



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

**Diseño y verificación experimental de un estimador no lineal de composiciones en una columna de destilación binaria a partir de mediciones de temperatura.**

Tesis que para obtener el grado de  
Maestro en Ingeniería Química  
presenta:

I.Q. Carlos Rubén Fernández Zavala

Asesor:

Dr. Jesús Alvarez Calderón

**Diseño y verificación experimental de un  
estimador no lineal de composiciones en una  
columna de destilación binaria a partir de  
mediciones de temperatura.**

Tesis que para obtener el grado de  
Maestro en Ingeniería Química  
presenta:

I.Q. Carlos Rubén Fernández Zavala.

Diciembre de 1996.

*A Marcia*  
*con cariño*

---

## ***Agradecimientos:***

Deseo expresar mi agradecimiento a mi asesor de tesis, el Dr. Jesús Alvarez Calderón, por sus enseñanzas y consejos que son fundamentales no solo para la realización de este trabajo sino también en mi formación como investigador.

También quiero agradecer a los integrantes del jurado:

Dr. Enríque Saldivar Guerra.

Dr. Jesús Alvarez Calderón.

M. en C. Francisco López-Serrano Ramos.

M. en C. Carlos Martínez Vera.

A mis compañeros y profesores, gracias por su amistad y apoyo que me han brindado.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología CONACyT, por el financiamiento de mis estudios de maestría.

## Indice:

### Capítulo 1:

1.1 Introducción	1-2
1.2 Objetivos	1-3
1.3 Estructura del trabajo	1-5

### Capítulo 2:

Sistema experimental y su caracterización dinámica	2-1
2.1 Antecedentes	2-2
2.2 Sistema de estudio	2-3
2.3 Dinámica de la columna ante cambios en escalón	2-7
2.3.1 Desarrollo experimental	2-8
2.4 Comparación de los estados estacionarios calculados con los experimentales	2-11
2.5 Respuesta en cada etapa del sistema	2-13
2.5.1 Cambios en la temperatura de alimentación	2-13
2.5.2 Cambios en la relación de reflujo	2-15
2.5.3 Cambios en la composición de la alimentación	2-18
2.6 Sumario	2-21

### Capítulo 3:

Modelo matemático para una columna de destilación	3-1
3.1 Antecedentes	3-2
3.2 Modelado de la columna de destilación	3-3
3.2.1 Ecuaciones de plato	3-5
3.2.2 Plato de alimentación	3-8
3.2.3 Evaporador	3-9

3.24 Condensador	3-10
3.3 Estrategia de solución del modelo	3-11
3.4 Estudio del comportamiento dinámico en base al modelo	3-15
3.4.1 Ajuste de los parámetros hidráulicos	3-15
3.4.2 Sintonización del control de nivel	3-19
3.4.3 Comparación contra datos experimentales	3-20
3.4.4 Modelo con líquidos retenidos constantes (sin dinámica hidráulica de plato)	3-23
3.4.5 Modelo con termodinámica ideal	3-26
3.5 Sumario	3-29

#### Capítulo 4:

Diseño de un estimador no lineal de composiciones para una columna de destilación	4-1
4.1 Antecedentes	4-2
4.2 Construcción de un estimador de estados	4-3
4.2.1 Derivación del estimador y su esquema de sintonización	4-5
4.2.1.1 Dinámica del error de estimación (parte observable)	4-7
4.3 Evaluación del jacobiano del mapa de detectabilidad	4-10
4.4 La dinámica no observable	4-16
4.5 Selección de la ubicación de las mediciones	4-18
4.6 Construcción de las ganancias	4-20
4.7 Desempeño del estimador	4-22
4.7.1 Estimador con una medición de temperatura	4-22
4.7.2 Estimador con dos mediciones de temperatura	4-27
4.7.3 Estimador con dos mediciones de temperatura y con errores en las condiciones de operación	4-31

4.8 Sumario

4-35

Conclusiones

Bibliografía

Apéndices:

A Nomenclatura

B Diagramas de ebuliición y de equilibrio

C Parámtros del modelo

D Ganancias para el estimador

---

## ***Capítulo 1***

### **Introducción**

En este primer capítulo se muestra la justificación para abordar el tema objetivo de la presente tesis, posteriormente se proporciona la identificación de la problemática a estudiar, los objetivos a cumplir y la organización del presente trabajo.



## 1.1 Introducción.

Una parte importante de los procesos de separación en la ingeniería química, está relacionada con el problema de modificar la composición de soluciones y mezclas mediante métodos que no impliquen necesariamente reacciones químicas. El proceso de separación denominado destilación, es una de las operaciones unitarias básicas más importantes de la industria química. Permite separar los componentes de una mezcla líquida en productos puros mediante la evaporación parcial de la mezcla y de la subsiguiente recuperación del vapor y el líquido restante.

Por otro lado la estructura de los procesos químicos ha llegado a ser cada vez más compleja, necesitando un mejor manejo de los flujos de materiales y de energía. Como consecuencia el diseño de sistemas de control para procesos constituye ahora el punto central de interés de los ingenieros químicos más que diseñar controles para simples operaciones unitarias

Los modelos reportados en la literatura orientados a control de columnas de destilación por etapas generalmente no toman en cuenta la hidráulica de la columna. Sin embargo, la dinámica del flujo de líquido, y en menor grado la del flujo de vapor, juegan un papel muy importante en la transmisión de las perturbaciones en la columna. En este trabajo se propone un modelo para la hidráulica de la columna basado en la ecuación de Francis. Este modelo se prueba en una columna de destilación a escala laboratorio, ajustando los parámetros del modelo con los datos experimentales. El modelo dinámico de la columna incluyendo la dinámica de los flujos se valida con los resultados experimentales. Como no todos los estados de la columna son igualmente accesibles se construye un observador para estimar las composiciones a partir de mediciones de temperatura.

Los estudios de control para columnas de destilación con técnicas convencionales, que usan modelos de función de transferencia, toman en cuenta

implícitamente la dinámica de la hidráulica de plato. Sin embargo, estas técnicas no permiten estudiar la naturaleza de las estructuras de observación y control. Por otro lado, los métodos que emplean técnicas avanzadas (es decir, basadas en la estructura de observabilidad y controlabilidad) han sido poco utilizadas para columnas de destilación, y los estudios que se han hecho, ignoran la dinámica de la hidráulica de plato. En este trabajo, utilizamos técnicas no lineales para estudiar la estructura de observación de la columna para diseño de un observador no lineal, que es más simple que el típico filtro extendido de Kalman, y que no sólo aplica para sistemas completamente observables. Se establece que la hidráulica juega un papel importante en el problema de dinámica y control de la columna. Se encuentra que basta una medida de temperatura para detectar las composiciones en toda la columna, siempre y cuando se incluya un reconstructor para la dinámica de la hidráulica, que corresponde a la dinámica no observable de la columna. La aseveración anterior se interpreta con un modelo de primeros principios y se valida con experimentos de laboratorio.

## **1.2 Objetivos.**

Los objetivos generales de este trabajo son:

- \* Conocer y profundizar el comportamiento de una columna de destilación.
- \* Demostrar la importancia de los fenómenos involucrados en la hidráulica de plato.
- \* Estudiar el problema de inferencia de composiciones dentro de la columna, a partir de mediciones de temperatura.

Para logra estos objetivos se desarrollaron las siguientes actividades:

a.- Desarrollo de un modelo construido a partir de primeros principios (conservación de masa, energía, termodinámica e hidráulica), que es adecuado para algoritmos de control (lineal en términos de dinámica entrada salida).

b.- Ajuste y validación del modelo de composiciones contra experimentos dinámicos.

En estas primeras actividades se comprende la importancia de modelar el comportamiento de los flujos internos de la columna al igual que los cambios del líquido retenido en cada etapa. Estos fenómenos tienen una dinámica aproximadamente dos veces más rápida que la dinámica de las composiciones y tiene gran influencia en ésta. Sin embargo no hay forma de medir los flujos internos dentro de la columna de destilación. Es por ello que surge la necesidad de desarrollar un modelo corregido con innovaciones.

c.- Análisis de observabilidad del sistema para resolver el problema de inferencia de composiciones.

d.- Desarrollo de algoritmos en línea, para inferir las concentraciones a partir de mediciones de temperatura.

e.- Implementación del estimador de estados al caso de estudio y verificación del desempeño de este.

Se realizaron pruebas para evaluar el comportamiento del esquema propuesto para los siguientes casos: tiempos de respuesta, cambios en estados iniciales de operación, errores en los parámetros del modelo, respuesta a perturbaciones en las variables de entrada.

### 1.3 Estructura del trabajo.

En el capítulo 2 se hace una descripción de los experimentos realizados en este trabajo. Se tomó como caso de estudio una columna de destilación continua para mezclas binarias. La columna experimental es de doce etapas (diez platos, evaporador y una sección de alimentación) con un condensador total. También se hace un análisis de los tiempos de respuesta del sistema y se calculan las funciones de transferencia de cada etapa.

En el capítulo 3, a partir de balances de materia se modeló el comportamiento dinámico del sistema. Los parámetros de hidráulica se ajustaron con datos experimentales obtenidos en el sistema experimental.

El modelo desarrollado logra reproducir correctamente los estados estacionarios inicial y final, bajo los cuales se ajustaron los parámetros de éste, ante un cambio en escalón de la relación de reflujo. Consecuentemente, en el cambio de un estado estacionario a otro, la trayectoria dinámica es reproducida. Sin embargo no logra buenos resultados para todas las condiciones de operación. Basta cambiar las condiciones finales para obtener un tercer estado estacionario, y el modelo no tendrá desempeño correcto. Se obtiene una desviación entre la predicción del modelo y el estado estacionario final real.

En seguida en el siguiente capítulo se diseña un estimador de estados basado en la retroalimentación de una medición de temperatura. Con esta medición de temperatura el nuevo modelo con observador, converge asintóticamente en la medición, ocasionando que las composiciones a lo largo de la columna, converjan también asintóticamente. Se desarrolló el estimador de estados con retroalimentación de una y de dos temperaturas. Por otro lado se hace un análisis sencillo para la ubicación del punto de medición en la columna.

## ***Capítulo 2***

### **Sistema Experimental y su Caracterización Dinámica.**

En este capítulo se hace la descripción del equipo experimental utilizado en este trabajo. Los experimentos desarrollados tienen como propósito proveernos de un marco teórico - experimental para hacer un diagnóstico de las características básicas de la dinámica del proceso. Esto con la finalidad de tener un punto de partida adecuado para tratar nuestro problema de estimación de estados. En particular se aplican cambios en escalón en las entradas de la columna (relación de reflujo, composición y temperatura de alimentación, suministro de calor), que son suficientemente grandes para inducir estados transitorios con cambios apreciables.

## 2.1 Antecedentes.

El proceso de separación denominado destilación es una de las operaciones unitarias básicas más importantes de la industria química. Permite separar los componentes de una mezcla líquida en productos puros, mediante la evaporación parcial de la mezcla y de la subsiguiente recuperación del vapor y el líquido restante. Esta operación es posible en cuanto la mayor parte de la mezcla líquida, emita vapores con concentración diferente de la del líquido inicial. (Treybal, 1980).

En las columnas de destilación se establece una contracorriente de líquido - vapor de la mezcla líquida, discontinua en el caso de las columnas de platos o continua para las de relleno (columnas empacadas). El contacto de las dos fases da lugar a un intercambio de componentes; los más volátiles se acumulan en la fase de vapor que sale por la parte superior de la columna, mientras que los más pesados pasan a la fase líquida, que se extrae por el fondo de la misma. Podemos identificar cinco zonas diferentes dentro de un equipo de destilación, que son (Stephanopoulos, 1984):

- A) *Zona de alimentación*: Es la zona donde se introduce la mezcla líquida de composición conocida del componente más volátil, que hay que separar.
- B) *Sección de agotamiento*: Es la zona inferior a la zona de alimentación que provoca el empobrecimiento de componente más volátil.
- C) *Sección de rectificación*: Es la zona que favorece al enriquecimiento del componente más volátil.
- D) *Hervidor ó Evaporador*: En esta parte de la columna se provee la carga térmica necesaria para hacer ebullición la mezcla líquida, la cuál produce la fase vapor dentro del sistema.
- E) *Condensador*: En esta zona se condensan los vapores procedentes de la última etapa de contacto de la columna, produciendo dos corrientes líquidas: una es el reflujo, que favorece el contacto a contracorriente de las fases líquido vapor; y la otra es el producto destilado.

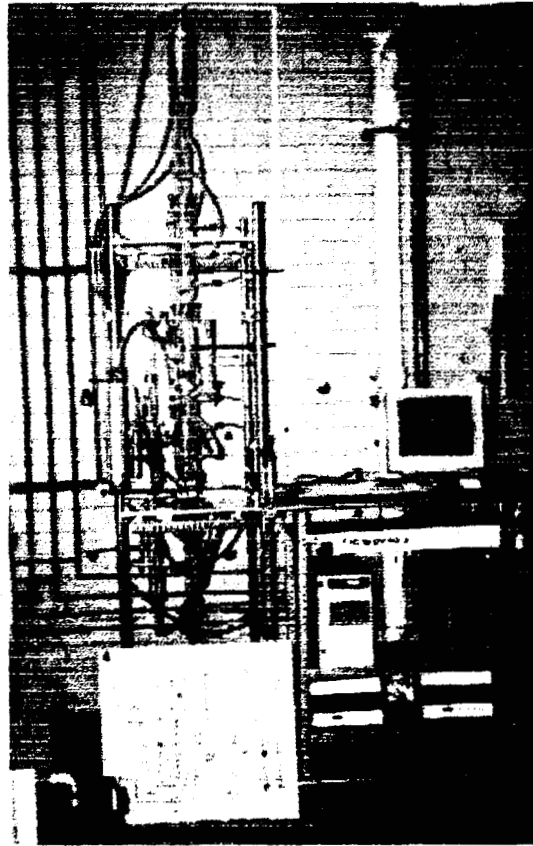


Figura 2.1: Sistema experimental.

## 2.2 Sistema de estudio.

La prueba experimental de esta tesis se realizó en una columna de destilación continua a escala laboratorio, modelo IC18-DV/92, marca Didacta. Al realizar este estudio se utilizaron sus accesorios de destilación de mezclas líquidas binarias. Se montaron las secciones de platos perforados tipo *oldershow* (figura 2.1). Esta consiste en dos secciones formadas por cinco platos y separadas por una sección de alimentación. La sección superior es la sección de rectificación o enriquecimiento; así la sección por debajo de la alimentación es la sección de agotamiento. También se utilizó un control electrónico para el suministro de energía requerido, un sistema de lectura de temperaturas con 12 termo resistencias, y un control de relación de retiro/reflujo automático de destilación (figura 2.2). Los plato para su identificación

fueron numerados de abajo hacia arriba. Se midió la temperatura en los platos 10 (plato superior), 8, 6, 5, 3 y 1(plato junto al evaporador); además de la temperatura de alimentación, en el condensador y evaporador (figura 2.4).

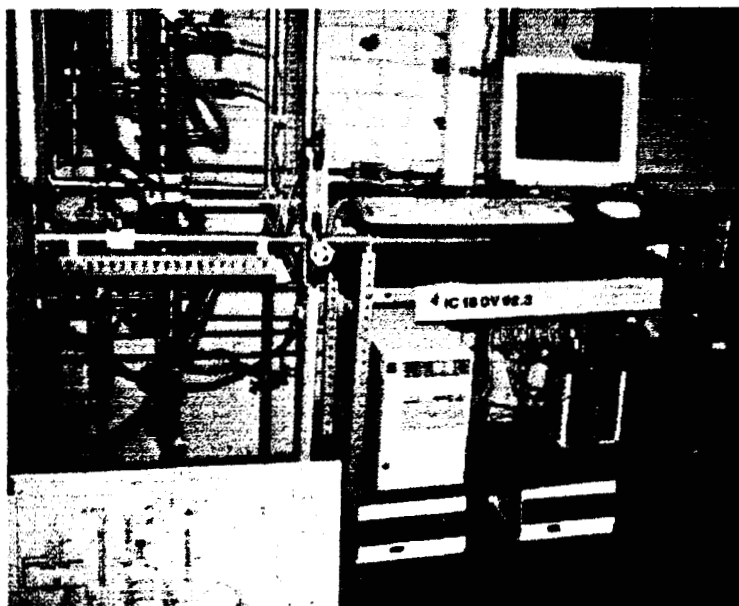


Figura 2.2: Equipo de control.

La columna esta diseñada para operación continua. La destilación de la mezcla líquida seleccionada debe ser llevada a cabo entre 60° a 105° C, por lo que en la siguiente tabla se muestran posibles mezclas líquidos que pueden ser separadas en este equipo:

Compuesto más volátil	Compuesto menos volátil
Benceno	Tolueno **
N-Heptano	N-Octano
Cloroformo	Tricloro Etileno
Acetona	Metanol
Etanol	Agua
Metanol	Agua

Tabla 2-A: Sistemas binarios propuestos para ser destilados en el equipo experimental (\*\* Poco recomendable).



El sistema líquido seleccionado para realizar este trabajo fue Metanol - Agua. Esto debido a que es un sistema muy estudiado y cuyos parámetros termodinámicos son conocidos.

Para poder aplicar cambios correctamente cuantificados, a la columna de destilación, se diseñó un sistema auxiliar de alimentación, con dos depósitos (figura 2.3). Este se utilizó en el experimento de cambio de composición y para el de cambio de temperatura de alimentación.

A continuación se da una breve descripción de la operación de la columna. Este procedimiento de operación se divide en cinco etapas: a) preparación para el arranque; b) arranque; c) seguimiento y operación normal; d) paro normal; e) paro de emergencia.

*Preparación para el arranque:*

- \* Verificación del equipo
- \* Verificación de servicios: energía eléctrica, agua de enfriamiento.
- \* Cierre de válvulas.
- \* Preparación de mezclas

*Arranque.*

- \* Llenar depósito de alimentación.
- \* Abrir llave de agua de enfriamiento.
- \* Carga de mezcla inicial al evaporador
- \* Control de suministro de calor:
  - Ajustar la temperatura de calentamiento en evaporador.
  - Ajustar la temperatura de calentamiento en prealimentador.
  - Iniciar calentamiento (con reflujo total)
- \* Una vez alcanzadas las temperaturas fijadas:
  - Iniciar alimentación.
  - Dar el valor de reflujo deseado.
  - Hacer funcionar bomba de fondos, con flujo adecuado.

*Seguimiento y operación normal*

- \* Inspeccionar la operación.

- \* Verificación del funcionamiento de bombas.
- \* Ajuste de la operación.
- \* Verificación de:
  - Condiciones de operación
    - Temp. del evaporador y temp. del prealimentador.
    - Presión en la columna.
    - Flujo de alimentación y de fondos.
  - Equipo
    - Inspeccionar:
      - Bombas
      - Depósitos de mezcla a destilar.
      - Agua de enfriamiento

*Paro Normal*

- \* Parar el suministro de calor.
- \* Parar bombas de alimentación, recirculación y bomba de fondos.
- \* Descargar la columna cuando el líquido este frío.
- \* Cerrar la llave de agua de enfriamiento

*Paro de Emergencia*

- \* Parar el suministro de calor.
- \* Parar bombas.
- \* Informarse donde es la emergencia y la gravedad de ésta.

Una descripción más amplia del equipo y su operación se presenta en el trabajo de Nieves (1993).

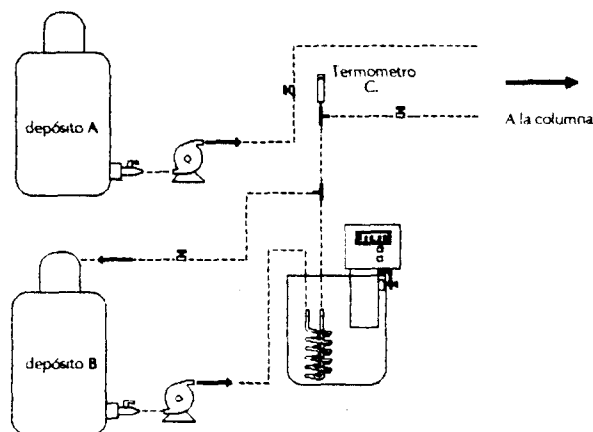
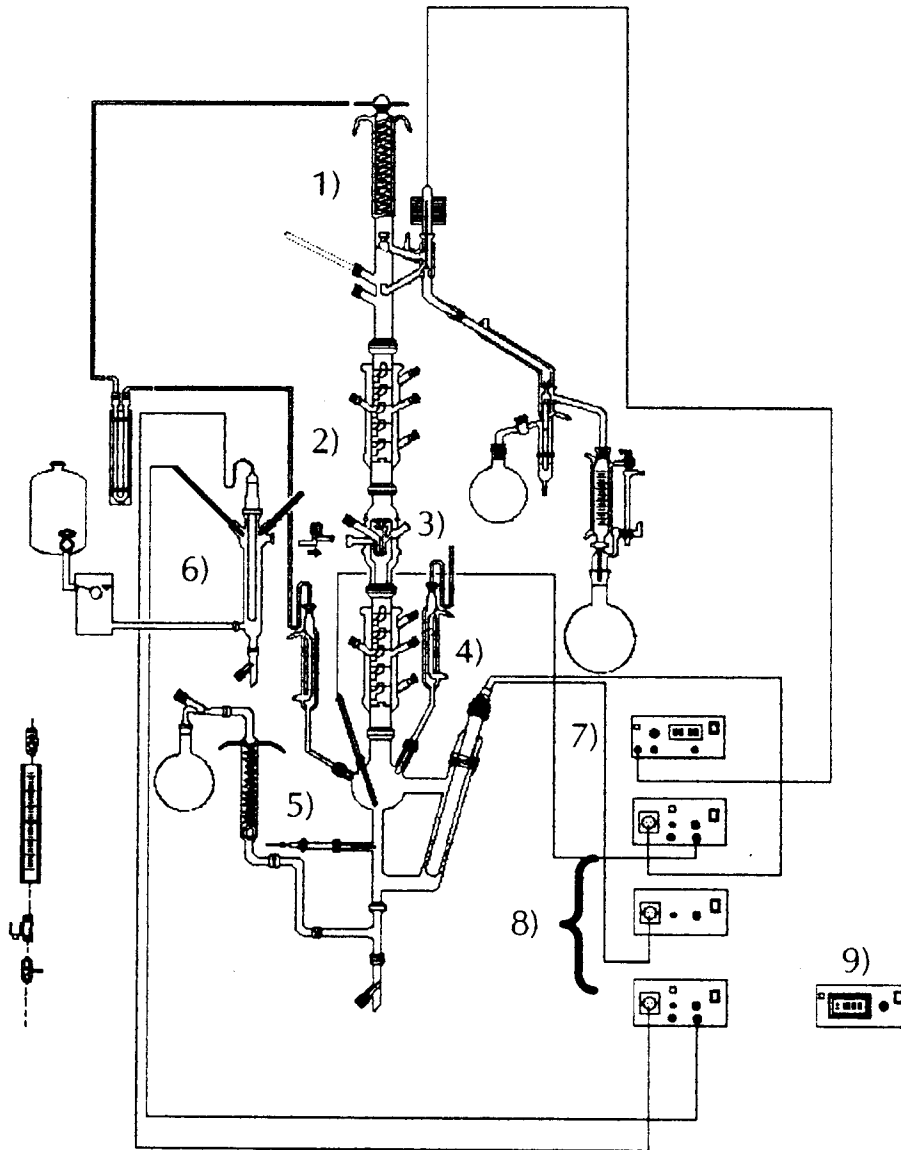


Figura 2.3: Sistema Auxiliar de alimentación.



**Figura 2.4:** Sistema experimental; 1) Condensador; 2) Sección de enriquecimiento; 3) Zona de alimentación;  
4) Sección de agotamiento; 5) Evaporador; 6)Prealimentador; 7) Control de Reflujo; 8) Control de suministro de Calor; 9) Sistema digital de Temperaturas .

### 2.3 Dinámica de la Columna ante cambios en escalón.

Para determinar el comportamiento dinámico de esta columna de destilación se observó la evolución de la temperatura en varios platos de la columna, en el

evaporador y en el condensador, así como la composición del destilado y del producto de fondo. Esto ante diversos cambios tipo escalón en las condiciones de operación. El comportamiento dinámico de una columna de destilación puede ajustarse a una respuesta de primer orden (Skogestad y Morari, 1988). Sin embargo, al sistema se le aplicaron cambios considerables por lo que su comportamiento se aproximó a una respuesta de segundo orden sin tiempo de retardo. Siendo el objetivo de este capítulo determinar los tiempos de asentamiento y la ganancia del sistema, para calcular los tiempos característicos ( $\tau$ , *Período natural* de oscilación del sistema), la ganancia estática ( $K_p$ ) y el factor de amortiguamiento ( $\xi$ ), para un sistema de segundo orden. El tiempo de asentamiento es el tiempo que tarda la respuesta en llegar a ciertos límites preestablecidos del valor final y permanecer dentro de ellos. Dichos límites son arbitrarios, y el valor utilizado para este trabajo fue de 98%.

La ecuación diferencial que describe este comportamiento es la siguiente:

$$\tau^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dx}{dt} + x = K_p u(t) \quad (2.1)$$

donde  $x(t)$  es la trayectoria de la variable en estudio a lo largo del tiempo, cuando se le aplica un cambio  $u(t)$  al sistema. En el estado estacionario inicial tenemos que  $x(0)=x_0$  y  $u(0)=u_0$ .

### 2.3.1 Desarrollo Experimental.

Se realizaron varios experimentos para conocer la respuesta de la columna, donde se alcanzaba un estado estacionario, y después se aplicaba un cambio tipo escalón. Para todos los experimentos se empezó con el mismo juego de condiciones iniciales para tratar de comenzar en el mismo estado estacionario. Los experimentos que se realizaron fueron: a) aplicando un cambio escalón en la temperatura de alimentación, b) aplicando un cambio en la relación de reflujo, c) aplicando un cambio en la composición de alimentación y, d) aplicando un cambio en el suministro de calor.

*a) Cambio en la temperatura de alimentación:*

El primer experimento que se realizó fue el de cambio en la temperatura de alimentación (figura 2.5). Se seleccionaron condiciones iniciales de un estado estacionario de baja separación, de tal manera que se pudieran apreciar los cambios debidos a la modificación de la temperatura de alimentación. Estos valores se pueden ver en la Tabla 2-B.

Para el experimento de la figura 2.5.a se utilizó el sistema auxiliar de alimentación (figura 2.3). Con el depósito A, se alimentó inicialmente al prealimentador de la columna, y mientras se estabilizaba la columna, se hacia reciclar el contenido del depósito B a través de un serpentín para mantenerlo a una temperatura constante de 57 °C. Una vez que se estabilizó el equipo, y se estaba trabajando en un estado estacionario, se procedió a aplicar la perturbación en la temperatura de alimentación. El efecto producido por el cambio de temperatura en la alimentación, fue monitoreado en ambas secciones de la columna.

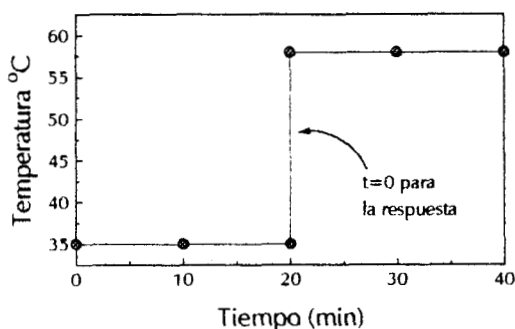
Gráfica	figura 2.5.a	figura 2.5.b	figura 2.5.c
Temperatura de alimentación ( °C.)	35	45	25
Composición de alimentación (% molar)	40	40	20
Temperatura del Evaporador ( °C.)	76	82	82
Relación de reflujo.	0.22	0.22	0.22

**Tabla 2.B:** Condiciones iniciales de los experimentos.

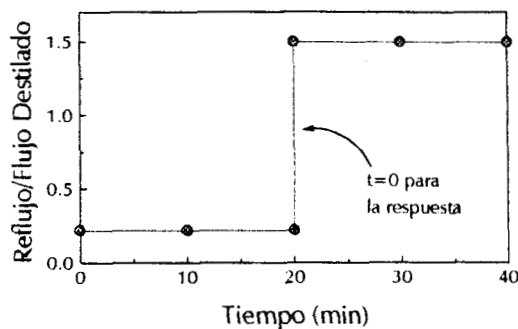
*b) Cambio en la relación de reflujo*

En el experimento de cambio de relación de reflujo, se utilizó desde el principio el sistema auxiliar de alimentación, debido a que es más estable que el prealimentador original de la columna. Alcanzando el estado estacionario (aproximadamente en 60 min.) se procedió a cambiar la relación de reflujo en el control correspondiente (figura

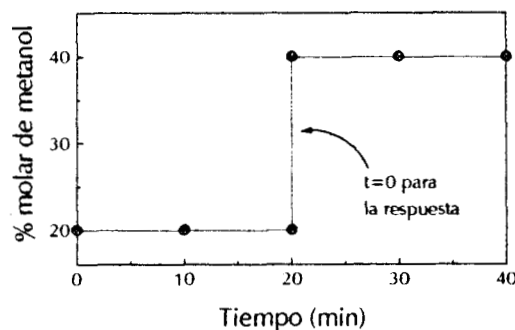
2.4, punto 7). El cambio en la relación de reflujo fue de 0.22 a 1.5, y este cambio afectó notablemente a la sección de enriquecimiento.



a)



b)



c)

**Figura 2.5:** Excitación del sistema mediante entradas en escalón

a) Cambio en la temperatura de alimentación de 35 a 57 °C.

b) Cambio en la relación de reflujo de 0.22 a 1.5

c) Cambio en la composición de alimentación del 20 al 40% molar de metanol.

