestra más abajo,

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1.54)$$

por tanto

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{v(t_0)} \left( \frac{d \rho_L}{dt} + \rho_L \nabla \cdot \mathbf{V} \right) J dV(t_0).$$

Reescribiendo la integral en forma euleriana se obtiene la expresion deseada para la integral en el lado derecho de (1.53)

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{v(t)} \left( \frac{d \rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dV(t), \quad (1.55)$$

donde usamos las identidades  $\rho_L(t, X_0) = \rho(t, X)$  y  $\frac{d \rho_L}{dt} = \frac{d \rho}{dt}$ .

De acuerdo con (1.53) y (1.55) la conservación de la masa equivale a

$$\int_v \left( \frac{d \rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dV = 0$$

y dado que el volumen  $V$  es arbitrario se concluye que tiene lugar la relación

$$\frac{d \rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.56)$$

la cual es la forma *forma diferencial de la ecuación de continuidad*. Una forma equivalente se obtiene al usar

$$\frac{d \rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho \quad (1.57)$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.58)$$

**Demostración de (1.54).** Derivando la identidad

$$J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k}$$

se obtiene

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k} \right\} = \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial \dot{X}^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k} + \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k} + \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial \dot{X}^3}{\partial X_0^k} \right\}$$

y usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial \dot{X}^m}{\partial X_0^n} = \frac{\partial X^l}{\partial X_0^n} \frac{\partial \dot{X}^m}{\partial X^l}$$

se llega al resultado deseado

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k} \frac{\partial \dot{X}^1}{\partial X^1} + \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^l}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^3}{\partial X_0^k} \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial X^l} + \frac{\partial X^1}{\partial X_0^i} \frac{\partial X^2}{\partial X_0^j} \frac{\partial X^l}{\partial X_0^k} \frac{\partial \dot{X}^3}{\partial X^l} \right\} \\ &= \delta_{11} J \frac{\partial \dot{X}^1}{\partial X^1} + \delta_{21} J \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial X^1} + \delta_{31} J \frac{\partial \dot{X}^3}{\partial X^1} = J \nabla \cdot \mathbf{V}. \end{aligned}$$

La integral en (1.55) puede reescribirse usando el teorema de la divergencia como sigue

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t, X) dV(t) = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV(t) + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS(t).$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal y exterior a  $S(t)$ . El procedimiento usado para obtener esta identidad puede aplicarse al producto  $\rho F$  para obtener el Teorema del Transporte de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho F \, dv(t) &= \int_{V(t)} \frac{\partial \rho F}{\partial t} \, dV(t) + \oint_{S(t)} \rho F \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS(t) \\ &= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho F}{\partial t} + \nabla \cdot \rho F \mathbf{V} \right) \, dV(t) \\ &= \int_{V(t)} \left( \frac{d\rho F}{dt} + \rho F \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \, dV(t) . \end{aligned}$$

#### 1.4.2. Ecuación de momentum

Consideremos un volumen  $V(t)$  con frontera  $S(t)$  que contiene las mismas parcelas. El momentum de una parcela con posición instantánea  $\mathbf{X}$  está dado por

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{V} \Delta M = \mathbf{V} \rho(t, X) \, \Delta V(t)$$

donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad en coordenadas eulerianas y el momentum del conjunto de parcelas en  $V(t)$  es

$$\mathbf{P}(t) = \int_{V(t)} \rho(t, X) \mathbf{V} \, dV(t).$$

Ya que  $\mathbf{V}$  es la velocidad medida respecto a un marco de referencia inercial, la 2a. ley de Newton establece que el cambio de  $\mathbf{P}(t)$  es igual a la fuerza total que actúa sobre el sistema

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V \tag{1.59}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S &= \text{resultante de fuerzas superficiales} \\ \mathbf{F}_V &= \text{resultante de fuerzas volumétricas.} \end{aligned}$$

Ahora bien, sobre una parcela actúan fuerzas superficiales

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{sup}} = \langle \mathbf{t}^{(n)} \rangle \Delta S$$

donde  $\langle \mathbf{t}^{(n)} \rangle$  es la fuerza superficial promedio por unidad de área sobre la parcela. Al integrar sobre todas las parcelas sólo quedan las fuerzas superficiales  $\mathbf{t}^{(n)}$  que actúan a través de la frontera  $S(t)$ , ya que las fuerzas entre parcelas vecinas son pares de fuerzas que se anulan recíprocamente, por 3a. Ley de Newton, por tanto

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = \oint_{S(t)} \mathbf{t}^{(n)}(t, X) \, dS(t) .$$

Denotemos por

$$\mathbf{f}_V(t, X) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_V}{V}$$

a la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el fluido en cada punto  $X$ , entonces

$$\mathbf{F}_V = \int_{V(t)} \mathbf{f}_V(t, X) \, dV(t) \tag{1.60}$$

Así llegamos a la *forma integral* de la segunda ley de Newton para un volumen "macroscópico" constituido por las mismas partículas:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{V} \, dV(t) = \oint_{S(t)} \mathbf{t}^{(n)}(t, X) \, dS(t) + \int_{V(t)} \mathbf{f}_V(t, X) \, dv(t) . \tag{1.61}$$

Para obtener la *forma diferencial* de (1.61) procedemos como sigue:

a) Comenzamos por simplificar la integral del lado izquierdo usando  $\frac{d}{dt} \hat{X}_i = 0$  y aplicando el Teorema de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{V} dV(t) = \hat{X}_i \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho V^i dV(t) = \hat{X}_i \int_{V(t)} \left( \frac{d\rho V^i}{dt} + \rho V^i \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dV(t)$$

Desarrollando el integrando y usando la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho V^i}{dt} + \rho V^i \nabla \cdot \mathbf{V} = \rho \frac{dV^i}{dt} + V^i \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) = \rho \frac{dV^i}{dt},$$

llegamos a la identidad deseada

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{V} dV = \hat{X}_i \int_{V(t)} \rho \frac{dV^i}{dt} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dV.$$

b) En la sección 1.6 se demuestra que las componentes del vector de tensión

$$t^{(n)} = \hat{X}_i T_i^{(n)}$$

en cada punto  $X$  de la superficie  $S(t)$ , están dadas por

$$T_i^{(n)}(t, X) = \sigma_{ij}(t, X) n_j$$

donde  $\sigma_{ij}$  define una matriz simétrica llamada **tensor de esfuerzos** y  $n_j$  son las componentes del vector normal unitario y exterior a  $S(t)$  en el punto  $X$ . En esta forma

$$F_{\text{sup}} = \oint_S t^{(n)} dS = \hat{X}_i \oint_S \sigma_{ij} n_j dS = \hat{X}_i \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X^j} dv \quad (1.62)$$

donde la última expresión se obtiene aplicando el teorema de la divergencia.

c) Sustituyendo (1.60) y (1.62) en (1.61)

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dv = \hat{X}_i \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X^j} dV + \int_{V(t)} \mathbf{f}_V dV(t) \quad (1.18)$$

se llega a la forma diferencial de la ecuación de momentum *para cada partícula* de fluido

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \hat{X}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X^j} + \mathbf{f}_V. \quad (1.63)$$

Hasta aquí hemos considerado un fluido arbitrario pero en el caso de un **fluido Newtoniano** tenemos

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} \right)$$

donde

$p$  = presión

$\lambda$  = segundo coeficiente de viscosidad

$\mu$  = viscosidad dinámica.

Calculando

$$\begin{aligned} \hat{X}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X^j} &= \hat{X}_i \frac{\partial}{\partial X^j} \left[ \delta_{ij} (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} \right) \right] \\ &= -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \\ &= -\nabla p + \rho \mathbf{f}_d \end{aligned}$$

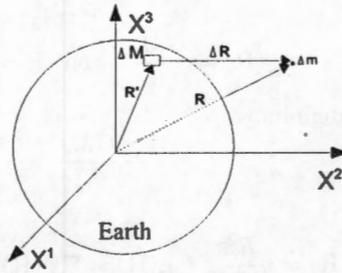


Figura 1.6: Fuerza gravitacional sobre una masa  $\Delta m$ .

donde definimos

$$\mathbf{f}_d = \rho^{-1} [(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V}] = \text{resultante de fuerzas disipativas} . \quad (1.64)$$

d) Para obtener una forma más explícita de la fuerza volumétrica supongamos que la fuerza de gravedad es la única fuerza volumétrica. La ley de gravitación de Newton establece que una partícula de la Tierra con masa  $\Delta M$  y vector de posición  $\mathbf{R}'$  ejerce sobre una partícula con masa  $\Delta m$  y vector de posición  $\mathbf{R}$ , una fuerza dada por

$$\Delta \mathbf{F}_{\Delta M \rightarrow \Delta m} = G \frac{\Delta M \Delta m}{\Delta R^2} \left( -\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R} \right)$$

donde  $\Delta \mathbf{R} \equiv \mathbf{R} - \mathbf{R}'$ ,  $\Delta R \equiv \|\Delta \mathbf{R}\|$  y  $G$  es la constante gravitacional (ver Fig. 1.6). Entonces la fuerza que la Tierra ejerce sobre  $\Delta m$  es

$$\Delta \mathbf{F}_g = \Delta m \int \frac{G}{\Delta R^2} \left( -\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R} \right) dM = \Delta m \quad \mathbf{g}(\mathbf{R})$$

donde definimos

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = -G \int \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R^3} dM .$$

Si  $\Delta m$  es la masa de una partícula de fluido con volumen  $\Delta V$  y densidad  $\rho$ ,

$$\Delta m = \rho \Delta V,$$

la fuerza gravitacional por unidad de volumen es

$$\mathbf{f}_g(\mathbf{R}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_g}{\Delta v} = \rho \mathbf{g}(\mathbf{R}). \quad (1.65)$$

El campo  $\mathbf{g}(\mathbf{R})$  es potencial. En efecto tenemos la identidad

$$-\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R^3} = \nabla \frac{1}{\Delta R} = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial X^i} \frac{1}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|}$$

donde  $\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{x}}_i$ , con lo cual podemos escribir

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = G \int \nabla \frac{1}{\Delta R} dM = \nabla \int G \frac{1}{\Delta R} dM = \nabla \Phi_g(\mathbf{R}) \quad (1.66)$$

donde definimos

$$\Phi_g(\mathbf{R}) \equiv G \int \frac{1}{\Delta R} dM. \quad (1.67)$$

Sustituyendo (1.65), (1.66) en (1.63) se obtiene la forma deseada en la ecuación de momentum para flujos atmosféricos

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f}_d.$$

**Ejemplo 1.6.** Como paso particular supongamos que la Tierra es una *esfera con masa  $M_e$  distribuida uniformemente* entonces

$$\Phi_g(\mathbf{R}) = \frac{GM_e}{R} \quad \text{con } R = \|\mathbf{R}\| . \quad (1.68)$$

Si  $R_e$  denota al radio terrestre y definimos

$$g \equiv \frac{GM_e}{R_e^2} \quad (1.69)$$

se obtiene

$$\Phi_g(\mathbf{R}) = g \frac{R_e^2}{R} , \quad \mathbf{g}(\mathbf{R}) = \nabla \Phi(\mathbf{R}) = -g \frac{R_e^2}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} . \quad (1.70)$$

## 1.5. Ecuaciones de Bernoulli en un sistema de referencia inercial

El propósito de esta sección es obtener *constantes de movimiento* (a las que nos referiremos como *ecuaciones de Bernoulli*) a partir de la ecuación de momentum para *flujos ideales* de interés tanto en la hidrodinámica como en meteorología. La idea principal para obtener tales ecuaciones es escribir los términos de la ecuación de momentum para un flujo ideal

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} . \quad (1.71)$$

como el gradiente de funciones escalares.

a) Para trabajar con la aceleración usaremos la notación  $B \equiv \|\mathbf{B}\| = \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}$ . La relación

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \frac{B^2}{2} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

es una identidad válida para cualquier campo vectorial  $\mathbf{B}$  con componentes razonablemente diferenciables. En el caso particular de un campo de velocidad tenemos

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

con lo cual podemos reescribir la forma euleriana la aceleración como sigue

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) . \quad (1.72)$$

b) En la sección anterior (1.3) mostramos que para un flujo adiabático (o isoentrópico) y estacionario, la segunda ley de la termodinámica equivale a la relación

$$\nabla h = \rho^{-1} \nabla p .$$

c) En la literatura meteorológica se define un flujo **barotrópico** como aquél donde la densidad sólo es función de la presión

$$\rho = \rho(p) .$$

Integrando  $\rho^{-1}(p)$  obtenemos la función

$$P[p] \equiv \int^p \frac{ds}{\rho(s)} + C_P ,$$

donde  $C_P$  es una constante de integración, la cual satisface

$$\frac{dP[p]}{dp} = \rho^{-1}(p) .$$

Esta relación junto con la regla de la cadena permite reescribir al término  $\rho^{-1}\nabla p$  como el gradiente de  $P[p]$ ,

$$\rho^{-1}\nabla p = \frac{dP[p]}{dp}\nabla p = \hat{X}^i \frac{\partial p}{\partial X^i} \frac{dP[p]}{dp} = \hat{X}^i \frac{\partial P[p]}{\partial X^i} = \nabla P[p].$$

Como casos particulares de flujos barotrópicos tenemos:

(c1) Un **flujo Isocórico** en el cual la densidad de cada partícula de fluido es constante

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}_0) \equiv \rho_{00}$$

aunque la densidad puede variar de una partícula a otra. En tal caso

$$P[p] = \rho_{00}^{-1} p + C_P.$$

(c2) Un **flujo adiabático de gas ideal**. En este caso tenemos (1.51)

$$\rho^{-1}\nabla p = \nabla h = \nabla c_p T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (1.73)$$

Otra opción para obtener esta relación es calcular  $P[p]$  usando la ecuación Poisson (1.37):

$$\rho^{-1} = \rho_{00}^{-1} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \int p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}}$$

y usando  $1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{R}{c_p}$  se obtiene

$$P[p] = \frac{p_{00}^{-1} c_p}{-\frac{1}{\gamma} R} p^{R/c_p}.$$

Usando la ecuación de estado  $p_{00} = \rho_{00} R T_{00}$  obtenemos

$$\frac{p_{00}^{-1} c_p}{-\frac{1}{\gamma} R} = \frac{T_{00}}{-\frac{1}{\gamma} p_{00}} = \frac{T_{00}}{p_{00} \frac{1}{\gamma}} = \frac{T_{00}}{p_{00} \frac{R/c_p}{R}} = \frac{T_{00}}{p_{00} \frac{R/c_p}{R}}$$

con lo cual llegamos a

$$P[p] = c_p T_{00} \left( \frac{p}{p_{00}} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

(c3) Un **flujo isotérmico de gas ideal**. En esta caso la sola ecuación de estado  $p = RT\rho$  da

$$P[p] = RT \ln p + C_P.$$

d) El tercer y último ingrediente está dado por el hecho de que el campo gravitacional es conservativo

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g.$$

Sustituyendo las relaciones obtenidas en la ecuación de movimiento para un flujo ideal (1.72) obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left[ Q + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right] = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}). \quad (1.74)$$

donde  $Q = h$  para flujo adiabático y  $Q = P$  para un flujo barotrópico. Ahora estamos en posición de obtener diferentes ecuaciones de Bernoulli considerando algunas hipótesis adicionales a las definiciones introducidas arriba.

Un campo de velocidad  $\mathbf{V}$  se llama **potencial** cuando se puede obtener como el gradiente de un campo escalar  $\Phi_v$ ,

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi_v.$$

**Ejemplo 1.7.** Si tenemos un flujo potencial, ideal y adiabático entonces  $\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \nabla \Phi = 0$  y

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_v = \nabla \frac{\partial \Phi_v}{\partial t}$$

con lo cual la ecuación (1.74) toma la forma

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} + h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right] = 0$$

la cual implica que la expresión entre paréntesis no depende de las coordenadas eulerianas, a lo más, depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto la función

$$E = \left[ \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} + h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right]_{(\mathbf{R}, t)} = f(t) \quad (1.75)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición instantánea de una partícula de fluido. Si, adicionalmente, el flujo es *estacionario* tenemos  $\frac{\partial \Phi_v}{\partial t} = 0$  y (1.75) se reduce a la ecuación de Bernoulli

$$h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g = C_0 \quad (1.76)$$

donde  $C_0$  es una constante independiente de la posición  $\mathbf{R}$ .

**Ejemplo 1.8.** Consideremos un flujo ideal, estacionario y adiabático donde  $\mathbf{V}$  puede *no* ser potencial. En este caso (1.74) se reduce a

$$\nabla \left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right] = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}).$$

Multiplicando ambos lados por  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right] = 0.$$

concluimos (Proposición 1.1) que la función

$$E(\mathbf{R}) = h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g$$

es una propiedad de cada partícula que no cambia conforme ésta se mueve. En otras palabras,  $E(\mathbf{R})$  tiene un valor constante *a lo largo de la trayectoria de cada partícula*, aunque su valor puede cambiar de una partícula a otra, con lo cual obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right]_{\mathbf{R}_0} = \left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right]_{\mathbf{R}} \quad (1.77)$$

donde  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}$  son los vectores de posición de un partícula en instantes arbitrarios  $t_0$  y  $t$ , respectivamente.

**Ejemplo 1.9.** Para un flujo ideal, potencial, estacionario y barotrópico tenemos

$$\nabla \left[ P[p] + \frac{V^2}{2} + \Phi_g \right] = 0$$

de donde concluimos que *la función*

$$E(\mathbf{R}) = P[p(\mathbf{R})] + \frac{v^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R})$$

tiene el mismo valor numérico en cada punto  $\mathbf{R}$ . Para determinar dicho valor suponemos que los valores de la presión  $p(\mathbf{R})$  y el campo de velocidad  $V^2(\mathbf{R}_0)$  son conocidos en un punto  $\mathbf{R}_0$ , entonces calculamos

$$E(\mathbf{R}_0) = P[p(\mathbf{R}_0)] + \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0) = \int^{p(\mathbf{R})} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0).$$

En esta forma la ecuación de Bernoulli  $E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}_0)$  queda como sigue

$$\int^{p(\mathbf{R})} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = \int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R})$$

La constante  $C_P$  se cancela dando

$$\int^{p(\mathbf{R})} \frac{ds}{\rho(s)} + \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = \int^{p(\mathbf{R}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0).$$

por lo que consideraremos  $C_P = 0$ . En términos de  $P[p]$  tenemos

$$P[p(\mathbf{R})] + \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = E(\mathbf{R}_0).$$

Si  $P^{-1}$  denota la función inversa de  $P[p]$ , el valor de la presión en un punto arbitrario  $\mathbf{R}$  es

$$p(\mathbf{R}) = P^{-1} \left[ E(\mathbf{R}) - \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} - \Phi_g(\mathbf{R}) \right].$$

Las curvas de presión constante reciben el nombre de **isóbaras**. La ecuación (implícita) de la isóbara sobre la cual la presión tiene un valor constante  $p_{00}$  es

$$\frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = E(\mathbf{R}_0) - P[p_{00}].$$

Calculemos la isóbara que pasa por un punto dado  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Para este propósito calculamos primero el valor  $p_{00} \equiv p(\mathbf{r}_{00})$  usando

$$P[p_{00}] + \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0) = E(\mathbf{R}_0).$$

Si  $\mathbf{R} = (x, y, z)$  es un punto sobre la isóbara con presión  $p_{00}$ , satisface la ecuación

$$P[p_{00}] + \frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = P[p_{00}] + \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0)$$

que se reduce a la relación

$$\frac{V^2(\mathbf{R})}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}) = \frac{V^2(\mathbf{R}_0)}{2} + \Phi_g(\mathbf{R}_0). \quad (1.78)$$

que constituye la ecuación implícita de la isóbara que pasa por  $\mathbf{R}_0$ . De acuerdo con este resultado las isóbaras sólo están determinadas por el campo de velocidad  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{g}$ , siendo independientes de cualquier valor de la presión, densidad o temperatura. Este resultado es un caso particular de otro más general válido para flujos disipativos que pueden ser no estacionarios y con velocidad  $\mathbf{V}$  no necesariamente potencial [47].

## 1.6. Tensor de esfuerzos (Apéndice)

1. Consideremos un elemento de superficie  $\Delta S$  en un medio continuo, cuyo centro geométrico tiene vector de posición  $\mathbf{R}$  como se muestra en la figura (1.7)

Sea  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario a  $\Delta S$  en el punto  $\mathbf{R}$ . Si  $\Delta \mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas superficiales que actúan sobre  $\Delta S$ , entonces la fuerza promedio por unidad de área es

$$\bar{\mathbf{T}}^{(n)} = \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S}$$

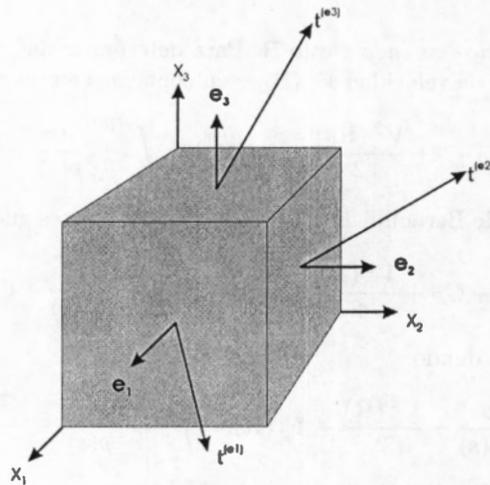


Figura 1.7: Vectores de tensión asociados a los planos cartesianos

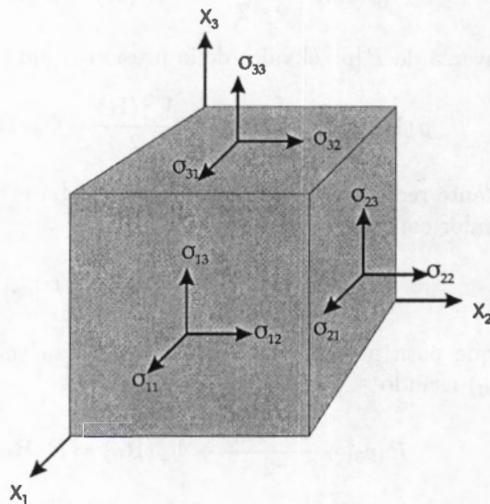


Figura 1.8: Componentes de los vectores de tensión sobre las caras del cubo.

En el límite  $\Delta S \rightarrow 0$  de manera que la superficie se colapse en el punto  $\mathbf{R}$ . El resultado es una fuerza  $\mathbf{T}^{(n)}$  por unidad de área en el punto  $\mathbf{R}$  a la que nos referimos como **tensión** en el punto  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{R}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \bar{\mathbf{T}}^{(n)}$$

El **tensor de esfuerzos** es una *matriz simétrica*  $\sigma_{ij}(\mathbf{R})$  que permite calcular las componentes de  $\mathbf{T}^{(n)}$  en la base canónica  $\hat{\mathbf{X}}^i$ ,

$$\mathbf{T}^{(n)} = T^{(n)} \hat{\mathbf{X}}^i$$

de acuerdo con la relación

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

donde  $n_j$  son las componentes del vector  $\mathbf{n}$ .

2. El tensor  $\sigma_{ij}$  surge en forma natural cuando usamos un conjunto *linealmente independiente* de vectores tensión  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$ , para calcular  $\mathbf{T}^{(n)}$ . Para definir  $T^{(1)}$  consideramos un paralelepípedo centrado en punto  $\mathbf{R}$  y aristas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Definimos

$$\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{R}) = \text{Fuerza resultante sobre superficie } \Delta A$$

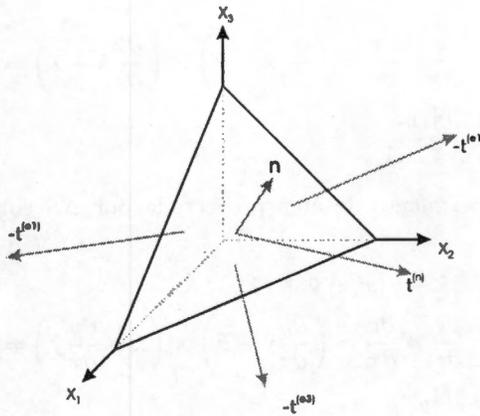


Figura 1.9: Vector de tensión asociado a un plano arbitrario.

Tomando el límite  $\Delta V \rightarrow 0$  obtenemos los vectores

$$\mathbf{T}^i = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}^i}{\Delta A} = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{x}}^j$$

donde la triada  $\{\sigma_{ij}\}_{j=1}^3$  son las componentes de  $T^{(i)}$  en la base canónica  $\hat{\mathbf{x}}^j$ . Al tomarse el límite  $\Delta V \rightarrow 0$  el volumen  $\Delta V$  se reduce a un punto con vector de posición  $\mathbf{R}$  por lo que las componentes  $\sigma_{ij}$  son funciones de  $\mathbf{R}$ ,  $\sigma = \sigma(\mathbf{R})$  y cada  $T^{(i)}$  es la tensión en el punto  $\mathbf{R}$  sobre un elemento infinitesimal de área ortogonal a cada vector en la base canónica  $\hat{\mathbf{x}}^i$ , como se aprecia en la figura 1.9.

Considerando que las caras  $\Delta A_i$  son ortogonales es natural suponer que el conjunto  $\mathbf{T}^i$  tendrá alguna propiedad relacionada con dicha ortogonalidad. En general no podemos esperar que el conjunto  $\mathbf{T}^i$  se ortogonal pero si podemos esperar que sea linealmente independiente, es decir, podemos suponer que los vectores  $\mathbf{T}^{(1)}$ ,  $\mathbf{T}^{(2)}$ ,  $\mathbf{T}^{(3)}$  forman una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Esta propiedad garantiza que cualquier vector  $\mathbf{T}^{(n)}$  asociado a un elemento de área  $dS$  que pasa por  $\mathbf{R}$  es combinación lineal de dicha base, es decir, existen coeficientes  $c_i^{(n)}$  tales que

$$\mathbf{T}^{(n)} = c_i^{(n)} \mathbf{T}^i.$$

3. Para determinar los coeficientes  $c_i^{(n)}$  necesitamos recordar algunos resultados sobre geometría de superficies. Una superficie  $\Delta S$  tiene una parametrización de la forma

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \hat{\mathbf{x}} + y(u, v) \hat{\mathbf{y}} + z(u, v) \hat{\mathbf{z}} \equiv x^i(u, v) \hat{\mathbf{x}}_i.$$

Un vector normal a  $\Delta S$  en un punto está dado por

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

y recordando la interpretación geométrica de la norma del producto vectorial de dos vectores es fácil ver que un elemento infinitesimal de área está dado por

$$dS = \|\mathbf{N}\| du dv.$$

Para calcular  $c_i^{(n)}$  consideramos un volumen finito centrado en  $\mathbf{R}$  con caras  $\Delta S$ ,  $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_y$ ,  $\Delta A_z$ . Dado que la cara  $\Delta S$  es un plano tiene la ecuación cartesiana de la forma  $ax + by + cz = d$ , de la cual podemos despejar una variable en términos de las dos restantes. Esto nos da tres parametrizaciones diferentes. Si despejamos a  $x$  obtenemos una expresión  $x = x(y, z)$  la cual da la parametrización de la forma

$$\mathbf{r}(y, z) = x(y, z) \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$$

con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} \right) = \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial x}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial x}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ N_x &= \|\mathbf{N}_x\| \\ dS &= N_x \Delta A_{yz} \end{aligned}$$

donde  $dA_{yz} = dydz$  es un elemento de área proyectada por  $\Delta S$  sobre el plano  $yz$ . En forma análoga si despejamos a  $y$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, z) &= x\hat{\mathbf{x}} + y(x, z)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{N}_y &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left( \frac{\partial y}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left( \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \right) = -\frac{\partial y}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial y}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ N_y &= \|\mathbf{N}_y\| \\ dS &= N_y \Delta A_{xz} \quad (\Delta A_{yz} = \Delta x \Delta z). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Despejando a  $z$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z(x, y)\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{N}_z &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left( \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left( \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \right) = -\frac{\partial z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \\ N_z &= \|\mathbf{N}_z\| \\ dS &= N_z \Delta A_{xy} \quad (\Delta A_{yz} = \Delta x \Delta y). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Nótese que al cambiar de parametrización obtenemos vectores normales  $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y, \mathbf{N}_z$  paralelos que sólo difieren en su magnitud por lo que su normalización nos da el mismo vector unitario  $\mathbf{n}$  normal a la cara  $\Delta S$ , a saber,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{N}_x}{N_x} = \frac{1}{N_x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{N_x} \frac{\partial x}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{N_x} \frac{\partial x}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mathbf{N}_y}{N_y} = -\frac{1}{N_y} \frac{\partial y}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{N_y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{N_y} \frac{\partial y}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mathbf{N}_z}{N_z} = -\frac{1}{N_z} \frac{\partial z}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{N_z} \frac{\partial z}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{N_z} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

De estas expresiones obtenemos las componentes de  $\mathbf{n}$  en la base canónica  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ :

$$n_1 = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N_x}, \quad n_2 = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{N_y}, \quad n_3 = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{N_z}$$

por lo que podemos escribir

$$\mathbf{n} = n_1 \hat{\mathbf{x}} + n_2 \hat{\mathbf{y}} + n_3 \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{N_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{N_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{N_z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.81)$$

Esto nos permite calcular las áreas  $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$  como sigue. Si despejamos de (1.78) cada área y sustituimos cada  $N_i^{-1}$  por  $n_i$  obtenemos

$$\Delta A_x = n_1 \Delta S \quad \Delta A_y = n_2 \Delta S \quad \Delta A_z = n_3 \Delta S. \quad (1.82)$$

4. Ahora supongamos que el elemento de volumen  $\Delta V$  está en reposo. Entonces, la *Segunda Ley de Newton* nos dice que la suma de todas las fuerzas sobre  $\Delta V$  debe ser cero

$$\bar{\mathbf{T}}^{(n)} \Delta S - \bar{\mathbf{T}}^1 \Delta A_{yz} - \bar{\mathbf{T}}^2 \Delta A_{xz} - \bar{\mathbf{T}}^3 \Delta A_{xy} + \mathbf{f} \Delta V = 0$$

donde  $\bar{\mathbf{T}}^i$  denota una tensión promedio sobre una cara ortogonal al vector  $\hat{\mathbf{x}}^i$  y  $\mathbf{f}$  es la fuerza volumétrica promedio. Usando (1.82) y dividiendo entre  $\Delta S$  se obtiene

$$\bar{\mathbf{T}}^{(n)} = \bar{\mathbf{T}}^1 n_1 + \bar{\mathbf{T}}^2 n_2 + \bar{\mathbf{T}}^3 n_3 - \mathbf{f} \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

y en el límite  $\Delta V \rightarrow 0$  se llega

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^i n_i.$$

Sustituyendo la expresión  $(T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j)$  de cada  $\bar{\mathbf{T}}^i$  en la base canónica se obtiene

$$\mathbf{T}^{(n)} = n_i \sigma_{ij} \hat{\mathbf{x}}^j$$

donde identificamos a las componentes  $T_j^{(n)}$  de  $\mathbf{T}^{(n)}$  en la base  $\hat{\mathbf{x}}^j$ :

$$T_j^{(n)} = \sigma_{ij} n_j.$$

Esta expresión podemos escribirla en forma matricial como sigue donde la matriz transpuesta  $\sigma^t$  del tensor métrico  $\sigma$ .

$$\begin{pmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \end{pmatrix} = \sigma^t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Como se demuestra abajo, la matriz  $\sigma$  es *simétrica*,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

por lo que podemos escribir

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j. \quad (1.83)$$

De acuerdo con lo anterior podemos decir que

- (i) Las componentes de un vector de Tensión  $\mathbf{T}^{(n)}$  en la base  $\mathbf{T}^{(i)}$ , son las componentes  $n_i$  del vector normal unitario  $\mathbf{n}$
- (ii) El tensor de esfuerzos  $\sigma$  es una *matriz de cambio de base* que permite calcular las componentes de  $\mathbf{T}^{(n)}$  en la base  $\hat{\mathbf{x}}^j$  a partir de sus componentes  $n_i$  en la base  $\mathbf{T}^{(i)}$ .

5. Con lo anterior podemos obtener la *forma diferencial* de la *ecuación de equilibrio* del elemento de volumen  $\Delta V$  asociado a cada punto de un medio continuo *en reposo*. En efecto, si  $\Delta V$  tiene masa  $M$  y está en reposo respecto a nuestro sistema de referencia inercial  $\hat{\mathbf{x}}^i$  tenemos

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v = M \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1.84)$$

donde

$$\mathbf{F}_s = \oint_s \mathbf{T}^{(n)} dS$$

es la resultante de las fuerzas superficiales externas y

$$\mathbf{F}_v = \int_v \mathbf{f} dV = \hat{\mathbf{X}}^i \int f_i dV.$$

es la resultante de las fuerzas volumétricas.

Usando  $\mathbf{F}_s = \oint_s \mathbf{T}^{(n)} dS$  y aplicando el teorema de la divergencia reescribimos la integral de superficie como una integral de volumen

$$\mathbf{F}_s = \oint_s \mathbf{T}^{(n)} dS = \hat{\mathbf{X}}^i \oint_s \sigma_{ij} n_j dS = \hat{\mathbf{X}}^i \int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} dV.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de equilibrio (1.84)

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v = \hat{\mathbf{X}}^i \int \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + f_i \right) dV = \mathbf{0}$$

de donde se obtiene la ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + f_i = 0. \quad (1.85)$$

Usaremos esta relación para demostrar la simetría de  $\sigma$ .

6. La simetría de  $\sigma$  es una consecuencia del *equilibrio rotacional* de un elemento  $\Delta V$  en reposo. Para demostrar esto recordemos algunos resultados elementales.

a) Si  $a_i, b_j, c_k$  son las componentes de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  en la base canónica  $\hat{\mathbf{x}}^i$ , el triple producto escalar  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  puede escribirse como sigue

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

en particular cuando  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  se sustituyen por los vectores base, obtenemos el *símbolo de Levi - Civita*

$$\varepsilon_{ijk} = (\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = \begin{cases} 0 & \text{si un índice se repite} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 123 \end{cases}$$

b) Con la ayuda de  $\varepsilon_{ijk}$  podemos calcular las componentes del vector  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . En efecto si tenemos

$$\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \mathbf{b} = b^j \hat{\mathbf{x}}_j \quad \mathbf{c} = c^k \hat{\mathbf{x}}_k$$

entonces la relación  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  equivale a  $c^k = a^i b^j \hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_k$  y multiplicando por  $\hat{\mathbf{x}}_k$  se obtiene  $c^k = \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = a^i b^j (\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k$ , por lo tanto

$$c^k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j.$$

c) Ahora calculemos la torca externa total sobre un elemento de volumen  $\Delta V$ . La torca generada por las fuerzas superficiales externas al elemento  $\Delta V$  es

$$\tau_s = \oint_s \mathbf{R} \times \mathbf{T}^{(n)} dS$$

y puede reescribirse como una integral de volumen usando el teorema de la divergencia,

$$\tau_s = \hat{\mathbf{X}}_k \varepsilon_{ijk} \oint_s X^i T_j^{(n)} ds = \hat{\mathbf{X}}_k \varepsilon_{ijk} \oint_s X^i \sigma_{jl} n_l ds = \hat{\mathbf{X}}_k \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial}{\partial x^l} (X^i \sigma_{jl}) dV.$$

La torca generada por las fuerzas volumétricas es

$$\tau_V = \int_V \mathbf{R} \times \mathbf{f} dV = \hat{\mathbf{X}}_k \varepsilon_{ijk} \int_V X^i f_j dV.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de equilibrio rotacional

$$\tau_s + \tau_V = 0$$

obtenemos su forma diferencial

$$\varepsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial}{\partial x^l} (X^i \sigma_{jl}) + X^i f_j \right] = 0.$$

Desarrollando

$$\frac{\partial}{\partial x^l} X^i \sigma_{jl} = \delta_l^i \sigma_{jl} + X^i \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x^l} = \sigma_{ij} + X^i \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x^l}$$

y reagrupando términos se obtiene

$$\varepsilon_{ijk} \left[ \sigma_{ji} + X^i \left( \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x^l} + f_j \right) \right] = 0$$

De acuerdo con (1.85), el término entre paréntesis es cero, por lo cual

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} = 0.$$

Para  $k = 1$  tenemos

$$\varepsilon_{ij1}\sigma_{ij} = \varepsilon_{231}\sigma_{23} + \varepsilon_{321}\sigma_{32} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$$

por lo tanto

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}.$$

En forma análoga, para  $k = 2, 3$  se obtiene  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  lo que establece la simetría de  $\sigma$ .



## Capítulo 2

# Ecuaciones de movimiento relativas a la Tierra

En la sección 2.1 deducimos las ecuaciones de movimiento para un flujo atmosférico en sistemas cartesianos fijos a la tierra. El primer sistema  $y^1 y^2 y^3$  tiene una orientación y origen arbitrarios. En la sección 2.2 veremos brevemente la importancia de un modelo elipsoidal terrestre para en el comportamiento de los flujos atmosféricos a escalas planetaria y regional [49] y [50]. En la sección 2.3 mostramos que la literatura estandar meteorológica usa una aproximacion con caracter local para modelar flujos atmosféricos de mosoescala. En la sección 2.4 deducimos las ecuaciones de movimiento en coordenadas curvilineas ortogonales. Como caso particular tenemos las coordenadas de proyección las cuales son usadas en diferentes versiones del modelo MM5. En la sección 2.5 definimos las coordenadas proyección las cuales parten de la hipótesis que la Tierra se puede modelar como una esfera. En la sección 2.6 deducimos la ecuaciones de Bernoulli en un sistema de referencia fijo a la tierra. Finalmente en la sección 2.7 hacemos un análisis detallado de los modelos atmosféricos MM5 versión 2 y versión 3 mostrando que dichas versiones consideran ecuaciones de momentum inconsistentes.

### 2.1. Ecuaciones en un sistema cartesiano $y^1 y^2 y^3$ fijo a la Tierra

El sistema cartesiano  $X^1 X^2 X^3$  asociado al sistema de referencia inercial del capitulo 1, es un sistema derecho, es decir, el producto vectorial de los vectores base obedece la regla de la mano derecha,

$$\hat{X}_1 \times \hat{X}_2 = \hat{X}_3, \quad \hat{X}_3 \times \hat{X}_1 = \hat{X}_2, \quad \hat{X}_2 \times \hat{X}_3 = \hat{X}_1,$$

Estas relaciones pueden sintetizarse con ayuda del símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon_{i j k} = \begin{cases} 1 & \text{para } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{para } ijk = 132, 321, 213 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

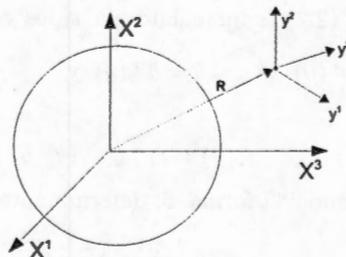


Figura 2.1: Sistema cartesiano  $y^1 y^2 y^3$  fijo a la Tierra.

como sigue

$$\epsilon_{ijk} \equiv \widehat{\mathbf{X}}_i \cdot (\widehat{\mathbf{X}}_j \times \widehat{\mathbf{X}}_k), \quad (2.1)$$

Esta relación se obtiene usando la forma de determinante del triple producto escalar anterior.

