



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00044

Matrícula: 2141801338

TEOREMA DE EGGLESTON EN
MULTIFRACTALES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 7 del mes de junio del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. LEV GUZMAN VARGAS
DR. ALEJANDRO MUÑOZ DIOSDADO
DR. JOSE LUIS DEL RIO CORREA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

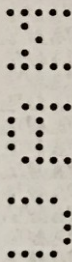
MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)

DE: GABRIELA DURAN MEZA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

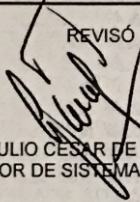
Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



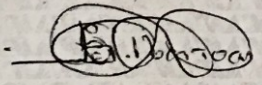

GABRIELA DURAN MEZA
ALUMNA

REVISÓ



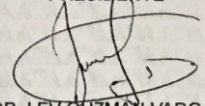
LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



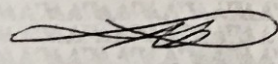
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE



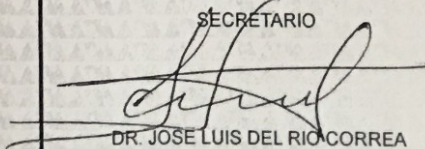
DR. LEV GUZMÁN VARGAS

VOCAL



DR. ALEJANDRO MUÑOZ DIOSDADO

SECRETARIO

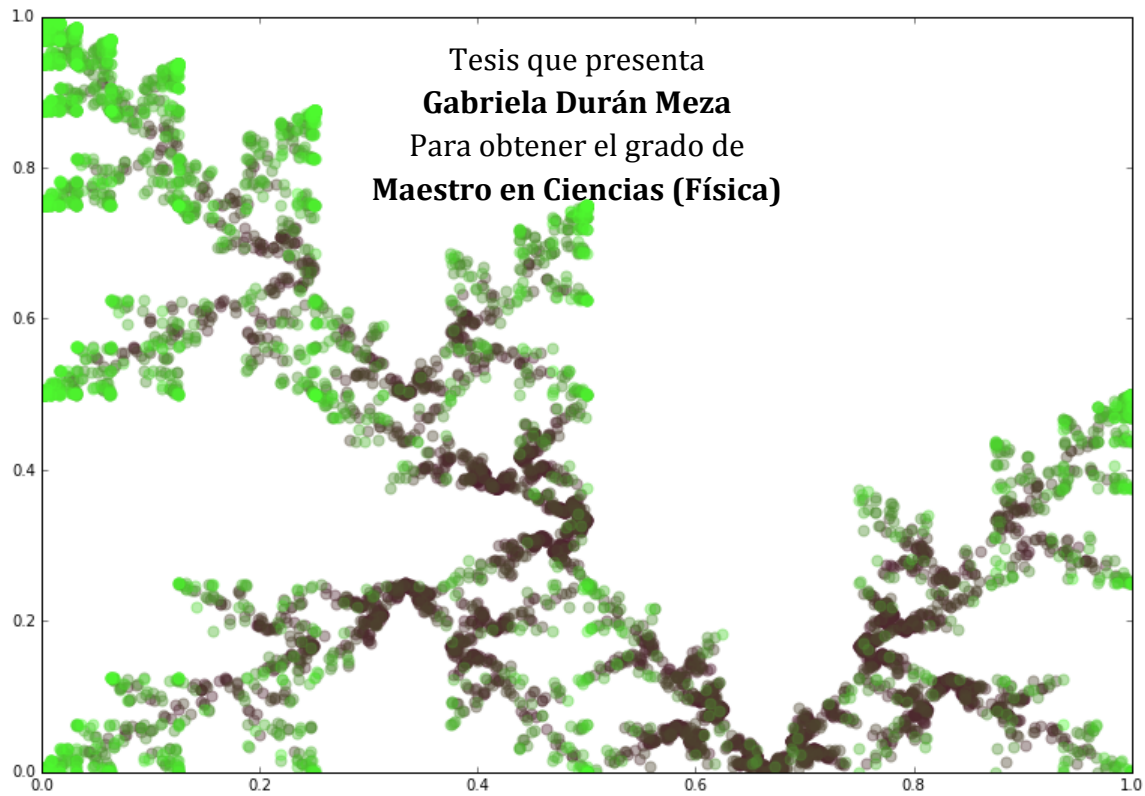


DR. JOSE LUIS DEL RIO CORREA



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**TEOREMA DE EGGLESTON EN
MULTIFRACTALES**



Asesor: Dr. José Luis del Río Correa

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Lev Guzmán Vargas

Secretario: Dr. José Luis del Río Correa

Vocal: Dr. Alejandro Muñoz Diosdado

Ciudad de México, 7 de Junio de 2016

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

Se necesita un poco más que inspiración para hacer y lograr los sueños que uno se crea en la cabeza. No basta el aliento, ni el alimento que se consume día a día, ni siquiera dormir ocho horas todas las noches. Lo que se necesita para lograr los sueños es a todas esas personas que vamos encontrando en la vida, que nos dedican décadas, años o trimestres, de su tiempo, para enseñarnos a caminar, escribir, leer, leer un libro de Física, admirar, amar...

Agradezco a todos esos seres especiales que me han mostrado la maravilla de vivir, crecer y aprender, agradezco a mis padres por apoyarme siempre y a cualquier hora, a mi hermano por ser siempre *picha* y al '*chino*' por darme todo su cariño.

Quiero dar las gracias a mi asesor de tesis por toda su infinita paciencia y por regalarme una esta nueva forma de ver a la naturaleza y al mundo que nos rodea.

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	IX
Introducción	XI
1. Fractales	1
1.1. La costa de Gran Bretaña	1
1.2. Dimensión fractal de Hausdorff	3
1.3. Concepto de fractal, Mandelbrot	4
1.4. Objetos <i>auto-similares</i>	5
2. El Teorema de Eggleston y la descomposición Multifractal del intervalo I	9
2.1. Cilindros de orden k	9
2.2. Clasificación en frecuencias	10
2.3. Teorema de Eggleston	12
3. Descripción estadística de un Multifractal	17
3.1. Proceso Multiplicativo	17
3.2. Formulación de Boltzmann	22
3.3. Espectro de dimensiones $D(\alpha)$	27
4. Extensión del Teorema de Eggleston a Fractales Autosimilares	33
4.1. Sistemas de Funciones Iteradas	33
4.2. Cubiertas de orden k	34
4.3. Clasificación en frecuencias y el Teorema de Eggleston	36
4.4. Multifractal Estadístico de Fractales Autosimilares	38
Discusión	41
Conclusiones	47
Bibliografía	49

Resumen

El desarrollo de este trabajo comienza exponiendo las ideas principales de Benoit Mandelbrot, donde se explica de una forma breve el pensamiento que da origen a una geometría inovadora y necesaria para la caracterización de sistemas, fenómenos y formas complejas. Con la ayuda del trabajo del matemático Hausdorff y el físico Richardson, Mandelbrot crea una nueva geometría, llamada geometría fractal. El capítulo 1 habla acerca de los orígenes y construcción de esta geometría, además se describen conceptos como dimensión fractal y auto-similaridad que son básicos e importantes para el desarrollo de la Teoría Multifractal .

En el capítulo 2 estudiamos y caracterizamos la descomposición multifractal geométrica del intervalo unitario \mathbb{I} y para lograrlo el Teorema de Eggleston es elemental, pues permite la construcción de un puente entre la dimensión de Hausdorff y la entropía de frecuencias de \mathbb{I} , además se muestra la fractalidad del intervalo unitario a través de los espectro ópticos que provienen de la agrupación de subconjuntos fractales de \mathbb{I} .

Posteriormente diferenciamos y describimos los Multifractales Geométricos y Multifractales Estadísticos, siendo los Multifractales Estadísticos mucho más complejos ya que en el capítulo 3 se introducen los conceptos de procesos multiplicativos y medida singular. Continuamos con un análisis detallado de las propiedades estadísticas de los procesos multiplicativos del intervalo unitario, donde introducimos un método peculiar para calcular los espectros de dimensiones multifractales, ya que usamos el pensamiento del científico Ludwin Boltzmann de la física estadística. A través de la Formulación de Boltzmann y las propiedades matemáticas de la dimensión de Hausdorff calculamos el espectro de dimensiones, también llamado espectro de singularidades, que está íntimamente relacionado con la información probabilística y geométrica de la separación multifractal de \mathbb{I} , mediante el exponente de Holder y una nueva separación multifractal en conjuntos que a su vez son multifractales.

En el capítulo 4 generalizamos las ideas del intervalo unitario a un fractal autosimilar, ya que cuando se define un multifractal estadístico sobre una cubierta que corresponde a un fractal autosimilar, se puede proyectar todo el análisis del intervalo unitario por medio de una ley de escalamiento. Demostramos que los espectros de dimensiones de fractales autosimilares son proporcionales a los espectros que provienen del intervalo unitario escrito en una base que corresponde al número de funciones que generan al fractal autosimilar. Introducimos los conceptos de funciones iteradas, los cuales caracterizan a los fractales autosimilares.

Posteriormente calculamos los espectros ópticos y de dimensiones para el intervalo unitario en base 3 y el Triángulo de Sierpinski, con lo que describimos de forma clara sus similitudes y observaremos la importancia de llevar la ideas del intervalo unitario a fractales autosimilares.

Introducción

El término *multifractal* se utiliza para indicar de forma compacta un método físico-matemático inhabitual pero muy singular, el cual permite estudiar procesos no lineales que provienen de diferentes campos de estudio, como son física estadística, caos, turbulencia, física médica e incluso finanzas[5, 6].

Existen algunos trabajos representativos de las primeras etapas del desarrollo del método multifractal, en los cuales pocas personas están involucradas. En particular, dos publicaciones contribuyeron a la popularidad de los multifractales, que corresponden a Frisch & Parisi 1985 y Halsey 1986 [5].

Frisch & Parisi introducen la idea de que la turbulencia puede caracterizarse a través de una aproximación multifractal, y fue en 1983 en *Summer School of Turbulence and Predictability of Geophysical Fluid Dynamics* cuando la palabra *multifractal* surge por primera vez gracias a G Parisi, R Benzi et al[6].

Desde los años 80's la descripción multifractal funge como una importante herramienta que caracteriza sistemas con alto grado de complejidad, por ejemplo, originalmente se pensaba que para caracterizar el *fenómeno crítico* se necesitaba un conjunto finito de exponentes. Sin embargo el uso de multifractales mostró que se requería un número infinito de exponentes para la caracterización completa de las propiedades de escalamiento, proporcionando un conjunto de dimensiones del sistema[6]. Otro ejemplo que proviene de un campo menos tradicional de la Física, en el que se utilizan medidas singulares definidas sobre una cubierta fractal para obtener un modelo de las secuencias del DNA, ya que se conoce que el Genoma Humano presenta redundancia, esto es, secuencias duplicadas del DNA. Los genetistas están interesados en localizar y contar estas secuencias ya que el número de copias está relacionado con variaciones fenotípicas y algunas enfermedades como la esquizofrenia[7].

Los fractales poseen gran importancia en nuestra vida cotidiana, ya que desde la década de los 90's los avances tecnológicos nos han llevado a implementar recursos teóricos y dispositivos más sofisticados, que incluyen por ejemplo el análisis de ecuaciones iteradas, curvas autosimilares y elementos de la geometría fractal, ya que pueden implementarse en simulaciones para películas de ciencia ficción donde se necesita construir superficies como una montaña o lava en movimiento. Son de gran importancia para la creación de dispositivos más finos y eficientes como las antenas fractales, donde se utiliza la estructura fractal como una combinación virtual de condensadores y bobinas. Esto hace que la antena posea muchas resonancias diferentes que pueden escogerse y ajustarse seleccionando el diseño fractal adecuado y son utilizados en celulares y computadoras, donde se necesita recibir distintos tipos de conexión.

La geometría fractal abre las puertas a una nueva forma de ver el universo, la naturaleza, el ambiente que nos rodea, incluso el mundo microscópico no está exento, ya que algunas ramas de la ciencia se han inclinado hacia el estudio de sistemas como proteínas, células y ADN, por mencionar algunos. Esta nueva forma abandona la geometría que ha creado el ser humano y conserva las formas fracturadas de la naturaleza.

En esta tesis desarrollamos y analizamos un método físico-matemático capaz de caracterizar algunos sistemas de la naturaleza, tan complejos como lo son el corazón humano, la superficie de las hojas de un árbol, el registro de la actividad bioeléctrica cerebral, las costas de una isla, por mencionar algunos ejemplos.

El método que describiremos es llamado Teoría Multifractal o Análisis Multifractal, el cual esencialmente analiza un conjunto compuesto de fractales mediante una gama de dimensiones definidas en todo el conjunto real \mathbb{R} . El objetivo principal de esta tesis es desarrollar la Teoría Multifractal e implementar un método para calcular los espectros de dimensiones fractales a partir de la aplicación del Teorema de Eggleston y la formulación de Boltzmann de la Física estadística, y extender estas ideas a Fractales Autosimilares con ayuda del Teorema Generalizado de Eggleston. También se construyen los espectros ópticos multifractales geométricos y estadísticos para la visualización gráfica de separación multifractal y se realiza la generalización de estas ideas a fractales autosimilares.

Capítulo 1

Fractales

Existe la necesidad intrínseca del ser humano por descubrir las formas, los saberes y las creencias, que nos permitan explicar el mundo que nos rodea. Los científicos no son la excepción, ellos se apasionan, por ejemplo, observando y caracterizando a la naturaleza, de manera descriptiva o cuantitativa. En general, las distintas ramas de la ciencia realizan grandes e ingeniosos esfuerzos por describir y entender sistemas propios del mundo en el que todos nos encontramos inmersos, por está razón surgen algunos conceptos singulares, como el de *Fractal*.

No es posible describir todos los fenómenos de la Naturaleza utilizando únicamente las ideas euclidianas, lo cual dificulta el análisis de los sistemas pero cautiva más al científico, por lo tanto es importante abandonar las siguientes características: largo, alto y ancho; y comenzar a medir de una forma más adecuada.

En este capítulo resumimos algunas ideas de Benoit Mandelbrot, creador de la *Geometría Fractal*, con la que consigue cuantificar las complejas formas de lo natural.

1.1. La costa de Gran Bretaña

En esta sección el objetivo es formar una idea inicialmente intuitiva del concepto de *Fractal*. En 1961 el Físico inglés Lewis Fry Richardson realizó un experimento empírico para medir la longitud de la costa de Gran Bretaña, por practicidad, en lugar de medir la costa real utilizó un mapa geográfico, con la ayuda de un compás trazó segmentos de líneas rectas, a longitud constante, formando una poligonal[3]. Esta poligonal es una aproximación de la costa, el método para medir la longitud es: dado un segmento de recta ϵ_0 con longitud constante, formar la poligonal a lo largo de la costa y contar el número de pasos consecutivos necesarios para encerrar la región, el número de pasos es denotado por $N(\epsilon_0)$ y la longitud aproximada es $L(\epsilon_0) = N(\epsilon_0)\epsilon_0$. Lo anterior es una primera estimación de la longitud real de la costa, para hacer una mejor aproximación se contruyeron nuevas poligonales de lado cada vez más pequeño $\epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ hasta que tendiera a un valor límite, el cual sería la longitud real de la costa:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon \quad (1.1)$$

Este experimento revela una sorpresa, se observa que $L(\epsilon)$ incrementa ilimitadamente, esto es, en la medida en que los segmentos de recta son cada vez más pequeños $\epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon_0$, las longitudes de las poligonales presentan el siguiente comportamiento: $N(\epsilon_2)\epsilon_2 \gg N(\epsilon_1)\epsilon_1 \gg N(\epsilon_0)\epsilon_0$. Esta característica es clara ya que conforme la escala disminuye, se reexamina el mapa geográfico y aparecen más detalles de la península, y son cuantificadas sub-bahías con lo que se incrementa $L(\epsilon)$.