*c) Cambio en la composición de alimentación:*

Finalmente se realizó el experimento de cambio de composición de la alimentación. Inicialmente se utilizó el depósito A (figura 2.4), para estabilizar al sistema, conteniendo una mezcla con una composición del 20 % molar de metanol. Después de que se alcanzó el estado estacionario se usó el depósito B para aplicar la perturbación, conteniendo una mezcla con una composición del 40 % molar de metanol.

*d) Cambio en el suministro de calor:*

El caso de estudio donde se variaba el calor suministrado, no se logró terminar debido a que no se pudo aplicar el cambio en escalón, en el control de suministro de calor de la columna (figura 2.3, punto 6). Debido a que el cambio en éste era muy lento.

## **2.4 Comparación de los estados estacionarios calculados con los experimentales.**

Para verificar que la columna estaba en estado estacionario, y que después de aplicar el cambio en alguna variable de operación, se alcanzó un nuevo estado estacionario, se utilizó el programa MicroCHESS: *Chemical Engineering Simulation System* para realizar los cálculos de los estados estacionarios inicial y final.

Este programa calcula las composiciones del producto destilado y de fondos, así como el perfil de temperaturas en la columna. Los obtiene en estado estacionario, a partir de las condiciones de operación.

La opción termodinámica seleccionada en este programa fue UNIFAC con ecuación de Antoine. Y se utilizó la presión atmosférica de la ciudad de México.

En las siguientes gráficas se aprecia que los valores calculados coincidieron razonablemente con los experimentales. De esta manera comprobamos que los experimentos iniciaron en un estado estacionario, y llegaron a otro después de aplicar el cambio en escalón.

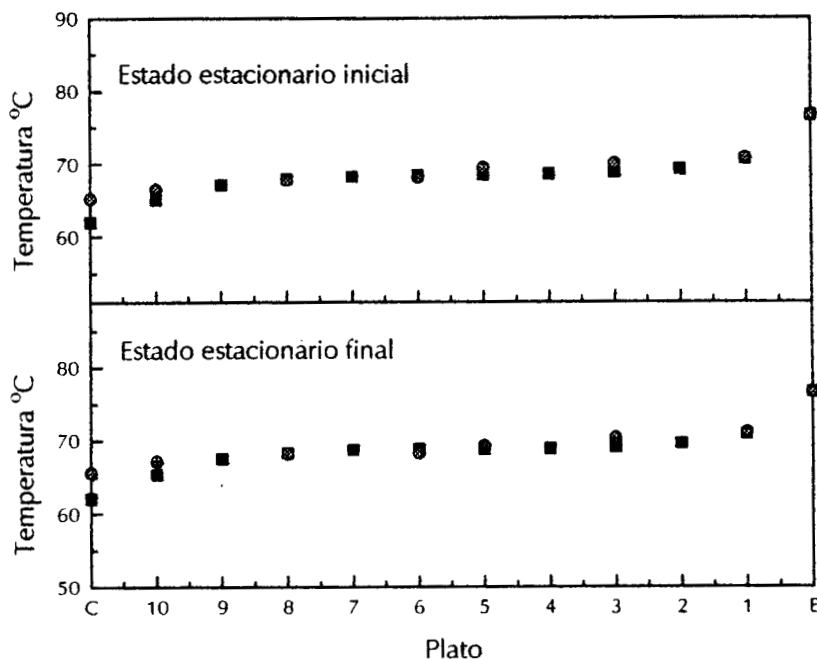


Figura 2.6). Comparación de los perfiles experimentales de temperatura ( ● ) con valores calculados ( ■ ), para los estados estacionarios, antes y después del cambio en la temperatura de alimentación.

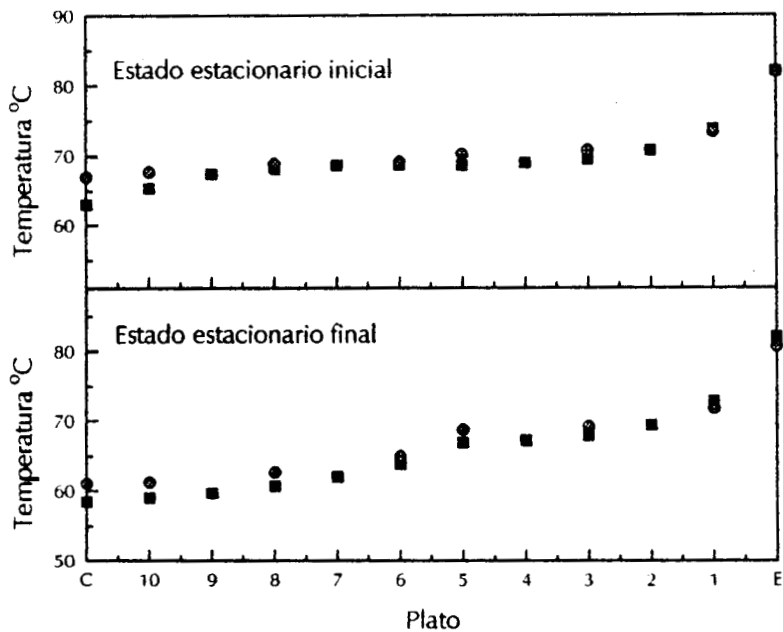


Figura 2.7). Comparación de los perfiles experimentales de temperatura ( ● ) con valores calculados ( ■ ), para los estados estacionarios, antes y después del cambio en la relación de reflujo.



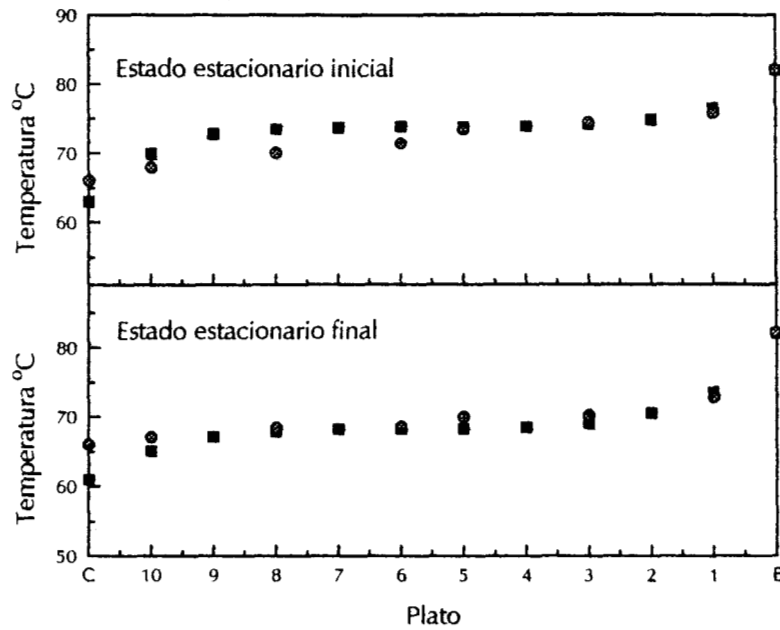


Figura 2.8). Comparación de los perfiles experimentales de temperatura ( ● ) con valores calculados ( ■ ), para los estados estacionarios, antes y después del cambio en la composición de la alimentación.

## 2.5 Respuestas en cada etapa del sistema.

### 2.5.1 Cambio en la temperatura de alimentación.

El efecto del cambio de temperatura en la alimentación fue despreciable, en las condiciones de operación seleccionadas. El sistema fue insensible a un cambio de 25°C. Esto es debido a que la cantidad de calor suministrada por el aumento de temperatura en el flujo de alimentación es muy pequeño comparado con el suministro de calor de la bujía de calentamiento.

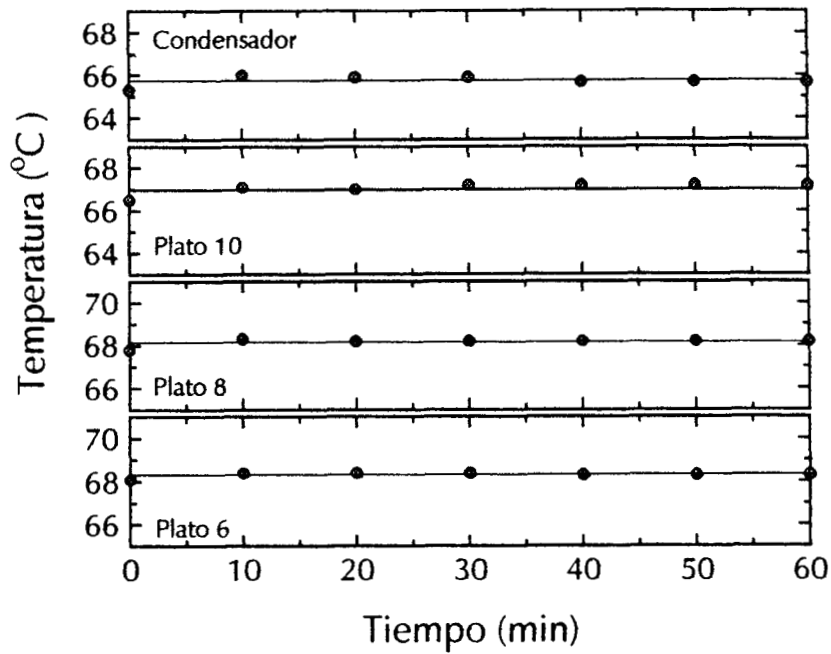


Figura 2.9: Respuesta dinámica en la sección de rectificación ante un cambio en la temperatura de alimentación:  
 Datos experimentales (●) comparados con una línea de referencia (- - -).

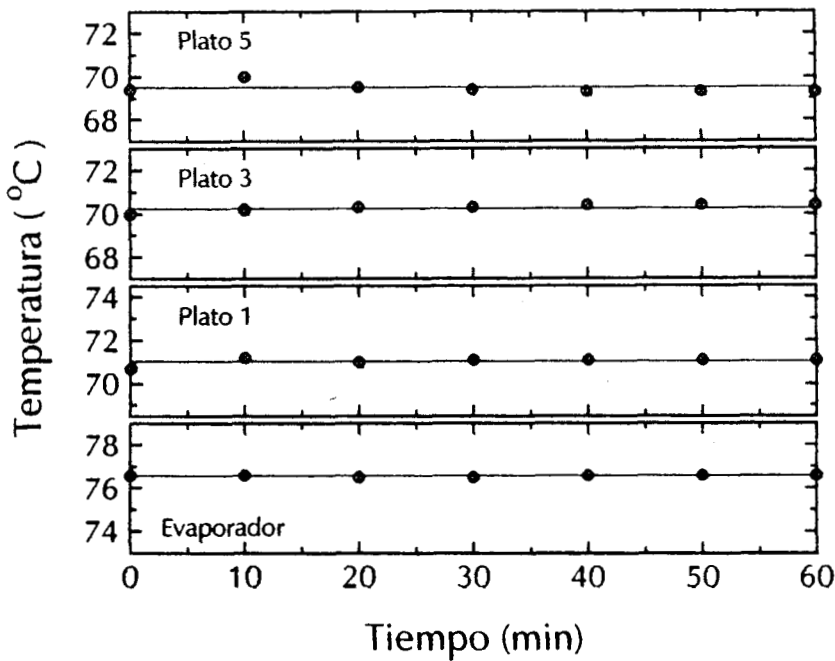
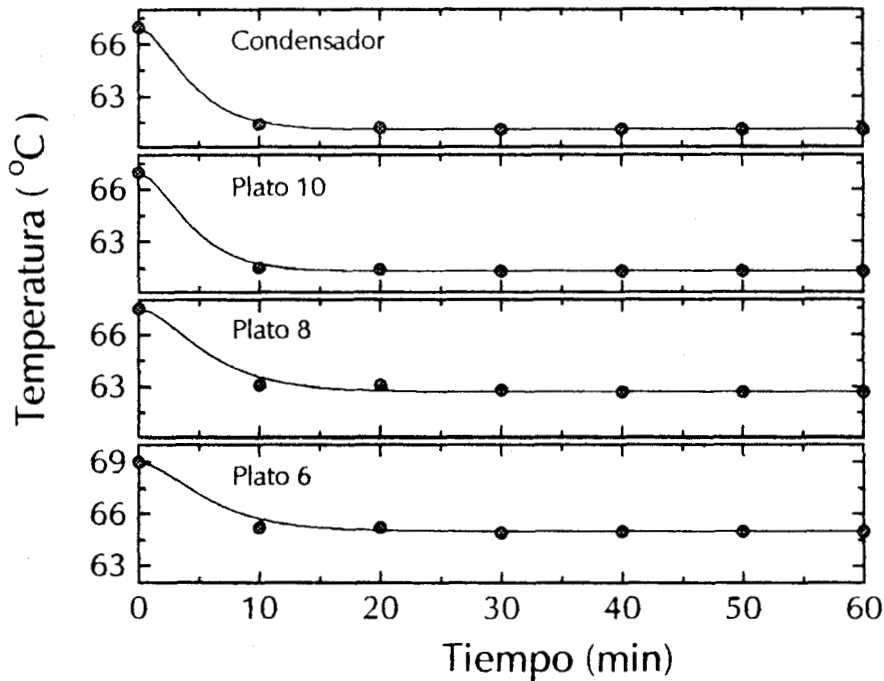


Figura 2.10: Respuesta dinámica en la sección de agotamiento ante un cambio en la temperatura de alimentación:  
 Datos experimentales (●) comparados con una línea de referencia (- - -).

### 2.5.2 Cambio en la relación de reflujo.

El cambio de la relación de reflujo aumentó la cantidad de metanol en el flujo descendente de la sección de enriquecimiento, es por ello que afectó notablemente a las etapas superiores (Condensador y Plato 10). La disminución de temperatura se debe a que la cantidad excedente de alcohol (debida al aumento en la recirculación), sustrae calor al evaporarse nuevamente. También se produjeron los cambios más rápidos en el condensador y plato 10. El cambio de relación de reflujo ocasionó que el volumen de líquido retenido por plato en la sección de rectificación, aumentara al doble. Este cambio de volumen fue aproximadamente dos veces más rápido que la dinámica de temperaturas y composiciones. En la sección de agotamiento los cambios de volumen fueron pequeños.



**Figura 2.11:** Respuesta dinámica en la sección de rectificación ante un cambio en la relación de reflujo:  
 Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

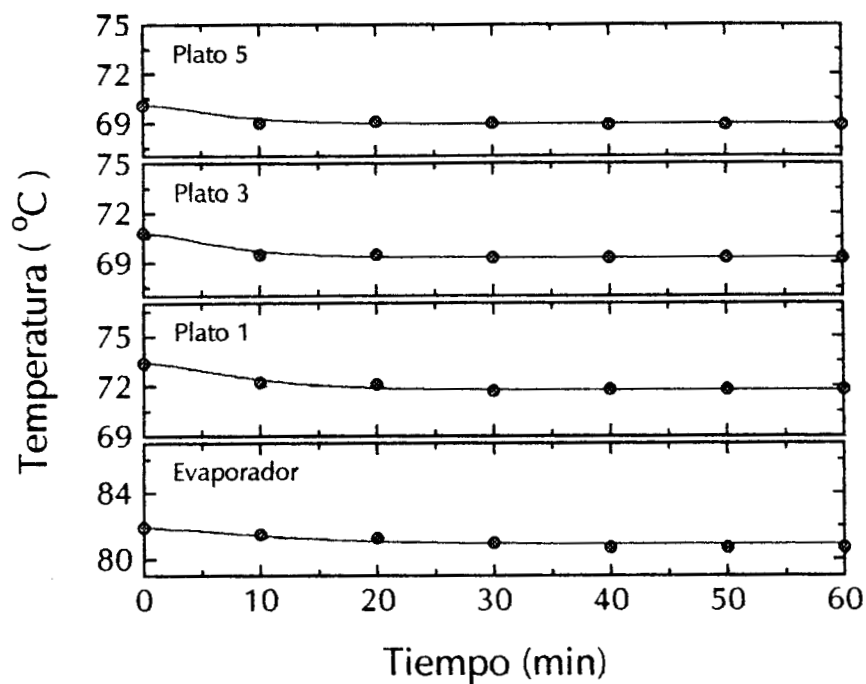


Figura 2.12: Respuesta dinámica en la sección de agotamiento ante un cambio en la relación de reflujo: Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

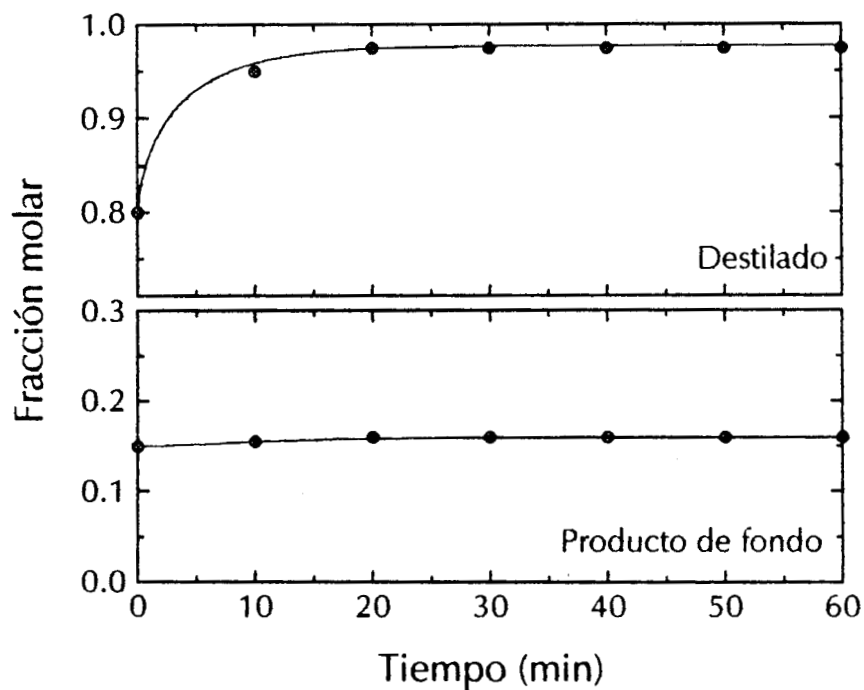


Figura 2.13: Respuesta dinámica en la sección de agotamiento ante un cambio en la relación de reflujo: Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

Para calcular los parámetros de la ecuación (2.1) se utilizaron las siguientes expresiones:

$$T_a = \frac{4\tau}{\xi} \quad k_p = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (2.2)$$

donde  $T_a$  es el tiempo de asentamiento,  $\Delta y$  es la magnitud del cambio en la salida,  $\Delta u$  es la magnitud del cambio aplicado al sistema. La respuesta de una función de transferencia de segundo orden a un cambio en escalón, se expresa con la siguiente ecuación:

$$Y(s) = \frac{\Delta u K_p}{s(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} \quad (2.3)$$

La Tabla 4-C. presenta los tiempos de asentamiento, y ganancias del sistema. En ella podemos observar como tiene un menor tiempo de asentamiento el condensador y el plato 10, así como un mayor cambio en la temperatura. Siendo prácticamente insensible el evaporador de la columna.

Etapa	Valor inicial (°C)	$T_a$ (min)	$\Delta y$ (°C)	$\Delta u$	$\xi$	$\tau$ (min)	$K_p$ (°C)
Condensador	67.0	10	-5.9	1.28	1.00	2.5	-4.61
Plato 10	67.0	10	-5.7	1.28	1.00	2.5	-4.45
Plato 8	67.5	15	-4.8	1.28	0.95	3.5	-3.75
Plato 6	69.0	15	-4.0	1.28	0.95	3.5	-3.13
Plato 5	70.1	20	-1.15	1.28	0.95	4.7	-0.90
Plato 3	70.8	20	-1.5	1.28	0.95	4.7	-1.17
Plato 1	73.4	25	-1.65	1.28	0.95	6.0	-1.29
Evaporador	81.9	30	-1.0	1.28	0.95	7.1	-0.78

**Tabla 2-C:** Valores de los parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden ante cambios en la relación de reflujo.

La siguiente tabla muestra los valores de los parámetros de las funciones de transferencia para el destilado y producto de fondos.

Etapa	Valor inicial (% molar)	$T_a$ (min)	$\Delta y$ (%molar)	$\Delta u$	$\xi$	$\tau$ (min)	$K_p$ (% molar)
Destilado	80	10	18	1.28	1.00	2.5	14.06
Fondos	15	30	1	1.28	0.95	7.1	0.78

**Tabla 2-D:** Valores de los parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden ante cambios en la relación de reflujo.

### 2.5.3 Cambio en la composición de la alimentación.

La sección intermedia de la columna fue la parte más afectada por el cambio en la composición de alimentación, esto puede apreciarse en el comportamiento de los platos 5 y 6 (figuras 2.13 y 2.14). Disminuyendo el efecto en el Condensador y el Evaporador. De la misma manera que en el inciso anterior, se determinaron los tiempos característicos y las ganancias del sistema. Estos valores se muestran en las tablas 4-E y 4-F. La sección de agotamiento tuvo cambios más grandes que la sección de rectificación. Mientras que el cambio más grande de temperatura en la sección de rectificación fue de aproximadamente 2.5 °C, en la sección de agotamiento se tuvo un cambio promedio de 3.6 °C. La etapa más sensible fue el plato 3, con un cambio de temperatura de 4.5 °C. El cambio en la composición de alimentación no ocasionó cambios apreciables en los volúmenes de líquido retenido por plato.

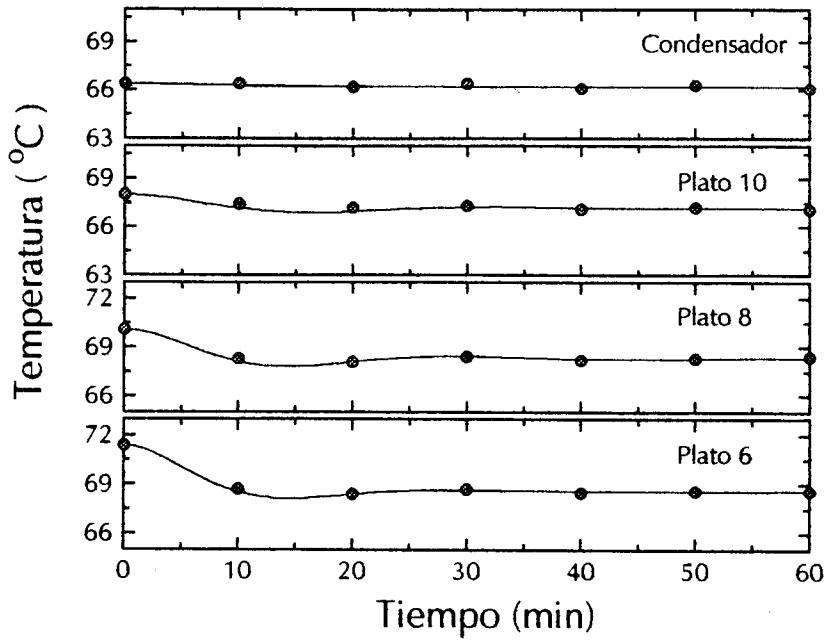


Figura 2.14 Respuesta dinámica en la sección de rectificación ante un cambio en la composición de alimentación:  
 Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

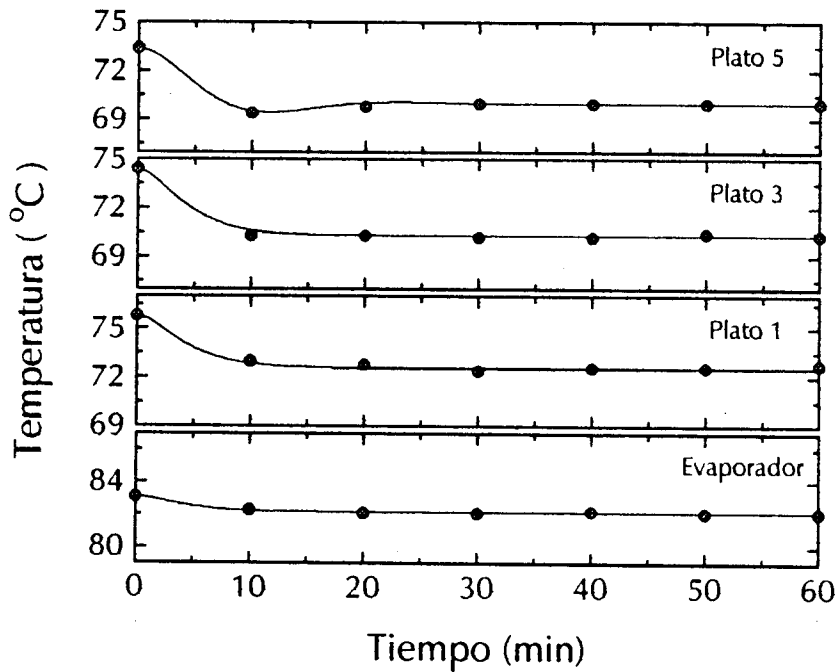


Figura 2.15: Respuesta dinámica en la sección de agotamiento ante un cambio en la composición de alimentación.  
 Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

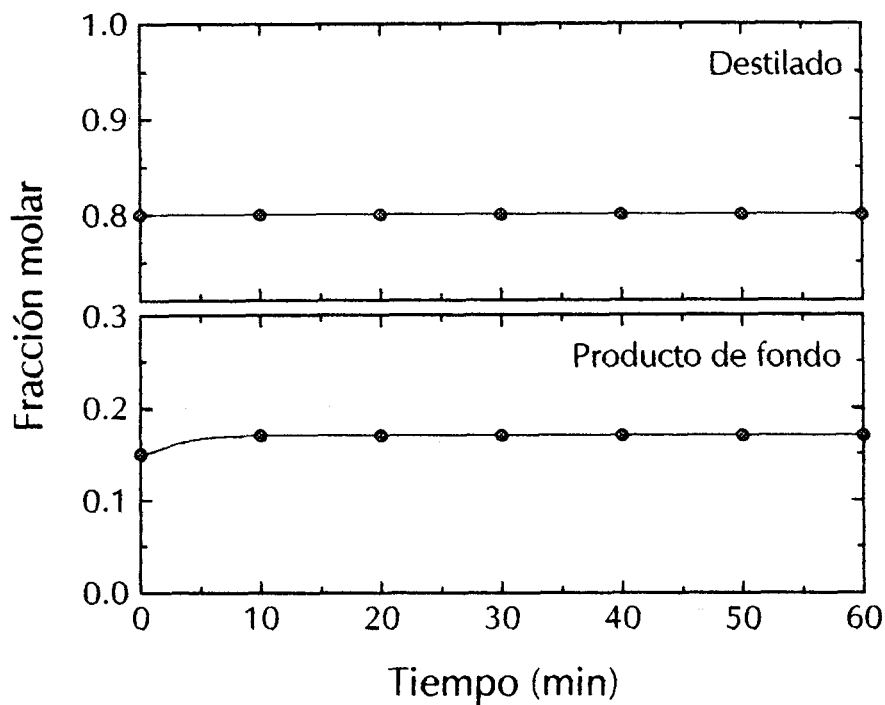


Figura 2.16: Respuesta dinámica en la sección de agotamiento ante un cambio en la composición de alimentación. Datos experimentales (●) comparados con su respectiva función de transferencia (—).

Etapa	Valor inicial (°C)	$T_a$ (min)	$\Delta y$ (°C)	$\Delta u$ (% molar)	$\xi$	$\tau$ (min)	$K_p$ (°C/%mol)
Condensador	66.4	-	-0.3	20	-	-	-
Plato 10	68.0	30.	-0.85	20	0.5	3.8	-0.0425
Plato 8	70.1	30	-1.8	20	0.5	3.8	-0.090
Plato 6	71.4	25	-2.8	20	0.5	3.2	-0.14
Plato 5	73.4	20	-3.4	20	0.5	2.5	-0.17
Plato 3	74.4	10	-4.1	20	1	2.5	-0.205
Plato 1	75.8	10	-3.2	20	1	2.5	-0.16
Evaporador	83.1	10	-0.95	20	1	2.5	-0.0475

Tabla 2-E: Valores de los parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden ante cambios en la composición de alimentación.



Etapa	Valor inicial (% molar)	$T_a$ (min)	$\Delta y$ (%molar)	$\Delta u$ (% molar)	$\xi$	$\tau$ (min)	$K_p$
Destilado	80	-	1	20	-	-	-
Fondos	15	10	2	20	1	2.5	0.1

**Tabla 2-F:** Valores de los parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden ante cambios en la composición de alimentación.

## 2.6 Sumario

En este capítulo se desarrolló un modelo a partir de funciones de transferencia. Describe la dinámica de temperaturas dentro de la columna y composiciones de los productos destilado y de fondos a partir de ecuaciones de segundo orden.

Como era de esperarse, ante cambios en la relación de reflujo, las etapas más sensibles fueron las de la región de enriquecimiento. En cambios en el suministro de calor se tienen que las etapas más sensibles son de la sección de agotamiento (Waller, 1991). La temperatura de plato 1 (plato próximo al evaporador), prácticamente no responde ante la variación de la razón de reflujo. Pero sí responde ante cambios en el suministro de calor, siendo el plato más sensible. De esta manera, la temperatura del plato 10 (plato cercano al condensador), tampoco responde apreciablemente ante cambios en la razón de vapor, sin embargo es la etapa más sensible ante cambios en la relación de reflujo. Ante cambios en la composición de la alimentación, ambos extremos de la columna sufren cambios igualmente considerables.