Consideremos un sistema de referencia cartesiano  $y^1 y^2 y^3$  fijo a la Tierra pero con una orientación arbitraria como se ilustra en la (figura 2.1). Supondremos que el sistema  $y^i$  es un sistema derecho ortogonal que se obtiene por medio de rotaciones del sistema inercial por lo que los vectores base asociados  $\widehat{\mathbf{y}}^i$  obedecen la regla de la mano derecha; es decir, satisfacen

$$\widehat{\mathbf{y}}^i \times \widehat{\mathbf{y}}^j = \epsilon_{ijk} \widehat{\mathbf{y}}^k. \quad (2.2)$$

Esto implica que la relación entre las bases  $\widehat{\mathbf{X}}^j$  y  $\widehat{\mathbf{y}}^i$  tiene la forma

$$\widehat{\mathbf{y}}^i = R_{ij} \widehat{\mathbf{X}}^j \quad (2.3)$$

donde  $R_{ij}$  es una matriz de rotación, es decir, satisface  $\det(\mathbf{R}) = 1$  y

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{R}^T$  es la transpuesta de  $\mathbf{R}$ . Equivalentemente, podemos escribir

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{ó} \quad R_{ij}R_{kj} = \delta_{ik} \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y  $\delta_{ik}$  es la delta de Kronecker,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k \\ 0 & \text{para } i \neq k \end{cases}.$$

Usando (2.4) o (2.5) obtenemos

$$\widehat{\mathbf{X}}^j = R_{ij} \widehat{\mathbf{y}}^i. \quad (2.6)$$

En esta sección obtendremos la forma que toman operaciones vectoriales definidas inicialmente en el sistema inercial  $X^1 X^2 X^3$ , cuando se trabaja en el sistema  $y^1 y^2 y^3$  fijo a la Tierra.

a) Para la transformación del producto vectorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  tenemos

$$\mathbf{a} = a^i \widehat{\mathbf{X}}_i \quad \mathbf{b} = b^j \widehat{\mathbf{X}}_j \quad \mathbf{c} = c^l \widehat{\mathbf{X}}_l$$

entonces

$$a^i b^j \widehat{\mathbf{X}}_i \times \widehat{\mathbf{X}}_j = c^l \widehat{\mathbf{X}}_l.$$

Multiplicando por  $\widehat{\mathbf{X}}_k$ .

$$a^i b^j (\widehat{\mathbf{X}}_i \times \widehat{\mathbf{X}}_j) \cdot \widehat{\mathbf{X}}_k = c^k$$

aparece la definición de  $\epsilon_{ijk}$  lo que da la relación

$$c^k = \epsilon_{kij} a^i b^j.$$

Usando el mismo razonamiento y (2.2) es inmediato que si los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  tienen la forma

$$\mathbf{a} = a^i(y) \widehat{\mathbf{y}}^i \quad \mathbf{b} = b^j(y) \widehat{\mathbf{y}}^j \quad \mathbf{c} = c^k(y) \widehat{\mathbf{y}}^k$$

entonces

$$c^k(y) = \epsilon_{ijk} a^i(y) b^j(y) \quad (2.7)$$

lo que puede reescribirse con la conocida forma de determinante

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{y}}^1 & \widehat{\mathbf{y}}^2 & \widehat{\mathbf{y}}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

El símbolo  $\mathbf{a} \times$  define un operador lineal ya que obedece las reglas de una transformación lineal. La representación matricial de  $\mathbf{a} \times$  se obtiene  $c^k = \epsilon_{kij} a^i b^j = (\epsilon_{ijka}^i) b^j$  lo que puede escribirse en términos de vectores columna como sigue

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \times) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

donde identificamos al símbolo  $\mathbf{a} \times$  como la matriz

$$(\mathbf{a} \times)_{kj} \equiv \epsilon_{kij} a^i = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

b) Ahora consideremos el cálculo de la derivada temporal

$$\frac{d\hat{y}^i}{dt} = \dot{\hat{y}}^i.$$

Derivando (2.3) y usando (2.6) se obtiene

$$\dot{\hat{y}}^i = \dot{R}_{ij} \hat{x}^j = \dot{R}_{ij} R_{kj} \hat{y}^k \quad (2.11)$$

donde  $\dot{R}_{ij} R_{kj}$  es el  $ik$ -ésimo elemento del producto matricial  $\dot{R}^T R$ . Usando la propiedad (2.11) es fácil ver que el producto  $R \dot{R}^T$  es una *matriz antisimétrica* por lo que tiene la forma

$$R \dot{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^3 & -\Omega^2 \\ -\Omega^3 & 0 & \Omega^1 \\ \Omega^2 & -\Omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

con la cual obtenemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{y}^1 \\ \hat{y}^2 \\ \hat{y}^3 \end{pmatrix} = R \dot{R}^T \begin{pmatrix} \hat{y}^1 \\ \hat{y}^2 \\ \hat{y}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^3 \hat{y}^2 - \Omega^2 \hat{y}^3 \\ -\Omega^3 \hat{y}^1 + \Omega^1 \hat{y}^3 \\ \Omega^2 \hat{y}^1 - \Omega^1 \hat{y}^2 \end{pmatrix}$$

Usando la ecuación (2.2) esta relación puede reescribirse en términos del vector de velocidad angular terrestre

$$\Omega = \Omega^1 \hat{y}^1 + \Omega^2 \hat{y}^2 + \Omega^3 \hat{y}^3$$

de la figura 2.2

$$\frac{d\hat{y}^i}{dt} = \Omega \times \hat{y}^i. \quad (2.13)$$

De acuerdo a la ecuación (2.13) con  $\mathbf{b} = \Omega$  y  $\mathbf{a} = \hat{y}^i = \delta_{il} \hat{y}^l$  tenemos

$$\Omega \times \hat{y}^i = \epsilon_{kjl} \Omega^j \delta_{il} \hat{y}^k = \epsilon_{kji} \Omega^j \hat{y}^k$$

por lo tanto

$$\frac{d\hat{y}^i}{dt} = \epsilon_{kji} \Omega^j \hat{y}^k$$

obtenemos la identidad

$$\dot{R}_{ij} R_{kj} = \epsilon_{kji} \Omega^j \quad (2.14)$$

de donde concluimos que el producto matricial  $\Omega \times \equiv R \dot{R}^T$  es la representación matricial de  $\Omega \times$  en la base  $\hat{y}^i$ .

c) Transformación del vector posición  $\mathbf{R}$ , velocidad  $\mathbf{V}$  y aceleración  $\mathbf{A}$ . Como se observa en la figura 2.3 la relación entre los vectores de posición de una partícula en los sistemas inercial  $X^1 X^2 X^3$  y fijo a la Tierra  $y^1 y^2 y^3$  está dada por,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c \quad (2.15)$$

donde

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{r} = y^i \hat{\mathbf{y}}_i(t), \quad \mathbf{R}_c = y_c^i \hat{\mathbf{y}}_i(t).$$

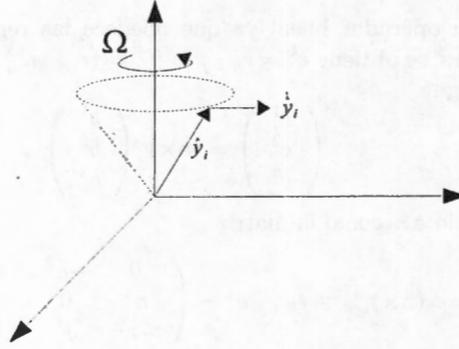


Figura 2.2: Vector base  $\hat{y}^i$  y su derivada  $\dot{y}^i$

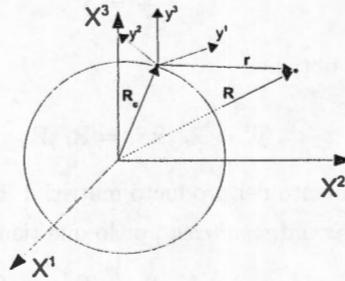


Figura 2.3: Vectores de posición  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{r}$  de una partícula en los sistemas  $X^1 X^2 X^3$  y  $y^1 y^2 y^3$ .

Entonces

$$\mathbf{R} = (y^i + y_c^i) \hat{y}_i. \quad (2.16)$$

Nótese que las componentes  $y_c^i$  de  $\mathbf{R}_c$  son *constantes* ya que  $\mathbf{R}_c$  rota junto con el sistema  $y^1 y^2 y^3$ . Derivando la ecuación (2.16) obtenemos la velocidad  $\mathbf{V}$ ,

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \dot{y}^i \hat{y}_i + (y^i + y_c^i) \Omega \times \hat{y}_i = \mathbf{v} + \Omega \times (y^i + y_c^i) \hat{y}_i,$$

por lo tanto

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R} \quad (2.17)$$

donde

$$\mathbf{v} = v^i \hat{y}_i \quad \text{con } v^i \equiv \dot{y}^i \quad (2.18)$$

es la **velocidad relativa a la Tierra**. De acuerdo con las ecuaciones (2.7) y (2.18) las componentes de  $\mathbf{V}$  en la base  $\hat{y}_i$  son

$$\mathbf{V} \cdot \hat{y}_i = \dot{y}^i + \epsilon_{ijk} \Omega^j (y^k + y_c^k). \quad (2.19)$$

Para obtener la aceleración  $\mathbf{A}$  derivamos la ecuación (2.18) y usamos las ecuaciones (2.13) y (2.19) junto con  $\dot{\Omega} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{d}{dt} \mathbf{V} = \frac{d}{dt} [v^i \hat{y}_i + (y^i + y_c^i) \Omega \times \hat{y}_i] \\ &= \dot{v}^i \hat{y}_i + v^i \Omega \times \hat{y}_i + \dot{v}^i \Omega \times \hat{y}_i + (y^i + y_c^i) \left[ \dot{\Omega} \times \hat{y}_i + \Omega \times \dot{\hat{y}}_i \right] \\ &= \mathbf{a} + \Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{v} + (y^i + y_c^i) \Omega \times (\Omega \times \hat{y}_i) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (2.20)$$

donde aparece la **aceleración relativa a la Tierra**

$$\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{y}}_i \quad \text{con} \quad a^i = \dot{v}^i = \dot{y}^i \quad (2.21)$$

junto con los términos siguientes

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= \text{aceleración de Coriolis} \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) &= \text{aceleración centrípeta.} \end{aligned}$$

d) Para la transformación de los operadores  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  necesitamos la relación entre las coordenadas  $X^j$  y  $y^i$  de un mismo punto en el espacio junto con la relación entre las componentes de un vector en las bases  $\hat{\mathbf{X}}_j$  y  $\hat{\mathbf{y}}^i$ . Si tenemos

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{X}}_j B^j(X) = \hat{\mathbf{y}}_i B^i(y)$$

y usamos la ecuación (2.3) se obtiene

$$B^j(X) = \mathbb{R}_{ij} B^i(y), \quad (2.22)$$

usando la ecuación (2.6),

$$B^i(y) = \mathbb{R}_{ij} B^j(X). \quad (2.23)$$

En particular, para el vector de posición tenemos [ecs. (2.15), (2.16) y (2.17)]

$$\mathbf{R} = X^j \hat{\mathbf{X}}_j = (y^i + y_c^i) \hat{\mathbf{y}}_i$$

por lo que las relaciones entre las coordenadas  $X^j$  y  $y^i$  son

$$X^j = \mathbb{R}_{ij} (y^i + y_c^i) \quad (2.24)$$

$$y^i + y_c^i = \mathbb{R}_{ij} X^j. \quad (2.25)$$

La matriz Jacobiana de la transformación (2.25) es la matriz  $\mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial y^i}{\partial X^k} = \mathbb{R}_{ik}. \quad (2.26)$$

Si  $f_{\mathbf{y}}(y, t)$  denota la composición  $f[X^j = \mathbb{R}_{ij} (y^i + y_c^i), t]$  tenemos

$$f(X, t) = f_{\mathbf{y}}(y, t).$$

Derivando y usando la última expresión obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial X^j} f = \frac{\partial}{\partial X^j} f_{\mathbf{y}} = \frac{\partial y^i}{\partial X^j} \frac{\partial}{\partial y^i} f_{\mathbf{y}} = \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} f_{\mathbf{y}},$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial X^j} = \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (2.27)$$

Sustituyendo la ecuación (2.27) en la definición de  $\nabla$  y usando la relación (2.3),

$$\nabla = \hat{\mathbf{X}}^j \frac{\partial}{\partial X^j} = \hat{\mathbf{X}}^j \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{\mathbf{y}}^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

se obtiene

$$\nabla = \hat{\mathbf{y}}^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (2.28)$$

de lo cual se concluye que la forma del operador  $\nabla$  no cambia cuando actúa sobre una función de las coordenadas  $y^i$ .

Para calcular  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  en términos de cantidades relativas al sistema  $y^1 y^2 y^3$  partimos de,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial X^j} B^j(X). \quad (2.29)$$

Usando (2.23) y (2.28) obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbb{R}_{ij} \mathbb{R}_{kj} \frac{\partial B^i(y)}{\partial y^k}$$

donde usamos el hecho que  $\mathbb{R}$  sólo depende de  $t$ . Pero  $\mathbb{R}_{ij} \mathbb{R}_{kj} = \delta_{ik}$  (ec.(2.5)), por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial y^i} B^i(y). \quad (2.30)$$

De acuerdo con la ecuación(2.7), en el sistema inercial el operador  $\nabla \times$  tiene la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{X}^i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X^j} B^k(X) \quad (2.31)$$

Para transformar esta expresión en términos de cantidades relativas al sistema  $y^1 y^2 y^3$  usamos (2.27), (2.28) y (2.31),

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{y}^l \epsilon_{ijk} \mathbb{R}_{li} \mathbb{R}_{mj} \mathbb{R}_{nk} \hat{y}^i \frac{\partial}{\partial y^m} B^n(y).$$

Para simplificar la última expresión usamos la identidad

$$\epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk} \mathbb{R}_{li} \mathbb{R}_{mj} \mathbb{R}_{nk} \quad (2.32)$$

la cual se obtiene sustituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.2) en la ecuación (2.1). De esta forma llegamos a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{y}^l \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial y^m} B^n(y). \quad (2.33)$$

Comparando (2.3) con (2.31) y (2.32) con (2.33) concluimos que la acción de los operadores  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  no cambia al actuar sobre un vector en la base  $\hat{y}^i$ .

e) Consideremos la transformación de la ecuación de continuidad. Usando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} \rho(X, t) = \frac{d}{dt} \rho_y(y, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \rho_y(y, t),$$

junto a la definición (2.18) de  $\mathbf{v}$  y (2.29) obtenemos,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.34)$$

Para el término  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  usamos (2.28) y (2.19)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial y^i} [v^i + \epsilon_{ijk} \Omega^j (y^k + y_c^k)] = \nabla \cdot \mathbf{v} + \epsilon_{ijk} \Omega^j \delta_i^k$$

pero  $\epsilon_{ijk} \Omega^j \delta_i^k = \epsilon_{iji} \Omega^j = 0$ , por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

y la ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{d}{dt} \rho_y + \rho_y \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.35)$$

f) De acuerdo con (2.20) la ecuación de momentum toma la forma

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (2.36)$$

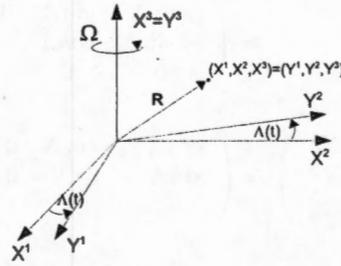


Figura 2.4: Sistema de referencia primario  $Y^1 Y^2 Y^3$  fijo a la Tierra.

donde

$$\nabla p = \hat{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} p.$$

De acuerdo con (2.36) la función  $\Phi_g(y) \equiv \Phi_g(X^j = R_{ij}(y^i + y_c^i))$  es la expresión del potencial gravitacional en el sistema  $y^i$ , con lo cual

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g(y). \quad (2.37)$$

El término de aceleración centrípeta  $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R})$  puede escribirse como el gradiente de una función potencial. En efecto si consideremos dicho término en el sistema de referencia inercial

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \Omega^2 (X^1 \hat{\mathbf{X}}_1 + X^2 \hat{\mathbf{X}}_2).$$

es inmediato que el potencial

$$\Phi_c(X) = -\frac{1}{2} \Omega^2 [(X^1)^2 + (X^2)^2] \quad (2.38)$$

satisface

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = -\nabla \Phi_c \quad (2.39)$$

Así, la ecuación de momentum toma la forma

$$\mathbf{a} + 2 \Omega \times \mathbf{v} - \nabla \Phi_c = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi_g + \mathbf{f}$$

la cual puede reescribirse como

$$\mathbf{a} + 2 \Omega \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi + \mathbf{f} \quad (2.40)$$

donde

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_c. \quad (2.41)$$

Veamos algunos casos particulares de sistemas cartesianos fijos a la Tierra.

### 2.1.1. Ecuaciones en el sistema de referencia primario $Y^1 Y^2 Y^3$

El sistema de referencia primario  $Y^1 Y^2 Y^3$  fijo a la Tierra es un sistema cartesiano con su origen en el centro de masa de un modelo elipsoidal terrestre, con el eje  $Y^3$  como eje de rotación. La figura 2.4 muestra la relación entre el sistema  $Y^1 Y^2 Y^3$  y el sistema inercial  $X^1 X^2 X^3$ . El ángulo

$$\Lambda(t) = \Omega t + \Lambda_0 \quad (2.42)$$

mide la rotación del sistema  $Y^1 Y^2 Y^3$ , siendo  $\Omega$  la velocidad angular terrestre.

La relación entre los vectores base asociados a los sistemas en cuestión es (ec 2.3),

$$\hat{\mathbf{Y}}^i = R_{ij} \hat{\mathbf{X}}^j \quad (2.43)$$

donde

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Lambda & -\sin \Lambda & 0 \\ \sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

y de la ecuación[2.12]

$$\Omega \times = \mathbb{R} \mathbb{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

de donde se recupera el resultado obvio

$$\Omega = \Omega \hat{Y}^3 = \Omega \hat{X}^3. \quad (2.47)$$

NOTA 1. Las componentes  $\Omega^i = \Omega^i \delta_{3i}$  del vector de velocidad angular

$$\Omega = \Omega \hat{Y}^3 = \Omega^i \hat{Y}^i$$

son constantes. Esto implica que *el vector  $\Omega$  tiene componentes constantes en cualquier otro sistema cartesiano  $y^1 y^2 y^3$  fijo a la Tierra, ya que la orientación de tal sistema no cambia respecto al sistema  $Y^i$  y, por lo tanto, la orientación de  $\Omega$  tampoco cambia respecto al sistema  $y^1 y^2 y^3$  conforme transcurre el tiempo.*

Como se aprecia en la Fig. 2.7, el vector de posición  $\mathbf{R}$  tiene la forma

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i = Y^i \hat{\mathbf{Y}}_i, \quad (2.48)$$

Para la velocidad  $\mathbf{V}$  tenemos

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R}$$

donde

$$\mathbf{v} \equiv v^i \hat{\mathbf{Y}}_i \quad \text{con} \quad v^i \equiv \dot{Y}^i \quad (2.49)$$

y

$$\Omega \times \mathbf{R} = \Omega \hat{Y}^3 \times (Y^1 \hat{\mathbf{Y}}_1 + Y^2 \hat{\mathbf{Y}}_2 + Y^3 \hat{\mathbf{Y}}_3) = \Omega (-Y^2 \hat{\mathbf{Y}}_1 + Y^1 \hat{\mathbf{Y}}_2).$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.50)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_Y + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{Y}}_i \frac{\partial}{\partial Y^i} \quad (2.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial Y^i} \quad (2.52)$$

Usando lo anterior se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.53)$$

En el sistema inercial la ecuación de estado es  $p = R\rho T$  y en el sistema  $Y^i$  tiene la forma

$$p_Y(Y, t) = R \rho_Y(Y, t) T_Y(Y, t) \quad (2.54)$$

donde agregamos el subíndice  $Y$  para indicar cantidades en las coordenadas  $Y^i$ .

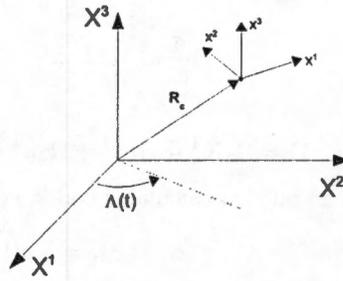


Figura 2.5: Sistema de referencia  $x^1x^2x^3$  fijo a la Tierra.

Los términos de la aceleración  $\mathbf{A}$  ((ec.2.21)) toman la forma

$$\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{Y}}_i \quad \text{con} \quad a^i \equiv \dot{v}^i \quad (2.55)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \Omega \left( -v^2 \hat{\mathbf{Y}}_1 + v^1 \hat{\mathbf{Y}}_2 \right) \quad (2.56)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \Omega^2 \hat{\mathbf{Y}}^3 \times \left( -Y^2 \hat{\mathbf{Y}}_1 + Y^1 \hat{\mathbf{Y}}_2 \right) = -\Omega^2 \left( Y^1 \hat{\mathbf{Y}}_1 + Y^2 \hat{\mathbf{Y}}_2 \right). \quad (2.57)$$

Es inmediato que el potencial

$$\Phi_c = \frac{\Omega^2}{2} \left[ (Y^1)^2 + (Y^2)^2 \right] \quad (2.58)$$

satisface la ecuación (2.40). El mismo potencial se obtiene al sustituir la ecuación (2.46) en la ecuación (2.39).

La ecuación de momentum en forma vectorial está dada por la ecuación (2.36) donde

$$\nabla p = \hat{\mathbf{Y}}^i \frac{\partial}{\partial Y^i} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g = \hat{\mathbf{Y}}^i \frac{\partial \Phi_g}{\partial Y^i} \quad (2.60)$$

Si usamos la notación

$$\begin{aligned} Y^1 &= X & Y^2 &= Y & Y^3 &= Z \\ v^1 &= U & v^2 &= V & v^3 &= W \\ a^1 &= \dot{U} & a^2 &= \dot{V} & a^3 &= \dot{W} \end{aligned}$$

junto con las ecuaciones (2.56)-(2.58), las ecuaciones escalares de momentum quedan como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} - 2\Omega V - \Omega^2 X &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial \Phi_g}{\partial X} + f_X \\ \frac{dV}{dt} + 2\Omega U - \Omega^2 Y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\partial \Phi_g}{\partial Y} + f_Y \\ \frac{dW}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\partial \Phi_g}{\partial Z} + f_Z. \end{aligned}$$

### 2.1.2. Ecuaciones en un sistema $x^1x^2x^3$ fijo a la tierra con origen en un punto $(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$

Consideremos un sistema de referencia  $x^1x^2x^3$  fijo a la Tierra con origen en un punto  $(X_c^1, X_c^2, X_c^3)$  cuyo vector de posición  $\mathbf{R}_c$  no necesariamente coincide con el eje  $x^3$  como se observa en la figura 2.5. La relación entre los vectores base es,

$$\hat{\mathbf{x}}^i(t) = \mathbb{R}_{ij}(t) \hat{\mathbf{X}}^j \quad (2.61)$$

y, sin importar la forma explícita de  $\mathbb{R}_{ij}$ , tenemos (ec.(2.13)),

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^i = \Omega \times \hat{x}^i$$

donde

$$\Omega = \Omega_3 \hat{X}^3 = \Omega_1 \hat{x}^1 + \Omega_2 \hat{x}^2 + \Omega_3 \hat{x}^3$$

Las componentes  $\Omega_i$  en el sistema  $x^i$  pueden calcularse con la ecuación (2.12) o la ecuación (2.24),

$$\Omega^i = \mathbb{R}_{ij} \Omega \delta_{3j} = \mathbb{R}_{3i} \Omega. \quad (2.62)$$

Consideremos la notación

$$\begin{aligned} x^1 &= x & x^2 &= y & x^3 &= z \\ \hat{x}_1 &= \hat{x} & \hat{x}_2 &= \hat{y} & \hat{x}_3 &= \hat{z}. \end{aligned}$$

El vector de posición es

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c = (x^i + x_c^i) \hat{x}_i, \quad (2.63)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x^i \hat{x}_i = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \\ \mathbf{R}_c &= x_c^i \hat{x}_i = x_c \hat{x} + y_c \hat{y} + z_c \hat{z}, \end{aligned}$$

donde las componentes  $x_c^i$  son constantes numéricas independientes del tiempo  $t$  y están dadas por

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} X_c^1 \\ X_c^2 \\ X_c^3 \end{pmatrix}.$$

La velocidad es

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R}$$

donde

$$\mathbf{v} = \dot{x}^i \hat{x}_i \equiv v^i \hat{x}_i = u \hat{x} + v \hat{y} + w \hat{z}$$

donde  $v^i = \dot{x}^i$  e introducimos la notación

$$u \equiv v^1 \quad v \equiv v^2 \quad w \equiv v^3,$$

y para el término  $\Omega \times \mathbf{R}$  podemos usar,

$$\Omega \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x + x_c & y + y_c & z + z_c \end{vmatrix}.$$

Para la aceleración,

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}),$$

tenemos

$$\mathbf{a} = \dot{v}^i \hat{x}_i \equiv a^i \hat{x}_i; \quad a^i \equiv \dot{v}^i \quad (2.64)$$

$$\Omega \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ u & v & w \end{vmatrix} = \hat{x}(\Omega_2 w - \Omega_3 v) + \hat{y}(\Omega_3 u - \Omega_1 w) + \hat{z}(\Omega_1 v - \Omega_2 u) \quad (2.65)$$

En forma análoga se calcula la aceleración centrípeta o podemos usar su forma potencial

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = -\nabla \Phi_c$$

con

$$\nabla = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para obtener  $\Phi_c$  con coordenadas  $x^i$  basta con sustituir en (2.39) la transformación de coordenadas (ec.(2.25))

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^T \begin{pmatrix} x + x_c \\ y + y_c \\ z + z_c \end{pmatrix}.$$

Los operadores  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  conservan su estructura. Si  $\mathbf{B}$  tiene la forma

$$\mathbf{B} = \hat{x}_i B^i(x, t) \quad (2.66)$$

entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i(x, t) \quad (2.67)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{x}^i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} B^k(x, t) \quad (2.68)$$

La ecuación de continuidad no tiene cambio alguno,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.69)$$

ó

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

donde

$$\rho = \rho(x, t)$$

y

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.70)$$

La ecuación de estado tampoco cambia su forma,

$$p(x, t) = \mathcal{R} \rho(x, t) T(x, t).$$

Para simplificar las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación de momentum usamos la ecuación (2.40), la cual da

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2(\Omega_2 w - \Omega_3 u) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + 2(\Omega_3 u - \Omega_1 v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} + 2(\Omega_1 v - \Omega_2 w) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

donde

$$\Phi \equiv \Phi_g + \Phi_c.$$

**Caso particular: Tierra esférica.** Supongamos que la Tierra es una esfera con masa  $M_e$  distribuida uniformemente con radio  $R_e$  y el sistema  $xyz$  tiene el plano  $xy$  tangente a dicha esfera con el eje  $z$  ortogonal y exterior a la esfera (ver Fig. 2.6).

a) La relación entre vectores base  $\hat{x}^i$  y  $\hat{X}^j$  es

$$\hat{x}^i = \mathbb{R}_{ij}[\Lambda(t), \phi_c] \hat{X}^j \quad (2.71)$$

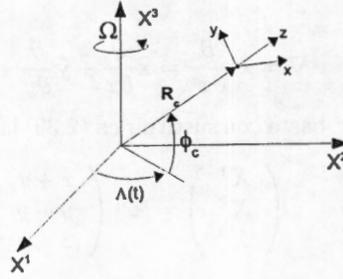


Figura 2.6: Sistema de referencia  $xyz$  con plano  $xy$  tangente a una Tierra esférica.

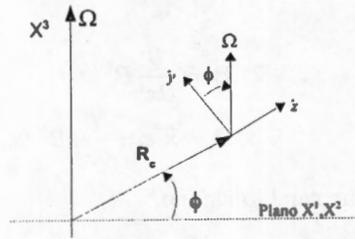


Figura 2.7: Descomposición de  $\Omega$  en el sistema el plano  $yz$ .

donde

$$\mathbb{R}_{ij} [\Lambda(t), \phi_c] = \begin{pmatrix} -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ -\sin \phi_c \cos \Lambda & -\sin \phi_c \sin \Lambda & \cos \phi_c \\ \cos \phi_c \cos \Lambda & \cos \phi_c \sin \Lambda & \sin \phi_c \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

De acuerdo con la figura 2.7 tenemos

$$\Omega = \Omega (\hat{y} \cos \phi_c + \hat{z} \sin \phi_c) \quad (2.73)$$

lo que puede comprobarse con el cálculo de  $\Omega \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T$ .

b) Para el vector de posición  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c$  tenemos

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad \mathbf{R}_c = R_c\hat{z},$$

por tanto

$$\mathbf{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + (z + R_c)\hat{z}.$$

Para la velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R}$$

tenemos

$$\mathbf{v} = u\hat{x} + v\hat{y} + w\hat{z}$$

$$\Omega \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \Omega \cos \phi_c & \Omega \sin \phi_c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{x} \Omega (z \cos \phi_c - y \sin \phi_c) + \hat{y} \Omega x \sin \phi_c - \hat{z} \Omega x \cos \phi_c.$$

Para la aceleración

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{a} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R})$$

tenemos

$$\mathbf{a} = \dot{u}\hat{x} + \dot{v}\hat{y} + \dot{w}\hat{z} \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \hat{x}\Omega(w \cos \phi_c - v \sin \phi_c) + \hat{y}\Omega u \sin \phi_c - \hat{z}\Omega u \cos \phi_c \quad (2.75)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\Omega^2 x \hat{x} + \Omega^2 \sin \phi_c [(z + R_e) \cos \phi_c - y \sin \phi_c] \hat{y} - \Omega^2 \cos \phi_c [(z + R_e) \cos \phi_c - y \sin \phi_c] \hat{z}.$$

El potencial gravitacional está dado por

$$\Phi_g = g \frac{R_e^2}{R},$$

donde

$$R^2 = \|\mathbf{R}\|^2 = \|x\hat{x} + y\hat{y} + (z + R_e)\hat{z}\|^2 = x^2 + y^2 + (z + R_e)^2$$

lo que da

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi_g = -g \frac{R_e^2}{R} \frac{\partial R}{\partial x^i} \hat{x}^i = -g \frac{R_e^2}{R^2} [x\hat{x} + y\hat{y} + (z + R_e)\hat{z}]. \quad (2.76)$$

c) Finalmente las ecuaciones escalares de momentum son

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\Omega(w \cos \phi_c - v \sin \phi_c) - \Omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \frac{R_e^2}{R} x \\ \frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \phi_c + \Omega^2 \sin \phi_c [(z + R_e) \cos \phi_c - y \sin \phi_c] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{R_e^2}{R} y \\ \frac{dw}{dt} - 2\Omega u \cos \phi_c - \Omega^2 \cos \phi_c [(z + R_e) \cos \phi_c - y \sin \phi_c] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{R_e^2}{R} (z + R_e). \end{aligned}$$

## 2.2. Modelo elipsoidal terrestre

Los datos de elevación del terreno están definidos con respecto a un elipsoide como superficie de referencia [38]. Consideremos, por ejemplo, el elipsoide de referencia WGS84 (abreviatura de "World Geodetic System 1984") con semiejes

$$a = 6378,137 \text{ km} \quad b = 6356,753 \text{ km}$$

,donde consideramos que el radio ecuatorial del WGS84 coincide con el de la esfera  $S_a$ . Aunque la diferencia relativa entre  $a$  y  $b$  es muy pequeña,

$$\frac{a-b}{a} = 3 \times 10^{-3},$$

la diferencia absoluta

$$a - b = 21,396 \text{ km}$$

tiene el espesor promedio de la tropósfera.

Algunos autores como Belinskii [43] ó Holton [44] han señalado que la aceleración centrípeta se *puede* incluir en la definición de un modelo elipsoidal terrestre para que tal superficie coincida con una superficie de presión constante, sin dar detalles del cálculo correcto del modelo elipsoidal y su potencial gravitacional. Después de una discusión sobre el asunto Belinskii y Holton usan las ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas, que omiten los términos con  $\Omega^2$ , sin estimar su región de validez y como si fueran si fueran adecuadas a escala planetaria.

La verdadera superficie terrestre, conocida como *geoide*, se define a partir de una superficie de referencia, la cual a su vez se define a partir de la fuerza que actúa sobre un objeto localizado sobre dicha superficie de referencia. De acuerdo con la 2a. ley de Newton la aceleración de una partícula con respecto al sistema de referencia primario  $Y^1, Y^2, Y^3$  fijo a la tierra es,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas distintas a la aceleración gravitacional  $\mathbf{g}$ , las fuerzas inerciales de Coriolis y centrípeta. La aceleración  $\mathbf{g}$  está dada por,

$$\mathbf{g} = \nabla G\mathcal{V}$$

donde  $\mathcal{V}$  es el potencial gravitacional,

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}) = \int_{\Sigma} \frac{dM(\mathbf{R}')}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|}$$

y  $\Sigma$  es la región ocupada por el modelo matemático terrestre. La aceleración centrípeta puede escribirse como el gradiente de una función,

$$-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \nabla \frac{1}{2} \Omega^2 (X^2 + Y^2),$$

en esta forma podemos reescribir,

$$\mathbf{g} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = \nabla \mathcal{W}$$

donde definimos el potencial gravitatorio

$$\mathcal{W} = G\mathcal{V} + \frac{1}{2} \Omega^2 (X^2 + Y^2).$$

En la definición formal del modelo matemático terrestre se considera que el eje  $Z$  del sistema fijo a la Tierra coincide con el eje de rotación terrestre [44], [38]:

**Definición.** El modelo matemático terrestre o *superficie de referencia* es un elipsoide  $\mathcal{E}$  con las propiedades siguientes: (i) cuya velocidad angular coincide con la de la tierra  $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{Z}}$ , (ii) su ecuación cartesiana tiene la forma

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{c^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1,$$

(iii) contiene una masa  $M$  que genera un potencial gravitatorio  $\mathcal{W}$ , y (iv) los parámetros  $a, b, c$  son tales que la función potencial  $\mathcal{W}$  es constante en  $\mathcal{E}$ .

**Nota.** Durante el siglo XIX se comenzaron a proponer modelos elipsoidales de la tierra y a la fecha hay numerosos elipsoides de referencia  $\mathcal{E}$  definidos para aproximar la verdadera superficie terrestre (*geoide*) en alguna región de interés. Sin embargo, los satélites artificiales han proporcionado datos suficientes para definir un modelo elipsoidal global con parámetros  $a, b, GM$  y  $\Omega$  más precisos. Por ejemplo, los parámetros del WGS84 (abreviatura de "World Geodetic System 1984"),

$$a = 6378137 \text{ m} \quad b = 6356752,31424 \text{ m},$$

y los del Geodetic Reference System 80 (GRS80),

$$a = 6378137 \text{ m} \quad b = 6356752,31414 \text{ m},$$

son los mismos para cualquier aplicación en modelación atmosférica [38]. Por tal razón, al hablar de *el* elipsoide de referencia  $\mathcal{E}$  nos referiremos al mejor elipsoide definido con la información disponible en el momento de leer este reporte.

De acuerdo con el desarrollo multipolar

$$\|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\|^{-1} = r^{-1} (1 + \zeta^2 - 2\zeta\chi)^{-1/2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\chi) \zeta^n,$$

donde  $P_n$  son los polinomios de Legendre y

$$\zeta = \frac{r'}{r} \quad \chi = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}'}{rr'},$$

el potencial  $\mathcal{V}$  tiene la forma

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}) = r^{-1}M + O(r^{-2})$$

con la cual se obtiene el comportamiento asintótico

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\mathcal{V}(\mathbf{R}) = M. \quad (2.77)$$

Además,  $\mathcal{V}$  es una función armónica en la región exterior al elipsoide  $\mathcal{E}$ , es decir, satisface la ec. de Laplace

$$\nabla^2 \mathcal{V} = 0 \quad \text{para } (X, Y, Z) \text{ fuera de } \mathcal{E}. \quad (2.78)$$

Podemos resumir la definición del elipsoide de referencia  $\mathcal{E}$  como la superficie (i) en la cual  $\mathcal{W}$  es una constante  $[\mathcal{W}]_{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{W} = G\mathcal{V} + \frac{1}{2}\Omega^2(X^2 + Y^2) = [\mathcal{W}]_{\mathcal{E}} \quad \text{para } (X, Y, Z) \text{ en } \mathcal{E}, \quad (2.79)$$

(ii)  $\mathcal{V}$  satisface (2.77) y (2.78). Existe una expresión de  $\mathcal{V}$  que satisface estas condiciones para un conjunto dado de parámetros  $\{a, b, c, \Omega, M\}$  en términos de integrales elípticas. Por otro lado, la información del campo gravitacional terrestre sugiere que el *geoid*e puede aproximarse por un elipsoide de revolución  $\mathcal{E}$  con  $a = c$ .

En lo que resta del trabajo consideramos, por simplicidad, que la Tierra es una esfera aunque la mayor parte del planteamiento es válido para un modelo elipsoidal.

### 2.3. Ecuaciones de momentum aproximadas y su región de validez

La literatura estándar de meteorología de mesoescala [1-7] considera un modelo esférico terrestre y el principal sistema coordenado es el sistema  $xyz$  de la figura (2.5). En este sistema coordenado las ecuaciones de momentum son

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - ga^2 r^{-3} (x^i + \delta_{i3}a) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u^k + F^i. \quad (2.80)$$

Sin embargo, la literatura [1-16] usa la aproximación

$$\mathbf{g} = -g\hat{x}_3$$

las ecuaciones de momentum resultantes son

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\Omega(w \cos \phi_c - v \sin \phi_c) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \phi_c &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} - 2\Omega u \cos \phi_c &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Sea  $\mathcal{D}(L) = 2L \times 2L$  donde define una región rectangular de el plano tangente  $x^1 x^2$  con centro en el origen  $x^i = 0$  y  $|x^1|, |x^2| \leq L$ . Esta sección toma como referencia [18] donde la región de validez de las ecuaciones (2.80) y (2.81) son estimadas. Una primera aproximación tiene por magnitud los términos de (2.81). La Tabla I muestra la magnitud del término  $u^1$ -de la ecuación (2.80) como reporta Atkinson [5] donde la última columna se le agrega el término  $ga^2 r^{-3} x^1$  omitida en (2.80), para un flujo con escala horizontal  $L$  (km). Observemos que el término  $ga^2 r^{-3} x^1$  es de orden de magnitud mayor que el término  $u^1$  de la ecuación (2.80) para  $L = 10^2, 10^3$  km. Para flujos con  $L = 10$  km la magnitud de  $ga^2 r^{-3} x^1$  es igual al término de la ecuación de coriolis  $10^4$  más grande que los términos disipativos. Estos resultados sugieren que las componentes horizontales de  $\mathbf{g}$  no pueden ser omitidas en (2.81) para la región  $\mathcal{D}(L)$  de  $200 \times 200$  km<sup>2</sup> y está considerada para regiones  $\mathcal{D}(L)$  entre  $\mathcal{D}(L) 10 \times 10$  y  $200 \times 200$  km<sup>2</sup>.

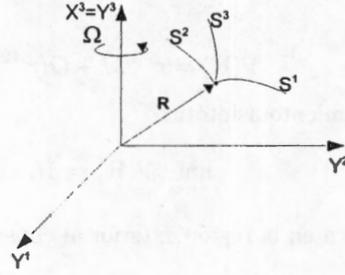


Figura 2.8: Sistema curvilíneo  $s^1 s^2 s^3$ .

TABLA I. Las magnitudes están en  $\text{ms}^{-2}$  en términos  $u^1$ -para las ecuaciones de flujo horizontales con escala  $L$  (m),  $U = 10 \text{ ms}^{-1}$ ,  $H = 10^4 \text{ m}$ ,  $f = 2\Omega \sin \phi$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  [5], y  $x^1 = L/2$ ,  $x^2 = x^3 = 0$ ,  $r = \sqrt{(x^1)^2 + a^2}$ ,  $a = 6378 \text{ km}$ .

