Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00002

POLITICAS OPTIMAS DE PROCESOS DE DECISION DE MARKOV DESCONTADOS: UNICIDAD Y APROXIMACION.

En México, D.F., se presentaron a las 12:00 horas del día 7 del mes de junio del año 2005 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ROLANDO CAVAZOS CADENA

DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO

DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO

DR. GABRIEL ESCARELA PEREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: HELIODORO DANIEL CRUZ SUAREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES
Casa abierta al tiempo

HELIODORO DANIEL CRUZ SUAREZ
FIRMA DEL ALUMNO

REVISÓ

LIC. CARMEN LLORENS FABREGAT
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. TOMAS VIVEROS GARCÍA

PRESIDENTE

DR. ROLANDO CAVAZOS CADENA

VOCAL

J. Raúl Montes de Oca M.

DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO

VOCAL

DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO

SECRETARIO

Gabriel Escarela Pérez

DR. GABRIEL ESCARELA PEREZ

Políticas Óptimas de Procesos de Decisión de Markov Descontados: Unicidad y Aproximación.

Tesis presentada por

Heliodoro Daniel Cruz Suárez

para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en la especialidad de

Matemáticas

Tesis dirigida por

Dr. Raúl Montes de Oca M.

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

México, D. F.

Junio 2005

AGRADECIMIENTOS.

El presente trabajo de tesis doctoral se pudo realizar gracias al apoyo de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Este trabajo de tesis se desarrolló para obtener el grado de Doctor en Ciencias con especialidad en Matemáticas que ofrece la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, agradezco a esta institución por darme los medios para concretar esta tesis.

Un agradecimiento especial para el Dr. Raúl Montes de Oca Machorro quien propuso y dirigió este tema de tesis doctoral.

También agradezco a los revisores y sinodales.

Agradezco a todas las personas que de alguna forma contribuyeron a que este trabajo fuera posible, a todos mis familiares que me alentaron: a mis padres, hermanos, sobrinos, cuñados, a mi esposa por su comprensión y paciencia para que pudiera realizar este trabajo y a mi hijo.

Indice

Parte I

PRELIMINARES

Capítulo 1

Introducción

La tesis trata con procesos de decisión de Markov (PDMs), a tiempo discreto, de horizonte infinito, en espacios de Borel, y con criterio de rendimiento el costo descontado total esperado (ver [8], [9], [27], [28], [29] y [42]).

Básicamente, los resultados presentados aquí, se establecen en [19] y [20].

Para un proceso de decisión de Markov (PDM) dado, denotaremos su espacio de estados por X, su espacio de acciones por A; $A(x)$, denotará el conjunto de acciones admisibles en el estado x ($x \in X$), Q representará su ley de transición y c denotará su función de costo.

Un PDM se controla a través de una sucesión de decisiones, las cuales se aplican en cada etapa; esta sucesión de decisiones se le llama *política*.

En esta tesis la calidad de las políticas se evalúa mediante el criterio de rendimiento conocido como el *costo descontado total esperado*.

El problema fundamental de los PDMs, llamado *problema de control óptimo*, consiste en minimizar el criterio de rendimiento sobre el conjunto de políticas. A la política que minimiza el criterio de rendimiento se le llama *política óptima* y la denotaremos por f^*.

En este trabajo, consideraremos PDMs descontados para los cuales existe una política (estacionaria) óptima (en [28], se presentan condiciones bastantes generales que garantizan la existencia de políticas estacionarias óptimas para PDMs descontados).

La evaluación del criterio de rendimiento en f^* es llamada *función de valores óptimos*, y se denota por V^*.

Para encontrar la función de valores óptimos, aquí empleamos el método de aproximaciones sucesivas, definido a partir de una relación llamada Ecuación de Programación Dinámica; dicho método es conocido como el Algoritmo de Iteración de Valores (AIV) (ver [9], [27], [28], [29] y [42]).

Para cada $n = 1, 2, \cdots$, se denotan por V_n y f_n, al mínimo y al minimizador correspondientes al paso n del AIV, respectivamente.

En la tesis, se estudian los problemas de: unicidad de la política óptima f^*, y la convergencia de $\{f_n\}$ a f^* en diversos sentidos (ver [19] y [20]).

La principal motivación que condujo a los problemas comentados en el párrafo anterior, surgió al estudiar la existencia y caracterización de un entero positivo, conocido en la literatura de PDMs como horizonte de pronóstico (HP) (ver [7], [10], [12], [14], [15], [16], [17], [18], [24], [33], [29], [38], [42], [46], [47], [48], [49], [52], [53] y [55]). El HP es un entero positivo N^* tal que la política de iteración de valores f_{N^*} coincide con f^*, i.e., $f_{N^*} = f^*$. (En las aplicaciones el HP ha sido interpretado como un horizonte de planeación y se ha trabajado en áreas como: control de inventarios, planeación de la producción, el reemplazo de equipo, entre otras).

Cabe observar que la existencia de un HP N^* implica que $\{f_n\}$ converge a f^* de forma que el límite f^* es alcanzado en N^* pasos. Este tipo de convergencia es demasiado fuerte. Además, existen problemas importantes en control en los cuales $f_n \neq f^*$ para todo $n = 1, 2, \cdots$, por ejemplo, el modelo lineal con costo cuadrático (ver [9]). Por tanto, en este trabajo se estableció el problema de estudiar la convergencia de $\{f_n\}$ a f^* en diversos sentidos, menos fuertes que la convergencia mencionada anteriormente.

Por otro lado, la unicidad de f^* es una hipótesis fundamental para establecer la convergencia de $\{f_n\}$ a f^*. Además, la unicidad de f^* ha sido una hipótesis importante en la existencia del HP (ver [7], [10], [12], [14], [15], [16], [17], [18], [24], [33], [29], [38], [42], [46], [47], [48], [49], [52], [53] y [55]), y también, en el análisis de la continuidad de políticas óptimas en PDMs descontados (ver Lema 6.11.9 y Teorema 6.11.10 de [42]).

Por lo tanto, otro problema que se plantea en la tesis es el establecimiento de condiciones que garanticen la unicidad de la política óptima f^*.

Las condiciones de unicidad que se proponen en la tesis, son de tipo estructural, es decir, involucran hipótesis sobre el espacio de estados X, el espacio de acciones A, el conjunto de acciones admisibles $A(x)$, $x \in X$, la probabilidad de transición Q, y sobre la función de costo c.

Específicamente, se presentan tres condiciones de unicidad. Dos de esas condiciones requieren principalmente suposiciones de convexidad, pero la tercera no necesita de este tipo de suposiciones; sin embargo, en esta tercera condición se necesitan ciertas relaciones de órdenes estocásticos en Q, y además, la función de costo c debe alcanzar su mínimo, con respecto a las acciones, en una única acción (esta acción podría depender del estado del sistema).

Las condiciones de convergencia propuestas en el trabajo, esencialmente requieren la continuidad de c, de V^*, de $V_n, n = 1, 2, \cdots$; asimismo requieren la continuidad de las integrales

$$\int V_n(y)\, Q(dy \mid \cdot, \cdot), \tag{1.1}$$

$n = 1, 2, \cdots$ y de

$$\int V^*(y)\, Q(dy \mid \cdot, \cdot), \tag{1.2}$$

sobre la gráfica de $x \to A(x)$.

En el Apéndice B, para PDMs descontados con conjunto de acciones compacto, y tal que $\{V_n\}$ converge a V^* a una razón α, donde α es un número fijo en el intervalo $(0, 1)$ (de hecho, α coincide con el factor de descuento), se proporcionan resultados para la detección de un minimizador del AIV que aproxima a la política óptima f^*, de manera uniforme sobre compactos.

Los resultados obtenidos son ejemplificados a través del trabajo. Para la unicidad se muestran una serie de ejemplos para cada una de las condiciones incluyendo, modelos discretos, un modelo de inventarios y el problema del regulador lineal. En el caso de la convergencia, también se ilustra con varios ejemplos.

La tesis se organiza en cuatro partes. La primera de preliminares, donde se presentan esta introducción y la teoría básica de PDMs descontados. En la segunda parte se definen los problemas de interés que se estudiarán en la tesis y se proporcionan los antecedentes de estos problemas. En la tercera, se proporcionan los resultados obtenidos y su ejemplificación. En la cuarta parte se dan las conclusiones y los problemas abiertos. Finalmente, se proporcionan dos apéndices en donde se dan algunos resultados básicos y un algoritmo de detección de una política aproximante a la política óptima.

Capítulo 2

PDMs Descontados

En este capítulo, definiremos lo que se conoce como el problema de decisión de Markov con costo descontado (ver [8], [9], [27], [28], [29] y [42]). El fin es tener un modelo matemático para definir y resolver los problemas de interés para este trabajo.

Para la notación y definiciones de este capítulo, hemos seguido el libro de Hernández-Lerma y Lasserre [28]. Las demostraciones de los resultados presentados aquí, también pueden consultarse en esta referencia.

Definición 2.0.1 *Un modelo de control de Markov, estacionario, a tiempo discreto, abreviado como MCM, consiste de cinco elementos*

$$(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c),$$

donde:

a. X es un espacio de Borel no vacío, es decir, es un subconjunto de Borel de un espacio métrico separable y completo; X será llamado el espacio de estados. Los elementos $x \in X$ se llamarán estados.

b. A es un espacio de Borel no vacío, será llamado el conjunto de acciones o el conjunto de controles.

c. $\{A(x) \mid x \in X\}$ es una familia de conjuntos $A(x), x \in X$, tales que para cada $x \in X, A(x)$ es: no-vacío, medible y subconjunto de A. Los elementos de $A(x)$ son las acciones o controles admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado $x \in X$. El conjunto $\mathbb{K}$ de pares de estados y acciones admisibles, definido por

$$\mathbb{K} = \{(x, a) \mid x \in X, a \in A\,(x)\}\,,$$

se supone que es un conjunto medible del espacio producto $X \times A$.

d. Q ó $Q(B \mid x,a)$ es la ley de transición o kérnel estocástico de B dado (x,a), con $B \in \mathbb{B}(X)$ y $(x,a) \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{B}(X)$ denota la σ-álgebra de Borel de X.

e. $c : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es una función medible y se llamará la función de costo.

Observación 2.0.2 *Un MCM*

$$(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$$

representa un sistema estocástico controlado que se observa en los tiempos $t = 0, 1, \cdots$. Denotemos por x_t y a_t el estado del sistema y el control en el tiempo t, respectivamente. La evolución del sistema es como sigue: si el sistema está en el estado $x_t = x \in X$, en el tiempo t y la acción o control $a_t = a \in A(x)$ es aplicado; entonces ocurre lo siguiente: se genera un costo $c(x,a)$ y el sistema se mueve a un nuevo estado x_{t+1}, de acuerdo con la distribución de probabilidad $Q(\cdot \mid x,a)$ sobre X, es decir,

$$Q\left(B \mid x,a\right) = P\left(x_{t+1} \in B \mid x_t = x, a_t = a\right), \tag{2.1}$$

para $B \in \mathbb{B}(X)$. Una vez que ha ocurrido la transición a un nuevo estado, se elige un nuevo control y el proceso anteriormente descrito se repite.

Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \to A$, tales que $f\left(x\right) \in A\left(x\right)$ para toda $x \in X$.

Para cada $t = 0, 1, \cdots$, definimos el espacio de *historias admisibles hasta el tiempo t* por $H_0 := X$ y

$$H_t := \mathbb{K}^t \times X = \mathbb{K} \times H_{t-1}, \tag{2.2}$$

$t = 1, 2, \cdots$.

Un elemento de H_t es un vector, o historia, h_t de la forma

$$h_t := (x_0, a_0, \cdots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t), \tag{2.3}$$

donde $(x_n, a_n) \in \mathbb{K}$ para $n = 0, 1, \cdots, t-1$, y $x_t \in X$.

Definición 2.0.3 *a. Una política de control es una sucesión $\pi = \{\pi_t\}$ tal que, para cada $t = 0, 1, \cdots$, π_t es un kernel estocástico sobre A dado H_t, y el cual satisface la restricción $\pi_t(A(x_t)|h_t) = 1$ para todo $h_t \in H_t$. Al conjunto de todas las políticas lo denotamos por Π.*

b. Una política de control $\pi = \{\pi_t\}$ se dice que es una política estacionaria si existe una función $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|h_t)$ está concentrada en $f(x_t)$, para todo $t = 0, 1, \cdots$; en este caso, identificamos π con $f \in \mathbb{F}$, y referiremos a $\mathbb{F}$ como el conjunto de políticas estacionarias.