Por cada cambio posible en las condiciones de operación hay una función de transferencia. La estructura de estas funciones de transferencia dependerá del cambio en sí, de la magnitud del cambio y de la etapa en la que se obtiene. Mediante estas funciones empíricas se puede desarrollar un estimador, sin embargo una forma más fundamentada se describe en los siguientes capítulos. Con las funciones de transferencia se tiene capacidad predictiva, es decir identificando el cambio en el sistema y midiendo su magnitud, se infiere la composición del producto destilado.

El objetivo de este capítulo era obtener evidencia experimental que nos permitiera conocer la dinámica de la columna. Se observó que la dinámica hidráulica era aproximadamente dos veces más rápida que la de composiciones y temperaturas. Los cambios de volumen en los líquidos retenidos por plato se efectuaron entre 5 y 10 minutos; mientras que los cambios de composición y temperatura por etapa se dieron entre 15 y 30 minutos. Es decir primero se estabiliza la hidráulica y después se alcanza un estado estacionario en composiciones.

Esta información es un preámbulo necesario para el ajuste del estimador desarrollado en el capítulo cuatro.

## ***Capítulo 3***

### **Modelo Matemático para una Columna de Destilación.**

Un estimador está formado por un modelo del proceso y la retroalimentación de algunas mediciones. Por ello, en el presente capítulo se construye un modelo matemático a partir de balances de materia, que fundamente y simule el comportamiento dinámico de la columna experimental de destilación binaria. El sistema se modela por veinticuatro variables de estado que son las concentraciones y líquidos retenidos por etapa. Fundamentalmente porque la hidráulica juega un papel importante en el problema de dinámica y control de la columna. Se considera una columna como la descrita en el capítulo anterior, de diez platos con condensador total y hervidor con termo resistencia.

### 3.1 Antecedentes:

Los modelos dinámicos de columnas de destilación se encuentran entre los modelos de control más complejos que hay, para una sola unidad de operación (Nisenfeld, 1981). Esto se debe a la gran cantidad de etapas que conforman a la columna de destilación, que tienen un comportamiento fuertemente no lineal y altamente interactivo; además de las limitaciones físicas de equipos de medición y control. Modelos rigurosos para este tipo de proceso ya han sido desarrollados (Choe y Luyben, 1987), pero los balances de los fluidos retenidos por etapa, rara vez son utilizados en modelos para control avanzado (Alsop y Edgar, 1990; Lang y Gilles, 1990; Deza y col., 1992) donde suponen que la cantidad retenida de líquido en cada etapa, se mantiene constante.

Cuando se desarrolla un control basado en funciones de transferencia (con parámetros ajustados empíricamente), de una manera implícita se considera el efecto de la dinámica hidráulica (Georgiou y col., 1988; Cingara y Jovanovic, 1990; Lee y Morari, 1992), pero no se cuenta con un marco conceptual riguroso que fundamente la técnica de control.

### 3.2 Modelado de la columna de destilación.

A continuación se considera una columna de destilación con las características del sistema experimental en estudio, con un condensador total, un hervidor con termo resistencia, diez platos tipo *oldershow* y una sección de alimentación. Se tiene interés en la respuesta de la composición de los productos  $c_D$  y  $c_B$  (destilado y fondos) a lo largo del tiempo. Las variables manipuladas son el suministro de calor al hervidor y la razón de destilación de producto. La razón de reflujo se maneja mediante una válvula solenoide, con la cual se manipula el flujo de destilado y el reflujo a la columna. Se supone que la presión en la columna no cambia apreciablemente, y que es

esencialmente constante desde la parte baja hasta la parte alta, es decir, la caída de presión entre un plato y otro es despreciable (la caída de presión global en la columna experimental es de 0.5 cm de Hg).

A pesar de que únicamente se tiene interés en la composición y las razones de las corrientes del producto, éstas dependen de las condiciones en los platos, el evaporador y el condensador, por lo cual se deben escribir todos los balances de masa, relaciones de termodinámica y de hidráulica, para resolverse simultáneamente.

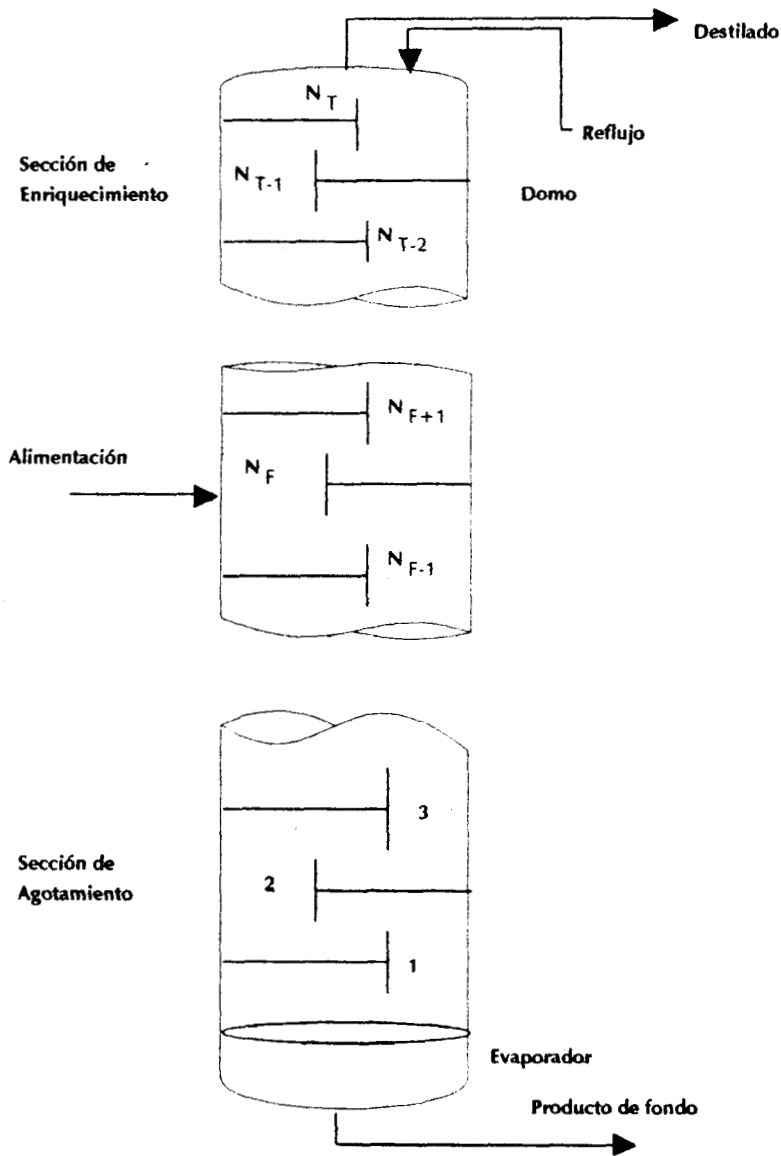


Figura 3.1: Columna de destilación binaria.

Para este trabajo se toma un modelo como los ya reportados en la literatura (Stephanopoulos, 1984; Luyben, 1990; Smith, 1994), y se ajusta de acuerdo al sistema experimental, descrito en el capítulo anterior.

Se considera una mezcla de componentes **A** y **B** (metanol - agua), que deben ser separados en dos productos usando una destilación LV (Reflujo/hervidor). La mezcla es alimentada en la columna como líquido saturado (en su punto de burbuja), en la sección de alimentación **SA**, con una velocidad de flujo molar (mol/min.)  $F_A$  y una fracción molar del componente **A**,  $c_A$ . La corriente de vapor es recolectada y completamente condensada, y entonces es devuelta por reflujo parcial.

El enfriador del vapor es abastecido con agua fría. El líquido del reflujo es bombeado parcialmente dentro de la columna (plato superior, **N**) con una velocidad de flujo molar  $F_R$  (corriente de reflujo) y es parcialmente removido como el producto de destilado con una velocidad de flujo molar  $F_D$ . Llamaremos  $c_D$  a la fracción molar del componente **A** en el líquido en el depósito del reflujo.  $c_D$  es la composición para el reflujo y la corriente de destilado. En la base de la columna de destilación, una corriente de producto líquido (el producto del fondo) es removido con una velocidad de flujo  $F_B$  y una composición  $c_B$ . Una cantidad del líquido es evaporada con una velocidad de flujo molar  $V$  en el hervidor y esta corriente de vapor llega a la parte superior de la columna; asignamos  $m_B$  al líquido retenido en el depósito del evaporador. La columna contiene **N** platos numerados desde abajo hasta la parte superior de la columna.  $m_i$  es el líquido acumulado en el *i*-ésimo plato. El vapor acumulado en cada plato puede ser asumido despreciable.

La construcción del modelo es estándar, lo incluimos porque su conocimiento detallado y conceptual es un ingrediente muy importante para abordar el problema de

estimación del siguiente capítulo. El desarrollo de las ecuaciones se hará etapa por etapa:

### 3.2.1 Ecuaciones de plato.

En la fig-3.2 se presenta un plato típico, el plato  $i$ , contando de abajo hacia arriba. La primera ecuación que se escribe es el balance total de masa, el cual, cuando no hay reacción química, se puede escribir en unidades molares.

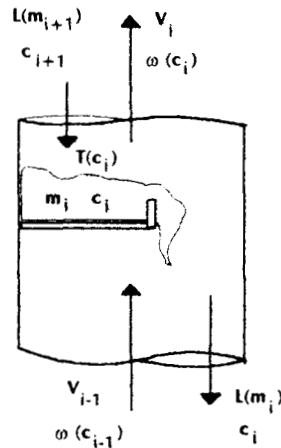


Figura 3.2: Plato  $i$  de la columna de destilación

Si se supone que a causa de su baja densidad, la acumulación de masa en la fase de vapor es despreciable, en comparación con la de la fase líquida, el balance total de masa es:

$$\frac{dm_i}{dt} = L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i \cong L_{i+1} - L_i \quad (3.1)$$

donde  $m_i$  es el líquido retenido en el plato  $i$  (gr-mol);  $L_i$  es flujo descendente del plato  $i$  (gr-mol/min.);  $V_i$  es el vapor que sale del plato  $i$  (gr-mol/min.).

Para escribir el balance de masa del componente volátil en cada plato, se supone que el líquido, en la misma etapa está perfectamente mezclado, de manera que las propiedades del líquido que sale del plato son iguales a las del líquido que resta en el mismo. Sin esta aproximación de parámetro localizado, sería necesario escribir los

balances en cada punto del plato, y las ecuaciones resultantes serían diferenciales parciales. También se supone que el líquido que fluye hacia abajo se mezcla perfectamente con el que está en el plato. El balance del componente  $i$  en el plato es:

$$\frac{d(c_i m_i)}{dt} = L_{i+1} c_{i+1} + V_{i-1} \omega(c_{i-1}) - L_i c_i - V_i \omega(c_i) \quad (3.2)$$

donde  $c_i$  es la fracción molar del componente más volátil en el líquido del plato  $i$  y  $\omega(c_i)$  es la fracción molar del componente más volátil en el vapor del plato  $i$ . La ecuación anterior se aplica al componente más volátil, ya que la suma de las fracciones molares debe ser uno:

$$\sum_{i=1}^2 c_i = 1 \quad (3.3)$$

A partir de la hidráulica del plato se puede obtener una relación entre los moles del líquido que están en el plato y la razón de líquido que sale de la misma: una ecuación comúnmente usada es la fórmula de Francis para presas:

$$L(m_i) = \alpha (m_i - m_o)^\beta \quad (3.4)$$

donde  $m_o$  es el líquido que se retiene con flujo cero, gr-mol;  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que dependen del tipo de plato. En una sección posterior se explica como se hizo su ajuste.

Las relaciones termodinámicas se obtienen a partir de las siguientes correlaciones:

**Ecuaciones de Equilibrio:**

$$\omega(c_i) = \frac{\gamma_i c_i P_i^S}{P_T} \quad i=1,2 \quad (3.5.a)$$

$$P_T = \gamma_1(c) c_1 P_1^S(T) + \gamma_2(c) (1 - c_1) P_2^S(T) \quad (3.5.b)$$

donde  $T$  es la Temperatura ( $^{\circ}K$ );  $P_T$  es la presión atmosférica (kPa);  $\gamma_i$  es el coeficiente de actividad;  $P_i^S$  es la presión de saturación del compuesto puro (kPa).



Los coeficientes de actividad son calculados mediante la ecuación de Wilson para un sistema binario (Holmes y Van Winkle, 1970):

$$\ln \gamma_1 = -\ln(c_1 + c_2 \Lambda_{12}) + c_2 \left( \frac{\Lambda_{12}}{c_1 + c_2 \Lambda_{12}} - \frac{\Lambda_{21}}{c_2 + c_1 \Lambda_{21}} \right) \quad (3.6.a)$$

$$\ln \gamma_2 = -\ln(c_2 + c_1 \Lambda_{21}) - c_1 \left( \frac{\Lambda_{12}}{c_1 + c_2 \Lambda_{12}} - \frac{\Lambda_{21}}{c_2 + c_1 \Lambda_{21}} \right) \quad (3.6.b)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{V_j^l}{V_i^l} \exp\left(\frac{-a_{ij}}{RT}\right) \quad (3.6.c)$$

donde  $\Lambda_{ij}$  son los parámetros de Wilson;  $V_i$  y  $V_j$  son los volúmenes molares a la temperatura  $T$  para los líquidos puros  $i$  y  $j$ ;  $a_{ij}$  es una constante independiente tanto de composiciones como de la temperatura. La ecuación de Wilson es empleada por ser la más adecuada para sistemas líquidos con grandes índices de desviación a la idealidad, como son las mezclas que incluyen algún alcohol como uno de los componentes de la mezcla (Prausnitz, 1970).

Las presiones de saturación son calculadas mediante la ecuación de Antoine:

$$\ln(P_i^s) = A_i - \frac{B_i}{T - C_i} \quad (3.7)$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  son parámetros independientes de la temperatura para el líquido puro.

En el apéndice C, se presentan los valores numéricos de los parámetros de las ecuaciones anteriores, y en el apéndice B se muestran los diagramas de ebullición y de equilibrio.

### 3.2.2 Plato de alimentación y superior.

A pesar de que la ecuación de plato se aplica a todos los platos, las ecuaciones para la alimentación y el superior son ligeramente diferentes. En la sección de alimentación se tiene un término adicional de entrada, la alimentación, lo cual significa que en el miembro derecho de la ecuación de balance se debe añadir los términos:  $F_A$  y  $c_A$ . Así tenemos que el Plato de alimentación ( $i=SA$ ) se describe como sigue:

Balance total de masa:

$$\frac{dm_{SA}}{dt} = F_A + L_6 - L_{SA} \quad (3.8)$$

donde  $m_{SA}$  es el líquido retenido en la sección de alimentación, gr-mol.

Para el componente A tenemos:

$$\frac{d(c_{SA} m_{SA})}{dt} = F_A c_A + L_6 c_6 + V\omega(c_5) - L_{SA} c_{SA} - V\omega(c_{SA}) \quad (3.9)$$

Para el plato superior ( $i=10$ ), las ecuaciones son las mismas que para los demás, con la excepción de que el caudal de líquido que entra al plato es el reflujo:

Balance total de masa:

$$\frac{dm_{10}}{dt} = F_R - L_{10} \quad (3.10)$$

donde  $m_{10}$  es el líquido retenido en el último plato, gr-mol/min;  $F_R$  es la razón de reflujo, gr-mol/min;  $L_{10}$  es el líquido que cae del último plato, gr-mol/min.

Componente A:

$$\frac{d(c_{10} m_{10})}{dt} = F_R c_D + V\omega(c_9) - L_{10} c_{10} - V\omega(c_{10}) \quad (3.11)$$

donde  $c_D$  es la fracción molar del destilado.

### 3.2.3 Evaporador:

En la fig-3.3 se muestra el esquema del evaporador. La razón de recirculación a través del hervidor es alta en comparación con la razón de sedimentación. Por esta razón el líquido está bien mezclado y tiene la misma composición en todo el evaporador.

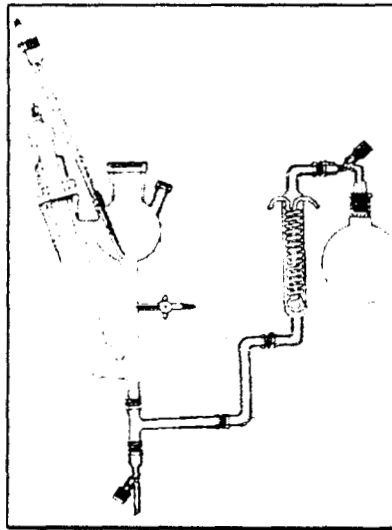


Figura 3.3: Evaporador de la columna.

Por lo tanto el balance total de masa es:

$$\frac{dm_B}{dt} = L_1 - V - F_B \quad (3.12)$$

donde  $m_B$  es el líquido que se retiene en el fondo de la torre, gr-mol y  $F_B$  es el flujo de sedimentos o fondos, gr-mol/min.

Componente A:

$$\frac{d(c_B m_B)}{dt} = L_1 c_1 - V \omega(c_B) - F_B c_B \quad (3.13)$$

Para mantener el nivel de líquido constante en el hervidor, se diseñó un control proporcional de nivel (Luyben, 1990):

$$F_B = F_{B_0} - k_{FB}(m_{sp} - m_B) \quad (3.14)$$

donde  $k_{FB}$  es la ganancia del controlador;  $m_{sp}$  es el valor de referencia, gr-mol; y  $F_{B_0}$  es el flujo nominal de referencia. Se sintonizó el control lo suficientemente rápido para que sea valido considerar que el volumen permanezca constante.

### 3.2.4 Condensador:

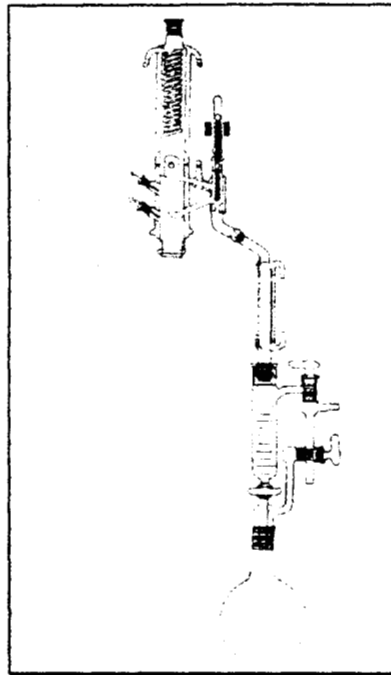


Figura 3.4: Condensador del sistema.

En la fig-3.4 se muestra un esquema de todo el condensador; la corriente de vapor que entra al condensador es el vapor que sale del plato superior de la columna (plato 10) y el líquido que sale se reparte entre el producto destilado (D) y el reflujo a la columna (R), el cual es el líquido que entra al plato superior. El condensador empleado en la experimentación es un condensador total y no tiene tanque de condensados. Se desprecia la acumulación de la masa en la fase vapor, lo que significa que el líquido

que se condensa tiene la misma composición y razón de flujo que el vapor que entra al condensador y, por tanto no se requieren balances de materia dentro del condensador.

Balance total de masa:

$$V = F_R + F_D \tag{3.15}$$

Componente A:

$$C_D = \omega(C_{10}) \tag{3.16}$$

La relación de reflujo se define como:  $r = F_R/F_D$ .

### 3.3 Estrategia de solución del modelo.

Para simular la columna se necesitan las condiciones iniciales de todas las variables de estado. Puesto que todas las ecuaciones diferenciales son de primer orden, únicamente se requiere una condición inicial por ecuación diferencial.

Las variables de estado del modelo son las siguientes:

Fracciones molares del componente volátil	$C_i, \quad i=1, \dots, 10$
en el evaporador:	$C_B$
en la sección de alimentación:	$C_{SA}$
Los moles de líquido retenido en cada plato:	$m_i, \quad i=1, \dots, 10$
en el evaporador:	$m_B$
en la sección de alimentación:	$m_{SA}$

Las condiciones iniciales de estas variables se determinan con los experimentos descritos en el capítulo anterior.

Sustituyendo la ecuación de hidráulica en los balances de la columna, y desarrollando los productos de las derivadas, tenemos que las ecuaciones que rigen el proceso son:

**Plato de alimentación (i=SA):**

Balance total de masa:

$$\dot{m}_{SA} = \alpha(m_6 - m_0)^\beta - \alpha(m_{SA} - m_0)^\beta + F_A \quad (3.17.a)$$

Componente A:

$$\dot{c}_{SA} = \frac{\alpha(m_6 - m_0)^\beta (c_6 - c_{SA}) + F_A (c_A - c_{SA}) - V(\omega(c_{SA}) - \omega(c_5))}{m_{SA}} \quad (3.17.b)$$

**Plato superior (i=10):**

Balance total de masa:

$$\dot{m}_{10} = F_R - \alpha(m_{10} - m_0)^\beta \quad (3.17.c)$$

Componente A:

$$\dot{c}_{10} = \frac{F_R (c_D - c_{10}) - V(\omega(c_{10}) - \omega(c_9))}{m_{10}} \quad (3.17.d)$$

**Plato inferior (i=1):**

Balance total de masa:

$$\dot{m}_1 = \alpha(m_2 - m_0)^\beta - \alpha(m_1 - m_0)^\beta \quad (3.17.e)$$

Componente A:

$$\dot{c}_1 = \frac{\alpha(m_2 - m_0)^\beta (c_2 - c_1) - V(\omega(c_1) - \omega(c_B))}{m_1} \quad (3.17.f)$$

**i-ésimo plato de la columna:**

Balance total de masa:

$$\dot{m}_i = \alpha(m_{i+1} - m_0)^\beta - \alpha(m_i - m_0)^\beta \quad (3.17.g)$$

Componente A:

$$\dot{c}_i = \frac{\alpha(m_i - m_0)^\beta (c_{i+1} - c_i) - V(\omega(c_i) - \omega(y_{i-1}))}{m_i} \quad (3.17.h)$$

**Domo de la columna:**

Balance total de masa:

$$F_D = \frac{V}{1+r} \quad F_R = rF_D \quad (3.17.i)$$

Componente A:

$$c_D = \omega(c_{10}) \quad (3.17.j)$$

**Evaporador de la columna:**

Balance total de masa:

$$\dot{m}_B = \alpha(m_1 - m_0)^\beta - V - F_B \quad (3.17.k)$$

Componente A:

$$\dot{c}_B = \frac{\alpha(m_1 - m_0)^\beta (c_1 - c_B) - V(\omega(c_B) - c_B)}{m_B} \quad (3.17.l)$$

Este conjunto de ecuaciones es resuelto utilizando el método de Gear, con paso variable. Holland (1984) realizó un estudio donde comparó varios métodos numéricos y determinó que el método de Gear es el más adecuado para resolver este tipo de problema de separación. Este método es adecuado para sistemas rígidos. Un sistema de ecuaciones diferenciales es rígido si la razón de su eigenvalor mayor respecto al menor es grande. Los eigenvalores de un sistema dinámico se definen como las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia del sistema. Mientras más grande es la rigidez de un modelo, mayor es la cantidad de pasos de integración.

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones con el método Runge-Kutta, y comparando con el método de Gear, en el mismo tiempo de cálculo, el método Runge-Kutta simula 2 minutos, mientras que el método de Gear simula 40 minutos.

El sistema de ecuaciones (3.17) puede ser representado con la siguiente notación compacta:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= f_m(m, V, r) \\ \dot{c} &= f_c(m, c, V, r) \quad y = h(c) \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde:

$f_m$  representa a las funciones del lado derecho de la igualdad de las ecuaciones diferenciales de los acumulados  $m$  (3.17).

$$f_m = [f_{mb}, f_{m1}, \dots, f_{m10}]^T$$

$$f_{m_i} = \alpha(m_{i+1} - m_0)^\beta - \alpha(m_i - m_0)^\beta$$

$$m = [m_b, m_1, \dots, m_{10}]^T$$

$f_c$  representa a las funciones del lado derecho de la igualdad de las ecuaciones diferenciales de las composiciones  $c$  (3.17).

$$f_c = [f_{cb}, f_{c1}, \dots, f_{c10}]^T$$

$$f_{c_i} = \frac{\alpha(m_i - m_0)^\beta (c_{i+1} - c_i) - V(\omega(c_i) - \omega(c_{i-1}))}{m_i}$$

$$c = [c_b, c_1, \dots, c_{10}]^T$$

$h$  representa a las mediciones de temperatura (ecuación. 3.5)

para una medición:  $h = [T_1]$ ; para dos mediciones:  $h = [T_1, T_2]^T$

Ocasionalmente utilizaremos una notación aún más compacta:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad y = h(c) \tag{3.19}$$

donde:

$$x = [m, c]^T, \quad f = [f_m, f_c]^T, \quad u = [V, r]^T$$



### 3.4 Estudio del Comportamiento dinámico en base al modelo.

Basándonos en el modelo descrito anteriormente, estudiaremos el comportamiento dinámico de la columna utilizando simulación numérica y ajustaremos los parámetros de la hidráulica de plato, puesto que no contamos con mediciones de la evolución de los líquidos retenidos. El análisis se hace de tal manera que se logre reproducir los experimentos descritos en el capítulo anterior. Para lograrlo se ajusta los parámetros de la hidráulica de plato descrita por la ecuación 3.4, y el control de nivel (ecuación 3.14).

La estructura del sistema en el modelo se hace variar para producir varias soluciones, con las cuales se evalúan la sensibilidad paramétrica del sistema, el efecto de la hidráulica y la termodinámica. Esto para conocer precisamente lo que tienen una mayor influencia en el comportamiento dinámico del sistema.

#### 3.4.1 Ajuste de los parámetros hidráulicos.

La determinación de los parámetros hidráulicos de la ecuación de Francis (3.4) no ofrece dificultad, ya que se pueden evaluar por medio de los datos experimentales referidos a un estado estacionario. Se dispone de los valores de composición de los platos 1, 3, 5, 6, 8, 10, composición de producto destilado, de producto de fondo, de la alimentación, flujos de alimentación, de fondos, y de alimentación.

Para lograr lo anterior:

- a) Se toma el sistema de ecuaciones (3.17) y se consideran las tasas de cambio igual a cero;
- b) Se resuelve el sistema algebraico no lineal, calculando  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $m_o$ .
- c) Una vez calculados para un estado estacionario, se procedió a verificarlo con una trayectoria dinámica. De esta forma, se hace un último ajuste de los parámetros hidráulicos (figura 3.6 y 3.7).

En la figura 3.5 se puede ver las dimensiones de un plato de la columna. Con las dimensiones de éste se calculó el volumen de líquido que puede retener cada plato.

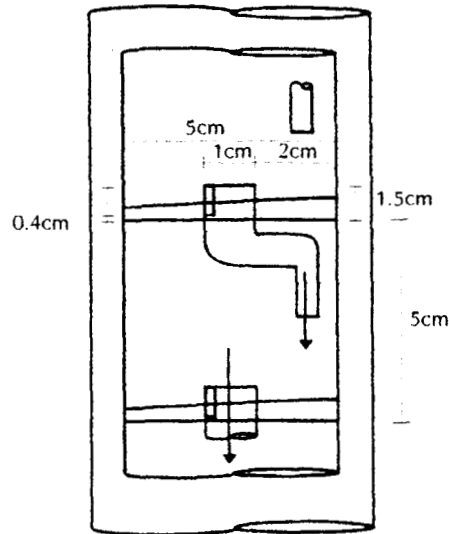


Figura 3.5: Dimensiones de un plato de la columna.

De acuerdo a los cambios de nivel en el plato , en la experimentación se observó que el volumen mínimo de líquido retenido por plato en la sección de agotamiento, era de aproximadamente 15 ml., y el máximo era de 30 ml. En la sección de rectificación era de 5 ml el mínimo y el máximo de aproximadamente 20 ml. Con los valores experimentales y la siguiente ecuación se verificó que el ajuste de los parámetros de la ecuación de Francis fuera el adecuado:

$$v_i = \frac{m_i}{\rho_{M_i}} \quad (3.20)$$

donde  $v_i$  es el volumen de líquido retenido en el plato;  $\rho_{M_i}$  es la densidad molar de la mezcla en un plato y esta dada por la expresión:

$$\rho_{M_i} = \frac{c_i \rho_1}{PM_1} + \frac{(1 - c_i) \rho_2}{PM_2} \quad (3.21)$$

donde  $\rho_i$  es la densidad del compuesto puro (gr/ml) y  $PM_i$  su peso molecular.

El valor de  $\beta$  calculado fue de 1.48, pero se ajustó a 1.5, debido a que así se encuentra reportado en varios trabajos (Husain, 1984; Luyben, 1990; Smith, 1994), además de que facilita el análisis de unidades. El efecto que tiene  $\alpha$  en el modelo se puede ver en las gráficas 3.6 y 3.7, ejemplificado con una etapa de la columna (plato 10) para un cambio en la relación de reflujo.