Un resultado del análisis de Richardson es que la longitud de la costa depende del valor de la escala utilizada para medir, además cada vez que reducía la escala de medición la longitud aumenta, de manera que la secuencia de longitudes no converge a un valor finito, sino diverge a infinito:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon = \infty \quad (1.2)$$

Otro resultado es que la longitud de la costa de Gran Bretaña es infinita, ya que, en particular, su línea costera es demasiado irregular para ser medida con curvas geométricas clásicas como segmentos de líneas rectas. Se concluye que si el objetivo es comparar costas (irregulares), la longitud es un concepto inadecuado.

El siguiente paso consiste en determinar la forma explícita de la dependencia de la longitud $L(\epsilon)$ y la medida ϵ . La idea fundamental es que ambas cantidades siguen una ley de potencia de la forma $y \sim x^d$ [3].

Richardson graficó en una escala doblemente logarímicamente $L(\epsilon)$ contra ϵ como se muestra en la figura 1.1, encontrando que los datos se ajustaban bastante bien por mínimos cuadrados a una recta de pendiente negativa:

$$\ln L(\epsilon) = -m \ln \epsilon + \ln b \quad (1.3)$$

donde $m > 0$. Este resultado comprueba el comportamiento tipo ley de potencia, y es de la forma siguiente:

$$L(\epsilon) = b\epsilon^{-m}. \quad (1.4)$$

Se observa que la ecuación (1.4) permite comparar costas que comparten el mismo valor de la pendiente m . Para un valor dado de ϵ se satisface:

$$L_1(\epsilon) = b_1\epsilon^{-m} \quad ; \quad L_2(\epsilon) = b_2\epsilon^{-m} \quad (1.5)$$

por lo tanto, la razón entre longitudes no depende de la medida de la poligonal utilizada:

$$\frac{L_2(\epsilon)}{L_1(\epsilon)} = \frac{b_2}{b_1} \quad (1.6)$$

Se concluye que las costas pueden ser comparadas por sus coeficientes b_i que no dependen de la medida ϵ y no por sus extensiones.

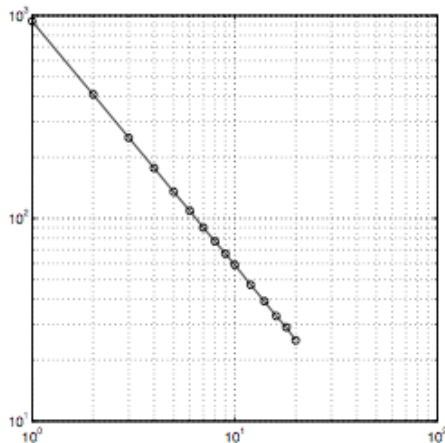


Figura 1.1: Gráfica log-log correspondiente al comportamiento de $L(\epsilon)$ vs. ϵ de la costa de Gran Bretaña.

1.2. Dimensión fractal de Hausdorff

El método para medir $L(\epsilon)$ citado en la sección anterior, corresponde con algunas generalizaciones no estándar de la definición de *dimensión*, que ya se usaba a principios del siglo XIX, en matemática pura [4]. En 1919, Felix Hausdorff introdujo la noción de la *medida de un conjunto en todas las dimensiones posibles* a través de la Dimensión de Hausdorff.

El perímetro de un polígono, sin más, se calcula sumando las longitudes de sus lados $L(\epsilon)\epsilon$. Los segmentos de recta ϵ están elevados a la potencia $\delta = 1$, donde 1 corresponde a la dimensión euclidiana de la recta. Observamos que si utilizamos una potencia equivocada, por ejemplo $\delta = 2$, $L(\epsilon)\epsilon^2$ es un resultado que no nos da ninguna información concreta, pues $\delta = 2$ corresponde a la dimensión euclidiana del plano, y resulta un poco ilógico medir el área de una recta ya que ésta es nula.

Continuamos usando un método análogo a la aproximación poligonal, formadas por segmentos de longitud ϵ pero elevadas a la potencia arbitraria δ , obtenemos una cantidad que podemos llamar medida aproximada de dimensión δ : $N(\epsilon)\epsilon^\delta$. La Medida de Hausdorff en una dimensión arbitraria δ es,

$$H_\delta(M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon^\delta \quad (1.7)$$

donde $N(\epsilon)$ es el número mínimo de esferas de diámetro ϵ que adoquinan al conjunto M . Las dimensiones euclídeas son casos particulares de la dimensión de Hausdorff, por ejemplo, cuando M es una región acotada en un plano, $H_2(M)$ es el área de esta región. Entonces, para adoquinar un plano, necesitamos $N(\epsilon)$ cuadrados de lado ϵ , de esta forma el área está dada por $A = N(\epsilon)\epsilon^2$ por lo que para objetos bidimensionales, el número mínimo de esferas está dado por $N(\epsilon) = A \epsilon^{-2}$. Análogamente para objetos tridimensionales, se necesitan $N(\epsilon)$ cubos de lado ϵ , por lo que $N(\epsilon) = V \epsilon^{-3}$, donde V es el volumen. Observamos que $N(\epsilon)$ aumenta

cuando ϵ disminuye, obedeciendo una ley de potencias de la forma,

$$N(\epsilon) = C \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^D \quad (1.8)$$

este comportamiento es equivalente a la ecuación (1.4), donde el exponente D es una cantidad característica del conjunto M , de manera que la medida de M en una dimensión arbitraria δ es:

$$H_\delta(M) = C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\delta-D} = \begin{cases} \infty & \text{si } \delta < D \\ 0 & \text{si } \delta > D \\ C & \text{si } \delta = D \end{cases} \quad (1.9)$$

donde existe un valor $\delta = D$ tal que la medida de Hausdorff es infinita para las dimensiones que son menores a D o cero si son mayores. Observamos que un objeto, el conjunto M , tiene muchas medidas de Hausdorff, cada una para una dimensión δ , las cuales están degeneradas pues sólo toman valores *cero* o *infinito*. Existe sólo una dimensión D característica del conjunto para la cual la dimensión de Hausdorff es *finita* $\neq 0$.

1.3. Concepto de fractal, Mandelbrot

"Después de desenterrado el trabajo de Richardson, propuse..."
B. Mandelbrot (1967).

El análisis de las costas de Richardson y el concepto de dimensión fractal de Hausdorff son una base fundamental de las ideas de Benoit Mandelbrot. Su pensamiento radica en que las matemáticas convencionales huyen de lo natural, ya que no existen, por ejemplo, nubes esféricas, costas circulares o rayos rectilíneos, por lo que Mandelbrot planteó la necesidad de construir una *Geometría de la Naturaleza*. Esta construcción es capaz de describir formas irregulares y fragmentadas, además propone que la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad sino que se da en un nivel diferente, que corresponde al comportamiento de los sistemas con leyes de potencia $y \sim x^d$.

Con estas ideas las formas irregulares y fragmentadas ahora admiten un tratamiento riguroso y cuantitativo, identificando estas formas como *fractales* que provienen de término latino *fractus* relacionado con los conceptos «romper en pedazos» e «irregular», también llamó *Dimensión Fractal* a la dimensión de Hausdorff [4].

Mencionamos que existe una conexión entre la pendiente de la gráficas *log-log* de Richardson y la dimensión de Hausdorff, como la longitud de una poligonal se calcula como $L(\epsilon) = N(\epsilon)\epsilon$, entonces el número de lados de la poligonal $N(\epsilon)$, usando la ecuación (1.4) toma la forma:

$$N(\epsilon) = \frac{L(\epsilon)}{\epsilon} = b\epsilon^{-1-m} \quad (1.10)$$

identificando el número de lados de la poligonal con el número óptimo de esferas de diámetro ϵ que cubren la costa, ecuaciones (1.8) y (1.10), obtenemos:

$$D = -1 - m \quad (1.11)$$

donde $C = b$, por lo tanto la medida de Hausdorff en dimensión D corresponde a la intersección de la recta con el eje de las ordenadas.

Mandelbrot pensó que los elementos euclidianos sólo dan una idea parcial de la realidad, para poder describir costas, árboles y nubes se necesita entender el comportamiento 'amorfo' [4]. Su *Geometría de la Naturaleza* nace para estudiar la forma de lo 'amorfo' y se divide en dos secciones generales, la primera corresponde a las *irregularidades estadísticas*, que son las más comunes. La segunda corresponde a las *irregularidades escalantes* que corresponde a los objetos autosimilares como describiremos en la siguiente sección.

1.4. Objetos *auto-similares*

Una estructura se dice *autosimilar* si se puede romper arbitrariamente en pequeñas piezas, y cada pieza resulta ser una pequeña réplica de la estructura entera [3]. Las pequeñas piezas pueden obtenerse del objeto entero aplicando una *transformación de autosimilaridad*, que consiste en escalar la magnitud del vector de posición de un punto del conjunto. Para los objetos autosimilares, las transformaciones contraen la magnitud del vector de posición de los puntos, para visualizar esto consideremos los siguientes ejemplos.

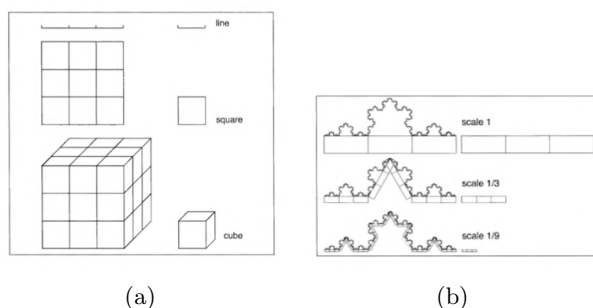


Figura 1.2: Autosimilaridad de la recta, cuadrado, cubo y curva de Koch.

En la figura 1.2 observamos objetos formados por copias reducidas de sí mismos, por ejemplo en (a) se presenta una línea, un cuadrado y un cubo formados por sublíneas, subcuadrados y subcubos reducidos $1/3$ con respecto al objeto original. En (b) se observa que la curva de Koch está hecha por pequeñas subcurvas de Koch de distintas escalas. Este ejemplo nos permite notar que la característica de *autosimilaridad* se presenta en los objetos fractales, así como en otros objetos de distinta naturaleza, ya que la línea, el cuadrado y el cubo también son autosimilares.

Ahora estudiamos la relación entre el factor de reducción r y el número de piezas en que el objeto es dividido q , para la línea, el cuadrado y el cubo, es fácil ver que obedecen la siguiente ley de potencias

$$q = \frac{1}{r^D} \quad (1.12)$$

donde $D = 1$ para la línea, $D = 2$ para el cuadrado y $D = 3$ para el cubo. Para la curva de Koch la relación no es obvia pues para un factor de reducción $r = \frac{1}{3}$ obtenemos $q = 4$ pequeñas subcurvas de Koch, estos objetos fractales obedecen la ley de potencias descrita en la sección 1.2.

En general no se tienen algoritmos sencillos para calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto dado, sin embargo existen objetos tales que su dimensión fractal se obtiene de forma analítica, por ejemplo los objetos que presentan autosimilaridad, a continuación mostraremos un método analítico.

Consideremos una transformación de similaridad en un espacio euclídeano \mathbb{R}^n , que cambia la magnitud de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en un factor $r \in \mathbb{R}$, de la forma:

$$r(\vec{x}) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n). \quad (1.13)$$

Si aplicamos la transformación a un conjunto de puntos $F \in \mathbb{R}^n$, tenemos que para los valores $r > 1$ se obtiene una copia ampliada de F y para los valores $r < 1$ se obtiene una copia reducida de F . Como mencionamos al inicio de la sección, nos interesan las transformaciones de similaridad contractivas donde el factor de reducción es menor que uno ($r < 1$), por lo tanto un conjunto F es autosimilar en las razones $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ cuando F está formado por copias escaladas pero idénticas a él, esto es:

$$F = \bigcup_{i=1}^n F_i \quad \text{donde} \quad F_i \sim r_i \cdot F \quad \& \quad F_i \cap F_j = \emptyset. \quad (1.14)$$

Usando la propiedad de autosimilaridad podemos encontrar una expresión cerrada para la dimensión fractal de estos conjuntos, para ello consideremos el caso más simple en donde F está compuesto de q copias con el mismo factor de reducción r . Suponga que podemos adoquinar F con $N(\epsilon)$ esferas de diámetro ϵ , si sabemos que el conjunto es autosimilar en una razón r y un entero q , nos preguntamos por el número $N(r\epsilon)$ de esferas de diámetro $r\epsilon$ para adoquinarlo. Por autosimilaridad requerimos q copias reducidas cubiertas por $N(\epsilon)$ esferas de diámetro $r\epsilon$, por lo tanto el número de esferas para cubrir por completo al conjunto es:

$$N(r\epsilon) = qN(\epsilon) \quad (1.15)$$

la ecuación (1.15) corresponde a una ecuación funcional, cuya solución es

$$N(\epsilon) = A\epsilon^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\ln q}{\ln r} \quad (1.16)$$

al comparar este resultado con la ecuación (1.8) encontramos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto autosimilar en la razón r y el entero q está dado por:

$$D = -\frac{\ln q}{\ln r} \quad (1.17)$$

por lo tanto, la relación entre el número de piezas q y la razón r , permite calcular de una manera sencilla la dimensión de objetos fractales autosimilares. Este resultado nos será muy útil en el capítulo 4, donde realizamos la extensión del análisis multifractal del intervalo unitario a objetos multifractales cuyo soporte es un fractal autosimilar.

Este capítulo trata acerca de la construcción de la Geometría Fractal. Se definen los conceptos básicos de *fractal*, *dimensión de Hausdorff* y *fractales autosimilares*, los cuales fungen como pilares de una teoría que surge a partir de la necesidad de describir fenómenos altamente no lineales. Nos referimos al concepto denominado *multifractal* que estudiamos en la siguiente sección.

Capítulo 2

El Teorema de Eggleston y la descomposición Multifractal del intervalo I

El intervalo unitario I corresponde al conjunto de todos los números reales que se encuentran entre cero y uno $I \in [0, 1]$. En este capítulo mostramos que el intervalo unitario tiene una estructura multifractal, a través de una realizamos una descomposición particular de I, esto es; particionamos el intervalo unitario en subconjuntos fractales, los cuales exhiben la estructura multifractal de I.

2.1. Cilindros de orden k

Los cilindros de orden k son subconjuntos que componen el intervalo unitario, estos dependen directamente de la elección del número de cifras significativas k . Expliquemos esto, expresemos cualquier número w dentro de I en una base s ,

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(w)}{s^n}. \quad (2.1)$$

Notamos que w es una serie infinita, por lo tanto un elemento de I es de la forma $0.b_1b_2 \cdot \dots \cdot b_k \cdot \dots \cdot b_{\infty}$ donde $b_j = 0, 1, 2, \dots, s-1$. Conviene utilizar sólo las primeras k cifras de w , esto es, considerar la siguiente secuencia $\{z_1(w), z_2(w), \dots, z_k(w)\}$ donde k es el número de cifras significativas, esto conlleva a que no estamos especificando un número sino un conjunto de números, en particular al conjunto de números que definen el siguiente intervalo:

$$0.z_1(w)z_2(w) \cdot \dots \cdot z_k(w) = \left[\sum_{i=1}^k \frac{z_i(w)}{s^i}, \sum_{i=1}^k \frac{z_i(w)}{s^i} + \frac{1}{s^k} \right) \quad (2.2)$$

este intervalo es llamado Cilindro de orden k [10].

Por lo tanto a una secuencia $\{z_1(w), z_2(w), \dots, z_k(w)\}$ le corresponde un cilindro de orden k definido por:

$$C_{z_1 z_2 \dots z_k} = \left[\sum_{i=1}^k \frac{z_i(w)}{s^i}, \sum_{i=1}^k \frac{z_i(w)}{s^i} + \frac{1}{s^k} \right] \quad (2.3)$$

cada cilindro tiene una longitud denotada por $\Delta_k \equiv \frac{1}{s^k}$, y nos percatamos que I está compuesto por s^k cilindros de orden k .