Denotaremos por P_x^π la medida de probabilidad inducida cuando se usa la política π, dado el estado inicial $x_0 = x$. El correspondiente operador esperanza se denota por E_x^π (ver [28]).

Dados un modelo de control de Markov

$$(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$$

y un conjunto Π de políticas admisibles, a continuación se define el índice de funcionamiento o función objetivo, es decir, una función que mide el rendimiento del sistema cuando una política dada $\pi \in \Pi$ es aplicada y el estado inicial es $x \in X$.

Definición 2.0.4 *El costo descontado total esperado se define como*

$$V(\pi, x) = E_x^\pi[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t)], \tag{2.4}$$

cuando la política $\pi \in \Pi$ es usada, y $x \in X$ es el estado inicial. En (2.4), $\alpha \in (0, 1)$ es un factor de descuento dado.

Observación 2.0.5 *En algunas situaciones se considera el modelo truncado, es decir, cuando la sumatoria anterior se toma hasta un cierto entero positivo, digamos N. En el caso $\alpha = 1$ y $N = \infty$, se tiene el criterio llamado costo total esperado; si tomamos $\alpha = 1$ y $N < \infty$, dividiendo entre $N + 1$ y tomando el límite superior cuando N tiende a infinito obtenemos el criterio de costo promedio esperado.*

Observación 2.0.6 *En algunos casos el modelo de control tiene elementos que dependen del tiempo, digamos*

$$(X_t, A_t, \{A_t(x) : x \in X_t\}, Q_t, c_t),$$

en este caso, se llama Modelo de control no estacionario. Es posible transformarlo en un modelo estacionario (ver [27]).

En muchas aplicaciones la evolución de un PDM se especifica por una ecuación, a tiempo discreto, de la forma:

$$x_{t+1} = F\left(x_t, a_t, \xi_t\right), \tag{2.5}$$

$t = 0, 1, \cdots$, x_0 es el estado inicial dado, y donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, con valores en algún espacio de Borel S, con densidad común Δ, e independiente del estado inicial x_0. En este caso, la ley de transición está dada por:

$$Q\left(B \mid x, a\right) = \int I_B\left[F\left(x, a, s\right)\right]\Delta(s)ds, \tag{2.6}$$

donde $(x, a) \in \mathbb{K}, B \in \mathbb{B}(X)$, y I_B es la función indicadora del conjunto B. Esta representación incluye en particular, el caso de un sistema de control determinista, i.e.,

$$x_{t+1} = F\left(x_t, a_t\right), \tag{2.7}$$

$t = 0, 1, \cdots$.

Definición 2.0.7 *Una política π^* se dice que es* **óptima** *si*

$$V(\pi^*, x) = V^*(x), \tag{2.8}$$

$x \in X$, *donde*

$$V^*(x) := \inf_{\pi\in\Pi} V(\pi, x), \tag{2.9}$$

$x \in X$. V^*, *definida en (2.9), es llamada* **función de valores óptimos**.

El *problema de control óptimo* consiste en determinar una política óptima π^* (si es que ésta existe).

Suposición 2.0.8 *a. El costo de una etapa c es no negativo, semicontinuo inferiormente (s.c.i.) e inf-compacto en $\mathbb{K}$, (recuérdese que c es inf-compacto en $\mathbb{K}$ si el conjunto*

$$\left\{a \in A\left(x\right) \mid c\left(x, a\right) \leq \overline{s}\right\},$$

es compacto para cualquier $x \in X$ y $\overline{s} \in \mathbb{R}$).

b. El kérnel Q es fuertemente continuo, i.e.

$$\mu'(x,a) := \int \mu(y)\, Q(dy \mid x,a), \tag{2.10}$$

es continua y acotada en $\mathbb{K}$, para cualquier función medible y acotada $\mu : X \to \mathbb{R}$.

c. Existe una política π tal que $V(\pi, x) < \infty$, para cada $x \in X$.

Definición 2.0.9 *Las funciones de **iteración de valores** se definen como*

$$V_n(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int V_{n-1}(y)\, Q(dy \mid x,a) \right], \tag{2.11}$$

para todo $x \in X$ y $n = 1, 2, \cdots$, con $V_0(\cdot) = 0$.

Observación 2.0.10 *Si la Suposición 2.0.8 se satisface es posible demostrar (ver [28]) que, para cada $n = 1, 2, \cdots$, existe una política estacionaria $f_n \in \mathbb{F}$ tal que el mínimo en (2.11) se alcanza, i.e.*

$$V_n(x) = c(x, f_n(x)) + \alpha \int V_{n-1}(y)\, Q(dy \mid x, f_n(x)), \tag{2.12}$$

$x \in X$.

Lema 2.0.11 *([28], Teorema 4.2.3) Supongamos que la Suposición 2.0.8 se cumple. Entonces:*

*a. La función de valor óptimo V^*, definida en (2.9), es la única función (en una clase apropiada de funciones) que satisface la **Ecuación de Optimalidad**, i.e., para todo $x \in X$:*

$$V^*(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int V^*(y)\, Q(dy \mid x,a) \right]. \tag{2.13}$$

Además, existe $f^* \in \mathbb{F}$ tal que:

$$V^*(x) = c(x, f^*(x)) + \alpha \int V^*(y)\, Q(dy \mid x, f^*(x)), \tag{2.14}$$

$x \in X$, y f^* es óptima.

b. Para cada $x \in X$, $V_n(x) \uparrow V^*(x)$ cuando $n \to +\infty$.

Parte II

PROBLEMAS

Capítulo 3

Problemas

En este pequeño capítulo se plantean los problemas que se analizarán en esta tesis. Como ya ha sido mencionado, en el trabajo, tratamos con PDMs, a tiempo discreto, de horizonte infinito, en espacios de Borel con criterio de rendimiento el costo descontado total esperado. Para tales PDMs, suponemos la existencia de una política estacionaria óptima, denotada por f^*. También, recuérdese que los minimizadores del algoritmo de iteración de valores se denotan por $f_n, n = 1, 2, \cdots$.

Además, como ya se ha dicho en la Introducción, los problemas que se plantean han sido definidos a partir del estudio del concepto de Horizonte de Pronóstico (ver Capítulo 4).

Los problemas que se proponen son los siguientes:

I. ESTUDIAR LA UNICIDAD DE LA POLÍTICA ÓPTIMA f^*.

II. ESTUDIAR LA CONVERGENCIA DE LA SUCESIÓN DE MINIMIZADORES $\{f_n\}$ A LA POLÍTICA ÓPTIMA f^*, Y ANALIZAR SUS CONSECUENCIAS.

Específicamente se busca establecer criterios generales que permitan obtener la unicidad de la política óptima y la convergencia, en diversos sentidos, de los minimizadores del AIV a la política óptima. Además, como una consecuencia de la convergencia, se buscará establecer criterios que permitan aproximar la política óptima.

Capítulo 4

Antecedentes

En este capítulo se hace una revisión de los resultados, que se han encontrado en la literatura, relacionados a los problemas de unicidad de la política óptima f^*, y de la convergencia de $\{f_n\}$ a f^*.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 1 se proporcionan los resultados que se han encontrado referentes a la Unicidad. En la Sección 2 se proporcionan el concepto de Horizonte de Pronóstico (HP) y los antecedentes de convergencia de minimizadores del AIV a la política óptima.

4.1. Unicidad

La primera referencia de unicidad de políticas óptimas encontrada en la literatura, para PDMs deterministas, de horizonte finito, se debe a Richard Bellman (ver [8]).

En los modelos considerados en [8], principalmente, se consideran suposiciones de concavidad para asegurar la unicidad de políticas óptimas. También, en [8] pp. 34 y 35, se proporciona un método (usando el método de Fibonacci) para aproximar la política óptima cuando ésta es única.

Por otro lado, la unicidad de las políticas óptimas de PDMs de horizonte infinito ha sido una suposición fundamental en el estudio de la existencia de un HP (ver [7], [10], [14], [33], [28],[47], [48] y [49]); también, la suposición de unicidad ha sido importante en el análisis de la continuidad de políticas óptimas en PDMs descontados (ver Lema 6.11.9 y Teorema 6.11.10 en [42]).

Como se ha observado en el párrafo anterior, la unicidad se ha supuesto para obtener diversos resultados; sin embargo, condiciones generales en el contexto que estamos considerando en esta tesis no fueron encontradas. Por lo tanto, se propone un estudio de la unicidad de la política óptima de PDMs descontados. Específicamente, lo que se propone es dar una serie de condiciones, de tipo estructural, que impliquen la unicidad respectiva.

4.2. Convergencia

4.2.1. Horizonte de Pronóstico

Definición 4.2.1 *Considérese un PDM descontado. El HP se define como el entero positivo* N^* *tal que* $N^* := inf\{n \geq 1 \mid f_n = f^*\}$, *y como* $N^* = \infty$ *si el conjunto anterior es vacío. Recuérdese que* f_{N^*} *es el minimizador del AIV en la etapa* N^* *y* f^* *es la política óptima correspondiente.*

En las aplicaciones, el HP ha sido interpretado como un horizonte de planeación. Se ha estudiado en áreas como: control de inventarios, planeación de la producción y el reemplazo de equipo (ver [12], [15], [24], [38], [43], [49], [52], [53] y [55]).

El concepto de HP es un antecedente en el estudio de la convergencia de minimizadores del AIV a la política óptima del problema con horizonte infinito. De hecho, el HP está relacionado con la convergencia de $\{f_n\}$ a f^*, en la cual, para un cierto entero positivo N^*, este entero es justamente el HP, se tiene que $f_{N^*} = f^*$. Obsérvese que en este caso, f_{N^*} puede emplearse como política óptima para el problema con horizonte infinito.

PDMs Miopes

Un PDM descontado *miope* se define como un PDM descontado para el cual existe el HP y es igual a 1.

Observación 4.2.2 *a. Para PDMs descontados en espacios euclidianos, en [32] se presentan condiciones, fuera del contexto que estamos tratando, las cuales implican la miopía.*

b. Existen ejemplos clásicos de PDMs miopes, algunos de estos son: el modelo de inventarios presentado en [43] (ver Ejemplo 4.2.6 a continuación) y los ejemplos de colas de [5] y [6].

A continuación presentaremos un par de ejemplos de PDMs miopes.

Ejemplo 4.2.3 *(ver [17])*

Las suposiciones que se proponen son las siguientes.

Suposición 4.2.4 .

a. $X = \mathbb{R}$,

b. $A = A(x) = \mathbb{R}$, $x \in X$.

c. Para $x \in X$ *y* $a \in A$, *se define* $c(x, a) = h(x) + g(a)$, *donde* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función lineal, no negativa e independiente de* a *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función medible, con un mínimo en* $\overline{a}$ *donde* $\overline{a} = a_0$,

d. Para $t = 0, 1, \cdots$, $x_{t+1} = x_t + g(a_t) - \xi_t$, *donde* $\{\xi_t\}$ *son variables aleatorias i.i.d., con valores en* $S = [0, \infty)$, *con función de densidad de probabilidad* Δ *y con esperanza finita* $\mu = E(\xi)$.

Observación 4.2.5 *También se obtiene un ejemplo miope si modificamos las funciones de la Suposición 4.2.4 por:*

$$c(x, a) = h(x) + k_1 g(a), \tag{4.1}$$

y

$$x_{t+1} = x_t + k_2 g(a_t) - \xi_t, \tag{4.2}$$

donde k_1, k_2 *son reales no negativos fijos, y* g *y* h *son las mismas funciones de la Suposición 4.2.4.*

Ejemplo 4.2.6 *Este ejemplo miope, es un problema de inventarios (ver [43]).*

Sean $X = \mathbb{R}$ *y* $A = A(x) = [0, \infty)$, *para todo* $x \in X$.