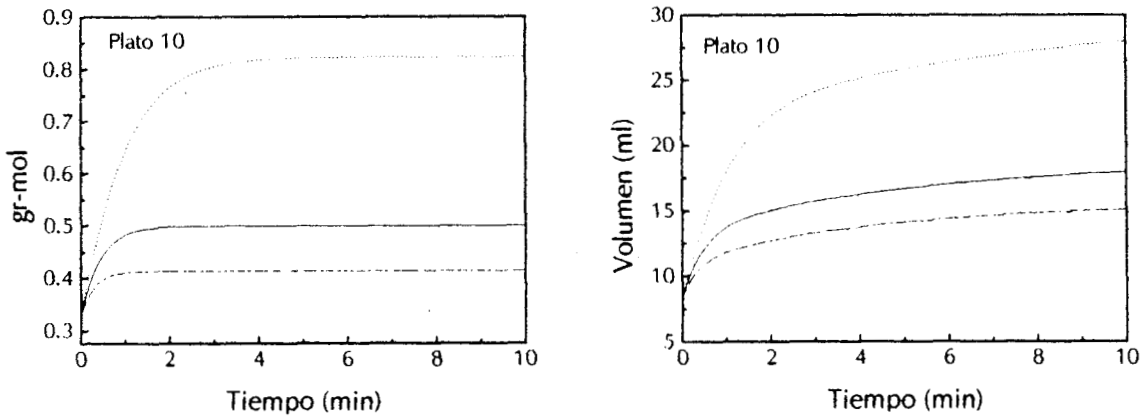


Figura 3.6: Efecto de  $\alpha$  en el líquido acumulado en un plato:  $\alpha=3.0$  (—),  $\alpha=1.0$  (.....) y  $\alpha=5.0$  (- - -).

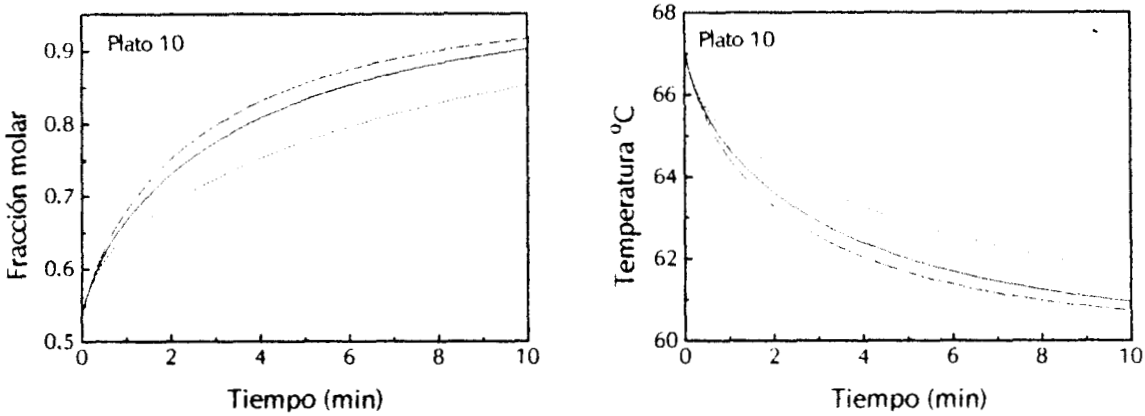


Figura 3.7: Efecto de  $\alpha$  en la dinámica de composición y temperatura en un plato:  $\alpha=3.0$  (—),  $\alpha=1.0$  (.....) y  $\alpha=5.0$  (- - -).

Se observa que al aumentar  $\alpha$ , disminuye la variación de la cantidad de líquido en el plato. Lo que origina que la dinámica de composiciones y temperaturas sea más

rápida. De modo contrario, al disminuir origina que la dinámica sea mas lenta, precisamente por que hay un mayor cambio en el líquido retenido en cada etapa.

Posteriormente se presentan los resultados de temperatura y composición en todas las etapas comparadas con los datos experimentales. Aunque en las figuras anteriores (3.6 y 3.7) sólo se muestra una etapa, el comportamiento ante diferentes  $\alpha$  fue el mismo para todos los platos de la columna. En las figuras 3.8 y 3.9 se muestra la simulación numérica de la evolución de los líquidos retenidos con el mejor ajuste de los parámetros hidráulicos. En el apéndice C se presentan los valores utilizados para el modelo.

En el caso de la sección de alimentación, se calcularon valores diferentes de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $m_0$  debido a que tiene una estructura diferente.

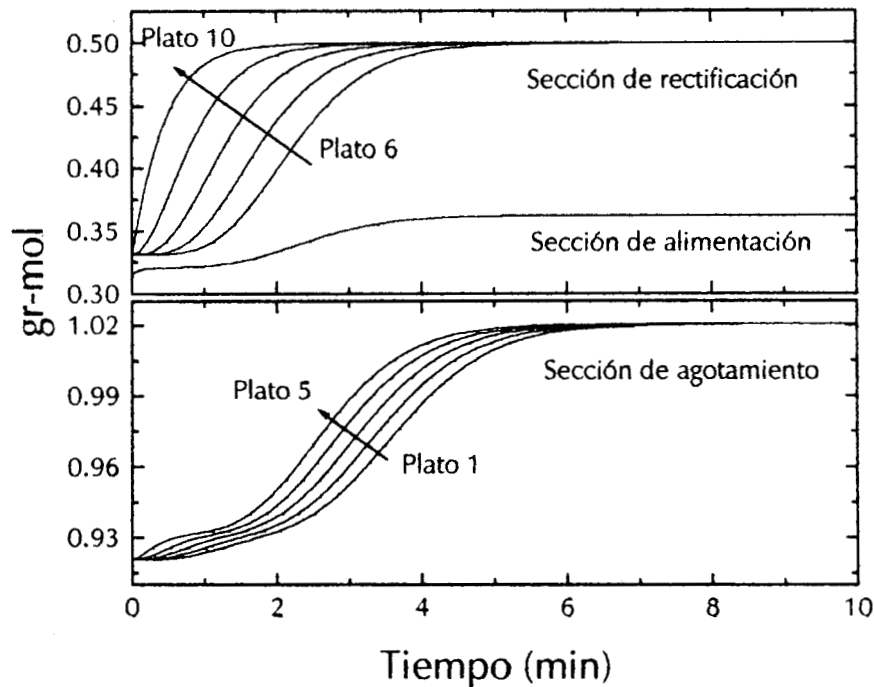


Figura 3.8: Simulación numérica de la evolución de los líquidos retenidos por etapa.

Este ajuste de hidráulica no garantiza la correcta reproducción de todas las trayectorias dinámicas posibles, por que se realizó en base a una sola. Sin embargo da a

la dinámica de composiciones un comportamiento parecido al real. El tipo de error que presenta para otras trayectorias es una pequeña diferencia en el estado estacionario final.

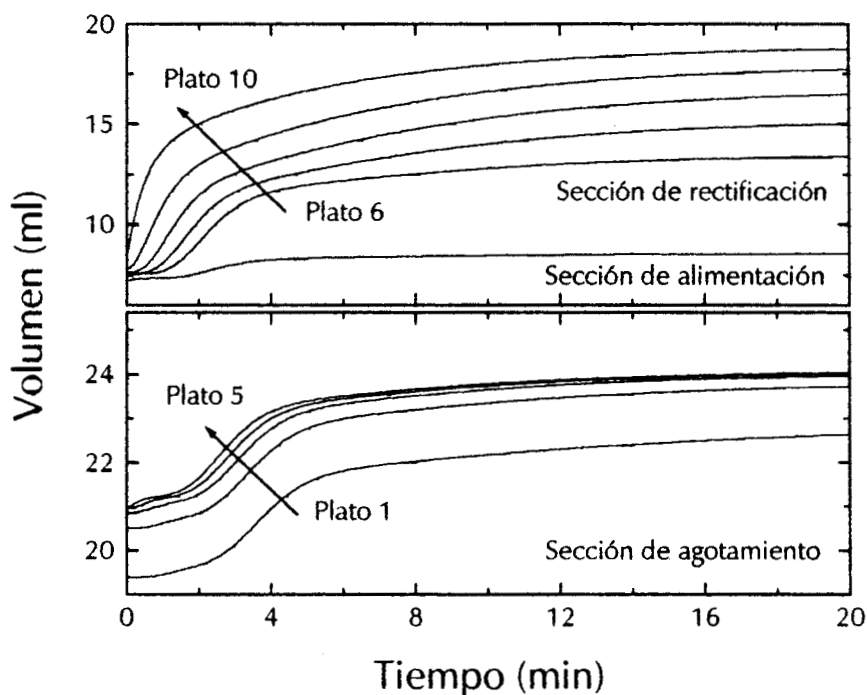


Figura 3.9: Simulación numérica de la evolución de los líquidos retenidos por etapa.

### 3.4.2 Sintonización del control de nivel.

Para controlar el nivel de líquido en el evaporador, se utilizó un control proporcional (ecuación 3.14). Este tipo de control fue suficiente para la columna como se puede apreciar en la figura 3.10. El nivel deseado se encontraba dentro de una banda de operación, bajo la cual se manejó la columna.

El valor que se seleccionó para la ganancia  $k_{FB}$  fue el de  $1.0 \text{ min}^{-1}$ , debido a que con valores mayores el control tenía comportamiento oscilatorio. Y por otro lado, el valor seleccionado fue el de respuesta más rápida sin oscilaciones.

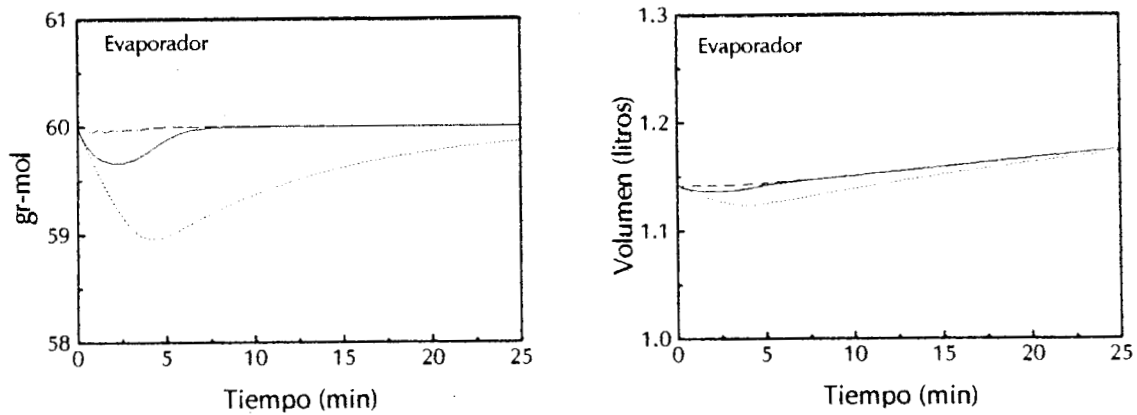


Figura 3.10: Comportamiento del evaporador con un control proporcional de nivel:  $k_{fB}=1.0$  (—),  $K_{fB}=0.1$  (.....) y  $k_{fB} = 10.0$  (- - -).

### 3.4.3 Comparación contra datos experimentales.

En esta sección como se mencionó anteriormente, se compara el desempeño del modelo con los datos experimentales. Tomando el experimento de cambio en escalón de la relación de reflujo, se procedió a realizar la simulación.

El modelo descrito por el sistema de ecuaciones 3.17 fue desarrollado para composiciones y líquidos retenidos por etapa. Para calcular la temperatura se utilizó la ecuación 3.5:

$$P_T = \gamma_1(c)c_1P_1^S(T) + \gamma_2(c)[1-c]P_2^S(T) \quad (3.5)$$

Se Resolvió el problema de punto de burbuja con el método de convergencia Newton-Raphson:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)} \quad f(T) = P_T^{Calc}(T) - P_T \quad f'(T) = \left( \frac{df}{dT} \right)_T \quad (3.22)$$

Se da el valor de la composición, y mediante el método de Newton-Raphson se calcula la temperatura. De esta manera, al validar la dinámica de temperaturas implícitamente se valida la dinámica de composiciones, puesto que los parámetros de equilibrio son bien conocidos y dan buenas predicciones. También se contó con datos experimentales de composición para algunas etapas.

En las siguientes figuras se presenta la dinámica de las temperaturas y de las composiciones en la columna, para un cambio en escalón de la relación de reflujo (figura 2.5), de 0.22 a 1.5. Los resultados denotan que el comportamiento dinámico del modelo matemático es satisfactorio dentro de estas condiciones de operación.

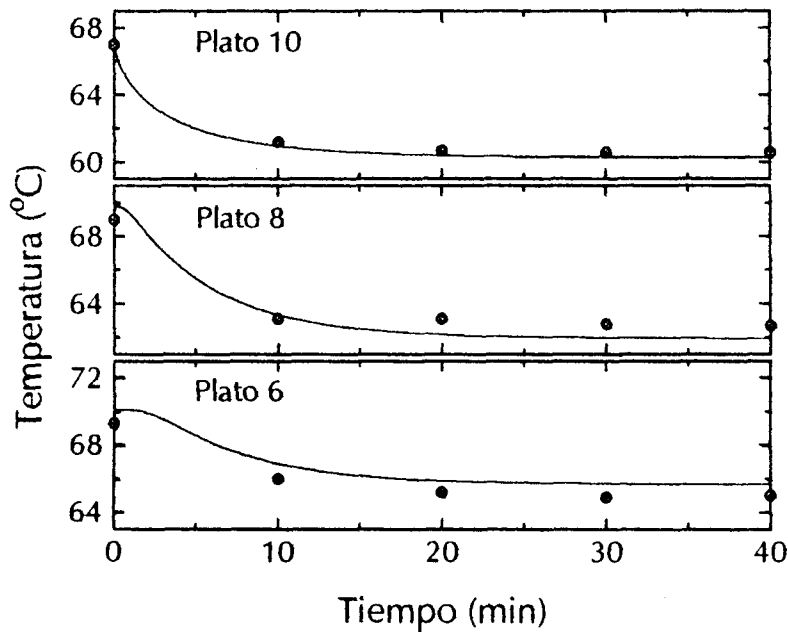


Figura 3.11: Comparación del desempeño del modelo (—) contra datos experimentales (●), en la sección de rectificación.

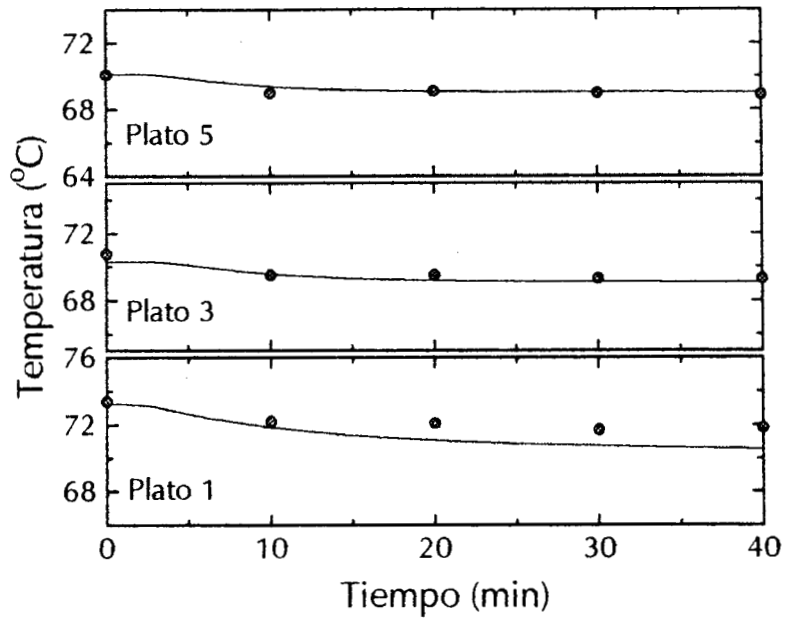


Figura 3.12: Comparación del desempeño del modelo (—) contra datos experimentales (●), en la sección de agotamiento.

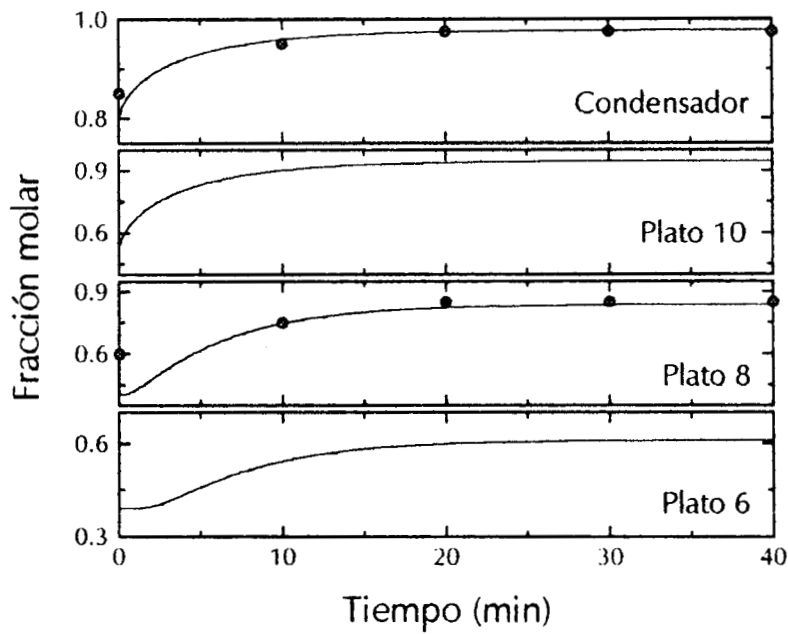


Figura 3.13: Comparación del desempeño del modelo (—) contra datos experimentales (●), en la sección de rectificación.



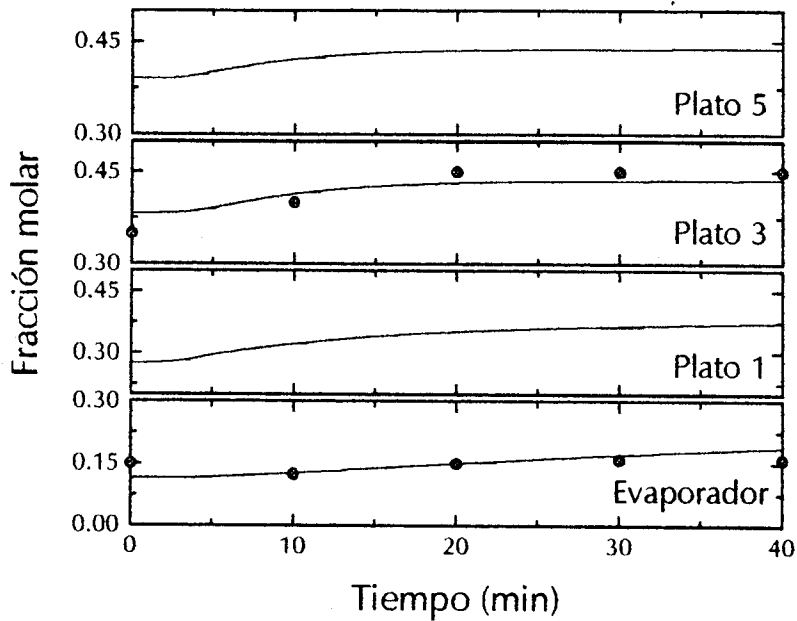


Figura 3.14: Comparación del desempeño del modelo (—) contra datos experimentales (●), en la sección de agotamiento.

#### 3.4.4 Modelo con líquidos retenidos constantes (sin dinámica hidráulica de plato).

Para mostrar el efecto de no modelar la dinámica de la hidráulica de plato, a continuación mostramos las simulaciones sin las ecuaciones de los líquidos retenidos y fijamos  $m$  como constante, en su valor nominal (estado estacionario inicial). Entonces se consideraron las tasas de cambio igual a cero en las ecuaciones de los líquidos retenidos ( $dm/dt=0$ , en las ecuaciones 3.17). Así se puede observar la contribución de la dinámica hidráulica en la evolución de las composiciones y temperaturas en la columna, comparando los resultados con el modelo completo (Figuras 3.11 a 3.14).

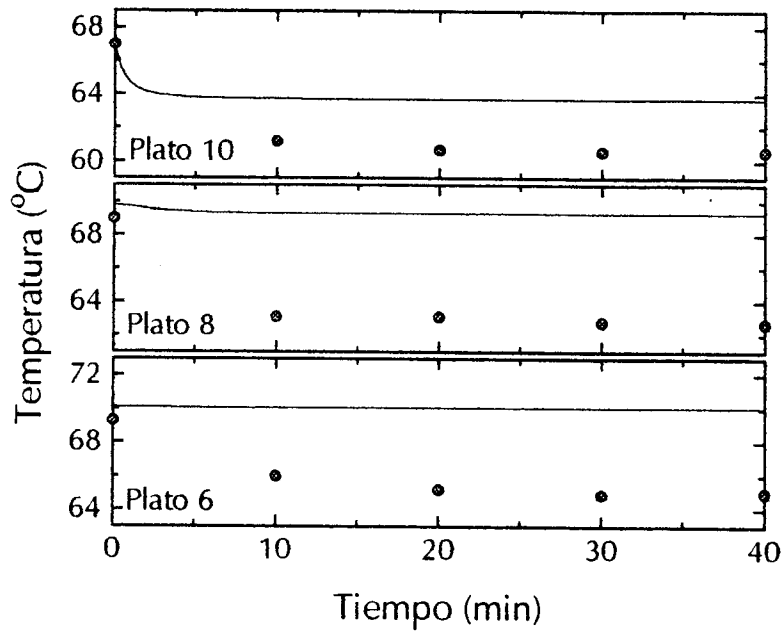


Figura 3.15: Comparación del desempeño del modelo sin dinámica hidráulica (—) contra datos experimentales (●), en la sección de rectificación.

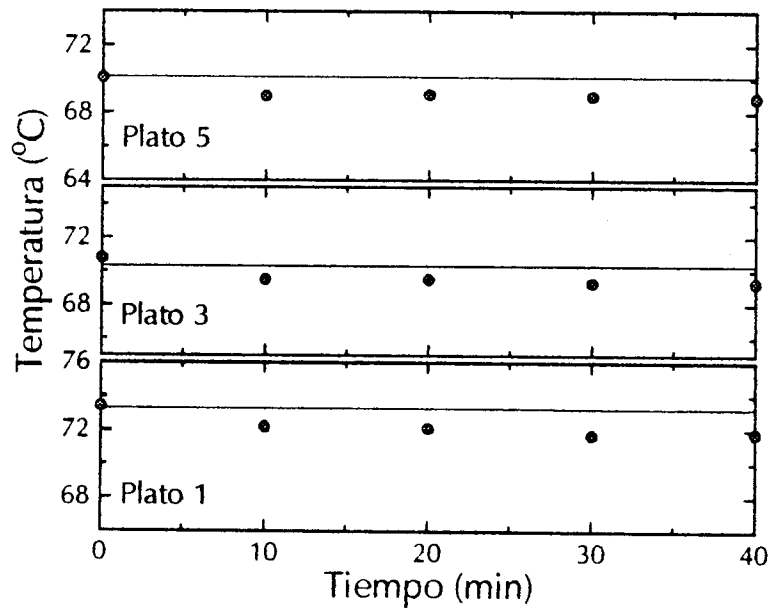


Figura 3.16: Comparación del desempeño del modelo sin dinámica hidráulica (—) contra datos experimentales (●), en la sección de agotamiento.

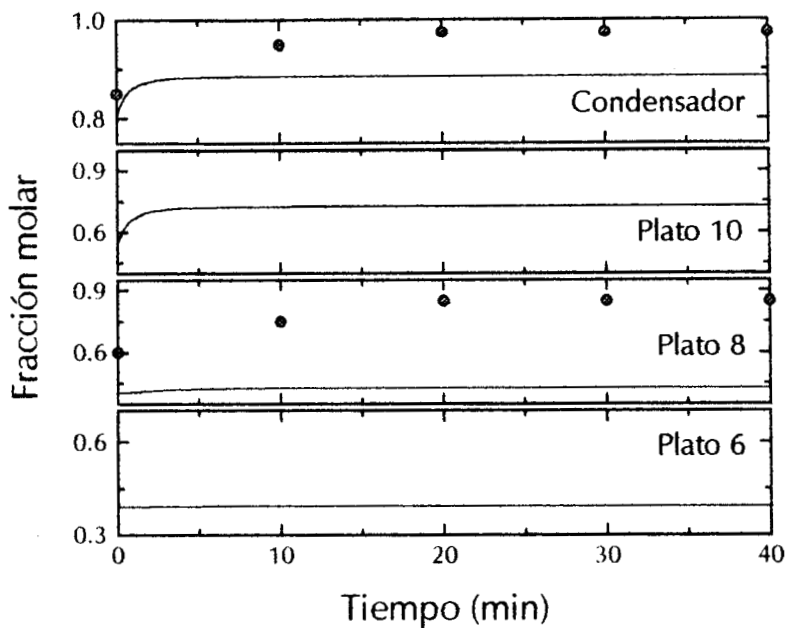


Figura 3.17: Comparación del desempeño del modelo sin dinámica hidráulica (—) contra datos experimentales (●), en la sección de rectificación.

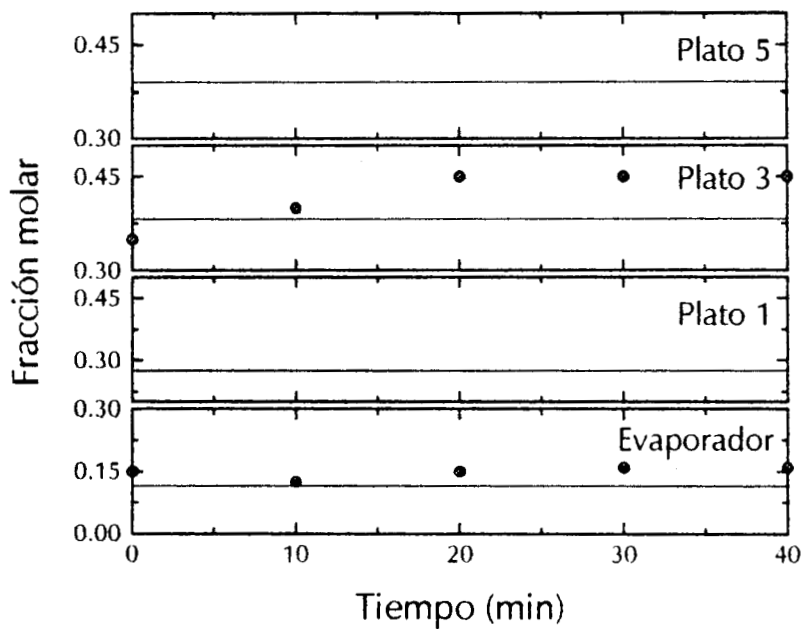


Figura 3.18: Comparación del desempeño del modelo sin dinámica hidráulica (—) contra datos experimentales (●), en la sección de agotamiento.

Un cambio en la relación de reflujo como el que fue aplicado (de 0.22 a 1.5), ocasiona cambios considerables en la cantidad de los líquidos retenidos en cada plato. Es por esta razón que al despreñar estos cambios, el desempeño del modelo es malo.

Fijando el valor de los moles de líquido retenido por etapa a las condiciones finales, naturalmente las composiciones y temperaturas convergen con los datos experimentales, pero la trayectoria tiene una dinámica más rápida que la experimental.

La sección de rectificación es la zona con mayor error, por ser la sección más sensible al cambio de la cantidad de líquido retenido. En el cambio de la relación de reflujo la evolución de composiciones fue más rápida y su variación pequeña.

No considerar los cambios de los líquidos retenidos sería grave en la descripción de cambios dinámicos. En una operación estándar de regulación, puede ser que la aproximación no sea mala. Sin embargo para cambios importantes en la operación de la columna puede ser malo, como son cambios de un modo de operación a otro por cambios en especificaciones de producto, en procedimientos de arranque ó paro del proceso.

### **3.4.5 Modelo con termodinámica ideal.**

Para este caso se consideró al coeficiente de actividad de las ecuaciones 3.5 igual a uno. En el apéndice B se puede apreciar los diagramas de equilibrio y de ebullición.

Se aprecia en las siguientes gráficas, que la dinámica de temperaturas tiene un desempeño malo. Sin embargo la dinámica de composiciones es reproducida aceptablemente. Esto se debe a que el diagrama de ebullición (temperatura vs. composición), bajo condiciones ideales, presenta una mayor desviación de la realidad que el diagrama de equilibrio (composición de líquido vs. composición de vapor).

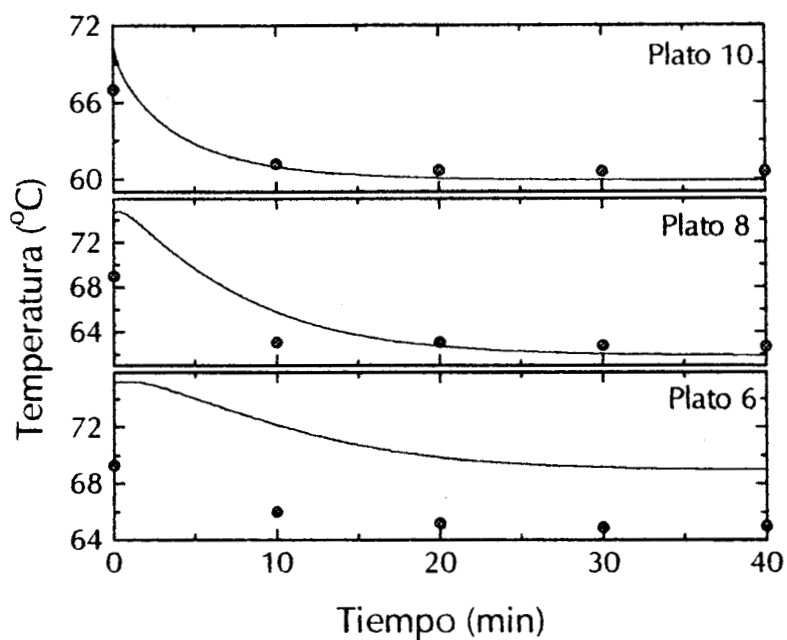


Figura 3.19: Comparación del desempeño del modelo con termodinámica ideal( — ) contra datos experimentales ( ● ), en la sección de rectificación.