	$\frac{du}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^1}$	$+fv$	$-fw$	$+\frac{\partial}{\partial x^3} K_z \frac{\partial u}{\partial x^3}$	$+\frac{\partial}{\partial x^1} K_H \frac{\partial u}{\partial x^1}$	$-\frac{ga^2 x^1}{r^3}$
$L$	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{\Delta P}{\rho L}$	$fU$	$\frac{fHU}{L}$	$\frac{KU}{H^2}$	$\frac{KU}{L^2}$	
$10^6$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$	$10^0$
$10^5$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-1}$
$10^4$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$

## 2.4. Ecuaciones en coordenadas curvilíneas ortogonales $s^i$ definidas en el sistema $Y^1 Y^2 Y^3$

Consideremos que las coordenadas  $Y^i$  dependen de otras coordenadas  $s^1 s^2 s^3$

$$Y^i = Y^i(s^1, s^2, s^3) \equiv Y^i(s) \quad (2.82)$$

donde *no* aparece explícitamente el tiempo  $t$  (ver Fig. 2.8) de manera que

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(s, t) = Y^i(s) \hat{\mathbf{Y}}_i(t). \quad (2.83)$$

La base covariante  $\tau_i$  se define por

$$\tau_i = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s^i} \right)_t = \frac{\partial Y^j}{\partial s^i} \hat{\mathbf{Y}}_j \quad (2.84)$$

y los factores métricos  $h_i$  por

$$h_i \equiv \|\tau_i\|.$$

Consideremos que el sistema curvilíneo  $s^i$  es **ortogonal**, esto es, los vectores unitarios

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \frac{\tau_i}{h_i} \quad (\text{sin sumar en } i) \quad (2.85)$$

forman una **base ortonormal**,

$$\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \delta_{ij}.$$

Además supondremos que el orden de  $s^1, s^2, s^3$  es tal que los vectores  $\hat{\mathbf{s}}^i$  obedecen la regla de la mano derecha,

$$\hat{\mathbf{s}}_i \times \hat{\mathbf{s}}_j = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{s}}_k, \quad (2.86)$$

de manera que la base  $\hat{\mathbf{s}}_i$  es una rotación rígida de  $\hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2, \hat{\mathbf{Y}}_3$ . Esto implica que existe una *matriz de rotación*  $\mathbf{R}$  tal que

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \mathbf{R}_{ij} \hat{\mathbf{Y}}^j, \quad (2.87)$$

satisface  $\det(\mathbb{R}) = 1$  y

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I} \quad \text{ó} \quad \mathbb{R}_{ij}\mathbb{R}_{kj} = \delta_{ik} \quad (2.88)$$

de donde se obtiene

$$\hat{Y}^j = \mathbb{R}_{ij}\hat{s}^i. \quad (2.89)$$

La relación

$$\tau_i = h_i\hat{s}_i = \frac{\partial Y^j}{\partial s^i} \hat{Y}_j \quad (2.90)$$

nos da

$$\hat{s}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial Y^j}{\partial s^i} \hat{Y}_j \quad (\text{sin sumar en } i). \quad (2.91)$$

Comparando con (2.90) obtenemos las componentes de  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}_{ij} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial Y^j}{\partial s^i} \quad (\text{sin sumar en } i). \quad (2.92)$$

La matriz Jacobiana  $\mathbb{J}$  de la transformación es

$$\mathbb{J}_{ij} = \frac{\partial Y^j}{\partial s^i}, \quad (2.93)$$

y el Jacobiano correspondiente es  $J = \det(\mathbb{J}) = \tau_1 \cdot (\tau_2 \times \tau_3) = h_1\hat{s}_1 \cdot (h_2\hat{s}_2 \times h_3\hat{s}_3) = h_1h_2h_3$ ; es decir,

$$J = h_1h_2h_3. \quad (2.94)$$

Ahora consideremos la transformación de operaciones vectoriales para obtener las ecuaciones de movimiento en las coordenadas  $s^i$ .

a) Para la transformación de las componentes de un vector consideremos

$$\mathbf{b} = b^j(Y) \hat{Y}_j = b^i(s) \hat{s}_i. \quad (2.95)$$

Sustituyendo la ecuación (2.92) en la ecuación (2.95) obtenemos

$$b^i(s) = \mathbb{R}_{ij} b^j(Y), \quad (2.96)$$

y, usando las ecuaciones (2.91) y (2.87),

$$b_j(Y) = \mathbb{R}_{ij} b^i(s). \quad (2.97)$$

En particular, para el vector de posición

$$\mathbf{R} = [\mathbb{R}]_s^i \hat{s}_i = Y^j(s) \hat{Y}_j(t)$$

tenemos

$$[\mathbb{R}]_s^i = \mathbb{R}_{ij} Y^j(s).$$

Para el producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

consideremos

$$\mathbf{a} = a^i \hat{s}_i \quad \mathbf{b} = b^j \hat{s}_j \quad \mathbf{c} = c^l \hat{s}_l,$$

entonces

$$a^i b^j \hat{s}_i \times \hat{s}_j = c^l \hat{s}_l,$$

multiplicando por  $\hat{s}_k$  y usando (2.89) se obtiene

$$c^l = \epsilon_{ijk} a^i b^j \quad (2.98)$$

lo que significa que podemos usar la fórmula del determinante para calcular

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_2 & \hat{\mathbf{s}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.99)$$

b) Para obtener la expresión de la velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$$

en el sistema  $s^j$  comenzamos por la transformación de la velocidad  $\mathbf{v}$  relativa a la Tierra:

$$\mathbf{v} = Y^i \hat{\mathbf{Y}}^i = \hat{\mathbf{Y}}_i \frac{dY^i}{dt}(s) = \hat{\mathbf{Y}}_i \frac{\partial Y^i}{\partial s^j} \dot{s}^j$$

donde aparece la definición (2.87), por tanto

$$\mathbf{v} = \tau_j \dot{s}^j. \quad (2.100)$$

Sustituyendo la ecuación (2.93) en la ecuación (2.100) obtenemos

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{s}}_j v^j \quad \text{con} \quad v^j \equiv h_j \dot{s}^j \quad (\text{sin sumar en } j) \quad (2.101)$$

siendo  $v^j$  las componentes físicas de  $\mathbf{v}$  en la base  $\hat{\mathbf{s}}_j$  y

$$\dot{s}^j = \frac{v^j}{h_j} \quad (\text{sin sumar en } j) \quad (2.102)$$

son las **velocidades generalizadas**. Para el término  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  usamos la ecuación (2.102)

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = \Omega^i \hat{\mathbf{s}}_i \times [\mathbf{R}]_s^j \hat{\mathbf{s}}_j = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_2 & \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ [\mathbf{R}]_s^1 & [\mathbf{R}]_s^2 & [\mathbf{R}]_s^3 \end{vmatrix} \quad (2.103)$$

donde las componentes  $\Omega^i$  están dadas por [ecs. (2.99), (2.48)]

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}_s = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_Y$$

c) Para la aceleración tenemos

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}).$$

(i) Para transformar la aceleración relativa a la Tierra  $\mathbf{a} = \dot{v}^j(Y) \hat{\mathbf{Y}}_j$  [2.56] usamos la relación (2.100) entre componentes físicas de  $\mathbf{v}$  en la bases  $\hat{\mathbf{Y}}_j$  y  $\hat{\mathbf{s}}_i$  dadas por las ecuaciones [(2.50), y (2.104)],

$$v^j(Y) = \mathbf{R}_{ij} v^i(s).$$

Derivando

$$\dot{v}^j(Y) = \mathbf{R}_{ij} \dot{v}^i(s) + \dot{\mathbf{R}}_{ij} v^i(s)$$

y usando (2.92) se obtiene

$$\mathbf{a} = \left( \mathbf{R}_{ij} \dot{v}^i + \dot{\mathbf{R}}_{ij} v^i \right) \mathbf{R}_{kj} \hat{\mathbf{s}}_k = \left( \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{kj} \dot{v}^i + \mathbf{R}_{kj} \dot{\mathbf{R}}_{ij} v^i \right) \hat{\mathbf{s}}_k = \left( \dot{v}^k + \mathbf{R}_{kj} \dot{\mathbf{R}}_{ij} v^i \right) \hat{\mathbf{s}}_k$$

donde identificamos a las componentes físicas

$$a^k = \dot{v}^k + R_{kj} \dot{R}_{ij} v^i \quad (2.104)$$

de  $a$  en la base  $\hat{s}_k$ , expresión que tiene la forma matricial

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}^1 \\ \dot{v}^2 \\ \dot{v}^3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \mathbb{R}^T \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

(ii) El cálculo de la matriz *antisimétrica*  $\mathbb{R} \mathbb{R}^T$  se hace con la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \mathbb{R}(s) = \dot{s}^n \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial s^n}$$

donde  $\dot{s}^n$  se expresa en términos de las componentes físicas de  $v$ , en esta forma

$$\dot{\mathbb{R}} \mathbb{R}^T = \frac{v^n}{h_n} \mathbb{R} \frac{\partial \mathbb{R}^T}{\partial s^n} \quad (2.106)$$

donde sólo hay que calcular explícitamente las matrices *antisimétricas*

$$\mathbb{R} \frac{\partial \mathbb{R}^T}{\partial s^n}.$$

(iii) El término  $\Omega \times v$  se calcula en la forma usual

$$\Omega \times v = \Omega^i \hat{s}_i \times v^j \hat{s}_j = \begin{vmatrix} \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \hat{s}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}.$$

mientras que  $\Omega \times (\Omega \times R)$  puede calcularse en forma análoga o usando el potencial  $\Phi_c$ .

d) Para transformar el operador  $\nabla$  introducimos la base contravariante

$$\eta^i \equiv \nabla s_i = \hat{Y}^j \frac{\partial s^i}{\partial Y^j}. \quad (2.107)$$

El par de bases  $\tau_k, \eta^i$  es recíproco, es decir, satisface

$$\eta^i \cdot \tau_k = \delta_k^i. \quad (2.108)$$

En efecto, tenemos

$$\eta^i \cdot \tau_k = \hat{Y}^j \frac{\partial s^i}{\partial Y^j} \cdot \hat{Y}^l \frac{\partial Y^l}{\partial s^k} = \delta_l^j \frac{\partial s^i}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^l}{\partial s^k} = \frac{\partial s^i}{\partial s^k} = \delta_k^i.$$

Usando la reciprocidad es fácil obtener las relaciones

$$\eta^i = \frac{1}{h_i} \hat{s}_i \quad (\text{sin sumar en } i) \quad (2.109)$$

$$\hat{s}_i = h_i \eta^i = h_i \nabla s^i \quad (\text{sin sumar en } i). \quad (2.110)$$

Así, la transformación de  $\nabla$  es inmediata

$$\nabla = \hat{Y}^j \frac{\partial}{\partial Y^j} = \hat{Y}^j \frac{\partial s^i}{\partial Y^j} \frac{\partial}{\partial s^i}$$

donde aparece la definición (2.107), por lo tanto

$$\nabla = \eta^i \frac{\partial}{\partial s^i} \quad (2.111)$$

y usando (2.110) obtenemos

$$\nabla = \widehat{s}^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} . \quad (2.112)$$

e) Para la transformación del operador  $\nabla \cdot$  usamos la identidad

$$\widehat{s}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \widehat{s}_j \times \widehat{s}_k , \quad (2.113)$$

la cual es fácil de demostrar, junto con

$$\nabla \cdot f \mathbf{b} = \nabla f \cdot \mathbf{b} + f \nabla \cdot \mathbf{b} \quad (2.114)$$

$$\nabla \cdot (\eta^j \times \eta^k) = \nabla \cdot (\nabla s^j \times \nabla s^k) = 0 \quad (2.115)$$

la última identidad se obtiene de  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] - \mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathbf{b}]$  y  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ . Si tenemos

$$\mathbf{b} = b^i \widehat{s}_i$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot (b^i \widehat{s}_j \times \widehat{s}_k) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot (h_j h_k b^i \eta^j \times \eta^k) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [(\nabla h_j h_k b^i) \cdot (\eta^j \times \eta^k) + 0] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \nabla (h_j h_k b^i) \cdot \left( \frac{\widehat{s}^j}{h_j} \times \frac{\widehat{s}^k}{h_k} \right) \\ &= \frac{1}{h_j h_k} \nabla (h_j h_k b^i) \cdot \widehat{s}^i \text{ (sin sumar en } j, k) = \frac{1}{h_j h_k h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} (h_j h_k b^i) \text{ (sin sumar en } j, k). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla \cdot (b^i \widehat{s}_i) = \frac{1}{h_j h_k h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} (h_j h_k b^i) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s^1} h_2 h_3 b^1 + \frac{\partial}{\partial s^2} h_1 h_3 b^2 + \frac{\partial}{\partial s^3} h_1 h_2 b^3 \right] . \quad (2.116)$$

La expresión anterior toma una forma compacta si usamos las componentes  $b_\eta^i$  de  $\mathbf{b}$  en la base  $\tau_i$  conocidas **componentes contravariantes**,

$$\mathbf{b} = b_\eta^i \tau_i . \quad (2.117)$$

De acuerdo con

$$\mathbf{b} = b^i \widehat{s}_i = b_\eta^i \tau_i = b_\eta^i h_i \widehat{s}_i$$

la relación entre componentes físicas  $b^i$  y contravariantes  $b_\eta^i$  es

$$b^i = h_i b_\eta^i \quad (2.118)$$

$$b_\eta^i = \frac{b^i}{h_i} . \quad (2.119)$$

Usando (2.118) en (2.116) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s^1} h_1 h_2 h_3 b_\eta^1 + \frac{\partial}{\partial s^2} h_1 h_2 h_3 b_\eta^2 + \frac{\partial}{\partial s^3} h_1 h_2 h_3 b_\eta^3 \right] = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial s^i} J b_\eta^i . \quad (2.120)$$

Comparando (2.103) con (2.120) concluimos que *las velocidades generalizadas  $\dot{s}^j$  son las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$* , lo cual conduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial s^i} J \dot{s}^i . \quad (2.121)$$

f) Para el operador  $\frac{d}{dt}$  sólo usamos la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \dot{s}^j \frac{\partial}{\partial s^j} . \quad (2.122)$$

Usando (2.103), (2.104) y (2.116) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial s^i} = \frac{v^i}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} = v^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} = \mathbf{v} \cdot \nabla$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \frac{v^i}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_s + \mathbf{v} \cdot \nabla . \quad (2.123)$$

g) Para la transformación de  $\nabla \times$  tenemos

$$\nabla \times b^i \hat{\mathbf{s}}_i = \nabla \times b^i (h_i \eta^i) = \nabla \times [ (b^i h_i) \nabla s^i ]$$

y

$$\nabla \times f \mathbf{b} = \hat{\mathbf{Y}}_m \epsilon_{mnl} \frac{\partial}{\partial Y^n} f b^l = \hat{\mathbf{Y}}_m \epsilon_{mnl} \left[ \frac{\partial f}{\partial Y^n} b^l + f \frac{\partial b^l}{\partial Y^n} \right] = \nabla f \times \mathbf{b} + f \nabla \times \mathbf{b} ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla \times b^i \hat{\mathbf{s}}_i &= \nabla \times ( b^i h_i \nabla s^i ) \\ &= (\nabla b^i h_i) \times \nabla s^i + b^i h_i \underbrace{\nabla \times \nabla s^i}_0 \\ &= (\nabla b^i h_i) \times \frac{\hat{\mathbf{s}}_i}{h_i} \\ &= \left( \left[ \hat{\mathbf{s}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial s^j} \right] b^i h_i \right) \times \frac{\hat{\mathbf{s}}_i}{h_i} \\ &= \frac{1}{h_j h_i} \left( \frac{\partial b^i h_i}{\partial s^j} \right) \hat{\mathbf{s}}_j \times \hat{\mathbf{s}}_i \\ &= \frac{1}{h_j h_i} \left( \frac{\partial b^i h_i}{\partial s^j} \right) \epsilon_{jik} \hat{\mathbf{s}}_k \\ &= \hat{\mathbf{s}}_k \epsilon_{kji} \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial b^i h_i}{\partial s^j} . \end{aligned}$$

Reordenando términos e introduciendo el factor  $\frac{h_k}{h_k}$  obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{b} = (h_k \hat{\mathbf{s}}_k) \epsilon_{kji} \frac{1}{h_k h_i h_j} \frac{\partial}{\partial s^j} h_i b^i . \quad (2.124)$$

Usando (2.113), (2.110, 2.124) la última expresión toma la forma

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{s}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{s}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial s^1} & \frac{\partial}{\partial s^2} & \frac{\partial}{\partial s^3} \\ h_1 b^1 & h_1 b^1 & h_1 b^1 \end{vmatrix} . \quad (2.125)$$

h) Para la ecuación de continuidad,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

usamos (2.120) y (2.121) ó (2.122). Con tales expresiones obtenemos la forma flujo de la ecuación de continuidad,

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0.$$

Para la ecuación de momentum ,

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f},$$

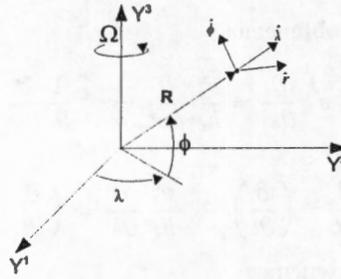


Figura 2.9: Coordenadas esféricas  $\lambda\phi r$ .

tenemos  $\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{s}}_i$  con  $a^i$  dada por las ecuaciones (2.108) y (2.109), la aceleración de Coriolis está dada por (2.102),

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_2 & \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}$$

y la aceleración centrípeta  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$  se puede calcular como la de Coriolis o usando

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\nabla \Phi_c$$

con  $\Phi_c$  dada por la ecuación(2.58). Para  $\nabla p$  y  $\mathbf{g}$  tenemos

$$\nabla p = \hat{\mathbf{s}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial p}{\partial s^i}$$

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g = \hat{\mathbf{s}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi_g}{\partial s^i}.$$

Veamos un par de ejemplos de las expresiones obtenidas en está sección.

#### 2.4.1. Ecuaciones en coordenadas esféricas $\lambda, \phi, r$

En el sistema de referencia primario  $Y^1 Y^2 Y^3$  definimos las coordenadas esféricas  $\lambda, \phi, r$  como se aprecia en la Fig. 2.9. Las ecuaciones de transformación son

$$Y^1 = r \cos \phi \cos \lambda \quad Y^2 = r \cos \phi \sin \lambda \quad Y^3 = r \sin \phi, \quad (2.126)$$

y el vector de posición es

$$\mathbf{R} = Y^i \hat{\mathbf{Y}}_i = r \left[ \cos \phi \left( \cos \lambda \hat{\mathbf{Y}}_1 + \sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}_2 \right) + \sin \phi \hat{\mathbf{Y}}_3 \right]. \quad (2.127)$$

Con la notación siguiente

$$s^1 \equiv \lambda \quad s^2 \equiv \phi \quad s^3 \equiv r$$

la base covariante  $\tau_i$  (2.87) está dada por

$$\tau_\lambda = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = h_\lambda \hat{\lambda}, \quad \tau_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = h_\phi \hat{\phi}, \quad \tau_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = h_r \hat{r},$$

donde

$$h_\lambda = r \cos \phi \quad h_\phi = r, \quad h_r = 1.$$

De la ecuación(2.126) obtenemos la base ortonormal  $\hat{\mathbf{s}}^i$ ,

$$\hat{\mathbf{s}}^1 \equiv \hat{\lambda} \quad \hat{\mathbf{s}}^2 \equiv \hat{\phi} \quad \hat{\mathbf{s}}^3 \equiv \hat{r};$$

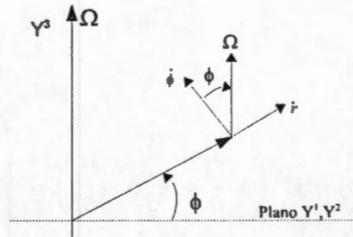


Figura 2.10: Descomposición de  $\Omega$ .

a saber,

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \\ \hat{r} \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\lambda, \phi) \begin{pmatrix} \hat{Y}^1 \\ \hat{Y}^2 \\ \hat{Y}^3 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

donde

$$\mathbb{R}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (2.129)$$

con lo cual el vector de posición (2.128) toma la forma

$$\mathbf{R} = r \hat{r}. \quad (2.130)$$

Para la velocidad tenemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R}$$

donde la velocidad relativa a la Tierra

$$\mathbf{v} = u_s \hat{\lambda} + v_s \hat{\phi} + w_s \hat{r} \quad (2.131)$$

tiene componentes físicas

$$u_s = \dot{\lambda} h_\lambda = \dot{\lambda} r \cos \phi \quad v_s = \dot{\phi} h_\phi = \dot{\phi} r \quad w_s = \dot{r} \quad (2.132)$$

y las componentes contravariantes están dadas por

$$\dot{\lambda} = \frac{u_s}{r \cos \phi} \quad \dot{\phi} = \frac{v_s}{r} \quad \dot{r} = w_s. \quad (2.133)$$

Para la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

tenemos [ecs. (2.126), (2.127)]

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_s}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_s}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w_s \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.134)$$

y de la ecuación [2.120], obtenemos,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (u_s \hat{\lambda} + v_s \hat{\phi} + w_s \hat{r}) = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} r u_s + \frac{\partial}{\partial \phi} r \cos \phi v_s + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \cos \phi w_s \right). \quad (2.135)$$

De acuerdo con la figura 2.10 la velocidad angular terrestre es

$$\Omega = \Omega (\hat{\phi} \cos \phi + \hat{r} \sin \phi). \quad (2.136)$$

Para la aceleración relativa a la Tierra

$$\mathbf{a} = a_\lambda \hat{\lambda} + a_\phi \hat{\phi} + a_r \hat{r} \quad (2.137)$$

usando (2.107) - (2.109). Calculando

$$\mathbb{R}\dot{\mathbb{R}}^T = \mathbb{R} \frac{d}{dt} \mathbb{R}^T(\lambda, \phi) = \mathbb{R} \left( \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{R}^T}{\partial \lambda} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathbb{R}^T}{\partial \phi} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u \tan \phi}{r} & \frac{u}{r} \\ \frac{u \tan \phi}{r} & 0 & \frac{v}{r} \\ -\frac{u}{r} & -\frac{v}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_\lambda \\ a_\phi \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{v}_s \\ \dot{w}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_s \tan \phi}{r} & \frac{u_s}{r} \\ \frac{u_s \tan \phi}{r} & 0 & \frac{v_s}{r} \\ -\frac{u_s}{r} & -\frac{v_s}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

o en forma escalar

$$\begin{aligned} a_\lambda &= \dot{u}_s - u_s v_s \frac{\tan \phi}{r} + \frac{u_s w_s}{r} \\ a_\phi &= \dot{v}_s + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{u_s w_s}{r} \\ a_r &= \dot{w}_s - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} \end{aligned} \quad (2.139)$$

Para la aceleración de Coriolis tenemos

$$\Omega \times \mathbf{v} = \Omega (\hat{\phi} \cos \phi + \hat{r} \sin \phi) \times (u_s \hat{\lambda} + v_s \hat{\phi} + w_s \hat{r}) = \Omega (-v_s \sin \phi + w_s \cos \phi) \hat{\lambda} + \Omega u_s \sin \phi \hat{\phi} - \Omega u_s \cos \phi \hat{r} \quad (2.140)$$

El potencial  $\Phi_c$  asociado a la aceleración centrípeta  $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R})$  se obtiene sustituyendo (2.130) en (2.59),

$$\Phi_c = \frac{\Omega^2}{2} r^2 \cos^2 \phi. \quad (2.141)$$

Usando (2.116)

$$\nabla = \hat{\lambda} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.142)$$

obtenemos

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = -\nabla \Phi_c = -\frac{\Omega^2}{2} \left[ \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] r^2 \cos^2 \phi = \Omega^2 r \cos \phi (\hat{\phi} \sin \phi - \hat{r} \cos \phi). \quad (2.143)$$

Finalmente, para la ecuación de momentum (2.36), usamos lo anterior y

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi_g = \left( \frac{\hat{\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi_g. \quad (2.144)$$

Esto nos da las ecuaciones escalares de momentum

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \Phi_g}{\partial \lambda} \\ \frac{dv_s}{dt} + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r_s \cos \phi \sin \phi &= -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_g}{\partial \phi} \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_g}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Caso particular: Tierra esférica. En este caso tenemos

$$\Phi_g(\mathbf{R}) = g \frac{R_c^2}{r}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{R}) = \nabla \Phi_g = -g \frac{R_c^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.146)$$

y las ecuaciones escalares de momentum son

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \Phi_g}{\partial \lambda} \\ \frac{dv_s}{dt} + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r \cos \phi \sin \phi &= -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + 0 \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \frac{R_c^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Detalles de cálculos de  $\mathbf{R}$  y  $\dot{\mathbf{R}}^t$ . Derivando

$$\mathbf{R}(\lambda, \phi, r) = r \left[ \cos \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{Y}}_1 + \cos \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}_2 + \sin \phi \hat{\mathbf{Y}}_3 \right]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = r \cos \phi \left[ -\sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}_1 + \cos \lambda \hat{\mathbf{Y}}_2 \right] \equiv h_\lambda \hat{\lambda} \\ \phi &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = r \left[ -\sin \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{Y}}_1 - \sin \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}_2 + \cos \phi \hat{\mathbf{Y}}_3 \right] \equiv h_\phi \hat{\phi} \\ r &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = \cos \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{Y}}_1 + \cos \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}_2 + \sin \phi \hat{\mathbf{Y}}_3 \equiv \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

que reescribimos en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1 \\ \hat{\mathbf{Y}}_2 \\ \hat{\mathbf{Y}}_3 \end{pmatrix}$$

donde identificamos a la matriz  $\mathbf{R}$ . Para el cálculo de  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t$  tenemos

$$\mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}^t}{dt} = \dot{\lambda} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}^t}{\partial \lambda} + \dot{\phi} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}^t}{\partial \phi} \quad \text{con} \quad \dot{\lambda} = \frac{u_s}{h_\lambda} = \frac{u_s}{r \cos \phi} \quad \dot{\phi} = \frac{v_s}{h_\phi} = \frac{v_s}{r}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}^t}{\partial \lambda} &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \lambda & \sin \phi \sin \lambda & -\cos \phi \sin \lambda \\ -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \lambda \\ \sin \phi & 0 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}^t}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi \cos \lambda & -\sin \phi \cos \lambda \\ 0 & -\cos \phi \sin \lambda & -\sin \phi \sin \lambda \\ 0 & -\sin \phi & \cos \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En esta forma llegamos a

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\lambda} \sin \phi & \dot{\lambda} \cos \phi \\ \dot{\lambda} \sin \phi & 0 & \dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \cos \phi & -\dot{\phi} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -u_s \tan \phi & u_s \\ u_s \tan \phi & 0 & v_s \\ -u_s & -v_s & 0 \end{pmatrix}.$$

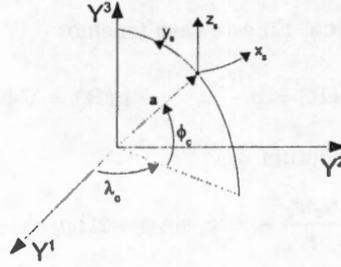


Figura 2.11: Coordenadas curvilíneas esféricas  $x_s, y_s, z_s$ .

### 2.4.2. Ecuaciones en coordenadas curvilíneas *esféricas* $x_s, y_s, z_s$

Las coordenadas curvilíneas *esféricas* se definen por

$$x_s = a \cos \phi (\lambda - \lambda_c) \quad y_s = a (\phi - \phi_c) \quad z_s = r - a. \quad (2.148)$$

Estas coordenadas constituyen básicamente un reescalamiento de las coordenadas esféricas  $\lambda\phi r$  y miden el desplazamiento de una partícula a partir de un punto de referencia con coordenadas esféricas  $(\lambda_c, \phi_c, r = a)$  como se aprecia en la Fig. 2.11. Despejando obtenemos

$$\lambda = \frac{x_s}{a \cos \phi} + a \cos \phi (\lambda - \lambda_c) \quad \phi = \frac{y_s}{a} + \phi_c \quad r = z_s + a \quad (2.149)$$

donde

$a =$  radio de una esfera que aproxime a la Tierra.

Los vectores base unitarios coinciden con aquellos en coordenadas esféricas,

$$\hat{x}_s = \hat{\lambda} \quad \hat{y}_s = \hat{\phi} \quad \hat{z}_s = \hat{r} \quad (2.150)$$

y los factores métricos correspondientes son

$$h_x = \frac{r \cos \phi}{a \cos \phi_c} \quad h_y = \frac{r}{a} \quad h_z = 1. \quad (2.151)$$

Para obtener expresiones en el sistema  $x_s, y_s, z_s$  basta con usar las expresiones en coordenadas esféricas y las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x_s}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_s} = a \cos \phi_c \frac{\partial}{\partial x_s} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial y_s}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y_s} = \frac{\partial}{\partial y_s} \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial z_s}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z_s} = \frac{\partial}{\partial z_s} \end{aligned} \quad (2.152)$$

Por ejemplo, para el gradiente tenemos

$$\nabla = \hat{\lambda} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} = \hat{x}_s \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial x_s} + \hat{y}_s \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial y_s} + \hat{z}_s \frac{\partial}{\partial z_s} \quad (2.153)$$

De acuerdo con (2.127) y (2.149) el vector de posición es

$$\mathbf{R} = (z_s + a) \hat{r}, \quad (2.154)$$

y las identidades (2.153) implica que las componentes físicas de la *velocidad relativa a la Tierra*

$$\mathbf{v} = v_s \hat{x}_s + v_s \hat{y}_s + v_s \hat{z}_s \quad (2.155)$$

coinciden con aquellas en coordenadas esféricas

$$u_s = u_a \quad v_s = v_a \quad w_s = w_a \quad (2.156)$$

Las relaciones entre velocidades generalizadas son

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= a \cos \phi_c \dot{\lambda} = \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} u_s \\ \dot{y}_s &= a \dot{\phi} = \frac{a}{r} v_s \\ \dot{z}_s &= \dot{r} = w_s \end{aligned} \quad (2.157)$$

En la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

tenemos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \dot{y}_s \frac{\partial}{\partial y_s} + \dot{z}_s \frac{\partial}{\partial z_s} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} u_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{a}{r} v_s \frac{\partial}{\partial y_s} + w_s \frac{\partial}{\partial z_s}$$

y para  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  sustituimos  $r = z_s + a$  en lo siguiente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left[ a \cos \phi_c \frac{\partial}{\partial x_s} r u_s + a \frac{\partial}{\partial y_s} r \cos \phi v_s + \frac{\partial}{\partial z_s} r^2 \cos \phi w_s \right] \\ &= \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{a}{r \cos \phi} \frac{\partial (v_s \cos \phi)}{\partial y_s} + \frac{\partial w_s}{\partial z_s} + \frac{2}{r} w_s \end{aligned} \quad (2.158)$$

Las ecuaciones escalares de momentum se obtienen de (2.147) usando las ecuaciones (2.152), (2.148), (2.158) y estan dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{\partial \Phi_g}{\partial x_s} \\ \frac{dv_s}{dt} + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r \cos \phi \sin \phi &= -\frac{a}{r} \frac{\partial p}{\partial y_s} + \frac{a}{r} \frac{\partial \Phi_g}{\partial y_s} \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} + \frac{\partial \Phi_g}{\partial z_s} \end{aligned} \quad (2.159)$$

Caso particular: Tierra esférica. En este caso tenemos,

$$\Phi_g(\mathbf{R}) = g \frac{R_c^2}{r}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{R}) = \nabla \Phi_g = -g \frac{R_c^2}{r^2} \hat{\mathbf{z}}_s, \quad (2.160)$$

donde  $r = z_s + a$  y las ecuaciones escalares de momentum son,

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} \\ \frac{dv_s}{dt} + u_s^2 \frac{\tan \phi}{r} + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r \cos \phi \sin \phi &= -\frac{a}{r} \frac{\partial p}{\partial y_s} \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - g \frac{R_c^2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.161)$$

## 2.5. Coordenadas de proyección $x_p y_p z_p$

La hipótesis primaria de la literatura que usa proyecciones es que la Tierra se puede modelar como una esfera [4,7,22,23]. Las proyecciones generan coordenadas curvilíneas ortogonales  $x_p y_p z_p$  que llamaremos *coordenadas de proyección*. La proyección de una coordenada  $(\lambda, \phi, \tau = a)$  sobre la que un modelo esférico terrestre es un par de coordenadas  $x_p, y_p$  dado por

$$x_p = x_p(\lambda, \phi) \quad y_p = y_p(\lambda, \phi). \quad (2.162)$$

Suponemos que el centro  $(\lambda_c, \phi_c, \tau = a)$  de la región de interés  $\mathcal{D}$  se sobre el origen del sistema  $x_p y_p$ ,

$$x_p(\lambda_c, \phi_c) = y_p(\lambda_c, \phi_c) = 0.$$

Si las coordenadas de un punto son coordenadas esféricas  $(\lambda, \phi, \tau)$ , sus *coordenadas de proyección* son la tríada  $(x_p, y_p, z_p)$  definidas por (2.162) y

$$z_p = \tau - a. \quad (2.163)$$

Dado que la proyección conforme es utilizada en meteorología,  $x_p, y_p, z_p$  define un sistema curvilíneo ortogonal.

a) Para obtener las ecuaciones en coordenadas  $x_p, y_p, z_p$  es natural usar las expresiones en coordenadas esféricas  $s^1 = \lambda, s^2 = \phi, s^3 = \tau$ . Comencemos por obtener la relación entre vectores base. La relación entre  $\hat{Y}^j$  y  $\hat{s}^i$  es

$$\hat{s}^i = R_{ij} \hat{Y}^j \quad (2.164)$$

donde  $R$  está dada, para simplificar las expresiones usaremos la notación  $x_p^1 = x_p, x_p^2 = y_p, x_p^3 = z_p$ . La ortogonalidad de las coordenadas  $x_p^i$  son ortogonales a los vectores unitarios donde

$$\hat{x}_p^i = \frac{x_p^i}{h_{pi}} \quad \text{con } x_p^i = \frac{\partial R}{\partial x_p^i}, \quad h_{pi} = \|\mathbf{x}_p^i\|. \quad (2.165)$$

Los vectores contravariantes en coordenadas esféricas están dados por,

$$\eta_s^j = \nabla s^j = \frac{\hat{s}^j}{h_{sj}} \quad \eta_p^i = \nabla x_p^i = \frac{\hat{x}_p^i}{h_{pi}}. \quad (2.166)$$

Usando estas identidades y la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\hat{x}_p^i}{h_{pi}} = \nabla x_p^i = \hat{Y}^k \frac{\partial x_p^i}{\partial Y^k} = \hat{Y}^k \frac{\partial s^j}{\partial Y^k} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j} = \nabla s^j \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j} = \frac{\hat{s}^j}{h_{sj}} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j}$$

por tanto,

$$\hat{x}_p^i = h_{pi} \sum_j \frac{\hat{s}^j}{h_{sj}} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j}$$

de donde obtenemos los factores métricos,

$$h_{pi} = \left[ \sum_j \left( \frac{1}{h_{sj}} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

En el caso que nos interesa tenemos  $\partial x_p^i / \partial s^3 = \delta_{i3}$  por lo tanto

$$h_{pi} = \left[ \sum_{j=1,2} \left( \frac{1}{h_{sj}} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (i = 1, 2), \quad h_{p3} = 1, \quad (2.167)$$

con lo cual la relación entre vectores base es

$$\hat{x}_p^i = T_{ij} \hat{s}^j$$

donde

$$T_{ij} = \frac{h_{pi}}{h_{sj}} \frac{\partial x_p^i}{\partial s^j} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.168)$$

Suponiendo que la matriz  $\mathbb{T} = \{T_{ij}\}$  define la rotación de  $\hat{s}^1$  y  $\hat{s}^2$ , entonces  $\hat{x}_p^1 \times \hat{x}_p^2 = \hat{x}_p^3$ ,  $\det(\mathbb{T}) = 1$ . La normalización y ortogonalidad  $\hat{x}_p^i$  y  $\hat{s}^j$  dan

$$T_{11}^2 + T_{12}^2 = 1, \quad T_{21}^2 + T_{22}^2 = 1, \quad T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} = 0, \quad T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 \quad [\det(\mathbb{T}) = 1].$$

de donde obtenemos  $T_{11} = T_{22} \equiv T_1$ ,  $T_{12} = -T_{21} \equiv T_2$  y por tanto  $\mathbb{T}$  tiene la forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.169)$$

b) Sustituyendo  $\hat{x}_p^i = T_{ij} \hat{s}^j$  en

$$\mathbf{b} = \hat{x}_p^i b_p^i = \hat{s}^j b_s^j$$

obtenemos la relación entre componentes

$$b_p^i = T_{ij} b_s^j. \quad (2.170)$$

En particular para la velocidad relativa a la Tierra

$$\mathbf{v} = u_s^i \hat{s}^i \quad (\text{donde } u_s^i \equiv \dot{s}^i h_{si})$$

tenemos

$$u_p^1 = T_1 u_s^1 + T_2 u_s^2, \quad u_p^2 = -T_2 u_s^1 + T_1 u_s^2, \quad u_p^3 = u_s^3. \quad (2.171)$$

Otra expresión de  $u_p^i$  es

$$u_p^i = h_{pi} \dot{x}_p^i. \quad (2.172)$$

la cual se obtiene calculando  $\frac{d}{dt} Y^k(x_p^i)$  con la regla de la cadena, sustituyendo en  $\mathbf{v} = \hat{Y}^k \dot{Y}^k$  y usando las ecuaciones (2.165) y (2.166). Las componentes físicas de la aceleración en coordenadas esféricas son

$$\mathbf{a} = \hat{s}^j a_s^j \quad \text{con} \quad a_s^j \equiv \dot{u}_s^j + \mathbb{R}_{jk} \dot{\mathbb{R}}_{lk} u_s^l. \quad (2.173)$$

Si  $a_p^i$  son las componentes de  $\mathbf{a}$  en la base  $\hat{x}_p^i$ , entonces

$$a_p^i = T_{ij} a_s^j = T_{ij} \left( \dot{u}_s^j + \mathbb{R}_{jk} \dot{\mathbb{R}}_{lk} u_s^l \right)$$

y sustituyendo  $u_s^j = T_{mj} u_p^m$  obtenemos

$$a_p^i = T_{ij} \left( \frac{d}{dt} T_{mj} u_p^m + \mathbb{R}_{jk} \dot{\mathbb{R}}_{lk} T_{ml} u_p^l \right) = \frac{du_p^i}{dt} + Q_{im} u_p^m \quad (2.174)$$

donde usamos  $T_{ij} T_{mj} = \delta_{im}$  y  $Q_{im}$  como los elementos de la matriz

$$\mathbb{Q} \equiv \mathbb{T} \dot{\mathbb{T}} + \mathbb{T} \mathbb{R} \dot{\mathbb{R}}^t \mathbb{T}^t.$$

c) Para comparar con la expresiones reportadas en la literatura usaremos la notación siguiente:

$$\begin{aligned} u_s &= u_s^1, & v_s &= u_s^2, & w_s &= u_s^3 \\ \hat{\lambda} &= \hat{s}^1, & \hat{\phi} &= \hat{s}^2, & \hat{r} &= \hat{s}^3 \\ \hat{x}_p &= \hat{x}_p^1, & \hat{y}_p &= \hat{x}_p^2, & \hat{z}_p &= \hat{x}_p^3 \\ h_x &= h_{p1}, & h_y &= h_{p2}. \end{aligned}$$

c1) Comenzemos con las componentes de la velocidad. Tenemos

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} \text{ equivalente a } \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & -T_2 & 0 \\ T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} u_p &= u_s T_1 + v_s T_2 & v_p &= -u_s T_2 + v_s T_1 \\ u_s &= u_p T_1 - v_p T_2 & v_s &= u_p T_2 + v_p T_1 \end{aligned} \quad (2.175)$$

c2) Para el cálculo de  $\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}^t$  usamos  $T_1\dot{T}_1 + T_2\dot{T}_2 = \frac{d}{dt} \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} = 0$  y la definición

$$\xi \equiv -T_2\dot{T}_1 + T_1\dot{T}_2$$

entonces

$$\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}^t = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_1 & -\dot{T}_2 & 0 \\ \dot{T}_2 & \dot{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1\dot{T}_1 + T_2\dot{T}_2 & -T_1\dot{T}_2 + T_2\dot{T}_1 & 0 \\ -T_2\dot{T}_1 + T_1\dot{T}_2 & T_2\dot{T}_2 + T_1\dot{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c3) Para el cálculo de  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t \mathbf{T}^t$  usaremos

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha = u_s \frac{\tan \phi}{r} \quad \beta = \frac{u_s}{r} \quad \gamma = \frac{v_s}{r}$$

con el propósito de simplificar la notación. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t \mathbf{T}^t &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \mathbf{T}^t = \begin{pmatrix} \alpha T_2 & -\alpha T_1 & \beta T_1 + \gamma T_2 \\ \alpha T_1 & \alpha T_2 & -\beta T_2 + \gamma T_1 \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & -T_2 & 0 \\ T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(T_1^2 + T_2^2) & \beta T_1 + \gamma T_2 \\ \alpha(T_1^2 + T_2^2) & 0 & -\beta T_2 + \gamma T_1 \\ -\beta T_1 - \gamma T_2 & \beta T_2 - \gamma T_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \frac{u_p}{r} & \frac{v_p}{r} \\ \alpha & 0 & \frac{v_p}{r} \\ -\frac{u_p}{r} & -\frac{v_p}{r} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde simplificamos usando las relaciones (2.175) y

$$T_1^2 + T_2^2 = 1, \quad \beta T_1 + \gamma T_2 = \frac{u_s T_1 + v_s T_2}{r} = \frac{u_p}{r}, \quad -\beta T_2 + \gamma T_1 = \frac{-u_s T_2 + v_s T_1}{r} = \frac{v_p}{r}.$$

c4) Finalmente,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}^t + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^t \mathbf{T}^t = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha - \xi & \frac{v_p}{r} \\ \alpha + \xi & 0 & \frac{v_p}{r} \\ -\frac{u_p}{r} & -\frac{v_p}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha + \xi) v_p + \frac{u_p w_p}{r} \\ (\alpha + \xi) u_p + \frac{v_p w_p}{r} \\ -r^{-1} (u_p^2 + v_p^2) \end{pmatrix}.$$

c5) Con lo anterior las componentes de la aceleración  $a_p^i$  son

$$\begin{pmatrix} a_p^1 \\ a_p^2 \\ a_p^3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(r^{-1} u_s \tan \phi + \xi) v_p + r^{-1} u_p w_p \\ (r^{-1} u_s \tan \phi + \xi) u_p + r^{-1} v_p w_p \\ -r^{-1} (u_p^2 + v_p^2) \end{pmatrix}.$$

c6) Para la aceleración de Coriolis tenemos  $2\Omega = 2\Omega (\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{r}) = e\hat{\phi} + f\hat{r}$ , donde definimos

$$e = 2\Omega \cos \phi, \quad f = 2\Omega \sin \phi$$

y usando

$$\begin{pmatrix} (2\Omega)_{xp} \\ (2\Omega)_{yp} \\ (2\Omega)_{zp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & 0 \\ -T_2 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eT_2 \\ eT_1 \\ f \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$2\Omega = \hat{x}_p eT_2 + \hat{y}_p eT_1 + \hat{z}_p f$$

por lo tanto,

$$2\Omega \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x}_p & \hat{y}_p & \hat{z}_p \\ eT_2 & eT_1 & f \\ u_p & v_p & w_p \end{vmatrix} = \hat{x}_p (e w_p T_1 - v_p) + \hat{y}_p (f u_p - e w T_2) + \hat{z}_p (e v_p T_2 - e u_p T_1).$$

c7) Usando (2.167) y la regla de la cadena el gradiente de presión toma la forma

$$\nabla p = \left( \hat{x}_p \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial x_p} + \hat{y}_p \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial y_p} + \hat{z}_p \frac{\partial}{\partial z_p} \right) p.$$

c8) Sustituyendo en la ecuación de momentum para un modelo esférico  $\mathbf{a} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} = -2\Omega \times \mathbf{v}$  con  $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$  y reordenando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p}{\partial y_p} \\ \frac{1}{h_z} \frac{\partial p}{\partial z_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \frac{a^2}{r^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f v_p - e w_p T_1 \\ -f u_p + e w_p T_2 \\ e u_p T_1 - e v_p T_2 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p}{\partial y_p} \\ \frac{1}{h_z} \frac{\partial p}{\partial z_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \frac{a^2}{r^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f v_p - e w_p T_1 \\ -f u_p + e w_p T_2 \\ e u_p T_1 - e v_p T_2 \end{pmatrix} - \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha + \xi + f) v_p - \frac{u_p w_p}{r} \\ -(\alpha + \xi + f) u_p - \frac{v_p w_p}{r} \\ \frac{u_p^2 + v_p^2}{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e w_p T_1 \\ e w_p T_2 \\ e u_p T_1 - e v_p T_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando la aproximación  $\frac{a}{r} \sim 1$  llegamos a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p}{\partial x_p} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p}{\partial y_p} \\ \frac{1}{h_z} \frac{\partial p}{\partial z_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \xi + f) v_p - \frac{u_p w_p}{r} - e w_p T_1 \\ -(\alpha + \xi + f) u_p - \frac{v_p w_p}{r} + e w_p T_2 \\ e u_p T_1 - e v_p T_2 + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} \end{pmatrix}$$

En forma escalar tenemos

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{1}{h_x \rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + \frac{u_s \tan \phi}{r} + \xi \right) - e w_p T_1 - \frac{u_p w_p}{r} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{h_y \rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + \frac{u_s \tan \phi}{r} + \xi \right) + e w_p T_2 - \frac{v_p w_p}{r} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e (u_p T_1 - v_p T_2) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{r} \end{aligned} \quad (2.176)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_p}{h_x} \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{v_p}{h_y} \frac{\partial}{\partial y_p} + w_p \frac{\partial}{\partial z_p}.$$

## 2.6. Ecuaciones de Bernoulli en un sistema fijo a la Tierra

En esta sección obtendremos *ecuaciones de Bernoulli* para *flujos ideales* considerados en la sección 1.5 pero ahora en el sistema fijo a la Tierra  $x^1x^2x^3$  descrito en la sección 2.3. La idea principal para obtener tales ecuaciones es escribir los términos de la ecuación de momentum para un flujo ideal

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

como el gradiente de funciones escalares. En términos de los potenciales  $\Phi_c$  y  $\Phi_g$  asociados a la aceleración centrípeta y la aceleración gravitacional tenemos

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) - \mathbf{g} = -\nabla \Phi_c - \nabla \Phi_g = -\nabla \Phi$$

donde  $\Phi \equiv \Phi_g + \Phi_c$ . La aceleración relativa a la Tierra  $\mathbf{a}$  puede reescribirse como sigue

$$\mathbf{a} = \frac{dv^i}{dt} \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i \left[ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right] = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

donde  $\nabla = \hat{\mathbf{x}}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , usando (1.72) y si en lugar de  $\mathbf{V}$  ponemos la velocidad relativa a la Tierra  $\mathbf{v}$ , con la cual la aceleración relativa toma la forma

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

Finalmente, para los flujos discutidos en la sección 1.5 existe una función escalar  $Q$  tal que  $\rho^{-1} \nabla p = \nabla Q$ . De acuerdo con lo anterior la ecuación de movimiento puede escribirse como sigue

$$\hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla \left[ Q + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = \mathbf{v} \times [2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}] \quad (2.177)$$

donde  $Q = h$  para flujo adiabático y  $Q = P$  para un flujo barotrópico.

En un sistema de referencia inercial la hipótesis de *flujo potencial* simplifica los cálculos para obtener una ecuación de Bernoulli, pero esto *no* es necesariamente cierto cuando consideramos la velocidad relativa a la Tierra. La velocidad  $\mathbf{V}$  relativa a un sistema inercial es

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad en el sistema  $x^1x^2x^3$  y  $\mathbf{R}$  es el vector de posición de la partícula en el sistema inercial. El primer resultado relacionado con la rotación terrestre está dado por la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.** El término  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  *no* puede representarse como el gradiente de un campo escalar.