Para $t = 0, 1, \cdots$, *denotamos por:* x_t *al nivel de existencias al final del periodo* t, a_t *a la cantidad producida durante el periodo* t, ξ_t *a la demanda durante el periodo* t, *la dinámica del sistema es* $x_{t+1} = x_t + a_t - \xi_t$, *y la función de costo se define como*

$$c(x_t, a_t) = ba_t + hE \max\{0, x_{t+1}\} + pE \max\{0, -x_{t+1}\}, \tag{4.3}$$

en donde: b *es el costo de producción unitario,* h *es el costo de almacenamiento unitario por exceso de inventario, y* p *es el costo unitario por demanda no satisfecha.*

Se supone $b, h, p > 0$*,* $p > b$*, y* ξ_t*,* $t = 0, 1 \cdots$ *, son variables aleatorias i.i.d., con valores en* $S = [0, \infty)$ *y con función de densidad* Δ*. También suponemos que* $\mu = E[\xi_0] < \infty$*.*

El problema consiste en minimizar el costo descontado total esperado. Por Iteración de Valores se puede concluir que existe un parámetro s (ver [43]), tal que la política óptima para este modelo es ordenar hasta s, cuando el nivel del inventario es menor que s, y no ordenar en otro caso. Es decir, $f_1(x) = f^*(x)$*, con*

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > s, \\ s - x & si \quad x \leq s. \end{cases} \tag{4.4}$$

PDMs no Miopes con HP.

Ahora trataremos con PDMs para los cuales existe el HP y éste no es necesariamente igual a 1.

Cabe observar que los primeros resultados de HP se estudiaron en problemas de inventarios *deterministas*.

En la siguiente página se proporciona una tabla en la cual, se resumen los artículos encontrados en la literatura que tratan del HP. En esa tabla se bosqueja el tipo de modelo y el tipo de costos utilizados. El resultado que se obtuvo en cada uno de ellos es un teorema de existencia de HP, excepto en el trabajo de Chand, Sethi y Sorger [15] en donde se obtiene explícitamente el HP.

Cada autor mencionado en la tabla propuso, para garantizar la existencia de un HP, un teorema del siguiente tipo:

Teorema 4.2.7 *(Teorema de Horizonte de Pronóstico)*
Bajo la Suposición $\hat{H}$*, existe un HP.*

Como ilustración describiremos la correspondiente Suposición $\hat{H}$, para el modelo de Lundin y Morton [38], pues los modelos anteriores a éste, son casos particulares del mismo.

El modelo básico de inventarios que utilizaron Lundin y Morton, lo describimos a continuación de la tabla (ver página 26).

TABLA:

AUTOR	**MODELO**	**COSTO**
Wagner/Whitin [53]	Determinista	Cargo por inventario mas costo por ordenar
Zabel [55]	Determinista	Cargo por inventario mas costo por ordenar mas costo de producción marginal
Eppen et al. [24]	Determinista	Cargo por inventario mas costo por ordenar mas costo de producción marginal variable
Thomas [52]	Determinista	Igual al anterior incluyendo precios
Blackburn/Kunreuther [12]	Determinista	Igual al de Eppen et al, incluyendo costos por acumulación
Lundin/Morton [38]	Determinista	Generaliza los anteriores
Chand/Sethi/Sorger [15]	Determinista	Costo fijo por ordenar, costo de almacenamiento y costo unitario
Smith/Zhang [49]	Determinista	Costo unitario y de manutención del inventario
Shapiro [48]	Estocástico	Costo completo descontado y promedio
Puterman [42]	Estocástico	Costo completo descontado

Modelo Básico de Inventarios
Sean $X = \mathbb{R}, A = A(x) = [0, \infty), x \in X$.
Para $t = 1, 2, \cdots, T$, donde T es un entero positivo, sean

a. x_t : el nivel de inventario en el periodo t,

b. a_t : la cantidad del artículo que se ordena producir en el periodo t,

c. d_t : la demanda en el periodo t, $(d_t \geq 0)$.

d. $x_{t+1} = x_t + a_t - d_t$: la dinámica del modelo de inventarios.

e. $c(x, a)$: el costo por etapa.

Para definir el costo usado por Lundin y Morton consideremos, para cada $t = 0, 1, \cdots$

$$g_t(a_t) = \begin{cases} k_t + ca_t, & a_t > 0 \\ 0, & a_t = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

donde $\{k_t\}$ es una sucesión de constantes y $a_t \geq 0$ ($g_t(a_t)$ define el costo de producir a_t unidades en el periodo t). Entonces, el costo se define como:

$$c_t(x_t, a_t) = g_t(a_t) + h_t(x_t), \tag{4.6}$$

donde, para cada t, $h_t(x_t) = \overline{h}_t x_t$ es el costo de almacenamiento del inventario x_t del periodo t al periodo $t+1$, y $\overline{h}_t$ es una constante.

Para Lundin y Morton el correspondiente teorema de HP, para el modelo básico de inventarios, se satisface bajo la suposición siguiente:

Suposición 4.2.8 *[38] Para el modelo básico de inventarios, se supone que: $x_0 = 0$ y el problema se resuelve con $x_T = 0$, donde T es el tamaño del horizonte del problema (T es un entero positivo fijo).*

Dentro de los resultados encontrados en la literatura referentes a la existencia de un HP en un contexto *estocástico*, está el resultado de [48]. En este trabajo se consideran las siguientes suposiciones:

Suposición 4.2.9 *[48]*

a. X y A son conjuntos finitos.

b. Existe una política óptima f^*, única.

Otra referencia, donde se tratan hipótesis similares a las de [48], es [28]. También, en [42] se presenta un resultado que permite encontrar el HP proporcionando una cota para el HP.

4.2.2. Otros Resultados

En esta Sección se presentan algunos resultados de convergencia de los minimizadores del AIV a la política óptima de PDMs descontados. El primero, es un resultado [45] que muestra la existencia de un punto límite de la sucesión de minimizadores $\{f_n\}$ (de hecho el siguiente resultado es válido para cualquier sucesión $\{f_n\}$):

Teorema 4.2.10 *Supóngase que la multifunción $x \to A(x)$ es Borel medible y compacta. Entonces, para la sucesión de minimizadores $\{f_n\}$ del AIV, existe un selector medible $f^* \in \mathbb{F}$ tal que $f^*(x)$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{f_n(x)\}$, para cada $x \in X$.*

El estudio de la convergencia ha sido tratado en [51] para PDMs en espacios euclidianos, considerando conjuntos de acciones compactos y convexos, y suponiendo concavidad estricta del lado derecho de la ecuación de programación dinámica, con respecto a las acciones. (Cabe observar que en [51] se consideran recompensas en lugar de costos).

Suposición 4.2.11 *a. $X \subset \mathbb{R}^l$ y $A \subset \mathbb{R}^m$.*

b. La multifunción $x \to A(x)$ es no vacía y continua, y para cada $x \in X, A(x)$ es un conjunto compacto y convexo.

c. Para cada $n = 1, 2, \cdots$ sean $\zeta_n, \zeta : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ funciones dadas (recuérdese que $\mathbb{K} = \{(x,a) | x \in X, a \in A(x)\}$). Se supone que ζ_n y ζ son continuas y que $\zeta_n(x,\cdot)$ y $\zeta(x,\cdot)$ son funciones estrictamente convexas, para cada $x \in X$.

Definición 4.2.12 *Definimos $\Upsilon^*, \Upsilon_n : X \to \mathbb{R}^m, n = 1, 2, \cdots,$ como*

$$\Upsilon^*(x) := \arg\min_{a \in A(x)} \zeta(x,a), \tag{4.7}$$

$$\Upsilon_n(x) := \arg\min_{a \in A(x)} \zeta_n(x,a). \tag{4.8}$$

$x \in X$.

Teorema 4.2.13 *Bajo la Suposición 4.2.11, si $\zeta_n \to \zeta$ uniformemente, entonces $\Upsilon_n \to \Upsilon^*$ puntualmente. Si además X es un conjunto compacto, entonces $\Upsilon_n \to \Upsilon^*$ uniformemente.*

Parte III

RESULTADOS

Capítulo 5

Unicidad

En este Capítulo se proporcionan las condiciones y los resultados que garantizan la unicidad de políticas óptimas de PDMs descontados (ver [20]). Aquí se dan tres condiciones, 5.2.2, 5.2.4 y 5.2.6, las cuales garantizan la unicidad de políticas óptimas. Esas Condiciones se imponen en los elementos de los modelos de decisión de Markov correspondientes. El resultado principal de este capítulo es el Teorema 5.4.1.

En 5.2.2 y 5.2.4 se utilizan suposiciones de convexidad principalmente; mientras que 5.2.6 emplea relaciones de órdenes estocásticos en la ley de transición y el hecho de que la función de costo alcanza su mínimo, con respecto a las acciones, en una única acción la cual puede depender del estado del sistema.

La Condición 5.2.6 permite considerar modelos discretos. Estos modelos quedan excluídos bajo 5.2.2 o 5.2.4, ya que estas condiciones requieren que el espacio de estados y el espacio de acciones sean conjuntos convexos.

También, se proporcionan varios ejemplos con el fin de ilustrar las Condiciones y probar que éstas no se implican entre sí. Entre los ejemplos expuestos, se incluye el sistema lineal con costo cuadrático [9] y una versión cercana al sistema de control de inventarios presentado en [9].

5.1. Órdenes Estocásticos

Sea X un espacio de Borel y supóngase que X es completo y parcialmente ordenado. Denotamos por " $\prec$ " el orden parcial en X. Se dice que una función $g : X \to \mathbb{R}$ es ***no decreciente*** si $x, y \in X, x \prec y$ implica que $g(x) \leq g(y)$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 5.1.1 *Sea X un espacio de Borel. Supóngase que X es parcialmente ordenado. Sean P y P' medidas de probabilidad sobre el espacio $(X, \mathcal{B}(X))$. Diremos que P'* ***domina*** *a P* ***estocásticamente*** *si*

$$\int g dP \leq \int g dP',$$

para toda $g : X \to \mathbb{R}$ medible, acotada y no decreciente, y se escribe

$$P \overset{est}{\leq} P',$$

cuando esto se cumple.

Si en la definición anterior tomamos g como la función indicadora de un intervalo $[x, \infty)$ se obtiene lo siguiente.

Observación 5.1.2 *Sean P y P' medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En este caso, se tiene que $P \overset{est}{\leq} P'$ si $F'(x) \leq F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde F y F' son las funciones de distribución correspondientes a P y P', respectivamente. (Ver [37] p. 127.)*

Lema 5.1.3 *Sea X un espacio de Borel y supóngase que X es parcialmente ordenado. Sean P y P' medidas de probabilidad sobre $(X, \mathcal{B}(X))$, tales que $P \overset{est}{\leq} P'$. Entonces, $\int g dP \leq \int g dP'$ para $g : X \to \mathbb{R}$ medible, no negativa, no decreciente y (posiblemente) no acotada.*

Demostración. Si g es acotada el lema se sigue de la Definición 5.1.1. Supongamos que g no es acotada. Sean

$$g_n(x) := g(x) I_{[g \leq n]}(x) + n I_{[g > n]}(x), \tag{5.1}$$

$x \in X, n = 1, 2, \cdots$, donde $I_{[\cdot]}$ denota la función indicadora del conjunto $[\cdot]$. Obsérvese que, para cada $n = 1, 2, \cdots$, $g_n(\cdot)$ es no decreciente y

$$|g_n(\cdot)| \leq 2n,$$

i.e., g_n es acotada. Además

$$g_n(\cdot) \leq g_{n+1}(\cdot) \leq g(\cdot),$$

y

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x),$$

para cada $x \in X$. Como $P \overset{est}{\leq} P'$, se tiene que

$$\int g_n dP \leq \int g_n dP',$$

para cada $n = 1, 2, \cdots$. Entonces, ya que $g_n(\cdot) \leq g(\cdot)$,

$$\int g_n dP \leq \int g dP', \tag{5.2}$$

para cada $n = 1, 2, \cdots$. Ahora, haciendo $n \to \infty$ y usando el Teorema de Convergencia Monótona (ver [1]) en (5.2), obtenemos

$$\int g dP \leq \int g dP'. \tag{5.3}$$

■

Observación 5.1.4 *La desigualdad (5.2) en la demostración del Lema 5.1.3 se cumple, también, en el caso cuando $\int gdP'$ es igual a ∞.*

5.2. Condiciones

Considérese

$$(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c)$$

un modelo de decisión de Markov fijo. Aquí se dan dos tipos de condiciones que garantizan la unicidad de la política óptima de PDMs descontados. El primer tipo usa principalmente hipótesis de convexidad y el segundo tipo usa el concepto de órden estocástico (ver [20]).