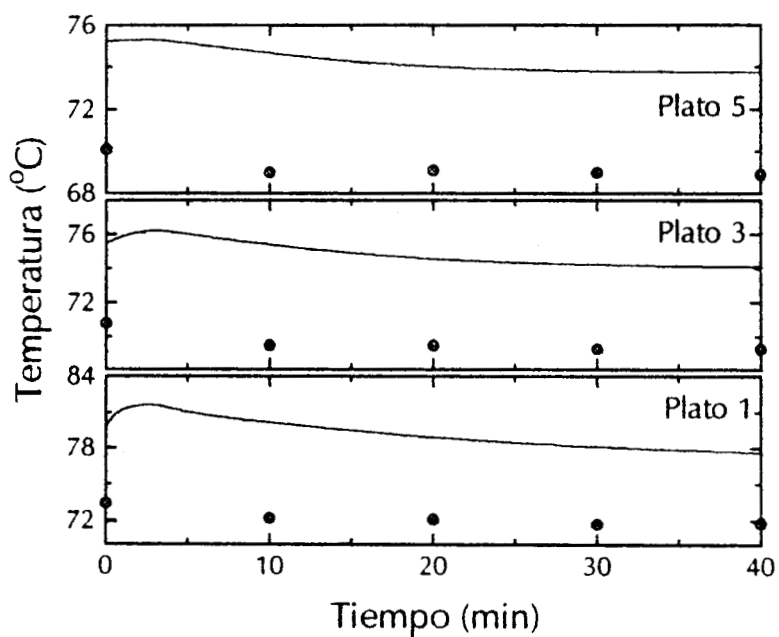


Figura 3.20: Comparación del desempeño del modelo con termodinámica ideal( — ) contra datos experimentales ( ● ), en la sección agotamiento.

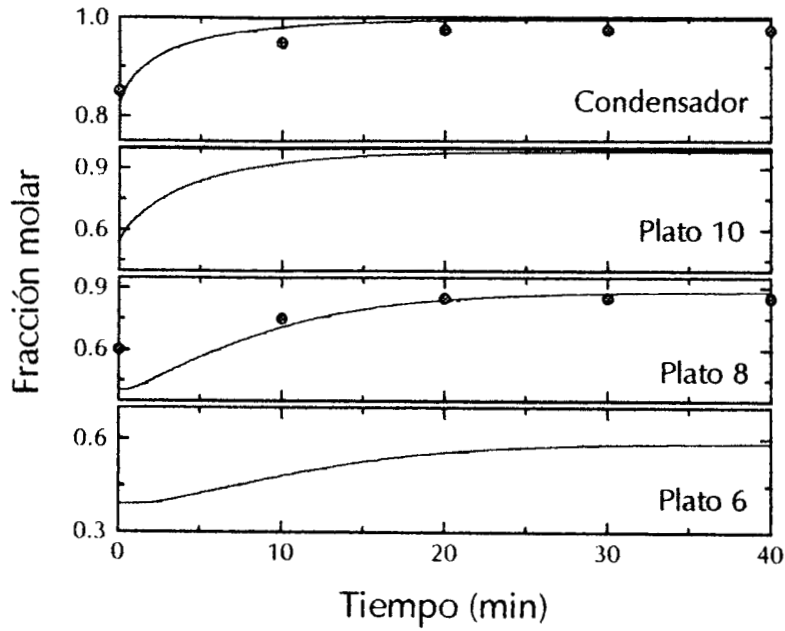


Figura 3.21: Comparación del desempeño del modelo con termodinámica ideal(—) contra datos experimentales (●), en la sección de rectificación.

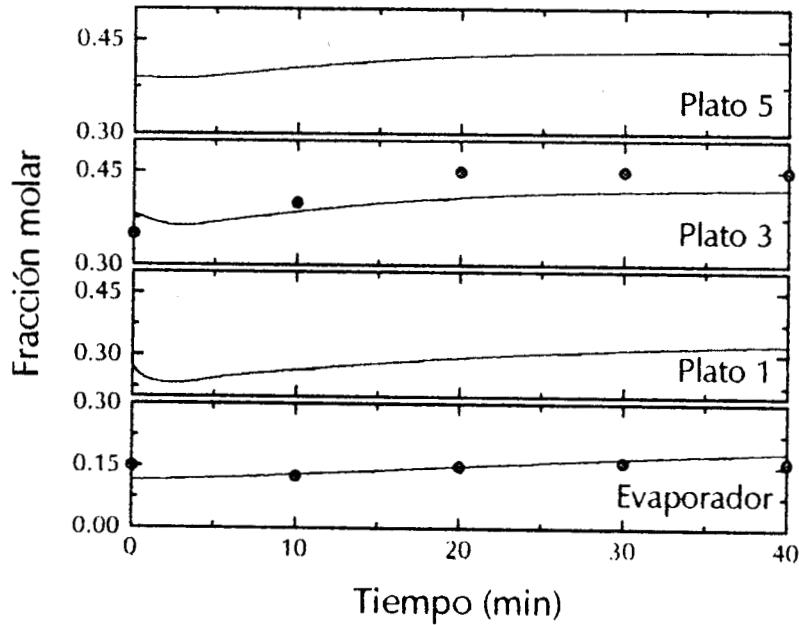


Figura 3.22: Comparación del desempeño del modelo con termodinámica ideal(—) contra datos experimentales (●), en la sección de agotamiento.

El error que se presenta al asumir equilibrio ideal, es un desfase de la trayectoria del modelo con respecto a los datos experimentales. Pero los tiempos característicos del sistema se mantienen con una diferencia mínima.

### **3.5 Sumario**

En este capítulo se formuló el modelo que describe una columna de destilación binaria como la empleada en la experimentación. Se ajustó con los experimentos descritos en el capítulo anterior.

Se verificó la importancia que tiene la hidráulica de plato en el comportamiento dinámico de la columna. Cuando ésta no se toma en cuenta, el sistema reproduce una trayectoria de dinámica más rápida que la real. Además de generar un sesgo en el estado final. Este sesgo es proporcional a la magnitud del cambio en escalón.

En cuanto a considerar equilibrio ideal, se observó que los tiempos característicos de respuesta del modelo se mantienen iguales a los tiempos característicos de los experimentos. Pero se genera una diferencia en los estados finales. La reproducción de las temperatura tiene un error considerable, no así la de composiciones.

## ***Capítulo 4***

### **Diseño de un Estimador No Lineal de Composiciones para una Columna de Destilación.**

Basándose en mediciones de temperatura y el modelo descrito en el capítulo anterior se construye un estimador de estados en línea, que reproduce temperaturas y composiciones en cada etapa de la columna. Basándose en los trabajos de Alvarez (1996a, 1996b) se construye un estimador no lineal que es más simple que el filtro extendido de Kalman, y que no sólo aplica para sistemas completamente observables. Se encuentra que basta con dos medidas de temperatura para detectar las composiciones en toda la columna, siempre y cuando se incluya un reconstructor para la dinámica de la hidráulica, que corresponde a la dinámica no observable de la columna.



## 4.1 Antecedentes.

Para abordar un problema de control, es necesario identificar la estructura de observabilidad y controlabilidad (Hermann y Krener, 1977), entendidas como propiedades fundamentales que establecen las limitaciones esenciales de lo que se puede lograr con cualquier esquema de control, ya sea convencional o avanzado. Cuando se emplean técnicas modernas en el diseño de sistemas de control avanzado para procesos dinámicos, los resultados de una ley de retroalimentación requieren de la disponibilidad de todos los estados del proceso. Con mediciones indirectas en línea, combinadas con un modelo numérico, se logra inferir el comportamiento dinámico del proceso.

Antes de diseñar el estimador de estados es necesario verificar que el sistema sea reconstruible a partir de la medición seleccionada (Lennartson, 1989). Krener e Isidori (1983) proveen una de las primeras metodologías para aplicar herramientas geométrico diferenciales para el diseño de observadores asintóticos para sistemas no lineales. La idea central consiste en encontrar una transformación no lineal de estados (en la cual, la síntesis del observador es más fácil), tal que al sistema original se le adicione un término que dependa sólo de las salidas (estados medidos) (Krener y Respondek, 1985). Este término adicional es una medida del error entre la salida del sistema y el estimado de la salida.

Alvarez (1996b) describe cuatro técnicas principales para el diseño de observadores no lineales:

1.- *Filtro Extendido de Kalman*: cuyo diseño es simple, pero le hacen falta criterios y procedimientos sistemáticos de sintonización;

2.- *Diseño de Observadores Geométricos*: el cual garantiza convergencia con una dinámica del error de salida lineal, pero está restringido estrictamente a una clase de planta;

3.- *Aproximación de Alta Ganancia*: que garantiza estabilidad, pero tiene un procedimiento muy complicado de sintonización;

4.- *Aproximación de Modo de deslizamiento*: que garantiza estabilidad, pero tiene un diseño complicado.

El uso de estas cuatro técnicas de inferencia de estados esta restringido a plantas no lineales que sean completamente observables.

En este trabajo presentamos el esquema de Alvarez (1996a y 1996b) para el diseño de un estimador. Este estimador se encuentra en las técnicas de alta ganancia, y se puede aplicar a sistemas parcialmente observables (detectables). Es una metodología de estimación no lineal de estados diseñada para aplicaciones en procesos de ingeniería, con convergencia robusta (con tolerancia a errores de modelado). El método de sintonización del estimador esta basado en la asignación de polos, con una parametrización de ganancias tipo localización de raíces. Con esto se tiene un procedimiento sencillo de diseño y sintonización del estimador.

La parte de prueba, criterios de convergencia y estabilidad queda fuera de los alcances de la presente tesis, por lo que nos concretamos sólo a presentar el esquema y de manera descriptiva tocar la parte de convergencia.

#### **4.2 Construcción de un Estimador de Estados.**

Siguiendo el enfoque de Alvarez (1996a), la idea consiste en construir un estimador de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= f(\chi) + G(\chi)[y(t) - h(\chi)] & \dim \chi &= n \\ y &= h(\chi) & \dim y &= m \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $\chi$  es el vector de estados estimados de  $x$  (ecuación 3.19), y  $y$  es el vector de mediciones (vector de salidas),  $m$  denota el número de mediciones para el estimador.  $G(\chi)$  se define como:

$$G(\chi) = \phi_x^{-1} K_o \tag{4.2}$$

donde  $\phi_x$  es la matriz jacobiana del mapa de detectabilidad:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_I(x) \\ \phi_{II}(x) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dim \phi_I = \kappa \\ \dim \phi_{II} = n - \kappa \end{array} \quad (4.3)$$

$\phi_I(x)$  corresponde a la parte observable de la planta y se define como:

$$\phi_I(x) = [h_1, \dots, \mathcal{L}_f^{\kappa_1-1} h_1, h_2, \dots, \mathcal{L}_f^{\kappa_2-1} h_2, \dots, h_m, \dots, \mathcal{L}_f^{\kappa_m-1} h_m]^T \quad (4.4)$$

donde la derivada direccional de un campo escalar con respecto a un campo vectorial (derivada de L ie) y su fórmula recursiva se escriben a continuación:

$$\mathcal{L}_f h = L_f h + h_u \dot{u} \quad \mathcal{L}_f^0 h = h \quad \mathcal{L}_f^n h = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{n-1} h) \quad n \geq 1$$

donde:

$$L_f h = \langle dh, f \rangle = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} f_n \quad h_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

En la presente tesis se trabaja con  $u$  constante ( $u = \bar{u}$ ), por lo que  $\mathcal{L}_f h = L_f h$  (ver ecuaciones 3.18).

$h_i$  y  $\kappa_i$  denotan a la medición  $i$ -ésima y a su índice de observabilidad. La suma de todos los índices proporcionan el índice total de observabilidad del sistema, y es definido por  $\kappa$ .  $\phi_I(x)$  debe tener determinante diferente de cero ( $\det[\phi_I(x)] \neq 0$ ). Como se puede apreciar  $\phi_I(x)$  estará determinado por los números enteros ( $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ ) y los mapas  $f$  y  $h$  de la planta (ver ecuaciones 3.19).

$\phi_{II}(x)$  corresponde a la parte no observable y es una elección arbitraria, siempre y cuando satisfaga que  $\det[\phi_x] \neq 0$

$K_O$  es una matriz bloque diagonal:

$$K_O = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_m \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde los elementos  $k_i = [k_{i,1}, k_{i,2}, \dots]^T$  son los vectores de ganancias para la  $i$ -ésima medición. La sintonización de la ganancia  $K_O$  se hace en base a la siguiente dinámica del error de salida ( $\eta_i = y_i - h_i(\chi)$ ):

$$\eta_i^{(k)} + k_{1,i} \eta_i^{(k-1)} + \dots + k_{k,i} \eta_i = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (4.6)$$

que es lineal, no interactiva y de polo asignable. Una explicación más detallada se da más adelante.

Para que el estimador funcione, la dinámica no observable debe ser estable.

$$\dot{\chi} = f(\chi) \quad \chi \in X_U \quad X_U = \{x \in X | \phi_f(x, \bar{u}) = \mathcal{S}\} \quad (4.7)$$

#### 4.2.1 Derivación del estimador y esquema de sintonización.

Cuando el sistema cumple con la condición ( $\det[\phi_x] \neq 0$ ), tenemos entonces que hay un cambio de coordenadas, al menos localmente, de la siguiente forma:

$$z = \begin{bmatrix} z_I \\ z_{II} \end{bmatrix} = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_I(x) \\ \phi_{II}(x) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde  $\phi(x) = [h_1(x), \dots, L_f^{(k_1-1)} h_1(x), h_2(x), \dots, L_f^{(k_2-1)} h_2(x), \dots, \phi_{k+1}(x), \dots, \phi_n(x)]^T_{u=\bar{u}}$

De tal manera que las derivadas de  $z_I$  satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k_1} &= L_f^{k_1} h_1(x) = \varphi_1(z, t) & y_1 &= z_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{z}_{k-k_m+1} &= z_{k-k_m+2} & y_m &= z_{k-k_m+1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= L_f^k h_m(x) = \varphi_m(z, t) \end{aligned}$$

donde  $\varphi(z) = [\varphi_1(z, t), \dots, \varphi_m(z, t)]^T = [L_f^{k_1} h_1(x), \dots, L_f^{k_m} h_m(x)]^T_{u=\bar{u}}$

y para el caso  $z_{II}$ :

$$\dot{z}_{II} = \theta(z_I, z_{II}, t)$$

este subsistema corresponde a la dinámica no observable en coordenadas  $z$ , y cumple con las condiciones antes citadas. En forma vectorial se tiene que la planta en coordenadas  $z$  está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_I &= \Gamma z_I + \Pi \varphi & y &= \Delta z_I & (\text{dinámica observable}) \\ \dim z_I &= \kappa & \dim y &= m \\ \dot{z}_{II} &= \theta(z_I, z_{II}, t) & \dim z_{II} &= n - \kappa & (\text{dinámica no observable}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

En este trabajo (la presente tesis) se tomó una y dos temperaturas para el estimador por lo que el valor empleado para  $m$  puede ser 1 ó 2:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}_{m \times m} & \Gamma_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\kappa, \kappa} \\ \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{bmatrix}_{m \times m} & \Pi_i &= [0 \ 0 \ \dots \ 1]_{1 \times \kappa_i} \\ \Delta &= \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}_{m \times m} & \delta_i &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times \kappa_i} \end{aligned}$$

Como se hace en Alvarez (1996a), consideremos un estimador  $\zeta(t)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_I &= \Gamma \zeta_I + \Pi \varphi + K_0 (y - \Delta \zeta_I) \\ \dot{\zeta}_{II} &= \theta(\zeta_I, \zeta_{II}, t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $\zeta$  es el estimado de  $z$ ; y  $K_0$  es la matriz de ganancias:

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad k_m = [k_{m,1}, \dots, k_{m,\kappa_i}] \quad m=1,2$$

Las ecuaciones anteriores corresponden al estimador de estados para el sistema y representan al modelo del sistema con un término adicional  $K_0(y - \Delta\zeta_1)$ , el cual se denomina *innovación*. Este término adicional es una medida del error entre la salida de la planta y el estimado de la salida.  $K_0$  debe ser diseñado tal que  $\zeta \rightarrow z$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , esto es, que exista convergencia entre el estado estimado y los estados independientes verdaderos (desconocidos) a las condiciones iniciales. En coordenadas originales, el sistema está descrito por la ecuación 4.1.

#### 4.2.1.1 Dinámica del error del estimador (parte observable).

En este apartado se establece la estrategia para el diseño de la matriz de ganancias, para garantizar la convergencia del estimador. La sintonización de las ganancias se realiza en el sistema lineal equivalente.

Restando la ecuación (4.9) a la ecuación (4.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} (\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) = \Gamma(\zeta_1 - z_1) + \Pi[\varphi(\zeta) - \varphi(z)] + K_0\Delta(\zeta_1 - z_1) \end{aligned} \tag{4.11}$$

y definiendo el error de estimación como  $e_1 = \zeta_1 - z_1$  y el error de salida como  $\eta = y - \Delta z_1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = (\dot{\zeta}_1 - \dot{z}_1) &= (\Gamma - K_0\Delta)e_1 + \Pi q(e_1, e_{11}) \\ \eta &= \Delta e_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde  $q(e_1, e_{11}) = [\varphi(\zeta) - \varphi(z)]$ . Cuando el error de observación  $e_1 \rightarrow 0$ , el término que representa la parte no observable  $q(0, e_{11}) \rightarrow 0$ . Esto es ajustando  $K_0$  tal que la estabilidad de  $(\Gamma - K_0\Delta)$  domine al término de error  $q(e_1, e_{11})$  (Alvarez, 1996b). Simplificando, así como definiendo  $A_0 = (\Gamma - K_0\Delta)$ , se tiene que en el límite, el error de estimación satisface el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= A_0 e_1 \\ \eta &= \Delta e_1\end{aligned}\tag{4.13}$$

que corresponde a la *ecuación de diseño del observador*. La dinámica del error de estimación está determinada por los valores propios de  $A_0$ . Así  $K_0$  es un arreglo diseñado, seleccionado de tal manera que  $e_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y de esta forma los estados estimados convergen a los estados verdaderos.  $K_0$  debe ser seleccionado tal que los valores propios de  $A_0$  estén en el lado izquierdo del eje real en el plano complejo (Alvarez., 1996b). Los valores de  $K_0$  pueden ser asignados arbitrariamente.

Las ecuaciones diferenciales del error de observación quedan definidas como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2 \\ &\vdots \\ \dot{e}_i &= -k_i e_i + e_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{e}_\kappa &= -k_\kappa e_1 \\ \eta &= e_1\end{aligned}$$

Tomando  $\eta$  y derivándola una vez tenemos:

$$\dot{\eta} = \dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 = -k_1 \eta + e_2\tag{4.14}$$

Derivando nuevamente tenemos:

$$\ddot{\eta} = -k_1 \dot{\eta} + \dot{e}_2 = -k_1 \dot{\eta} - k_2 \eta + e_2\tag{4.15}$$

Derivando  $\kappa$  veces tenemos:

$$\eta^{(\kappa)} = -k_1 \eta^{(\kappa-1)} - \dots - k_\kappa \eta\tag{4.16}$$

Entonces  $A_0$  es la *matriz compañera vertical izquierda* de la ecuación diferencial:

$$\eta^{(\kappa)} + k_1 \eta^{(\kappa-1)} + \dots + k_\kappa \eta = 0\tag{4.17}$$

cuya ecuación característica asociada es:

$$\lambda^{(\kappa)} + k_1 \lambda^{(\kappa-1)} + \dots + k_\kappa = 0 \tag{4.18}$$

Para determinar los coeficientes de la ecuación anterior tomamos como referencia un tiempo característico ( $\tau_c$ ) y un factor de amortiguamiento u oscilación ( $\xi$ ) y cuyos polos complejos conjugados son:

Si  $\kappa$  es par:

$$\lambda_i = a \pm b_i = -\frac{\xi}{\tau_c} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_c} i, \quad \xi < 1 \tag{4.19}$$

Si  $\kappa$  es impar:

$$\lambda_i = a \pm b_i = -\frac{\xi}{\tau_c} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_c} i, \quad \lambda_\kappa = -\frac{1}{\tau_c}, \quad \xi < 1 \tag{4.20}$$

Dado un tiempo característico de referencia y un factor de oscilación de referencia, se calculan  $\kappa$  polos, complejos conjugados con las ecuaciones (4.19 y 4.20). Del producto de todos los polos se determinan los coeficientes de la ecuación característica de (4.6):

$$\prod_{i=1}^{\kappa} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^\kappa + k_1 \lambda^{\kappa-1} + \dots + k_{\kappa-1} \lambda + k_\kappa \tag{4.21}$$

En el apéndice E se presenta una tabla para el cálculo de las ganancias del estimador con diferentes grados de observabilidad.

La prueba de suficiencia para la estabilidad puede verse en (Alvarez, 1996b). Esa condición se cumple si se logran colocar los polos del estimador suficientemente lejos (a la izquierda) del eje real en el plano complejo, manteniendo los polos dentro de una banda sobre el eje imaginario del plano complejo, para garantizar la convergencia del estimador.



### 4.3 Evaluación del jacobiano del mapa de detectabilidad ( $\phi_t$ ).

De acuerdo a los conceptos anteriores, debemos conocer la salida ( $y$ ) y sus derivadas para determinar la detectabilidad de las composiciones en la columna de destilación a partir de temperaturas. Pero resulta complicado y laborioso desarrollar las derivadas analíticamente, debido a que se tienen 24 estados. Sin embargo con una linealización del sistema se puede verificar la propiedad de observabilidad numéricamente.

Considerando el sistema dinámico lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x \\ y &= C(x)x \end{aligned} \tag{4.22}$$

El cual es un caso especial de ( $\dot{x} = f(x)$ ,  $y = h(x)$ ) para  $f(x) \equiv A(x)x$  y  $h(x) \equiv C(x)x$ .  $A(x)$  es la matriz jacobiana de  $f(x)$ , cuyos elementos están definidos como  $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$  y  $C(x)$  es la matriz jacobiana de  $h(x)$ , cuyos elementos son  $c_{ij} = \partial h_i / \partial x_j$  (ver ecuaciones 3.18).

Desarrollando las derivadas de la salida para el sistema lineal:

$$\dot{y} = C(x)\dot{x} = C(x)A(x)x = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \dots = L_r h(x)$$

$$\ddot{y} = C(x)A(x)\dot{x} = C(x)A^2(x)x = L_r^2 h(x)$$

$$\ddot{y} = C(x)A^2(x)\dot{x} = C(x)A^3(x)x = L_r^3 h(x)$$

⋮

$$y^{(k)} = C(x)A^k(x) = L_r^k h(x)$$

De esta forma tenemos que:

$$\phi_{1x}(x) = \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x)x \\ C(x)A(x) \\ \vdots \\ C(x)A^{k-1}(x) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Para evitar confusiones con la notación de este trabajo, definiremos  $v$  como el vector de estados del sistema lineal. Aplicando los conceptos anteriores al caso de estudio (ecuaciones 3.17), se tiene que el sistema linealizado es el siguiente:

Balance total de masa en el evaporador:

$$\dot{v}_B = \alpha\beta(m_1 - m_0)^{\beta-1} - k_p v_B \quad (4.24.a)$$

Balance total de masa en el plato i-ésimo:

$$\dot{v}_i = \alpha\beta(m_{i+1} - m_0)^{\beta-1} v_{i+1} - \alpha\beta(m_i - m_0)^{\beta-1} v_i \quad (4.24.b)$$

Balance total de masa en el plato 5:

$$\dot{v}_5 = \alpha_m \beta_m (m_{SA} - m_{0m})^{\beta_m-1} v_{SA} - \alpha\beta(m_5 - m_0)^{\beta-1} v_5 \quad (4.24.c)$$

Balance total de masa en la sección de alimentación:

$$\dot{v}_{SA} = \alpha\beta(m_6 - m_0)^{\beta-1} v_6 - \alpha_m \beta_m (m_{SA} - m_{0m})^{\beta_m-1} v_{SA} \quad (4.24.d)$$

Balance total de masa en el plato 10:

$$\dot{v}_{10} = -\alpha\beta(m_{10} - m_0)^{\beta-1} v_{10} \quad (4.24.e)$$

Balance de masa del componente más volátil en el evaporador:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{XB} = & \left( \frac{\alpha\beta(m_1 - m_0)^{\beta-1}(c_1 - c_B)}{m_B} \right) v_1 + \left( \frac{\alpha(m_1 - m_0)^\beta}{m_B} \right) v_{c1} \\ & + \left[ -\frac{\alpha(m_1 - m_0)^\beta}{m_B} - \frac{V}{m_B} \left( \frac{d\omega(c_B)}{dc_B} \right) + \frac{V}{m_B} \right] v_{cB} \end{aligned} \quad (4.24.f)$$

Balance de masa del componente más volátil en el plato 1:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{c1} = & \left( \frac{\alpha\beta(m_2 - m_0)^{\beta-1}(c_2 - c_1)}{m_1} \right) v_2 + \left( \frac{\alpha(m_2 - m_0)^\beta}{m_1} \right) v_{c2} \\ & + \left[ -\frac{\alpha(m_2 - m_0)^\beta}{m_1} - \frac{V}{m_1} \left( \frac{d\omega(c_1)}{dc_1} \right) \right] v_{c1} + \left[ \frac{V}{m_1} \left( \frac{d\omega(c_B)}{dc_B} \right) \right] v_{cB} \end{aligned} \quad (4.24.g)$$

Balance de masa del componente más volátil en el plato i-ésimo:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{ci} = & \left( \frac{\alpha\beta(m_{i+1} - m_0)^{\beta-1}(c_{i+1} - c_i)}{m_i} \right) v_{i+1} + \left( \frac{\alpha(m_{i+1} - m_0)^\beta}{m_i} \right) v_{ci+1} \\ & + \left[ -\frac{\alpha(m_{i+1} - m_0)^\beta}{m_i} - \frac{V}{m_i} \left( \frac{d\omega(c_i)}{dc_i} \right) \right] v_{ci} + \left[ \frac{V}{m_i} \left( \frac{d\omega(c_{i-1})}{dc_{i-1}} \right) \right] v_{ci-1} \end{aligned} \quad (4.24.h)$$

Balance de masa del componente más volátil en el plato de alimentación:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{SA} = & \left( \frac{\alpha\beta(m_6 - m_0)^{\beta-1}(c_6 - c_{SA})}{m_{SA}} \right) v_6 + \left( \frac{\alpha(m_6 - m_0)^\beta}{m_{SA}} \right) v_{c6} \\ & + \left[ -\frac{\alpha_m(m_{SA} - m_0)^{\beta_m}}{m_{SA}} - F_A - \frac{V}{m_{SA}} \left( \frac{d\omega(c_{SA})}{dc_{SA}} \right) \right] v_{cSA} + \left[ \frac{V_A}{m_{SA}} \left( \frac{d\omega(c_5)}{dc_5} \right) \right] v_{c5} \end{aligned} \quad (4.24.i)$$

Balance de masa del componente más volátil en el plato 10:

$$\dot{v}_{c10} = \left[ -\frac{F_R}{m_{10}} - \frac{V}{m_{10}} \left( \frac{d\omega(c_{10})}{dc_{10}} \right) \right] v_{c10} + \left[ \frac{V}{m_{10}} \left( \frac{d\omega(c_9)}{dc_9} \right) \right] v_{c9} \quad (4.24.j)$$

donde cada variable linealizada de estado representa lo siguiente:

$v_B$  a los moles en el evaporador;  $v_i$  es el líquido retenido en el plato  $i$  ( $i=1,2,\dots,10$ );  $v_{SA}$  es el líquido retenido en la sección de alimentación;  $v_{CB}$  representa a la composición molar en el evaporador;  $v_{ci}$  es la composición del líquido retenido en el plato  $i$  ( $i=1,2,\dots,10$ );  $v_{CSA}$  es la composición del líquido retenido en la sección de alimentación.

De las ecuaciones (4.24) se observa que la estructura de la matriz (A) es:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{12,12} & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & a_{13,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & | & a_{13,13} & a_{13,14} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{14,3} & 0 & \dots & 0 & | & a_{14,13} & a_{14,14} & a_{14,15} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{15,4} & \dots & 0 & | & 0 & a_{15,14} & a_{15,15} & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{23,12} & | & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{23,23} & a_{23,24} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{24,23} & a_{24,24}
 \end{array}$$

cuyos elementos están definidos por  $a_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$ .

Tomando como medición a la temperatura del plato 10, la matriz jacobiana de la salida tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{1,24}
 \end{array}$$

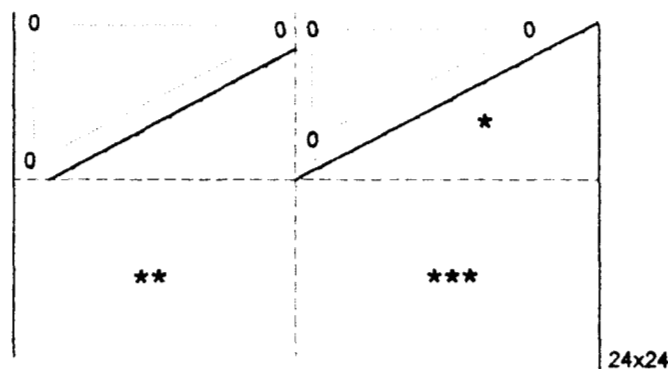
Las funciones de la temperatura y del equilibrio líquido - vapor son complejas, por lo que la derivada analítica no fue obtenida explícitamente. Se utilizó una derivada aproximada que fue calculada numéricamente para ambas funciones.