Para probar esta afirmación basta con considerar  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  en el sistema inercial. En dicho sistema tenemos  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{Z}}$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = \Omega \hat{\mathbf{Z}} \times (X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}} + Z\hat{\mathbf{Z}}) = \Omega (-Y\hat{\mathbf{X}} + X\hat{\mathbf{Y}}).$$

Supongamos que existe un potencial  $\Phi_\Omega$  que satisface la relación  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = \nabla \Phi_\Omega$  la cual equivale al par de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi_\Omega}{\partial X} = -\Omega Y, \quad \frac{\partial \Phi_\Omega}{\partial Y} = \Omega X. \quad (2.178)$$

Integrando la primera ecuación obtenemos  $\Phi_\Omega = -\Omega YX + f(Y)$  y derivando esto último

$$\frac{\partial \Phi_\Omega}{\partial Y} = -\Omega X + \frac{df(Y)}{dY} \quad (2.179)$$

se llega a una contradicción con la segunda expresión en (2.179), a saber,

$$\frac{df(Y)}{dY} = \Omega X.$$

**Corolario 2.2.** Los campos  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{v}$  no pueden ser simultáneamente potenciales.

En efecto si tenemos  $\mathbf{V} = \nabla\Phi_V$ ,  $\mathbf{v} = \nabla\Phi_v$ , entonces  $\mathbf{V} - \mathbf{v} = \nabla(\Phi_V - \Phi_v) = \Omega \times \mathbf{R}$  lo que contradice la proposición anterior. Por lo anterior, al referirnos al campo de velocidad  $\mathbf{v}$  como potencial,

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi_v,$$

significa que  $\mathbf{V}$  no lo es. Esto nos conduce a replantear algunos conceptos. Si  $x^i$  son las coordenadas instantáneas (o eulerianas) de una partícula en el sistema  $x^1x^2x^3$ , las coordenadas

$$x_0^i \equiv x^i |_{t_0}$$

en un instante  $t_0$  son las correspondientes coordenadas lagrangianas. Si conocemos las componentes  $v^i = \dot{x}^i$  de la velocidad  $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i$  en su forma euleriana  $v^i(t, x^i)$ , podemos recuperar la forma en la que las coordenadas  $x^i$  dependen de  $t$  y  $x_0^i$  resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(t, x^i) \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

sujeto a la condición inicial

$$x^i |_{t_0} = x_0^i.$$

Si el tiempo aparece explícitamente en  $v^i(t, x^i)$ , entonces, en general, partículas que pasen por un mismo punto  $x_0^i$  en instantes diferentes, tendrán trayectorias diferentes, mientras que en el caso autónomo o estacionario  $v^i = v^i(x^i)$ , las trayectorias coincidirán. Para integrar la ecuación (2.179) y obtener formulaciones de las ecuaciones de Bernoulli con respecto a la Tierra, conviene redefinir el concepto de flujo estacionario. Dado que estamos interesados en la descripción respecto a la Tierra diremos que un flujo es *estacionario* si las propiedades medidas en un punto arbitrario pero *fijo respecto a la Tierra*, no cambian con el tiempo. Por ejemplo, si el campo  $\mathbf{v}$  es estacionario, la forma euleriana de sus componentes  $v^i$  no depende explícitamente del tiempo,

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0,$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} v^i = \frac{d}{dt} v^i(x^1, x^2, x^3) = \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \mathbf{v} \cdot \nabla v^i.$$

Denotemos con  $F_L(t, x_0^i)$  y  $F(t, x^i)$  a las formas lagrangiana y euleriana, respectivamente, de una propiedad  $F$  de una partícula. Derivando la identidad

$$F_L(t, x_0^i) = F(t, x^i)$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} F_L = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F. \quad (2.180)$$

Si suponemos que: (i) el flujo es estacionario y (ii) el valor de  $F$  dentro de cada partícula de fluido no cambia con el tiempo, entonces

$$\frac{d}{dt} F_L = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

con lo cual (2.180) se reduce a

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{para cada } \mathbf{r}. \quad (2.181)$$

Recíprocamente (**Proposición 2.3**): Si un flujo es estacionario y la ecuación (2.181) se cumple, entonces la propiedad  $F$  no cambia en el interior de cada partícula conforme ésta se mueve o, equivalentemente,  $F$  tiene

un valor constante sobre la trayectoria de cada partícula. Esto último equivale a decir que si  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son puntos arbitrarios en la trayectoria de una partícula, entonces tiene lugar la *ecuación de Bernoulli*

$$F|_{\mathbf{r}_1} = F|_{\mathbf{r}_2}.$$

**Ejemplo 2.1.** Si tenemos un flujo ideal (*no* necesariamente estacionario), adiabático (ó barotrópico) y potencial  $\mathbf{v} = \nabla\Phi_v$ , entonces  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  y

$$\hat{x}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} = \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_v}{\partial x^i} = \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \Phi_v}{\partial t}.$$

con lo cual la ecuación (2.181) toma la forma

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} + Q + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.182)$$

Multiplicando por  $\mathbf{v} \cdot$  se obtiene

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} + Q + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = 0. \quad (2.183)$$

Dado que el flujo puede ser *no* estacionario la función siguiente

$$E \equiv \frac{\partial \Phi_v}{\partial t} + Q + \frac{v^2}{2} - \Phi$$

puede depender explícitamente de  $t$ ,

$$E = E(t, \mathbf{r}).$$

En este último caso tenemos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla E$$

donde (2.183) equivale a  $\mathbf{v} \cdot \nabla E = 0$ , por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

de donde *no* podemos inferir que el valor de  $E$  es constante sobre la trayectoria de una partícula. Esto parece contradecir las ecuaciones de Bernoulli obtenidas en un sistema de referencia inercial, pero la contradicción sólo es aparente ya que si  $\mathbf{v}$  es potencial el campo  $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  *no* lo es por lo que no podemos obtener una ecuación de Bernoulli. Si en adición a las hipótesis iniciales suponemos que el flujo es *estacionario*, entonces la función

$$E(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.184)$$

es una constante de movimiento para cada partícula, es decir, es constante sobre la trayectoria de cada partícula (proposición 3),

$$E(\mathbf{r}_1) = E(\mathbf{r}_2). \quad (2.185)$$

El ejemplo anterior muestra que la hipótesis de flujo potencial *no* permite integrar la ecuación (2.182) por la presencia del término *no inercial*  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ . Dicho término se anula multiplicando por  $\mathbf{v} \cdot$ , pero tal operación también anula al término  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$  sin necesidad de suponer que el flujo es potencial, lo que nos lleva a reformular el ejemplo anterior como sigue.

**Ejemplo 2.2** Consideremos un flujo ideal, estacionario y adiabático donde  $\mathbf{v}$  puede *no* ser potencial. En este caso se reduce a

$$\nabla \left[ h + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = \mathbf{v} \times [2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}].$$

Multiplicando por  $\mathbf{v} \cdot$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left[ h + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = 0$$

se concluye que la función siguiente es constante sobre la trayectoria de cada partícula

$$E(\mathbf{r}) = h + \frac{v^2}{2} - \Phi.$$

En otras palabras,  $E(\mathbf{R})$  tiene un valor constante a lo largo de la trayectoria de cada partícula, aunque se valor puede cambiar de una partícula a otra, con lo cual obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right]_{\mathbf{R}_0} = \left[ h + \frac{V^2}{2} - \Phi_g \right]_{\mathbf{R}} \quad (2.186)$$

donde  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}$  son los vectores de posición de un partícula en instantes arbitrarios  $t_0$  y  $t$ , respectivamente.

**Ejemplo 2.3** . Para un flujo de gas ideal, estacionario y barotropico tenemos

$$\nabla \left[ P[p] + \frac{v^2}{2} - \Phi \right] = \mathbf{v} \times [2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}].$$

Multiplicando por  $\mathbf{v}$  se concluye que la función

$$E(\mathbf{r}) = P[p] + \frac{v^2}{2} - \Phi.$$

donde es constante sobre la trayectoria de cada partícula. En otras palabras, se cumple la ecuación de Bernoulli

$$\left[ P[p] + \frac{v^2}{2} - \Phi \right]_{\mathbf{R}_0} = \left[ P[p] + \frac{v^2}{2} - \Phi \right]_{\mathbf{R}} \quad (2.187)$$

donde  $\mathbf{R}_0$  y  $\mathbf{R}$  son los vectores de posición de un partícula en instantes arbitrarios  $t_0$  y  $t$ , respectivamente.

Consideremos el último ejemplo para resolver los problemas siguientes:

a) *Cálculo de la constante de integración para cada partícula.* Si conocemos los valores de la presión  $p(\mathbf{r}_0)$  y el campo de velocidad  $v^2(\mathbf{r}_0)$  en un punto  $\mathbf{r}_0$ , entonces

$$E(\mathbf{r}_0) = P[p(\mathbf{r}_0)] + \frac{v^2(\mathbf{r}_0)}{2} - \Phi(\mathbf{r}_0) = \int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{v^2(\mathbf{r}_0)}{2} - \Phi(\mathbf{r}_0).$$

En esta forma la ecuación de Bernoulli  $E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}_0)$  queda como sigue

$$\int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi_g(\mathbf{r}) = \int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + C_P + \frac{v^2(\mathbf{r}_0)}{2} - \Phi_g(\mathbf{r}_0)$$

La constante  $C_P$  se cancela dando

$$\int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi_g(\mathbf{r}) = \int^{p(\mathbf{r}_0)} \frac{ds}{\rho(s)} + \frac{v^2(\mathbf{r}_0)}{2} - \Phi_g(\mathbf{r}_0)$$

por lo que podemos considerar  $C_P = 0$ , y la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$P[p(\mathbf{r})] + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi_g(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}_0).$$

b) *Cálculo de la presión en un punto arbitrario  $\mathbf{r}$ .* Si  $P^{-1}$  denota la función inversa de  $P[p]$ , el valor de la presión en un punto  $\mathbf{r}$  es

$$p(\mathbf{r}) = P^{-1} \left[ E(\mathbf{r}_0) - \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi(\mathbf{r}) \right].$$

c) *La ecuación implícita de la isobara sobre la cual la presión tiene un valor  $p_*$  es simplemente*

$$\frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}_0) - P[p_*].$$

d) *Cálculo de la isobara que pasa por un punto dado*  $\mathbf{r}_* = (x_*, z_*)$ . Para este propósito calculamos primero el valor  $p_* \equiv p(\mathbf{r}_*)$  usando

$$P[p_*] + \frac{v^2(\mathbf{r}_*)}{2} - \Phi(\mathbf{r}_*) = E(\mathbf{r}_0) .$$

Si  $\mathbf{r} = (x, z)$  es un punto sobre la isobara con presión  $p_*$ , satisface la ecuación

$$P[p_*] + \frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi(\mathbf{r}) = P[p_*] + \frac{v^2(\mathbf{r}_*)}{2} - \Phi(\mathbf{r}_*)$$

que se reduce a

$$\frac{v^2(\mathbf{r})}{2} - \Phi(\mathbf{r}) = \frac{v^2(\mathbf{r}_*)}{2} - \Phi(\mathbf{r}_*) . \quad (2.188)$$

**Nota 2.8.1.** La ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario de gas ideal y barotrópico [47] demuestra que el solo campo de velocidad permite calcular las variables termodinámicas del sistema. En efecto, una vez calculado el campo de presión, la relación  $\rho = \rho(p)$  permite calcular la densidad, y con la ecuación de estado obtenemos la temperatura. Esto enfatiza el bien conocido hecho en hidrodinámica que el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  es una de las variables fundamentales. El problema es, entonces, el cálculo de  $\mathbf{v}$ . En esta sección no hemos considerado la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 .$$

Si el flujo es estacionario se reduce a  $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$  y si las variaciones de la densidad son pequeñas con respecto a un valor de referencia  $\rho_0(\mathbf{r})$ , podemos considerar la ecuación

$$\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v} = 0 \quad (2.189)$$

que debe resolverse con la condición de frontera

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.190)$$

sobre las fronteras sólidas, donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a dichas fronteras.

## 2.7. Modelo MM5 version 2

Las versiones 2 y 3 de el modelo MM5 [26, 27] Tienen la misma elección de tres mapeos de proyección para definir el dominio del modelo. La documentación de dominio del programa [28] describe en detalle el uso de los mapeos de proyección para definir la topografía. El modelo calcula la información de aporte en coordenadas de proyección  $x_p y_p$  y  $z_p$  y es reemplazada por la coordenada que sigue el terreno

$$\sigma = \frac{p_0(z_p) - p_{top}}{p^*(x_p, y_p)} \quad (2.191)$$

donde  $p_{top}$  es una constante,  $p^* = p_s(x_p, y_p) - p_{top}$ ,  $p_s$  es la presión sobre la topografía, y  $p_0(z_p)$  es la presión de una atmósfera de referencia de estado la cual obedece la ecuación hidrostática  $dp_0/dz_p = -g\rho_0(z_p)$ , y la ecuación de estado  $p_0 = RT_0\rho_0$  con  $T_0 = T_{00} + A \log(p_0/p_{00})$ . De estas ecuaciones, la expresión de  $z_p$  en términos de  $\sigma$  usando la regla de la cadena uno obtiene las relaciones

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right)_{z_p} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_p} \right)_{\sigma} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial \sigma} \\ \left( \frac{\partial}{\partial y_p} \right)_{z_p} &= \left( \frac{\partial}{\partial y_p} \right)_{\sigma} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y_p} \frac{\partial}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial}{\partial z_p} &= -\frac{\rho_0 g}{p^*} \frac{\partial}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (2.192)$$

la cual es usada para llegar correctamente a las ecuaciones de momentum en coordenadas  $x_p y_p \sigma$ , pero al simplificar la notación usamos el lado izquierdo de (2.192).

Las ecuaciones de momentum reportadas en la documentación de MM5 version 2 [26] son

$$\frac{du_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} = v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} \right) - ew_p - \frac{u_p w_p}{a} + D_u \quad (2.193)$$

$$\frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} = -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} \right) - \frac{v_p w_p}{a} + D_v \quad (2.194)$$

$$\frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g = eu_p + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} + D_w \quad (2.195)$$

con

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_p \frac{\partial}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial}{\partial y_p} + w_p \frac{\partial}{\partial z_p}$$

donde el gradiente de presión está escrito en términos de (2.192)  $x_p y_p z_p$  en lugar de eso usamos el lado izquierdo de (2.192). En la siguiente sección mostramos que las ecuaciones correctas (2.176) pueden ser reescritas con  $m = 1/h_x = 1/h_y$  y  $r^{-1}u_s \tan \phi + \xi = u_p \partial m / \partial y_p - v_p \partial m / \partial x_p$ . Así, una comparación con las ecuaciones correctas (2.176) mostramos que: (i) las ecuaciones (2.193)-(2.195) omiten  $m$  en el gradiente de presión horizontal y el término de advección  $d/dt$ , (ii) en la ecuación (2.193) el término  $-v_p \partial m / \partial x_p$  está ausente y  $ew_p$  es remplazado por  $ew_p T_1$ , (iii) en la ecuación (2.194) los términos  $-v_p \partial m / \partial x_p$  y  $ew_p T_2$  están ausentes, (iv) en la ecuación (2.195) el término  $-ev_p T_2$  está ausente y  $eu_p$  es remplazado por  $eu_p T_1$ .

Para obtener información adicional acerca de la formulación teórica de MM5 versión 2, las ecuaciones de la referencia [25] citado en la documentación de MM5 version 2, fue considerada. En la referencia de la aproximación hidrostática es aplicada a la ecuación de momentum vertical y a la coordenada vertical  $\sigma$  (2.191). Las ecuaciones de momentum son

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* u}{\partial t} &= -\frac{\partial p^* u u}{\partial x} - \frac{\partial p^* \sigma u}{\partial x} - \frac{\sigma R_d T p^*}{p} \frac{\partial p^*}{\partial x} - p^* \frac{\partial \phi}{\partial x} + f p^* (v - v_g) \\ &\quad + p^* (F_u + D_u + P_u + C_u) \\ \frac{\partial p^* v}{\partial t} &= -\frac{\partial p^* u v}{\partial x} - \frac{\partial p^* \sigma v}{\partial x} - f p^* (u - u_g) + p^* (F_v + D_v + P_v + C_v) \end{aligned} \quad (2.196)$$

con  $A_u = p^* (F_u + D_u + P_u + C_u)$ ,  $A_v = p^* (F_v + D_v + P_v + C_v)$ , donde  $F$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $C$ ,  $R$  son respectivamente la difusión horizontal de remolino de orden cuatro, la convergencia vertical de flujo de remolino, el término de transporte del cúmulo, y la radiación de calentamiento. De las ecuaciones (2.196) llegamos a las siguientes conclusiones: (i) La ausencia de los factores  $h_i = \|\partial R / \partial x_p^i\|$  deja entrever a  $h$  y por consiguiente las coordenadas horizontales son las coordenadas cartesianas  $xy$  de un plano tangente a la esfera  $S_a$ . Así, las componentes horizontales de  $g$  son *necesarias* para el modelo sobre un dominio más grande de  $100 \times 100$  km<sup>2</sup>. Sin embargo, (ii) las componentes horizontales de  $g$  o de sus aproximaciones lineales están ausentes en (2.196) y por consiguiente la aproximación  $g \sim -gk$  es usada, aunque las ecuaciones (2.196) fueron usadas en [25] al simular convección sobre una región con 600 km en un lado.

## 2.8. Modelo MM5 version 3

Las ecuaciones de momentum del modelol MM5 versión 3 [27] son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} + D_u \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} + D_v \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e (u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a} + D_w, \end{aligned} \quad (2.197)$$

con

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu_p \frac{\partial}{\partial x_p} + mv_p \frac{\partial}{\partial y_p} + w_p \frac{\partial}{\partial z_p}$$

donde  $m$  es el factor is the map-scale factor,  $e = 2\Omega \cos \phi$ ,  $f = 2\Omega \sin \phi$ ,  $\phi$  es la latitud,  $\alpha = \lambda - \lambda_c$ ,  $\lambda$  es la longitud y  $\lambda_c$  es la longitud central. Estas ecuaciones son similares a las correctas (2.176) pero estas son algunas diferencias.

El servicio meteorológico Mexicano usa el modelo el modelo MM5 versión 3 [29, 30] para llevar a cabo el análisis operacional en un dominio  $D \sim 3330 \times 3330$  km<sup>2</sup> definido por las proyecciones de Lambert [29]. La proyección es [28],

$$x_p = R_s(\phi) \sin(k\alpha) \quad y_p = -R_s(\phi) \cos(k\alpha) \quad (2.198)$$

con  $R_s(\phi) = (am \cos \phi)/k$ ,  $m = [\tan B / \tan B_1]^k \cos \phi_1 / \cos \phi$ ,  $B = 2^{-1}(90^\circ - \phi)$ ,  $B_1 = 2^{-1}(90^\circ - \phi_1)$  y

$$k = \frac{\log[\cos \phi_1 / \cos \phi_2]}{\log[\tan(\pi/4 - \phi_1/2) / \tan(\pi/4 - \phi_2/2)]}$$

En este caso las ecuaciones de transformación (2.167)  $h_x = h_y = r/am$ ,  $T_1 = \cos k\alpha$ ,  $T_2 = -\sin k\alpha$ ,  $\xi = -ku_s/r \cos \phi$ . Usando algunas manipulaciones algebraicas y  $r \sim a$  tenemos

$$\frac{u_s \tan \phi}{r} + \xi = u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \quad (2.199)$$

y las ecuaciones correctas (2.176) son

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \cos k\alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y_p} - v_p \frac{\partial m}{\partial x_p} \right) - ew_p \sin k\alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos k\alpha + v_p \sin k\alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}, \end{aligned} \quad (2.200)$$

donde la aproximación  $r \sim a$  es usada. Según (2.197) con  $D_u = D_v = D_w = 0$ , son las ecuaciones de modelo MM5

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Podemos ver las siguientes diferencias: (i) Las ecuaciones MM5 (2.201) toman  $\cos \alpha$  y  $-\sin \alpha$  en lugar de los coeficientes correctos  $\cos k\alpha$  y  $\sin k\alpha$ , respectivamente. El factor  $k$  aparece en  $T_1$  y  $T_2$  por medio de la matriz Jacobiana  $\partial x_p^i / \partial s^j$  en las ecuaciones de proyección (2.198), Considerando las ecuaciones de MM5 omite los factores. Para obtener una idea de la magnitud de  $k$  tenemos  $k = 0,34$  para  $\phi_1 = 15^\circ$ ,  $\phi_2 = 25^\circ$  y  $k = 3,4$  para  $\phi_1 = 35^\circ$ ,  $\phi_2 = 55^\circ$ . (ii) Aunque los términos  $ew_p \cos \alpha$  y  $ew_p \sin \alpha$  son pequeños, el error de estas ecuaciones se incrementa cuando se resuelven numéricamente (2.201). (iii) Los términos incorrectos  $eu_p \cos \alpha$ ,  $-ev_p \sin \alpha$  son pequeños con respecto a  $g$  pero su magnitud es igual o mayor que  $dw_p/dt$ . Por ejemplo, para sistemas sinópticos a escalas grande  $dw_p/dt \sim 10^{-7}$  ms<sup>-2</sup>,  $eu_p \cos \alpha \sim 10^{-3}$  ms<sup>-2</sup> para  $|\phi| \leq 30^\circ$  y  $fv_p \sin \alpha \sim 10^{-3}$  ms<sup>-2</sup> para  $|\phi| \geq 45^\circ$  [37, tabla 2.2]. Esto invalida el uso de la ecuación  $w_p$  calculando los movimientos verticales que son importantes para el pronóstico de lluvia.

La proyección de Mercator usada por MM5 es [28]

$$x_p = a\alpha \quad y_p = a \ln[(1 + \sin \phi) / \cos \phi]. \quad (2.202)$$

En este caso las ecuaciones (2.167) se transforman  $h_x = h_y = r/am$  con  $m = 1/\cos \phi$ ,  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = \xi = 0$  y usando  $r \sim a$ . La ecuación (2.23) conserva su validez y por consiguiente lo correcto son las ecuaciones (2.176) que toman la forma

$$\begin{aligned}\frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p - \frac{u_p w_p}{r} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - 0 - \frac{v_p w_p}{r} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= eu_p + \frac{u_p^2 + v_p^2}{r}.\end{aligned}\quad (2.203)$$

Según (2.197) las ecuaciones de MM5 version 3 son

$$\begin{aligned}\frac{du_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial x_p} &= v_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) - ew_p \cos \alpha - \frac{u_p w_p}{a} \\ \frac{dv_p}{dt} + \frac{m}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial y_p} &= -u_p \left( f + u_p \frac{\partial m}{\partial y} - v_p \frac{\partial m}{\partial x} \right) + ew_p \sin \alpha - \frac{v_p w_p}{a} \\ \frac{dw_p}{dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p_p}{\partial z_p} + g &= e(u_p \cos \alpha - v_p \sin \alpha) + \frac{u_p^2 + v_p^2}{a}.\end{aligned}\quad (2.204)$$

Hay las siguientes diferencias: (i) Las ecuaciones (2.204) tienen los coeficientes  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  en lugar de los correctos 1 y 0, respectivamente. Tenemos  $T_2 = \xi = 0$  de la matriz Jacobiana  $\partial x_p^i / \partial s^j$  de (2.202) es diagonal. (ii) Como arriba, los términos incorrectos en las ecuaciones de momentum horizontales ( $-ew_p \cos \alpha$  y  $+ew_p \sin \alpha$ ) son pequeños pero ellos aumentan errores numéricos. (iii) Los términos incorrectos  $eu_p \cos \alpha$  y  $-ev_p \sin \alpha$  en la ecuación de momentum vertical invalida el uso de esos para calcular  $w_p$  (y predecir la lluvia) si al menos un término es mayor que  $dw_p/dt$  como vimos arriba [37].

La documentación de MM5 versión 3 [27] pp.8-5 comenta que las ecuaciones (2.197) incluye términos ( $eu_p$  y  $ev_p$ ) representando los componentes usualmente descuidados de la fuerza Coriolis, arriba se mostró que cada término son incorrectos en coordenadas de proyección.

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions in the organization of the National Association of Manufacturers, as of the date of the meeting of the Board of Directors on the 15th day of June, 1911.

President: Mr. J. B. Condit, New York  
Vice-President: Mr. J. B. Condit, New York  
Secretary: Mr. J. B. Condit, New York  
Treasurer: Mr. J. B. Condit, New York

Executive Committee: Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York

Board of Directors: Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York  
Mr. J. B. Condit, New York

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions in the organization of the National Association of Manufacturers, as of the date of the meeting of the Board of Directors on the 15th day of June, 1911.

## Capítulo 3

# Simplificación de las ecuaciones meteorológicas

El objetivo del presente capítulo es simplificar las ecuaciones de movimiento para flujos atmosféricos, por simplicidad consideramos un modelo esférico terrestre con radio  $a$  como se ilustra en la fig 2.1. En la sección 3.1 usamos la ecuación de momentum para demostrar que cada variable termodinámica tiene la descomposición

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)} \mu^k$$

donde  $z_s$  es la componente vertical con respecto a un modelo esférico terrestre. Soluciones analíticas de la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  [46] son usadas en la sección 3.2 para mostrar que el término  $\psi^{(0)}(z_s, t)$  pueden ser estimado mediante un promedio espacial, la idea de la sección 3.2 para probar la existencia del desarrollo anterior se tomó de [47]. En la sección 3.3 se retoma parte de la sección 3.2 ahora en presencia de una topografía bidimensional. En la sección 3.4 calculamos los estados de referencia hidrostáticos para flujos adiabático, isotérmico o isocórico. En la sección 3.5 se simplifica la ecuación de momentum vertical para llegar a la ecuación hidrostática y a la ecuación de continuidad profunda. Finalmente en la sección 3.6 hacemos una breve deducción a la ecuación de continuidad profunda.

### 3.1. Existencia de un estado de referencia atmosférico

Sean  $\lambda, \phi, r$  coordenadas geográficas definidas con respecto al sistema cartesiano fijo a la Tierra  $XYZ$  y su origen está en el centro de la tierra donde

$$X = r \cos \phi \cos \lambda \quad Y = r \cos \phi \sin \lambda \quad Z = r \sin \phi.$$

En términos de las coordenadas curvilíneas

$$x_s = (\lambda - \lambda_c) a \cos \phi \quad y_s = (\phi - \phi_c) a \quad z_s = r - a.$$

las ecuaciones de momentum son (despreciando los términos de fricción)

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} - \frac{u_s v_s}{r} \tan \phi + \frac{u_s w_s}{r} - 2\Omega v_s \sin \phi + 2\Omega w_s \cos \phi &= -\frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_s} \\ \frac{dv_s}{dt} + \frac{u_s^2}{r} \tan \phi + \frac{v_s w_s}{r} + 2\Omega u_s \sin \phi + \Omega^2 r \cos \phi \sin \phi &= -\frac{a}{r \rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial y_s} \\ \frac{dw_s}{dt} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} - 2\Omega u_s \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial z_s} - g \frac{a^2}{r^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial x_s} + v_s \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial y_s} + w_s \frac{\partial}{\partial z_s}.$$

La forma para probar la descomposición (3.1) consiste en remplazarlas por ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a las curvas de presión constante llamadas (isobaras). Introduciendo las coordenadas quasi-polares  $\xi_s, \theta_s$  definidas por

$$x_s = \xi_s \cos \theta_s \quad y_s = \xi_s \sin \theta_s.$$

Donde las isobaras son definidas por la intersección de la superficie  $\theta_s = \theta_s^0 (= cte.)$  y las superficies de presión constante

$$p_s(x_s, y_s, z_s, t) = p_s^0 = cte.,$$

tiene una parametrización

$$x_s = \xi_s \cos \theta_s \quad y_s = \xi_s \sin \theta_s \quad z_s = f(\xi_s, \theta_s, t),$$

donde  $\theta_s$  y  $t$  son parámetros constantes, y obviamente satisfacen

$$p_s(x_s = \xi_s \cos \theta_s, y_s = \xi_s \sin \theta_s, z_s = f(\xi_s, \theta_s, t), t) = p_s^0$$

Derivando con respecto a  $\xi_s$  tenemos

$$\frac{df}{d\xi_s} = -\cos \theta_s \frac{\partial x_s p_s}{\partial z_s p_s} - \sin \theta_s \frac{\partial y_s p_s}{\partial z_s p_s} \quad (3.2)$$

donde los cocientes  $\frac{\partial x_s p_s}{\partial z_s p_s}$  y  $\frac{\partial y_s p_s}{\partial z_s p_s}$  se obtienen de las ecuaciones de momentum (3.1). La Ec. (3.2) define una ODE para  $f$  si el campo de velocidad y las fuerzas de fricción son conocidas. La solución de esta ecuación con la condición de frontera

$$f_s = z_0 \quad y \quad \xi_s = 0$$

es la isobaras que pasa a través del punto  $(x_s = y_s = 0, z_s = z_{s0})$ . La ecuación (3.2) es notable por que no tiene a la densidad  $\rho$ .

Comenzamos por introducir los valores característicos

$$\begin{array}{lll} L_x = L_y \equiv L & \text{para} & x_s, y_s \\ H & \text{para} & z_s \\ U = V & \text{para} & u_s, v_s \\ W & \text{para} & w_s \end{array}$$

y para el tiempo consideramos

$$t_0 \equiv \frac{L}{U}.$$

Sea  $p_r$  y  $T_r$  los valores característicos de la presión y la temperatura de la superficie terrestre, los valores característicos de la densidad  $\rho_r$  son obtenidos a través de la ecuación de estado,  $p_r = \mathcal{R}T_r\rho_r$ . Es conocido que los valores característicos para sistemas sinópticos son [37]

$$\begin{array}{lll} L = 10^3 \text{ km} & H = 10 \text{ km}, & U_0 = 10 \text{ ms}^{-1} \\ W_0 = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}, & \epsilon = 10^{-2} & \eta = 10^{-3}, \\ \delta = 10^{-1}, & \mu = 10^{-5}. & \end{array}$$

Esto da lugar a los parámetros adimensionales

$$\epsilon = \frac{H}{L} \quad \eta = \frac{W}{U} \quad \delta = \frac{L}{a} \quad \bar{\mu} = \frac{U_0^2}{gL}.$$

y las variables adimensionales

$$\begin{array}{llll} \bar{x}_s = \frac{x_s}{L} & \bar{y}_s = \frac{y_s}{L} & \bar{z}_s = \frac{z_s}{H} & \bar{t} = \frac{t}{U_0} \\ \bar{r}_s = \frac{r}{a} & \bar{u}_s = \frac{u_s}{U_0} & \bar{v}_s = \frac{v_s}{U_0} & \bar{w}_s = \frac{w_s}{W_0} \\ \bar{f}_s = \frac{f_s}{H} & \bar{\xi}_s = \frac{\xi_s}{L} & & \end{array}$$

con las cuales la ecuaciones de momentum (3.1) toman la forma adimensionalizada

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_s}{dt} - \delta \frac{\bar{u}_s \bar{v}_s}{\bar{r}} \tan \phi + \delta \eta \frac{\bar{u}_s \bar{w}_s}{\bar{r}} + \frac{2\Omega L}{U_0} (\eta \bar{w}_s \cos \phi - \bar{v}_s \sin \phi) &= -\frac{p_r/\rho_r \cos \phi_c}{U_0^2} \frac{1}{\cos \phi} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_s} \\ \frac{d\bar{v}_s}{dt} + \delta \frac{\bar{u}_s^2}{\bar{r}} \tan \phi + \delta \eta \frac{\bar{v}_s \bar{w}_s}{\bar{r}} + \frac{2\Omega L}{U_0} \bar{u}_s \sin \phi + \frac{\Omega^2 a L}{U_0^2} \bar{r} \cos \phi \sin \phi &= -\frac{p_r/\rho_r}{U_0^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}_s} \\ \epsilon \eta \frac{d\bar{w}_s}{dt} - \delta \epsilon \frac{\bar{u}_s^2 + \bar{v}_s^2}{\bar{r}} - \frac{2\Omega L}{U_0} \epsilon \bar{u}_s \cos \phi - \frac{\Omega^2 a L}{U_0^2} \epsilon \bar{r} \cos^2 \phi + \frac{gH}{U_0^2} \bar{r}^{-2} &= -\frac{p_r/\rho_r}{U_0^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}_s} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}_s \cos \phi_c}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{v}_s}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + \frac{\eta \bar{w}_s}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Introduzcamos la notación siguiente para el lado izquierdo de las *ecuaciones horizontales de momentum*

$$\begin{aligned} p_x &\equiv \frac{d\bar{u}_s}{dt} - \delta \frac{\bar{u}_s \bar{v}_s}{\bar{r}} \tan \phi + \delta \eta \frac{\bar{u}_s \bar{w}_s}{\bar{r}} + \frac{2\Omega L}{U_0} (\eta \bar{w}_s \cos \phi - \bar{v}_s \sin \phi) \\ p_y &\equiv \frac{d\bar{v}_s}{dt} + \delta \frac{\bar{u}_s^2}{\bar{r}} \tan \phi + \delta \eta \frac{\bar{v}_s \bar{w}_s}{\bar{r}} + \frac{2\Omega L}{U_0} \bar{u}_s \sin \phi + \frac{\Omega^2 a L}{U_0^2} \bar{r} \cos \phi \sin \phi \end{aligned}$$

Para el lado izquierdo de la *ecuación de momentum vertical* tenemos,

$$\epsilon \eta \frac{d\bar{w}}{dt} - \delta \epsilon \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{\bar{r}} - \frac{2\Omega L}{U_0} \epsilon \bar{u} \cos \phi - \frac{\Omega^2 a L}{U_0^2} \epsilon \bar{r} \cos^2 \phi + \frac{gH}{U_0^2} \bar{r}^{-2} = (1 + \tilde{\mu} p_z) \frac{\epsilon}{\tilde{\mu}} \bar{r}^{-2}$$

donde definimos

$$p_z \equiv \left( \eta \frac{d\bar{w}_s}{dt} - \delta \frac{\bar{u}_s^2 + \bar{v}_s^2}{\bar{r}} - \frac{2\Omega L}{U_0} \bar{u}_s \cos \phi - \frac{\Omega^2 a L}{U_0^2} \bar{r} \cos^2 \phi \right) \bar{r}^{22}$$

Entonces las ecuaciones de momentum (3.3) toman la forma

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{p_r/\rho_r \cos \phi_c}{U_0^2} \frac{1}{\cos \phi} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\ p_y &= -\frac{p_r/\rho_r}{U_0^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \\ (1 + \tilde{\mu} p_z) \frac{\epsilon}{\tilde{\mu}} \bar{r}^{-2} &= -\frac{p_r/\rho_r}{U_0^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

de la cual obtenemos los cocientes

$$\frac{\cos \phi_c}{\cos \phi} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\tilde{\mu}}{\epsilon} \bar{r}^2 \frac{p_x}{1 + \tilde{\mu} p_z} \quad \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\tilde{\mu}}{\epsilon} \bar{r}^2 \frac{p_y}{1 + \tilde{\mu} p_z} \quad (3.4)$$

y la ecuación de isobaras (3.2) queda como sigue

$$\frac{d\bar{f}_s}{d\bar{x}_s} = -\frac{\tilde{\mu}}{\epsilon} \left[ \cos \theta \frac{\cos \phi}{\cos \phi_c} p_x + \sin \theta p_y \right] \frac{\bar{r}^3}{1 + \tilde{\mu} p_z} \quad (3.5)$$

El parámetro relevante para estimar el orden de magnitud del lado derecho es

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\epsilon}$$

y si usamos los valores característicos anteriores

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\epsilon} = \frac{U_0^2}{gH} = \frac{10^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}}{10 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 10^4 \text{ m}^{-2}} = 10^{-3} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mu} = \mu \epsilon = 10^{-5} \quad (3.7)$$

$$\bar{r} \sim 1$$

obtenemos

$$\frac{d\bar{f}_s}{d\bar{\xi}_s} = -\mu \left[ \cos\theta \frac{\cos\phi}{\cos\phi_c} p_x + \sin\theta p_y \right] \frac{\bar{r}^3}{1 + \mu\epsilon p_z} \quad (3.8)$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación (3.5) tiene la forma

$$\frac{d\bar{f}_s}{d\bar{\xi}_s} = \mu F(\bar{\xi}_s, \bar{f}_s, \bar{t}, \theta_s, \mu) \quad \text{con } \bar{f}_s = \bar{z}_0 \text{ en } \bar{\xi}_s = 0.$$

donde  $\mu = 10^{-3}$  es un parámetro pequeño y  $F \sim 10^2$  lo que justifica la aplicación del siguiente resultado.

**Teorema 1.** Sea  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  un vector columna con  $n$  componentes que dependen de un parámetro  $\xi$ . Si  $F(\mathbf{X}, \xi, \mu)$  es analítica en  $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ , y continua en  $\xi$ , entonces el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = F(\mathbf{X}, \xi, \mu)$$

sujetas a la condición  $\mathbf{X}(\xi = 0, \mu) = 0$ , tiene una única solución de la forma

$$\mathbf{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}^{(k)}(\xi) \mu^k.$$

donde  $\mathbf{X}^{(k)}(\xi)$  es una función vectorial de  $\xi$ .

En nuestro caso el lado derecho de (3.8) es una función analítica de  $\mu$  en una vecindad de  $\mu = 0$  y podemos suponer que  $F(\bar{\xi}_s, \bar{f}_s, \bar{t}, \theta_s, \mu)$  es analítica en  $\bar{f}_s$  y continua en  $\bar{\xi}_s$ . Entonces el teorema anterior afirma que existe una solución de la forma

$$\bar{f}_s = \sum_{k=0}^{\infty} f_s^{(k)}(\bar{\xi}_s, \bar{f}_s, \bar{t}, \theta_s) \mu^k. \quad (3.9)$$

Es fácil de ver que los coeficientes  $f_s^{(k)}$  satisfacen las condiciones de frontera

$$\bar{f}_s^{(0)} = \bar{z}_0, \quad \bar{f}_s^{(k)} = 0 \quad \text{para } k \geq 0$$

Reemplazando la serie (3.9) en (3.8) obtenemos la solución a orden cero.

$$f^{(0)}(\xi_s, t, \theta_s) = z_0.$$

Esto significa que a orden cero la isobara que pasa a través de  $(x_s = y_s = 0, z_s = z_{s0})$  depende únicamente de  $z_s$  y, en consecuencia, el campo de presión tiene la forma

$$p(\mathbf{r}, t) = p^{(0)}(z_s, t) + \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(\mathbf{r}, t) \mu^k \quad (3.10)$$

*Este resultado riguroso es sobresaliente ya que es independiente de la distribución de temperatura  $T(\mathbf{r}, t)$  y densidad  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .*

Para la temperatura y la densidad proponemos los desarrollos

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T^{(k)} \mu^k \quad \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)} \mu^k. \quad (3.11)$$

Sustituyendo los desarrollos (3.10) y (3.11) en la ecuación de estado

$$p(\mathbf{r}, T) = RT(\mathbf{r}, T) \rho(\mathbf{r}, T)$$

obtenemos,

$$\sum_{k \geq 0} \mu^k p^{(k)} = R \sum_{k \geq 0} \mu^k \left[ \sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)} \rho^{(k-m)} \right]$$

donde usamos

$$T\rho = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m T^{(m)} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \rho^{(l)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left( \sum_{m=0}^k T^{(m)} \rho^{(k-m)} \right).$$

Por lo tanto,

$$p^{(k)} = R \sum_{m=0}^k T^{(m)} \rho^{(k-m)} \quad \text{para } k \geq 0$$

a orden cero tenemos

$$p^{(0)}(z_s, t) = RT^{(0)}(r, t) \rho^{(0)}(r, t)$$

de donde es natural que el lado derecho es sólo función de  $z_s$  y  $t$ , es decir

$$T^{(0)} = T^{(0)}(z_s, t) \quad \rho^{(0)} = \rho^{(0)}(z_s, t).$$

De acuerdo con lo anterior: *Cada variable termodinámica admite un desarrollo en potencias del parámetro  $\mu$  con la forma*

$$\psi(r, t) = \psi^{(0)}(z_s, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)}(r, t) \mu^k. \quad (3.12)$$

Los términos de orden cero  $p^{(0)}(z_s, t)$ ,  $\rho^{(0)}(z_s, t)$  y  $T^{(0)}(z_s, t)$  satisfacen la ecuación de estado

$$p^{(0)}(z_s, t) = RT^{(0)}(z_s, t) \rho^{(0)}(z_s, t)$$

y definen lo que en lo que podemos llamar **estado termodinámico atmosférico de referencia** o, simplemente, **estado de referencia atmosférico**.

Para simplificar la notación podemos expresar cada desarrollo (3.12) como sigue

$$\psi^{(0)}(z_s, t) \equiv \psi_0(z_s, t) \quad \sum_{k \geq 1}^{\infty} \psi^{(k)}(r, t) \mu^k \equiv \psi_1(r, t)$$

con lo cual tenemos

$$\psi(r, t) = \psi_0(z_s, t) + \psi_1(r, t). \quad (3.13)$$

Para  $p$ ,  $\rho$  y  $T$  tenemos

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_0(z_s, t) + p_1(r, t) = p_0 + p_1 \\ \rho(r, t) &= \rho_0(z_s, t) + \rho_1(r, t) = \rho_0 + \rho_1 \\ T(r, t) &= T_0(z_s, t) + T_1(r, t) = T_0 + T_1. \end{aligned}$$

El resultado primario que hemos demostrado es la existencia del desarrollo (3.9) para la presión y hemos supuesto que existen desarrollos similares (3.10) para  $\rho$  y  $T$ . Hay casos de interés donde los desarrollos (3.10) son obvios para  $\rho$  y  $T$ . En el caso de un flujo barotrópico la densidad está determinada únicamente por la presión  $\rho = \rho(p)$  y si suponemos que esta función es analítica entonces es inmediato que la densidad  $\rho$  tiene el desarrollo (3.13) y usando la ecuación de estado se concluye que la temperatura admite el desarrollo (3.13). Como casos particulares tenemos:

1. **Atmósfera isotérmica.** En este caso es obvio la validez del desarrollo para  $\rho$  ya que, de acuerdo con la ecuación de estado,  $\rho$  es una función lineal de la presión y por tanto

$$\rho = \frac{p(r, t)}{RT} = \frac{p^{(0)}(z_s, t)}{RT} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(r, t)}{RT} \mu^k. \quad (3.14)$$

2. Atmósfera isoentrópica. De acuerdo con las fórmulas de Poisson

$$T = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad \rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{c_v}{c_p}} \quad (3.15)$$

es obvio que  $\rho$  y  $T$  tiene desarrollos en  $\mu$  ya que *son funciones analíticas de la presión  $p(r, t)$ .*

3. Atmósfera isocórica. Este caso análogo al de la atmósfera isotérmica.

**Nota.** Es interesante observar que el uso de la **aproximación hidrostática**

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} = g \frac{a^2}{r^2} + A_z \sim g.$$

constituye una perturbación **regular** de la ecuación de isobaras. En efecto, la ecuación de momentum vertical adimensionalizada es

$$-\frac{p_r/\rho_r}{U_0^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = (1 + \tilde{\mu} p_z) \frac{1}{\mu} \bar{r}^{-2}$$

y al calcular los cocientes (3.4) podemos desarrollar en **forma regular** el cociente

$$\frac{1}{1 + \mu \varepsilon p_z} = (1 + \mu \varepsilon p_z)^{-1} = 1 - \underbrace{\mu \varepsilon p_z}_{10^{-3}} + O(10^{-6}) \sim 1$$

lo que equivale exactamente a usar la aproximación hidrostática!