Condiciones Convexas

Definición 5.2.1 *Sean Y y Z conjuntos convexos, con $Y \subset \mathbb{R}^r$ y $Z \subset \mathbb{R}^s$. Una función $u : Y \to Z$ se dice que es* convexa *si*

$$u((1-\lambda)y + \lambda y') \leq (1-\lambda)u(y) + \lambda u(y'), \tag{5.4}$$

para todo $y, y' \in Y$ y $\lambda \in [0,1]$. En el caso de que se cumpla la desigualdad estricta en (5.4) para todo $y, y' \in Y$ y $\lambda \in (0,1)$, decimos que la función u es **estrictamente** *convexa.*

Como es usual, en caso de que y y y' sean vectores, i.e., $y = (y_1, y_2, \cdots, y_r)$ y $y' = (y'_1, y'_2, \cdots, y'_r)$ la desigualdad $y \leq y'$ se entiende componente a componente, es decir, $y_i \leq y'_i$ para todo i. Similarmente, $y < y'$ se entiende que $y \leq y'$ y $y_i < y'_i$ para al menos un i.

Condición 5.2.2 *(a) X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

(b) A es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$.

(c) $(1-\lambda)\,a + \lambda a' \in A((1-\lambda)\,x + \lambda x')$ para cualesquiera $x, x' \in X, a \in A(x), a' \in A(x')$ y $\lambda \in [0,1]$. Además, suponemos lo siguiente: si $x, y \in X$, $x < y$, entonces $A(y) \subset A(x)$ y $A(x)$ es convexo para todo $x \in X$.

(d) Q está inducida por una ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t),$$

$t = 0, 1, \cdots$, donde $F : X \times A \times S \to X$ es una función medible y $\{\xi_t\}$ es una sucesión de elementos aleatorios i.i.d. con valores en algún conjunto de Borel $S \subset \mathbb{R}^l$ con densidad común Δ. Además, suponemos que $F(\cdot,\cdot,s)$ es una función convexa en $\mathbb{K}$ para cada $s \in S$ y si $x, y \in X$ con $x < y$, entonces $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$ para cada $a \in A(y)$ y $s \in S$.

(e) La función de costo c es estrictamente convexa en $\mathbb{K}$; y además, si $x, y \in X, x < y$, entonces $c(x, a) \leq c(y, a)$, para cada $a \in A(y)$.

Observación 5.2.3 *La primera parte de la Condición 5.2.2(c), i.e.,*

$$(1-\lambda)\,a + \lambda a' \in A((1-\lambda)\,x + \lambda x')$$

para todo $x, x' \in X, a \in A(x), a' \in A(x')$ y $\lambda \in [0,1]$, ha sido usada en [22] y [31] para estudiar la existencia y/o aproximación de políticas óptimas en PDMs convexos (o concavos), i.e., PDMs donde los elementos del modelo de decisión de Markov tienen principalmente suposiciones de convexidad (o concavidad). La segunda parte de la Condición 5.2.2(c) dice que la multifunción $x \to A(x), x \in X$ es no creciente. También, obsérvese que $\mathbb{K}$ es convexa como una consecuencia de las Condiciones 5.2.2(a) y 5.2.2(c).

Condición 5.2.4 *(a) Igual que la Condición 5.2.2(a); (b) Igual que la Condición 5.2.2(b);*

(c) $(1-\lambda)\,a+\lambda a' \in A((1-\lambda)\,x+\lambda x')$ *para todo* $x, x' \in X, a \in A\,(x)\,, a' \in A\,(x')\,,$ *y* $\lambda \in [0,1]$.

(d) Q *está dada por la relación*

$$x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t,$$

$t = 0, 1, \cdots$, *donde* $\{\xi_t\}$ *son elementos aleatorios i.i.d. que toman valores en* $S = \mathbb{R}^n$ *con densidad* Δ; γ *y* δ *son matrices reales de dimensión* $n \times n$ *y* $n \times m$*, respectivamente.*

(e) La función de costo c *es estrictamente convexa en* $\mathbb{K}$.

Observación 5.2.5 *La Condición 5.2.4 incluye, en particular, sistemas lineales con costo cuadrático, i.e., cuando la ley de transición está dada como en la Condición 5.2.4(d) y la función de costo está dada por*

$$c\,(x,a) = qx^2 + ra^2,$$

$x \in X = \mathbb{R}$, $a \in A = A\,(x) = \mathbb{R}$, *para todo* $x \in X$ *y* $q, r > 0$. *Obsérvese que este tipo de modelos están excluídos en la Condición 5.2.2, porque* $c\,(\cdot, a)$ *no es monótona en* X*, i.e., la Condición 5.2.2(e) no se cumple.*

Una condición no convexa

La condición siguiente implica unicidad de la política óptima de PDMs descontados; obsérvese que no tiene restricciones de convexidad de ningún tipo.

Condición 5.2.6 *(a)* X *es un espacio completo y parcialmente ordenado. (Por simplicidad denotamos el orden parcial en* X *por "$<$".)*

(b) Suponemos lo siguiente: si $x, y \in X$, $x < y$*,entonces* $A\,(y) \subset A\,(x)\,.$

(c) Existe $\overline{f} \in \mathbb{F}$*, tal que*

$$Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}\,(x)\right) \overset{est}{\leq} Q\,(\cdot \mid x, a)\,, \tag{5.5}$$

para todo $x \in X, a \in A\,(x)\,.$ *Además, suponemos que*

$$c\left(x, \overline{f}\,(x)\right) < c\,(x,a)\,, \tag{5.6}$$

para todo $x \in X$ *y* $a \in A\,(x)\,, a \neq \overline{f}\,(x)\,.$ *(Obsérvese que, en este caso,* $\overline{f}$ *es la única política estacionaria que satisface (5.6).)*

(d) Si $x, y \in X$ y $x < y$, entonces

$$Q(\cdot \mid x, a) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid y, a), \tag{5.7}$$

para todo $a \in A(y)$.

(e) Si $x, y \in X, x < y$, entonces $c(x, a) \leq c(y, a)$, para todo $a \in A(y)$.

Observación 5.2.7

(a) Probaremos (ver Sección 5.4) que, de hecho, $\overline{f}$ en (5.6) es la única política óptima estacionaria para el correspondiente PDM que satisface la Condición 5.2.6.

(b) Obsérvese que las Condiciones 5.2.2 y 5.2.4 excluyen los modelos discretos (i.e., modelos de decisión de Markov para los cuales X y/o A son conjuntos finitos o numerables) ya que esas condiciones necesitan que el conjunto de estados y el conjunto de acciones sean convexos. Sin embargo, la Condición 5.2.6 no requiere ese tipo de hipótesis y permite, en particular, trabajar con modelos discretos (ver los Ejemplos 5.3.14 y 5.3.17).

Lema 5.2.8 *Sea $(X, A, \{A(x)|x \in X\}, Q, c)$ un modelo de decisión de Markov. Sean S un espacio de Borel, $\{\xi_t\}$ una sucesión de elementos aleatorios i.i.d. con valores en S y con densidad común Δ, y $F : X \times A \times S \to X$ una función medible. Si $X \subset \mathbb{R}$, la transición Q está inducida por la ecuación en diferencias*

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t),$$

$t = 0, 1, \cdots$, y existe $\overline{f} \in \mathbb{F}$ tal que

$$F\left(x, \overline{f}(x), s\right) \leq F(x, a, s), \tag{5.8}$$

para todo $x \in X$, $a \in A(x)$ y $s \in S$, entonces

$$Q(\cdot \mid x, a) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid y, a), \tag{5.9}$$

con $x, y \in X$ y $x < y$.

Demostración. De (5.8) se sigue que:

$$I_{(-\infty,u]}\left[F(x, a, s)\right] \leq I_{(-\infty,u]}\left[F\left(x, \overline{f}, s\right)\right],$$

para todo $x \in X, a \in A(x), s \in S, u \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\int I_{(-\infty,u]}\left[F(x,a,s)\right]\Delta(s)\,ds \leq \int I_{(-\infty,u]}\left[F\left(x,\overline{f},s\right)\right]\Delta(s)\,ds,$$

$x \in X, a \in A(x), u \in \mathbb{R}$. De donde

$$\int I_{(-\infty,u]}(y)\,Q(dy \mid x,a) \leq \int I_{(-\infty,u]}(y)\,Q\left(dy \mid x,\overline{f}\right),$$

$x \in X, a \in A(x), u \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$Q(y \leq u \mid x,a) \leq Q\left(y \leq u \mid x,\overline{f}\right),$$

$x \in X, a \in A(x), x \in X, u \in \mathbb{R}$, Por lo tanto:

$$Q\left(\cdot \mid x,\overline{f}\right) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid x,a),$$

$x \in X, a \in A(x)$. ■

En la siguiente sección damos varios ejemplos que satisfacen nuestras condiciones. En cada ejemplo verificamos que la Suposición 2.0.8 y la correspondiente condición se cumplen.

5.3. Ejemplos

Ejemplos para la Condición 5.2.2

Ejemplo 5.3.1 *Sean* $X = A = A(x) = \mathbb{R}$, *para cada* $x \in X$, *y considérese*

$$x_{t+1} = x_t + e^{a_t} + \xi_t, \tag{5.10}$$

$t = 0, 1, \cdots$,

$$c(x,a) = e^x + \psi(a), \tag{5.11}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$, *y* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la función dada por*

$$\psi(a) = \begin{cases} a^2 - 1, & a \notin [-1,1] \\ 0, & a \in [-1,1]. \end{cases} \tag{5.12}$$

Suposición 5.3.2

(a) $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $S = \mathbb{R}$. También, suponemos que ξ_0 tiene densidad Δ.

(b) Suponemos que $k := \int e^s \Delta(s)\, ds$ es finito y que también satisface: $0 < \alpha k e < 1$, donde e es la base de logaritmo natural y α es el factor de descuento.

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por (5.10), i. e.,

$$F(x, a, s) = x + e^a + s, \tag{5.13}$$

$x, a, s \in \mathbb{R}$.

Evidentemente, este ejemplo satisface las Condiciones 5.2.2(a), 5.2.2(b) y 5.2.2(c).

Lema 5.3.3 *Supóngase que la Suposición 5.3.2 se cumple. Entonces*

(a) La función de costo c es semicontinua inferiormente, inf-compacta y estrictamente convexa en $\mathbb{K}$; además $c(\cdot, a)$ es no decreciente para cada $a \in \mathbb{R}$.

(b) El kérnel estocástico Q inducido por (5.10) es fuertemente continuo.

(c) Sea $f \in \mathbb{F}$ dado por $f(x) = 0$, para todo $x \in X$. Entonces $V(f, x) < \infty$, para todo $x \in X$. (Así, la Suposición 2.0.8(c) se cumple.).

(d) $F(\cdot, \cdot, s)$ definida en (5.13) es estrictamente convexa para cada $s \in S$ y $F(\cdot, a, s)$ es no decreciente para cada par $a, s \in \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Ya que la función ψ, definida en (5.12), es continua, se sigue que c es continua en $\mathbb{K}$.

Ahora, sean $x \in X$ y $\overline{s} \in \mathbb{R}$ entonces:

$$A_{\overline{s}}(x) = \begin{cases} \{a \in A(x) \mid c(x, a) \leq \overline{s}\} = \emptyset & si \quad \overline{s} < e^x; \\ [-1, 1] \quad si & \overline{s} = e^x; \\ \left[-\sqrt{\overline{s} - e^x + 1}, \sqrt{\overline{s} - e^x + 1}\right] & si \quad \overline{s} > e^x. \end{cases} \tag{5.14}$$

Por lo tanto, c es inf-compacta en $\mathbb{K}$.