Conocida la estructura de (A) y (C),  $\phi_{ix}$  es calculado con el siguiente arreglo para determinar el índice de observabilidad del sistema ( $\kappa$ ), en el caso de una medición:

$$\phi_{ix}(x) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\kappa-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

El arreglo anterior corresponde a la matriz de observabilidad de sistema linealizado.

Tomando como referencia un estado estacionario y seleccionando la temperatura del plato 10 como medición, se calculo numéricamente el arreglo  $\phi_{ix}$ . En el apéndice C, se presentan los datos del estado estacionario con los cuales fue calculada la matriz de observación. En el siguiente esquema se da descriptivamente la estructura que tiene  $\phi_{ix}$ :



**Figura 4.1:** Estructura de  $\phi_{ix}$ , particionada en cuadrantes de 12x12.

Para el caso ejemplificado, el índice de observabilidad fue 12 ( $\det|\phi_{ix}| \neq 0$ ). Los cuadrantes denotados por los asteriscos representan arreglos con elementos diferentes a

cero. Al realizar el ejercicio seleccionando otra temperatura (cualquiera de las posibles mediciones), el valor encontrado del índice de observabilidad ( $\kappa$ ) fue siempre el mismo.

Particionando la matriz A en arreglos de 12x12, de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Tenemos que el cuadrante  $A_{11}$  muestra la dependencia de los líquidos retenidos con respecto así mismos ( $\partial m_i / \partial m_j$ ); el cuadrante  $A_{21}$  muestra la dependencia de las composiciones con respecto a los líquidos retenidos ( $\partial c_i / \partial m_j$ );  $A_{22}$  muestra la dependencia de las composiciones con respecto así mismas ( $\partial c_i / \partial c_j$ ). En el caso del cuadrante de elementos cero, muestra la independencia de  $\mathbf{m}$  con respecto a  $\mathbf{c}$  ( $\partial m_i / \partial m_j = 0$ ).

Particionando a  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  en arreglos de 1x12:

$$C = [0 \quad C_{12}] \tag{4.27}$$

tenemos que el par  $(A_{22}, C_{12})$  corresponde al sistema linealizado cuando no hay dinámica hidráulica.

La matriz de observabilidad del par  $A_{22}, C_{12}$ ;  $[C_{12}, C_{12}A_{22}, \dots, C_{12}A_{22}^{\kappa}]^T$  es igual al segundo cuadrante del arreglo  $\phi_{1x}$  (denotado por \* en la figura 4.1)

Para el caso de dos temperaturas se comprobó con el arreglo:

$$\phi_{1x}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_1 A^{\kappa_1 - 1} \\ C_2 \\ \vdots \\ C_2 A^{\kappa_2 - 1} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Realizando el cálculo numérico de  $\phi_x$ , el máximo índice de observabilidad ( $\kappa_1 + \kappa_2$ ) que se encontró fue de 12. Esto sólo cuando se seleccionaba una temperatura en la sección de agotamiento y otra en la sección de rectificación. De otra manera, las combinaciones restantes tienen índices de observabilidad menores de 12. Lo cual no es aceptable para el diseño del estimador, ya que con una sola medición se tiene que es 12. Sólo se verificó con índices iguales ( $\kappa_1 = \kappa_2$ ).

#### 4.4 La dinámica no observable.

Como el rango de  $\phi_1$  es de 12 ( $\kappa=12$ ), existen 12 ( $n-\kappa$ ) coordenadas  $\phi_{13}, \dots, \phi_{24}$  para el sistema 4.2, tales que:  $z = \phi(x) = [\phi_1(x), \phi_{II}(x)]^T$ , donde  $\phi_{II} = [\phi_{13}, \dots, \phi_{24}]^T$  y el rango del jacobiano de  $\phi(x)$  es 24.

$\phi_{II}(x)$  le llamaremos el mapa no observable.

En tanto las ( $\kappa$ ) coordenadas de  $\phi_1(x)$  están ya definidas, las ( $n-\kappa$ ) se pueden elegir libremente, siempre y cuando se cumpla que el determinante del jacobiano de  $\phi(x)$ , sea diferente de cero ( $\text{rango}[\phi_x(x)] = 24$ ). Esto nos garantiza la existencia de su inverso, que es utilizado en el término de innovación del estimador (ecuación 4.4).

Para determinar el mapa no observable se recurre a la física del problema. A partir de temperaturas se logra inferir composiciones, pero no se obtiene ninguna información acerca de los líquidos retenidos en cada etapa de la columna ( $m_i$ ). Así que no importará el número de temperaturas, ni su ubicación.

Seleccionando a los líquidos retenidos ( $m$ ) para las 12 ( $n-\kappa$ ) coordenadas faltantes:

$$\phi_{II} = m \tag{4.29}$$

se debe verificar que cumplan con los conceptos antes descritos.

No se hace ninguna prueba matemática para demostrar que la dinámica de ( $m$ ) es estable, pero físicamente, se sabe que lo es. En los experimento realizados, la

dinámica de los líquidos retenidos fue aproximadamente dos veces más rápida que la de temperaturas y composiciones.

Por otro lado, si cumple con rango $[\phi_x(x)] = 24$  :

$$\phi_x = \begin{bmatrix} \phi_{1x} \\ \phi_{12x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ I_{12 \times 12} & O_{12 \times 12} \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad (4.30)$$

donde:

Para una medición:

$$[\sigma_1 \ \sigma_2] = [C, CA, \dots, CA^k]^T$$

$$\sigma_2 = [C_{12}, C_{12} A_{22}, \dots, C_{12} A_{22}^k]^T$$

$I_{12 \times 12}$  es la matriz identidad

$O_{12 \times 12}$  es un arreglo de ceros.

Para dos mediciones:

$$[\sigma_1 \ \sigma_2] = [C_1, \dots, C_1 A^{k_1}, C_2, \dots, C_2 A^{k_2}]^T$$

$$\sigma_2 = [C_{12}, \dots, C_{12} A_{22}^{k_1}, C_{12}, \dots, C_{12} A_{22}^{k_2}]^T$$

$I_{12 \times 12}$  es la matriz identidad

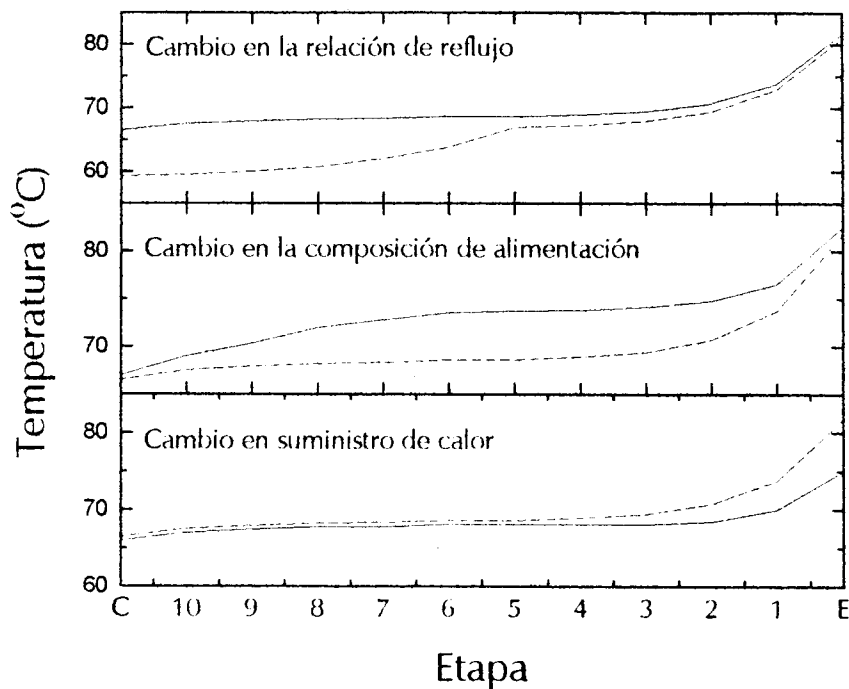
$O_{12 \times 12}$  es un arreglo de ceros.

De lo anterior se concluye que para una o dos mediciones de temperatura, el estimador existe.

Cuando se considera a la planta sin dinámica hidráulica (líquidos retenidos constantes), el sistema es completamente observable.



#### 4.5 Selección de la ubicación de las mediciones.



**Figura 4.2:** Comparación de los perfiles de temperatura en la columna antes y después del cambio en escalón: ( ) estado estacionario inicial; ( ) estado estacionario final, (\*) zona más sensible.

El sistema de medición no solo será para retroalimentar al detector si no que también deberá indicarnos si el detector esta funcionando correctamente. Este sistema de medición deberá ser suficientemente sensible para detectar cualquier cambio en la planta. En base a lo anterior el punto de medición se toma en las etapas más sensibles y las que están más cerca de la fuente generadora del cambio.

Con los experimentos descritos en el capítulo 2, se observó que de acuerdo al cambio en la operación de la columna, la etapa más sensible es diferente para cada perturbación.

Para un cambio en la relación de reflujo las etapas más sensitivas son el condensador y el plato 10. Los platos 9 y 8 tienen un cambio similar, ligeramente

menor. En general, la sección de rectificación fue notablemente afectada por éste cambio. En la sección de agotamiento el efecto del cambio fue pequeño.

Con cambios en la composición de alimentación, la sección intermedia de la columna es la parte más afectada, esto se puede apreciar en el comportamiento de los platos 6 y 5. Disminuyendo el efecto en el condensador y el evaporador.

En cambios en el suministro de calor, las etapas más sensibles son las de la región de agotamiento.

Tomando en cuenta cambios no medidos en la composición de alimentación, la etapa más idónea para ser seleccionada en el estimador es la temperatura en el plato 5. La selección de ésta proporcionaría la información del cambio de la composición.

Considerando cambios erróneos en el suministro de calor (posibles fallas en el equipo), se debe seleccionar la temperatura del plato 1. Así el estimador tiene acción correctiva en el despliegue de los estados.

El conocimiento de la composición del producto destilado es de suma importancia. Con cambios en la relación de reflujo, la composición del destilado cambia notablemente. Para tener un buen seguimiento de los valores de ésta, se debe seleccionar la temperatura del plato 10, en el diseño del estimador.

Yu y Luyben (1987) encuentran que una columna de destilación es observable si el número de mediciones es al menos igual al número de componentes menos 1. Joseph y Brosilow (1978) muestran que si todas las mediciones son usadas, el desempeño del estimador no necesariamente es el mejor. Mejdell y Skogestad (1991) muestran que cuando son usadas más mediciones de las mínimas necesarias, hasta cierto número, el estimador muestra gran precisión y robustez para cambios en las condiciones de operación (Baratti y col, 1995)

Para el estimador con una sola medición de temperatura se seleccionó la temperatura del plato 10. En el caso de dos temperaturas, se tomó a las temperaturas de los platos 10 y 3. El plato 3 fue escogido porque es igualmente sensible a cambios en la alimentación, así como cambios en el suministro de calor.

### 4.6 Construcción de la ganancia.

La prueba de detectabilidad para el sistema fue constructiva, ya que con ésta se encontró la estructura de  $\phi_x(x)$ . En la ecuación 4.1, es utilizado su inverso, el cual se define:

$$\phi_x^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{12 \times 12} & I_{12 \times 12} \\ \sigma_2^{-1} & \sigma_2^{-1} \sigma_1 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

multiplicando la ecuación anterior por  $[K_0, 0]^T$  tenemos:

$$\phi_x^{-1} \begin{bmatrix} K_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \sigma_2^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

donde  $\sigma_2 = [C_{12} \quad C_{12}A_{22} \quad \dots \quad C_{12}A_{22}^{k-1}]$ , (ver ecuación 4.30).

El sistema a resolver en coordenadas originales, es el siguiente:

<b>Parte No observable:</b>	$\dot{m} = f[m(t)]$
<b>Parte Observable</b>	$\dot{c} = f[m(t), c(t)] + K_0 \sigma_2^{-1} [y(t) - h(c)]$

(4.33)

#### *Sintonización de las ganancias del estimador:*

En esta sección se establecen los valores de las ganancias de observador. De acuerdo a la metodología descrita anteriormente, la estructura de las ganancia se calcula dando un tiempo característico ( $\tau$ ) y un factor de amortiguamiento ( $\xi$ ). En el capítulo 2 se observó que los tiempos de asentamiento de la columna están entre 15 a 40 minutos. Así sus tiempos característicos ( $\tau$ ) están definidos entre 3 a 10 minutos. El factor de oscilación ( $\xi$ ) que se calculó estuvo definido entre 0.5 y 1. Para el estimador con una medición se tomó un tiempo característico ( $\tau$ ) de 6 minutos y un factor de oscilación ( $\xi$ ) de 0.9; para el caso de dos mediciones fue de 4 minutos y 0.9, respectivamente. Estos valores hicieron que el sistema fuera estable, sin oscilaciones y de respuesta rápida.

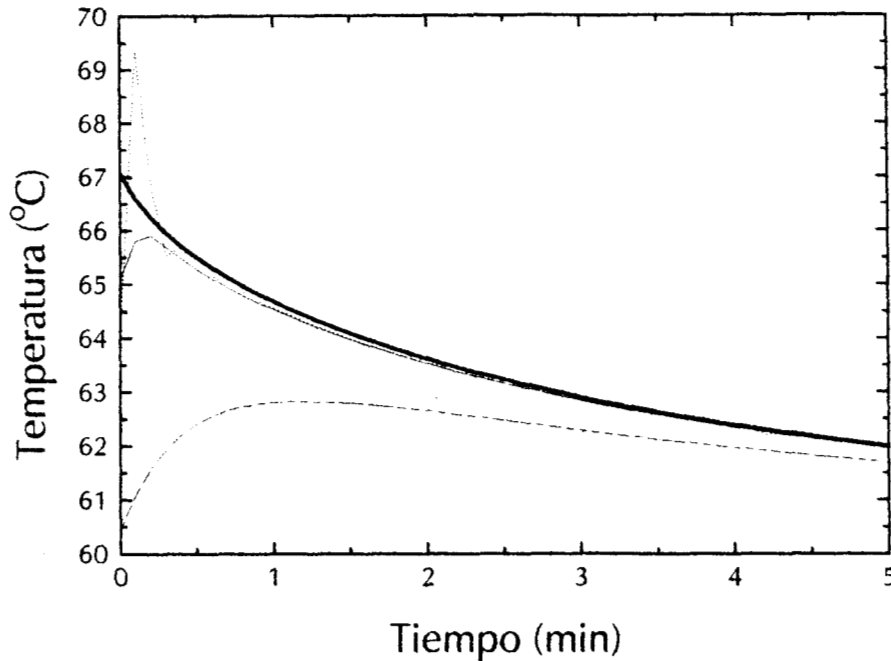


Figura 4.3: Desempeño del estimador con una medición para diferentes tiempos característicos:

(-) Temperatura real; (- -)  $\tau = 20$  min.; (···)  $\tau = 3$  min.; (- ·)  $\tau = 6$  min

*Integrador:*

En algunas situaciones, el estimador presentaba una diferencia entre la medición y el estimado de la salida. Este error es llamado *error en estado estacionario* u *sesgo*. Esta desviación se eliminó agregando acción integral en el estimador:

$$v_{int} = K_{int} \phi_x^{-1} \int [y(t) - h(c)] dt \tag{4.34}$$

donde  $v_{int}$  es la acción integral y  $K_{int}$  es el vector de ganancias integrales:

$$K_{int} = [k_{int}, 0, 0, \dots, 0]^T; \dim K_{int} = n; \text{ donde } k_{int} = -\frac{1}{\tau_c^{int}}$$

$\tau_c^{int}$  es el tiempo característico integral. La acción integral no elimino el offset, pero lo disminuyo considerablemente. El valor del tiempo característico integral seleccionado fue igual al tiempo característico del estimador.

## 4.7 Desempeño del estimador.

### 4.7.1 Estimador con una medición de temperatura.

#### a) Efecto de la hidráulica de plato:

Con una sola medición el modelo del estimador con dinámica hidráulica tiene un desempeño satisfactorio. Este estimador se inicia con condiciones erróneas en las composiciones (10% de error). Se puede observar que la temperatura estimada converge en menos de un minuto a la temperatura de la medición en el plato 10. En la dinámica de composiciones se puede notar que la convergencia más rápida se da en la etapa de medición, siendo más lenta la convergencia en las etapas más alejadas de la medición. Así podemos ver que en el plato 10, la convergencia se da en menos de un minuto, mientras que en el plato 1 se da en 10 minutos.

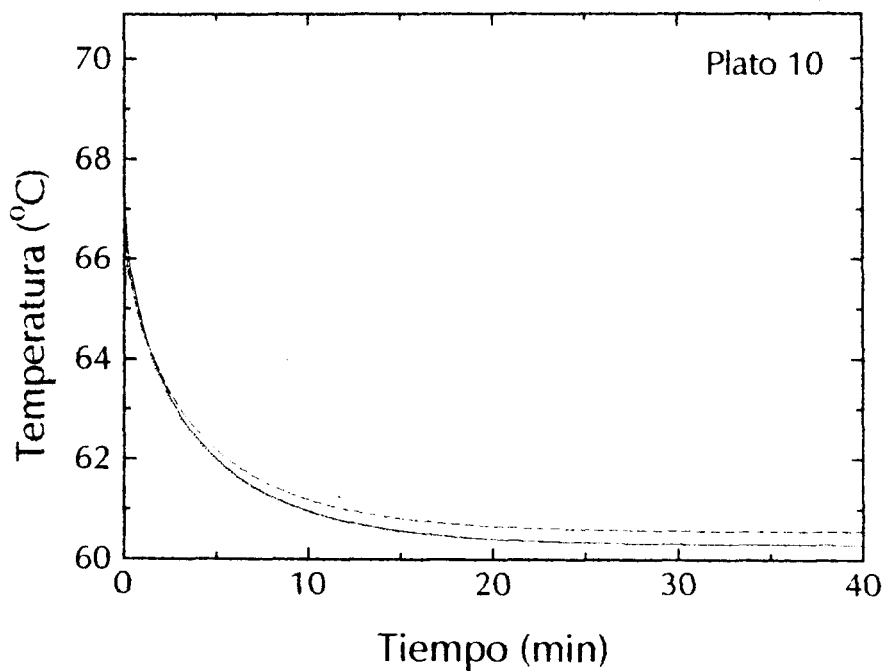


Figura 4.4: Evolución de la temperatura de medición (—) para un cambio de reflujo, y desempeño del estimador con (· · ·) y sin (- · -) dinámica hidráulica.

Cuando se desprecian los cambios en los líquidos retenidos por plato, el estimador presenta un sesgo apreciable en la convergencia de la temperatura de medición. Para este caso se tomaron las condiciones iniciales correctas. La acción correctiva del estimador tiene un desempeño aceptable en las etapas superiores de la columna para la dinámica de composiciones, precisamente por estar cerca de la medición. Pero no logra reproducir las trayectorias de las demás etapas.

Considerar la dinámica hidráulica de plato favorece que el estimador dé mejores predicciones a lo largo de la columna. Además de no presentar sesgos en los estados estimados con respecto a las trayectorias de los estados reales.

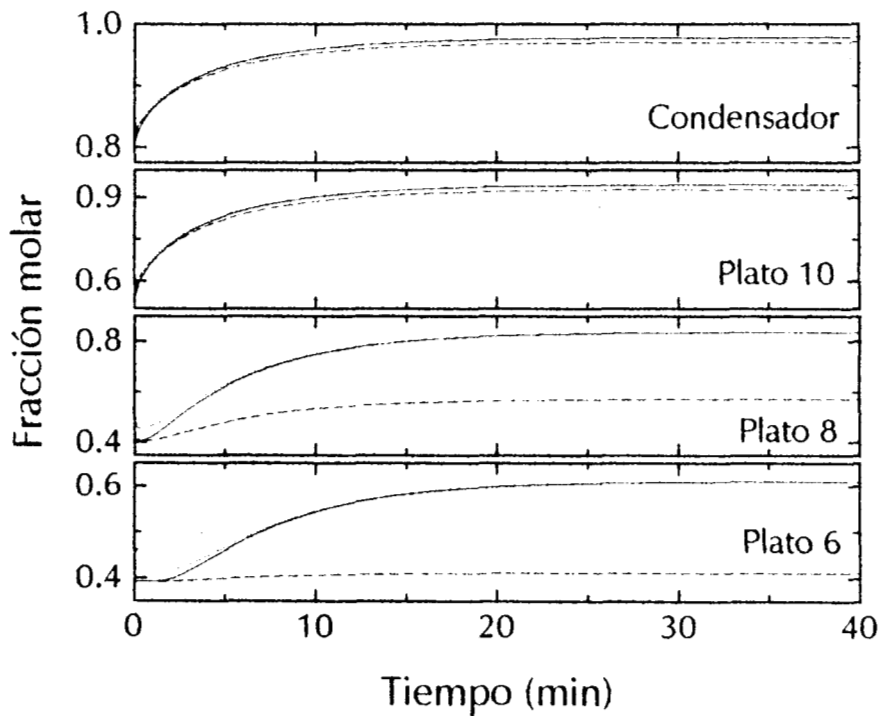


Figura 4.5: Composición real (—) en la sección de rectificación, estimador con (···) y sin (---) dinámica hidráulica de plato.

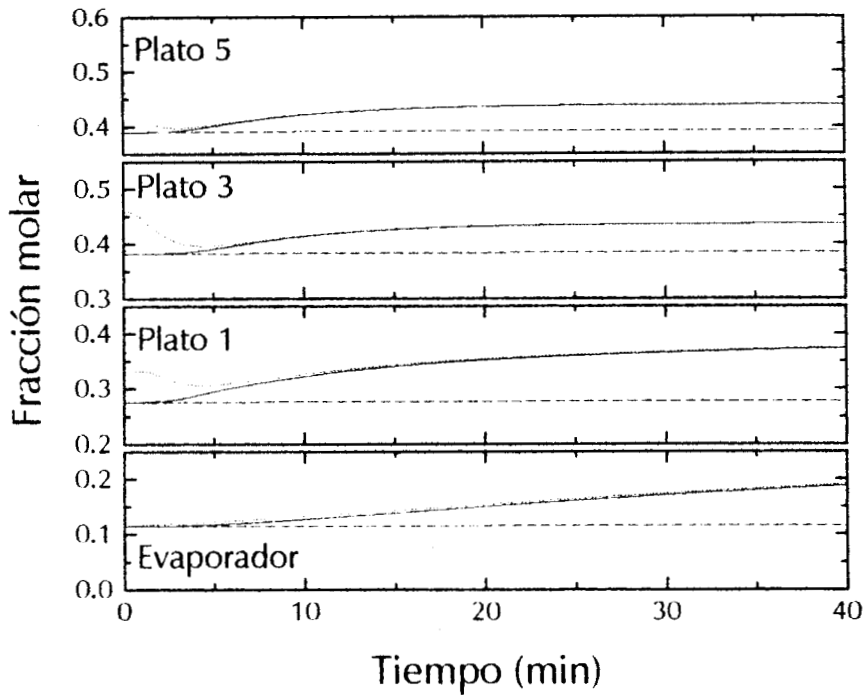


Figura 4.6: Composición real (—) en la sección de agotamiento, estimador con (· · ·) y sin ( - - -) dinámica hidráulica de plato.

*b) Efecto de la Termodinámica:*

En las gráficas anteriores los estados se calcularon con la ecuación de Wilson. Esta es una relación de equilibrio adecuada para mezclas líquidas que incluyen alcoholes. Para ver su contribución en el desempeño del estimador se considero equilibrio ideal y un equilibrio de Wilson con un error del 10%. De esta forma se determina la tolerancia ante errores en el equilibrio, para el estimador. En esta sección sí se consideró la dinámica de los cambios en los líquidos retenidos.

La temperatura predicha por el estimador con equilibrio ideal converge sin ningún problema a la medición de la temperatura del plato 10. De igual manera converge la temperatura predicha por el estimador con errores en el equilibrio. El error fue generado alterando un parámetro de la ecuación de Wilson (3.6.c). Se multiplicó la

relación  $V'_j / V'_i$ , por un factor de 1.25. Este error no alteró la forma de la curva de equilibrio, pero si la desplazó en un 10% (apéndice B).

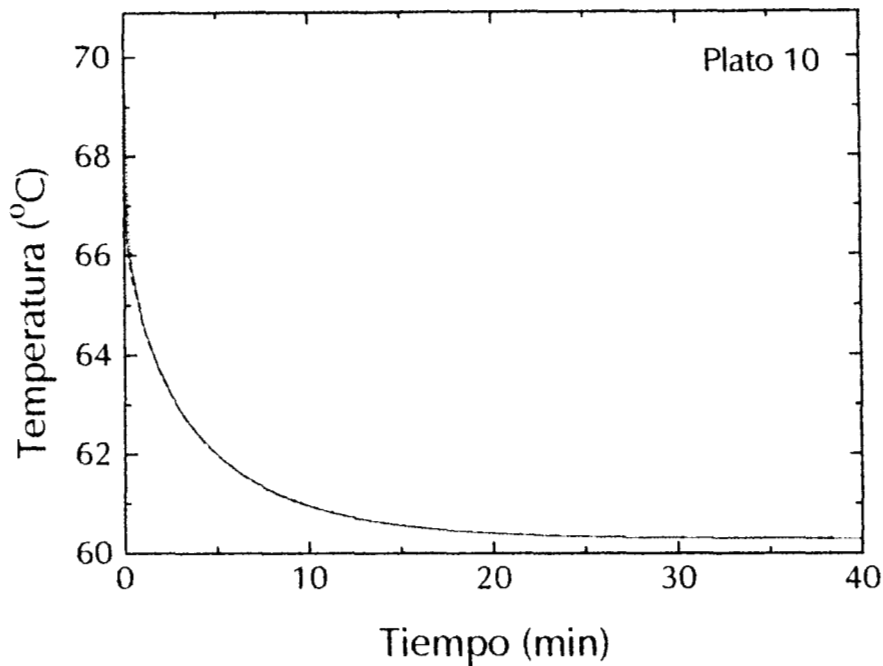


Figura 4.7: Evolución de la medición de temperatura (—) para un cambio en la relación de reflujo, estimador con equilibrio ideal (---) y con (-.-) equilibrio erróneo.

El estimador con equilibrio ideal sobre estima la dinámica de composiciones. Esto se observa en la composición del plato 10, donde el cambio predicho por el estimador es más rápido que el cambio real. También tiene problemas de convergencia, por lo que presenta un sesgo en el estado estacionario final. Los sesgos más grandes se dan en las etapas cuyas composiciones van de 0.2 a 0.6. Esto es porque en el intervalo antes mencionado se presentan las desviaciones más grandes a la idealidad para el equilibrio.

En menor grado, el estimador con equilibrio erróneo presenta los mismos problemas que el estimador con equilibrio ideal.



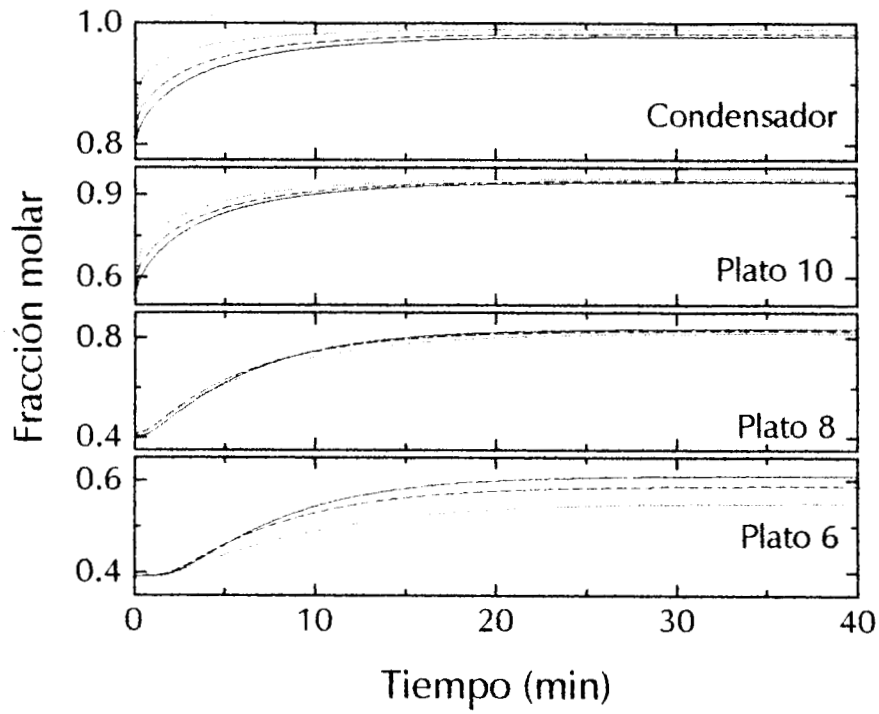


Figura 4.8: Composición real (—), estimador con equilibrio ideal (---) y con (· · ·) equilibrio erróneo.