2.2. Clasificación en frecuencias

Realicemos una clasificación peculiar de todos los cilindros en el intervalo unitario, cada cilindro de orden k está ligado con una secuencia de la forma $\{z_1 z_2 \dots z_k\}$ donde $z_i = 0, 1, \dots, s-1$. La idea consiste en observar la secuencia y determinar la frecuencia de aparición de cada z_i , es decir; dada una secuencia se debe cuantificar la ocurrencia de z_i y dividirlo entre el número total de elementos en la secuencia dada, que corresponde al número de cifras significativas k . Si denotamos a $N_i(k)$ como el número de veces en que z_i aparece en la misma secuencia, entonces la frecuencia es $f_i(k) \equiv \frac{N_i(k)}{k}$. De esta forma cada cilindro puede clasificarse de acuerdo a las frecuencias $\{f_0(k), f_1(k), \dots, f_{s-1}(k)\}$ sin importar el orden dado en cada secuencia, esto implica que existen varios cilindros distintos que comparten el mismo valor en las frecuencias. Por ejemplo los cilindros de orden 5 en base $s = 2$: $C_{01111}, C_{10111}, C_{11011}, C_{11101}$ & C_{11110} , tienen mismas frecuencias $\{f_0(5) = \frac{1}{5}, f_1(5) = \frac{4}{5}\}$.

Ahora notamos que a todos los cilindros que tienen el mismo valor de frecuencias $\{f_0, f_1, \dots, f_{s-1}\}$ los podemos catalogar en conjuntos que denotamos por $M(f_0, f_1, \dots, f_{s-1})$, y claramente $I = \bigcup M(f_0, f_1, \dots, f_{s-1})$. Podemos especificar el número de cilindros que lo componen, es decir; definir la cardinalidad de M :

$$Card(M(f_0(k), \dots, f_{s-1}(k))) = \frac{k!}{N_0(k)! N_1(k)! \dots N_{s-1}(k)!} \quad (2.4)$$

utilizando la aproximación de Stirling, la cardinalidad de M en términos de las frecuencias es:

$$Card(M(f_0(k), \dots, f_{s-1}(k))) = f_0(k)^{-N_0} f_1(k)^{-N_1} \dots f_{s-1}(k)^{-N_{s-1}}. \quad (2.5)$$

Ejemplifiquemos esto, retomemos los cilindros de orden 5 en base $s = 2$, con números de ocurrencias: $N_0 = 1$ & $N_1 = 4$. Estos cilindros conforman el conjunto $M(f_0(5) = \frac{1}{5}, f_1(5) = \frac{4}{5})$, y son exactamente:

$$Card\left(M\left(f_0(5) = \frac{1}{5}, f_1(5) = \frac{4}{5}\right)\right) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5. \quad (2.6)$$

De esta forma obtenemos cinco cilindros $C_{01111}, C_{10111}, C_{11011}, C_{11101}$ & C_{11110} con el mismo valor en las frecuencias. Notemos que estos cilindros se encuentran distribuidos en todo el intervalo unitario y no son necesariamente contiguos.

Para visualizar la estructura multifractal de I consideremos el ejemplo binario $s = 2$ con una precisión de 8 dígitos, es decir, formaremos cilindros de orden 8. Buscamos los conjuntos $M(f_0(8), f_1(8))$ que podemos obtener para este proceso, sabemos que los cilindros serán de la forma $C_{z_1 z_2 z_3 \dots z_8}$ donde cada $z_i = 0, 1$; entonces podemos definir el primer conjunto con los siguientes números de ocurrencia $N_0 = 8$ & $N_1 = 0$ por lo tanto obtenemos la familia $M(f_0(8) = \frac{8}{8}, f_1(8) = \frac{0}{8})$ con exactamente un cilindro $C_{00000000}$. Para obtener las otras familias debemos cambiar los números de ocurrencia de forma que la suma de $N_0 + N_1 = 8$, en términos de las frecuencias obtendremos las siguientes familias: $M(7/8, 1/8)$, $M(3/4, 1/4)$, $M(5/8, 3/8)$, $M(1/2, 1/2)$, $M(3/8, 5/8)$, $M(1/4, 3/4)$, $M(1/8, 7/8)$ & $M(0, 1)$. Obtenemos 9 familias diferentes para $s = 2$ y $k = 8$, ahora construimos un espectro óptico que consiste en asignar un color diferente a cada familia, por lo tanto tenemos 9 colores diferentes que representan a cada conjunto $M(f_0(8), f_1(8))$ que mostramos por separado en la figura 2.1 y juntos en la figura 2.2.

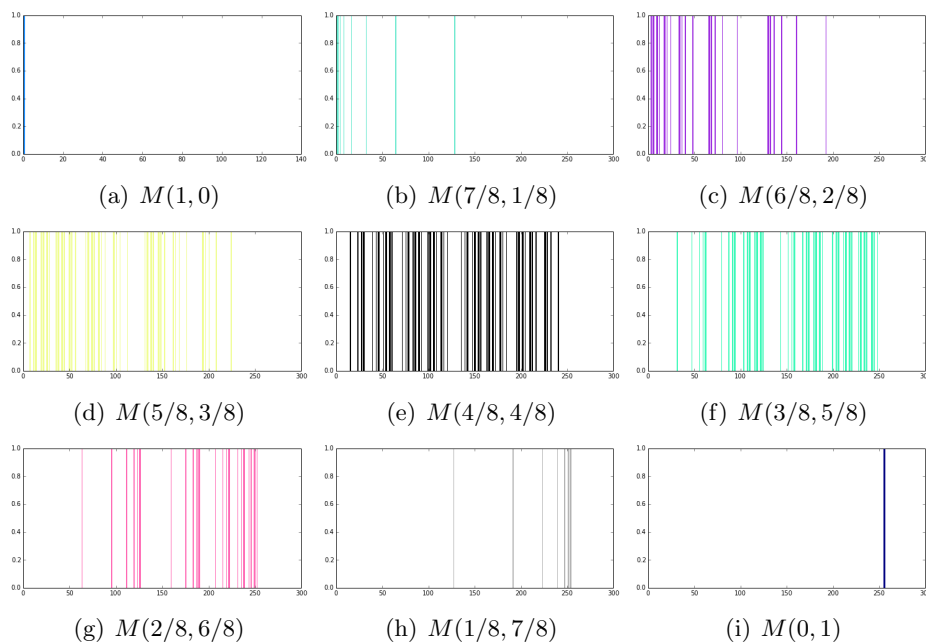


Figura 2.1: Estructura fractal de los conjuntos $M(f_0, f_1)$ de I para $k = 8$.

En la figura 2.2 observamos que las familias están entrelazadas recordándonos a un zarape de Saltillo. Para visualizar la estructura multifractal tomamos cualquier hilo del zarape y lo amplificamos por un factor de 2^8 y obtenemos por cada cilindro otras 9 familias con la misma estructura que la figura 2.2. Por ejemplo tomemos un hilo de un color amarillo que pertenece a $M(5/8, 3/8)$ al amplificarlo obtenemos un espectro óptico, figura 3.2, conformado por 9 familias de la forma $M(\frac{5+n}{16}, \frac{3+m}{16})$ con $m + n = 8$. Lo anterior muestra la propiedad de autosimilaridad de la separación multifractal del intervalo unitario, ya que en 3.2 se presenta la misma estructura espectral que vimos originalmente.



Figura 2.2: Estructura multifractal del intervalo unitario \mathbb{I} en base binaria para $k = 8$.



Figura 2.3: Estructura multifractal de los conjuntos $M(5/8, 3/8)$ de la figura 2.1.

Con esto observamos efectivamente la estructura multifractal, ya que la separación de I en cilindros que conforman subconjuntos $M(f_0, f_1, \dots, f_{s-1})$, implica que los cilindros se encuentran distribuidos en todo el intervalo unitario, y no en una región específica, con una estructura que parece entretejida, es decir; cilindros que pertenecen al mismo subconjunto se encuentran distribuidos en todo el intervalo unitario y además están entrelazados con otros cilindros que pertenecen a otros subconjuntos M .

2.3. Teorema de Eggleston

Continuemos realizando una mejor aproximación, esto es, considerar el límite cuando $k \rightarrow \infty$, el tamaño de los intervalos disminuye considerablemente hasta que cada cilindro de orden k tiende a un número w dentro de I , y como consecuencia las frecuencias ahora toman valores en el continuo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(w, k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(w, k) = \varphi_i \quad (2.7)$$

por lo tanto los conjuntos $M(f_0, f_1, \dots, f_{s-1})$ originan conjuntos de puntos w para los cuales las frecuencias toman valores continuos $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$; estos conjuntos se denotan por $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$, además tenemos $I = \bigcup M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ y podemos escribir,

$$M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} M(f_0(k), f_1(k), \dots, f_{s-1}(k)). \quad (2.8)$$

Ahora calculemos la Dimensión de Hausdorff del conjunto $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$, utilizando (2.8), necesitamos calcular,

$$Dim_H M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} Dim_H M(f_0(k), f_1(k), \dots, f_{s-1}(k)) \quad (2.9)$$

para esto empleamos la definición de la Dimensión de Hausdorff, y tenemos que:

$$\begin{aligned} Dim_H M(f_0(k), f_1(k), \dots, f_{s-1}(k)) &= -\frac{\ln\{Card(M(f_0(k), \dots, f_{s-1}(k)))\}}{\ln\{\Delta_k\}} \\ &= \frac{\ln\{\prod_{j=0}^{s-1} f_j(k)^{-N_j}\}}{\ln\{s^k\}} = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} (-N_j) \ln f_j(k)}{k \ln s} \end{aligned} \quad (2.10)$$

por lo tanto,

$$Dim_H M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\ln s} \sum_{j=0}^{s-1} f_j(k) \ln f_j(k) \right\} \quad (2.11)$$

de esta forma obtenemos una expresión para la dimensión de Hausdorff del conjunto $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$.

$$Dim_H M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = -\frac{1}{\ln s} \sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j \ln \varphi_j \quad (2.12)$$

este resultado es llamado Teorema de Eggleston, el cual establece la dimensión de cada conjunto de frecuencias que conforman a todo el intervalo unitario I [2].

A continuación mencionaremos algunas consecuencias características que provienen del análisis hecho hasta ahora:

- El intervalo unitario I es un *Multifractal*.
- El espectro de singularidades está dado por el Teorema de Eggleston (2.12).
- La dimensión global de Hausdorff de \mathbb{I} es:

$$Dim_H\{\mathbb{I}\} = \underset{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}}{Máx} Dim_H\{M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})\} = 1 \quad (2.13)$$

que se obtiene para el conjunto donde todas las frecuencias son iguales $\varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_{s-1} = \frac{1}{s}$.

- El Teorema de Eggleston establece una conexión entre la dimensión de Hausdorff y la *entropía de frecuencias*.

Denotemos a $S(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ como la *entropía de frecuencias*, la hemos nombrado así debido a que posee una estructura matemática similar a la entropía de Shannon, dada por

$$S(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = - \sum_{j=0}^{s-1} \varphi_j \ln \varphi_j \quad (2.14)$$

por lo tanto el teorema de Eggleston toma la siguiente forma:

$$Dim_H M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = \frac{S(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})}{\ln s} \quad (2.15)$$

con la ecuación (2.15) observamos la conexión entre Dimensión Fractal y Entropía de Frecuencias.

Examinemos con la ayuda de ejemplos los conceptos mencionados hasta ahora, para esto consideramos el conjunto de Cantor, que corresponde a un conjunto infinito que está contenido dentro del intervalo unitario. Pensemos en el intervalo unitario escrito en base $s = 3$, el conjunto de Cantor corresponde al subconjunto de \mathbb{I} tal que no contienen ningún 1 [3], esto es:

$$\mathcal{C} = \left\{ w \mid w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(w)}{3^n} \text{ donde } z_j(w) \in (0, 2) \right\}. \quad (2.16)$$

El conjunto de Cantor \mathcal{C} estará conformado por conjuntos $M_s(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ de frecuencias iguales, etiquetados por el subíndice s para tener una mejor visualización del cálculo. Claramente al conjunto de Cantor lo componen $\mathcal{C} = \bigcup_{\varphi_0, \varphi_2} M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2)$ donde $\varphi_0 + \varphi_2 = 1$.

Procedemos con el calculo de la Dimensión de Hausdorff de los subconjuntos que componen \mathcal{C}

$$Dim_H M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2) = \frac{1}{\ln 3} S_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2). \quad (2.17)$$

Notemos que $S_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2) = S_2(\varphi_0, \varphi_1)$ y como

$$S_2(\varphi_0, \varphi_1) = \ln 2 \ Dim_H M_2(\varphi_0, \varphi_2)$$

tenemos que,

$$Dim_H M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2) = \frac{\ln 2}{\ln 3} Dim_H M_2(\varphi_0, \varphi_1). \quad (2.18)$$

Notemos que los conjuntos $M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2)$ y $M_2(\varphi_0, \varphi_2)$ son completamente distintos, el primero está en base $s = 3$ y el segundo en base $s = 2$.

Usando (2.13) podemos calcular la Dimensión global del conjunto de Cantor

$$Dim_H \mathcal{C} = \underset{\varphi_0, \varphi_1}{Máx} Dim_H \{M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2)\} \quad (2.19)$$

$$Dim_H \mathcal{C} = \frac{\ln 2}{\ln 3} Dim_H M_2(\varphi_0 = \frac{1}{2}, \varphi_1 = \frac{1}{2}) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

introduciendo este resultado en (2.19) obtenemos

$$Dim_H M_3(\varphi_0, \varphi_1 = 0, \varphi_2) = Dim_H \mathcal{C} \cdot Dim_H M_2(\varphi_0, \varphi_1) \quad (2.20)$$

Con esta aplicación del teorema de Eggleston, podemos concluir:

- El conjunto de Cantor es un multifractal con dimensión global de Hausdorff dada por (2.19).
- La ecuación (2.20) implica que podemos hacer una descomposición multifractal del conjunto \mathcal{C} , similar a la del intervalo unitario \mathbb{I} en base $s = 2$, difiriendo solamente en un factor de escala que es la dimensión de Cantor.
- El teorema de Eggleston establece una relación entre la dimensión de Hausdorff de subconjuntos del intervalo \mathbb{I} con la entropía de frecuencias, que en este caso no aparece ninguna variable aleatoria y sin embargo, como veremos más adelante, al construir un multifractal estadístico podemos encontrar procesos estocásticos relacionados con la entropía.

En general, los multifractales son conjuntos compuestos de fractales, por lo tanto un objeto multifractal posee varias dimensiones fractales. El intervalo unitario tiene una naturaleza multifractal, la cual se exhibe gracias a una separación particular en subconjuntos de frecuencia $M_s(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$. Este desarrollo corresponde a un análisis geométrico, es decir, este capítulo describe sólo multifractales geométricos.

El siguiente capítulo continúa con un análisis más sofisticado, donde se utilizan algunos conceptos básicos de probabilidad y se construye un *Multifractal Estadístico* definido sobre el intervalo unitario.

Capítulo 3

Descripción estadística de un Multifractal

En esta sección generamos un *Multifractal Estadístico*, para esto, es necesario notar que en el capítulo 2 se describe una cubierta fractal puramente geométrica, ya que la descomposición multifractal de I radica sólo en la creación cubiertas de cierto tamaño; esto es, los cilindros de orden k generan un *Multifractal Geométrico*.

El procedimiento para crear un *Multifractal Estadístico*, se hace asignando una *medida estadística* a cada cubierta del multifractal geométrico, lo cual significa establecer un peso probabilístico a cada cilindro con la ayuda de un proceso multiplicativo que definiremos a continuación.