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} \sim g$$

por lo que tal aproximación no implica una pérdida significativa de información o precisión en el cálculo de isobaras y en la definición del estado de referencia atmosférico.

### 3.2. Estimación del valor de referencia $\psi^{(0)}(z_s, t)$ con un flujo bidimensional.

En esta sección consideramos el cálculo de  $\psi^{(0)}(z_s, t)$  en (3.13) por medio de el promedio espacial

$$\hat{\psi}(z_s) = \frac{1}{L_s} \int_{-L_s/2}^{+L_s/2} \psi(x_s, z_s) dx_s \quad (3.16)$$

para el caso de un flujo bidimensional estacionario en el plano  $xz$ . El flujo en cuestión  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + w\mathbf{k}$  es una solución analítica de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.17)$$

con la condición de frontera

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } z = h(x) \quad (3.18)$$

donde  $h(x)$  es la elevación del terreno en el punto  $(x, y = 0, z = 0)$ . En la Fig. 3.1 se muestra la región y algunos puntos donde  $\mathbf{v}$  es calculado. La elevación del terreno  $h(x)$  se define por medio de un spline cúbico natural calculando a partir de datos de elevación del terreno obtenidos de la base de datos GTOPO30 [39]. El campo  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + w\mathbf{k}$  es calculado con el dato  $u = 10 \text{ ms}^{-1}$  y  $w = 0$  en el punto  $(x = 0, z = 10 \text{ km})$ , con el método de mapeo conforme [47].

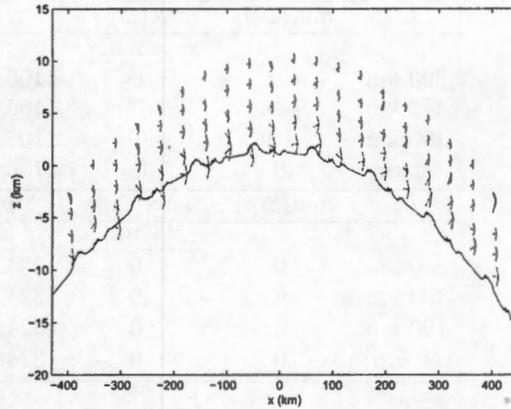


Figura 3.1: Topografía y campo de velocidad

### 3.2.1. Estimación de $p^{(0)}(z_s, t)$

Consideremos el cálculo del término  $p^{(0)}(z_s, t)$  correspondiente a la *descomposición de la presión* (3.10)

$$p(x_s, z_s) = p^{(0)}(z_s) + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\mathbf{r}) \mu^k, \quad (3.19)$$

usando el promedio espacial

$$\hat{p}(z_s) = \frac{1}{L_s} \int_{-L_s/2}^{+L_s/2} p(x_s, z_s) dx_s \quad (3.20)$$

La ecuación de Bernoulli usada para obtener el campo de presión en el punto  $\mathbf{r} = (x, z)$  es

$$\frac{p(\mathbf{r})}{\rho_0} = C_0 - \frac{1}{2}v^2(\mathbf{r}) + \Phi_g(\mathbf{r})$$

donde  $v^2 = u^2 + w^2$ ,  $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\phi_g(\mathbf{r}) = -ga^2/(z_s + a)$  es el potencial gravitacional,  $a = 6376,98 \text{ km}$  es el radio de la Tierra y  $C_0 = -62428 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$  es calculado con  $p(\mathbf{r}) = 324,84 \text{ mb}$ ,  $u = 10,0 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ,  $w = 0,13 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ,  $\phi_g(\mathbf{r}) = -62460 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$  en  $(x = 0, y = 0, z_s = 10 \text{ km})$ . El error relativo de  $\hat{p}(z_s)$  con respecto al valor exacto  $p(x, z_s)$ ,

$$\Delta \hat{p}(z_s) = \left( 1 - \frac{\hat{p}(z_s)}{p(x_s, z_s)} \right) \times 100,$$

es una medida adecuada de la exactitud de  $\hat{p}$  si ésta es vista como una aproximación de  $p(x_s, z_s)$  y el estado de referencia  $p^{(0)}(z_s)$ .

La Tabla I muestra los resultados para la presión. Sorprendentemente, vemos que  $\hat{p}(z_s)$  tiene un error relativo  $|\Delta \hat{p}(z_s)|$  que es menor a 0,1 % para  $L_s$  de 50 a 800 km, así que para propósitos prácticos  $\hat{p}(z_s)$  es casi igual a  $p(x, z_s)$  y, en consecuencia, el campo  $p(\mathbf{r})$  tiene la descomposición

$$p(x_s, z_s) = \hat{p}(z_s) + \delta \hat{p}(x_s, z_s)$$

con  $|\delta \hat{p}/p| < 10^{-1} \%$ . En [46] se reportan soluciones analíticas de la ecuación de continuidad profunda  $\nabla \cdot \rho_0(\mathbf{r})\mathbf{U}(\mathbf{r}) = 0$ . El uso del campo  $\mathbf{U}$  nos da, básicamente, los mismos resultados de la Tabla II. Estos resultados justifican la descomposición (3.13) y la estimación de  $\psi^{(0)}(z_s, t)$  por medio de un promedio espacial  $\hat{\psi}(z_s)$  (3.16).

TABLA I. Valores de  $\bar{p}$ ,  $\min\{\Delta\bar{p}\}$  y  $\max\{\Delta\bar{p}\}$  para la presión (en mb) a  $z_s = 2, 10$  km.

$L_s$	$\min\{\Delta\bar{p}\}$	$\max\{\Delta\bar{p}\}$	$\bar{p}$
$z_s = 2$ km			
800 km	-.1	.1	1106.64
400 km	-.1	.1	1106.60
100 km	-.1	.0	1106.65
50 km	.0	.0	1106.67
$L_s$	$\min\{\Delta\bar{p}\}$	$\max\{\Delta\bar{p}\}$	$\bar{p}$
$z_s = 10$ km			
800 km	.0	.0	324.85
400 km	.0	.0	324.85
100 km	.0	.0	324.85
50 km	.0	.0	324.86

### 3.2.2. Región de validez de la descomposición estándar $\psi(t, \mathbf{r}) = \psi_0(z) + \bar{\psi}(t, \mathbf{r})$

En la literatura estándar de meteorología de mesoescala se simplifican la ecuaciones de movimiento proponiendo la descomposición

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \psi_0(z) + \bar{\psi}(t, \mathbf{r}) \quad (3.21)$$

donde los valores de referencia  $\psi_0(z)$  son estimados por medio del promedio espacial

$$\bar{\psi}(z) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \psi(x, z) dx. \quad (3.22)$$

Siendo  $Z$  la altura relativa a un plano tangente a un modelo esférico terrestre. El error relativo de  $\bar{\psi}(z)$  con respecto a el valor exacto  $\psi(x, z)$ ,

$$\Delta\bar{\psi}(z) = \left( 1 - \frac{\bar{\psi}(z)}{\psi(x, z)} \right) \times 100,$$

es una medida de la exactitud de  $\bar{\psi}$  si es vista como una aproximación de  $\psi(x, z)$  y del estado de referencia. La Tabla II reporta los resultados para la presión obtenidos de el mismo flujo de la Tabla I y de la ecuación de Bernoulli. Ahí vemos que el error relativo  $|\Delta\bar{p}|$  es menor que 5 % para  $L \leq 100$  km. Del uso de soluciones analíticas de la ecuación de continuidad profunda  $\nabla \cdot \rho_0(\mathbf{r})\mathbf{U}(\mathbf{r}) = 0$  se obtienen, básicamente, los mismos valores de la Tabla I. Si consideramos que el promedio de  $\bar{p}(z)$  es obtenido de un campo exacto  $p(x, z)$  mientras que en situaciones reales  $\bar{p}(z)$  es estimado de datos de una red de monitoreo y, por lo tanto, su precisión con respecto a los valores verdaderos de  $\bar{p}(z)$ , puede ser pobre por lo que la validez de la descomposición (3.21) puede ser significativamente menor que  $100 \times 100$  km<sup>2</sup>.

TABLA II. Valores de  $\bar{p}$ ,  $\min\{\Delta\bar{p}\}$  y  $\max\{\Delta\bar{p}\}$  para la presión (en mb) a  $z = 2, 10$  km.

$L$	$\min\{\Delta\bar{p}\}$	$\max\{\Delta\bar{p}\}$	$\bar{p}$
$z_s = 2$ km			
400 km	-20,2	10,4	1002,63
200 km	-4,7	2,4	1080,71
150 km	-2,6	1,3	1092,42
100 km	-1,2	0,5	1100,87
50 km	-0,3	0,2	1105,02
$L$	$\min\{\Delta\bar{p}\}$	$\max\{\Delta\bar{p}\}$	$\bar{p}$
$z_s = 10$ km			
400 km	-91,5	45,8	222,82
200 km	-17,0	8,5	299,28
150 km	-9,2	4,6	310,44
100 km	-4,0	2,0	318,42
50 km	-1,0	0,5	323,20

### 3.3. Estimación del orden de magnitud del cociente $\psi_1(\mathbf{r}, t) / \psi_0(\mathbf{r}, t)$

#### 3.3.1. Resultados con el flujo $v$ sobre una topografía bidimensional

Hemos visto que el promedio espacial

$$\hat{p}_0(z_s) = \frac{1}{L_s} \int_{-L_s/2}^{L_s/2} p(x_s, z_s) dx_s \quad (3.23)$$

tiene un error relativo

$$\left| \frac{\delta p}{p} \right| = \left| \frac{\hat{p}_0(z_s) - p(x_s, z_s)}{p(x_s, z_s)} \right| \quad (3.24)$$

acotado por  $10^{-3}$  para  $z_s = 2$  y  $10$  km y

$$\left| \frac{\delta p}{p} \right| \leq 10^{-3} \quad \text{con } 50 \text{ km} \leq L_s \leq 800 \text{ km} \quad (3.25)$$

ó

$$|\delta p| \leq 10^{-3} p \quad \text{con } 50 \text{ km} \leq L_s \leq 800 \text{ km} \quad (3.26)$$

En esta forma podemos proponer la descomposición

$$p(\mathbf{r}) = \hat{p}_0(z_s) + \delta p \quad (3.27)$$

donde la corrección  $\delta p$  satisface

$$\left| \frac{\delta p}{p} \right| < 10^{-3}$$

ó, equivalentemente,

$$p \sim p_0, \quad \delta p \sim 10^{-3} p_0 \quad \text{ó} \quad \delta p \sim 10^{-3} p.$$

Resumiendo, la presión  $p(\mathbf{r}, t)$  admite la descomposición

$$p = p_0(z_s, t) + p_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.28)$$

donde

$$p_1 \lesssim 10^{-3} p_0 \quad \text{para } 10^2 \text{ km} \leq L_s \leq 10^3 \text{ km.}$$

Para  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y  $T(\mathbf{r}, t)$  proponemos

$$\rho = \rho_0(z_s, t) + \rho_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.29)$$

$$T = T_0(z_s, t) + T_1(\mathbf{r}, t) \quad (3.30)$$

donde  $\rho$  y  $T$  y los términos de referencia  $\rho_0$  y  $T_0$  satisfacen la ecuación de estado

$$p_0 = RT_0\rho_0 \quad (3.31)$$

$$p = RT\rho. \quad (3.32)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.28)-(3.30) en la ecuación(3.32) y usando la ecuación (3.31) se obtiene

$$\underbrace{p_0}_{p_0} + p_1 = \mathcal{R} (T_0 + T_1) (\rho_0 + \rho_1) = \underbrace{\mathcal{R} (T_0\rho_0)}_{p_0} + \mathcal{R} (T_1\rho_0 + T_0\rho_1)$$

que se reduce a

$$p_1 = \mathcal{R} (T_1\rho_0 + T_0\rho_1)$$

y dividiendo miembro a miembro con (3.32),

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\mathcal{R} (T_1\rho_0 + T_0\rho_1)}{\mathcal{R} T_0\rho_0} = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0},$$

se llega a

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

De acuerdo con relación

$$\left| \frac{p_1}{p_0} \right| \lesssim 10^{-3}$$

se obtiene

$$\left| \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| \lesssim 10^{-3}.$$

Esta desigualdad sugiere que tiene lugar las relaciones

$$|T_1| \lesssim 10^{-3} T_0 \quad |\rho_1| \lesssim 10^{-3} \rho_0, \quad (3.33)$$

dado que su magnitud es acotada, para una escala horizontal  $L_s$  en el rango siguiente

$$10^2 \text{ km} \leq L_s \leq 10^3 \text{ km}.$$

### 3.4. Estados de referencia hidrostáticos: Isotérmico, adiabático e isocórico

En la literatura estándar y en modelos computacionales se acostumbra estimar el estado de referencia atmosférico con los valores de  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  correspondientes a una *atmósfera hidrostática* sobre un modelo *esférico* terrestre, despreciando el efecto de la aceleración centrípeta, lo que equivale a hacer  $\Omega = 0$  en la ecuación de momentum

$$\mathbf{a} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

En una atmósfera barotrópica tenemos

$$\rho = \rho(p)$$

donde podemos calcular la función

$$P[p] \equiv \int^p \frac{ds}{\rho(s)}$$

en términos de la cual la ecuación de momentum se reduce a

$$\nabla [P - \Phi_g] = 0.$$

donde solo aparece el potencial gravitacional de una esfera con radio  $a$

$$\Phi_g = g \frac{a^2}{r} \quad \text{con } g \equiv \frac{GM_e}{a^2}$$

De acuerdo con este resultado las superficies con  $P = \text{cte.}$  coinciden con las superficies equipotenciales del campo de gravedad

$$P(p_0) - \Phi_g(z_s) = C$$

donde agregamos el subíndice  $_0$  para indicar valores de referencia, y la constante de integración  $C$  se determina con los valores de referencia de la presión y la temperatura en la superficie terrestre  $p_{00} = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_{00} = 300^\circ \text{K}$

$$C = P(p_{00}) - \Phi_g(z_s = 0) = P[p_{00}] - ga = ga \left( 1 - \frac{a}{r} \right)$$

En esta forma obtenemos,

$$P(p) - \Phi_g(z_s) = P(p_{00}) - \Phi_g(0) \quad \text{ó} \quad P[p_0] - P[p_{00}] = \Phi_g(z_s) - ga = -ga \left( 1 - \frac{a}{r} \right)$$

donde

$$r = z_s - a.$$

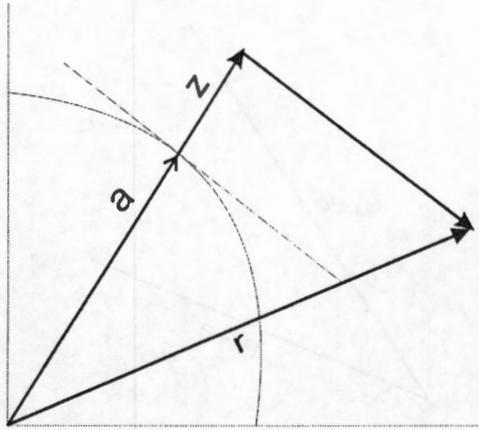


Figura 3.2: Sistema Cartesiano  $xyz$  asociado a un plano tangente a la esfera terrestre

Veamos algunos casos particulares.

(i) En el caso de una atmósfera isotérmica tenemos

$$P[p_0] - P[p_{00}] = RT \ln \frac{p_0}{p_{00}} = -ga \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

donde definimos

$$H_s \equiv \frac{RT_{00}}{p_{00}}$$

como la altura característica de una atmósfera isotérmica. Con los valores estandar

$$R = 2875 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}, \quad g = 9,8 \text{ms}^{-2} \text{ y } T_{00} = 300^\circ\text{K}$$

tenemos

$$H_s = 8,78 \text{ km.}$$

por tanto

$$p_0(z_s) = p_{00} \exp \left[ -\frac{ga}{RT} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right] = p_{00} e^{-\frac{a}{H_s} \left(1 - \frac{a}{r}\right)}$$

para valores  $z_s \lesssim 20 \text{ km}$  podemos usar el desarrollo

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{z_s + a} = \left(1 + \frac{z_s}{a}\right)^{-1} \sim 1 - \frac{z_s}{a} \quad (3.34)$$

con lo cual se obtiene las expresiones razonables

$$p_0(z_s) = p_{00} e^{-\frac{z_s}{H_s}}$$

$$\rho_0(z_s) = \rho_{00} e^{-\frac{z_s}{H_s}}.$$

(ii) Consideremos una atmósfera isotérmica pero en un sistema cartesiano asociado a un plano tangente a la esfera terrestre, como se aprecia en la figura 3.2, tenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}$$

sin importar la orientación de los ejes  $x, y$ .

Sea  $L$  la cota máxima de  $|x|$  y  $|y|$ . Podemos estimar una cota de  $L$  a partir de la intersección de la esfera con radio  $r = H_0 + a$  y el plano  $xy$ : donde  $H_0$  es la altura media de la tropósfera

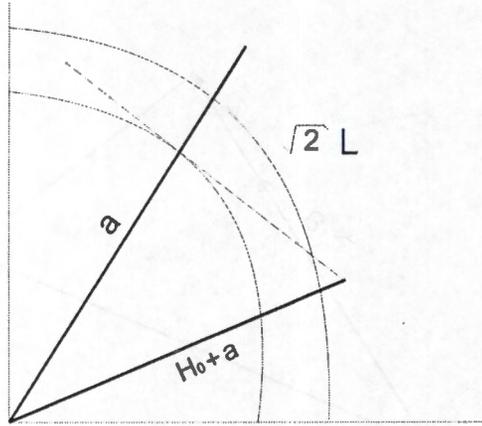


Figura 3.3: Intersección de la esfera con radio  $r = H_0 + a$  y el plano  $xy$

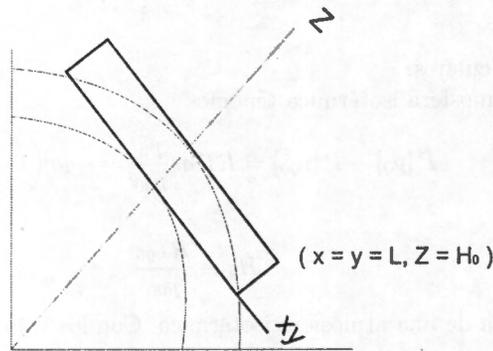


Figura 3.4: Plano  $xy$  de dominio máximo  $[-L, L] \times [-L, L]$

En este caso  $r^2 = (H_0 + a)^2 = 2L^2 + a^2$  da

$$L^2 = \frac{(H_0 + a)^2 - a^2}{2} = H_0 \left( a + \frac{H_0}{2} \right).$$

Para  $H_0 \sim 20 \text{ km}$  y  $a \sim 6378 \text{ km}$  tenemos

$$L = 357,4 \text{ km}$$

valor que define el dominio máximo en el plano  $xy [-L, L] \times [-L, L]$  cota promedio superior de la tropósfera queda arriba de dicho dominio

Con los valores de  $L$  y  $H_0$  podemos aproximar  $r$ . En términos de las variables adimensionales  $\bar{x} = \frac{x}{L}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{L}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{L}$  tenemos

$$r^2 = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) L^2 + (a + H_0 \bar{z})^2 = \bar{\xi}^2 \frac{L^2}{a^2} + a^2 \left( 1 + \bar{z} \frac{H_0}{a} \right)^2 = a^2 \left[ 1 + 2\bar{z} \frac{H_0}{a} + \bar{\xi}^2 \frac{L^2}{a^2} + \bar{z}^2 \frac{H_0^2}{a^2} \right]$$

donde definimos

$$\bar{\xi}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2.$$

De acuerdo con los ordenes de magnitudes

$$\begin{aligned} \frac{L}{a} &= \frac{357,4}{6378} = 5,6 \cdot 10^{-2} \rightarrow \frac{L^2}{a^2} = 3,1 \cdot 10^{-3} \\ \frac{H_0}{a} &= \frac{20}{6378} = 3,1 \cdot 10^{-3} \rightarrow \frac{H_0^2}{a^2} = 9,6 \cdot 10^{-6} \sim 10^{-5} \end{aligned}$$

podemos usar la aproximación

$$r = a^2 [1 + \lambda], \quad \text{con} \quad \lambda \equiv 2\bar{z} \frac{H_0}{a} + \xi^2 \frac{L^2}{a^2}$$

con lo cual obtenemos

$$1 + \frac{a}{r} = 1 - (1 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left[1 - \frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda}{2} = \frac{\xi^2 L^2}{2a^2} + \frac{H_0}{a} \bar{z} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\xi^2}{2} + az\right). \quad (3.35)$$

Así llegamos a la atmósfera de referencia isotérmica

$$p_0(x, y, z) = p_{00} \exp \left[ -\frac{1}{H_0 a} \left( \frac{\xi^2}{2} + az \right) \right]$$

$$\rho_0(x, y, z) = \rho_{00} \exp \left[ -\frac{1}{H_0 a} \left( \frac{\xi^2}{2} + az \right) \right]$$

válida para  $|x|, |y| \leq 357.4 \text{ km}$ ,  $|z| \leq H_0 = 20 \text{ km}$ .

NOTA: (1) Primero exponer atmósfera de referencia en  $z_s$ . (2) Entonces abordar los aspectos geométricos y las aproximaciones para trabajar con las coordenadas  $x, y, z$ . (3) Separar las aproximaciones  $|z_s| \leq 20 \text{ km}$

Para una atmósfera adiabática tenemos la fórmula de Poisson

$$\rho_0^{-1} = \rho_{*0}^{-1} \left( \frac{p_0}{p_{*0}} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (3.36)$$

donde  $p_{*0}$  y  $\rho_{*0}$  son los valores de una partícula durante un proceso adiabático. Podemos visualizar mejor el significado de estas constantes si pensamos que la atmósfera completa se somete a un proceso adiabático para llevarla de un estado de equilibrio hidrostático a otro, en el cual cada partícula pasa de un estado definido por  $(\rho_0, p_0)$ . Entonces resulta claro que  $\rho_{*0}, p_{*0}$  dependen de la posición "inicial"  $z_{s0}$  y  $\rho_0, p_0$  de la posición final  $z_s$ , es decir,

$$\rho_0^{-1}(z_s) = \rho_{*0}^{-1}(z_{s0}) \left[ \frac{p_0(z_s)}{p_{*0}(z_{s0})} \right]^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Integrando obtenemos

$$P[p_0] = c_p T_{*0} \left( \frac{p_0}{p_{*0}} \right)^{R/c_p} \equiv c_p C p_0^{R/c_p}$$

donde definimos  $C \equiv c(z_{s0}) = T_{*0} p_{*0}^{-R/c_p}$ . Sustituyendo en (3.36)

$$P[p_0(z_s)] - P[p_{00}(z_s)] = -ga \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

y haciendo algunas manipulaciones algebraicas

$$P[p_0(z_s)] - P[p_{00}(z_s)] = c_p C \left[ p_0^{R/c_p} - p_{00}^{R/c_p} \right] = c_p C p_{00}^{R/c_p} \left[ \left( \frac{p_0}{p_{00}} \right)^{R/c_p} - 1 \right].$$

$$\left( \frac{p_0}{p_{00}} \right)^{R/c_p} = 1 - \frac{ga}{c_p T_{*0}} \left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

se llega a

$$p_0(z_s) = p_{00} \left[ 1 - \frac{ga}{c_p T_{*0}(z_{s0})} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right]^{c_p/R} \quad (3.37)$$

Este resultado nos da la distribución espacial de la presión. Pensando en forma lagrangiana es decir en términos de partículas, la ecuación (3.37) da el valor de la presión de una partícula en  $z_s$ , cuando inicialmente

se localiza en  $z_{s0}$  con temperatura  $T_{*0}$ . Una *aproximación* consiste en sustituir  $T_{*0}$  por el valor de referencia  $T_{00}$ , con lo cual se obtiene

$$p_0(z_s) = p_{00} \left[ 1 - \frac{a}{H_p} \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \right]^{c_p/R}$$

donde definimos

$$H_p \equiv \frac{c_p T_{00}}{g}$$

y tiene el valor

$$H_p = \frac{c_p T_{00}}{g} = \frac{(104 \text{ J}^\circ \text{Kkg}^{-1})(300^\circ \text{K})}{9.8 \text{ ms}^{-2}} = 30.735 \text{ km.}$$

La aproximación  $T_{*0}(z_{s0}) \sim T_{00}$  equivale a decir que inicialmente la atmósfera es isotérmica. Esto sólo es válido en una pequeña capa atmosférica cercana a la superficie probablemente no mayor a 100km por lo que el uso (3.37) define un estado de referencia en la tropósfera, es mala aproximación, ó inconsistente.

Para  $|z_s| \leq 20 \text{ km}$  tenemos *xyz*

$$p_0(z_s) = p_{00} \left[ 1 - \frac{z_s}{H_p} \right]^{c_p/R} \quad (3.38)$$

y para el sistema cartesiano *xyz* tenemos

$$p_0(z_s) = p_{00} \left[ 1 - \frac{1}{a H_p} \left( \frac{\xi^2}{2} - az \right) \right]^{c_p/R} \quad (3.39)$$

Si usamos la fórmula de Poisson (3.37) y (3.38) para obtener la distribución de densidad obtenemos

$$\rho_0 = \rho_{*0} \left( \frac{p_0}{p_{*0}} \right)^{c_v/c_p} = \rho_{*0} \left( \frac{p_{00}}{p_{*0}} \right)^{c_v/c_p} \left[ 1 - \frac{z_s}{H_p} \right]^{c_v/c_p}$$

En la literatura se reporta la expresión

$$\rho(z_s) = \rho_{00} \left( \frac{p_0}{p_{*0}} \right)^{c_v/c_p} \left[ 1 - \frac{z_s}{H_p} \right]^{c_v/c_p}$$

la cual equivale a usar las aproximaciones  $\rho_{*0} \sim \rho_{00}$ ,  $p_{*0} \sim p_{00}$ , válidas en una vecindad de la superficie terrestre.

Problema abierto: Para evitar las aproximaciones anteriores que limitan el estado de referencia estandar a una capa atmosférica conviene definir y usar las ecuaciones que gobiernan la evolución de dicho estado!

### 3.5. Simplificación de la ecuación para $w_s$

Las ecuación de movimiento vertical para una Tierra *esférica* es

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \phi - \Omega^2 r \cos^2 \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - \frac{g}{r^2} \quad (3.40)$$

Los valores característicos aceptados para latitudes medias son

$$U \sim 10 \text{ ms}^{-1} \quad W \sim 10^{-2} \text{ ms}^{-1} \quad L \sim 10^6 \text{ m}$$

y la escala de tiempo  $t_c$  se estima a partir de  $U = L/t_c$ , de donde se obtiene

$$t_c \sim \frac{L}{U} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{t_c} = \frac{U}{L} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

entonces

$$\begin{array}{rclclcl}
 \frac{dw_s}{dt} & \sim & W/t_c & = & 10^{-2} \text{ ms}^{-1} \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} & = & 10^{-7} \text{ ms}^{-2} \\
 \frac{u_s^2 + v_s^2}{r} & \sim & \frac{U^2}{a} & = & \frac{10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{6,378 \times 10^6 \text{ m}} & = & 1,6 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2} \\
 2\Omega u_s & \sim & 2\Omega U & = & 2 \times 7 \times 10^{-5} \times 10 \text{ ms}^{-2} & = & 1,4 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2} \\
 \Omega^2 r & \sim & \Omega^2 a & = & 49 \times 10^{-10} \text{ s}^{-2} \times 6,3 \times 10^6 \text{ m} & = & 3,1 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \\
 g & \sim & & = & & = & 10 \text{ ms}^{-2}
 \end{array}$$

a) El término dominante en el lado izquierdo de (3.40) corresponde a la aceleración centrípeta

$$\Omega^2 a \bar{r} \cos^2 \phi \sim 3 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}.$$

b) El término dominante en el lado derecho de (3.40) es

$$g \sim 10 \text{ ms}^{-2}$$

por que necesariamente debemos tener

$$\frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} \sim 10 \text{ ms}^{-2}$$

Efectivamente, éste es el caso, si usamos los valores

$$p_r \sim 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Nm}^{-2}, \quad H \sim 10^4 \text{ m}, \quad \rho_r \sim 1 \text{ kg m}^{-3}$$

obtenemos

$$\frac{-1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial z_s} \sim \frac{p_r}{\rho_r H} = \frac{10^5 \text{ Nm}^{-2}}{10^4 \text{ kg m}^{-3} \text{ m}} = 10 \text{ ms}^{-2}$$

Por lo tanto, la ecuación de momentum se reduce a la bien conocida aproximación hidrostática

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} = -g \frac{a^2}{r^2} \quad (3.41)$$

De acuerdo con (3.28) y (3.29) podemos aproximar  $\rho$  y  $p$  por los valores de referencia  $\rho_0$  y  $p_0$ , esto es

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z_s} = -g \frac{a^2}{r^2} \quad (3.42)$$

lo cual es consistente con el hecho de que  $\rho_0$  y  $p_0$  son funciones de  $z_s$

$$p_0 = p_0(z_s, t), \quad \rho_0 = \rho_0(z_s, t), \quad (3.43)$$

y el lado derecho de la ecuación(3.42) también lo es. Pero debemos señalar lo siguiente: La ecuación (3.42) está en forma Euleriana

$$\frac{1}{\rho_0(z_s, t)} \frac{\partial p_0(z_s, t)}{\partial z_s} = -g \frac{a^2}{(z_s + a)^2} \quad (3.44)$$

y dado que el lado derecho *no depende explícitamente del tiempo t*, entonces el lado izquierdo también debe serlo, por lo que podemos proponer

$$\rho_0 = \rho_0(z_s), \quad p_0 = p_0(z_s).$$

Esto reduce la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

a la forma

$$\nabla \cdot \rho_0(z_s) \mathbf{v} = 0$$

conocida como ecuación de continuidad profunda.

### 3.6. Ecuación de continuidad profunda $\nabla \cdot \rho(z_s) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$

Para simplificar la ecuación de continuidad profunda tenemos (2.16)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= u_s \hat{x}_s + v_s \hat{y}_s + w_s \hat{z}_s \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \\ \nabla &= \hat{x}_s \frac{a \cos \phi_0}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial x_s} + \hat{y}_s \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial y_s} + \hat{z}_s \frac{\partial}{\partial z_s} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{a \cos \phi_0}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{a}{r \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial y_s} + \frac{\partial w}{\partial z_s} + 2 \frac{w}{r} \end{aligned}$$

y dimensionalizamos

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}U & v &= \bar{v}U & w &= \bar{w}W \\ x_s &= \bar{x}L & y_s &= \bar{y}L & z_s &= \bar{z}H \\ \bar{r} &= \frac{r}{a} = \frac{z_s + a}{a} = 1 + \frac{z_s}{a} = 1 + \frac{z_s}{H} \frac{H}{L} = 1 + \bar{z}\xi\delta \end{aligned}$$

donde definimos

$$\xi = \frac{H}{L} \quad \delta = \frac{L}{a} \quad \eta = \frac{W}{U}$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{U_0}{L} \left[ \hat{x}_s \frac{a \cos \phi_c}{r \cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\bar{v} \cos \phi)}{\partial \bar{y}} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + 2\eta\delta \frac{\bar{w}}{\bar{r}} \right]$$

Para  $10^2 \leq L_s \leq 10^3$  (km),  $H \sim 10$  km,  $U \sim 10 \text{ms}^{-1}$ ,  $W \sim 10^{-2} \text{ms}^{-1}$  se tiene

$$10^{-1} \leq \xi \leq 10^{-2} \quad 10^{-2} \leq \delta \leq 10^{-1} \quad \eta \sim \frac{10^{-2} \text{ms}^{-1}}{10 \text{ms}^{-1}} \sim 10^{-3}$$

lo que da las cotas

$$\begin{aligned} 10^{-2} &\leq \frac{\eta}{\xi} \leq 10^{-1} \\ 10^{-2} &\leq \eta\delta \leq 10^{-1} \\ 10^{-4} \text{s}^{-1} &\leq \frac{U}{L} = \frac{10}{10^6 \delta} \frac{10}{10^5} \leq 10^{-5} \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{U}{L} \left[ \underbrace{\frac{1}{\bar{r}} \frac{a \cos \phi_c}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\bar{v} \cos \phi)}{\partial \bar{y}}}_1 + \underbrace{\frac{\eta}{\xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}}_{10^{-2} \leq \leq 10^{-1}} + \underbrace{2\eta\delta \frac{\bar{w}}{\bar{r}}}_{10^{-5} \leq \leq 10^{-4}} \right] \quad (3.45)$$

por tanto

$$10^{-4} \text{s}^{-1} \leq \nabla \cdot \mathbf{v} \leq 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

Nótese que  $10^{-5}$  es el orden de magnitud de la frecuencia de rotación terrestre  $\frac{1}{24 \text{hrs}} \sim 10^{-5} \text{s}$ . De acuerdo con  $|\rho_1| \lesssim 10^{-3} \rho_0$  podemos usar la aproximación  $\rho \sim \rho_0$

$$\begin{aligned} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &\sim \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{d}{dt} \rho &\sim \frac{d}{dt} \rho_0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + z_s \frac{\partial \rho_0}{\partial z_s} = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + w_s \frac{\partial \rho_0}{\partial z_s} \end{aligned}$$

Para estimar el orden de magnitud de  $\frac{d}{dt} \rho_0$  adimensionalicemos

$$t = t_c \bar{t} \quad \rho = \bar{\rho} \rho_{00}$$

para obtener

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[ \frac{1}{t_c} \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial \bar{t}} + \frac{W}{H} \bar{w} \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial \bar{z}} \right] \rho_{00}$$

donde

$$t_0 = \frac{L}{U} \rightarrow \frac{U}{L} = \frac{1}{t_0} \in [10^{-5} \text{s}^{-1}, 10^{-4} \text{s}^{-1}] \quad \text{para } 10^2 \text{km} \leq L \leq 10^3 \text{km}$$

$$\frac{W}{H} = \frac{10^{-2} \text{ms}^{-1}}{10^4 \text{m}} = 10^{-6} \text{s}^{-1}$$

se concluye que el término  $w_s \frac{\partial \rho_0}{\partial z_s}$  es menor a  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t}$  por lo que en principio podemos despreciarlo, sin embargo lo retendremos en la ecuación de continuidad para que no pierda su carácter *tensorial* es decir, para que su estructura sea invariante bajo cualquier transformación de coordenadas. Así llegamos a la ecuación de continuidad simplificada

$$\frac{d\rho_0(z_s, t)}{dt} + \rho_0(z_s, t) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.46)$$

En la sección anterior mostramos que considerar a  $\rho_0$  sólo función de  $z_s$   $\rho_0 = \rho_0(z_s)$  es consistente con la aproximación hidrostática en cuyo caso  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$  y por lo tanto,

$$\frac{d\rho_0(z_s)}{dt} = \frac{dz_s}{dt} \frac{\partial \rho_0(z_s)}{\partial z_s} = w \frac{\partial \rho_0}{\partial z_s} = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0$$

con lo cual (3.46) toma la forma  $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  ó, simplemente,

$$\nabla \cdot \rho(z_s) \mathbf{v}(r, t) = 0 \quad (3.47)$$

que es la *ecuación de continuidad "profunda"*, la cual es una restricción dinámica que puede usarse para generar un campo de velocidad a partir de datos discretos. Sin embargo, consideramos que es pertinente justificar con datos adicionales que el término  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t}$  puede despreciarse. Si usamos la ecuación de estado tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = R \frac{\partial p_0}{\partial t T_0}$$

donde  $p_0$  y  $T_0$  pueden medirse por lo que no debe ser difícil estimar  $\frac{\partial}{\partial t} \rho_0$  con los datos de una estación meteorológica.

1. The first part of the document is a letter from the author to the editor, dated 10/10/1954. The letter discusses the author's interest in the subject of the journal and the author's hope that the journal will be a valuable contribution to the field.

2. The second part of the document is a letter from the editor to the author, dated 10/15/1954. The editor expresses his interest in the author's work and his hope that the author's work will be a valuable contribution to the field.

3. The third part of the document is a letter from the author to the editor, dated 10/20/1954. The author discusses the author's interest in the subject of the journal and the author's hope that the journal will be a valuable contribution to the field.

4. The fourth part of the document is a letter from the editor to the author, dated 10/25/1954. The editor expresses his interest in the author's work and his hope that the author's work will be a valuable contribution to the field.

5. The fifth part of the document is a letter from the author to the editor, dated 10/30/1954. The author discusses the author's interest in the subject of the journal and the author's hope that the journal will be a valuable contribution to the field.

6. The sixth part of the document is a letter from the editor to the author, dated 11/5/1954. The editor expresses his interest in the author's work and his hope that the author's work will be a valuable contribution to the field.

7. The seventh part of the document is a letter from the author to the editor, dated 11/10/1954. The author discusses the author's interest in the subject of the journal and the author's hope that the journal will be a valuable contribution to the field.

8. The eighth part of the document is a letter from the editor to the author, dated 11/15/1954. The editor expresses his interest in the author's work and his hope that the author's work will be a valuable contribution to the field.

9. The ninth part of the document is a letter from the author to the editor, dated 11/20/1954. The author discusses the author's interest in the subject of the journal and the author's hope that the journal will be a valuable contribution to the field.

## Capítulo 4

# Ecuaciones en coordenadas generalizadas independientes del tiempo

En los capítulos 1 y 2 hemos introducido los sistemas cartesianos de coordenadas siguientes: el sistema de referencia inercial  $X^i$  y el sistema  $x^i$  fijo a la Tierra (Fig 2.5). La relación entre los vectores de posición de una partícula es

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c \quad (4.1)$$

con

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{x}}_i(t), \quad \mathbf{R}_c = x_c^i \hat{\mathbf{x}}_i(t) \quad \text{con } x_c^i = cte$$

donde indicamos la dependencia explícita de la base  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  con el tiempo. En este capítulo obtendremos la forma de las ecuaciones de movimiento de un flujo en un sistema de coordenadas arbitrario  $y^1 y^2 y^3$  definido en el sistema cartesiano  $x^i$  por medio de las ecuaciones de transformación

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \quad (4.2)$$

donde *no* aparece explícitamente el tiempo. La matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  de la transformación (4.2) está dada por

$$J_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

y su determinante

$$J = \det(\mathbf{J})$$

es el **Jacobiano**. Si tenemos  $J \neq 0$  en la región de interés la matriz inversa  $\mathbf{J}^{-1}$  existe y el teorema de la función implícita afirma que las coordenadas  $y^j$  pueden "despejarse" de (4.2) lo que nos da las ecuaciones de la **transformación inversa**

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3) \quad (4.3)$$

con las cuales obtenemos la siguiente expresión para  $\mathbf{J}^{-1}$ :

$$J_{ij}^{-1} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \quad (4.4)$$

Hay dos conjuntos de vectores base  $\{\tau_i\}$  y  $\{\eta^i\}$  asociados al sistema  $y^i$ . Comenzamos por la base **base covariante**  $\tau_i$  definida por

$$\tau_i \equiv \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{t=cte} \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial y^i} (x^j + x_c^j) \hat{\mathbf{x}}_j(t) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \hat{\mathbf{x}}_j(t)$$

El mismo resultado se obtiene con la expresión

$$\tau_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \hat{x}_j \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}^t \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

la cual puede tomarse como la definición de  $\tau_i$ . Si el jacobiano  $J = \det(\mathbf{J})$  no es nulo en un punto  $(y^1, y^2, y^3)$ , el conjunto  $\{\tau_j\}_{j=1,2,3}$  es linealmente independiente, lo que justifica el uso de el término "base" al referirnos a dicho conjunto. En este caso existen las ecuaciones de la transformación inversa (4.3) que usamos para definir la base contravariante  $\eta^i$

$$\eta^i \equiv \nabla y^i(x) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \hat{x}^j \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \hat{x}^3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Despejando

$$\hat{x}^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \eta^i \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \hat{x}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en (4.5) obtenemos la relación entre las bases  $\tau_i$  y  $\eta^i$

$$\tau_i = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \hat{x}_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \eta^j$$

donde aparecen los elementos de matriz

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}$$

del tensor métrico  $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$ . En forma matricial tenemos

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}^t \mathbf{J}$$

y la relación entre bases queda como sigue

$$\tau_i = g_{ij} \eta^j \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Se acostumbra usar la notación

$$g \equiv \det(\mathbf{G})$$

para el determinante de  $\mathbf{G}$ . De acuerdo con identidad  $g = \det(\mathbf{J}^t \mathbf{J}) = \det(\mathbf{J})^2 = J^2$  el jacobiano de la transformación (4.2) está dado por

$$J = \sqrt{g}.$$

Sea

$$g^{ij} \equiv \text{elemento } i, j \text{ de } \mathbf{G}^{-1}.$$

entonces

$$\eta^i = g^{ij} \tau_j \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Las bases  $\{\mathbf{a}_i\}$  y  $\{\mathbf{b}^j\}$  se llaman bases recíprocas si satisfacen  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}^j = \delta_i^j$ . Las bases  $\tau_i^j$  y  $\eta^j$  son recíprocas:

$$\tau_i \cdot \eta^j = \delta_i^j.$$

En efecto usando la regla de la cadena tenemos

$$\tau_i \cdot \eta^j = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \hat{x}_k \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \hat{x}^l = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \delta_l^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \delta_i^j.$$

Como veremos en este capítulo la reciprocidad de las bases  $\tau_i^j$  y  $\eta^j$  es la clave para obtener las ecuaciones de movimiento en coordenadas arbitrarias  $y^i$ . La relación  $\hat{x}^i \cdot \hat{x}^j = \delta_j^i$  que identifica al conjunto  $\{\hat{x}^j\}$  como una base ortonormal, implica que la base  $\{\hat{x}^j\}$  es recíproca de sí misma, por lo que podemos usar la notación  $\hat{x}_i = \hat{x}^i$ .