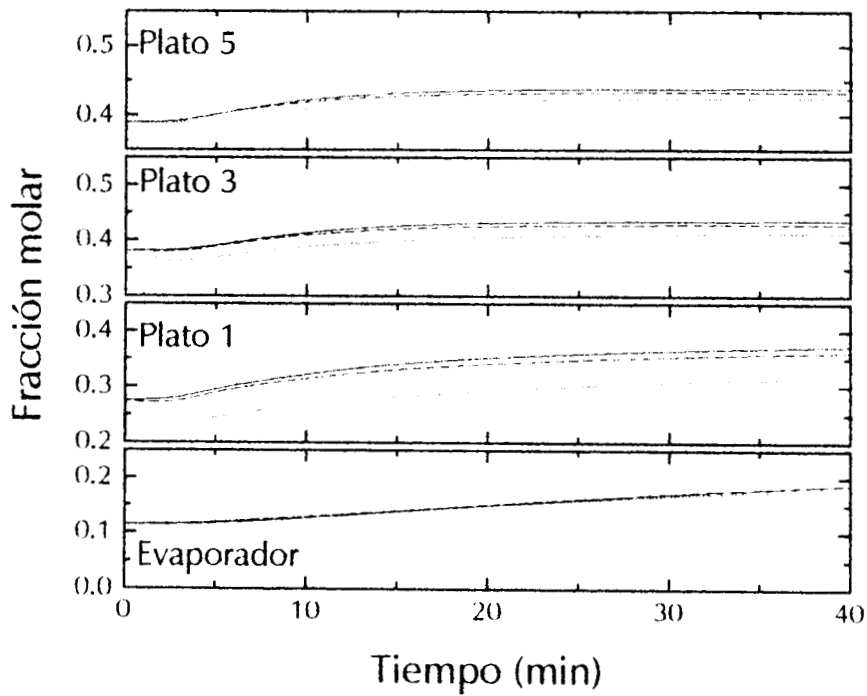


Figura 4.9: Composición real (—), estimador con equilibrio ideal (---) y con (· · ·) equilibrio erróneo.

#### 4.7.2 Estimador con dos mediciones de temperatura.

##### a) Efecto de la hidráulica de plato:

El estimador con dinámica hidráulica de plato mejoró su desempeño al agregarle una segunda medición de retroalimentación. Para este caso el estimador partió de condiciones iniciales con un error del 20%. La convergencia del estimador en composiciones para las etapas de medición se da en menos de dos minutos, lo que favorece una convergencia más rápida en las demás etapas.

Para el caso del estimador con dos mediciones y con líquidos retenidos constantes se presentaron sesgos considerables. El desempeño en la mayoría de las etapas es malo. A excepción de la sección superior donde es aceptable, con sesgos pequeños.

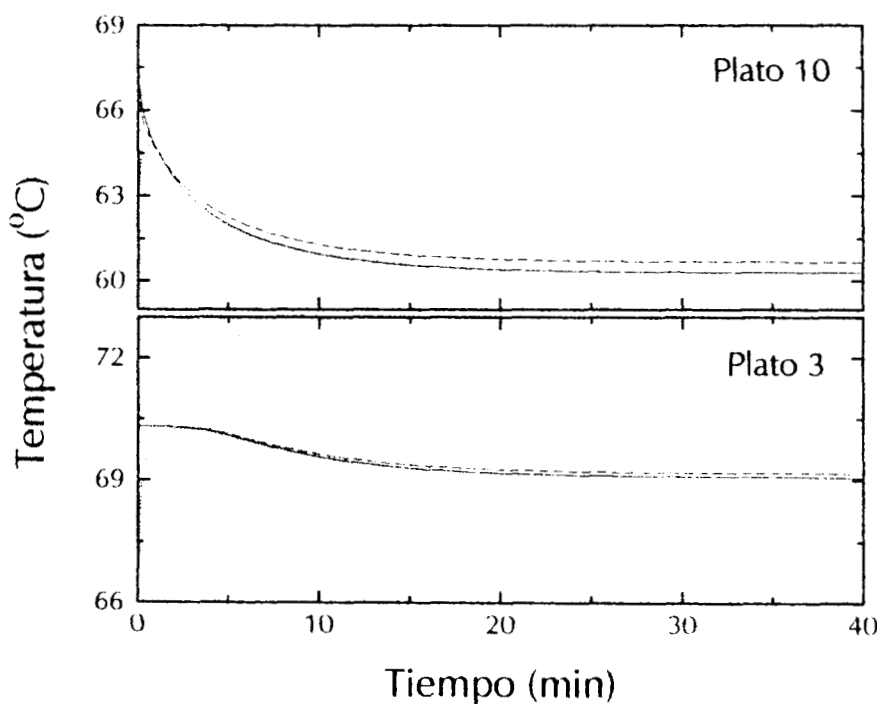


Figura 4.10: Evolución de la temperatura de medición (—) para un cambio de reflujo, y desempeño del estimador con (· · ·) y sin ( - - -) dinámica hidráulica.

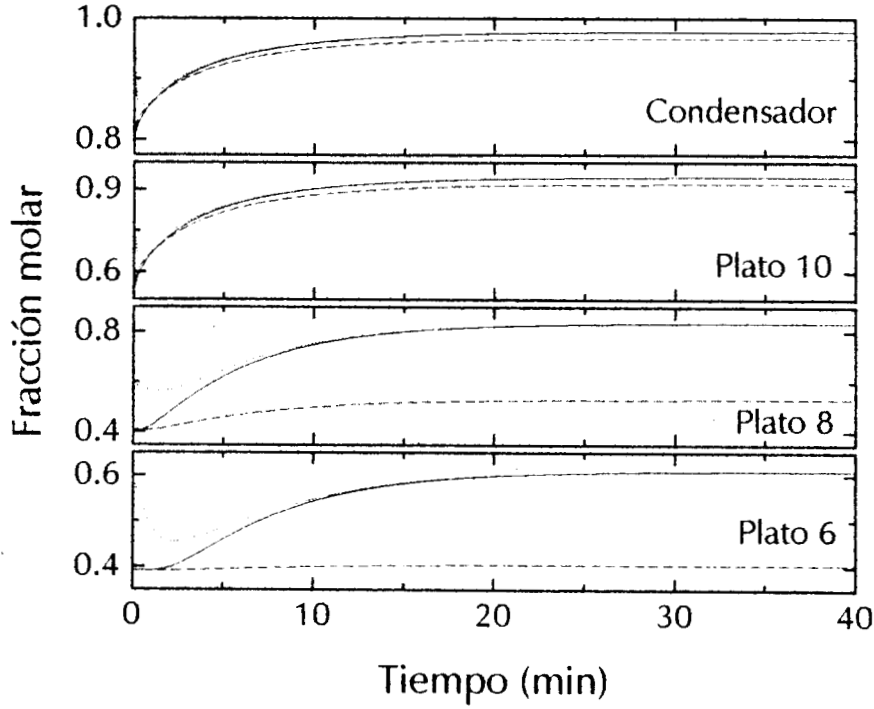


Figura 4.11: Composición real (—), estimador con (····) y sin (---) dinámica hidráulica.

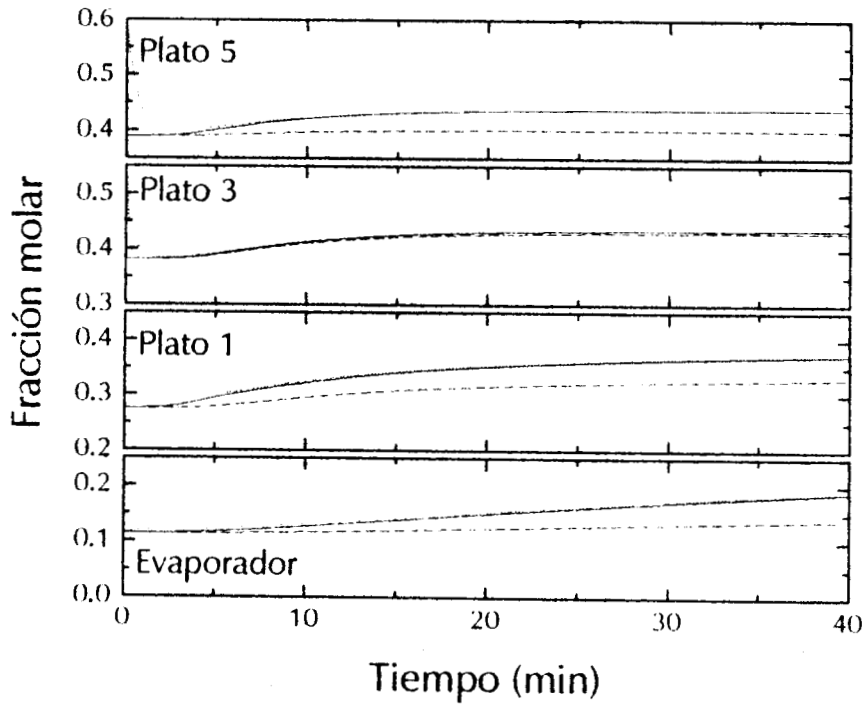
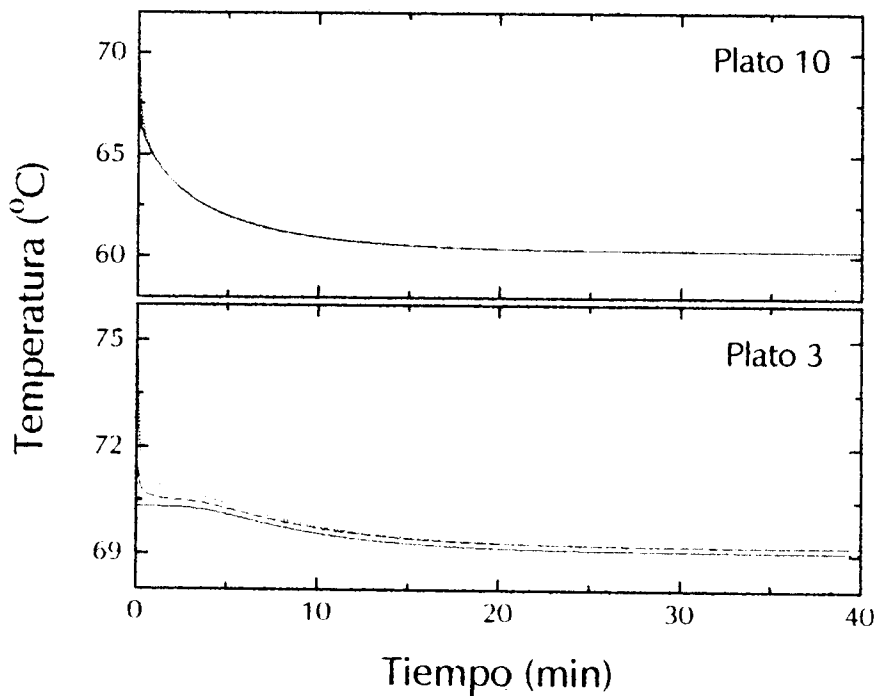


Figura 4.12: Composición real (—), estimador con (····) y sin (---) dinámica hidráulica.

*b) Efecto de la Termodinámica:*

Con dos mediciones y equilibrio ideal, el observador fue peor que con una sola medición y equilibrio ideal. Se presentaron mayores diferencias en la predicción de las composiciones con respecto a las reales. Como era de esperarse las etapas más afectadas fueron las que tenían una composición de la mezcla entre 0.2 y 0.6. Aunque el estimador converge correctamente en temperaturas, su desempeño en composiciones es malo.

En el caso del equilibrio erróneo, el estimador tampoco logro reproducir las composiciones en las etapas de la columna. El error aplicado fue el mismo que se uso para el caso del estimador con una sola medición, y el desempeño del estimador con una sola medición no fue mejorado con una segunda medición.



**Figura 4.13:** Evolución de la medición de temperatura (—) en un cambio en la relación de reflujo, estimador con equilibrio ideal (---) y con (···) equilibrio erróneo.

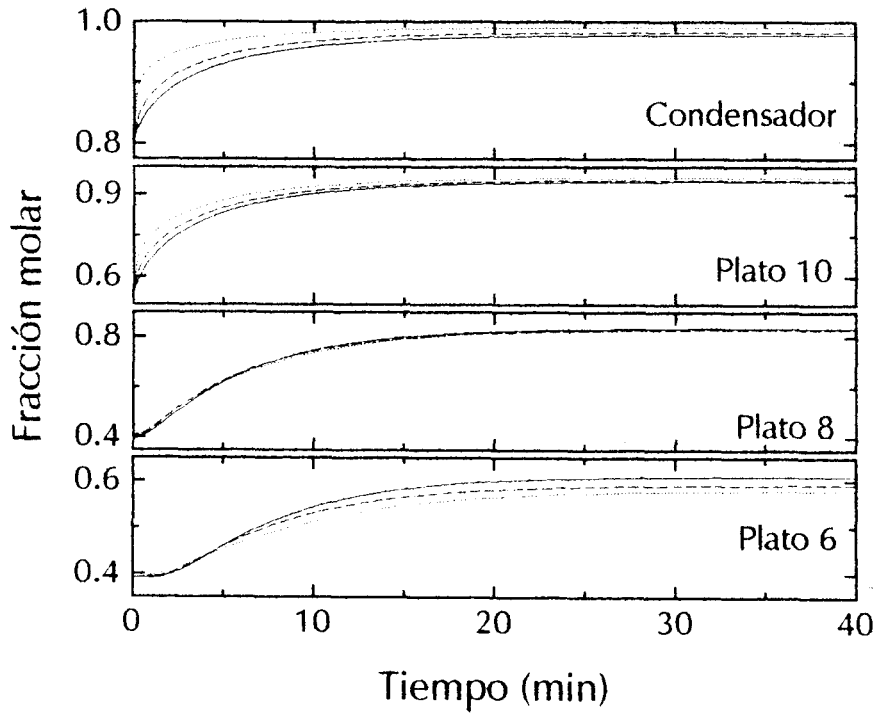


Figura 4.14: Composición real (—), estimador con equilibrio ideal (---) y con (···) Eq. erróneo.

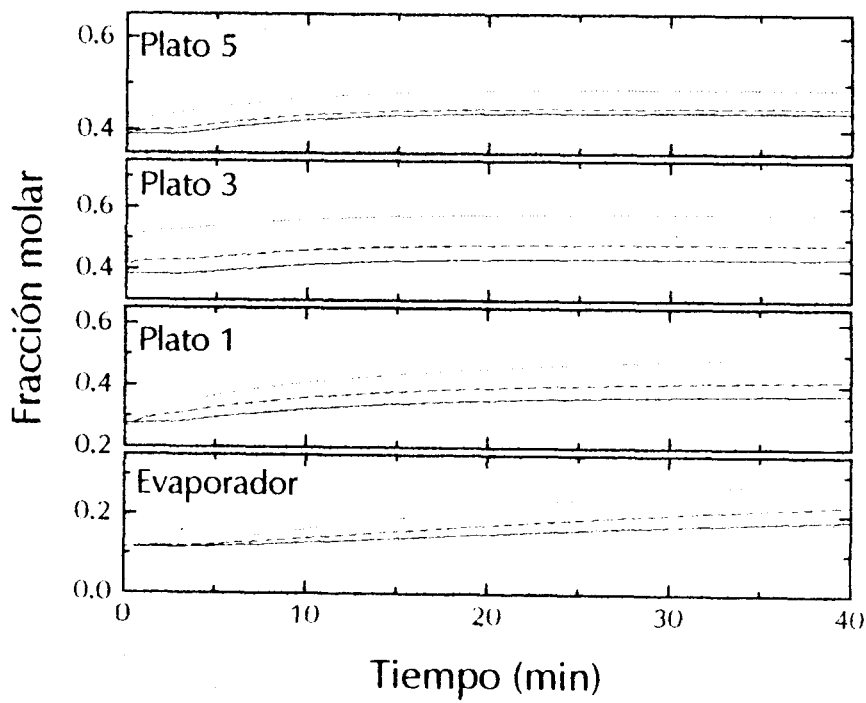


Figura 4.15: Composición real (—), estimador con equilibrio ideal (---) y con (···) Eq. erróneo.

### 4.7.3 Estimador con dos mediciones de temperatura y con errores en las condiciones de operación.

#### a) Error en el cambio en escalón de la relación de reflujo:

En este caso al estimador se le aplica un cambio erróneo en la relación de reflujo, es decir en el modelo se dan valores diferentes a los reales en la relación de reflujo. El cambio real es de 0.22 a 1.5 y en el modelo se programa de 0.22 a 1.0. También se compara el desempeño del estimador con y sin acción integral. El estimador sin integrador logra una predicción buena de las composiciones, con un pequeño sesgo en las temperaturas de medición. Los estimados de la composición del condensador y el evaporador son correctos, pero las predicciones de las composiciones entre el plato 5 y 6 tienen diferencias considerables con respecto a las reales. La acción integral logra eliminar los sesgos en las temperaturas de medición, pero no logra mejorar las predicciones de composición del condensador y el evaporador. Sin embargo tiene un mejor desempeño en las composiciones de los platos 5 al 8.

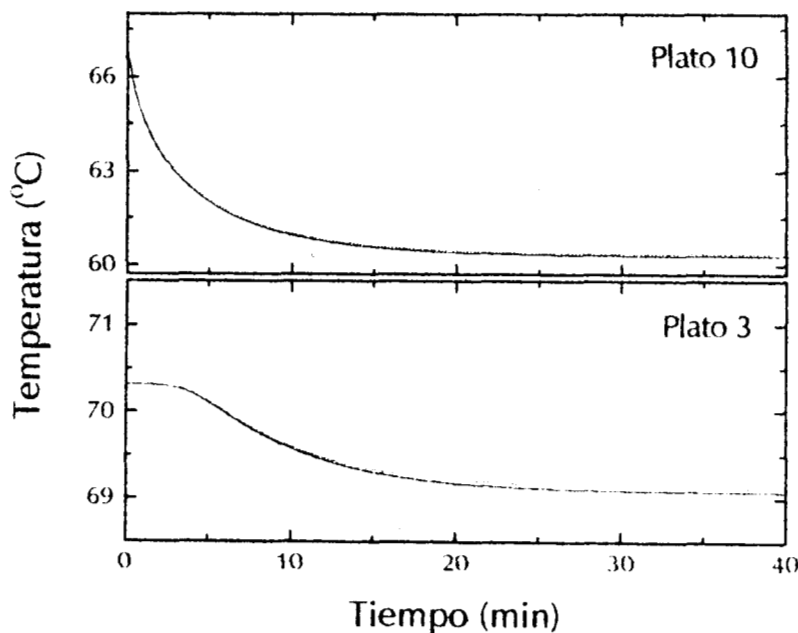


Figura 4.16: Medición de temperatura (—), estimador con error en la relación de reflujo; sin (---) y con (· · ·) integrador.

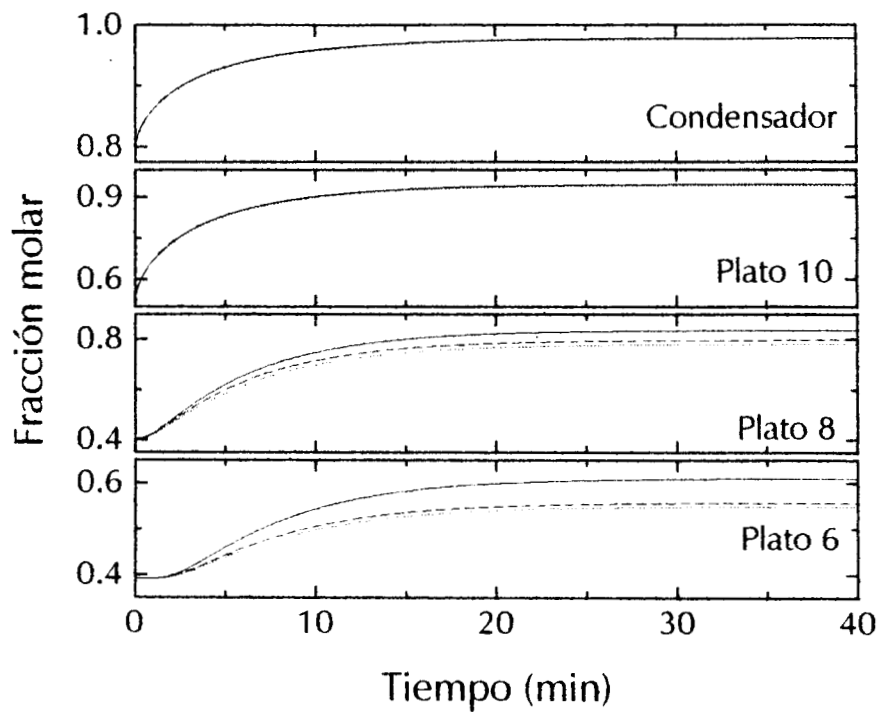


Figura 4.17: Composición real (—), estimador sin (---) y con (· · ·) integrador.

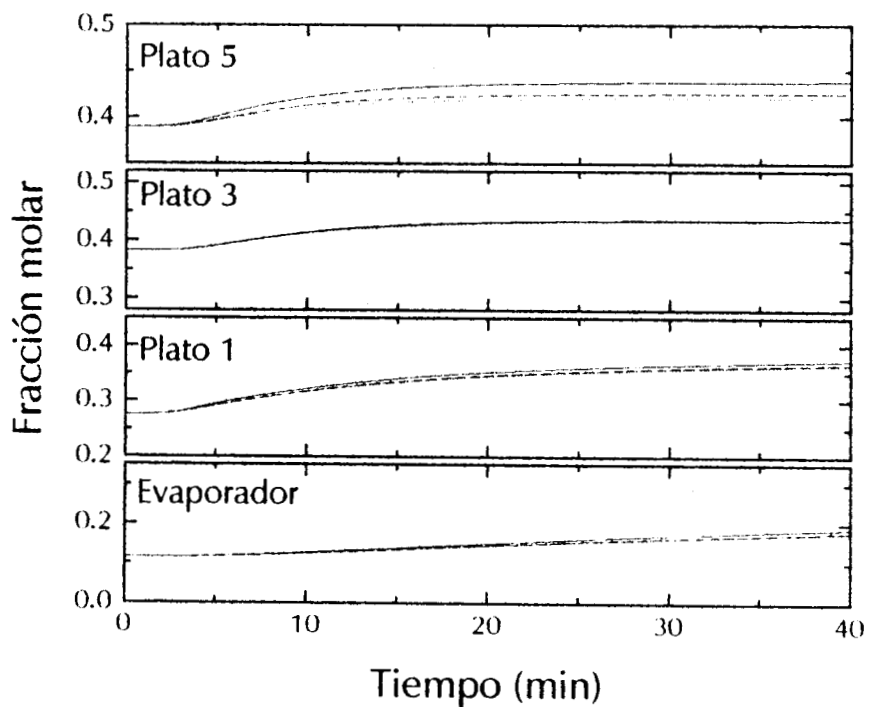
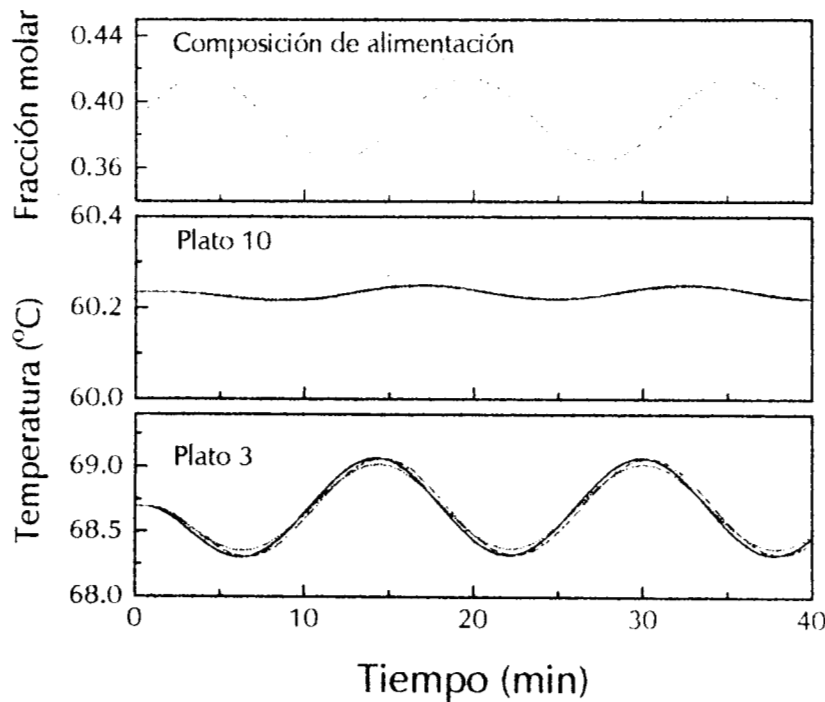


Figura 4.18: Composición real (—), estimador sin (---) y con (· · ·) integrador.

*b) Cambios no medidos de la composición de alimentación:*

Se simularon fluctuaciones en la composición de alimentación para obtener la respuesta del sistema ante dicho cambio. Las fluctuaciones tuvieron un periodo de oscilación de 15 minutos con una amplitud de  $\pm 0.03$  de composición molar. La relación de reflujo fue de 1.5, y el vapor generado fue de 1.8 gr-mol/min. En el estimador se mantuvo fijo el valor de la composición de alimentación en 0.4 (40% molar). También se comparó el desempeño de estimador con y sin acción integral. La convergencia de ambos estimadores es prácticamente aceptable, teniendo mejoras mínimas el estimador con acción integral. Como era de esperarse las fluctuaciones de alimentación afectaron más a la sección de agotamiento.



**Figura 4.19:** Cambio en la composición de alimentación (---); medición de temperatura (—), estimador con  $c_A$  constante, sin (---) y con (---) integrador.



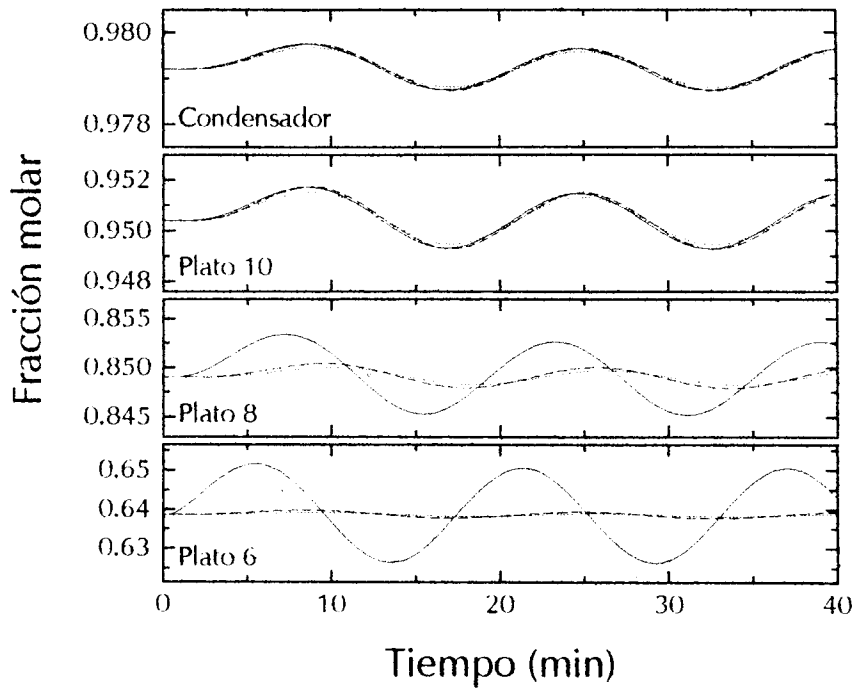


Figura 4.20: Composición real (—), estimador con  $c_A$  constante, sin (---) y con (-·-) integrador.

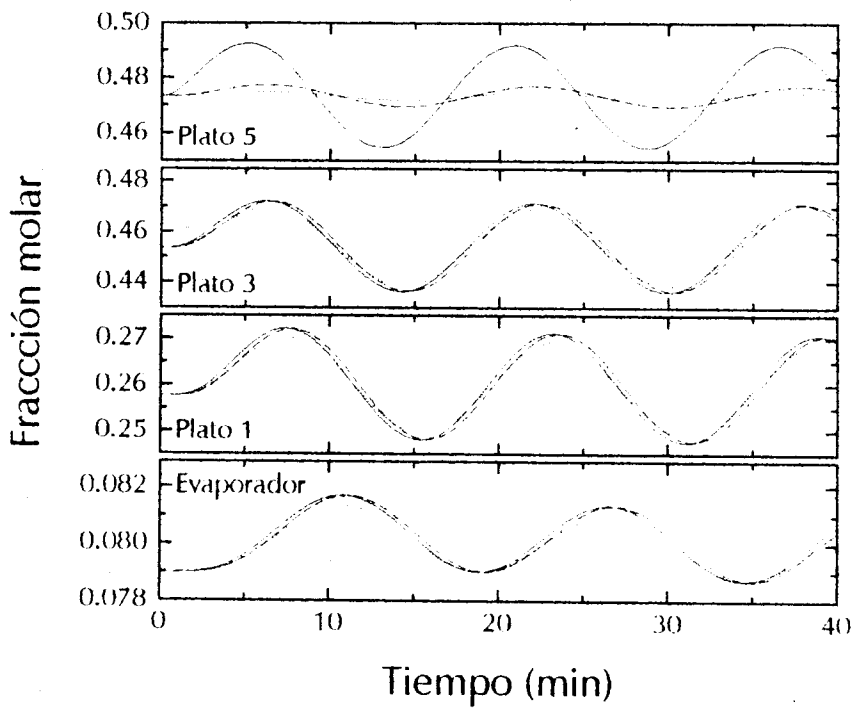


Figura 4.21: Composición real (—), estimador con  $c_A$  constante, sin (---) y con (-·-) integrador.

El desempeño del estimador, ya sea con o sin acción integral, en la sección de rectificación es bueno para el condensador y el plato 10. Teniendo un desempeño pobre en los platos 6 y 8. En la sección de agotamiento, el estimador con acción integral fue apreciablemente mejor que el estimador sin acción integral. Ambos estimadores tuvieron predicciones buenas en esta sección, a excepción del plato 5 donde tuvieron un desempeño malo.