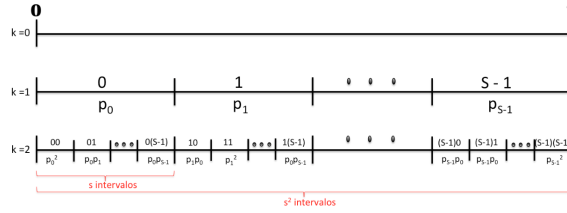
3.1. Proceso Multiplicativo

El proceso multiplicativo se define en términos del primer paso de la descomposición del intervalo unitario, si consideramos $k = 1$ obtenemos s particiones del intervalo I : $\{0, 1, \dots, s - 1\}$, a cada partición le asignamos un peso probabilístico $\{p_0, p_1, \dots, p_{s-1}\}$, tal que cada $p_i \geq 0$ y que $\sum p_i = p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1} = 1$ [1]. Esto corresponde al siguiente esquema finito,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & s-1 \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{s-1} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Iteramos el sistema teniendo en cuenta que las probabilidades para la siguiente iteración dependen de las probabilidades definidas en (3.1), como se muestra en la figura 3.1, que se repite iterativamente:

Recordemos que para un esquema finito, la entropía de Shannon está definida de la siguiente forma:


 Figura 3.1: Partición del intervalo unitario I en base s .

$$S(p_0, p_1, \dots, p_r) = - \sum_i^r p_i \ln p_i \quad (3.2)$$

Calculemos la entropía de Shannon para este proceso multiplicativo o estocástico dado un número k de iteraciones, para esto necesitamos introducir el concepto de *medida estadística*, que corresponde únicamente a que un conjunto tiene asociado un número, en este caso, a todo el conjunto unitario le corresponde una medida igual a la unidad, en seguida, cada partición, es decir; cada cilindro está relacionado con un número p_i que cumple con las propiedades de un espacio probabilístico y de ahí proviene el nombre de *medida estadística* [2]. La medida estadística de cada cilindro de orden k es la siguiente:

$$\mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k}) = p_0^{N_0} p_1^{N_1} \dots p_{s-1}^{N_{s-1}} \quad (3.3)$$

escrita en su forma compacta, pero notemos que podemos escribir (3.3) de la siguiente forma:

$$\mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k}) = p_{z_1} p_{z_2} \dots p_{z_k} \quad (3.4)$$

Reanudemos el cálculo de la entropía de Shannon para todo el proceso estocástico, utilizando la definición (3.2) tenemos,

$$S_k(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}) = - \sum_{z_1, z_2, \dots, z_k} \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, \dots, z_k}) \ln \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, \dots, z_k}) \quad (3.5)$$

considerando $\mu_{\vec{p}}$ en su forma (3.4):

$$\mu_{\vec{p}}(C_{z_1, \dots, z_k}) \ln \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, \dots, z_k}) = p_{z_1} p_{z_2} \dots p_{z_k} [\ln p_{z_1} + \dots + \ln p_{z_k}] \quad (3.6)$$

tenemos que,

$$\sum_{z_1, z_2, \dots, z_k} \mu_{\vec{p}} \ln \mu_{\vec{p}} = \sum_{z_1} p_{z_1} \ln p_{z_1} + \dots + \sum_{z_k} p_{z_k} \ln p_{z_k}.$$

Finalmente obtenemos la siguiente forma para la entropía del k -ésimo proceso multiplicativo:

$$S_k(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}) = -k \sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i \quad (3.7)$$

donde observamos que la entropía de Shannon de todo el proceso estocástico depende en una forma muy simple de la entropía de Shannon del primer paso. Es pertinente utilizar la entropía por paso ya que cuando $k \rightarrow \infty$, S_k diverge, pero su cociente con k es constante e igual a la entropía del esquema finito (3.1) y es exactamente:

$$\frac{S_k}{k} = - \sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i. \quad (3.8)$$

Ahora queremos relacionar la entropía de Shannon con la dimensión de Hausdorff, recordemos que el Teorema de Eggleston es el siguiente:

$$Dim_H M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = - \frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i \ln \varphi_i \quad (3.9)$$

y notamos que para un conjunto especial en el que se tiene $\varphi_i = p_i$, de (3.8) y (3.9) obtenemos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} = - \sum_{i=0}^{s-1} p_i \ln p_i = \ln s \cdot Dim_H M(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}). \quad (3.10)$$

El conjunto donde el vector de frecuencias es igual al vector de probabilidad $M(\varphi_0 = p_0, \varphi_1 = p_1, \dots, \varphi_{s-1} = p_{s-1})$ le llamaremos *conjunto de condensación de la medida*, ya que como veremos a continuación la medida tiende a concentrarse en este conjunto especial. Para mostrar esto calculemos la medida probabilística del conjunto $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ tomada con el proceso multiplicativo:

$$\mu_{\vec{p}}\{M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})\} = \text{Card}\{M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})\} \cdot \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, \dots, z_k}) \quad (3.11)$$

sustituyendo (3.3) y (2.5) bajo el régimen $k \rightarrow \infty$, tenemos,

$$\mu_{\vec{p}}\{M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})\} = \prod_{i=0}^{s-1} \left(\frac{p_i}{\varphi_i} \right)^{N_i}. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) evidencia que la medida para el conjunto especial donde $\varphi_i = p_i$ tiende a uno, por lo tanto este conjunto probabilísticamente pesa más que otros, pues cubre casi toda la probabilidad; es decir, la medida se concentra en $M(\vec{\varphi} = \vec{p})$, esta es la razón por la cual se le llama *conjunto de condensación de la medida*.

Continuemos con el cálculo, despejemos $\text{Dim}_H M(p_0, p_1, \dots, p_{s-1})$ de la ecuación (3.10):

$$\begin{aligned} \text{Dim}_H M(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k \ln s} \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{\ln s^{-k}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

recordamos que $s^{-k} = \Delta_k$ y obtenemos la siguiente expresión,

$$\text{Dim}_H M(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{\ln \Delta_k} \quad (3.14)$$

esto indica que la dimensión de Hausdorff del conjunto de condensación está relacionada con la entropía de Shannon de todo el proceso, además podemos observar de (3.14) que la Entropía obedece la siguiente ley de escalamiento,

$$S_k(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}) \sim \ln \left(\frac{1}{\Delta_k} \right)^{\text{Dim}_H M(p_0, p_1, \dots, p_{s-1})}. \quad (3.15)$$

Hemos analizado la relación entre Dimensión de Hausdorff y entropía de Shannon en el intervalo unitario I separado en conjuntos de frecuencias $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$, ahora estudiemos una nueva forma de agrupar subconjuntos de I, que tome en cuenta la medida probabilística, para esto es importante notar que la medida estadística de cada cilindro (3.3) obedece la siguiente ley de escalamiento:

$$\mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k}) = \Delta_k^{\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}} \quad (3.16)$$

donde hemos introducido el exponente de escalamiento $\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}$, llamado exponente de Holder [2, 11]. Con esto podemos agrupar a todos los cilindros que poseen el mismo valor de $\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}$ en conjuntos iguales nombrados J_α , definidos de la siguiente forma:

$$J_\alpha = \left\{ w \in I \mid \alpha(\vec{\varphi}(w), \vec{p}) = \alpha \right\} \quad (3.17)$$

de (3.16) podemos obtener una expresión para $\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}$:

$$\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k} = \frac{\ln \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k})}{\ln \Delta_k} = -\frac{\ln \mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k})}{k \ln s} \quad (3.18)$$

y podemos escribir la medida estadística de la siguiente forma,

$$\mu_{\vec{p}}(C_{z_1, z_2, \dots, z_k}) = p_{z_1} p_{z_2} \cdots p_{z_k} = \prod_{i=0}^{s-1} p_i^{N_i(k)} \quad (3.19)$$

por lo tanto $\ln \mu_{\vec{p}} = \sum_{i=0}^{s-1} N_i(k) \ln p_i$ entonces:

$$\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k} = -\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{N_i(k)}{k} \ln p_i = -\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} f_i(k) \ln p_i. \quad (3.20)$$

En un proceso límite, el cilindro de orden k tiende a un punto cuando $k \rightarrow \infty$ entonces el exponente de Holder estará asociado a un punto de la siguiente manera:

$$\alpha(w, \vec{p}) = \alpha(\vec{\varphi}(w), \vec{p}) = -\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i \ln p_i \quad (3.21)$$

ahora es fácil ver que todos aquellos conjuntos $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ cuyo vector de frecuencias satisfaga que

$$-\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i \ln p_i = \alpha \quad (3.22)$$

están contenidos en J_α , de manera que,

$$J_\alpha = \bigcup_{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}} M(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1}) \quad (3.23)$$

con esto notamos que los subconjuntos J_α están formados por conjuntos que tienen estructura fractal y por lo tanto cada J_α es un **conjunto multifractal**, además el intervalo unitario es la unión de todos los conjuntos J_α , esto implica que I es un multifractal compuesto de multifractales [2].

Ahora busquemos una relación entre entropía y dimensión de Hausdorff pero considerando la descomposición de I en subconjuntos que poseen el mismo valor de $\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}$, para esto consideremos la entropía de frecuencias

$$S(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}) = - \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i \ln \varphi_i \quad (3.24)$$

sujeta a las siguientes constricciones:

$$-\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i \ln p_i = \alpha \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i = 1$$

las ecuaciones (3.24) y (3.25) permiten hacer una conexión con las ideas de la Mecánica Estadística, con las que podemos calcular el espectro de dimensiones de un Multifractal Estadístico. En las siguientes secciones mostramos la analogía entre el desarrollo de Boltzmann y el proceso de maximización de la entropía de frecuencias bajo las constricciones (3.25).

3.2. Formulación de Boltzmann

Basada en principios termodinámicos y en la conexión entre propiedades macroscópicas y microscópicas del sistema, la Ley de Distribución de Boltzmann describe cómo un sistema de muchos átomos llega al equilibrio térmico. La ecuación de Boltzmann conecta los mundos *Macro-Micro*:

$$S(W) = k \ln W\{n_k\} \quad (3.26)$$

donde $k \sim 1,3806504 \times 10^{-23} J/K$ es la constante de Boltzmann, $S(W)$ es la *entropía* a nivel mesoscópico que estará relacionada con las propiedades macroscópicas del sistema. $W\{n_k\}$ es el número de estados compatibles con el mesoestado, ligado con distribuciones de probabilidad del sistema; es decir, contiene información microscópica.

Para tener una mejor visualización acerca de la distribución de Boltzmann y la clasificación *micro*, *meso* y *macroestado*, estudiemos un sistema específico. Consideremos un gas ideal encerrado en una caja con paredes aislantes, podemos considerar las moléculas del gas como partículas puntuales. El *Microestado* consiste en una descripción que utiliza el espacio fase μ de posiciones \vec{r} vs. momentos \vec{p} para etiquetar cada partícula, por lo tanto estas son numerables. La dinámica individual de cada partícula está gobernada por las ecuaciones de Hamilton, dadas las condiciones iniciales se definen las trayectorias de las partículas, para caracterizar una partícula α necesito especificar $(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha)$ para todo tiempo t . Notemos que este sistema contiene $\sim 10^{23}$ partículas, por lo tanto describir la dinámica de cada molécula podría ser una tarea bastante complicada, con esto surge la necesidad de introducir nuevas ideas: Un método que contemple la dinámica de cúmulos de partículas.

Se introduce el concepto de *Mesoestado* que consiste en dividir el espacio μ en k -celdas del mismo tamaño:

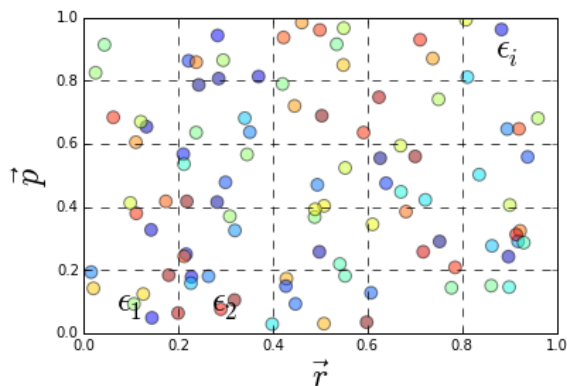


Figura 3.2: Espacio μ dividido en celdas idénticas.

Cada celda contiene cierta población de moléculas del gas que denotamos por $n_i(t)$, y corresponde al número de moléculas dentro de la i -ésima celda al tiempo t , además cada celda tiene asociada una energía ϵ_i , de manera que $n_i(t)\epsilon_i$ corresponde a la energía promedio de las partículas en la i -ésima celda. Debido a que tenemos un sistema aislado se cumple que el número total de partículas N y la energía del sistema U se conservan:

$$\sum_{i=1}^k n_i = N$$

$$\sum_{i=1}^k n_i \epsilon_i = U \quad (3.27)$$

El *mesoestado* del sistema al tiempo t es dado al conocer los números de ocupación de las celdas $\{n_i(t)\}$, el macroestado corresponde al estado de equilibrio termodinámico del sistema, siguiendo el postulado de Boltzmann este estado se identifica con el mesoestado que hace máxima la entropía compatible con las restricciones dadas por la ec. (2).

El número de estados compatibles con el mesoestado $\{n_i(t)\}$ es:

$$W\{n_k\} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \quad (3.28)$$

haciendo uso de la aproximación de Stirling, ya que $N \sim 10^{23}$ tenemos:

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \cong \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k}} \quad (3.29)$$

por lo tanto la entropía de Boltzmann toma la siguiente forma,

$$S(W) = k \ln \prod_i \left(\frac{n_i}{N}\right)^{-n_i} = -k \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{N}. \quad (3.30)$$

Notemos que $\frac{n_i}{N}$ puede interpretarse como la frecuencia o probabilidad de encontrar una molécula en la i -ésima celda, denotando por $p_i \equiv \frac{n_i}{N}$ esta probabilidad, obtenemos una expresión para la entropía por partícula en términos de p_i :

$$\frac{S(W)}{N} = -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (3.31)$$

para tener una visualización de esta cantidad desde el punto de vista probabilístico, tomemos la constante de Boltzmann igual a la unidad, por lo que la entropía por partícula toma la forma :

$$\mathcal{S} = - \sum_i p_i \ln p_i \quad (3.32)$$

De forma que esta cantidad corresponde a la entropía de Shannon, definida para procesos aleatorios.

El sistema evoluciona temporalmente de mesoestados de menor probabilidad a mesoestados de mayor probabilidad, llegando al estado de equilibrio termodinámico cuando alcanza la máxima entropía

$$P \{p_\alpha(t + \tau)\} \geq P \{p_\alpha(t)\} \quad (3.33)$$

además el estado de equilibrio termodinámico corresponde al mesoestado más probable,

$$P \{\tilde{p}_\alpha\} \gg P \{p_\alpha\}. \quad (3.34)$$

Las expresiones (3.33) y (3.34) corresponden a los postulados de Boltzmann y \tilde{p}_α al estado de equilibrio, por lo tanto tenemos que $\mathcal{S}(W)$ es la entropía de un estado mesoscópico y no la entropía macroscópica, es decir, la entropía de equilibrio termodinámico. El objetivo es calcular la entropía de equilibrio termodinámico, de acuerdo con la ideas de Boltzmann, se debe maximizar (3.32) bajo las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad (3.35)$$

$$\sum_{i=1}^k p_i \epsilon_i = u \quad (3.36)$$

donde $u \equiv U/N$ es la energía por partícula.

Usemos el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, construyamos una función I :

$$I(\{p_i\}) = - \sum_i p_i \ln p_i - \lambda \sum_{i=1}^k p_i - \beta \sum_{i=1}^k p_i \epsilon_i \quad (3.37)$$

usando la condición de extremo,

$$\left. \frac{\partial I(\{p_i\})}{\partial p_r} \right|_{\tilde{p}_r} = - [\ln \tilde{p}_r + \lambda + \beta \epsilon_r + 1] = 0$$

$$\ln \tilde{p}_r = -\lambda - 1 - \beta \epsilon_r \quad (3.38)$$

de (3.38) obtenemos el mesoestado más probable:

$$\tilde{p}_r = e^{-\lambda-1-\beta\epsilon_r} = C e^{-\beta\epsilon_r} \quad (3.39)$$

por lo que necesitamos determinar las constantes λ y β , en (3.39) es fácil ver que resulta análogo determinar C o λ ; usemos el hecho de que la probabilidad debe estar normalizada, esto es, evaluemos (3.39) en la constricción (3.35):

$$\sum_{r=1}^k \tilde{p}_r = C \sum_{r=1}^k e^{-\beta\epsilon_r} = 1 \quad (3.40)$$

esto implica que $C = 1/\sum_{r=1}^k e^{-\beta\epsilon_r}$ por lo tanto la distribución más probable toma la siguiente forma:

$$\tilde{p}_r = \frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{\sum_{r=1}^k e^{-\beta\epsilon_r}} = \frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{z_\beta} \quad (3.41)$$

donde $z_\beta = \sum_{r=1}^k e^{-\beta\epsilon_r}$ es llamada la *función de partición*.