#### 4.1. Formas covariante y contravariante de un vector

La expresión de un vector  $a$  en la base  $\tau_j$

$$a = \sum_j a^j(y) \tau_j$$

recibe el nombre de **forma contravariante** de  $a$  y nos referimos a los coeficientes  $a^j(y)$  como las **componentes contravariantes** de  $a$  en el sistema de coordenadas  $y^i$ . La expresión de  $a$  en la base  $\eta^j$

$$a = \sum_j a_j(y) \eta^j$$

se llama **forma covariante** de  $a$  y los coeficientes  $a_j(y)$  reciben el nombre de **componentes covariantes** de  $a$  en el sistema de coordenadas  $y^i$ . De acuerdo con lo anterior, las formas covariante y contravariante de  $a$  en el sistema cartesiano  $x^i$  están dadas por

$$a = \sum_i a^i(x) \hat{x}_i = \sum_i a_i(x) \hat{x}^i$$

pero dado que la base  $\hat{x}_i$  es recíproca de sí misma ( $\hat{x}_i = \hat{x}^i$ ) tenemos

$$a^i(x) = a_i(x).$$

Para obtener la relación entre componentes cartesianas, covariantes y contravariantes de  $a$  consideremos su expresión en términos de las tres bases

$$\begin{aligned} a &= a_i(x) \hat{x}^i && \text{base canónica} \\ &= a^j(y) \tau_j && \text{forma contravariante} \\ &= a_k(y) \eta^k && \text{forma covariante.} \end{aligned}$$

Igualando estas expresiones obtenemos

$$a^i(x) \hat{x}_i = a^j(y) \tau_j \tag{4.9a}$$

$$a_i(x) \hat{x}^i = a_k(y) \eta^k \tag{4.9b}$$

$$a^j(y) \tau_j = a_k(y) \eta^k. \tag{4.9c}$$

Sustituyendo la ecuación(4.5) en la ecuación(4.9a)

$$a^j(y) \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \hat{x}_i = a^i(x) \hat{x}_i$$

obtenemos la **ley de transformación contravariante**

$$a^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} a^j(y). \tag{4.10}$$

En forma análoga, de la ecuación (4.6) y la ecuación (4.9b) obtenemos la **ley de transformación covariante**

$$a_i(x) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} a_j(y). \tag{4.11}$$

Usando la ecuación(4.7) y (4.9c) obtenemos la propiedad del tensor métrico  $g_{jk}$  para "bajar" un índice

$$a_k(y) = g_{kj} a^j(y). \tag{4.12}$$

Multiplicando (4.12) por  $G_{ij}^{-1} = g^{ij}$  obtenemos la propiedad del símbolo  $g^{jk}$  para "subir" un índice

$$a^j(y) = g^{jk} a_k(y). \tag{4.13}$$

## 4.2. Forma tensorial de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

En esta sección apreciaremos las ventajas de la reciprocidad entre las bases  $\tau_i$  y  $\eta^i$  al obtener formas generales y compactas de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

a) Comencemos con el producto escalar. Si consideremos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  con sus formas covariante y contravariante, respectivamente, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \tau_i \cdot b_j \eta^j = a^i b_j \delta_j^i = a^i b_i.$$

donde usamos la reciprocidad de las bases  $\tau_i$  y  $\eta^j$ . Esta expresión es similar a la definición de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  en coordenadas cartesianas  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i(x) b_i(x)$ . La expresión

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i$$

es independiente de las coordenadas  $y^j$  por lo que decimos que dicha expresión tiene una forma **invariante** ó **tensorial** bajo transformaciones de coordenadas. En forma análoga obtenemos las expresiones equivalentes

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i,$$

y usando las relaciones (4.12) y (4.13) se obtiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j.$$

b) Para obtener la forma tensorial de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  comencemos con la forma contravariante

$$\mathbf{a} = a^i \tau_i \quad \mathbf{b} = b^j \tau_j,$$

entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^i b^j \tau_i \times \tau_j$$

y multiplicando por  $\tau_k$ .

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \tau_k = a^i b^j (\tau_i \times \tau_j) \cdot \tau_k.$$

Si definimos el símbolo

$$\tilde{\epsilon}_{ijk} \equiv (\tau_i \times \tau_j) \cdot \tau_k.$$

podemos escribir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \tau_k = \tilde{\epsilon}_{ijk} a^i b^j.$$

El cálculo del lado izquierdo es inmediato si consideramos al vector resultante  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  en su forma covariante

$$\mathbf{c} = c_l \eta^l$$

ya que  $\mathbf{c} \cdot \tau_k = c_l \delta_k^l = c_k$ , por lo tanto

$$c_k = \tilde{\epsilon}_{ijk} a^i b^j$$

es la forma *tensorial* de las componentes covariantes de  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . En forma vectorial podemos escribir

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\epsilon}_{ijk} a^i b^j \eta^k. \quad (4.14)$$

c) Con la forma covariante

$$\mathbf{a} = a_i \eta^i \quad \mathbf{b} = b_j \eta^j$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_i b_j \eta^i \times \eta^j \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \eta^k &= a_i b_j (\eta^i \times \eta^j) \cdot \eta^k. \end{aligned}$$

Si definimos

$$\tilde{\epsilon}^{ijk} \equiv (\eta^i \times \eta^j) \cdot \eta^k$$

obtenemos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\eta}^k = \tilde{\varepsilon}^{ijk} a_i b_j,$$

y si consideramos a  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  en su forma contravariante

$$\mathbf{c} = c^l \boldsymbol{\tau}_l$$

se obtiene

$$\begin{aligned} c^k &= \tilde{\varepsilon}^{ijk} a_i b_j \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \tilde{\varepsilon}^{ijk} a_i b_j \boldsymbol{\tau}_k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

d) Usando la forma determinante

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk} = (\boldsymbol{\tau}_i \times \boldsymbol{\tau}_j) \cdot \boldsymbol{\tau}_k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} & \frac{\partial x^2}{\partial y^i} & \frac{\partial x^3}{\partial y^i} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^j} & \frac{\partial x^2}{\partial y^j} & \frac{\partial x^3}{\partial y^j} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^k} & \frac{\partial x^2}{\partial y^k} & \frac{\partial x^3}{\partial y^k} \end{pmatrix}$$

es fácil ver que tiene lugar la relación

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk} = J \varepsilon_{ijk} \quad (4.16)$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi - Civita. En forma análoga tenemos

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} = (\boldsymbol{\eta}^i \times \boldsymbol{\eta}^j) \cdot \boldsymbol{\eta}^k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^1} & \frac{\partial y^i}{\partial x^2} & \frac{\partial y^i}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^j}{\partial x^1} & \frac{\partial y^j}{\partial x^2} & \frac{\partial y^j}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \frac{\partial y^k}{\partial x^2} & \frac{\partial y^k}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

donde aparecen los elementos de  $\mathbf{J}^{-1}$ . Es claro que si  $ijk$  es una permutación par (impar) de 123, entonces  $\tilde{\varepsilon}^{ijk} = J^{-1} (\varepsilon^{ijk} = -J^{-1})$  y  $\tilde{\varepsilon}^{ijk} = 0$  si un índice se repite lo que podemos resumir como sigue

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} = J^{-1} \varepsilon_{ijk}. \quad (4.17)$$

**Ejemplo 5.1.** Si el sistema de coordenadas  $y^i$  es curvilíneo ortogonal los vectores  $\hat{y}_k = \boldsymbol{\tau}_k/h_k$  con  $h_k \equiv \|\boldsymbol{\tau}_k\|$  forman una base ortonormal ( $\hat{y}_k \cdot \hat{y}_l = \delta_{kl}$ ) y con el orden adecuado de las coordenadas  $y^i$  podemos suponer que tal base obedece la regla de la mano derecha

$$\varepsilon_{ijk} = (\hat{y}_i \times \hat{y}_j) \cdot \hat{y}_k.$$

Las componentes físicas de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son sus componentes en la base  $\hat{y}_k$ :

$$\mathbf{a} = a(i) \hat{y}_i, \quad \mathbf{b} = b(j) \hat{y}_j$$

y es fácil ver que la relación entre componentes covariantes y físicas es

$$a_i = h_i a(i), \quad b_j = h_j b(j).$$

Sustituyendo estas relaciones junto con  $\boldsymbol{\tau}_k = h_k \hat{y}_k$  en la ecuación(4.15) obtenemos,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\varepsilon}^{ijk} a_i b_j \boldsymbol{\tau}_k = J^{-1} \varepsilon_{ijk} a(i) h_i b(j) h_j h_k \hat{y}_k = \varepsilon_{ijk} a(i) b(j) \hat{y}_k.$$

donde usamos la relación  $J = h_1 h_2 h_3$  válida sólo para coordenadas curvilíneas ortogonales.

### 4.3. Velocidad, símbolos de Christoffel y aceleración

a) La relación entre los vectores de posición de una partícula en los sistemas de referencia inercial  $X^i$  y fijo a la Tierra  $x^i$  está dada por la ecuación (5.1) donde

$$\mathbf{r} = x^i(y) \hat{\mathbf{x}}_i$$

es el vector de posición con en el sistema  $x^i$ . La relación entre las velocidades relativas a los sistemas  $X^i$  y  $x^i$ ,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v^i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (v^i = \dot{x}^i)$$

es

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} . \quad (4.18)$$

La forma contravariante de  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$  se obtiene con la ecuación (4.15). Para obtener la forma contravariante de  $\mathbf{v}$  aplicamos la regla de la cadena

$$v^i = \frac{d}{dt} x^i(y) = \dot{y}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$

entonces

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}_i \left( \dot{y}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) = \left( \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \dot{y}^j = \tau_j \dot{y}^j$$

por lo que *los coeficientes  $\dot{y}^j$  son las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$* . En la literatura de dinámica de Lagrange los coeficientes  $v^j \equiv \dot{y}^j$  reciben el nombre de **velocidades generalizadas**. Así tenemos

$$\mathbf{v} = \tau_j v^j \quad (4.19)$$

y la forma contravariante de la ecuación(4.18) queda como sigue

$$V^j = v^j + \tilde{\epsilon}^{jkl} \Omega_i R_l .$$

b) Para calcular la forma generalizada de la aceleración debemos calcular las derivadas de la base covariante. Dado que  $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  es una base, existen coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  (llamados **símbolos de Christoffel**) con los podemos escribir

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial y^j} = \Gamma_{ij}^k \tau_k . \quad (4.20)$$

Una expresión explícita de  $\Gamma_{ij}^k$  se obtiene a partir de su definición de la ecuación (4.5)

$$\tau_j = \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \hat{\mathbf{x}}_l .$$

Derivando

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial y^j} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^i} \hat{\mathbf{x}}_l = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^j \partial y^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \tau_k$$

y comparando con la ecuación (4.20) se obtiene

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} . \quad (4.21)$$

Despejando obtenemos la relación

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^l}{\partial y^k} . \quad (4.22)$$

De acuerdo con la ecuación (4.21) el símbolo  $\Gamma_{ij}^k$  es simétrico en los índices  $j, i$ :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k . \quad (4.23)$$

c) Consideremos la relación equivalente a la ecuación (4.20) en términos de la base  $\eta^k$ . Derivando con respecto a  $y^i$  la igualdad

$$\hat{x}^l = \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \eta^j$$

obtenemos

$$0 = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \eta^j + \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial \eta^j}{\partial y^i} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \eta^j + \frac{\partial x^l}{\partial y^k} \frac{\partial \eta^k}{\partial y^i}$$

y despejando

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial y^i} = -\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \eta^j.$$

De acuerdo con la ecuación (4.21) tenemos

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial y^i} = -\Gamma_{ij}^k \eta^j. \quad (4.24)$$

d) La aceleración relativa al sistema inercial

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

donde

$$\mathbf{a} = \frac{dv^i}{dt} \hat{x}_i$$

es la aceleración relativa a la Tierra. La expresión de las componentes cartesianas de la velocidad  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v^i \hat{x}_i$  ( $v^i = \dot{x}^i$ ) en términos de las componentes contravariantes  $v^j = \dot{y}^j$  está dada por la ley de transformación contravariante

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} v^j.$$

Derivando

$$\frac{d}{dt} v^i = \frac{dv^j}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} + v^j \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

usando la regla de la cadena y la ecuación (4.22)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \dot{y}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^k \partial y^j} = \dot{y}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \Gamma_{kj}^l,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv^i}{dt} \hat{x}_i \\ &= \left( \frac{dv^j}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} + v^j v^k \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \Gamma_{kj}^l \right) \hat{x}_i \\ &= \left( \frac{dv^l}{dt} + v^j v^k \Gamma_{kj}^l \right) \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \hat{x}_i \\ &= \left( \frac{dv^l}{dt} + v^j v^k \Gamma_{kj}^l \right) \tau_l \end{aligned}$$

donde identificamos a las componentes contravariantes de la aceleración relativa a la Tierra

$$\mathbf{a} = a^i \tau_i,$$

a saber,

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + v^j v^k \Gamma_{jk}^i. \quad (4.25)$$

De acuerdo con la propiedad de simetría de la ecuación (4.23) los términos  $v^j v^k \Gamma_{jk}^i$  en  $a^k$  la ecuación (4.25) definen una *forma cuadrática simétrica*

$$a^k = \dot{v}^k + \Gamma_{11}^k (v^1)^2 + \Gamma_{22}^k (v^2)^2 + \Gamma_{33}^k (v^3)^2 + 2\Gamma_{12}^k v^1 v^2 + 2\Gamma_{13}^k v^1 v^3 + 2\Gamma_{23}^k v^2 v^3$$

que podemos escribir en forma matricial como sigue

$$a^k = \dot{v}^k + v^t \Gamma_{ij}^k v = \dot{v}^k + \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^k & \Gamma_{12}^k & \Gamma_{13}^k \\ \Gamma_{21}^k & \Gamma_{22}^k & \Gamma_{23}^k \\ \Gamma_{31}^k & \Gamma_{32}^k & \Gamma_{33}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

e) Veamos como calcular los símbolos de Christoffel a partir de su definición (4.20). Derivando (4.5) y reescribiendo  $\hat{x}_i$  en términos de  $\tau_k$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial y^j} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial y^j} (\mathbf{J}^{-1})^t \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

Comparando con la definición de la ecuación (4.20) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1j}^1 & \Gamma_{1j}^2 & \Gamma_{1j}^3 \\ \Gamma_{2j}^1 & \Gamma_{2j}^2 & \Gamma_{2j}^3 \\ \Gamma_{3j}^1 & \Gamma_{3j}^2 & \Gamma_{3j}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

obtenemos la siguiente fórmula

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{1j}^1 & \Gamma_{1j}^2 & \Gamma_{1j}^3 \\ \Gamma_{2j}^1 & \Gamma_{2j}^2 & \Gamma_{2j}^3 \\ \Gamma_{3j}^1 & \Gamma_{3j}^2 & \Gamma_{3j}^3 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial y^j} (\mathbf{J}^{-1})^t. \quad (4.27)$$

**Ejemplo 5.2.** En coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

con  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  y  $y^1 = r$ ,  $y^2 = \theta$  tenemos,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{J}^{-1})^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial r} (\mathbf{J}^{-1})^t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\mathbf{J}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial \theta} (\mathbf{J}^{-1})^t &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix} (\mathbf{J}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde obtenemos las matrices simétricas

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

y las componentes contravariantes de la aceleración

$$a^1 = \dot{v}^1 + v^i \Gamma_{ij}^1 v^j = \ddot{r} + \begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a^2 = \dot{v}^2 + v^i \Gamma_{ij}^2 v^j = \ddot{\theta} + \begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r} \dot{\theta}}{r}$$

**Ejemplo 5.3.** Consideremos la transformación de coordenadas

$$x = x \quad y = y \quad z = z(x, y, \sigma)$$

con  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $y^1 = x$ ,  $y^2 = y$ ,  $y^3 = \sigma$ . Tenemos

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{z_1}{z_3} & -\frac{z_2}{z_3} & \frac{1}{z_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1+z_1^2 & z_1 z_2 & z_1 z_3 \\ z_1 z_2 & 1+z_2^2 & z_2 z_3 \\ z_1 z_3 & z_2 z_3 & z_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{z_1}{z_3} \\ 0 & 1 & -\frac{z_2}{z_3} \\ -\frac{z_1}{z_3} & -\frac{z_2}{z_3} & \frac{z_1^2+z_2^2+1}{z_3} \end{pmatrix},$$

donde usamos la notación  $z_j = \partial z_j / \partial y^j$ . Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{J}^t}{\partial y^j} (\mathbf{J}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_{j1} \\ 0 & 0 & z_{j2} \\ 0 & 0 & z_{j3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1/z_3 \\ 0 & 1 & -z_2/z_3 \\ 0 & 0 & 1/z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{z_{j1}}{z_3} \\ 0 & 0 & \frac{z_{j2}}{z_3} \\ 0 & 0 & \frac{z_{j3}}{z_3} \end{pmatrix}$$

por consiguiente los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{ij}^3 = \frac{z_{ij}}{z_3}.$$

Así, las componentes contravariantes de la aceleración son,

$$a^1 = \ddot{x}$$

$$a^2 = \ddot{y}$$

$$a^3 = \ddot{\sigma} + \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{13}^3 & \Gamma_{23}^3 & \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} \\ = \ddot{\sigma} + \Gamma_{11}^3 \dot{x}^2 + \Gamma_{22}^3 \dot{y}^2 + \Gamma_{33}^3 \dot{\sigma}^2 + 2\Gamma_{12}^3 \dot{x}\dot{y} + 2\Gamma_{13}^3 \dot{x}\dot{\sigma} + 2\Gamma_{23}^3 \dot{y}\dot{\sigma}.$$

#### 4.4. Forma tensorial de $\nabla$ , $\nabla \cdot$ y relación entre $\Gamma_{ij}^k$ y $g_{ij}$

a) En el capítulo 2 mostramos que si en un sistema de referencia inercial  $X^i$  definimos el operador gradiente como

$$\nabla = \hat{X}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$$

entonces conserva su estructura en cualquier sistema cartesiano  $x^i$  fijo a la Tierra:

$$\nabla = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Usando esta expresión junto con la regla de la cadena para calcular el gradiente de una función  $f$  que depende explícitamente de las coordenadas  $y^i$  se obtiene

$$\nabla f = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} f[y(x)] = \hat{x}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f(y)}{\partial y^j}$$

donde aparece la definición de  $\eta^j$  (4.6). Esto da la forma generalizada de el vector gradiente

$$\nabla f = \eta^j \frac{\partial f(y)}{\partial y^j}$$

o bien

$$\nabla = \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (4.28)$$

lo que muestra que la forma natural del vector gradiente es su forma covariante.

b) En el capítulo 2 mostramos que la divergencia de un vector en el sistema  $x^i$

$$\mathbf{b} = b^i \hat{x}_i$$

está dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{\partial b^i}{\partial x^i} .$$

Para obtener la forma de  $\nabla \cdot \mathbf{b}$  en el sistema  $y^1 y^2 y^3$  conviene usar la forma contravariante

$$\mathbf{b} = b^l \tau_l .$$

Usando la ley de transformación contravariante de la ecuación (4.10) y la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^i} b^i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial y^l} b^l \right] = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \left[ \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^l} b^l + \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial b^l}{\partial y^k} \right] = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} b^l + \frac{\partial b^l}{\partial y^l}$$

donde aparece la definición de la ecuación (4.21) del símbolo de Christoffel  $\Gamma_{kl}^k$ , entonces la forma tensorial de la divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \Gamma_{kl}^k b^l + \frac{\partial b^l}{\partial y^l} .$$

Esta expresión se simplifica haciendo uso de la identidad

$$\Gamma_{kl}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^l} . \quad (4.29)$$

En efecto tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^l} b^l + \frac{\partial b^l}{\partial y^l}$$

o bien

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^l} [\sqrt{g} b^l] . \quad (4.30)$$

La demostración de la ecuación (4.29) está basada en el cálculo de las derivadas  $\frac{\partial g}{\partial y^k}$ :

i) El determinante  $g \equiv \det(\mathbf{G})$  sólo es función explícita de los elementos  $g_{ij}$  de  $\mathbf{G}$ ,

$$g = g(g_{ij}) = g(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{33})$$

Más aún,  $g$  depende linealmente de cada  $g_{ij}$ . Esto puede apreciarse mejor si calculamos  $g \equiv \det(\mathbf{G})$  por cofactores

$$g = \sum_j g_{ij} G(i, j) \quad \text{con } i = 1, 2, 3 .$$

Entonces, derivando  $g$  por medio de la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} g(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{33}) = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = G(i, j) \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} .$$

El cofactor  $G(i, j)$  asociado al elemento  $g_{ij}$  es el valor del determinante que resulta de  $\mathbf{G}$  al eliminar el  $i$ -ésimo renglón y la  $j$ -ésima columna a la que pertenece  $g_{ij}$  y multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ , simbólicamente escribimos

$$G(i, j) \equiv (-1)^{i+j} \det_{ij}(\mathbf{G}) .$$

ii) La matriz definida por los cofactores  $\text{Cof}(\mathbf{G}) = \{G(i, j)\}$  da el tensor métrico inverso  $\mathbf{G}^{-1}$  de acuerdo con la fórmula

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{g} [\text{Cof}(\mathbf{G})]^T$$

pero dado que la matriz  $G$  es simétrica,  $\text{Cof}(G)$  también lo es de manera que

$$G^{-1} = \frac{1}{g} \text{Cof}(G)$$

En términos de elementos tenemos

$$g^{ij} = \frac{1}{g} G(i, j)$$

de donde se obtiene  $G(i, j) = gg^{ij}$  y

$$\frac{\partial g}{\partial y^k} = gg^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} \quad (4.31)$$

iii) Para calcular  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$  derivamos

$$g_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

entonces

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^i}$$

y usando la ecuación (4.22) obtenemos

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \Gamma_{ki}^m \frac{\partial x^l}{\partial y^m} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} + \Gamma_{kj}^m \frac{\partial x^l}{\partial y^m} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} = g_{mj} \Gamma_{ki}^m + g_{mi} \Gamma_{kj}^m \quad (4.32)$$

Sustituyendo la ecuación (4.32) en la ecuación (4.31)

$$\frac{\partial g}{\partial y^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = gg^{ij} [g_{mj} \Gamma_{ki}^m + g_{mi} \Gamma_{kj}^m] = g [\delta_m^i \Gamma_{ki}^m + \delta_m^j \Gamma_{kj}^m] = 2g \Gamma_{mk}^m$$

y despejando  $\Gamma_{mk}^m$  llegamos a la ecuación (4.29):  $\Gamma_{mk}^m = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial y^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial y^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial y^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^k}$ .

## 4.5. Forma tensorial de las ecuaciones de continuidad y momentum

Como aplicación de los resultados de las secciones anteriores consideremos la forma tensorial de las ecuaciones de continuidad y momentum.

a) Comencemos con el operador  $\frac{d}{dt}$ . Usando la regla de la cadena para derivar la identidad

$$f[x(y), t] \equiv f_y(y, t)$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} f_y = \frac{\partial}{\partial t_y} f_y + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} f_y$$

En último término tiene la forma

$$\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = (v^i \tau_i) \cdot \left( \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = v \cdot \nabla \quad (4.33)$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} f_y = \left( \frac{\partial}{\partial t_y} + v \cdot \nabla \right) f_y$$

Dado que  $f_y$  es arbitraria concluimos que la forma tensorial del operador  $\frac{d}{dt}$  es

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + v \cdot \nabla \quad \text{con } v \cdot \nabla = v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (4.34)$$

b) para obtener la forma tensorial de ecuación de continuidad en el sistema  $x^i$ ,

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

basta con usar la ecuación(4.34) y la ecuación (4.30). Haciendo esto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_y} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial y^i} + \rho \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} v^i = 0$$

y reordenando términos obtenemos la forma flujo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \rho v^i = 0 \quad (4.35)$$

que equivale a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_y} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0.$$

c) Si cada término en la ecuación de momentum se escribe en su forma contravariante

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^i \tau_i \\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= \varepsilon^{ijk} \Omega_j v_k \tau_i \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) &= \varepsilon^{ilm} \Omega_l (\varepsilon^{mjk} \Omega_j R_k) \tau_i \\ \nabla p &= \eta^j \frac{\partial p}{\partial y^j} = \frac{\partial p}{\partial y^j} g^{ij} \tau_i \\ \mathbf{g} &= g^i \tau_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

obtenemos las ecuaciones escalares

$$a^i + 2\varepsilon^{ijk} \Omega_j v_k + \varepsilon^{ilm} \Omega_l (\varepsilon^{mjk} \Omega_j R_k) = -\frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial y^j} + g^i. \quad (4.37)$$

d) Las componentes contravariantes de la aceleración  $a^i$  pueden escribirse de la manera siguiente

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + v^j v^k \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial y^j} + v^j v^k \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \left( \frac{\partial v^i}{\partial y^j} + v^k \Gamma_{jk}^i \right) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{,j}$$

donde el símbolo

$$v^i_{,j} \equiv \frac{\partial v^i}{\partial y^j} + v^k \Gamma_{jk}^i$$

recibe en nombre de **derivada covariante** de las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$ . Así, las ecuaciones (4.37) quedan como sigue

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{,j} + 2\varepsilon^{ijk} \Omega_j v_k + \varepsilon^{ilm} \Omega_l (\varepsilon^{mjk} \Omega_j R_k)_m = -\frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial y^j} + g^i. \quad (4.38)$$

e) Si usamos

$$\mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \nabla \Phi = \tau_i g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial y^j}$$

obtenemos una forma más compacta de (4.38)

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{,j} + 2\varepsilon^{ijk} \Omega_j v_k = g^{ij} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y^j} + \frac{\partial \Phi}{\partial y^j} \right). \quad (4.39)$$

En las secciones siguientes daremos algunos ejemplos a las coordenadas generalizadas.

## 4.6. Ecuaciones de momentum en coordenadas generalizadas

Sea  $X^i$  un sistema inercial con su origen en el centro de la Tierra, y el eje de rotación terrestre coincide con el eje  $X^3$ . La ecuación de momentum de una parcela de aire es

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g + F$$

donde las variables  $p$ ,  $\rho$ ,  $V$  son la presión, la densidad y el vector de una partícula de aire,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $F$  es la fuerza de fricción. Suponiendo que la tierra es una esfera con radio  $a$ , entonces  $g$  está dada por

$$g = -g \frac{a^2}{r^3} \mathbf{R}$$

donde  $g \equiv GMa^{-2}$ ,  $M$  es la masa de la tierra,  $G$  es la constante de gravitación, y  $\mathbf{R}$  es el vector que va del centro de la Tierra a una partícula de aire,  $r = \|\mathbf{R}\|$  [36]. Si  $\hat{X}^i$  es el vector unitario  $X^i$  son las coordenadas de una partícula al tiempo  $t$ , donde tenemos  $\mathbf{R} = \hat{X}^i X^i$  y  $\mathbf{V} = \hat{X}^i V^i$  con  $V^i \equiv \dot{X}^i$  ( $\equiv dX^i/dt$ ). La notación de índices repetidos en un término que indica una sumatoria.

Sea  $Y^i$  un sistema en coordenadas fijo a la tierra con  $Y^3 = X^3$ , y  $Y^1, Y^2$  son coordenadas  $X^1, X^2$  que respectivamente rotan. Si  $\hat{Y}^i$  son los vectores unitarios correspondientes, entonces

$$\hat{Y}^i = P_{ij}(t) \hat{X}^j \quad (4.40)$$

donde  $P_{11} = P_{22} = \cos \Lambda$ ,  $P_{12} = -P_{21} = \sin \Lambda$ ,  $P_{3i} = P_{i3} = \delta_{i3}$  (Delta de Kronecker) con  $\Lambda = \Omega t + \Lambda_0$ ,  $\Omega$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\Lambda_0$  es una constante. Si  $Y^i$  son las coordenadas de una partícula de aire al tiempo  $t$  tenemos  $\mathbf{R} = \hat{X}^i X^i = \hat{Y}^i Y^i$  y usando la relación entre las bases llegamos  $Y^i = P_{ij}(t) X^j$ . Esta relación junto con la ecuación (2.13) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_Y + \vec{\Omega} \times \mathbf{R} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \mathbf{A}_Y + 2\vec{\Omega} \times \mathbf{V}_Y + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R}) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{V}_Y$  y  $\mathbf{A}_Y$  son la velocidad y la aceleración con respecto a la tierra,

$$\mathbf{V}_Y = \hat{Y}^i V_Y^i \quad \mathbf{A}_Y = \hat{Y}^i \dot{V}_Y^i \quad (4.41)$$

con  $V_Y^i \equiv \dot{Y}^i$  y  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{Y}^3$ . La aceleración centrípeta  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R})$  es usualmente omitida. Así la ecuación de momento es

$$\mathbf{A}_Y = -\rho^{-1} \nabla p - ga^2 r^{-3} \mathbf{R} - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{V}_Y + F, \quad (4.42)$$

donde el gradiente original  $\nabla = \hat{X}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$  es remplazada por  $\nabla = \hat{Y}^i \frac{\partial}{\partial Y^i}$ . En literatura estandar [1-7] sugieren  $\mathbf{A}_Y$  por  $d\mathbf{V}_Y/dt$  aunque la forma más reciente es  $d\mathbf{V}_Y/dt = \dot{V}^i \hat{Y}^i + V^i d\hat{Y}^i/dt$  con  $d\hat{Y}^i/dt = \vec{\Omega} \times \hat{Y}^i$  [eq. (2.13)].

El sistema de coordenadas principal usado en la meteorología de mesoscala [1-7] es un sistema cartesiano  $x^i$  con su origen en un punto en la tierra con latitud  $\phi_c$  y longitud  $\lambda_c$ . Supongamos que el plano  $x^1 x^2$  es tangente a la tierra en  $(\lambda_c, \phi_c)$  y el eje  $x^3$  es opuesto  $\mathbf{g}$  en  $(\lambda_c, \phi_c)$ . La relación general entre las coordenadas  $Y^i$  y  $x^i$  de una partícula de aire es

$$x^i = R_{ij}^c Y^j - a \delta_{i3} \quad (4.43)$$

con  $R_{ij}^c$  constante. La ortogonalidad de el sistema  $x^i$  implica que los vectores  $\hat{x}^i = \partial \mathbf{R} / \partial x^i$  son ortonormales,  $\mathbf{R}^c$  es ortogonal y  $\hat{x}^i = R_{ij}^c \hat{Y}^j$ . De esta ecuación y (2.2,4) llegamos a la transformación de  $\mathbf{V}_Y$  y  $\mathbf{A}_Y$ , a saber,

$$\mathbf{V}_Y = \hat{x}^i u^i \equiv \mathbf{u} \quad \mathbf{A}_Y = \hat{x}^i \dot{u}^i \equiv \mathbf{a}$$

con  $u^i \equiv \dot{x}^i$ . La aceleración de la gravedad es  $\mathbf{g} = \hat{x}^i g^i$  con

$$g^i = -ga^2 r^{-3} (x^i + \delta_{i3} a). \quad (4.44)$$

Así la ecuación de momento (4.42) es

$$\mathbf{a} = -\rho^{-1}\nabla p + \hat{\mathbf{x}}^i g^i - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (4.45)$$

con  $\nabla = \hat{\mathbf{x}}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . En forma escalar tenemos

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - ga^2 r^{-3} (x^i + \delta_{i3} a) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u^k + F^i \quad (4.46)$$

donde  $\varepsilon_{ijk} = \hat{\mathbf{x}}^i \cdot (\hat{\mathbf{x}}^j \times \hat{\mathbf{x}}^k)$ . Estas ecuaciones son las que se refieren como a las *ecuaciones exactas de momentum* donde tienen las componentes exactas (4.44) de  $\mathbf{g}$  mientras la literatura estandar de mesoescala [1-16] usa la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\hat{\mathbf{x}}^3$  y la ecuación de momentum resultante es

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u^k + F^i. \quad (4.47)$$

## 4.7. El modelo RAMS

Desde la referencia primaria de [9] del libro de Pilke [1], Comenzamos con el análisis de las ecuaciones de momento reportadas en la sección anterior. Un sistema coordinado  $xyz$  con el eje  $z$  normal a la tierra en un punto con latitud  $\phi$ . En este caso  $x = x^1$ ,  $y = x^2$ ,  $z = x^3$ ,  $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{x}}^1$ ,  $\mathbf{j} = \hat{\mathbf{x}}^2$ ,  $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}^3$ , la dirección de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  no es definida explícitamente en [1]. La gravedad y la aceleración centripeta son aproximadas por  $g$ ,  $-\mathbf{g}\mathbf{k} = \mathbf{G} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{R})$ , con  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ . Así, la ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}\mathbf{k} - 2\vec{\Omega} \times \mathbf{u}$$

ó en forma escalar

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = -u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u^k \quad (4.48)$$

Como vimos arriba, estas ecuaciones son independientes de la dirección de los ejes  $x, y$  y sólo son válidas en un dominio  $\mathcal{D}(L)$  definidas por  $100 \times 100 \text{ km}^2$ , Pero no hay comentario acerca de este dominio de validez en [1].

Las ecuaciones (4.48) son escritas explícitamente en el capítulo 3 de [1] con la fuerza de coriolis  $-2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} = 2\Omega [i(v \sin \phi - w \cos \phi) - ju \sin \phi + ku \cos \phi]$  [1, p. 31,34]. La dirección de los ejes  $x, y$  no están definidas pero esta forma corresponde a  $-2\vec{\Omega} \times \mathbf{V}$  con  $\vec{\Omega} = \Omega (j \cos \phi + k \sin \phi)$  y  $\mathbf{u} = iu + jv + kw$  y por lo tanto el eje  $x$  ( $y$ ) es tangente al círculo paralelo (meridiano) en un punto con latitud  $\phi$  y es positivo hacia el este (hacia el norte). El gradiente de presión es escrito en términos de la temperatura potencial  $\theta$  [1, eq. (2-21)] y la función de Exner  $\pi$  [1, sec. 4.4],

$$\theta \equiv T(p_0/p)^{R/C_p} \quad r \equiv (C_p(p/p_{00}))^{R/C_p},$$

con el cual

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \theta \frac{\partial \pi}{\partial x^i}. \quad (4.49)$$

Para simplificar el tratamiento de las condiciones de frontera inferiores en los modelos de mesoescala se reemplaza la coordenada vertical  $z$  por la coordenada que sigue el terreno  $\sigma$  [1,4-7]. Desde el sistema de coordenadas  $xy\sigma$  es no ortogonal uno puede usar el formalismo tensorial para llegar a las ecuaciones dinámicas en tales coordenadas. El procedimiento está dado en [1] pero daremos algunos detalles para mostrar cómo el factor  $g$  aparece en las ecuaciones horizontales de momento en el gradiente de presión.

Conidere las ecuaciones de transformación

$$x^1 = \tilde{x}^1 \quad x^2 = \tilde{x}^2 \quad x^3 = r^3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \quad (4.50)$$

ó equivalentemente  $\tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^1, x^2, x^3)$ . La posición del vector  $\mathbf{R}$  en términos de  $\tilde{x}^i$  y  $x^i$  usando los vectores covariantes  $\tau_i$  y vectores contravariantes  $\eta^i$ ,

$$\tau_i \equiv \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \hat{x}^j \quad \eta^i \equiv \nabla \tilde{x}^i = \hat{x}^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}. \quad (4.51)$$

La forma contravariante de las ecuaciones exactas (4.47) es obtenida de la expresión de la ecuación (4.46) en términos de  $\tau_i$ 's. De la ecuación (4.51) llegamos  $\hat{x}^j = \tau_i \tilde{x}^i / \partial x^j$  e insertando en  $\mathbf{g} = g^j \hat{x}^j$  retornando a  $\mathbf{g} = \tilde{g}^i \tau_i$  con  $\tilde{g}^i = g^j \partial \tilde{x}^i / \partial x^j$ . En particular, para la ecuación (4.50) las componentes horizontales de  $\mathbf{g}$  permanecen inalterables,

$$\tilde{g}^i = g^i = -ga^2 r^{-3} x^i \quad (i = 1, 2) \quad \tilde{g}^3 = \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} g^3. \quad (4.52)$$

Para el gradiente de presión tenemos  $\nabla p = \eta^j \partial p / \partial \tilde{x}^j = \tau_i \tilde{G}^{ij} \partial p / \partial \tilde{x}^j$  donde  $\tilde{G}^{ij}$  es la matriz inversa de el tensor métrico  $\tilde{G}_{ij} = (\partial x^k / \partial \tilde{x}^i) (\partial x^k / \partial \tilde{x}^j)$ . En términos de la función de Exner tenemos

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \tau_i \tilde{G}^{ij} \theta \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (4.53)$$

Así, las ecuaciones de momentum exactas (4.46) con  $F^i = 0$  son

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} = -\tilde{u}^j \tilde{u}^i_{,j} - \theta \tilde{G}^{ij} \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^j} - \tilde{g}^i - 2\tilde{\epsilon}^{ijl} \tilde{\Omega}_j \tilde{u}_l, \quad (4.54)$$

donde  $\tilde{u}^i = u^j \partial \tilde{x}^i / \partial x^j$  son las componentes contravariantes de  $\mathbf{u}$ ,  $\tilde{u}^i_{,j}$  es la derivada covariante de  $\tilde{u}^i$ , y  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $\tilde{u}_l$  son las componentes covariantes de  $\tilde{\Omega}$ ,  $\mathbf{u}$ .

El factor  $g$  aparece en el gradiente de presión (4.53) como sigue. Usando las componentes de  $\tilde{G}^{ij}$  [1, eq. (6-29)] tenemos

$$\tilde{G}^{ij} \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^i} + \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^3} \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (4.55)$$

donde usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} \frac{\partial \pi}{\partial x^3}. \quad (4.56)$$

Siguiendo el libro de Pielke, la aproximación hidrostática  $\rho^{-1} \partial p / \partial x^3 = -g$  y (4.49) son acostumbradas a llegar  $\partial \pi / \partial x^3 = -g / \theta$  y (4.56) viene bien  $\partial \pi / \partial \tilde{x}^3 = -g \theta^{-1} \partial x^3 / \partial \tilde{x}^3$ . Para las coordenadas que siguen el terreno

$$\tilde{x}^3 \equiv \sigma = s \frac{z - z_G(x, y)}{s - z_G(x, y)}, \quad (4.57)$$

donde  $s$  es una constante y  $z_G(x, y)$  es la coordenada de elevación sobre  $(x, y)$ , tenemos  $\partial \pi / \partial \tilde{x}^3 = -s^{-1} (s - z_G) g \theta^{-1}$  [1, eq. (6-49)] y (4.55) es

$$\tilde{G}^{ij} \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^i} - \frac{g}{\theta} \frac{\sigma - s}{s} \frac{\partial z_G}{\partial \tilde{x}^i} \quad (i = 1, 2).$$

Así las ecuaciones de momentum exactas (4.54) son

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} = -\tilde{u}^j \tilde{u}^i_{,j} - \theta \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^i} + g \frac{\sigma - s}{s} \frac{\partial z_G}{\partial \tilde{x}^i} + \tilde{g}^i - 2\tilde{\epsilon}^{ijl} \tilde{\Omega}_j \tilde{u}_l \quad (i = 1, 2)$$

donde  $\tilde{g}^i$  son las componentes horizontales de  $\mathbf{g}$  (4.52). Si la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  es usada,  $g^1$  y  $g^2$  son remplazadas por 0 obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} = -\tilde{u}^j \tilde{u}^i_{,j} - \theta \frac{\partial \pi}{\partial \tilde{x}^i} + g \frac{\sigma - s}{s} \frac{\partial z_G}{\partial \tilde{x}^i} - 2\tilde{\epsilon}^{ijl} \tilde{\Omega}_j \tilde{u}_l \quad (i = 1, 2). \quad (4.58)$$

Estas son basicamente las ecuaciones (6-56,57) reportadas en [1] donde el factor  $g$  Aparecen sin el uso de la  $g$  exacta. Las referencias adicionales [8,10] de RAMS usa la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  para obtener las ecuaciones

de momentum similares a (4.58) donde el factor  $g$  aparece en  $\nabla p$ . Por la regla de la cadena y la aproximación hidrostática tan anteriormente citado

De acuerdo con el uso de la aproximación  $g \sim -gk$  en la referencia. [1,8], la documentación [10, p. 6] de RAMS reportan las ecuaciones de momentum

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\theta \frac{\partial \pi'}{\partial x} + fv + \nabla \cdot K_m \nabla u \\ \frac{dv}{dt} &= -\theta \frac{\partial \pi'}{\partial y} - fu + \nabla \cdot K_m \nabla v \\ \frac{dw}{dt} &= -\theta \frac{\partial \pi'}{\partial z} - \frac{g\theta_v}{\theta_0} + \nabla \cdot K_m \nabla w, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde sólo la ecuación vertical de momento tiene el factor  $g$ ,  $f = 2\Omega \sin \phi_c$ , y usamos la notación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \cdot K_m \nabla u &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Desde la aproximación  $g \sim -gk$  es usada, las ecuaciones de momentum horizontales (4.59) son válidas sobre un dominio  $\mathcal{D}(L) \subset 100 \times 100 \text{ km}^2$ , pero la documentación [10] no comenta este aspecto.