Sean $x, \overline{x} \in X$, $a, \overline{a} \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Puesto que la función exponencial es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$ y ψ es convexa en $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} c(\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}, \lambda a + (1-\lambda)\overline{a}) &= e^{\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}} + \psi(\lambda a + (1-\lambda)\overline{a}) \\ &< \lambda e^x + (1-\lambda) e^{\overline{x}} + \lambda \psi(a) \\ &+ (1-\lambda)\psi(\overline{a}) \\ &= \lambda (e^x + \psi(a)) + (1-\lambda)\left(e^{\overline{x}} + \psi(\overline{a})\right) \\ &= \lambda c(x, a) + (1-\lambda) c(\overline{x}, \overline{a}). \end{aligned}$$

Entonces c es estrictamente convexa en $\mathbb{K}$ *. Además, es evidente que si* $x < y$ *entonces* $c(x,a) \leq c(y,a)$ *, para todo* $a \in A$.

(b) Aplicando el Teorema de Cambio de Variable (ver Teorema 1.6.12, p. 50 en [1]; en el futuro nos referiremos a este teorema como el teorema de C-V) y como $Q(B \mid x,a) = \int I_B(F(x,a,s))\,\Delta(s)\,ds$, $x \in X$, $a \in A, B \in \mathcal{B}(X)$, *se tiene la siguiente expresión:*

$$Q(B \mid x,a) = \int_B \Delta(s - e^a - x)\,ds,$$

i.e., $\Delta(\cdot - x - e^a)$ *es una densidad para* $Q(\cdot \mid x,a)$ *con respecto a la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$. *Puesto que* $\Delta(\cdot)$ *es continua (ver Suposición 5.3.2(a)) por el Lema A.0.6 se concluye que* Q *es fuertemente continuo.*

(c) Sea $f \in \mathbb{F}$ *dada por* $f(x) = 0$, *para todo* $x \in X$. *Denótese por* $c(x,f) := c(x,f(x)), Q(\cdot \mid x,f) := Q(\cdot \mid x,f(x))$, $x \in X$. *Se sabe que bajo el control de una política estacionaria* f *y tomando el estado inicial* $x \in X$, *la sucesión de estados* $\{x_t\}$ *es un proceso de Markov homogéneo con kérnel de transición* $Q(\cdot \mid \cdot, f)$ *(ver Proposición 2.3.5 en [28]). Por lo tanto, para cada* $t = 0, 1, \cdots$:

$$E_x^f\left[c(x_t,f)\right] = \int c(y,f)\,Q^t(dy \mid x,f), \tag{5.15}$$

donde

$$Q^t(\cdot \mid x,f) := \int Q^{t-1}(\cdot \mid y,f)\,Q(dy \mid x,f),$$

$t = 1, 2, \cdots$, *con* $Q^0(\cdot \mid x) :=$ *la medida de probabilidad concentrada en* $x \in X$. *Entonces, usando (5.15), podemos probar por un argumento de inducción que*

$$E_x^f\left[c(x_t,f)\right] = (ke)^t\,e^x, \tag{5.16}$$

para cada $t = 0, 1, \cdots$, $x \in X$, *donde* k *fue definido en la Suposición 5.3.2(b).*

Ahora, de (5.16) y la Suposición 5.3.2(b), tenemos para cada $x \in X$:

$$V(f,x) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t E_x^f c(x_t,f) = \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha k e)^t\,e^x < \infty.$$

Por lo tanto, concluímos que $V(\pi,x) < \infty$, *para* $\pi = \{f, f, \cdots\}$.

(d) Es inmediato que c es estrictamente convexa en $\mathbb{K}$. *También es posible verificar que* $F(\cdot,\cdot,s)$ *es convexa en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

Si $x < y$ *entonces, evidentemente,* $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$, *para todo* $a \in A, s \in S$, *entonces* $F(\cdot,a,s)$ *es no decreciente, para cada* $a, s \in \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 5.3.4 *Sean* $X = A = [0,1]$ *y*

$$x_{t+1} = \xi_t \tag{5.17}$$

$t = 0, 1, \cdots$ *, donde* $\xi_0, \xi_1, \cdots$ *, son variables aleatorias i.i.d. uniformemente distribuidas en* $S = [0,1]$ *.*

Definimos al conjunto $A(x)$ como:

$$A(x) = [0, 1 - x],$$

y $c(x,a) = \zeta(a), x \in X, a \in A(x)$, donde la función $\zeta : A \to \mathbb{R}$ es no negativa, estrictamente convexa y continua.

Es evidente, en este ejemplo, que c es no negativo, estrictamente convexo y continuo en $\mathbb{K}$ (obsérvese que $\mathbb{K}$ es compacto, de hecho es la región triangular delimitada por las rectas $x = 0, a = 0$ y la recta $a = 1 - x$). Además se tiene, directamente, que $c(\cdot, a)$ es no decreciente, para cada $a \in A(\cdot)$, Q inducido por (5.17) es fuertemente continuo y

$$0 \leq V(\pi, x) \leq \frac{M}{1-\alpha},$$

para todo $x \in X$, y $\pi \in \Pi$, donde M es una cota para c. Es inmediato que $A(x)$ es convexo para todo $x \in X$, y que si $x, y \in X, x < y$ entonces $A(y) \subset A(x)$.

Por otro lado, la inf-compacidad de c se sigue del hecho que $A(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Además, la función $F(x,a,s) = s$ para cada $x, s \in [0,1], a \in [0, 1-x]$ es convexa en $\mathbb{K}$ y no decreciente en la primera variable.

Finalmente, un cálculo elemental permite obtener que

$$(1-\lambda) a + \lambda a' \in A((1-\lambda) x + \lambda x') = [0, 1 - ((1-\lambda) x + \lambda x')],$$

si $x, x' \in X$, $a \in A(x) = [0, 1-x], a' \in A(x') = [0, 1-x'], \lambda \in [0,1]$.

En conclusión las Suposiciones 2.0.8 y la Condición 5.2.2 se cumplen.

Observación 5.3.5 *Obsérvese que en el ejemplo 5.3.4 tenemos que* $A(x) \neq A$*, para todo* $x \in X$.

Ejemplos para la Condición 5.2.4

Ejemplo 5.3.6 *Un sistema de inventario-producción.*

Sean $X = \mathbb{R}$ *y* $A = A(x) = [0, \infty)$ *, para todo* $x \in X$*. La dinámica de este sistema está dada por*

$$x_{t+1} = x_t + a_t - \xi_t, \tag{5.18}$$

para $t = 0, 1, \cdots$ *. Aquí* $\xi_0, \xi_1, \cdots$ *son variables aleatorias i.i.d. que toman valores en* $S = [0, \infty)$ *y con densidad común* Δ*. Sean* $\varphi : A \to \mathbb{R}$ *una función medible no negativa,* h *y* p *constantes positivas. La función de costo está dada por:*

$$c(x, a) := \varphi(a) + \widehat{\Gamma}(x, a), \tag{5.19}$$

con

$$\widehat{\Gamma}(x, a) = h \int_{-\infty}^{x+a} (x + a - s) \Delta(s) \, ds + p \int_{x+a}^{\infty} (s - (x + a)) \Delta(s) \, ds, \tag{5.20}$$

donde $(x, a) \in \mathbb{K}$

Observación 5.3.7

(a) En el contexto de inventarios (ver [9] y [28]), para cada periodo t*,* x_t *y* a_t *denotan el monto disponible y el monto ordenado en el inicio del periodo, respectivamente y* ξ_t *es la demanda aleatoria durante ese periodo. Además,* $\varphi(a)$ *representa el costo de ordenar* a *unidades,* $a \in A$*. Las constantes* h *y* p *representan el costo por exceso de inventario y el costo por unidad por demanda insatisfecha, respectivamente. El modelo de inventario que presentamos aquí, es una versión muy parecida a un modelo clásico de inventarios dado en [9] pp. 242-244. La diferencia entre nuestro ejemplo y el modelo dado en [9] puede verse principalmente en el término* $\varphi(\cdot)$ *de la función de costo y en la demanda aleatoria* ξ *(*ξ *es un elemento genérico de la sucesión* $\{\xi_t\}$*). En [9],* φ *tiene la forma específica* $\varphi(a) = b \cdot a, a \in A$ *donde* b *es una constante positiva que satisface* $p > b$ *(obsérvese que* $\varphi(a) = b \cdot a, a \in A$ *no es estrictamente convexa) y además* ξ *se supone acotada. Aquí,* φ *no tiene forma específica, pero se supone que satisface la Suposición 5.3.8(a) y* ξ *es una variable aleatoria no negativa con media finita.*

(b) Expresiones equivalentes para la función de costo en (5.20) son las siguientes:

$$c(x, a) = \varphi(a) + hE[\max(0, x + a - \xi)] + pE[\max(0, \xi - x - a)], \tag{5.21}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$*; además, dado que para cada par de números reales* l *y* s $\max(l,s) = \frac{l+s+|l-s|}{2}$, *se tiene que:*

$$c(x,a) = \varphi(a) + (h-p)\frac{x+a}{2} - (h-p)\frac{E[\xi]}{2} + (h+p)\frac{E[|x+a-\xi|]}{2}, \tag{5.22}$$

donde $(x,a) \in \mathbb{K}$ *y la esperanza en (5.21) y (5.22) es con respecto a* ξ.

Suposición 5.3.8

(a) $\varphi(0) = 0$, $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = +\infty$, *y* $\varphi(\cdot)$ *es continua y estrictamente convexa.*

(b) Δ *es continua y* $E[\xi]$ *es finita.*

Las Condiciones 5.2.4(a)-5.2.4(d) se cumplen evidentemente y $c \geq 0$. Resumimos el resto de las propiedades del ejemplo, en el siguiente Lema.

Lema 5.3.9 *Supóngase que la Suposición 5.3.8 se cumple. Entonces*

(a) c *es s.c.i.,* $\inf -$*compacto y estrictamente convexo en* $\mathbb{K}$.

(b) Q, *el kérnel inducido por (5.18), es fuertemente continuo.*

(c) Sea $f(x) = 0$, *para todo* $x \in X$. *Entonces* $V(\pi,x) < \infty$ *para cada* $x \in X$, *tomando* $\pi = \{f, f, \cdots\}$.

Demostración.

(a) Primero se prueba que c es continuo.

Sean $x' \in X$ y $a' \in A$ fijos. Sean $x'_n \in X, a'_n \in A, n = 1, 2, \cdots$, tales que

$$x'_n \to x',$$
$$a'_n \to a',$$

$n \to +\infty$. Sea $M > 0$ tal que $|x'_n| \leq M$ y $|a'_n| \leq M$, para todo $n = 1, 2, \cdots$.

Definimos las siguientes expresiones:

$$H(x,a) := E[|x+a-\xi|],$$

$$g_n(s) := |x' + a'_n - s|\,\Delta(s),$$
$$g(s) := (|x' + a' - s|)\,\Delta(s),$$

y

$$\overline{h}(s) := (2M + |s|)\,\Delta(s),$$

para $x \in X, a \in A, s \in S$, y $n = 1, 2, \cdots$. Obsérvese que

$$g_n(s) \to g(s),$$

$n \to +\infty$,

$$|g_n(s)| \le \overline{h}(s),$$

para cada $s \in S$ y $n = 1, 2, \cdots$. Además, de la Suposición 5.3.8(b) se tiene que

$$\int \overline{h}(s)\,ds = \int (2M + |s|)\,\Delta(s)\,ds < \infty.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Convergencia Dominada (ver [1]) se concluye que

$$H(x'_n, a'_n) = E[|x'_n + a'_n - \xi|] = \int g_n(s)\,ds \to \int g(s)\,ds = H(x', a'),$$

$n \to +\infty$.

Entonces H es continua y se sigue de (5.22) que c es continuo en $\mathbb{K}$.

Ahora probaremos que c es inf-compacto en $\mathbb{K}$. Para este fin usaremos el siguiente límite, para cada $x \in X$:

$$\lim_{a \to +\infty} c(x, a) = +\infty. \tag{5.23}$$

Para obtener (5.23) obsérvese que, de (5.21), $c(x, a) \ge \varphi(a)$, para $(x, a) \in \mathbb{K}$ y ya que $\lim\limits_{a \to +\infty} \varphi(a) = +\infty$ (ver Suposición 5.3.8(a)), (5.23) se sigue.