Continuamos con el cálculo de β , sistemáticamente evaluemos la distribución más probable (3.39) en la siguiente constricción (3.36):

$$\sum_{r=1}^k \tilde{p}_r \epsilon_r = \sum_{r=1}^k \left[\frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{z_\beta} \right] \epsilon_r = \frac{1}{z_\beta} \sum_{r=1}^k \epsilon_r e^{-\beta\epsilon_r} = u \quad (3.42)$$

notemos que,

$$\frac{\partial z_\beta}{\partial \beta} = - \sum_{r=1}^k \epsilon_r e^{-\beta\epsilon_r} \quad (3.43)$$

sustituyendo (3.43) en (3.42) tenemos,

$$u = \frac{1}{z_\beta} \left[- \frac{\partial z_\beta}{\partial \beta} \right] = - \frac{\partial \ln z_\beta}{\partial \beta}. \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) define a β implícitamente y para determinarla primero debemos calcular la función de partición z_β , después calcular u y despejar, de esta forma se obtendrá $\beta = \beta(u, V)$.

En esta sección se describe la formulación de Boltzmann y se calcula la distribución más probable \tilde{p}_r a través de un proceso extremal. En la sección 3.3 utilizamos un desarrollo similar para calcular la distribución de frecuencias más probable, lo que nos lleva al cálculo del espectro de dimensiones para multifractales estadísticos.

3.3. Espectro de dimensiones $D(\alpha)$

Cuando introducimos el exponente de escalamiento α hacemos dos cosas relevantes, la primera radica en la naturaleza híbrida del exponente de Holder, ya que $\alpha(\vec{\varphi}, \vec{p})$ contiene información del tamaño de los cilindros e información probabilística. La segunda proviene de la descomposición multifractal en subconjuntos con la misma α que conlleva a obtener conjuntos J_α que poseen estructura multifractal, ya que estos subconjuntos están compuestos por conjuntos fractales $M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ que provienen de la descomposición multifractal en términos de las frecuencias. Ahora nos enfrentamos con el problema de encontrar el espectro de dimensiones en términos del exponente de escalamiento ya que J_α ya no se caracteriza sólo por una dimensión fractal sino por un conjunto infinito de dimensiones fractales[2].

El objetivo ahora es calcular la dimensión que represente a J_α , para esto usaremos las siguientes propiedades básicas de la dimensión de Hausdorff [8],

$$\begin{aligned} Dim_H M &\leq Dim_H M' \quad \text{si } M \subset M' \\ Dim_H \cup M_n &= \sup\{Dim_H M_n\} \end{aligned} \tag{3.45}$$

por lo que la dimensión de Hausdorff de J_α será el máximo de las dimensiones de Hausdorff de sus subconjuntos componentes.

Usando el teorema de Eggleston y denotando por $D(\alpha)$ la dimensión de Hausdorff de J_α tenemos:

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= Dim_H J_\alpha = \text{Max} \{Dim_H M(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1})\} \\ &= \frac{1}{\ln s} \text{Max} \{S(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1})\} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Con (3.46) notamos que necesitamos maximizar la entropía de frecuencias $S(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1})$ considerando ciertas restricciones, continuemos con la maximización de la entropía de una forma especial, usando las ideas de Boltzmann, para esto; consideremos la entropía de frecuencias,

$$S(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1}) = - \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i \ln \varphi'_i \quad (3.47)$$

sujeta a las siguientes constricciones:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i \ln p_i &= \alpha \\ \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i &= 1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Usando el método de los multiplicadores de lagrange, construyamos la función auxiliar $I\{\varphi'_i\}$,

$$I\{\varphi'_i\} = - \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i \ln \varphi'_i - \lambda \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i - q \left[\frac{1}{\ln s} \sum_{i=0}^{s-1} \varphi'_i \ln p_i \right] \quad (3.49)$$

maximizando (3.49) obtenemos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I\{\varphi'_i\}}{\partial \varphi'_r} \right|_{\tilde{\varphi}'_r} &= \ln \tilde{\varphi}'_r + q \frac{\ln p_r}{\ln s} + \lambda + 1 = 0 \\ \Rightarrow \tilde{\varphi}'_r &= e^{-(\lambda+1) - \frac{\ln p_r^q}{\ln s}} = C p_r^{\frac{q}{\ln s}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde es directo ver que al calcular C estaremos determinando λ , por lo tanto usemos la constricción (3.48) correspondiente a la normalización de las frecuencias:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{s-1} \tilde{\varphi}'_r &= C \sum_{r=0}^{s-1} p_r^{\frac{q}{\ln s}} = 1 \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{\sum_{r=0}^{s-1} p_r^{\frac{q}{\ln s}}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

sustituyendo (3.51) en (3.49) obtenemos,

$$\tilde{\varphi}'_r = \frac{p_r^{\frac{q}{\ln s}}}{\sum_{r=0}^{s-1} p_r^{\frac{q}{\ln s}}} = \frac{p_r^q}{\sum_{r=0}^{s-1} p_r^q} \quad (3.52)$$

por lo tanto la frecuencia que maximiza (3.47) es:

$$\tilde{\varphi}'_r = P_r(q) = \frac{p_r^q}{Z_q} \quad (3.53)$$

donde la función Z_q la definimos de la siguiente manera,

$$Z_q \equiv \sum_{r=0}^{s-1} p_r^q. \quad (3.54)$$

Ahora queremos calcular el parámetro q , la constricción (3.48) lo determina implícitamente de la siguiente forma:

$$\alpha(q) = -\frac{1}{\ln s} \sum_{r=0}^{s-1} \tilde{\varphi}'_r \ln p_r = \sum_{r=0}^{s-1} P_r(q) \left[-\frac{\ln p_r}{\ln s} \right] \quad (3.55)$$

y notamos que,

$$\frac{\partial \ln Z_q}{\partial q} = \frac{1}{Z_q} \sum_{r=0}^{s-1} p_r^q \ln p_r \quad (3.56)$$

entonces podemos escribir (3.55) de la siguiente forma:

$$\alpha(q) = \frac{\partial}{\partial q} \left[-\frac{\ln Z_q}{\ln s} \right] = \frac{\partial \tau(q)}{\partial q} \quad (3.57)$$

donde hemos definido la siguiente función:

$$\tau(q) = -\frac{\ln Z_q}{\ln s} \quad (3.58)$$

Es importante notar que el parámetro q está definido implícitamente por la ecuación (3.57), este comportamiento lo observamos en el análisis de Boltzmann cuando queremos determinar β en la ecuación (3.44).

Continuamos con el cálculo de la entropía de Shannon máxima, sustituyendo (3.53) en (3.47) y de acuerdo con la relación (3.46), esto nos lleva a la dimensión de Hausdorff del multifractal J_α :

$$D(q) = D(\alpha(q)) = -\frac{1}{\ln s} \sum_{r=0}^{s-1} P_r(q) \ln P_r(q). \quad (3.59)$$

Con este análisis notamos la importancia del teorema de Eggleston pues nos permite hacer un puente entre dimensión de fractal y Entropía de Shannon, con esta relación es posible usar el método de Boltzmann y de esta manera encontrar satisfactoriamente el espectro de dimensiones (3.59).

Ahora busquemos una relación entre $D(q)$ y $\alpha(q)$, escribamos (3.59) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(q) &= -\frac{1}{\ln s} \sum_{r=0}^{s-1} P_r(q) [q \ln p_r - \ln Z_q] \\ &= q \left\{ \sum_{r=0}^{s-1} P_r(q) \left[-\frac{\ln p_r}{\ln s} \right] \right\} + \frac{\ln Z_q}{\ln s} \end{aligned}$$

recordando las definiciones (3.55) y (3.58) obtenemos,

$$D(q) = q \alpha(q) - \tau(q) \quad (3.60)$$

tomando la derivada de esta expresión con respecto a α ,

$$\frac{dD(q)}{d\alpha} = q + \alpha(q) \frac{dq}{d\alpha} - \frac{\tau(q)}{d\alpha} \quad (3.61)$$

usando (3.57) obtenemos,

$$\frac{dD(q)}{d\alpha} = q. \quad (3.62)$$

Mostraremos que $D(\alpha)$ y $\tau(q)$ son Transformadas de Legendre una con otra para ello tenemos que de (3.62) se tiene que $dD(q) = qd\alpha$ por lo tanto

$$d(D(q) - q\alpha) = -\alpha dq \quad (3.63)$$

por la ecuación (3.60) se obtiene la relación (3.64) que es consistente con la ecuación (3.57)

$$d\tau(q) = \alpha dq. \quad (3.64)$$

Por lo tanto $D(\alpha)$ y $\tau(q)$ son Transformadas de Legendre una de la otra que satisfacen (3.57) y (3.62), donde se utiliza una geometría de punto en la descripción $D(\alpha)$ y una geometría de línea para $\tau(q)$ [14].

Capítulo 4

Extensión del Teorema de Eggleston a Fractales Autosimilares

El Teorema de Eggleston establece la relación entre entropía y dimensión, lo que nos permite usar las ideas de Boltzmann para calcular el espectro de dimensiones para un proceso multiplicativo en términos del exponente de Holder. En este capítulo demostraremos que estos resultados pueden extenderse del intervalo unitario a cualquier estructura fractal autosimilar, gracias a que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del intervalo unitario y los puntos que conforman un fractal autosimilar, que es generado por un sistema de funciones iteradas.

4.1. Sistemas de Funciones Iteradas

Los Sistemas de Funciones Iteradas(SFI) describen la geometría fractal desde un punto de vista compatible con los sistemas dinámicos. Permiten la construcción de fractales de una forma mucho más transparente, ya que se obtienen como atractores de los SFI [3].

Los SFI están compuestos por Transformaciones Afines, que son transformaciones lineales con propiedades geométricas y algebraicas muy importantes. Para visualizar estas propiedades, consideremos una transformación afín en \mathbb{R} de la forma:

$$f(x) = a \cdot x + b \quad (4.1)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si aplicamos f a todos los puntos del intervalo unitario \mathbb{I} , obtenemos un nuevo intervalo con longitud $|a|$, donde el punto extremo a la izquierda del intervalo 0 se mueve hacia b y $f(\mathbb{I})$ estará hacia la derecha de b si $a > 0$ o hacia la izquierda si $a < 0$ (*rotado* 180°). En general, todo \mathbb{I} es estirado si $|a| > 1$ mientras que $|a| < 1$ *contrae* su longitud; es *rotado* 180° si $a < 0$ y además es *trasladado* como un todo hacia la izquierda o derecha con respecto al origen dependiendo del signo de b [9].

Una transformación afín bidimensional $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma:

$$\omega(\vec{r}) = A\vec{r} + \vec{b} \quad (4.2)$$

donde \mathbb{A} es una matriz real de 2×2 que deforma y/o rota el espacio con respecto al origen y \vec{b} un vector constante que traslada o cambia la posición.

En general, las transformaciones afines modifican la geometría de una región del plano S . En particular nos interesan las transformaciones afines contractivas, donde el término contractivo provee la propiedad de que al aplicar ω en una región S con área A_0 , se obtiene una región S_1 con área $A_1 < A_0$. Esto es, los puntos de una región son cada vez más cercanos en cuanto se aplican las transformaciones y la distancia entre dos puntos P y Q cambia de la siguiente forma:

$$\|\omega(P) - \omega(Q)\| \leq s\|P - Q\| \quad (4.3)$$

donde s es un número no negativo y se conoce como la constante de Lipschitz para ω , para $s < 1$ obtenemos las transformaciones afines contractivas o mapeos contractivos.

Los SFI están determinados por n transformaciones afines contractivas $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$ que son aplicadas a un conjunto en el plano S y con ellas se obtienen copias reducidas de S , en general con distintos factores de reducción c_i para cada ω_i . Con el conjunto de $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$ ensambladas se define el operador de Hutchinson de la siguiente forma:

$$W(S) = \omega_0(S) \cup \omega_1(S), \dots \cup \omega_{n-1}(S). \quad (4.4)$$

Hutchinson demostró que $W(S)$ es también contractivo y que para cada SFI existe un conjunto invariante ante el operador de Hutchinson[3], es decir:

$$W(F) = \omega_0(F) \cup \omega_1(F) \cup \dots \cup \omega_{n-1}(F) = F \quad (4.5)$$

donde F es el conjunto atractor del SFI, y además es un conjunto fractal. Cuando el SFI satisface que $\omega_i(F) \cap \omega_j(F) = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces se dice que F es disconexo.

4.2. Cubiertas de orden k .

El objetivo es localizar cualquier punto o región de un fractal autosimilar con el lenguaje de puntos en el intervalo unitario. Un ejemplo claro es el Triángulo de Sierpinski, donde podemos localizar subtriángulos con la ayuda del conjunto $\{0, 1, 2\}$ asignando cada elemento de este conjunto a un subtriángulo como se muestra en la figura 4.1.

Debemos conectar este lenguaje con el lenguaje de funciones iteradas, para esto necesitamos considerar el SFI que genera el Triángulo de Sierpinski, que se define de la siguiente forma:

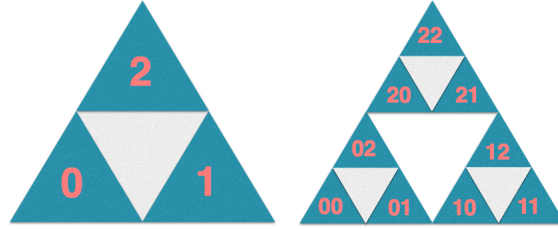


Figura 4.1: Localización de subtriángulos de Sierpinski.

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \omega_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \omega_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Aplicar las funciones iteradas (4.6) a cualquier región S del plano implica la generación de subconjuntos que cubren el atractor de este sistema, llamadas cubiertas del fractal, que son cada vez más finas y se aproximan al Triángulo de Sierpinski mientras se aplica iterativamente el operador de Hutchinson de este sistema.

En la figura 4.2 generamos subtriángulos a partir del conjunto S , por ejemplo el subtriángulo 02 se obtiene a partir de la operación $\omega_0(\omega_2(S)) = \omega_0 \circ \omega_2(S)$. Aplicando k veces el operador $W(S) = \omega_0(S) \cup \omega_1(S) \cup \omega_2(S)$ se obtienen 3^k subtriángulos, en el ejemplo de la figura el triángulo de la derecha se obtiene aplicando $k = 2$ veces, en términos del operador de Hutchinson $W_2(S)$ lo que genera 9 subtriángulos.

Esto implica que dado un conjunto fractal F podemos construir cubiertas de diferente orden S_k tal que $F \subset S_k$, es decir; S_k cubre todo el fractal autosimilar. Aplicando a S_0 las transformaciones que generan F obtenemos la cubierta S_1 que está conformada por 3 copias reducidas de S_0 etiquetadas por $\{0, 1, 2\}$ y esto forma una cubierta de primer orden de F . La cubierta S_2 se obtiene al aplicar a S_1 las tres transformaciones ω_i y son etiquetadas por $\{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ Para generar cubiertas de orden k debemos aplicar iterativamente las 3^k transformaciones $\omega_{z_k} \circ \dots \circ \omega_{z_2} \circ \omega_{z_1}(S_0)$ con $z_i = 0, 1, 2$; la secuencia de dígitos $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ localiza un cilindro de orden k .