## 4.8. El modelo HOTMAC

El modelo HOTMAC usa las ecuaciones de momentum en un plano tangente  $x_i$  coordenadas

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^j}$$

donde la aproximación  $g \sim -gk$  es usada [11]. Estas ecuaciones son escritas en términos de la coordenada vertical que sigue el terreno

$$H = \bar{H} + z_g(x, y) \quad (4.60)$$

con  $H = \bar{H} + z_g(x, y)$  [12, eqs. (1,7)], donde  $\bar{H}$  es el valor inicial de  $H$  y  $z_g(x, y)$  es la elevación de la tierra. Las ecuaciones horizontales de momento en coordenadas  $x_1 x_2 z^*$  contienen el factor  $g$  cual aparece mediante el gradiente de presión tan anteriormente citado. De hecho, el gradiente de presión horizontal en términos de la función de Exner  $\Pi = C_p (P/P_0)^\epsilon$ , La temperatura potencial virtual  $\Theta_v \equiv (P_0/P)^\epsilon T_v = C_p \Pi^{-1} T_v$  y  $z^*$  [12],

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x^i} \right)_z = \rho \Theta_v \left[ \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x^i} \right)_{z^*} + \frac{\partial z^*}{\partial x^i} \frac{\partial \Pi}{\partial z^*} \right] \quad \text{para } i = 1, 2.$$

La ecuación hidrostática  $\langle \rho \rangle^{-1} \partial P / \partial z = -[1 - \beta(\Theta_v - \langle \Theta_v \rangle)] g$ , con  $\rho / \langle \rho \rangle = 1 - \beta(\Theta_v - \langle \Theta_v \rangle)$ , y usando la regla de la cadena obtenemos,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z^*} = \frac{\partial z}{\partial z^*} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{H - z_g - g}{\bar{H} \Theta_v},$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  indica un promedio sobre el plano horizontal. Esto y la descomposición de Reynold's  $u_i = \bar{U}_i + u'_i$ ,  $\bar{U}_i$  denota un ensamble promedio produzca las ecuaciones horizontales de momento [12]

$$\begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= f(V - V_g) + g \frac{\bar{H} - z^*}{\bar{H}} \left( 1 - \frac{\langle \Theta_v \rangle}{\Theta_v} \right) \frac{\partial z_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\bar{H}}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial z^*} (-\overline{u'w'}) + C_1 \\ \frac{DV}{Dt} &= -f(U - U_g) + g \frac{\bar{H} - z^*}{\bar{H}} \left( 1 - \frac{\langle \Theta_v \rangle}{\Theta_v} \right) \frac{\partial z_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\bar{H}}{H - z_g} \frac{\partial}{\partial z^*} (-\overline{v'w'}), + C_2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde

$$C_i = g \left[ \langle \Theta_v \rangle \langle \Theta_v(H) \rangle^{-1} - (\langle \Theta_v \rangle \Theta_v^{-1} - 1) z^* (\bar{H})^{-1} - 1 \right] \partial H / \partial x^i$$

y las componentes geostóficas del viento  $U_g, V_g$  son dadas en [12, eq. (8)]. Las variables del Modelo escrito en el caso que representa ensembles promedio. De acuerdo con el uso  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$ , las componentes horizontales de  $\mathbf{g}$  son omitidas y por consiguiente el dominio de validez las ecuaciones. (4.61) es  $\mathcal{D}(L) \subset 100 \times 100 \text{ km}^2$ . Esta región es congruente anteriormente con el propósito de estudiar la corriente de aire en una región de  $25 \times 25 \text{ km}^2$  [12]. En otro trabajo Yamada y Bunker [13] omiten los términos  $C_i$  para estudiar difusión y transporte atmosférico de vuelo en una region  $30 \times 30 \text{ km}^2$ . En un trabajo anterior [14] los términos  $C_1, C_2$  fueron remplazados por  $G_u (U_{\text{obs}} - U), G_v (V_{\text{obs}} - V)$  respectivamente, Para simular corriente de aire con una técnica de asimilación de datos cuadridimensionales, donde  $G_u, G_v$  son coeficientes que se aproximan y  $U_{\text{obs}}, V_{\text{obs}}$  son observaciones de  $U, V$  en cada intervalo de observación de 6 hrs. Sin embargo, la concepción del pequeño dominio original de las ecuaciones, (4.61) *hace falta* de las ecuaciones de momentum resultantes [14, eqs. 3,4] cuál no considera los componentes horizontales  $g^1, g^2$  (4.52) de  $\mathbf{g}$  o sus aproximaciones lineales  $-gx/a$  y  $-gy/a$ , fueron usados para asimilar datos de una red de observación en un dominio de  $\mathcal{D}(L) \sim 1600 \times 1300 \text{ km}^2$ .

#### 4.9. El modelo ARPS

El modelo ARPS considera ecuaciones dinámicas en plano tangente con coordenadas  $xyz$  y cada variable meteorológica es descompuesta como sigue

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0(z) + \bar{\psi}(x, y, z, t)$$

donde  $\psi_0$  corresponde a un estado base de la atmósfera que es horizontalmente homogéneo y  $\bar{\psi}$  es una perturbación de  $\psi_0$  [16, p. 117]. Esta descomposición muestra la concepción local de ARPS desde un estado base que depende sólo de  $z$  es correcto en una vecindad de el origen  $x = y = z = 0$ . La documentación de ARPS [16] no señala este caracter local, En lugar de eso afirma que el modelo sirve para uso en las escalas que van de algunos metros hasta centenares de kilómetros [16, p. 113], pero el dominio de validez es tan pequeño como se demuestra en la parte de abajo.

El capítulo 7 de [16] se describe el mapeo para definir el dominio computacional y los puntos de vista que "Los factores de escala no son incluidos en las ecuaciones dinámicas de ARPS version 4.0, pero estará en una version futura". "Si uno escoge la proyección conforme de Lambert y se usa un dominio relativamente pequeño (menos que 1000 km), entonces el efecto del factor es insignificante", El papel del mapeo de proyecciones es discutido en la sección 3. Como consecuencia, el modelo puede ser aplicado en un dominio  $\mathcal{D}(L)$  tan grande como  $1000 \times 1000 \text{ km}^2$ . Está aseveración es incorrecta desde (i) en un dominio tan grande  $700 \times 700 \text{ km}^2$  la tropósfera esta bajo el plano tangente  $xy$ , y (ii) la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  es usada en las ecuaciones de momentum. De hecho, el modelo soluciona ecuaciones dinámicas siguiendo coordenadas que siguen al terreno  $\xi = x, \eta = y, \zeta = \zeta(x, y, z)$  con  $\zeta(x, y, z)$  similar a(4.57) [16, p. 114, 199] con el cual produce las ecuaciones de momentum horizontales [16, p. 119]

$$\begin{aligned} \frac{dv^*}{dt} &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} J_3(p' - \alpha \text{Div}^*) + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_2(p' - \alpha \text{Div}^*) \right] - \rho^* f u + \sqrt{G} D_v \\ \frac{du^*}{dt} &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} J_3(p' - \alpha \text{Div}^*) + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_1(p' - \alpha \text{Div}^*) \right] + \rho^* [f v - \bar{f} w] + \sqrt{G} D_u \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde las componentes horizontales  $g^1, g^2$  de  $\mathbf{g}$  son omitidas;  $J_1 = -\partial z / \partial \xi, J_2 = -\partial z / \partial \eta, \sqrt{G} = |\partial z / \partial \zeta|$ , la notación  $u^* = \rho^* u$  con  $\rho^* = \bar{\rho} \sqrt{G}$  es usada y  $\alpha \text{Div}^*$  es una divergencia artificial para atenuar las ondas acústicas. De hecho, las ecuaciones, (2.23) son obtenidas de las ecuaciones de momentum para un fluido

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\nabla \frac{p'}{\rho_0} + B \mathbf{k}$$

con  $B = -g\rho'/\bar{\rho}$  y  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  [16, p. 350]. Como vimos en la sección 2.1, la última aproximación es válida en el dominio  $\mathcal{D}(L)$  definido de  $100 \times 100 \text{ km}^2$ .

## 4.10. Fórmula lagrangiana para la aceleración

Una forma compacta y elegante para calcular la aceleración y los símbolos de Christoffel consisten en usar la formulación lagrangiana de la forma covariante. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{r} + \mathbf{R}_c \\ \mathbf{V} &= \mathbf{v} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{v} = \dot{x}^i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \mathbf{a} = \ddot{x}^i \hat{\mathbf{x}}_i.$$

La forma covariante de la aceleración es

$$\mathbf{a} = a_i \eta^i$$

donde la ley de transformación covariante da

$$a_i = \ddot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial y^k}. \quad (4.63)$$

La fórmula lagrangiana de  $a_i$  se manipulación directa del lado derecho como sigue. Empecemos con la identidad

$$\ddot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \left( \frac{d}{dt} \dot{x}^i \right) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \dot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right)}_{(a)} - \underbrace{\dot{x}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}}_{(b)} \quad (4.64)$$

Para reescribir el término (a) derivamos la transformación de coordenadas  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$  (4.3) ó (4.2) con la regla la cadena

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{d}{dt} x^i(y^1, y^2, y^3) = \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \dot{y}^l. \quad (4.65)$$

Esta expresión es un caso particular de la ley de transformación contravariante y muestra que  $\dot{x}^i$  es una combinación lineal de las velocidades generalizadas  $\dot{y}^k$ , ya que el  $\frac{\partial x^i}{\partial y^k}$ , sólo depende de las coordenadas  $y^j$ . Entonces

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \quad (4.66)$$

y

$$\dot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} \frac{v^2}{2}$$

donde

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{x}^i \dot{x}^i$$

es la rapidez relativa a la Tierra. Para el término (b) en (4.65) tenemos la identidad

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{y}^l \frac{\partial}{\partial y^l}$$

que al aplicarla a la expresión  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ , donde *no* aparece explícitamente *t*, se reduce

$$\frac{d}{dt} = \dot{y}^l \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \dot{y}^l \frac{\partial}{\partial y^l} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \dot{y}^l \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} = \frac{\partial}{\partial y^k} \left( \dot{y}^l \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k} \left( \dot{y}^l \frac{\partial}{\partial y^l} x^i \right) x^i = \frac{\partial}{\partial y^k} \dot{x}^i$$

donde usamos el hecho que  $\dot{y}^l$  sólo depende de  $t$  y no de las coordenadas  $y^k$ . En esta forma llegamos a

$$\dot{x}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{v^2}{2}.$$

Así llegamos a la expresión deseada

$$\ddot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{v^2}{2} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2}.$$

que permite calcular la componente covariante de la aceleración

$$a_k = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2} \quad (4.67)$$

sin tener que calcular los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jl}^i$ . Para usar la ecuación (4.67) debemos expresar  $v^2$  en términos de las componentes contravariantes de la velocidad en el sistema  $y^k$ . Esto es inmediato

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^i v_i = g_{lj} v^l v^j. \quad (4.68)$$

La ecuación (4.68) da un camino para obtener  $\Gamma_{jl}^i$ . En efecto, usando  $a^i = g^{ik} a_k$  en la expresión de las componentes contravariantes de la aceleración (4.67),

$$g^{ik} a_k = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jl}^i v^j v^l, \quad (4.69)$$

llegamos a

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{jl}^i v^j v^l = g^{ik} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2}$$

Para obtener  $\Gamma_{jl}^i$  calculamos el lado derecho usando (4.67):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) g_{lj} \dot{y}^l \dot{y}^j \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} g_{lj} [\delta_k^l v^j + \delta_k^j v^l] - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^k} v^l v^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} [g_{jk} v^j + g_{kl} v^l] - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^k} v^l v^j \right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dt} [g_{jk} v^j + g_{kl} v^l] = g_{jk} \frac{dv^j}{dt} + g_{kl} \frac{dv^l}{dt} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} v^l v^j + \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j} v^j v^l = 2g_{kj} \frac{dv^j}{dt} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} v^l v^j + \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j} v^j v^l$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2} &= g_{kj} \frac{dv^j}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^k} \right) v^j v^l \\ g^{ik} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} - \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \frac{v^2}{2} &= \frac{dv^i}{dt} + \frac{1}{2} g^{ik} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^k} \right) v^j v^l \end{aligned}$$

y comparando con las expresiones de arriba se llega a la expresión reportada en la literatura

$$\Gamma_{jl}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial y^k} \right).$$

#### 4.11. Coordenadas curvilíneas ortogonales $s^i$ en forma tensorial

Las ecuaciones para flujos geofísicos a gran escala conviene escribirlas usando coordenadas curvilíneas ortogonales  $s^i$  donde la coordenada vertical  $s^3$  se reemplaza por una coordenada generalizada  $y^3$ . En este caso conviene aprovechar la simplicidad de las expresiones en el sistema ortogonal  $s^i$  para obtener las expresiones en el sistema  $y^3$ . Comencemos reescribiendo las expresiones del sistema  $s^i$  en forma tensorial. Tenemos

$$x^i = x^i(s^1, s^2, s^3)$$

con lo cual obtenemos la base covariante

$$\tau_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^i} = h_i \hat{s}_i. \quad (4.70)$$

Para la base contravariante tenemos

$$\eta^i \equiv \nabla s^i = \frac{1}{h_i} \hat{s}_i \quad (4.71)$$

Si un vector  $\mathbf{b}$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= b(i) \hat{s}_i & : & \quad b(i) = \text{componente física} \\ &= b^i \tau_i & : & \quad b^i = \text{componente contravariante} \\ &= b_i \eta^i & : & \quad b_i = \text{componente covariante} \end{aligned}$$

la relación entre componentes es similar a la que hay entre componentes es similar a la que hay entre vectores base

$$b_i = h_i b(i) \quad , \quad b^i = \frac{b(i)}{h_i} \quad . \quad (4.72)$$

La matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial s^j} \quad (4.73)$$

no es diagonal en general pero el tensor métrico  $\mathbf{G} = \mathbf{J}^t \mathbf{J}$  siempre lo es. En efecto tenemos

$$g_{ij} = \tau_i \cdot \tau_j = \frac{\partial x^k}{\partial s^i} \frac{\partial x^k}{\partial s^j} = \delta_{ij} h_j^2 \quad , \quad g^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{h_j^2} \quad , \quad J = \det(\mathbf{J}) = \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \quad . \quad (4.74)$$

El producto vectorial  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  conviene calcularlo primero en términos de las componentes físicas

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \hat{s}_i \epsilon_{ijk} b(j) c(k)$$

y luego pasar a la forma covariante o contravariante. Para el operador gradiente tenemos

$$\nabla = \eta^i \frac{\partial}{\partial s^i} = \hat{s}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} \quad (4.75)$$

Usando la forma contravariante

$$\mathbf{b} = b^i \tau_i$$

recuperamos ,

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial s^i} \sqrt{g} b^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial s^i} h_1 h_2 h_3 \frac{b(i)}{h_i}$$

La velocidad relativa a la tierra está dada por

$$\mathbf{v} = v^i \tau_i = v(i) \hat{s}_i \quad \text{con} \quad v^i = \dot{s}^i = \frac{v(i)}{h_i}$$

La expresión de la aceleración relativa a la Tierra

$$\mathbf{a} = a(i) \hat{s}_i$$

tiene componentes físicas están dadas por

$$a(i) = \frac{d}{dt} v(i) + \mathbb{R}_{ij} \dot{\mathbb{R}}_{jk} v(k) \quad (4.76)$$

Esta expresión es simple si la comparamos con la forma contravariante la cual requiere de los símbolos de Christoffel ,

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{ik}^i v^k \quad .$$

#### 4.12. Ecuaciones en coordenadas $y^1 = s^1, y^2 = s^2, y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3)$

a) Consideremos la transformación

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \quad (4.77)$$

donde  $y^i$  se define a partir de coordenadas curvilíneas ortogonales  $s^j$ ,

$$y^1 = s^1, \quad y^2 = s^2, \quad y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3).$$

Las ecuaciones de la transformación inversa son

$$s^1 = y^1, \quad s^2 = y^2, \quad s^3 = s^3(y^1, y^2, y^3).$$

En principio la transformación (4.77) da las bases

$$\bar{\tau}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i}, \quad \bar{\eta}^i = \nabla y^i,$$

pero podemos aprovechar las expresiones en la base ortogonal  $\hat{s}_i$  por medio de la regla de la cadena. En efecto tenemos

$$\bar{\tau}_i = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^k} = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} \tau_k \quad (4.78)$$

con

$$\bar{J}_{ij} \equiv \frac{\partial s^i}{\partial y^j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_i = \frac{\partial s^3}{\partial y^i},$$

por tanto

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \\ \bar{\tau}_3 \end{pmatrix} = \bar{J}^t \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & J_1 \\ 0 & 1 & J_2 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

y

$$\bar{\tau}_1 = \tau_1 + J_1 \tau_3, \quad \bar{\tau}_2 = \tau_2 + J_2 \tau_3, \quad \bar{\tau}_3 = J_3 \tau_3. \quad (4.80)$$

b) Para la base contravariante tenemos

$$\bar{\eta}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \hat{x}_j = \frac{\partial y^i}{\partial s^k} \frac{\partial s^k}{\partial x^j} \hat{x}_j = \frac{\partial y^i}{\partial s^k} \eta^k \quad (4.81)$$

con

$$\frac{\partial y^i}{\partial s^k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{J}_i = \frac{\partial y^3}{\partial s^i}.$$

Pero  $\bar{J}_{ik}^{-1} = \frac{\partial y^i}{\partial s^k}$ , si calculamos  $\bar{J}^{-1}$  por cofactores se obtiene

$$\bar{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{J_3} \begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ -J_1 & -J_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= -\frac{J_1}{J_3} & \hat{J}_2 &= -\frac{J_2}{J_3} & \hat{J}_3 &= \frac{1}{J_3} \\ \bar{\eta}^1 &= \eta^1 & \bar{\eta}^2 &= \eta^2 & \bar{\eta}^3 &= J_1 \eta^1 + J_2 \eta^2 + J_3 \eta^3 \end{aligned} \quad (4.83)$$

En términos de la base ortonormal  $\hat{s}_i$  tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 &= h_1 \hat{s}_1 + h_3 J_3 \hat{s}_3 & \bar{\tau}_2 &= h_2 \hat{s}_2 + h_3 J_3 \hat{s}_3 & \bar{\tau}_3 &= h_3 J_3 \hat{s}_3 \\ \bar{\eta}^1 &= \frac{\hat{s}_1}{h_1} & \bar{\eta}^2 &= \frac{\hat{s}_2}{h_2} & \bar{\eta}^3 &= \frac{J_1}{h_1} \hat{s}_1 + \frac{J_2}{h_2} \hat{s}_2 + \frac{J_3}{h_3} \hat{s}_3 \end{aligned} \quad (4.84)$$

c) Para el tensor métrico en el sistema  $y_i$  tenemos

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} \frac{\partial s^l}{\partial y^j} \frac{\partial x^m}{\partial s^l} = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} \left( \frac{\partial x^m}{\partial s^k} \frac{\partial x^m}{\partial s^l} \right) \frac{\partial s^l}{\partial y^j} = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial s^l}{\partial y^j}$$

o en forma matricial

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{J}^t \mathbf{G} \mathbf{J}.$$

Por tanto

$$\tilde{g} \equiv \det(\tilde{\mathbf{G}}) = J_3^2 g \quad (4.85)$$

lo que da el jacobiano de la transformación (4.82)

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = \sqrt{\tilde{g}} = J_3 \sqrt{g} = J_3 h_1 h_2 h_3 \quad (4.86)$$

y usando

$$g_{kl} = \delta_{kl} h_l^2$$

junto se obtiene

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} h_1^2 + h_3^2 J_1^2 & h_3^2 J_1 J_2 & h_3^2 J_1 J_3 \\ h_3^2 J_1 J_2 & h_2^2 + h_3^2 J_2^2 & h_3^2 J_2 J_3 \\ h_3^2 J_1 J_3 & h_3^2 J_2 J_3 & h_3^2 J_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Para el tensor métrico inverso tenemos

$$\tilde{\mathbf{G}}^{-1} = \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{G}^{-1} (\tilde{\mathbf{J}}^{-1})^t = (\tilde{\mathbf{J}}^{-1})^t \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}^{-1}$$

y dado que la estructura de  $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$  es igual a la de  $\tilde{\mathbf{J}}$  tenemos

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} h_1^{-2} + h_3^{-2} \hat{J}_1^2 & h_3^{-2} \hat{J}_1 \hat{J}_2 & h_3^{-2} \hat{J}_1 \hat{J}_3 \\ h_3^{-2} \hat{J}_1 \hat{J}_2 & h_2^{-2} + h_3^{-2} \hat{J}_2^2 & h_3^{-2} \hat{J}_2 \hat{J}_3 \\ h_3^{-2} \hat{J}_1 \hat{J}_3 & h_3^{-2} \hat{J}_2 \hat{J}_3 & h_3^{-2} \hat{J}_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

d) En el sistema ortogonal  $s^i$  el operador gradiente está dado por

$$\nabla = \eta^i \frac{\partial}{\partial s^i} = \hat{s}^i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial s^i} = \nabla_H + \hat{s}^3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial s^3}$$

donde

$$\nabla_H = \eta^1 \frac{\partial}{\partial s^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial s^2} = \hat{s}^1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial s^1} + \hat{s}^2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial s^2}.$$

es la "parte horizontal" de  $\nabla$ . En el sistema  $y^i$  tenemos

$$\nabla = \bar{\eta}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

y usando el gradiente en su forma contravariante se obtiene

$$\nabla = \eta^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{J}_i \eta^i \frac{\partial}{\partial y^3} = \eta^i \left[ \frac{\partial}{\partial y^i} + \hat{J}_i \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \eta^2 \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{J}_2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \eta^3 \hat{J}_3 \frac{\partial}{\partial y^3} \quad (4.89)$$

$$= \hat{s}^1 \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} + \hat{J}_1 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \hat{s}^2 \frac{1}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{J}_2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \hat{s}^3 \frac{1}{h_3} \hat{J}_3 \frac{\partial}{\partial y^3}. \quad (4.90)$$

e) La velocidad relativa a la Tierra está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} = \hat{x}_j \dot{x}^j = \hat{x}_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \dot{y}^i = \bar{\tau}_i \dot{y}^i$$

donde identificamos a las velocidades generalizadas con las componentes contravariantes

$$\dot{y}^i = \tilde{v}^i .$$

Para la derivada total tenemos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

pero  $\dot{y}^i = \tilde{v}^i$  por lo que podemos escribir

$$\tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \tilde{v}^j \tilde{\tau}_j \cdot \tilde{\eta}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (4.91)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

En términos de componentes físicas horizontales de la velocidad tenemos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \frac{v(1)}{h_1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{v(2)}{h_2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dot{y}^3 \frac{\partial}{\partial y^3} .$$

La ley de transformación contravariante da la relación entre componentes físicas de la velocidad y la velocidad generalizada  $\dot{y}^3$ ,

$$\dot{y}^3 = \frac{\partial y^3}{\partial s^i} s^i = \hat{J}_i \frac{v(i)}{h_i} . \quad (4.92)$$

f) Para la divergencia tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i = \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} J_3 \sqrt{g} \tilde{v}^i = \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \left[ \sqrt{g} \tilde{v}^i \frac{\partial J_3}{\partial y^i} + J_3 \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i \right] = \frac{1}{J_3} \tilde{v}^i \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial y^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i$$

donde

$$\frac{1}{J_3} \tilde{v}^i \frac{\partial J_3}{\partial y^i} = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \ln J_3 = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \ln J_3$$

pero

$$\frac{d}{dt} \ln J_3 = \frac{\partial}{\partial t_y} \ln J_3 + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \ln J_3 = \mathbf{v} \cdot \nabla \ln J_3$$

ya que  $\tilde{J}_3$  no depende explícitamente de  $t$ , de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \ln J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i . \quad (4.93)$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i = 0 . \quad (4.94)$$

Usando  $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$  y  $v^1 = \frac{v(1)}{h_1}$   $v^2 = \frac{v(2)}{h_2}$   $v^3 = \dot{y}^3$  obtenemos

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} h_2 h_3 v(1) + \frac{\partial}{\partial y^2} h_1 h_3 v(2) + \frac{\partial}{\partial y^3} h_1 h_2 h_3 \dot{y}^3 \right] . \quad (4.95)$$

Usando (4.95) obtenemos la forma de flujo:

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J = \frac{1}{\rho J_3} \frac{d}{dt} \rho J_3 = \frac{1}{\rho J_3} \left( \frac{\partial}{\partial t_y} \rho J_3 + \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \rho J_3 \right)$$

entonces

$$\frac{\partial \rho J_3}{\partial t_y} + \tilde{v}^i \frac{\partial \rho J_3}{\partial y^i} + \frac{\rho J_3}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i = 0$$

ó

$$\frac{\partial \rho J_3}{\partial t_y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \rho J_3 \tilde{v}^i = 0.$$

En términos de componentes físicas de la velocidad

$$\frac{\partial \rho J_3}{\partial t_y} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} h_2 h_3 \rho J_3 v(1) + \frac{\partial}{\partial y^2} h_1 h_3 \rho J_3 v(2) + \frac{\partial}{\partial y^3} \sqrt{g} \rho J_3 \dot{y}^3 \right] = 0.$$

g) Para la aceleración relativa a la tierra tenemos

$$a(i) = \frac{d}{dt} v(i) + \mathbb{R}_{ij} \dot{\mathbb{R}}_{jk} v(k).$$

Al considerar el lado derecho como función de las coordenadas  $y^i$  usamos (4.95),

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \mathbf{v}_H^y \cdot \nabla_H^y + \dot{y}^3 \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

Podemos simplificar el resultado final recordando que la matriz  $\mathbb{R} \dot{\mathbb{R}}^t$  es antisimétrica,

$$\mathbb{R} \frac{d\mathbb{R}^t}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que define al vector

$$\alpha = \alpha_i \hat{s}_i$$

con el cual podemos escribir

$$\mathbf{a} = \frac{dv(i)}{dt} \hat{s}_i + \alpha \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = v(i) \hat{s}_i,$$

donde

$$\alpha \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \hat{s}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ v(1) & v(2) & v(3) \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \alpha_j v(k) \hat{s}_i$$

Ahora consideremos la descomposición de la ecuación de momentum

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (4.96)$$

en partes horizontal y vertical. Para un vector arbitrario

$$\mathbf{b} = b(i) \hat{s}_i$$

definimos

$$\mathbf{b}_H \equiv b(1) \hat{s}_1 + b(2) \hat{s}_2$$

entonces (4.96) toma la forma

$$\mathbf{a}_H + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]_H + [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})]_H = \left[ -\frac{1}{\rho} \nabla p \right]_H + [\mathbf{g}]_H$$

donde

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \nabla p \right]_H = -\frac{1}{\rho} \left[ \nabla_H^y + (\nabla_H^y \dot{y}^3) \frac{\partial}{\partial y^3} \right] p$$

y la ecuación de momentum vertical es

$$a(3) + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] \cdot \hat{s}_3 + [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})] \cdot \hat{s}_3 = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial y^3}{\partial s^3} \frac{\partial p}{\partial y^3} \right] + \mathbf{g} \cdot \hat{s}_3$$

donde

$$a(3) = \frac{d}{dt} v(3) + [\alpha \times \mathbf{v}] \cdot \hat{s}_3.$$

## Capítulo 5

# Ecuaciones en coordenadas dependientes del tiempo

En los capítulos 1 y 2 hemos introducido los sistemas cartesianos de coordenadas siguientes: el sistema de referencia inercial  $X^i$  y el sistema  $x^i$  fijo a la Tierra Fig. 2.1. La relación entre los vectores de posición de una partícula es

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c \quad (5.1)$$

con

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i, \quad \mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{x}}_i(t), \quad \mathbf{R}_c = x_c^i \hat{\mathbf{x}}_i(t) \quad \text{con} \quad x_c^i = cte$$

donde indicamos la dependencia explícita de la base  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  con el tiempo [ec. (5.1)]. En la sección 5.1 deduciremos un conjunto de ecuaciones en coordenadas curvilíneas ortogonales donde la coordenada  $y^3$  depende de la coordenada  $s^3$  y además es dependiente del tiempo. En la sección 5.2 deducimos las ecuaciones en coordenadas curvilíneas ortogonales ( $y^3 = p_0(z_s, t)$ ) y su simplificación. En la sección 5.3 damos una breve introducción a las coordenadas curvilíneas ortogonales donde la coordenada  $y^3$  depende de todas las componentes curvilíneas  $s^i$  y además es dependiente del tiempo. Finalmente en la sección 5.4 deducimos las ecuaciones de continuidad y de momentum utilizando a la presión como coordenada vertical.

### 5.1. Coordenadas curvilíneas ortogonales dependientes del tiempo

a) Consideremos un sistema curvilíneo ortogonal  $s^i$  definido originalmente en un sistema cartesiano  $x^i$  fijo a la Tierra, e introduzcamos las nuevas coordenadas

$$y^1 = s^1 \quad y^2 = s^2 \quad y^3 = y^3(s^3, t) \quad (5.2)$$

donde suponemos que podemos despejar a  $s^3$  de manera que las ecuaciones de la transformación inversa están bien definidas

$$s^1 = y^1 \quad s^2 = y^2 \quad s^3 = s^3(y^3, t). \quad (5.3)$$

La introducción de la nueva coordenada  $y^3$  está motivada por el uso de la presión de referencia  $p_0 = p_0(z_s, t)$  como coordenada vertical de la cual obtenemos  $z_s = z_s(p_0, t)$ . Para caracterizar al sistema  $y^i$  usamos la base covariante

$$\bar{\tau}_i = \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{t=cte} \mathbf{R} = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s^j} = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} \tau_j$$

donde el tiempo se toma constante y  $\tau_j = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s^j}$  es la base covariante asociada al sistema  $s^i$ . Aparece la matriz Jacobiana de la transformación (5.3)

$$\bar{\mathbf{J}}_{ij} \equiv \frac{\partial s^j}{\partial y^i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad J_3 \equiv \frac{\partial s^3}{\partial y^3}.$$

Entonces

$$\tilde{\tau}_1 = \tau_1 = h_1 \hat{s}_1, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2 = h_2 \hat{s}_2, \quad \tilde{\tau}_3 = J_3 \tau_3 = J_3 h_3 \hat{s}_3.$$

de donde se sigue la ortogonalidad del sistema  $y^i$  y los factores métricos correspondientes están dados por

$$\tilde{h}_1 = h_1, \quad \tilde{h}_2 = h_2, \quad \tilde{h}_3 = h_3 J_3.$$

b) La base contravariante asociada al sistema  $y^i$  se define en la forma usual

$$\tilde{\eta}^i = \nabla y^i(x)$$

y aprovechando la relación con el sistema  $s^i$  tenemos

$$\tilde{\eta}^i = \hat{x}^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \hat{x}^k \frac{\partial s^j}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial s^j} = \frac{\partial y^i}{\partial s^j} \eta^j, \quad \text{con } \eta^j = \nabla s^j$$

donde aparece la matriz

$$\left(\tilde{J}^{-1}\right)_{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial s^j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{con } \hat{J}_3 = \frac{\partial y^3}{\partial s^3}.$$

La relación de reciprocidad  $\tilde{\tau}_i \cdot \tilde{\eta}^j = \delta_i^j$  tiene lugar junto con  $\hat{J}_3 = J_3^{-1}$  y

$$\tilde{\eta}^1 = \eta^1 = \frac{1}{h_1} \hat{s}_1, \quad \tilde{\eta}^2 = \eta^2 = \frac{1}{h_2} \hat{s}_2, \quad \tilde{\eta}^3 = \frac{\hat{J}_3}{h_3} \hat{s}_3.$$

c) Denotemos con  $b(i)$  a las componentes físicas de un vector  $\mathbf{b}$  en el sistema  $s^i$ :

$$\mathbf{b} = b(i) \hat{s}_i.$$

La forma de  $b(i)$  en el sistema  $y^i$  se obtiene usando (5.2):  $b(i) = b(i, s_1, s_2, s_3(y^3, t); t)$ .

La velocidad relativa a la tierra en el sistema  $s^i$  es

$$\mathbf{v} = \hat{x}_i \frac{d}{dt} x^i = \tau_i \dot{s}^i = \hat{s}_i (h_i \dot{s}^i) \equiv \hat{s}_i v(i) \quad (5.4)$$

donde

$$v(i) = h_i \dot{s}^i = \text{componente física de } \mathbf{v} \text{ en el sistema } s^i \quad (5.5)$$

$$\dot{s}^i = \frac{d}{dt} s^i = \text{velocidad generalizada en el sistema } s^i.$$

Para calcular  $\mathbf{v}$  en el sistema  $y^i$  tenemos

$$\dot{s}^i = \frac{d}{dt} s^i(y, t) = \frac{\partial s^i}{\partial t_y} + \dot{y}^j \left( \frac{\partial s^i}{\partial y^j} \right)_{t=cte}$$

donde

$$\dot{y}^j = \text{velocidad generalizada en el sistema } y^i.$$

Por tanto

$$\dot{s}^1 = \dot{y}^1, \quad \dot{s}^2 = \dot{y}^2, \quad \dot{s}^3 = \dot{y}^3 J_3 + \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \quad (5.6)$$

$$v(1) = h_1 \dot{s}^1, \quad v(2) = h_2 \dot{s}^2, \quad v(3) = h_3 \left( J_3 \dot{y}^3 + \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \right). \quad (5.7)$$

Las componentes físicas de la aceleración relativa a la tierra están dadas por

$$a(i) = \dot{v}(i) + \mathbb{R}_{ij} \mathbb{R}_{kj} v(k)$$

y su forma en el sistema  $y^i$  se obtiene usando (5.7).

d) El gradiente en el sistema  $y^i$  está dado por

$$\nabla = \eta^j \frac{\partial}{\partial s^j} = \eta^j \frac{\partial y^i}{\partial s^j} \frac{\partial}{\partial y^i} = \bar{\eta}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

y en términos de la base  $\hat{s}_i$  tenemos

$$\nabla = \hat{s}_i \frac{1}{\bar{h}_i} \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{s}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \hat{s}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{s}_3 \frac{\hat{J}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

e) El procedimiento usado en la sección 2.4 para calcular  $\nabla \cdot \mathbf{b}$  en el sistema  $s^i$  es válido para el sistema  $y^i$  ya que tal procedimiento sólo involucra derivadas espaciales (no aparece el operador  $\frac{\partial}{\partial t_y}$ ), por lo que la presencia explícita del tiempo  $t$  en las ecuaciones de transformación (5.3) es irrelevante. Entonces

$$\nabla \cdot [b^i(y, t) \hat{s}_i] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 J_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} h_2 h_3 J_3 b(1) + \frac{\partial}{\partial y^2} h_1 h_3 J_3 b(2) + \frac{\partial}{\partial y^3} h_1 h_2 b(3) \right]. \quad (5.8)$$

donde  $b(i, y, t)$  indica que las componentes físicas de  $\mathbf{b}$  que pueden depender explícitamente del tiempo  $t$ . En forma análoga, el argumento usado para calcular  $\nabla \times$  en el sistema  $s^i$ , es válido en el sistema  $y^i$ , por lo tanto

$$\nabla \times [b(i) \hat{s}_i] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 J_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{s}_1 & h_2 \hat{s}_2 & h_3 J_3 \hat{s}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y^1} & \frac{\partial}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y^3} \\ h_1 b(1) & h_2 b(2) & h_3 J_3 b(3) \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

f) Las formas covariante y contravariante de un vector  $\mathbf{b}$  en el sistema  $y^i$  están dadas por

$$\mathbf{b} = b_i \bar{\eta}^i = b^i \bar{\tau}_i.$$

La relación con las componentes físicas en la base  $\hat{s}_i$  es

$$b_i = \bar{h}_i b(i) \quad b^i = \frac{b(i)}{\bar{h}_i}$$

y las leyes de transformación covariante y contravariante son válidas para relacionar componentes en los sistemas  $s^i$  y  $y^i$ :

$$b_i(y) = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} b_j(s) \quad b^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial s^j} b^j(s). \quad (5.10)$$

**Nota 5.1.** De acuerdo con (5.5) las velocidades generalizadas  $\dot{s}^i$  son las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$  en el sistema  $s^i$ . Mientras que las ecuaciones (5.5) muestran que sólo las velocidades generalizadas  $\dot{y}^{i=1,2}$  son componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$  en el sistema  $y^i$ ,  $\dot{y}^3$  no lo es. Si usamos la ley contravariante para relacionar las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$  en los sistemas  $s^i$  y  $y^i$  obtenemos una forma equivalente de las ecuaciones (5.5):

$$\begin{aligned} \tilde{v}^i(y, t) &= \frac{\partial y^i}{\partial s^j} v^j(s, t) = \dot{s}^i \quad \text{para } i = 1, 2, \\ \tilde{v}^3(y, t) &= \frac{\partial y^3}{\partial s^j} v^j(s, t) = \hat{J}_3 \dot{s}^3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si sustituímos en la ecuación para  $\tilde{v}^3$  la expresión de  $\dot{s}^3$  en (5.7) y usamos  $\hat{J}_3 J_3 = 1$  obtenemos

$$\tilde{v}^3(y, t) = \dot{y}^3 + \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y}. \quad (5.12)$$

El tensor métrico  $\bar{\mathbf{G}} = \{\bar{g}_{ij}\}$  en el sistema  $y^i$  es

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} = \frac{\partial s^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial s^l} \frac{\partial s^m}{\partial y^j} \frac{\partial x^k}{\partial s^m} = \frac{\partial s^l}{\partial y^i} g_{lm} \frac{\partial s^m}{\partial y^j} \quad \text{con } g_{lm} = \frac{\partial x^k}{\partial s^l} \frac{\partial x^k}{\partial s^m}$$

donde  $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$  es el tensor métrico en el sistema  $s^i$ . En forma matricial tenemos

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{J}}^t \mathbf{G} \tilde{\mathbf{J}} .$$

Si tenemos

$$g = \det(\mathbf{G}) , \quad \tilde{g} = \det(\tilde{\mathbf{G}})$$

entonces

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 , \quad \sqrt{\tilde{g}} = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 = h_1 h_2 h_3 J_3 = J_3 \sqrt{g} .$$

La relación entre las bases  $\tilde{\tau}_i$  y  $\tilde{\eta}^i$  es

$$\tilde{\tau}_i = \tilde{g}_{ij} \tilde{\eta}^j , \quad \tilde{\eta}^j = \tilde{g}^{ij} \tilde{\tau}_i \quad \text{con} \quad \{\tilde{g}^{ij}\} = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} .$$

g) La forma del operador  $\frac{d}{dt}$  se obtiene por aplicación directa de la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} . \quad (5.13)$$

El término  $\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$  no puede escribirse en la forma  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  ya que  $\dot{y}^3$  no es componente contravariante de  $\mathbf{v}$ . En efecto tenemos

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \tilde{v}^i \tilde{\tau}_i \cdot \tilde{\eta}^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \dot{y}^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \dot{y}^2 \frac{\partial}{\partial y^2} + \left( \dot{y}^3 + \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \right) \frac{\partial}{\partial y^3} = \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \frac{\partial}{\partial y^3}$$

por tanto

$$\mathbf{v} \cdot \nabla - \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \frac{\partial}{\partial y^3} . \quad (5.14)$$

Lo que sí podemos hacer es expresar a  $\dot{y}^1$  y  $\dot{y}^2$  en términos de componentes físicas (horizontales) de la velocidad

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \frac{v(1)}{h_1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{v(2)}{h_2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dot{y}^3 \frac{\partial}{\partial y^3} . \quad (5.15)$$

f) El uso de la forma contravariante  $\mathbf{b} = b^i \tilde{\tau}_i$  en el sistema  $y^i$  simplifica la expresión (5.7) de  $\nabla \cdot \mathbf{b}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{\tilde{g}} b^i = \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} J_3 \sqrt{g} b^i . \quad (5.16)$$

En particular para la velocidad relativa a la Tierra  $\mathbf{v}$  tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{g}} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial y^i} J_3 \sqrt{g} \tilde{v}^i = \frac{\partial}{\partial y^1} J_3 \sqrt{g} \dot{y}^1 + \frac{\partial}{\partial y^2} J_3 \sqrt{g} \dot{y}^2 + \frac{\partial}{\partial y^3} J_3 \sqrt{g} \left( \dot{y}^3 + \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} J_3 \sqrt{g} \dot{y}^i + \frac{\partial}{\partial y^3} \sqrt{g} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \\ &= \underbrace{J_3 \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \dot{y}^i + \sqrt{g} \left( \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)}_{\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t_y}} J_3 + \underbrace{\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} + \sqrt{g} \frac{\partial J_3}{\partial t_y}}_{\frac{d \ln J_3}{dt} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y}} , \end{aligned}$$

usando la identidad (5.13) en la forma

$$\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t_y}$$

se obtiene

$$\sqrt{\tilde{g}} \nabla \cdot \mathbf{v} = J_3 \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \dot{y}^i + \sqrt{g} \left( \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t_y} \right) J_3 + \sqrt{g} \frac{\partial J_3}{\partial t_y} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} = J_3 \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \dot{y}^i + \sqrt{g} \frac{d \ln J_3}{dt} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} ,$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \dot{y}^i + \frac{d \ln J_3}{dt} + \frac{1}{J_3} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} . \quad (5.17)$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt} \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} y^i + \frac{1}{J_3} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} = 0. \quad (5.18)$$

## 5.2. Ecuaciones con $y^1 = x_s$ , $y^2 = y_s$ , $y^3 = p_0(z_s, t)$ y su simplificación

a) Consideremos las coordenadas curvilíneas esféricas  $s^1 = x_s$ ,  $s^2 = y_s$ ,  $s^3 = z_s$  definidas en el sistema de referencia primario  $Y^i$ . Recordemos que las coordenadas  $x_s, y_s, z_s$  son adecuadas para trabajar con un modelo *esférico* Terrestre. En el capítulo 3 demostramos que la presión tiene la descomposición

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(z_s, t) + p_1(\mathbf{r}, t)$$

la cual permite simplificar las ecuaciones de movimiento cuando usamos a la presión de referencia  $p_0$  como coordenada vertical. En este caso tenemos

$$y^1 = x_s \quad y^2 = y_s \quad y^3 = p_0 = p_0(z_s, t). \quad (5.19)$$

y de la última ecuación obtenemos

$$z_s = z_s(p_0, t). \quad (5.20)$$

¿Cuándo está bien definida la relación (5.20)? Los vectores base unitarios asociados son  $\hat{x}_s, \hat{y}_s, \hat{z}_s$  y los factores métricos son

$$h_x = \frac{r \cos \phi}{a \cos \phi_c} \quad h_y = \frac{r}{a} \quad h_z = 1 \quad \text{donde } r = z_s + a = z_s(p_0, t) + a$$

$$\sqrt{g} = h_x h_y = \frac{r^2 \cos \phi}{a^2 \cos \phi_c} \quad \hat{J}_3 = J_3^{-1} = \frac{\partial p_0}{\partial z_s}.$$

El vector de posición de una partícula tiene la forma  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_s, y_s, z_s = z_s(p_0, t))$ . En la literatura meteorológica la velocidad generalizada  $\dot{p}$  se representa con  $\omega$  (omega minúscula), por lo que usaremos la notación

$$\omega_0 \equiv \dot{p}_0.$$

Calculando  $\frac{d}{dt} p_0(z_s, t)$  con la regla de la cadena obtenemos

$$\omega_0 \equiv \dot{p}_0 = \hat{J}_3 w_s + \frac{\partial p_0}{\partial t_z} \quad (5.21)$$

donde usamos  $\dot{z}_s = w_s$ . Para la velocidad relativa a la tierra

$$\mathbf{v} = \hat{x}_s u_s + \hat{y}_s v_s + \hat{z}_s w_s$$

tenemos

$$u_s = h_x \dot{x}_s \quad v_s = h_y \dot{y}_s \quad \dot{z}_s = w_s = J_3 \omega_0 + \frac{\partial z_s}{\partial t_{p_0}}, \quad (5.22)$$

la última ecuación se obtiene derivando (5.20) con la regla de la cadena. Para obtener la aceleración relativa a la Tierra

$$\mathbf{a} = \hat{x}_s a_{x_s} + \hat{y}_s a_{y_s} + \hat{z}_s a_{z_s}$$

en el sistema coordenado  $x_s, y_s, p_0$ , sustituimos la expresión (5.21) de  $w_s$  en (2.135). De acuerdo con (5.15) tenemos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_{p_0}} + u_s \frac{r \cos \phi}{a \cos \phi_c} \frac{\partial}{\partial x_s} + v_s \frac{r \cos \phi}{a \cos \phi_c} \frac{\partial}{\partial y_s} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial p_0}. \quad (5.23)$$