Ahora, sea $\overline{s} \in \mathbb{R}$ y fíjese $x \in X$. Obsérvese que

$$A_{\overline{s}}(x) := \{a \in A \mid c(x, a) \le \overline{s}\},$$

debe ser acotado, ya que si $A_{\overline{s}}(x)$ no es acotado, existe una sucesión $\{a''_n\} \subset A$ tal que $a''_n \uparrow \infty$ y $0 \le c(x, a''_n) \le \overline{s}$, para todo $n = 1, 2, \cdots$. Pero esto es una contradicción a (5.23).

Por otro lado, sea $\{\overline{a_n}\}$ una sucesión en $A_{\overline{s}}(x)$ tal que $\overline{a_n} \to a \in A$, $n \to +\infty$. Por lo tanto, $c(x, \overline{a_n}) \le \overline{s}$ para todo $n = 1, 2, \cdots$. Entonces por la continuidad de $c(x,\cdot)$ se sigue que $c(x,a) \leq \overline{s}$, i.e., $a \in A_{\overline{s}}(x)$. Así, $A_{\overline{s}}(x)$ es cerrado. Puesto que $A_{\overline{s}}(x) \subset \mathbb{R}$, se concluye que $A_{\overline{s}}(x)$ es compacto, i.e., c es inf-compacto en $\mathbb{K}$.

Ahora, se prueba que c es estrictamente convexo en $\mathbb{K}$. Es posible probar que

$$W_1(x,a) := hE\left[\max(0, x+a-\xi)\right]$$

y

$$W_2(x,a) := pE\left[\max(0, \xi-(x+a))\right],$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$ son funciones convexas en $\mathbb{K}$. Lo anterior se debe a que para cada $s \in S$,

$$\max(0, x+a-s) := \frac{x+a-s+|x+a-s|}{2},$$

y

$$\max(0, s-(x+a)) := \frac{s-(x+a)+|s-(x+a)|}{2},$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$, son evidentemente funciones convexas en $\mathbb{K}$. Por lo tanto, ya que φ es estrictamente convexa, se sigue de (5.21) que $c(\cdot,\cdot)$ es estrictamente convexo.

(b) Sea $\mu : X \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Tomamos $(x_k, a_k) \in \mathbb{K}$ tal que $(x_k, a_k) \to (x,a) \in \mathbb{K}$, $k \to +\infty$. Así para cada $k = 0, 1, \cdots$, usando el Teorema de C-V, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \mu(y)\, Q(dy \mid x_k, a_k) &= \int_{[0,\infty)} \mu(x_k + a_k - s)\, \Delta(s)\, ds && (5.24) \\ &= \int I_{(-\infty, x_k+a_k]}(l)\, \mu(l)\, \Delta(x_k + a_k - l)\, dl && (5.25) \end{aligned}$$

Es fácil probar que (ver ejercicio 4, p. 3 en [1]):

$$\begin{aligned} (-\infty, x+a) \subset \liminf\,(-\infty, x_k + a_k] \subset \\ \limsup\,(-\infty, x_k + a_k] \subset (-\infty, x+a]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por lo tanto, $\left\{I_{(-\infty, x_k+a_k]}\right\}$ converge a $I_{(-\infty, x+a]}$ casi dondequiera (c.d.q.), con respecto a la medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ una cota para μ, i.e.,

$$|\mu(x)| \leq \theta,$$

para todo $x \in X$. Se definen las expresiones:

$$\begin{aligned}
\eta_k(\cdot) &:= I_{(-\infty, x_k+a_k]}(\cdot)\, \mu(\cdot)\, \Delta(x_k + a_k - \cdot), \\
\eta(\cdot) &:= I_{(-\infty, x+a]}(\cdot)\, \mu(\cdot)\, \Delta(x + a - \cdot), \\
\widehat{g}_k(\cdot) &:= \theta I_{(-\infty, x_k+a_k]}(\cdot)\, \Delta(x_k + a_k - \cdot), \\
\widehat{g}(\cdot) &:= \theta I_{(-\infty, x+a]}(\cdot)\, \Delta(x + a - \cdot),
\end{aligned}$$

$(x, a), (x_k, a_k) \in \mathbb{K}$, para todo $k = 1, 2, \cdots$. Obsérvese que $\{\eta_k\}$ y $\{\widehat{g}_k\}$ convergen, respectivamente, a η y $\widehat{g}$ c.d.q. con respecto a m. Además, para cada $k = 1, 2, \cdots$, $|\eta_k(\cdot)| \leq \widehat{g}_k(\cdot)$. Entonces, usando el Teorema de C-V obtenemos que

$$\int \widehat{g}_k(l)\, dl = \int \widehat{g}(l)\, dl = \theta,$$

para cada $k = 1, 2, \cdots$. Por lo tanto, usando el Teorema de Convergencia Dominada (versión generalizada, ver [44] p. 92) obtenemos que

$$\int \eta_k(l)\, dl \to \int \eta(l)\, dl,$$

$k \to \infty$, i.e.,

$$\int_{(-\infty, x_k+a_k]} \mu(l)\, \Delta(x_k + a_k - l)\, dl \to \int_{(-\infty, x+a]} \mu(l)\, \Delta(x + a - l)\, dl, \tag{5.27}$$

$k \to \infty$. Entonces de (5.25) y (5.27) se obtiene que Q es fuertemente continuo.

(c) Tómese $f(x) = 0$, para todo $x \in X$ y denótese $\widehat{\mu} := E[\xi]$.

Si $x < 0$, entonces

$$c(x, f) = pE[\max(0, \xi - x)] \leq p(-x) + \widehat{\mu}p. \tag{5.28}$$

Si $x \geq 0$, tenemos:

$$c(x, f) = hE[\max(0, x - \xi)] + pE[\max(0, \xi - x)] \leq hx + \widehat{\mu}p. \tag{5.29}$$

Por lo tanto, de (5.28) y (5.29) obtenemos:

$$c\,(x,f) \leq r'\,|x| + \widehat{\mu}p, \tag{5.30}$$

para todo $x \in X$, donde $r' := \max\{p,h\}$ y directamente, por inducción obtenemos:

$$E_x^f\,[c\,(x_t,f)] \leq r'\,|x| + t\,(\widehat{\mu}r') + \widehat{\mu}p, \tag{5.31}$$

para cualquier $x \in X$ y $t = 0, 1, \cdots$.

Ahora para cada $x \in X$, usando (5.31):

$$V\,(f,x) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t\,(r'\,|x| + t\,(\widehat{\mu}r') + \widehat{\mu}p) = \frac{r'\,|x|}{1-\alpha} + \frac{\widehat{\mu}r'\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{\widehat{\mu}p}{1-\alpha} < \infty,$$

entonces se encuentra que $V\,(\pi,x) < \infty$ para $\pi = \{f, f, \cdots\}$ y $x \in X$.

Con lo que se completa la demostración. ■

Ejemplo 5.3.10 *El problema del regulador lineal (ver [9]). Se considera el sistema lineal escalar simple:*

$$x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t, \quad t = 0, 1, \cdots, \tag{5.32}$$

con costo cuadrático

$$c(x,a) = qx^2 + ra^2. \tag{5.33}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$. *Aquí, suponemos que* $X = A = A\,(x) = \mathbb{R}$, *para todo* $x \in X$.

Suposición 5.3.11

(a) $\gamma\delta \neq 0$, *y ambos* q *y* r *son positivos.*

(b) Las perturbaciones ξ_t, $t = 0, 1, \cdots$ *son variables aleatorias i.i.d. con valores en* $S = \mathbb{R}$. *Además, suponemos que* ξ_0 *tiene una densidad continua* Δ, *esperanza cero y varianza finita* $\sigma^2 > 0$.

Claramente este ejemplo satisface que $c \geq 0$ y además, este costo es semicontinuo inferiormente en $\mathbb{K}$. También, claramente las Condiciones 5.2.4(a)-5.2.4(d) se cumplen.

Lema 5.3.12 *Bajo las Suposiciones 5.3.11, tenemos que:*

(a) c *es inf-compacto y estrictamente convexo en* $\mathbb{K}$.

(b) $Q(\cdot \mid x,a), x \in X, a \in A(x)$*, inducido por (5.32), es fuertemente continuo.*

(c) $V(\pi, x) < \infty, x \in X,$ *donde* $\pi = \{f, f, \cdots\}$ *y* $f(x) = -\frac{\gamma}{\delta}x$*,* $x \in X$*.*

Demostración.

(a) Sean $x \in X, \overline{s} \in \mathbb{R}$. Entonces

$$A_{\overline{s}}(x) := \begin{cases} \{a \in A(x) \mid c(x,a) \leq \overline{s}\} = \emptyset & si \quad \overline{s} < qx^2, \\ \left[-\sqrt{\frac{\overline{s}-qx^2}{r}}, \sqrt{\frac{\overline{s}-qx^2}{r}}\right] & si \quad \overline{s} \geq qx^2. \end{cases} \tag{5.34}$$

Por tanto, se tiene que $c(\cdot,\cdot)$ es inf-compacta.

Ahora, la función de costo $c(\cdot,\cdot)$ es estrictamente convexa debido a que las funciones $y_1(x) = qx^2, x \in \mathbb{R}$ y $y_2(a) = ra^2, a \in \mathbb{R}$ son funciones estrictamente convexas.

(b) Sean $B \in \mathcal{B}(X)$ y $(x,a) \in \mathbb{K}$. Entonces

$$Q(B \mid x,a) = \int I_B(\gamma x + \delta a + s)\,\Delta(s)\,ds = \int_B \Delta(l - (\gamma x + \delta a))\,dl,$$

donde la última igualdad se debe al Teorema de C-V. De la Suposición 5.3.11(b), se sigue que $\Delta(\cdot - (\gamma x + \delta a))$ es continua en (x,a). Entonces, por el Lema A.0.6 obtenemos que Q es fuertemente continua.

(c) Sea $f(x) = -\frac{\gamma}{\delta}x, x \in X$. Obsérvese que $c(x,f) = \overline{l}x^2, x \in X$, donde $\overline{l} := q + r\frac{\gamma^2}{\delta^2}$. Ahora,

$$\begin{aligned} E_x^f[c(x_1,f)] &= \overline{l}\int y^2 Q(dy \mid x,f) \\ &= \overline{l}\int \left(\gamma x + \delta\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right)x + s\right)^2 \Delta(s)\,ds \\ &= \overline{l}\sigma^2, \end{aligned}$$

donde $\sigma^2 := E\left[\xi_0^2\right]$.

Procediendo de esta manera, se prueba que

$$E_x^f[c(x_t,f)] = \overline{l}\sigma^2,$$

$t = 2, 3, \cdots$.

Por lo tanto

$$V(f,x) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t E_x^f [c(x_t, f)] = \bar{l}x^2 + \bar{l}\sigma^2 \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t < \infty,$$

para todo $x \in X$. Entonces $V(\pi, x) < \infty$, para todo $x \in X$, tomando $\pi = \{f, f, \cdots\}$.

■

Ejemplos para la Condición 5.2.6

Observación 5.3.13 *Obsérvese que cada ejemplo en esta sección satisface lo siguiente.*

(a) La función de costo $c(\cdot, \cdot)$ es no negativa y acotada superiormente.

(b) La función de costo c es continua en $\mathbb{K}$.

(c) Los conjuntos de restricciones $A(x), x \in X$, son compactos. Entonces c es inf-compacto en $\mathbb{K}$.

Por lo tanto, la Suposición 2.0.8(a) y la Suposición 2.0.8(c) se cumplen.

Ejemplo 5.3.14 *Sean $X = \{0, 1\}, A = A(x) = \{a, b\}, x \in X$. Sean ρ, ϱ, ϑ, y β números fijos en el intervalo $(0, 1)$ tales que describen la ley de transición como sigue:*

$$\begin{aligned} Q(\{0\} \mid 0, a) &= \rho, \; Q(\{1\} \mid 0, a) = 1 - \rho, && (5.35)\\ Q(\{0\} \mid 1, a) &= \varrho, \; Q(\{1\} \mid 1, a) = 1 - \varrho, && (5.36)\\ Q(\{0\} \mid 0, b) &= \vartheta, \; Q(\{1\} \mid 0, b) = 1 - \vartheta, \; y && (5.37)\\ Q(\{0\} \mid 1, b) &= \beta, \; Q(\{1\} \mid 1, b) = 1 - \beta. && (5.38) \end{aligned}$$

La función de costo está dada por: $c(0, a) = 1$, $c(0, b) = 2$, $c(1, a) = 4$, $c(1, b) = 3$.