En el ejemplo anterior se considera un conjunto de $n = 3$ funciones que construyen el Triángulo de Sierpinski. Extendiendo estas ideas para n funciones que generan un fractal, cada cubierta de orden k tiene n^k cilindros de orden k y las transformaciones $\omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \dots \circ \omega_{z_k}(S_0)$ con $z_i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ tienen secuencias de la forma $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ con $z_i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

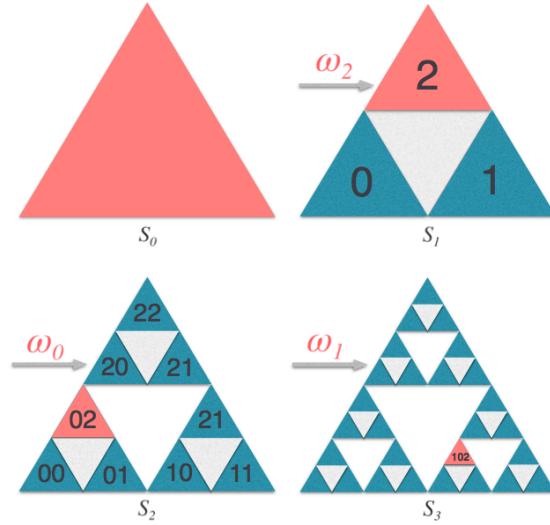


Figura 4.2: Cubiertas S_k y cilindros de orden k .

Notemos que la localización corresponde a la secuencia de dígitos debido a las transformaciones pero ordenados de derecha a izquierda, esta secuencia permite la correspondencia biunívoca entre cubiertas del fractal autosimilar disconexo F y cilindros de orden k del intervalo unitario escritos en una base 3, con las ecuaciones (2.2) y (2.3) de la sección 2.1 podemos establecer la siguiente relación:

$$C_{z_1 z_2 \dots z_k} = \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \cdots \circ \omega_{z_k}(S) \quad (4.7)$$

donde (4.7) corresponde a una cubierta de orden k para F y se cumple que

$$F \subset \bigcup_{z_1, z_2, \dots, z_k} C_{z_1 z_2 \dots z_k} = \bigcup_{z_1, z_2, \dots, z_k} \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \cdots \circ \omega_{z_k}(S) \quad (4.8)$$

4.3. Clasificación en frecuencias y el Teorema de Eggleston

La relación entre cubiertas del Fractal y cilindros de orden k permite realizar una análisis similar al desarrollado en la sección 2.2, por lo tanto para hacer la descomposición multifractal de un Fractal Autosimilar procedemos de la misma forma que lo hicimos para el intervalo unitario \mathbb{I} .

La frecuencia con la que aparece el dígito z_i en el cilindro de orden k corresponde a la frecuencia con la que es aplicada la transformación ω_{z_i} , además si la secuencia de los k dígitos es diferente, el cilindro correspondiente es distinto, esto es:

$$\begin{aligned} \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \cdots \circ \omega_{z_k}(S) \cap \omega_{z'_1} \circ \omega_{z'_2} \cdots \circ \omega_{z'_k}(S) &= \emptyset \\ \text{si } (z_1, z_2, \dots, z_k) &\neq (z'_1, z'_2, \dots, z'_k) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esto implica que la cubierta de orden k se separa en cilindros del mismo orden agrupados en conjuntos de la misma frecuencia de aparición de dígitos $\{0, 1, \dots, n-1\}$ llamados conjuntos $M_F(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ y el número de cilindros que lo conforman está determinado por la siguiente ecuación,

$$\text{Card} \{M_F(f_0(k), \dots, f_{n-1}(k))\} = f_0(k)^{-N_0} f_1(k)^{-N_1} \cdots f_{n-1}(k)^{-N_{n-1}} \quad (4.10)$$

donde (4.10) es compatible con la ecuación (2.5) que corresponde a la cardinalidad de los cilindros en el intervalo unitario.

Si consideramos que la cubierta S_0 es una esfera de diámetro Δ y el fractal F es autosimilar en una razón r , el diámetro de cada cubierta de orden k es $\Delta_k = r^k \Delta$, por lo que haciendo un análisis similar al de las ecuaciones (2.10) y (2.11), la dimensión de Hausdorff del conjunto $M_F(\vec{f}(k))$ es:

$$\text{Dim}_H M_F(\vec{f}) = -\frac{\ln \text{Card} \{M_F(f_0(k), \dots, f_{n-1}(k))\}}{\ln \Delta_k} \quad (4.11)$$

$$\text{Dim}_H M_F(\vec{f}) = \frac{1}{\ln \Delta_k} \sum_{j=0}^{n-1} (k \cdot f_j) \ln f_j = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} f_j \ln f_j}{\ln r + \frac{\ln \Delta}{k}} \quad (4.12)$$

tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene la dimensión de Hausdorff de todos los puntos del fractal F que poseen el vector de frecuencias $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\text{Dim}_H M_F(\vec{\varphi}) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j \ln \varphi_j}{\ln r} \quad (4.13)$$

y usando la expresión (1.17) que corresponde a la Dimensión de Hausdorff de un Fractal Autosimilar obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Dim}_H M_F(\vec{\varphi}) &= \frac{\text{Dim}_H F}{\ln n} \left[-\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j \ln \varphi_j \right] \\ \text{Dim}_H M_F(\vec{\varphi}) &= \frac{\text{Dim}_H F}{\ln n} S(\vec{\varphi}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

esta expresión es el Teorema generalizado de Eggleston para fractales autosimilares, que establece la relación entre la dimensión de Hausdorff de los conjuntos $M(\vec{\varphi})$ y la dimensión de Hausdorff del fractal autosimilar a través de la entropía de frecuencias $S(\vec{\varphi})$.

4.4. Multifractal Estadístico de Fractales Autosimilares

En la sección anterior realizamos la descomposición multifractal de un fractal autosimilar donde la agrupación de conjuntos fractales M_F depende sólo de la frecuencia de aparición de los dígitos de cada secuencia $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ asociada a las transformaciones ω_i .

En esta sección continuamos con el desarrollo análogo al del intervalo unitario de los capítulos 2 y 3. Demostraremos que el Teorema generalizado de Eggleston nos permite encontrar el espectro de dimensiones de un Multifractal Estadístico definido sobre un fractal autosimilar a través de la asociación de cada función del SFI con una probabilidad p_i , esto es; utilizaremos un SFI con probabilidad (SFIP), definido con el siguiente esquema finito

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

con $\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1$, por lo que una cubierta de orden k del fractal F , tiene un peso estadístico:

$$\mu \{ \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \cdots \circ \omega_{z_k}(S) \} = p_{z_1} p_{z_2} \cdots p_{z_k} = p_0^{N_0(k)} p_1^{N_1(k)} \cdots p_{n-1}^{N_{n-1}(k)}. \quad (4.16)$$

Esto nos sugiere la agrupación de los cilindros de orden k en nuevos conjuntos que contengan la información geométrica y probabilística, como se hizo en las ecuaciones (3.16) a la (3.20), la medida estadística de cada cilindro sigue la siguiente ley de escalamiento,

$$\mu \{ \omega_{z_k} \circ \omega_{z_{k-1}} \circ \cdots \circ \omega_{z_1}(S) \} = \Delta_k^{\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k}} \quad (4.17)$$

por lo que el exponente de Holder es,

$$\alpha_{z_1, z_2, \dots, z_k} = \frac{\ln [\mu \{ \omega_{z_k} \circ \omega_{z_{k-1}} \circ \cdots \circ \omega_{z_1}(S) \}]}{\ln \Delta_k} = \frac{1}{\ln r + \frac{\ln \Delta}{k}} \sum_{i=0}^{n-1} f_i(k) \ln p_i \quad (4.18)$$

esta ecuación coincide con la ecuación (3.20), en el proceso límite $k \rightarrow \infty$ obtenemos el exponente de Holder de un punto en el fractal:

$$\alpha_F(\vec{\varphi}) = \frac{1}{\ln r} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \ln p_i \quad (4.19)$$

utilizando la ecuación (1.17), se puede obtener la expresión (4.19) en términos de la dimensión de Hausdorff del fractal autosimilar. Por lo tanto, el exponente de Holder para un punto en el intervalo unitario en base $s = n$ se escribe de la siguiente forma,

$$\alpha_F(\vec{\varphi}) = -\frac{1}{\ln n} \text{Dim}_H F \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \ln p_i \quad (4.20)$$

notemos que las ecuaciones (3.22) y (4.20) están relacionadas a través de un factor de escalamiento, esto implica que el exponente de Holder del fractal autosimilar α_F es proporcional al exponente de Holder del intervalo unitario $\alpha_{\mathbb{I}}$, escrito en base $s = n$, de la siguiente forma:

$$\alpha_F(\vec{\varphi}) = \text{Dim}_H F \cdot \alpha_{\mathbb{I}}. \quad (4.21)$$

Por lo tanto la discusión que corresponde a los conjuntos $J_{\alpha_{\mathbb{I}}}$, para el multifractal estadístico definido sobre el intervalo unitario, es totalmente idéntica para el multifractal estadístico definido sobre fractales autosimilares salvo una constante de escalamiento que es la dimensión fractal del FA. De manera que, el espectro de dimensiones está dado por la ecuación:

$$D_F(\alpha) = -\frac{1}{\ln r} \text{Max} \{S(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{s-1})\} \quad (4.22)$$

donde se sigue que,

$$D_F(\alpha) = -\frac{\ln n}{\ln r} D_{\mathbb{I}}(\alpha) \quad (4.23)$$

y la razón $-\ln n / \ln r$ es la dimensión fractal del objeto autosimilar, por lo que se tiene,

$$D_F(\alpha) = \text{Dim}_H F \cdot D_{\mathbb{I}}(\alpha). \quad (4.24)$$

Notamos que (4.21) y (4.24) escalan de la misma forma a las cantidades $D_{\mathbb{I}}$ y $\alpha_{\mathbb{I}}$. Este resultado nos permite analizar la distribución multifractal definida sobre objetos autosimilares, con la ayuda del análisis multifractal realizado para el intervalo \mathbb{I} , siempre que el intervalo unitario se escriba en una base tal que coincida con el número de transformaciones del SFI que generan al fractal autosimilar en cuestión.

Discusión

Existe una estrecha relación entre la separación multifractal de intervalo unitario y la estructura multifractal de los fractales autosimilares. Si estudiamos la autosimilaridad de \mathbb{I} desde el punto de vista de los SFI, observamos que para el sistema

$$\left\{ \omega_i = r(x+i) \text{ con } r = \frac{1}{n}; i = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \quad (4.25)$$

se satisface que,

$$\mathbb{I} = W(\mathbb{I}) = \omega_0(\mathbb{I}) \cup \omega_1(\mathbb{I}) \cup \dots \cup \omega_{n-1}(\mathbb{I}) \quad (4.26)$$

por lo tanto el intervalo unitario es el fractal asociado a (4.25), es autosimilar en la razón $r = n^{-1}$ y el entero n . Para ejemplificar lo anterior consideramos el sistema (4.25) con tres funciones iteradas $\left\{ \omega_0 = \frac{x}{3}, \omega_1 = \frac{(x+1)}{3}, \omega_2 = \frac{(x+2)}{3} \right\}$ las cuales corresponden a las tres rectas paralelas de la figura 4.3. Notemos que $\omega_0(\mathbb{I}) \cup \omega_1(\mathbb{I}) \cup \omega_2(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$, esto es una cubierta de orden 1 donde cada intervalo $\{\omega_0(\mathbb{I}), \omega_1(\mathbb{I}), \omega_2(\mathbb{I})\}$ corresponde a un cilindro de orden 1. La frecuencia con la que es aplicada cada función ω_i , por ejemplo el cilindro de orden 2 que se muestra en la figura $\omega_2 \circ \omega_0(\mathbb{I})$ coincide con la secuencia 20 y el intervalo $[2/3, 7/9]$.

Para el sistema de 3 funciones iteradas un cilindro de orden k es:

$$C_{z_1 z_2 \dots z_k} = \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \circ \dots \circ \omega_{z_k}(\mathbb{I}) = \left[\sum_{i=1}^k \frac{z_i}{n^i}, \sum_{i=1}^k \frac{z_i}{n^i} + \frac{1}{n^k} \right) \text{ con } z_i = 0, 1, 2. \quad (4.27)$$

agrupamos a los cilindros de orden k en conjuntos $M(f_0(k), f_1(k), f_2(k))$ estos son generados al aplicar $n_i = 3^k \cdot f_i(k)$ veces la transformación ω_i al intervalo unitario sin importar el orden en que estas sean aplicadas. Realizando el mismo análisis de las ecuaciones (2.5), (2.7) a la (2.12), obtenemos la dimensión de Hausdorff de los conjuntos $M(\vec{\varphi})$

$$Dim_H M(\vec{\varphi}) = \frac{S(\vec{\varphi})}{\ln 3} \quad (4.28)$$

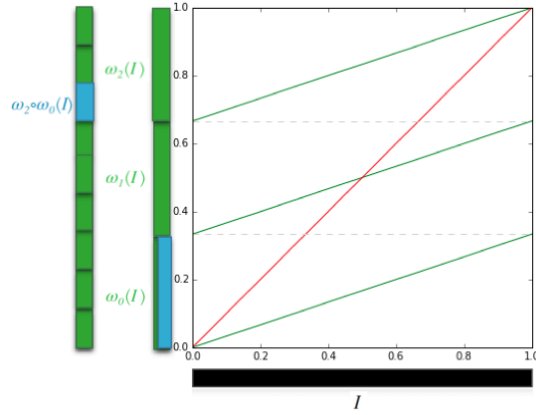


Figura 4.3: Espectro óptico para un proceso multiplicativo ternario con $p_0 = p_1 = 0,25$ y $p_2 = 0,5$.

El espectro óptico de este sistema se construye asignando un color distinto a cada conjunto $M(f_0(k), f_1(k), f_2(k))$, un ejemplo se muestra en la figura 4.4 donde hemos elegido $k = 5$, por lo tanto se tienen 3^5 cilindros de orden 5. En este espectro se muestra la estructura multifractal, ya que cada conjunto etiquetado con un color en específico tiene una dimension de Hausdorff menor que la unidad y notamos que todos los conjuntos están entretejidos entre sí. Esta descomposición multifractal, dada en términos de la frecuencia de aplicación ω_i al intervalo unitario, le llamamos Multifractal Geométrico.

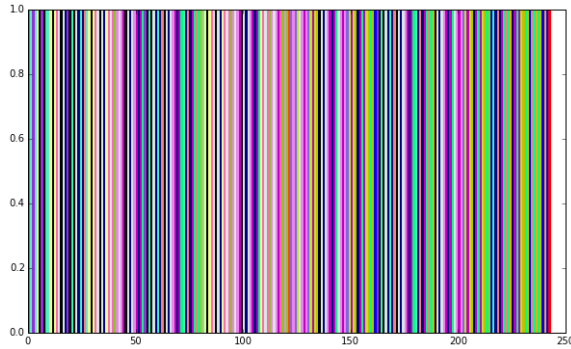


Figura 4.4: Espectro óptico del sistema (4.25) con $n = 3$ y $k = 5$.

Generalizando estos resultados para el sistema (4.25) donde se tienen n funciones iteradas, los cilindros de orden k son de la forma

$$C_{z_1 z_2 \dots z_k} = \omega_{z_1} \circ \omega_{z_2} \circ \dots \circ \omega_{z_k}(\mathbb{I}) = \left[\sum_{i=1}^k \frac{z_i}{n^i}, \sum_{i=1}^k \frac{z_i}{n^i} + \frac{1}{n^k} \right) \text{ con } z_i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4.29)$$

y se agrupan en conjuntos $M(f_0(k), f_1(k), \dots, f_{n-1}(k))$ y su dimensión de Hausdorff es:

$$Dim_H M(\vec{\varphi}) = \frac{S(\vec{\varphi})}{\ln n} \quad (4.30)$$

donde se ha seguido el mismo análisis de las ecuaciones (2.5), (2.7) a la (2.12).