El operador gradiente está dado por

$$\nabla = \hat{x}_s \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial x_s} + \hat{y}_s \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial y_s} + \hat{z}_s \hat{J}_3 \frac{\partial}{\partial p_0}$$

y el gradiente de presión queda como sigue

$$\nabla p = \nabla(p_0 + p_1) = \hat{z}_s \hat{J}_3 + \nabla p_1 = \nabla_H p_1 + \hat{z}_s \hat{J}_3 \left(1 + \frac{\partial p_1}{\partial p_0}\right)$$

donde introducimos la notación

$$\nabla_H \equiv \hat{x}_s \frac{1}{h_x} \frac{\partial}{\partial x_s} + \hat{y}_s \frac{1}{h_y} \frac{\partial}{\partial y_s}$$

Para el potencial  $\Phi = \Phi_g + \Phi_c$  tenemos

$$\nabla \Phi = \hat{y}_s \frac{1}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} + \hat{z}_s \hat{J}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_0}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_s \tan \phi}{r} & \frac{u_s}{r} \\ \frac{u_s \tan \phi}{r} & 0 & \frac{v_s}{r} \\ -\frac{u_s}{r} & -\frac{v_s}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} -v_s \sin \phi + w_s \cos \phi \\ u_s \sin \phi \\ -u_s \cos \phi \end{pmatrix} \\ = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p_1}{\partial x_s} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p_1}{\partial y_s} \\ \hat{J}_3 \left(1 + \frac{\partial p_1}{\partial p_0}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} \\ \hat{J}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la ecuación de continuidad tenemos

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} h_y u_s + \frac{\partial}{\partial y_s} h_x v_s + \frac{\partial}{\partial p_0} \sqrt{g} \omega_0 \right) + \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p_0} \frac{\partial z_s}{\partial t} = 0. \quad (5.24)$$

donde

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p_0} = \frac{\partial z_s}{\partial p_0} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial z_s} = J_3 \frac{2r \cos \phi}{a^2 \cos \phi_c}. \quad (5.25)$$

b) La primera aproximación que se acostumbra usar en las ecuaciones de momentum es despreciar la velocidad vertical  $w_s$  en las ecuaciones horizontales

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} + \left( \frac{u_s \tan \phi}{r} + 2\Omega \sin \phi \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x} \frac{\partial p_1}{\partial x_s} \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial p_1}{\partial y_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h_y} \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} \end{pmatrix}$$

y la ecuación de movimiento vertical se aproxima por la ecuación hidrostática

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_0} = \frac{1}{\rho}$$

c) Simplificaciones adicionales:

(i) Recordemos que consideramos un modelo esférico terrestre con radio  $a$ , y si despreciamos la contribución  $\Phi_c$  de la aceleración centrípeta, entonces

$$\Phi = \Phi_g = g \frac{a^2}{r}. \quad (5.26)$$

(ii) Es razonable considerar

$$r = z_s + a \sim a.$$

(iii) Para puntos  $(x_s, y_s, z_s)$  cercanos al punto de referencia  $(x_s = y_s = z_s = 0) \equiv (\lambda_c, \phi_c, r = a)$  podemos considerar

$$h_x \cong \frac{\cos \phi}{\cos \phi_c} \sim 1, \quad h_{y_s} \cong 1. \quad (5.27)$$

Para simplificar la ecuación hidrostática usamos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_0} = \frac{\partial z_s}{\partial p_0} \frac{\partial}{\partial z_s} g \frac{a^2}{r} = -g \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial z_s}{\partial p_0} \sim -g J_3 \quad (5.28)$$

por tanto

$$-g \frac{\partial z_s}{\partial p_0} = \frac{1}{\rho}.$$

Esta ecuación es inconsistente ya que el lado izquierdo sólo depende de  $p_0$  y  $t$  mientras que  $\rho = \rho(x_s, y_s, p_0, t)$ . La inconsistencia se elimina si usamos la aproximación

$$\rho(r, t) = \rho_0(z_s, t) + \rho_1(r, t) \sim \rho_0(z_s, t).$$

en las ecuaciones de momentum y continuidad. Así, las ecuaciones de momentum se reducen a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} + \left( \frac{u_s \tan \phi_c}{a} + 2\Omega \sin \phi_c \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial p_1}{\partial y_s} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$\rho_0 J_3 = -\frac{1}{g}. \quad (5.30)$$

donde ahora usamos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_{p_0}} + u_s \frac{\partial}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial}{\partial y_s} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial p_0}. \quad (5.31)$$

La ecuación hidrostática (5.30) puede reescribirse usando (5.26) y recordando que las variables de referencia satisfacen la ecuación de estado  $\frac{1}{\rho_0} = \frac{RT_0}{p_0}$ , así tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_0} = -\frac{RT_0}{p_0}. \quad (5.32)$$

La ecuación hidrostática (5.30) da  $\frac{d}{dt} \rho_0 J_3 = 0$  con lo cual la ecuación de continuidad (5.24) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x_s} h_y u_s + \frac{\partial}{\partial y_s} h_x v_s + \frac{\partial}{\partial p_0} \sqrt{g} \omega_0 + \frac{1}{J_3} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p_0} \frac{\partial z_s}{\partial t_{p_0}} = 0,$$

y reagrupando términos

$$h_y \frac{\partial}{\partial x_s} u_s + h_y \frac{\partial \cos \phi}{\partial y_s \cos \phi_c} v_s + \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial p_0} \omega_0 + \left( \omega_0 + \frac{1}{J_3} \frac{\partial z_s}{\partial t_{p_0}} \right) \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p_0} = 0. \quad (5.33)$$

El valor característico de  $u_s, v_s$  para flujos con escalas espaciales del orden de  $x_s, y_s \sim 10^6$  m, es  $u_s, v_s \sim 10$  ms<sup>-1</sup>. Esto da

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_s}, \frac{\partial v_s}{\partial y_s} \sim \frac{10 \text{ ms}^{-1}}{10^6 \text{ m}} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

La escala de tiempo de flujos con  $x_s, y_s \sim 10^6$  m, es  $t_0 = (2\Omega)^{-1}$  y el valor característico es  $p_0 \sim 10^5$ . Estos valores dan

$$\omega_0 = \frac{dp_0}{dt} \sim 2\Omega p_0 = 14 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \times 10^5 \text{ Pa} \sim 10 \text{ s}^{-1} \text{ Pa}$$

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} \sim \frac{2\Omega}{p_0} = 2\Omega = 14 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Para el último término en (5.33) usamos (5.25) y la expresión de  $w_s$  en (5.22), la cual da

$$\omega_0 + \frac{1}{J_3} \frac{\partial z_s}{\partial t_{p_0}} = \frac{w_s}{J_3},$$

por tanto

$$\left( \omega_0 + \frac{1}{J_3} \frac{\partial z_s}{\partial t_{p_0}} \right) \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p_0} = \frac{w_s}{J_3} J_3 \frac{2r \cos \phi}{a^2 \cos \phi_c} \sim \frac{2w_s}{a} \sim \frac{2 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1}}{6,378 \times 10^6 \text{ m}} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}.$$

Por lo tanto la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial y_s} + \frac{\partial w_0}{\partial p_0} = 0. \quad (5.34)$$

Debe recordarse que esta ecuación se obtuvo a partir de las hipótesis siguientes:

- (i) La Tierra es una esfera.
- (ii) Se desprecia la velocidad vertical  $w_s$ .
- (iii) Se desprecia la contribución de la aceleración centrípeta en la ecuación de movimiento vertical [ec. (5.30)].
- (iv) Sólo se consideran movimientos cercanos al origen ( $\lambda_c = 0, \phi_c = \phi, r = a$ ) para que la aproximación (5.27) sea válida.

Con valor característico  $u_s \sim 10 \text{ ms}^{-1}$  obtenemos

$$\frac{u_s}{a} \sim \frac{10 \text{ ms}^{-1}}{6,378 \times 10^6 \text{ m}} \sim 1,57 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

que es dos órdenes de magnitud menor que  $2\Omega \sim 1,4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  por lo que el término  $\frac{u_s \tan \phi_c}{a}$  puede despreciarse mientras que  $\tan \phi_c \geq 10^{-1}$ , lo que tiene lugar para  $\phi_c \geq 1^\circ$  !

En el capítulo 4 usamos observamos que el lado derecho de la ecuación hidrostática (5.29) no depende del tiempo  $t$  por lo que podemos suponer que las variables termodinámicas de referencia son independientes del tiempo

$$p_0 = p_0(z_s), \quad \rho_0 = \rho_0(z_s), \quad T_0 = T_0(z_s).$$

Esta aproximación representa una *perturbación singular* de la ecuación termodinámica para la energía, que debemos estudiar con cuidado. Si esta aproximación es válida y usamos (5.29) las ecuaciones (5.21) y (5.22) se reducen a

$$\omega_0 = \hat{J}_3 w_s = -g\rho_0 w_s. \quad (5.35)$$

Un método simple para calcular  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . En coordenadas esféricas tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial u_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} v_s \cos \phi \right] + \frac{\partial w}{\partial r} + 2 \frac{w}{r}$$

Usando la expresión de  $w_s$  en (5.22) obtenemos

$$\frac{\partial w_s}{\partial r} = \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p_0} w_s = \frac{1}{J_3} \frac{\partial}{\partial p_0} \left[ J_3 \omega_0 + \frac{\partial \tau}{\partial t_{p_0}} \right] = \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \frac{\omega_0}{J_3} \frac{\partial J_3}{\partial p_0} + \frac{\partial}{\partial t_{p_0}} \frac{\partial \tau}{\partial p_0} = \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \frac{1}{J_3} \left( \omega_0 \frac{\partial J_3}{\partial p_0} + \frac{\partial J_3}{\partial t_{p_0}} \right) = \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \frac{1}{J_3} \frac{dJ_3}{dt}$$

Esto conduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial u_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_s \cos \phi}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \frac{1}{J_3} \frac{dJ_3}{dt} + \frac{2w_s}{r}. \quad (5.36)$$

Usando la condición

$$\frac{1}{J_3} \frac{\partial p_0}{\partial z_s} = -g\rho \quad \text{ó} \quad J_3 = -\frac{1}{g\rho}$$

tenemos

$$\frac{1}{J_3} \frac{dJ_3}{dt} = g\rho \frac{d}{dt} (g^{-1} \rho^{-1}) = -\rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Sustituyendo (5.36) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial u_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_s \cos \phi}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \nabla \cdot \mathbf{v} + 2 \frac{w_s}{r}$$

donde se cancela  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  lo que da

$$\frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial u_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_s \cos \phi}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + 2 \frac{w_s}{r} = 0$$

que es exactamente la forma obtenida para la ecuación de continuidad obtenida anteriormente. Nótese que

$$\frac{\partial w_s}{\partial r} = \frac{\partial w_s}{\partial z_s} \sim 10^{-2} \text{ ms}^{-1} \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$$

mientras que

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \quad \frac{1}{J_3} \frac{dJ_3}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

son 1 y 2 ordenes de magnitud mayor por lo que la identidad

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt}$$

$$10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

implica que  $\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} \sim -\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt}$  y/o hay una inconsistencia ! que se evita con la escala temporal estándar:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p_0} \sim \frac{1}{t_0} = \frac{U}{L} = \frac{10 \text{ ms}^{-1}}{10^6 \text{ m}} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

**Sugerencia:** La inconsistencia proviene de  $\frac{1}{J_3} \frac{dJ_3}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ , relación que invoca la aproximación hidrostática !!!

### 5.3. Ecuaciones en coordenadas $y^1 = s^1, y^2 = s^2, y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3, t)$

a) Consideremos un sistema cartesiano  $x^i$  fijo a la Tierra y un sistema de coordenadas curvilineas ortogonales  $s^i$  definidas via la transformación

$$x^i = x^i(s^1, s^2, s^3). \quad (5.37)$$

Ahora consideremos un nuevo sistema de coordenadas

$$y^1 = s^1 \quad y^2 = s^2 \quad y^3 = y^3(s^1, s^2, s^3, t) \quad (5.38)$$

donde  $y^3$  juega el papel de coordenada "vertical" y de la cual se obtiene

$$s^3 = s^3(y^1, y^2, y^3, t) \quad (5.39)$$

depende explícitamente del tiempo. La composición de (5.37) con (5.39) da una transformación que depende explícitamente del tiempo

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t). \quad (5.40)$$

Como en la sección 4.1 la base covariante se calcula con el tiempo constante y aprovechando la relación con el sistema  $s^i$  obtenemos

$$\tilde{\tau}_i = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i} \right)_{t=cte} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s^j} = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} \tau_j$$

donde  $\tau_j = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s^j}$  es la base covariante asociada al sistema  $s^i$ . La matriz jacobiana

$$\tilde{\mathbf{J}}_{ij} \equiv \frac{\partial s^i}{\partial y^j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad J_i \equiv \frac{\partial s^3}{\partial y^i},$$

depende de explícitamente de  $t$ . En forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tilde{\tau}_3 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{J}}^t \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & J_1 \\ 0 & 1 & J_2 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\tilde{\tau}_1 = \tau_1 + J_1 \tau_3, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2 + J_2 \tau_3, \quad \tilde{\tau}_3 = J_3 \tau_3. \quad (5.41)$$

b) La transformación inversa de (5.40),

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t),$$

da lugar a la base contravariante

$$\bar{\eta}^i = \nabla y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \bar{x}_j(t) = \frac{\partial y^i}{\partial s^k} \frac{\partial s^k}{\partial x^j} \bar{x}_j(t) = \frac{\partial y^i}{\partial s^k} \eta^k$$

con

$$\left\{ \frac{\partial y^i}{\partial s^k} \right\} = \bar{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{J}_1 & \hat{J}_2 & \hat{J}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{J_3} \begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ -J_1 & -J_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{J}_i = \frac{\partial y^3}{\partial s^i} \quad (5.42)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= -\frac{J_1}{J_3} & \hat{J}_2 &= -\frac{J_2}{J_3} & \hat{J}_3 &= \frac{1}{J_3} \\ \bar{\eta}^1 &= \eta^1 & \bar{\eta}^2 &= \eta^2 & \bar{\eta}^3 &= \hat{J}_1 \eta^1 + \hat{J}_2 \eta^2 + \hat{J}_3 \eta^3 \end{aligned} \quad (5.43)$$

y en términos de  $\hat{s}_i$  tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 &= h_1 \hat{s}_1 + h_3 J_3 \hat{s}_3 & \bar{\tau}_2 &= h_2 \hat{s}_2 + h_3 J_3 \hat{s}_3 & \bar{\tau}_3 &= h_3 J_3 \hat{s}_3 \\ \bar{\eta}^1 &= \frac{\hat{s}_1}{h_1} & \bar{\eta}^2 &= \frac{\hat{s}_2}{h_2} & \bar{\eta}^3 &= \frac{\hat{J}_1}{h_1} \hat{s}_1 + \frac{\hat{J}_2}{h_2} \hat{s}_2 + \frac{\hat{J}_3}{h_3} \hat{s}_3. \end{aligned} \quad (5.44)$$

c) La formas contravariante y covariante de un vector  $b$  en el sistema  $y^i$  se definen en la forma usual

$$b = b^i \bar{\tau}_i = b_i \bar{\eta}^i.$$

La relación con las componentes físicas en la base  $\hat{s}_i$  es

$$b_i = \tilde{h}_i b^{(i)} \quad b^{(i)} = \frac{b(i)}{\tilde{h}_i}$$

y las leyes de transformación covariante y contravariante son válidas para relacionar componentes en los sistemas  $s^i$  y  $y^i$ :

$$b_i(y) = \frac{\partial s^j}{\partial y^i} b_j(s) \quad b^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial s^j} b^j(s).$$

El tensor métrico  $\tilde{G} = \{\tilde{g}_{ij}\}$  en el sistema  $y_i$  está dado por

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} = \frac{\partial s^k}{\partial y^i} g^{kl} \frac{\partial s^l}{\partial y^j},$$

o en forma matricial  $\tilde{G} = \bar{J}^t G \bar{J}$ . Por tanto  $\tilde{g} \equiv \det(\tilde{G}) = J_3^2 g$  lo que da el jacobiano de la transformación

$$\det \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) = \sqrt{\tilde{g}} = J_3 \sqrt{g} = J_3 h_1 h_2 h_3.$$

Los elementos de  $\tilde{G}$  y  $\tilde{G}^{-1}$  estan dados por (4.87) y (4.88). Las relaciones siguientes siguen siendo válidas

$$\bar{\tau}_i = \tilde{g}_{ij} \bar{\eta}^j \quad \text{y} \quad \bar{\eta}^i = \tilde{g}^{ij} \bar{\tau}_j.$$

d) Para el operador gradiente tampoco hay cambios respecto (4.28)

$$\nabla = \eta^j \frac{\partial}{\partial s^j} = \bar{\eta}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{s}^1 \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} + \hat{J}_1 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \hat{s}^2 \frac{1}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{J}_2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \hat{s}^3 \frac{1}{h_3} \hat{J}_3 \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

e) Usando la definición

$$\left( \frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial y^j} \right)_{t=cte} = \Gamma_{ij}^k \tau_k \quad (5.45)$$

de los símbolos de Christoffel obtenemos las identidades

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial y^k} = \bar{g}_{mj} \Gamma_{ki}^m + \bar{g}_{mi} \Gamma_{kj}^m, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial y^j} \sqrt{\bar{g}},$$

con las cuales obtenemos la divergencia de  $\mathbf{b} = \bar{b}^i \bar{\tau}_i$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial y^j} \sqrt{\bar{g}} \bar{b}^i. \quad (5.46)$$

f) Hasta aquí no ha sido necesario considerar la presencia explícita del tiempo en la transformación (5.38) pero para calcular la velocidad relativa a la Tierra en el sistema  $y^i$ , hay cambios significativos que invalidan el uso de algunas expresiones usadas en la literatura. La velocidad relativa a la Tierra es

$$\mathbf{v} = \dot{x}^i \hat{\mathbf{x}}_i(t) = \bar{v}^i \bar{\tau}_i = \dot{s}^i \tau_i$$

De acuerdo con

$$\dot{s}^i = \frac{d}{dt} s^i(y, t) = \frac{\partial s^i}{\partial t_y} + y^j \left( \frac{\partial s^i}{\partial y^j} \right)_{t=cte}$$

tenemos

$$\dot{s}^1 = \dot{y}^1 \quad \dot{s}^2 = \dot{y}^2 \quad \dot{s}^3 = \frac{\partial s^3}{\partial t_y} + y^i J_i \quad (5.47)$$

y las componentes físicas en la base  $\hat{\mathbf{s}}_i$  son

$$v(1) = h_1 \dot{s}^1 \quad v(2) = h_2 \dot{s}^2 \quad v(3) = h_3 \dot{s}^3 = h_3 \left( \frac{\partial s^3}{\partial t_y} + y^i J_i \right). \quad (5.48)$$

La ley de transformación contravariante  $\bar{v}^i = \frac{\partial y^i}{\partial s^j} \dot{s}^j$  da las siguientes expresiones para las componentes contravariantes de  $\mathbf{v}$  en el sistema  $y^i$

$$\begin{aligned} \bar{v}^i &= \frac{\partial y^i}{\partial s^j} \dot{s}^j = \dot{s}^i \quad \text{para } i = 1, 2, \\ \bar{v}^3 &= \frac{\partial y^3}{\partial s^j} \dot{s}^j = \hat{J}_1 \dot{s}^1 + \hat{J}_2 \dot{s}^2 + \hat{J}_3 \dot{s}^3. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Reescribamos  $\bar{v}^3$  como sigue

$$\bar{v}^3 = \frac{\partial y^3}{\partial s^j} \dot{s}^j = \left( \dot{s}^j \frac{\partial}{\partial s^j} \right) y^3 = (\mathbf{v} \cdot \nabla) y^3 = \left( \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t_s} \right) y^3 = \dot{y}^3 - \frac{\partial y^3}{\partial t_s}$$

donde usamos la identidad

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_s} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Para reescribir el término  $\frac{\partial y^3}{\partial t_s}$  consideremos la identidad

$$\bar{f}(y^1, y^2, y^3, t) = f[s^1, s^2, s^3(y, t), t]$$

donde  $f$  se obtiene al sustituir  $y^i = y^i(y^i, t)$  en el lado izquierdo. La regla de la cadena establece que

$$\frac{\partial}{\partial t_y} \bar{f} = \left( \frac{\partial}{\partial t_s} + \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \frac{\partial}{\partial s^3} \right) f$$

lo que nos da la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t_y} = \frac{\partial}{\partial t_s} + \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \frac{\partial}{\partial s^3}$$

que aplicada a la relación  $y^3 = f [s^1, s^2, s^3 (y, t), t]$  conduce a

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t_s} + \frac{\partial s^3}{\partial t_y} \frac{\partial f}{\partial s^3}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial y^3}{\partial t_s} = -\hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y},$$

con la cual obtenemos

$$\tilde{v}^3 = \dot{y}^3 - \frac{\partial y^3}{\partial t_s} = \dot{y}^3 + \hat{J}_3 \frac{\partial s^3}{\partial t_y}. \quad (5.50)$$

g) De acuerdo con (5.46) la divergencia de la velocidad relativa a la tierra  $\mathbf{v} = \tilde{v}^i \tilde{\tau}_i$  está dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \tilde{v}^i \quad (5.51)$$

donde  $\sqrt{g} = J_3 \sqrt{g}$  con  $J_3 = \frac{\partial s^3}{\partial y^3}$  donde  $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$ . Esta expresión coincide con aquella (5.17) de la sección 5.1 donde las coordenadas  $y^i$  son ortogonales  $y^i = y^i (s^3, t)$ . Más aún, si comparamos las ecuaciones (5.11) y (5.12) con las ecuaciones (5.45) y (5.47), vemos que las componentes contravariantes de la velocidad son idénticas por lo que podemos aplicar el procedimiento para obtener (5.18). En efecto tenemos

$$\sqrt{g} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial y^i} J_3 \sqrt{g} \tilde{v}^i$$

y haciendo uso de la relación

$$\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t_y},$$

la cual es válida para una transformación general  $y^i = y^i (s^1, s^2, s^3; t)$ , llegamos la expresión (5.17) para  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  y la ecuación de continuidad (5.18),

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} \dot{y}^i + \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^3} \frac{\partial s^3}{\partial t_y} = 0. \quad (5.52)$$

## 5.4. Ecuaciones con la presión como coordenada vertical

En la sección 5.2 consideramos el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal  $x_s, y_s, p_0$ , ahora consideraremos el sistema

$$y^1 = x_s, \quad y^2 = y_s, \quad y^3 = p = p(x_s, y_s, z_s, t).$$

donde la presión completa  $p = p_0 + p_1$  juega el papel de coordenada vertical. La matriz jacobiana  $\tilde{\mathbf{J}}$  tiene los elementos

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial z_s}{\partial x_s} & J_2 &= \frac{\partial z_s}{\partial y_s} & J_3 &= \frac{\partial z_s}{\partial p_s} \\ \hat{J}_1 &= -\frac{J_1}{J_3} & \hat{J}_2 &= -\frac{J_2}{J_3} & \hat{J}_3 &= \frac{1}{J_3} \end{aligned} \quad \sqrt{g} = J_3 \sqrt{g} = \frac{\partial z_s}{\partial p} \frac{r^2}{a^2} \frac{\cos \phi}{\cos \phi_c}$$

donde consideramos

$$z_s = z_s(x_s, y_s, p, t).$$

El vector de posición de una partícula tiene la forma  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_s, y_s, z_s = z_s(x_s, y_s, p, t))$ . En la literatura meteorológica la velocidad generalizada  $\dot{p}$  se representa con  $\omega$  (omega minúscula), por lo que usaremos la notación

$$\omega \equiv \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t_z} + \hat{J}_1 \frac{u_s}{h_x} + \hat{J}_2 \frac{v_s}{h_y} + \hat{J}_3 w_s. \quad (5.53)$$

Para la velocidad relativa a la Tierra

$$\mathbf{v} = \hat{x}_s u_s + \hat{y}_s v_s + \hat{z}_s w_s$$

tenemos

$$\begin{aligned} u_s &= h_x \dot{x}_s & v_s &= h_y \dot{y}_s & w_s &= \dot{z} = \frac{\partial z_s}{\partial t_p} + J_1 \frac{u_s}{h_x} + J_2 \frac{v_s}{h_y} + J_3 \dot{p} \\ \tilde{v}^1 &= \dot{x}_s & \tilde{v}^2 &= \dot{y}_s & \tilde{v}^3 &= \dot{p} - \frac{\partial p}{\partial t_z} = \dot{p} + \frac{1}{J_3} \frac{\partial z_s}{\partial t_p} \end{aligned}$$

La forma del operador  $\nabla$  que usaremos es

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\hat{x}_s}{h_x} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} + \hat{J}_1 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \frac{\hat{y}_s}{h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} + \hat{J}_2 \frac{\partial}{\partial y^3} \right] + \hat{z}_s \hat{J}_3 \frac{\partial}{\partial y^3} \\ &= \frac{\hat{x}_s}{h_x} \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{J_1}{J_3} \frac{\partial}{\partial p} \right] + \frac{\hat{y}_s}{h_y} \left[ \frac{\partial}{\partial y_s} - \frac{J_2}{J_3} \frac{\partial}{\partial p} \right] + \hat{z}_s \frac{1}{J_3} \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla p &= \frac{-1}{J_3} \left( \hat{x}_s \frac{J_1}{h_x} + \hat{y}_s \frac{J_2}{h_y} \right) + \frac{\hat{z}_s}{J_3} \\ \nabla \Phi &= \frac{\hat{x}_s}{h_1} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} - \frac{J_1}{J_3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right] + \frac{\hat{y}_s}{h_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} - \frac{J_2}{J_3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right] + \hat{z}_s \frac{1}{J_3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{aligned} \quad (5.54)$$

y las ecuaciones de movimiento quedan como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ y_s \\ w_s \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -u_s \tan \phi & u_s \\ u_s \tan \phi & 0 & v_s \\ -u_s & -v_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ y_s \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (-\rho^{-1} \nabla p + \nabla \Phi) \cdot \hat{x}_s \\ (-\rho^{-1} \nabla p + \nabla \Phi) \cdot \hat{y}_s \\ (-\rho^{-1} \nabla p + \nabla \Phi) \cdot \hat{z}_s \end{bmatrix}$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_p} + \frac{u_s}{h_x} \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{v_s}{h_y} \frac{\partial}{\partial y_s} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

Para la ecuación de continuidad tenemos

$$\frac{d}{dt} \ln \rho J_3 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} h_y u_s + \frac{\partial}{\partial y_s} h_x v_s + \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{g} \omega \right) + \frac{1}{J_3 \sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p} \frac{\partial z_s}{\partial t_p} = 0 \quad (5.55)$$

donde

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p} = \frac{\partial z_s}{\partial p} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial z_s} = J_3 \frac{2r \cos \phi}{a^2 \cos \phi_c} \quad (5.56)$$



# Conclusiones

Ha habido un esfuerzo importante para desarrollar y calibrar modelos computacionales de mesoescala que usan la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  [1,4-17]. Esta aproximación produce una ecuación de momento simple útil para análisis teórico [3] pero no para simulaciones numéricas de flujos realmente atmosféricos en un dominio mayor que  $100 \times 100 \text{ km}^2$ . La estimación de esta es válida en una región ( ver tabla I, sección 2) ignora aspectos importantes de un flujo real como la estratificación ó la dependencia con el tiempo. A partir de estos factores se pueden generar flujos cualitativamente diferentes de las ecuaciones exactas y aproximadas de momento (2.80) y

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - g\delta_{i3} - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u^k + F^i.$$

por las no-linealidades de tales ecuaciones [40]. La región de validez de la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\mathbf{k}$  puede ser significativamente más pequeñas. Por otra parte, Pielke [17] sugiere que el modelado numérico de algunos flujos reales de mesoescala pueden requerir un dominio con 5000 km de lado. Una solución a medias para el conflicto es el uso exacto de  $\mathbf{g}$  que le permita el uso del sistema del plano-tangente  $xyz$  sobre una región  $\mathcal{D}(L) \subset 700 \times 700 \text{ km}^2$ , apartir de ahí la tropósfera está debajo de el plano  $xy$  para  $\mathcal{D}(L) \supset 700 \times 700 \text{ km}^2$ . Por supuesto, la solución óptima es el desarrollo de modelos computacionales que consideren explícitamente la esfericidad terrestre. El uso de las poroyecciones sobre la esfera en las ecuaciones dinámicas son más consistentes si éstas son escritas en coordenadas de proyección  $x_p y_p z_p$ .

Los modelos de mesoescala considerados en este trabajo tienen un número creciente de usuarios en instituciones mexicanas asignadas a la investigación meteorológica [31-35] y en el análisis operacional meteorológico [29,30]. Esto ha sido motivado por los resultados encontrados por algunos usuarios. Por ejemplo, agunos autores [33] afirman que la versión 2 de MM5 que las Instituciones Mexicanas usan deberían poder prevenir desastres causados por tormentas severas en la Ciudad de México, pero el análisis de las secciones 2.7 y 2.8 muestran que las versiones 2 y 3 de MM5 no pueden ser usados para predecir dichos desastres. Estas inconsistencias salen a la vista que los datos disponibles en el territorio mexicano no son suficiente para validar modelos de mesoescala.

El uso de modelos de mesoescala en México no ha considerado la solución de los problemas operacionales inherentes para cualquier red meteorológica. Por ejemplo, el servicio meteorológico mexicano usa el modelo modelo MM5 versión 3 para predecir condiciones meteteorológicas, el modelo define las condiciones iniciales con datos generados por los modelos meteorológicos globales que a su vez usan los datos de los radiosondeos en México en un intervalo de observación de 12 horas. El servicio meteorológico tiene el gran problema de validar datos de radiosondeos y datos de estaciones de superficie, pero este problema no está considerado en el uso de MM5. Por supuesto, la fiabilidad de MM5 depende fuertemente de los datos de los modelos meteorológicos cuál a su vez depende de la calidad de datos provistos por el servicio meteorológico mexicano. Para esto tenemos que sumar el hecho que la estimación de condiciones meteorológicas con los datos de una red es un problema no resuelto [41]. Esto quiere decir que las condiciones iniciales usadas por un modelo como MM5 no son óptimas y por eso las predicciones numéricas resultantes tienen que ser validadas cuidadosamente[42].

En el presente trabajo se pretende tener un conocimiento solido y consistente referente al conjunto de ecuaciones que gobiernan a los flujos atmosféricosa escala sinóptica y mas adelante desarrollar mejores modelos que nos permitan dar mejores pronosticos del tiempo.



# Bibliografía

- [1] R. A. Pielke, *Mesoscale Meteorological Modeling* (Academic Press, New York, 1984); 2nd ed. 2002.
- [2] R. Zeytounian, *Asymptotic Modeling of Atmospheric Flows* (Springer, Berlin, 1990).
- [3] See, e.g., L. N. Gutman, *Introduction to the Nonlinear Theory of Mesoscale Meteorological Processes*, (Jerusalem, Israel Program, 1972). C.-S. Yih, *Stratified Flows* (Academic Press, New York, 1980). B. W. Atkinson, *Meso-scale Atmospheric Circulations* (Academic, London, 1981). P. G. Baines, *Topographic Effects in Stratified Flows*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [4] D. J. Perkey, *Formulation of Mesoscale Numerical Models*, in *Mesoscale Meteorology and Forecasting*, edited by P. S. Ray (American Meteorological Society, Boston, 1986).
- [5] B.W. Atkinson, *Introduction to the fluid mechanics of meso-scale flow fields*, in *Diffusion and Transport of Pollutants in Atmospheric Mesoscale Flow Fields*, edited by A. Gyr and F.-S. Rys (Kluwer, Netherlands, 1995), pp. 6,7 eqs. (1.1-2) and fig. 9.
- [6] D. P. Eppel and U. Callies, *Boundary Conditions and Treatment of Topography in Limited-Area Models*, in *Diffusion and Transport of Pollutants in Atmospheric Mesoscale Flow Fields*, edited by A. Gyr and F.-S. Rys (Kluwer, Netherlands, 1995), p. 24. D. R. Durran, *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, (Springer, New York, 1998), p. 16.
- [7] M. Z. Jacobson, *Fundamentals of atmospheric modeling*, (Cambridge University Press, U.S.A, 1999), pp. 100, 74-75.
- [8] R. A. Pielke, and J. Cram, *Meteorol. Atmos. Phys.* **40** (1989) 189-193.
- [9] R. A. Pielke, et. al., *Meteorol. Atmos. Phys.* **49** (1992) 69-91.
- [10] *RAMS The Regional Atmospheric Modeling System Technical Description DRAFT*, [http://www.atmet.com/html/docs/rams\\_techman.pdf](http://www.atmet.com/html/docs/rams_techman.pdf).
- [11] G. L. Mellor and T. Yamada, *J. Atmos. Sci.* **31** (1974) 1791-1806.
- [12] T. Yamada, *J. Met. Soc. Japan* **59** (1981) 108-122.
- [13] T. Yamada and S. Bunker, *J. Appl. Meteor.* **27** (1988) 562-578.
- [14] T. Yamada, J. C.-Y. Kao and S. Bunker, *Atmos. Environ.* **23** (1989) 539-554.
- [15] J. M. Brown and M. Williams, *HOTMAC Input Guide*, chap. 2. Internal Report, LA-UR-98-1365, Los Alamos National Laboratory, 1998. <http://www-tsa.lanl.gov/tsa4/pdf/air/hotmac.input.pdf>.
- [16] M. Xue, Droegemeler K. K., Wong V., Shapiro A. and Brewster K., *Advanced Regional Prediction System (ARPS) Version 4.0 User's Guide*, 1995. <http://wwwcaps.ou.edu/ARPS/>, 1994.
- [17] R. A. Pielke, *The Status of Mesoscale Meteorological Models*. In *Planning and Managing Regional Air Quality*, edited by P. A. Solomon and T. A. Silver (Pacific Gas & Electric Co. and Lewis Publishers, San Ramon, CA, 1994).

- [18] M. A. Nuñez, *Nuovo Cimento C* **26** (2003) 469-491.
- [19] G.C. McVittie, *Quat. J. Mech. Appl. Math* **1** (1948) 174-195.
- [20] Instituto Mexicano del Petróleo and Los Alamos National Laboratory, *México City Air Quality Research Initiative*, Vol. III (1994).
- [21] J. D. Fast and S. Zhong., *J. Geophys. Res.* **103** (1998) 18927-18946.
- [22] J. Morfin and G. Raga, Modeling deep convecting clouds over Mexico city, Conference on cloud physics (American Meteorological Society, Everett, 1998), 95-96.
- [23] G. J. Haltiner, *Numerical Weather Prediction* (Wiley and Sons, New York, 1971). G. J. Haltiner G. J., R. T. Williams , *Numerical Weather Prediction and Dynamic Meteorology* (Wiley and Sons, New York, 1980), 2nd ed.
- [24] M. A. Nuñez, *Nuovo Cimento C* **25** (2002) 13-34.
- [25] J. Dudhia, *J. Atmos. Sci.* **46** (1989) 3077-3107.
- [26] J. Dudhia , Gill D., Guo Y.-R., Hansen D., Manning K. and Wang W., *PSU/NCAR Mesoscale Modeling System Tutorial Class Notes and Users' Guide (MM5 Modeling System Version 2*, (1999). <http://www.mmm.ucar.edu/mm5/mm5-home.html>.
- [27] J. Dudhia, Gill D., Guo Y.-R., Hansen D., Manning K. and Wang W., *PSU/NCAR Mesoscale Modeling System Tutorial Class Notes and Users' Guide: MM5 Modeling System Version 3*, (January, 2003).
- [28] Y.-R. Guo and S. Chen, *Terrain and Land Use for the Fifth-Generation Penn State/NCAR Mesoscale Modeling System (MM5): Program Terrain*, NCAR Technical Note, NCAR/TN-397+IA.
- [29] *Pronóstico Numerico Regional (Modelo MM5)*, Servicio Meteorológico Nacional, <http://smn.cna.gob.mx/productos/mm5/htm/pag7773.htm>.
- [30] I. López O., C Cario R., *Impacto de hidrometeoros en grandes ciudades*, Resumen de la Memoria del XII Congreso Nacional de Meteorología, Cancún Q. Roo, 2002, p. 22.
- [31] A. Jazcilevich, A. García, V. Fuentes, G. Ruiz, V.O. Magaña, J.L. Pérez, *Un modelo meteorológico para el centro de México usando MEMO y MM5*, Contaminación Atmosférica III, (El colegio Nacional, México, 2001), L. García-Colín S. y J. R. Varela compiladores, pp. 207-220.
- [32] V. O. Magaña , J. L. Pérez, *Usos de un modelo de mesoescala en el estudio de la dinámica atmosférica regional de México*, GEO UNAM **5** (1998) 33-39.
- [33] V.O. Magaña, J.B. Pérez , J.M. Méndez, *Meteorología de la cuenca de México*, GEOS **20** (2000) 142 .
- [34] J.L. Perez, V.O. Magaña, *Modelación del clima regional en Tlaxcala, Veranos de 1997 y 1998*, GEOS **20** (2000) 141.
- [35] A. Zitácuaro C., V.O. Magaña, *Análisis de las condiciones meteorológicas durante el experimento CAM-MIT-2002 sobre el valle de México*, IV Simposio de Contaminación Atmosférica, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, L. García-Colín S. y J. R. Varela compiladores, D.F. México, ISBN 970-31-0112-7, (2002). p. 164.
- [36] Dutton J. A., *The Ceaseless Wind: An introduction to the theory of atmospheric motion*, (McGraw-Hill, New York, 1976).
- [37] J. R. Holton, *An introduction to dynamic meteorology*, 3rd. ed. (Academic Press, San Diego, 1992).
- [38] Hooijberg M., *Practical Geodesy Using Computers* (Springer, Berlin, 1997).
- [39] GTOPO30 documentation, section 7, U. S. Geological Survey (1997). <http://www.scd.ucar.edu/dss/datasets/ds758.0.html>.

- [40] A. S. Monin and L. I. Piterbarg *Forecasting weather and climate*, in *Limits of predictability*, Y. Kravtsov ed., (Springer, Berlin, 1993).
- [41] R. Daley, *Atmospheric data analysis*, (Cambridge University Press, New York, 1991).
- [42] R. A. Pielke, *The need to assess uncertainty in air quality evaluations*, *Atmos. Environ.* **32** (1998) 1467-1468. R. A. Pielke and M. Uliasz, *Use of meteorological models as input to regional and mesoscale air quality models- Limits and strengths*, *Atmos. Environ.* **32** (1998) 1455-1466. N. Orenkeses, K. Shrader-Frechette, Kenneth Belitz, *Verification, Validation, and Confirmation of Numerical Models in the Earth Sciences*, *Science* **263**, (1994) 641-646.
- [43] V. A. Belinskii, *Dynamic meteorology*, Israel Program for Scientific Translations; available from the Office of Technical Services, U.S. Dept. of Commerce, Washington 1961, 591 pages
- [44] James R. Holton, *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, V.88 Ed. Fourth, 2004, total pages 535.
- [45] M. Caputo, *The Gravity Field of the Earth*, Academic Press New York, 1967.
- [46] M. A. Núñez and E. Cruz M., *Analytic solutions of the deep continuity equation over a complex terrain*, 11th Conference on Mesoscale Processes, work P1M.13 (Albuquerque, AMS, 2005)
- [47] M. A. Núñez. *Formal proof of the existence of an atmospheric base-state and its estimation*. 11th Conference on Mesoscale Processes, Albuquerque, New Mexico, 2005. P1M.5.
- [48] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 2 of *Mathematics and its applications*. Gordon and Breach, Science publishers, 2 edition, Marzo 1969.
- [49] M. A. Núñez. *Región de validez de Modelos Atmosféricos Globales y su reformulación con un Modelo elipsoidal Terrestre*, Reporte C.B.I No.01.0106.I.011.02, Univ. Aut. Izt., 2002.
- [50] M. A. Núñez. *Región de validez de algunos Modelos Atmosféricos de mesoscala*, Reporte C.B.I No.01.0106.I.011.02, Univ. Aut. Izt., 2002.

1911. A. J. ...  
1912. A. J. ...  
1913. A. J. ...  
1914. A. J. ...  
1915. A. J. ...  
1916. A. J. ...  
1917. A. J. ...  
1918. A. J. ...  
1919. A. J. ...  
1920. A. J. ...  
1921. A. J. ...  
1922. A. J. ...  
1923. A. J. ...  
1924. A. J. ...  
1925. A. J. ...  
1926. A. J. ...  
1927. A. J. ...  
1928. A. J. ...  
1929. A. J. ...  
1930. A. J. ...  
1931. A. J. ...  
1932. A. J. ...  
1933. A. J. ...  
1934. A. J. ...  
1935. A. J. ...  
1936. A. J. ...  
1937. A. J. ...  
1938. A. J. ...  
1939. A. J. ...  
1940. A. J. ...  
1941. A. J. ...  
1942. A. J. ...  
1943. A. J. ...  
1944. A. J. ...  
1945. A. J. ...  
1946. A. J. ...  
1947. A. J. ...  
1948. A. J. ...  
1949. A. J. ...  
1950. A. J. ...  
1951. A. J. ...  
1952. A. J. ...  
1953. A. J. ...  
1954. A. J. ...  
1955. A. J. ...  
1956. A. J. ...  
1957. A. J. ...  
1958. A. J. ...  
1959. A. J. ...  
1960. A. J. ...  
1961. A. J. ...  
1962. A. J. ...  
1963. A. J. ...  
1964. A. J. ...  
1965. A. J. ...  
1966. A. J. ...  
1967. A. J. ...  
1968. A. J. ...  
1969. A. J. ...  
1970. A. J. ...  
1971. A. J. ...  
1972. A. J. ...  
1973. A. J. ...  
1974. A. J. ...  
1975. A. J. ...  
1976. A. J. ...  
1977. A. J. ...  
1978. A. J. ...  
1979. A. J. ...  
1980. A. J. ...  
1981. A. J. ...  
1982. A. J. ...  
1983. A. J. ...  
1984. A. J. ...  
1985. A. J. ...  
1986. A. J. ...  
1987. A. J. ...  
1988. A. J. ...  
1989. A. J. ...  
1990. A. J. ...  
1991. A. J. ...  
1992. A. J. ...  
1993. A. J. ...  
1994. A. J. ...  
1995. A. J. ...  
1996. A. J. ...  
1997. A. J. ...  
1998. A. J. ...  
1999. A. J. ...  
2000. A. J. ...