Suposición 5.3.15 *Suponemos que $\varrho \leq \rho$, $\beta \leq \vartheta$, $\vartheta \leq \rho$, y $\varrho \leq \beta$.*

Es evidente que las Condiciones 5.2.6(a) y 5.2.6(b) se cumplen y que Q, definido en (5.35)-(5.38), es fuertemente continuo. También, $c(\cdot, d)$ es no decreciente, para cada $d \in A$. Definiendo

$$\overline{f}(0) = a, \text{ y } \overline{f}(1) = b, \tag{5.39}$$

obtenemos que

$$c\left(0, \overline{f}(0)\right) = c(0, a) = 1 < 2 = c(0, b),$$

y

$$c\left(1, \overline{f}(1)\right) = c(1, b) = 3 < 4 = c(1, a).$$

Por lo tanto $\overline{f}$ es el mínimo de la función de costo c sobre las acciones y de hecho, $\overline{f}$ es única.

Lema 5.3.16 *Bajo la Suposición 5.3.15, la ley de transición Q, definida en (5.35)-(5.38), satisface:*

(a) $Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}(x)\right) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid x, d)$, *para todo* $x \in X$ *y* $d \in A(x)$.

(b) Si $x, y \in X$ *y* $x < y$, *entonces* $Q(\cdot \mid x, d) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid y, d)$, *para todo* $d \in A(y)$.

Demostración. Primero, obsérvese que de (5.35)-(5.38) se obtiene:

$$Q((-\infty, u] \mid x, d) = 0 \text{ si } u < 0, \text{ y } Q((-\infty, u] \mid x, d) = 1 \text{ si } u \geq 1, \tag{5.40}$$

para todo $x \in X$ y $d \in A$; además si $0 \leq u < 1$:

$$\begin{aligned} Q((-\infty, u] \mid 0, a) &= \rho, & (5.41)\\ Q((-\infty, u] \mid 0, b) &= \vartheta, & (5.42)\\ Q((-\infty, u] \mid 1, a) &= \varrho, & (5.43)\\ Q((-\infty, u] \mid 1, b) &= \beta. & (5.44) \end{aligned}$$

(a) Ya que $\vartheta \leq \rho$ (ver Suposición 5.3.15) y de (5.40), (5.41) y (5.42), tenemos que

$$Q\left((-\infty, u] \mid 0, \overline{f}(0)\right) = Q((-\infty, u] \mid 0, a) \geq Q((-\infty, u] \mid 0, b), \tag{5.45}$$

para todo $u \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$Q\left(\cdot \mid 0, \overline{f}\left(0\right)\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid 0, b\right),$$

(ver Observación 5.1.2). De la misma manera, obtenemos que $\varrho \leq \beta$, implica

$$Q\left(\cdot \mid 1, \overline{f}\left(1\right)\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid 1, a\right).$$

(b) Por otro lado, como $\varrho \leq \rho$, y utilizando (5.40), (5.41) y (5.43) se tiene que

$$Q\left(\cdot \mid 0, a\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid 1, a\right),$$

y $\beta \leq \vartheta$, (5.40), (5.42) también (5.44) implican que

$$Q\left(\cdot \mid 0, b\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid 1, b\right).$$

Así, si $x, y \in X$ tales que $x < y$, entonces

$$Q\left(\cdot \mid x, d\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid y, d\right),$$

para todo $d \in A$.

Con lo que queda demostrado el resultado. ■

Ejemplo 5.3.17 *Sea ε un número positivo fijo tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Sean*

$$X = \{1, 2, \cdots\},$$

$$A = A\left(x\right) = \left[\varepsilon, 1/2\right],$$

$x = 1, 2, \cdots$ *. La ley de transición se define por:*

$$Q\left(\{y\} \mid x, a\right) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{y-1} \frac{a}{x}, \tag{5.46}$$

$x, y = 1, 2, \cdots$ *, y $a \in A$. La función de costo se define por:*

$$c\left(x, a\right) = \begin{cases} 1 & si \quad a = 1/2, \\ 1 + a & si \quad a \neq 1/2. \end{cases} \tag{5.47}$$

Obsérvese que, para este ejemplo, las Condiciones 5.2.6 (a), 5.2.6(b) y 5.2.6(e) directamente se cumplen. Sea

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2}, \tag{5.48}$$

para todo $x \in X$. Obsérvese que, para cada $x \in X$, $c\left(x, \overline{f}(x)\right) = 1 < 1 + a = c(x,a)$, para todo $a \in A$, $a \neq \overline{f}(x)$. Por lo tanto, $\overline{f}$ definido en (5.48) es la única política estacionaria en la cual se alcanza el costo mínimo.

Lema 5.3.18 *(a) Q definido en (5.46) es fuertemente continuo.*

(b) Sea $\overline{f}$ definido en (5.48). Entonces

$$Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}(x)\right) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid x, a),$$

para todo $x \in X$ y $a \in A$.

(c) Si $x, y \in X, x < y$, entonces

$$Q(\cdot \mid x, a) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid y, a),$$

para todo $a \in A$.

Demostración.

(a) Sea $x \in X$ un estado fijo. Sea $u : X \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Se define

$$\overline{T}(l) := \sum_{y=1}^{\infty} u(y)\, l^{y-1},$$

$l \in \overline{I}$, donde $\overline{I}$ es el intervalo de convergencia de $\overline{T}$. Obsérvese que debido a que u es acotada, $\overline{T}$ es una serie de potencias la cual converge, en particular en $(0,1)$ i.e., $(0,1)$ está contenido en el interior de $\overline{I}$. Por lo tanto $\overline{T}$ es continua en $(0,1)$ (ver Teorema 3.109 en [50]). Sea

$$L(z) := 1 - \frac{z}{x},$$

$z \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$. Obsérvese que L es (obviamente) continua en $\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$ y $\overline{T}$ es continua en

$$L\left(\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{2x}, 1 - \frac{\varepsilon}{x}\right] \subset (0,1).$$

Se sigue que

$$T_x(z) := \left(\overline{T} \circ L\right)(z) = \overline{T}(L(z)),$$

$z \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$ es continua en el intervalo $\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$, entonces como x se tomó arbitrario obtenemos que T_x es continua en $\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$, para todo $x \in X$.

Por otro lado, sea $\{(x_n, a_n)\} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$(x_n, a_n) \to (\overline{x}, \overline{a}) \in \mathbb{K},$$

cuando $n \to +\infty$. En particular, como $x_n \to \overline{x}$, $n \to +\infty$ y ya que X está dotado con la topología discreta, obtenemos que existe un entero positivo k_0 tal que $x_n = \overline{x}$, para todo $n \geq k_0$. Por lo tanto, es posible suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n = \overline{x}$, para todo $n = 1, 2, \cdots$ y $(\overline{x}, a_n) \to (\overline{x}, \overline{a})$, $n \to +\infty$.

Ahora, de (5.46):

$$\sum_{y=1}^{\infty} u(y) Q(\{y\} \mid \overline{x}, a_n) = \frac{a_n}{\overline{x}} \sum_{y=1}^{\infty} u(y) \left(1 - \frac{a_n}{\overline{x}}\right)^{y-1} = \frac{a_n}{\overline{x}} T_{\overline{x}}(a_n), \tag{5.49}$$

pero, $a_n \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$, para cada n, y $T_{\overline{x}}$ es continua en el intervalo $\left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$. Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\overline{x}} T_{\overline{x}}(a_n) &= \frac{\overline{a}}{\overline{x}} T_{\overline{x}}(\overline{a}) = \sum_{y=1}^{\infty} u(y) \frac{\overline{a}}{\overline{x}} \left(1 - \frac{\overline{a}}{\overline{x}}\right)^{y-1} & (5.50) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} u(y) Q(\{y\} \mid \overline{x}, \overline{a}), & (5.51) \end{aligned}$$

y se concluye que Q es fuertemente continuo.

(b) Por medio de cálculos directos tenemos, para cada $x \in X$ y $a \in A$,

$$Q((-\infty, u] \mid x, a) = 0,$$

si $u < 1$ y

$$Q((-\infty, u] \mid x, a) = \sum_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{k-1} \frac{a}{x} = 1 - \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{j}, \tag{5.52}$$

si $j \leq u < j+1$ y $j = 1, 2, \cdots$.

Sea $\overline{f}$ definido por (5.48) y sea $x \in X$ fijo. Entonces, de (5.52) se concluye que si $a \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right]$,

$$Q\left((-\infty, u] \mid x, a\right) \leq Q\left((-\infty, u] \mid x, \overline{f}\left(x\right)\right),$$

para todo $u \in \mathbb{R}$ y $a \in A$. Entonces, $Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}\left(x\right)\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid x, a\right)$ para todo $a \in A$.

(c) De manera similar a la prueba de (b) podemos verificar, usando (5.52), que si $x, y \in X, x < y$ entonces $Q\left(\cdot \mid x, a\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid y, a\right)$ para cada $a \in A$.

■

Ejemplo 5.3.19 *Sean* $X = \mathbb{R}$, $A = A\left(x\right) = \left[-\pi, \pi\right], x \in X$. *La ley de transición está dada por:*

$$x_{t+1} = x_t^3 + \cos a_t + \xi_t, \tag{5.53}$$

para $t = 0, 1, \cdots$ *y la función de costo se define por:*

$$c\left(x, a\right) = g\left(x\right)\left(\left(a - \pi\right)^2 + 1\right), \tag{5.54}$$

con $(x, a) \in \mathbb{K}$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se define por*

$$g\left(x\right) = \begin{cases} 2 & si & x > 1, \\ \sqrt{x} + 1 & si & x \in [0, 1], \\ 1 & si & x \leq 0 \end{cases}. \tag{5.55}$$

Suposición 5.3.20 $\{\xi_t\}$ *es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toma valores en* $S = \mathbb{R}$. *Suponemos también que* ξ_0 *tiene una densidad continua* Δ.

Para este ejemplo, 5.2.6(a) y 5.2.6(b) se cumplen evidentemente. Además 5.2.6(e) es una consecuencia del hecho que g, definido en (5.55), es no decreciente en x. Un cálculo elemental muestra que el mínimo único, con respecto a las acciones, en (5.54) ocurre en $a = \pi$, i.e., tomamos $\overline{f}\left(x\right) = \pi$, para todo $x \in X$. Definiendo

$$F\left(x, a, s\right) := x^3 + \cos a + s, \tag{5.56}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$ y $s \in S$, es directo que $F(x,\pi,s) = \min\limits_{a\in A} F(x,a,s)$, para cada $x \in X$ y $s \in S$ y $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$, para $x,y \in X, x < y$ y para cada $a \in A$ y $s \in S$. Por lo tanto, del Lema 5.2.8, tenemos que

$$Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid x, a\right),$$

$x \in X, a \in A$ y

$$Q\left(\cdot \mid x, a\right) \overset{est}{\leq} Q\left(\cdot \mid y, a\right),$$

para $x,y \in X, x < y, a \in A$. Finalmente, (5.53), el Teorema de C-V, la Suposición 5.3.20 y el Lema A.0.6 permiten obtener que

$$Q\left(B \mid x,a\right) = \int I_B\left(x^3 + \cos a + s\right)\Delta\left(s\right)ds = \int_B \Delta\left(s - \left(x^3 + \cos a\right)\right)ds,$$

para $x \in X, a \in A$ y $B \in \mathcal{B}(X)$, concluyendo que Q es fuertemente continuo. Entonces, las Suposiciones 2.0.8 y 5.2.6 se cumplen.

Observación 5.3.21 *Obsérvese que en el último ejemplo, también*

$$F\left(x,-\pi,s\right) = \min_{a\in A} F\left(x,a,s\right), \tag{5.57}$$

para cada $x \in X$ y $s \in S$, i.e., el mínimo de F con respecto a las acciones no es necesariamente único. Además, ya que g (definido en (5.55)) y $w(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ no son convexas en $\mathbb{R}$, se sigue que c y $F(\cdot,\cdot,s), s \in \mathbb{R}$ definida en (5.54) y (5.56) respectivamente, no son convexas en $\mathbb{K}$.