Retomando el resultado de la sección 4.3, el Teorema Generalizado de Eggleston puede escribirse en términos de la ecuación (4.30), por lo tanto sustituyendo en la ecuación (4.14) tenemos

$$Dim_H M_F(\vec{\varphi}) = Dim_H F \cdot Dim_H M(\vec{\varphi}) \quad (4.31)$$

Donde el Fractal Autosimilar F es generado por un SFI de n funciones iteradas. Es clara la relación entre la dimensión de Hausdorff de los conjuntos $M_F(\vec{\varphi})$ de F y la dimensión de los conjuntos $M(\vec{\varphi})$ de \mathbb{I} , asociado al sistema (4.25) para n funciones iteradas, a través de la constante de proporcionalidad $Dim_H F$.

A continuación construiremos un Multifractal Estadístico que consiste en asignar un peso probabilístico a cada función del SFI, esto corresponde a un sistema de funciones iteradas con probabilidad SFIP, de acuerdo con la ecuación (4.15) de la sección 4.4, para el sistema (4.25) con $n = 3$ se tiene el siguiente esquema finito:

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

La ecuación anterior genera un proceso estocástico multiplicativo, con el que se puede asignar una medida estadística a cada cilindro de orden k , tal como se hizo en la sección 3.1. Por lo tanto el espectro óptico de un SFIP se grafica indicando la medida de cada cilindro en el eje de las abscisas como se muestra en la figura 4.5, donde se tienen los espectros ópticos de las cubiertas de orden $k = 1, 2, 3, 4, 5$; cada color indica una familia de cilindros de orden k , generados por (4.32) con los valores $p_0 = p_1 = 0,25$ y $p_2 = 0,5$.

Observamos que la probabilidad de cada cilindro de orden k presenta un comportamiento singular, el cual es más evidente mientras crece k como se ve en la figura 4.5(e), donde la probabilidad de algunos cilindros diverge. Este comportamiento se rige por una ley de potencias descrita en la sección 3.1, ecuación (3.16) y (3.20), donde el exponente de Holder α es una variable que contiene la información estadística y geométrica del sistema en cuestión. Es necesario caracterizar el comportamiento singular de la medida de una forma diferente, los cilindros serán agrupados de acuerdo al valor del exponente de Holder como se realizó en la sección 3.1. Haciendo un análisis completamente similar al de las ecuaciones (3.4) a la (3.50), junto con las ecuaciones (3.46) a la (3.55) y (3.59), obtenemos la expresión de $D(q)$ y $\alpha(q)$ para un el SFI (4.25) con $n = 3$ transformaciones, donde $p_0 = p_1$, las cantidades están dadas de la siguiente forma

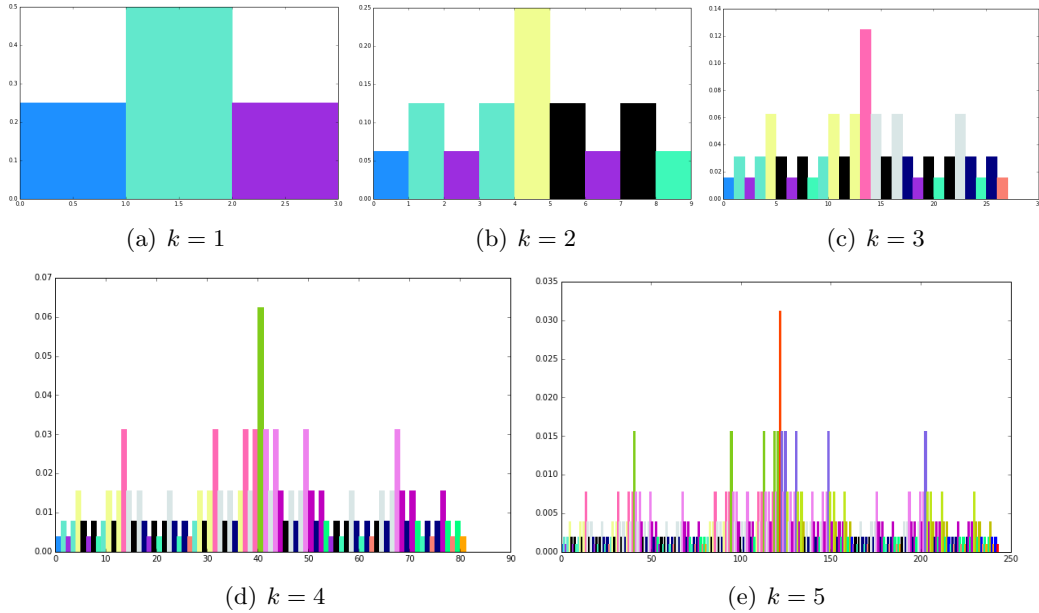


Figura 4.5: Espectro óptico del proceso multiplicativo definido por (4.32) para $n = 3$.

$$\alpha(q) = -\frac{1}{\ln 3 \cdot Z_q} [2p_0^q \ln p_0 + p_1^q \ln p_1] \tag{4.33}$$

$$D_{\mathbb{I}}(q) = -\frac{1}{\ln 3} \left[\frac{2p_0^q}{Z_q} \ln \left(\frac{p_0^q}{Z_q} \right) + \frac{p_1^q}{Z_q} \ln \left(\frac{p_1^q}{Z_q} \right) \right]$$

donde $Z_q = 2p_0^q + p_1^q$, si utilizamos los valores para las probabilidades $p_0 = 0,25$ y $p_2 = 0,5$ el espectro de dimensiones se encuentra graficando paramétricamente los pares ordenados $(\alpha(q), D(q))$ como se muestra en la figura 4.6(a).

El análisis que corresponde al proceso multiplicativo (4.32), es de gran importancia ya que nos permite visualizar que se pueden calcular los espectros ópticos y espectros de dimensiones para procesos multiplicativos de orden n , mediante un desarrollo similar al desarrollo multifractal del proceso multiplicativo ternario y calculando los pares de ecuaciones $D_{\mathbb{I}}(q)$ & $\alpha(q)$ correspondientes, que son similares a (4.33). Por lo tanto pueden extenderse las ideas del cálculo de los espectros ternarios para cualquier sistema con n funciones iteradas, por ejemplo, en las figuras 4.7 & 4.8 se muestra un proceso multiplicativo cuaternario con su respectivo espectro de dimensiones para probabilidades $p_0 = 0,3, p_1 = 0,2, p_2 = 0,4$ & $p_3 = 0,1$.

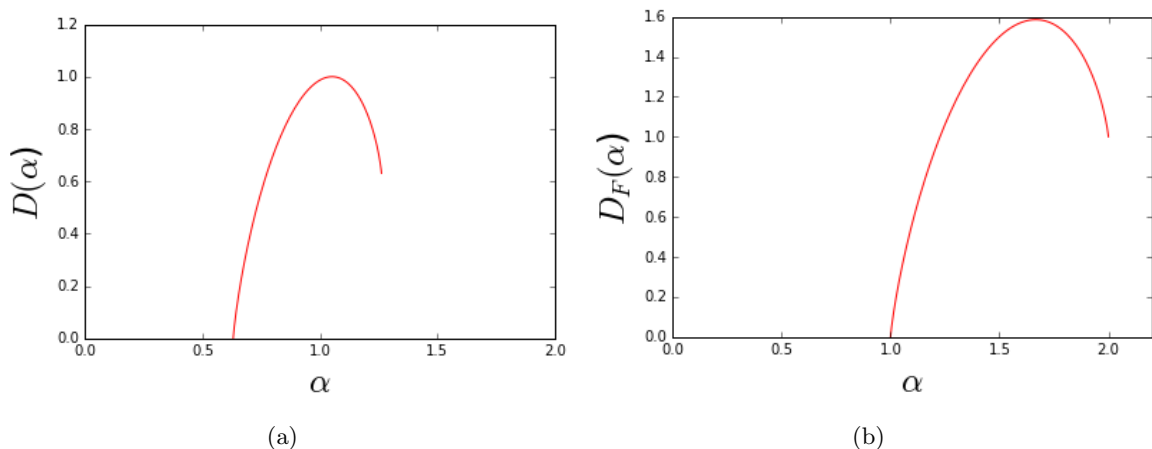


Figura 4.6: Espectro de dimensiones con probabilidades $p_0 = 0,3, p_1 = 0,2, p_2 = 0,4$ & $p_3 = 0,1$, (a) Proceso multiplicativo ternario y (b) Triángulo de Sierpinski.

El análisis de \mathbb{I} desde el punto de vista de los SFI facilita el cálculo del espectro de dimensiones de un multifractal estadístico definido sobre un Fractal Autosimilar. Por ejemplo el Triángulo de Sierpinski es generado por el sistema (4.6) con exactamente 3 funciones iteradas, entonces el espectro de dimensiones de un multifractal estadístico definido sobre este sistema, se obtiene analizando (4.25) para $n = 3$ y empleando las ecuaciones (4.33) y (4.24), por lo tanto se obtiene:

$$\alpha_F(q) = -\frac{1}{\ln 2 \cdot Z_q} [2p_0^q \ln p_0 + p_1^q \ln p_1] \quad (4.34)$$

$$D_F(q) = -\frac{1}{\ln 2} \left[\frac{2p_0^q}{Z_q} \ln \left(\frac{p_0^q}{Z_q} \right) + \frac{p_1^q}{Z_q} \ln \left(\frac{p_1^q}{Z_q} \right) \right]$$

donde hemos usado $D_F(q) = \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot D_{\mathbb{I}}(q)$, gráficamente paramétricamente este sistema de ecuaciones con los valores de probabilidad $p_0 = 0,25$, $p_2 = 0,5$ obtenemos el espectro de dimensiones para el Triángulo de Sierpinski que se muestra en la figura 4.6(b).

Donde los máximos de los espectros mostrados en las figuras 4.6(a) y 4.6(b) corresponden a la dimensión de Hausdorff de su soporte, es decir; la dimensión fractal del intervalo unitario y el Triángulo de Sierpinski respectivamente.

Si se construye un Multifractal Estadístico sobre un Fractal Autosimilar generado por n funciones iteradas, el cálculo del espectro de dimensiones radica en analizar el SFIP que genera el intervalo unitario con exactamente n funciones iteradas, por lo que el procedimiento será totalmente análogo al realizado en esta sección, utilizando los resultados de la sección 4.4.

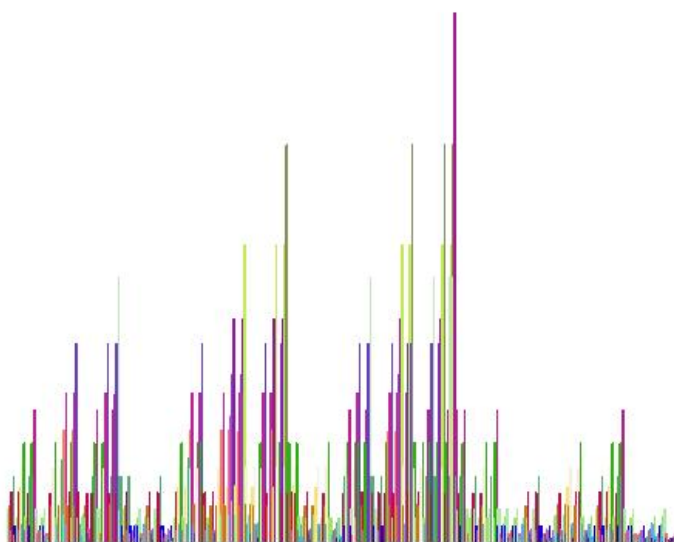


Figura 4.7: Espectro óptico de un proceso multiplicativo cuaternario con probabilidades $p_0 = 0,3$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$ & $p_3 = 0,1$.

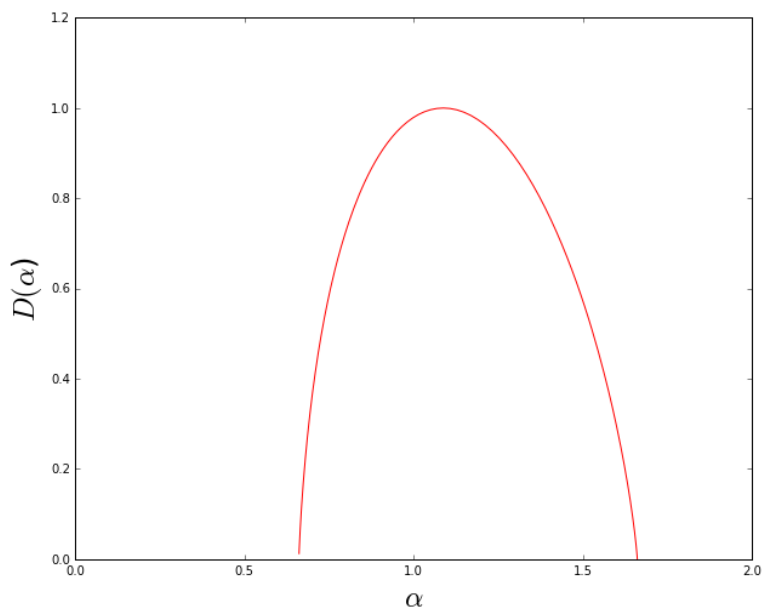


Figura 4.8: Espectro de dimensiones $D(\alpha)$ para un sistema cuaternario con probabilidades $p_0 = 0,3$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$ & $p_3 = 0,1$.

Conclusiones

En esta tesis se introducen conceptos poco comunes pero especiales, los cuales poseen un contenido muy útil e importante. La naturaleza es no-lineal, por lo tanto su estudio desde el punto de vista físico matemático es bastante complejo y requiere herramientas más sofisticadas. Los conceptos *fractal* y *multifractal* ofrecen métodos necesarios para estudiar y cuantificar sistemas que poseen estructuras '*muy fracturadas*'.

El uso de nuevas herramientas matemáticas permite posicionarse desde una nueva perspectiva, la cual nos otorga la facultad de entender y describir objetos o sistemas aparentemente indescriptibles. La estructura multifractal que presenta en el intervalo unitario, tiene una utilidad muy especial ya que nos proporciona el estudio de objetos más complejos como son los fractales autosimilares. A su vez, los fractales autosimilares pueden reproducir formas enredadas y '*caprichosas*', por ejemplo la curva de koch es un modelo para construir las costas de una isla o el fractal autosimilar que se muestra en la figura 4.9 cuya estructura reproduce una geometría similar a la que posee la rama de un pino ciprés.

En esta tesis se desarrolla la teoría multifractal para el intervalo unitario y se demuestra que el mismo método puede ser utilizado para el estudio de multifractales definidos sobre una cubierta fractal autosimilar. Por esta razón, el intervalo unitario funge como el '*caballo de batalla*' del análisis multifractal que presentamos en este trabajo.

El intervalo unitario presenta características importantes para entender la Teoría Multifractal, ya que es fácil visualizar su estructura multifractal geométrica en términos de los cilindros de orden k y de las frecuencias de aparición de los dígitos asociados a cada cilindro, como se mostró en el capítulo 2. Para multifractales estadísticos al implementar las ideas de Boltzmann, el cálculo del espectro de dimensiones se vuelve relativamente sencillo pues sólo se necesita conocer las probabilidades iniciales que conforman a un proceso multiplicativo escrito en una base dada.

Se extendieron la ideas empleadas en el intervalo unitario a Fractales Autosimilares, tanto para la descomposición multifractal geométrica como para los Multifractales Estadísticos. Con el análisis del intervalo unitario desde el punto de vista de los SFI, se obtuvieron los espectros ópticos en el lenguaje del intervalo unitario, demostrando que son exactamente iguales para los Fractales Autosimilares. Se demostró que vía el análisis de SFIP del intervalo unitario se pueden calcular los espectros de dimensiones de Multifractales Estadísticos definidos sobre una cubierta que es exactamente un Fractal Autosimilar, ya que el espectro de dimensiones del Fractal Autosimilar es proporcional al espectro de dimensiones del intervalo unitario, de manera que el máximo del espectro del intervalo unitario se escala y coincide con la dimensión

de Hausdorff del Fractal Autosimilar en cuestión.