#### **4.8 Sumario.**

Se diseñó un estimador de estados basado en la retroalimentación de mediciones de temperatura. Con esta retroalimentación de temperaturas, el nuevo modelo con estimador converge asintóticamente en las mediciones, ocasionando que las composiciones a lo largo de la columna, converjan también asintóticamente. La sintonización de las ganancias del observador fue hecha en una forma clara y sin dificultades. Se basó en el conocimiento de los tiempos característicos del sistema.

Con respecto a las mediciones de temperatura, si sólo se toma una, se tendrán buenas predicciones en una sección de la columna donde se encuentre la medición, ya sea en la sección de enriquecimiento o a la sección de agotamiento de la columna. Si se desea tener buenas predicciones de composición en ambas secciones de la columna se debe tomar otra medición, con lo que el desempeño del observador se mejora.

La dinámica hidráulica de plato fue seleccionada como dinámica no observable. Cuando ésta se considera constante, el sistema es completamente observable. El desempeño del estimador mejora notablemente cuando se consideran los cambios en los líquidos retenidos por etapa.

El estimador resultó ser muy sensible ante errores en la termodinámica, de tal manera que se generan errores grandes en las predicciones de composición a lo largo de la columna con un equilibrio erróneo. Bajo esta circunstancia el estimador con una sola medición tiene mejor desempeño que con dos mediciones.

Agregando la acción integral al estimador, se disminuye apreciablemente el sesgo en las composiciones próximas a la etapa con medición de temperatura, y sólo se tiene una disminución mínima en las etapa lejanas a la medición.

## *Conclusiones*

Se tomó como caso de estudio una columna de destilación continua para mezclas binarias y a partir de balances de materia se modeló el comportamiento dinámico del sistema. Los parámetros de hidráulica se ajustaron con datos experimentales obtenidos en una columna experimental de doce etapas (diez platos, evaporador y una sección de alimentación) con un condensador total.

El modelo desarrollado logra reproducir correctamente los estados estacionarios inicial y final, bajo los cuales se ajustaron los parámetros de éste, ante un cambio en escalón de la relación de reflujo. Consecuentemente, en el cambio de un estado estacionario a otro, la trayectoria dinámica es reproducida. Sin embargo no logra buenos resultados para todas las condiciones de operación. Basta cambiar las condiciones finales para obtener un tercer estado estacionario, y el modelo no tendrá desempeño correcto. Se obtiene una desviación entre la predicción del modelo y el estado estacionario final real.

En seguida se diseña un estimador de estados basado en la retroalimentación de una medición de temperatura. Con esta medición de temperatura el nuevo modelo con observador, converge asintóticamente en la medición, ocasionando que las composiciones a lo largo de la columna, converjan también asintóticamente.

El sistema líquido con el que se trabajó fue metanol - agua. Para este sistema las relaciones de equilibrio son conocidas exactamente. A lazo abierto (sin acción correctiva del estimador) resultó ser muy sensible ante errores en la termodinámica, de tal manera que se generan errores del 6 al 10 % en las predicciones de composición a lo largo de la columna con un equilibrio erróneo.

El modelo con observador e hidráulica errónea logra tener un buen desempeño, reduciendo aceptablemente el error de las predicciones de un 1 a 4% de diferencia de

las composiciones reales con las calculadas a lo largo de la columna. Con equilibrio erróneo el desempeño del estimador es pobre.

La diferencia entre la predicción y el estado real es comúnmente llamada "*Off Set*". Este sesgo se redujo con la implementación de un integrador, a tal grado que se hizo prácticamente imperceptible.

Agregando la acción integral al observador, se elimina el sesgo en las composiciones próximas a la etapa con medición de temperatura, y solo se disminuye en las etapa lejanas a la medición.

Con respecto a la medición de temperatura, si sólo se toma una, se tendrán buenas predicciones en una sección de la columna donde se encuentre la medición, ya sea en la sección de enriquecimiento o a la sección de agotamiento de la columna. Si se desea tener buenas predicciones de composición en ambas secciones de la columna se debe tomar otra medición, con lo que el desempeño del observador se mejora.

El modelo con estimador que incluye los cambio en los líquidos retenidos (dinámica hidráulica de plato) tiene un mejor desempeño, que el modelo que los considera constantes.

Para trabajos futuros se sugiere estudiar casos con mayores desviaciones de la idealidad en el equilibrio. Esto con el fin de ver el desempeño del observador cuando se presente que la derivada del equilibrio es cero, y ver como modifica el grado de observabilidad. El caso multicomponente seria otra propuesta de estudio para trabajos futuros.

## Bibilografía

- Alsop A y Edgar T.** (1990). *Nonlinear Control Of A High Purity Distillation Column By The Use Of Partially Linearized Control Variables*. Computers Chem. Engng.; 14, 6: 665-678.
- Alvarez J.** (1996). *Dynamic State Estimation Of Nonlinear Plants*. Sometido a publicación en AIChE Journal en Noviembre 1996.
- Alvarez J. y Gammas E.** (1986). *Estimadores Para Control De Procesos*. Ciencia; 37: 71-88.
- Alvarez J, Suárez R. y Sánchez A.** (1991). *Multivariable Nonlinear Control With Output Tracking And Disturbance Rejection For Free-Radical Homopolymerizations In Stirred Tank Reactor*. Manuscrito sometido a Chemical Engineering Science.
- Alvarez R. J.** (1995). *Observers For A Class Of Continuous Tank Reactor Via Temperature Measurement*. Chemical Engineering Science; 50, 9: 1393-1399.
- Alvarez R. J. y Vargas F.** (1995). *State Estimation For A Class Of Nonlinear Oscillators With Chaotic Attractor*. Physics -letters A 197: 116-120.
- Babu J. y Brosilow C.** May (1978). *Part III. Construction Of Optimal And Suboptimal Dynamic Estimators*. AIChE Journal; 24, 3: 500-509.
- Baratti R., Alvarez J. y Morbidelli M.** (1993). *Design And Experimental Verification Of A Nonlinear Catalytic Reactor Estimator*. Chemical Engineering Science; 46, 12: 3203-3218.
- Baratti R., Bertuccio A., Da Rold A. y Morbidelli M.** (1995). *Composition Estimator For A Distillation Column: Theory And Experiments*. 489-494.
- Barolo M., Guarise B., Rienzi S. y Trotta A.** (1994). *Nonlinear Model-Based Start Uand Operation Control Of A Distillation Column. An Experimental Study*. Ind. Eng. Chem.Res.; 34: 31690-3167.
- Brosilow C.** May (1978). *Part I. Design Of Steady State Estimator*. AIChE Journal; 24, 3: 486-492.
- Brosilow C. y Tong M.** May (1978). *Part II. The Structure And Dynamics Of Inferential Control Systems*. AIChE Journal; 24, 3: 492-500.
- Cingara A. y Jovanovic M.** (1990). *Analytical First-Order Dynamic Model Of Binary Model Of Binary Distillation Column*. Chemical Engineering Science; 45, 12: 3585-3592.
- Chien Y. y Fruehauf P.** October (1990). *Consider IMC Tuning To Improve Controller Performance*. Chemical Engineering Progress. 33-41.
- Daoutidis P. y Kumar A.** April (1994). *Structural Analysis And Output Feedback Control Of Nonlinear Multivariable Processes*. AIChE Journal; 40, 4: 647-668

- Deza F., Busvelle E., Gauthier J. y Rakotopara D.** (1992). *High Gain Estimation For Non Linear Systems*. System Control Letters; 18: 295-299.
- Deza F., Busvelle E. y Gauthier P.** (1992). *Exponentially Converging Observers For Distillation Columns And Internal Stability Of The Dynamic Output Feed*. Chemical Engineering Science; 47, 15-16: 3935-3941.
- Distefano G., May F. y Hockaba C.** (1967) *Transient Response And Feed-Forward Control Of A Distillation Tower Subject To A Sequence Of Upsets*. AIChE Journal; 13, 1: 125-130.
- Elicabe G., Ozdeger W. y Georgakis Ch.** (1995). *On-Line Estimation Of Reaction Rates In Semicontinuous Reactors*. Ind. Eng. Chem. Res.; 34: 1219-1227.
- Elicabe G., Ozdeger E. y Georgakis Ch.** (1995). *On-Line Estimation Of Reaction Rates In Semicontinuous Reactors*. Ind. Eng. Chem. Res.; 34: 1219-1227.
- Finco M., Kuyben W. y Polleck R.** (1989). *Control Of Distillation Columns With Low Relative Volatilities*. Ind. Eng. Chem. Res.; 28: 75-83.
- Fliess M.** September (1990). *Generalized Controller Canonical Forms For Linear And Nonlinear Dynamics*. IEEE Transactions on automatic control; 35, 9: 994-1001.
- Fuentes C. y Luyben W.** (1983). *Control Of High-Purity Distillation Columns*. Ind. Eng. Chem. Process. Des. Dev.; 22: 361-366.
- Ganguly S. y Saraf D.** (1995). *On Line Optimization And Dual Composition Control Of A Distillation Column Using A Nonlinear Controller*. Ind. Eng. Chem. Res.; 34: 209-215.
- Gauthier J. y Bornard G.** August (1981). *Observability For Any  $U(T)$  Of Class Of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on automatic control; AC-26, 4: 922-926.
- Gauthier J., Hammouri H. y Othman S.** June (1992). *A Simple Observer For Nonlinear Systems Applications To Bioreactors*. IEEE Transactions on automatic control; 37, 6: 875-880.
- Georgiou A., Georgakis Ch. y Luyben W.** August (1988). *Nonlinear Dynamic Matrix Control For High-Purity Distillation Columns*. AIChE Journal; 34, 8: 1287-1298
- Gibon A., Hammouri H. y Celle F.** (1994). *Nonlinear Observers For Chemical Reactors*. Chemical Engineering Science; 49, 14: 2287-2300.
- Hägglum K. y Waller K.** July (1990). *Control Structures For Disturbance Rejection And Decoupling Of Distillation*. AIChE Journal; 36, 7: 1107-1113.
- Hermann R. y Krener A.** October (1977). *Nonlinear Controllability And Observability*. IEEE Transactions on automatic control; AC-22, 15: 596-602.

- Hirschorn R.** December (1979). *Invertibility Of Multivariable Nonlinear Control Systems*. IEEE Transactions on automatic control; AC-24, 6: 855-865.
- Hu Y. y Ramirez F.** May (1992). *Application Of Modern Control Theory To Distillation Columns*. AIChE Journal; 18, 3: 479-485.
- Hunt L., Su R. y Meyer G.** January (1983). *Global Transformations Of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on automatic control; AC-28: 24-30.
- Hunt L. y Verma M.** October (1994). *Observers For Nonlinear Systems In Steady State*. IEEE Transactions on automatic control; 39, 10: 2113-2118.
- Kantor J.** (1989). *A Finite Dimensional Nonlinear Observer For An Exothermic Stirred-Tank Reactor*. Chemical Engineering Science; 44, 7: 1503-1510.
- Kravaris C. y Kantor J.** (1990). *Geometric Methods For Nonlinear Process Control. 1. Background*. Ind. Eng. Chem. Res.; 29: 2295-2310.
- Kravaris C. y Kantor J.** (1990). *Geometric Methods For Nonlinear Process Control. 2. Controller Synthesis*. Ind. Eng. Chem. Res.; 29: 2310-2323
- Lang L. y Gilles E.D.** (1990). *Nonlinear Observers For Distillation Columns*. Computers Chem. Engng.; 14, 1: 1297-1301.
- Lee J. y Morari M.** (1992). *Robust Inferential Control Of Multi-Rate Sample-Data System*. Chemical Engineering Science; 47, 4: 865-885.
- Lennardson B.** (1989). *Combining Infrequent Indirect Measurements By Estimation And Control*. Ind. Eng. Chem. Res.; 28: 1653-1688.
- Limqueco L., Kantor J. y Harvey S.** (1991). *Nonlinear Adaptive Observation Of An Exothermic Stirred-Tank Reactor*. Chemical Engineering Science; 46, 3: 797-805
- López T., Alvarez J. y Padilla S.** (1996). *State Estimation Of A Continuous Solution Copolymerization Reactor*. Sometido a publicación en el ADCHEM97 en Agosto 1996.
- Luenberger D.** April (1966). *Observers For Multivariable Systems*. IEEE Transactions on automatic control; AC-11, 2: 190-197.
- Luenberger D.** December (1971). *An Introduction To Observers*. IEEE Transactions on automatic control; AC-16, 16: 596-602.
- Luyben W.** (1987). *Derivation Of Transfer Functions For Highly Nonlinear Distillation Columns*. Ind. Eng. Chem. Res.; 26,12: 2490-2494.
- Luyben W.** (1987) *Sensitivity Of Distillation Relative Gain Arrays To Steady-State Gains*. Ind. Eng. Chem. Res.; 26, 2076-2078.



**Luyben W.**, "*Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*". McGraw-Hill, New York, 1990.

**Marino R.** September (1990). *Adaptive Observers For Single Output Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on automatic control; 35, 9: 1054-1058.

**Marino R. y Tomei P.** January (1993). *Global Adaptive Output-Feedback Control Of Nonlinear Systems. Part I: Linear Parametization*. IEEE Transactions on automatic control; 38, 1: 17-32.

**Marino R. y Tomei P.** January (1993). *Global Adaptive Output-Feedback Control Of Nonlinear Systems. Part II: Nonlinear Parametization*. IEEE Transactions on automatic control; 38, 1: 33-48.

**Mcfarlane R. y Bacon D.** (1989). *Adaptive Optimizing Control Of Multivariable Constrained Chemical Processes I. Theoretical Development*. Ind. Eng. Chem. Res.; 28: 1828-1834.

**Mcfarlane R. y Bacon D.** (1989). *Adaptive Optimizing Control Of Multivariable Constrained Chemical Processes 2. Application Studies*. Ind. Eng. Chem. Res.; 28: 1834-1845.

**Medjell T. y Skogestad S.** (1991). *Estimation Of Distillation Compositions From Multiple Temperature Measurements Using Partial-Least-Square Regression*. Ind. Eng. Chem. Res.; 30: 2543-2555.

**Mejdell T. y Skogestad S.** (1991). *Composition Estimador In A Pilot-Plant Distillation Column Using Multiple Temperatures*. Ind. Eng. Chem. Res.; 30,12: 255-2564.

**Medjell T. y Skogestad S.** (1993). *Output Estimator Using Multiple Secondary Measurements: High-Purity Distillation*. AIChE Journal; 39, 10: 1641-1653.

**Moore B.** February (1981). *Principal Component Analysis In Linear Systems: Controllability, Observability And Model Reduction*. IEEE Transactions on automatic control; AC-26, 1: 17-32.

**Moraal P. y Grizzle J.** March (1995). *Observer Design For Nonlinear System With Discrete-Time Measurements*. IEEE Transactions on automatic control; 40, 3: 395-404.

**Nisenfeld A., Seemann R.**, "*Distillation columns*". Instrument Society of America. USA, 1981.

**Quintero E., Luyben W. y Georgakis Ch.** (1991). *Application Of An Extended Luenberger Observer To The Control Of Multicomponent Batch Distillation*. Ind. Eng. Chem. Res.; 30: 1870-1880.

**Rovaglio M., Ranzi E., Biardi G., Fontana M. y Domenichini R.** April (1990). *Rigorous Dynamics And Feedforward Control Design For Distillation Processes*. AIChE Journal; 36, 4:576-586.

- Sangsuk-lam S. y Bullock T.** December (1990) *Analysis Of Discrete-Time Kalman Filtering Under Incorrect Noise Covariances*. IEEE Transactions on automatic control; 35, 12: 1304-1308.
- Shen S. y Yu Ch.** (1992). *Indirect Feedforward Control: Multivariable Systems*. Chemical Engineering Science; 47, 12: 3085-3097.
- Skogestad S. y Morari M.** (1988). *LV-Control Of High-Purity Distillation Column*. Chemical Engineering Science; 43, 1: 33-48.
- Skogestad S. y Morari M.** (1988). *Understanding The Dynamic Behavior Of Distillation Columns*. Ind. Eng. Chem.Res.; 27: 1848-1862.
- Smith C. y Corripio A.**, "Control Automático de procesos: Teoría y Práctica". De. Limusa, México, 1994.
- Stephanopoulos G.**, "Chemical Process Control: An Introduction to Theory and Practice". Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- Verma M.** February (1993). *Rigth Comprime Factorizations And Stabilization For Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on automatic control; 38, 2: 222-231.
- Weigand W., Jhavar A. y Williams J.** November (1972). *Calculation Method For The Response Time To Step Inputs For Approximate Dynamic Models Of Distillation Columns*. AIChE Journal; 118, 6:1243-1252
- Wu W. y Chiou T.** (1989) *Determination Of Feasible Reflux Ratios And Minimum Number Of Plates Required In Multicomponent Batch Distillation*. Ind.Eng.Chem.Res.; 28:1862-1867.
- Yang D., Waller K., Seborg D. y Mellichamp D.** September (1990). *Dynamic Structural Transformations For Distillation Control Configurations*. AIChE Journal; 36, 9:1391-1402
- Yüksel Ö. y Bongiorno J.** December (1971) *Observers For Linear Multivariable Systems With Applications*. IEEE Transactions on automatic control; AC-16, 6: 603-612.

## Apéndice A

### Nomenclatura:

#### Notación básica del modelo de la Columna:

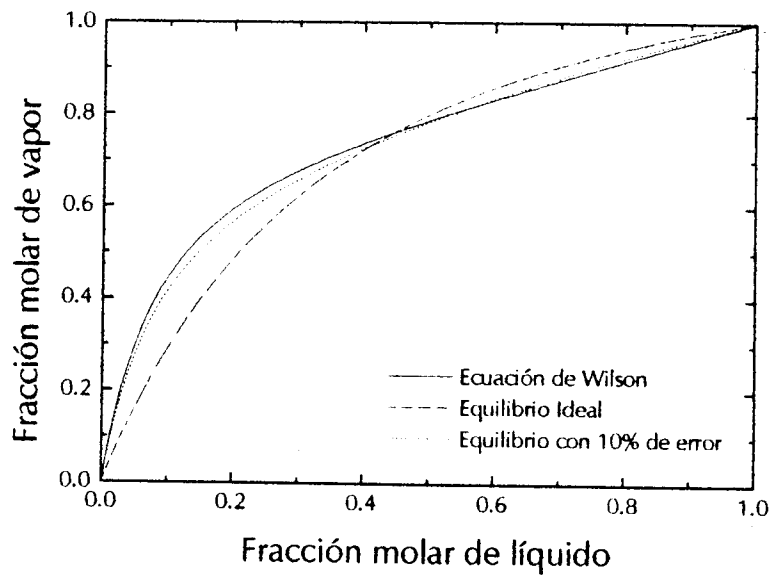
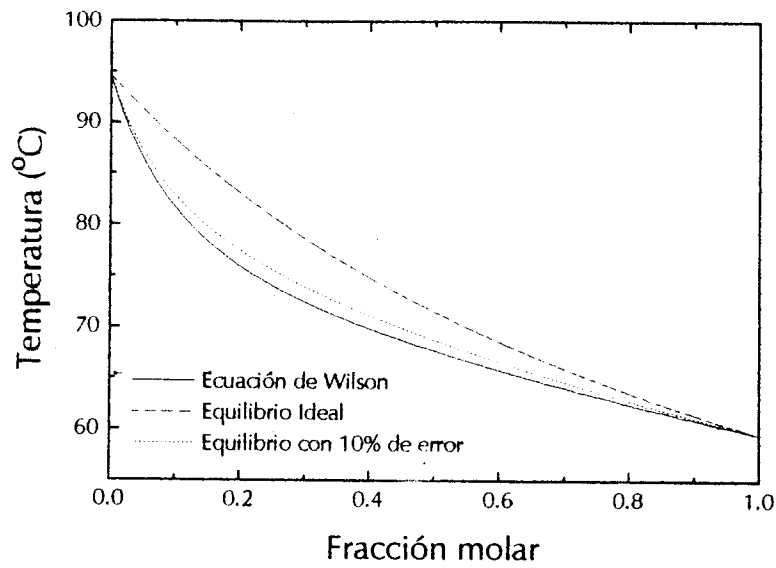
$A_j$	Parámetro de la ecuación de Antoine;
$B_j$	Parámetro de la ecuación de Antoine (K);
$C_j$	Parámetro de la ecuación de Antoine (K);
$c_i$	fracción molar del componente más volátil;
$F_i$	flujo molar (gr-mol/min.);
$k_{FB}$	ganancia del control de nivel (1/min);
$L_i$	flujo molar de líquido que cae de del plato (gr-mol/min.);
$m_i$	líquido retenido en el plato (gr-mol);
$m_0$	líquido retenido en el plato con flujo cero (gr-mol);
$m_0'$	líquido retenido en el mezclador de la sección de alimentación con flujo cero (gr-mol);
$P_T$	presión total (kPa);
$P_j^S$	presión de vapor del componente puro (kPa);
$PM_j$	peso molecular (gr/gr-mol);
$r$	relación de reflujo;
$t$	tiempo (min);
$T_i$	temperatura (K);
$V_i$	flujo de vapor (gr-mol/min.);
$v_i$	volumen de líquido en el plato (ml);

#### Letras griegas:

$\alpha$	parámetro de la formula de Francis ( $1/\text{min}\sqrt{\text{gr} \cdot \text{mol}}$ );
$\alpha'$	parámetro de la formula de Francis en el mezclador de la sección de alimentación (1/min);
$\beta$	parámetro de la formula de Francis;
$\beta'$	parámetro de la formula de Francis Francis en el mezclador de la sección de alimentación;
$\gamma_j$	coeficiente de actividad;
$\Lambda_{ij}$	parámetro de la ecuación de Wilson;
$\rho_j$	densidad del compuesto puro (gr/ml);
$\rho_{Mi}$	densidad molar de la mezcla líquida en el plato (gr-mol/ml);
$\omega(C_i)$	fracción molar de vapor del componente más volátil;

**Subíndices:**

B	evaporador;
D	destilado;
SA	sección de alimentación;
i	i-ésimo plato;
j	j-ésimo componente;
N	plato superior;
A	alimentación;
R	reflujo;

**Apéndice B****Diagramas de ebullición y de equilibrio  
para una mezcla metanol - agua:**

## Apéndice C

### Parámetros del modelo:

#### Parámetros

$c_A = 0.4$   
 $F_A = 40 \text{ ml/min}$   
 $V = 0.82 \text{ gr-mol/min}$   
 $r = 1.5$   
 $* \alpha = 3.0$   
 $* \beta = 1.5$   
 $* m_0 = 0.2$   
 $* \alpha' = 8.5$   
 $* \beta' = 1.0$   
 $* m_0' = 0.1$   
 $k_{FB} = 1.0 \text{ 1/min}$   
 $*** P_T = 83.1 \text{ kPa}$   
 $R = 1.987 \text{ gr cal /}^\circ\text{K grmol}$   
 $** A_1 = 16.4948$   
 $** B_1 = 3593.39$   
 $** C_1 = -35.2249$   
 $** V'_1 = 41.5$   
 $** A_2 = 16.5362$   
 $** B_2 = 3985.44$   
 $** C_2 = -38.9974$   
 $** V'_2 = 18.2$   
 $\tau = 6 \text{ min}$   
 $\xi = 0.9$

#### Estado estacionario:

$c_{10} = 0.534130$   
 $c_9 = 0.436997$   
 $c_8 = 0.404687$   
 $c_7 = 0.394314$   
 $c_6 = 0.391025$   
 $c_{SA} = 0.389986$   
 $c_5 = 0.389607$   
 $c_4 = 0.388067$   
 $c_3 = 0.381860$   
 $c_2 = 0.357611$   
 $c_1 = 0.275050$   
 $c_B = 0.114512$   
 $m_{10} = 0.331044$   
 $m_9 = 0.331044$   
 $m_8 = 0.331044$   
 $m_7 = 0.331044$   
 $m_6 = 0.331044$   
 $m_{SA} = 0.315949$   
 $m_5 = 0.920709$   
 $m_4 = 0.920716$   
 $m_3 = 0.920710$   
 $m_2 = 0.920715$   
 $m_1 = 0.920711$   
 $m_B = 60.00000$

\* Ajustados en este trabajo.

\*\* Tomado de (Holmes y Van Winkle, 1970).

\*\*\* Presión atmosférica de la ciudad de México.

**Apéndice D****Tabla de ganancias para el estimador:**

$\kappa$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	$\frac{1}{\tau_c}$		
2	$\frac{2\xi}{\tau_c}$	$\frac{1}{\tau_c^2}$	
3	$\frac{2\xi+1}{\tau_c}$	$\frac{2\xi+1}{\tau_c^2}$	$\frac{1}{\tau_c^3}$
4	$\frac{4\xi}{\tau_c}$	$\frac{4\xi+2}{\tau_c^2}$	$\frac{4\xi}{\tau_c^3}$
5	$\frac{4\xi+1}{\tau_c}$	$\frac{4\xi^2+4\xi+2}{\tau_c^2}$	$\frac{4\xi^2+4\xi+2}{\tau_c^3}$
6	$\frac{6\xi}{\tau_c}$	$\frac{12\xi^2+3}{\tau_c^2}$	$\frac{8\xi^3+12\xi}{\tau_c^3}$
7	$\frac{6\xi+1}{\tau_c}$	$\frac{12\xi^2+6\xi+3}{\tau_c^2}$	$\frac{8\xi^3+12\xi^2+12\xi+3}{\tau_c^3}$
8	$\frac{8\xi}{\tau_c}$	$\frac{24\xi^2+4}{\tau_c^2}$	$\frac{32\xi^3+24\xi}{\tau_c^3}$
9	$\frac{8\xi+1}{\tau_c}$	$\frac{24\xi^2+8\xi+4}{\tau_c^2}$	$\frac{32\xi^3+24\xi^2+24\xi+4}{\tau_c^3}$
10	$\frac{10\xi}{\tau_c}$	$\frac{40\xi^2+5}{\tau_c^2}$	$\frac{80\xi^3+40\xi}{\tau_c^3}$
11	$\frac{10\xi+1}{\tau_c}$	$\frac{40\xi^2+10\xi+5}{\tau_c^2}$	$\frac{80\xi^3+40\xi^2+40\xi+5}{\tau_c^3}$
12	$\frac{12\xi}{\tau_c}$	$\frac{60\xi^2+6}{\tau_c^2}$	$\frac{160\xi^3+60\xi}{\tau_c^3}$

$k_4$	$k_5$	$k_6$
$\frac{1}{\tau_c^4}$		
$\frac{4\xi+1}{\tau_c^4}$	$\frac{1}{\tau_c^5}$	
$\frac{12\xi^2+3}{\tau_c^4}$	$\frac{6\xi}{\tau_c^5}$	$\frac{1}{\tau_c^6}$
$\frac{8\xi^3+12\xi^2+12\xi+3}{\tau_c^4}$	$\frac{12\xi^2+6\xi+3}{\tau_c^5}$	$\frac{6\xi+1}{\tau_c^6}$
$\frac{16\xi^4+48\xi^2+6}{\tau_c^4}$	$\frac{32\xi^3+24\xi}{\tau_c^5}$	$\frac{24\xi^2+4}{\tau_c^6}$
$\frac{16\xi^4+32\xi^3+48\xi^2+24\xi+6}{\tau_c^4}$	$\frac{16\xi^4+32\xi^3+48\xi^2+24\xi+6}{\tau_c^5}$	$\frac{32\xi^3+24\xi^2+24\xi+4}{\tau_c^6}$
$\frac{80\xi^4+120\xi^2+10}{\tau_c^4}$	$\frac{32\xi^5+160\xi^3+60\xi}{\tau_c^5}$	$\frac{80\xi^4+120\xi^2+10}{\tau_c^6}$
$\frac{80\xi^4+80\xi^3+120\xi^2+40\xi+10}{\tau_c^4}$	$\frac{32\xi^5+80\xi^4+160\xi^3+120\xi^2+60\xi+10}{\tau_c^5}$	$\frac{32\xi^5+80\xi^4+160\xi^3+120\xi^2+60\xi+10}{\tau_c^6}$
$\frac{240\xi^4+240\xi^2+15}{\tau_c^4}$	$\frac{192\xi^5+480\xi^3+120\xi}{\tau_c^5}$	$\frac{64\xi^6+480\xi^4+360\xi^2+20}{\tau_c^6}$



$k_7$	$k_8$	$k_9$
$\frac{1}{\tau_c^7}$		
$\frac{8\xi}{\tau_c^7}$	$\frac{1}{\tau_c^8}$	
$\frac{24\xi^2 + 8\xi + 4}{\tau_c^7}$	$\frac{8\xi + 1}{\tau_c^8}$	$\frac{1}{\tau_c^9}$
$\frac{80\xi^3 + 40\xi}{\tau_c^7}$	$\frac{40\xi^2 + 5}{\tau_c^8}$	$\frac{10\xi}{\tau_c^9}$
$\frac{80\xi^4 + 80\xi^3 + 120\xi^2 + 40\xi + 10}{\tau_c^7}$	$\frac{80\xi^3 + 40\xi^2 + 40\xi + 5}{\tau_c^8}$	$\frac{40\xi^2 + 10\xi + 5}{\tau_c^9}$
$\frac{192\xi^5 + 480\xi^3 + 120\xi}{\tau_c^7}$	$\frac{240\xi^4 + 240\xi^2 + 15}{\tau_c^8}$	$\frac{160\xi^3 + 60\xi}{\tau_c^9}$

$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$
$\frac{1}{\tau_c^{10}}$		
$\frac{10\xi+1}{\tau_c^{10}}$	$\frac{1}{\tau_c^{11}}$	
$\frac{60\xi^2+6}{\tau_c^{10}}$	$\frac{12\xi}{\tau_c^{11}}$	$\frac{1}{\tau_c^{12}}$