Con esto es sencillo determinar los elementos de la Teoría Multifractal para cualquier Fractal Autosimilar, por ejemplo los conjuntos de Julia tienen una distribución multifractal similar a la del conjunto de Cantor, también es posible encontrar la distribución multifractal sobre la esponja de Menger, que tiene $n = 20$ funciones iteradas. El Fractal Autosimilar es mapeado a una línea que corresponde al intervalo unitario \mathbb{I} , el número de funciones que generan al Fractal Autosimilar corresponda con el número de funciones lineales que generen a \mathbb{I} . Para visualizar diremos que no importa la distribución geométrica del Fractal Autosimilar en \mathbb{R}^n sino sólo nos interesa el número de funciones iteradas que lo generan y la dimensión fractal del mismo. Por ejemplo podríamos analizar el espectro de dimensiones de la rama de un pino que se muestra en la figura 4.9, si conocemos el SFI que lo genera, con lo que abandonamos las ideas euclidianas de longitud o volumen de la rama y empleamos conceptos más compatibles con su naturaleza.

Existen formas, métodos y conceptos que logran aproximarse más a sistemas de la naturaleza, en esta tesis presentamos algunos de ellos. Obtuvimos un desarrollo que está en mayor armonía con los objetos que observamos con más frecuencia en la vida cotidiana, y que pretenden asemejarse a aquellas formas indescriptibles como son bosques, costas, árboles, nubes, órganos e incluso esas pequeñas líneas que yacen en nuestra piel.

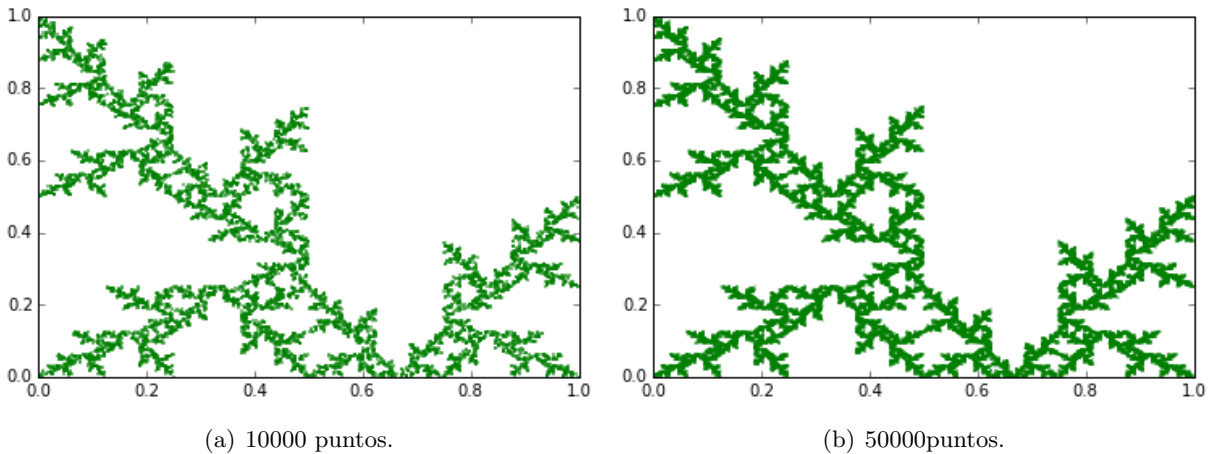


Figura 4.9: Fractal autosimilar semejante a la rama de un pino.

Bibliografía

- [1] Charles Ruhla, *The Physics of Chance*, Oxford University Press, 1992.
- [2] J.L. del Río-Correa, *Entropía de Shannon y Dimensión*, Memorias de la XV Reunión Nacional de Física y Matemáticas, 2010.
- [3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals*, Springer, 2004.
- [4] B. Mandelbrot, *La Geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets Editores, 2003.
- [5] B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f noise*, Springer, 2003.
- [6] G. Boffetta, A. Mazzino and A. Vulpani, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 363001 (25pp).
- [7] J.M. Gutierrez, M.A. Rodríguez, G. Abranson, Physica A 300 (2001) 271284.
- [8] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley, 1965.
- [9] Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1968.
- [10] Jeanett López García, *La dimensión de autosimilaridad y la dimensión de Hausdorff-Besicovich*. Ver Capítulo 3: Objetos Autosimilares. Tesis de Licenciatura. ENEP Acatlán. 1999.
- [11] H.G. Eggleston. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. Journ. Of Math. (Oxford) Vol.20, March 1949, p. 31-36.
- [12] Frish, U., *Turbulence, The legacy of A. N . Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.
- [13] Evertsz, C. J. G; Mandelbrot, B. B; *Multifractal Measures* in appendix B of *Chaos and Fractals*, H. Jürgens and D. Saupe, H. O. Peitgen, Springer Verlag, 1992.
- [14] Herbert B. Callen; *Thermodynamics* in sections 5.2, 5.3; John Wiley, 1960.

Apéndice

Se presentan los programas escritos en el lenguaje de programación *Python 3.4.3* realizados para generar los procesos multiplicativos, espectros ópticos, espectros de dimensiones binarios y ternarios.

- Espectros ópticos binarios:

```
"""
Created on Mon Jun 1 12:09:42 2015

@author: gabyzoe
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# n indica el orden de los cilindros, es decir;
# generamos cilindros de orden 8:
n = 8

# Se genera la secuencia para colorear los
# cilindros de las mismas familias:
a = [0,1]
while len(a) <= pow(2,n-1):
    list = [z+1 for z in a]
    a = a + list

# Se genera el espectro optico:
N = np.arange(0, len(a))
O = np.ones(len(a))
colors = np.random.rand(n-1)

fig = plt.figure(figsize=(10,6))
```



```
barlist=plt.bar(N, O, 0.999)

for i,j in zip(N,a):
    if j == 0:
        barlist[i].set_color('#1E90FF')
    if j == 1:
        barlist[i].set_color([ 0.3834198, 0.90848114,
                                0.80174599])
    if j == 2:
        barlist[i].set_color([ 0.61211191, 0.17806355,
                                0.87544517])
    if j == 3:
        barlist[i].set_color([ 0.94213565, 0.99380715,
                                0.56962907])
    if j == 4:
        barlist[i].set_color('k')
    if j == 5:
        barlist[i].set_color([ 0.21483641,0.97772427,
                                0.71748351,0.96437981])
    if j == 6:
        barlist[i].set_color('#FF69B4')
    if j == 7:
        barlist[i].set_color([0.85,0.9,0.9])
    if j == 8:
        barlist[i].set_color('#000080')

plt.show()

# Se agregan cifras significativas
m = 3
b= [w + m for w in a]

# Se genera el nuevo espectro optico para cilindros
# de orden 16:
fig = plt.figure(figsize=(10,6))

barlist=plt.bar(N, O, 0.999)

for i,j in zip(N,b):
    if j == 0:
        barlist[i].set_color('#1E90FF')
    if j == 1:
        barlist[i].set_color([ 0.3834198, 0.90848114,
```

```

        0.80174599])
    if j == 2:
        barlist[i].set_color([ 0.61211191, 0.17806355,
                               0.87544517])
    if j == 3:
        barlist[i].set_color([ 0.94213565, 0.99380715,
                               0.56962907])
    if j == 4:
        barlist[i].set_color('k')
    if j == 5:
        barlist[i].set_color([ 0.21483641, 0.97772427,
                               0.71748351, 0.96437981])
    if j == 6:
        barlist[i].set_color('#FF69B4')
    if j == 7:
        barlist[i].set_color([0.85,0.9,0.9])
    if j == 8:
        barlist[i].set_color('#000080')
    if j == 9:
        barlist[i].set_color('#FA8072')
    if j == 10:
        barlist[i].set_color('#DC143C')
    if j == 11:
        barlist[i].set_color('#EE82EE')
    if j == 12:
        barlist[i].set_color('m')
    if j == 13:
        barlist[i].set_color('#00FF7F')
    if j == 14:
        barlist[i].set_color('#FFA500')
    if j == 15:
        barlist[i].set_color('#FF4500')
    if j == 16:
        barlist[i].set_color('#DC143C')

plt.show()

```

- Espectros ópticos ternarios:

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""

```

Created on Thu Sep 10 12:41:52 2015

```
@author: gabydu
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Genera cilindros de orden 5 y los agrupa en familias
# del mismo color:
n = 5
u = [1,2,2]
k = [0,1,2]

while len(u)<= pow(3,n-1):
    u = u + [z+1 for z in u] + [z+1 for z in u]
    list = [i+j for i,j in zip(k,u)]
    k = k + list + [m+1 for m in list]

# Genera el espectro optico:
N = np.arange(0, len(k))
O = np.ones(len(k))

fig = plt.figure(figsize=(8,5))

barlist=plt.bar(N, O, 0.999)

for x,y in zip(N,k):
    #print("\n {0} {1}".format(x, y))
    if y == 0:
        barlist[x].set_color('#1E90FF')
    if y == 1:
        barlist[x].set_color([ 0.3834198, 0.90848114,
                               0.80174599])
    if y == 2:
        barlist[x].set_color([ 0.61211191, 0.17806355,
                               0.87544517])
    if y == 3:
        barlist[x].set_color([ 0.94213565, 0.99380715,
                               0.56962907])
    if y == 4:
        barlist[x].set_color('k')
    if y == 5:
        barlist[x].set_color([ 0.21483641, 0.97772427,
```

```
        0.71748351,  0.96437981])
if y == 6:
    barlist[x].set_color('#FF69B4')
if y == 7:
    barlist[x].set_color([0.85,0.9,0.9])
if y == 8:
    barlist[x].set_color('#000080')
if y == 9:
    barlist[x].set_color('#FA8072')
if y == 10:
    barlist[x].set_color([0.5,0.8,0.1])
if y == 11:
    barlist[x].set_color('#EE82EE')
if y == 12:
    barlist[x].set_color('m')
if y == 13:
    barlist[x].set_color('#00FF7F')
if y == 14:
    barlist[x].set_color('#FFA500')
if y == 15:
    barlist[x].set_color('#FF4500')
if y == 16:
    barlist[x].set_color([0.5,0.4,0.9])
if y == 17:
    barlist[x].set_color([0.75,0.9,0.1])
if y == 18:
    barlist[x].set_color('y')
if y == 19:
    barlist[x].set_color('b')
if y == 20:
    barlist[x].set_color('r')
```

- Espectros ópticos ternarios con probabilidad:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
```

```
Created on Thu Sep 10 15:21:08 2015
```

```
@author: gabydu
```

```
"""
```

```
import numpy as np
```

```

import matplotlib.pyplot as plt

# Genera cilindros de orden 5:
n = 5
u = [1,2,2]
k = [0,1,2]

while len(u)<= pow(3,n-1):
    u = u + [z+1 for z in u] + [z+1 for z in u]
    list = [i+j for i,j in zip(k,u)]
    k = k + list + [m+1 for m in list]

# Genera el proceso multiplicativo ternario:
po=float(input('Escribe la probabilidad para los ceros'))
p1 = 1 -2*po
p2 = po
area = [po,p1,p2]
while len(area)<= pow(3,n-1):
    A = [z*po for z in area]
    B = [z*p1 for z in area]
    C = [z*p2 for z in area]
    area = A + B +C

N = np.arange(0, len(k))

# Genera el espectro optico con probabilidades:
fig = plt.figure(figsize=(8,5))

barlist=plt.bar(N, area, 0.999)

for x,y in zip(N,k):
    if y == 0:
        barlist[x].set_color('#1E90FF')
    if y == 1:
        barlist[x].set_color([ 0.3834198, 0.90848114,
                                0.80174599])
    if y == 2:
        barlist[x].set_color([ 0.61211191, 0.17806355 ,
                                0.87544517])
    if y == 3:
        barlist[x].set_color([ 0.94213565, 0.99380715,
                                0.56962907])
    if y == 4:

```

```
        barlist[x].set_color('m')
if y == 5:
    barlist[x].set_color([ 0.21483641,  0.97772427,
        0.71748351,  0.96437981])
if y == 6:
    barlist[x].set_color('#FF69B4')
if y == 7:
    barlist[x].set_color([0.85,0.9,0.9])
if y == 8:
    barlist[x].set_color('#000080')
if y == 9:
    barlist[x].set_color('#FA8072')
if y == 10:
    barlist[x].set_color([0.5,0.8,0.1])
if y == 11:
    barlist[x].set_color('#EE82EE')
if y == 12:
    barlist[x].set_color('m')
if y == 13:
    barlist[x].set_color('#00FF7F')
if y == 14:
    barlist[x].set_color('#FFA500')
if y == 15:
    barlist[x].set_color('#FF4500')
if y == 16:
    barlist[x].set_color([0.5,0.4,0.9])
if y == 17:
    barlist[x].set_color([0.75,0.9,0.1])
if y == 18:
    barlist[x].set_color('y')
if y == 19:
    barlist[x].set_color('b')
if y == 20:
    barlist[x].set_color('r')
```

- Espectro de dimensiones binario:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
```

Created on Thu Nov 19 15:36:05 2015

@author: gabyzoe

```
"""
```

```

from sympy import *
from sympy.plotting import plot_parametric
q = symbols('q')

# Se eligen las probabilidades:
p0=0.25

x=-(1/log(2))*((pow(p0,q)*log(p0)/(pow(p0,q) +
    pow(1-p0,q)))+(pow(1-p0,q)*log(1-p0)/(pow(p0,q) +
    pow(1-p0,q))))

y=-(1/log(2))*((pow(p0,q)*log(pow(p0,q)/(pow(p0,q) +
    pow(1-p0,q)))/(pow(p0,q) + pow(1-p0,q)))+(
    pow(1-p0,q)*log(pow(1-p0,q)/(pow(p0,q) +
    pow(1-p0,q)))/(pow(p0,q) + pow(1-p0,q))))

# Grafica parametricamente el par (x,y):
plot_parametric(x, y, (q, -100, 500),
    line_color=(1,0.6,0), xlim=(0,2),
    ylim=(0,1.2), xlabel=r'\alpha')

```

- Espectro de dimensiones ternario:

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Sep 17 19:45:21 2015

@author: gabyzoe
"""

from sympy import *
from sympy.plotting import plot_parametric
q = symbols('q')

# Se eligen las probabilidades:
p0=0.25
p1=0.5

x=-(1/(log(3)*(2*pow(p0,q) + pow(p1,q))))*

```

```

(2*pow(p0,q)*log(p0)+pow(p1,q)*log(p1))
y=-(1/(log(3)*(2*pow(p0,q) + p1**q)))*
(2*pow(p0,q)*log(pow(p0,q)/(2*pow(p0,q)+pow(p1,q)))
+pow(p1,q)*log(pow(p1,q)/(2*pow(p0,q)+pow(p1,q))))

# Grafica parametricamente el par (x,y):
plot_parametric(x, y, (q, -100, 500),
                line_color=(1,0.6,0),xlim=(0,1.5),
                ylim=(0,1.1),xlabel=r '$\alpha$',
                ylabel=r '$D(\alpha)$')

```

- Construcción del fractal autosimilar semejante a la rama de un pino:

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Feb 24 14:09:16 2016

@author: gabyzoe
"""

from numpy import *
import pylab

x = [0, 0];

# Matrices de reduccion y rotacion:
A = [ [.5, 0], [0, .5] ]
R1= [ [0, -1], [1, 0] ]
R2= [ [-1, 0], [0, 1] ]

# Vectores de traslacion:
b1 = [0.5, 0]
b2 = [1, 0]
b3 = [0, .5]

# Comienza el proceso iterativo:
for i in range(500):
# Genera numeros al azar (1,2,3):
r = fix(random.rand()*3)
if r==0:
x = dot(dot(A,R1),x)+b1
if r==1:

```



```
x = dot(dot(A,R2),x)+b2
if r==2:
    x = dot(A,x)+b3
# Grafica cada punto y genera el fractal:
pylab.plot(x[0],x[1], 'g.', markersize=1)

pylab.show()
```