Ejemplo 5.3.22 *Sean $X = \mathbb{R}$, $A = [0,\infty)$ y $A(x) = [0, e^{-x}], x \in \mathbb{R}$. La ley de transición está dada por:*

$$x_{t+1} = e^{x_t - a_t} + \xi_t, \tag{5.58}$$

para $t = 0, 1 \cdots$ y la función de costo está dada por

$$c\left(x,a\right) = e^{-a}, \tag{5.59}$$

$x \in X$ y $a \in A(x)$.

Suposición 5.3.23 *$\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $S = \mathbb{R}$ y con densidad continua común Δ.*

En este caso, se puede probar que la ley de transición Q, inducida por (5.58), es fuertemente continua y que 5.2.6(a), 5.2.6(b), 5.2.6(e), 5.5, 5.6, y 5.7 se cumplen con $\overline{f}(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$. Entonces, la Suposición 2.0.8 y la Condición 5.2.6, se cumplen.

Observación 5.3.24 *Como en el Ejemplo 5.3.4, en el Ejemplo 5.3.22 también se satisface que $A(x) \neq A$, para todo $x \in X$. Además, es directo verificar que el Ejemplo 5.3.4 satisface la Condición 5.2.6; pero, nótese que el Ejemplo 5.3.22 no satisface 5.2.2 (en particular, obsérvese que $\mathbb{K}$ no es convexo).*

5.4. El Teorema de Unicidad

Teorema 5.4.1 *(a) Las Condiciones 5.2.2, 5.2.4 y 5.2.6 no se implican entre sí.*

(b) Supóngase que 2.0.8 se cumple. Entonces existe una única política óptima, bajo cada una de las Condiciones 5.2.2, 5.2.4, o 5.2.6.

Observación 5.4.2 *Antes de probar el Teorema 5.4.1 obsérvese que de la Suposición 2.0.8 se asegura la existencia de una política óptima estacionaria (ver, Lema 2.0.11) y que del Teorema 5.4.1(b) obtenemos que esta política es única.*

Empezamos con dos Lemas que usaremos en la prueba del Teorema 5.4.1.

Lema 5.4.3 *Supóngase que la Suposición 2.0.8 se cumple. Cada una de las Condiciones 5.2.2 y 5.2.6 implican que $V_n(\cdot)$ es no decreciente, para todo $n = 1, 2, \cdots$. Por lo tanto, $V^*(\cdot)$ es no decreciente.*

Demostración. La prueba se hará por inducción. Obsérvese que la prueba de que $V_1(\cdot)$ es no decreciente es la misma bajo cada una de las Condiciones 5.2.2 o 5.2.6 (recuérdese que bajo la Condición 5.2.6, por simplicidad, también denotamos por " $<$" al orden parcial en X). Sean $x, y \in X, x < y$. Puesto que $c(x,a) \leq c(y,a)$ para todo $a \in A(y)$, entonces

$$\min_{a \in A(x)} c(x,a) \leq \min_{a \in A(y)} c(y,a), \tag{5.60}$$

(recuérdese que $A(y) \subset A(x)$).

Por lo tanto $V_1(x) \leq V_1(y)$, i.e., $V_1(\cdot)$ es no decreciente. Supóngase que la Condición 5.2.2 se cumple y que $V_n(\cdot)$ es no decreciente para un entero positivo n. De las Condiciones 5.2.2(d) y 5.2.2(e) tenemos que

$$c(x,a) \leq c(y,a), \quad \text{y} \tag{5.61}$$

$$F(x,a,s) \leq F(y,a,s), \tag{5.62}$$

para todo $x, y \in X$, con $x < y$ y $a \in A(y)$, $s \in S$. Ya que $V_n(\cdot)$ es no decreciente, de (5.62) obtenemos que

$$V_n(F(x,a,s)) \leq V_n(F(y,a,s)), \tag{5.63}$$

para todo $x, y \in X$, con $x < y$ y $a \in A(y)$, $s \in S$.

Usando (5.61), (5.63) y la monotonicidad de la integral se sigue que

$$c(x,a) + \alpha \int V_n(F(x,a,s))\,\Delta(s)\,ds \leq$$

$$c(y,a) + \alpha \int V_n(F(y,a,s))\,\Delta(s)\,ds, \tag{5.64}$$

para todo $x, y \in X$, con $x < y$ y $a \in A(y)$. Tomando el mínimo con respecto a a, en cada lado de la desigualdad (5.64), tenemos que:

$$V_{n+1}(x) \leq V_{n+1}(y) \tag{5.65}$$

$x, y \in X$, con $x < y$, i.e., $V_{n+1}(\cdot)$ es no decreciente. Por lo tanto, $V_n(\cdot)$ es no decreciente, para todo $n = 1, 2, \cdots$.

Ahora, bajo la Condición 5.2.6, supóngase que $V_n(\cdot)$ es no decreciente para algún entero positivo n. Si $x, y \in X$, $x < y$, se sigue que $c(x,a) \leq c(y,a)$ y $Q(\cdot \mid x,a) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid y,a)$, para todo $a \in A(y)$. Entonces, como $V_n(\cdot)$ es no negativa y no decreciente, usando el Lema 5.1.3 obtenemos que

$$c(x,a) + \alpha \int V_n(z)\,Q(dz \mid x,a) \leq c(y,a) + \alpha \int V_n(z)\,Q(dz \mid y,a), \tag{5.66}$$

$x, y \in X, x < y$ y $a \in A(y)$. Tomando el mínimo con respecto a a en ambos lados de (5.66) obtenemos que $V_{n+1}(x) \leq V_{n+1}(y)$, $x, y \in X, x < y$. Se sigue que $V_n(\cdot)$ es no decreciente para $n = 1, 2, \cdots$.

Ya que para cada $x \in X, V_n(x) \to V^*(x)$, $n \to \infty$, (ver Lema 2.0.11(b)), se sigue que para cada una las Condiciones 5.2.2 o 5.2.6, $V^*(\cdot)$ es no decreciente. ■

Lema 5.4.4 *Supóngase que 2.0.8 se cumple. Bajo cada una de la Condiciones 5.2.2 y 5.2.4 se tiene que $V_n(\cdot)$ es convexa, para todo $n = 1, 2, \cdots$. Por lo tanto, $V^*(\cdot)$ es convexa.*

Demostración. La prueba se hará por inducción. Usando el Lema 1 de [34] junto con el hecho de que c es estrictamente convexa obtenemos que V_1 es estrictamente convexa. Esta demostración es la misma bajo cada Condición 5.2.2 o 5.2.4.

Supóngase que la Condición 5.2.2 se cumple. Supóngase que $V_n(\cdot)$ es convexa para algún entero positivo $n > 1$. Verificaremos que

$$\int V_n(y)\, Q(dy \mid x, a),$$

$(x, a) \in \mathbb{K}$, es convexa en $\mathbb{K}$. Este hecho junto con (2.11), la Condición 5.2.2(e) y el Lema 1 en [34], permiten concluir que $V_{n+1}(\cdot)$ es convexa.

Tómese $x, \overline{x} \in X$, $a \in A(x)$, $\overline{a} \in A(\overline{x})$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces de la convexidad de $V_n(\cdot)$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \lambda \int V_n(y)\, Q(dy \mid x, a) + (1-\lambda) \int V_n(y)\, Q(dy \mid \overline{x}, \overline{a}) && (5.67) \\ = \; & \lambda \int V_n(F(x, a, s))\, \Delta(s)\, ds + (1-\lambda) \int V_n(F(\overline{x}, \overline{a}, s))\, \Delta(s)\, ds \\ = \; & \int [\lambda V_n(F(x, a, s)) + (1-\lambda) V_n(F(\overline{x}, \overline{a}, s))]\, \Delta(s)\, ds && (5.68) \\ \geq \; & \int V_n(\lambda F(x, a, s) + (1-\lambda) F(\overline{x}, \overline{a}, s))\, \Delta(s)\, ds. && (5.69) \end{aligned}$$

Pero, por la Condición 5.2.2(d) y la monotonicidad de $V_n(\cdot)$ (ver Lema 5.4.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int V_n(\lambda F(x, a, s) + (1-\lambda) F(\overline{x}, \overline{a}, s))\, \Delta(s)\, ds && (5.70) \\ \geq \; & \int V_n(F(\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}, \lambda a + (1-\lambda)\overline{a}, s))\, \Delta(s)\, ds && (5.71) \\ = \; & \int V_n(y)\, Q(dy \mid \lambda x + (1-\lambda)\overline{x}, \lambda a + (1-\lambda)\overline{a}). && (5.72) \end{aligned}$$

Entonces, de (5.67)-(5.72) obtenemos que

$$\int V_n(y)\, Q(dy \mid x, a),$$

$(x, a) \in \mathbb{K}$, es convexa en $\mathbb{K}$.

De la misma manera, como en la última demostración, es posible verificar que, bajo la Condición 5.2.4, $V_n(\cdot)$ es convexa, para cada $n > 1$. Nótese que en este caso no necesitamos la monotonicidad de $V_n(\cdot)$ en (5.70). Ahora, si la transición está definida por una función F lineal, se tiene que (5.69) es igual a (5.71). Con esto la convexidad de $V_n(\cdot)$ se sigue de nuevo de (5.67)-(5.72).

Finalmente, del Lema 2.0.11(b), obtenemos que para cada una de las Condiciones 5.2.2 o 5.2.4, $V^*(\cdot)$ es convexa. ■

Ahora se puede demostrar el teorema de unicidad.

Demostración del Teorema 5.4.1. **(a)** *La Condición 5.2.2 no implica la Condición 5.2.4, ni la Condición 5.2.6***.** El Ejemplo 5.3.1 satisface la Condición 5.2.2 pero la ley de transición (5.10) es aditiva y no lineal. Por lo tanto, la Condición 5.2.4 no se cumple. La Condición 5.2.6 tampoco se cumple porque en la función $F(x, a, s) = x + e^a + s$, $x, a, s \in \mathbb{R}$, en el Ejemplo 5.3.1 no se alcanza el mínimo sobre $a \in \mathbb{R}$, para cada x y $s \in \mathbb{R}$.

La Condición 5.2.4 no implica la Condición 5.2.2, ni tampoco la Condición 5.2.6 El ejemplo 5.3.10 satisface la Condición 5.2.4, pero no la Condición 5.2.2. De hecho la función de costo dada por:

$$c(x, a) = qx^2 + ra^2, \tag{5.73}$$

$x, a \in \mathbb{R}$ y q y r constantes positivas, no es monótona en la variable $x \in \mathbb{R}$. También, para el ejemplo 5.3.10 la Condición 5.2.6 no se cumple por que, tomando $\delta > 0$:

$$\min_{a \in \mathbb{R}} (\gamma x + \delta a + s) = -\infty,$$

para cada $x, s \in \mathbb{R}$ y además como se ha observado la función de costo dada en (5.73) no es monótona en $x \in \mathbb{R}$.

La Condición 5.2.6 no implica la Condición 5.2.2, ni la Condición 5.2.4. Ambas Condiciones 5.2.2 y 5.2.4 requieren que el espacio de estados X sea un conjunto convexo. Pero, lo anterior no es verdadero para los ejemplos 5.3.14 y 5.3.17.

(b) La prueba se divide en tres partes. En cada una de ellas suponemos que la Suposición 2.0.8 se cumple. Por lo tanto, existe $f^* \in \mathbb{F}$ tal que es óptima.

(i) Supóngase que la Condición 5.2.2 se cumple. Igual a la prueba de que

$$\int V_n(y) \, Q(dy \mid x, a),$$

$(x, a) \in \mathbb{K}, n = 1, 2, \cdots$ es convexa en $\mathbb{K}$., en el Lema 5.4.4, es posible probar que

$$\int V^* (y) Q (dy \mid \cdot, \cdot),$$

es convexa en $\mathbb{K}$. En particular, para cada $x \in X$:

$$\int V^* (y) Q (dy \mid x, \cdot),$$

es convexa en $A(x)$.

De la Condición 5.2.2(e), para cada $x \in X$, $c(x, \cdot)$ es estrictamente convexo; se sigue que

$$c(x, \cdot) + \alpha \int V^* (y) Q (dy \mid x, \cdot)$$

es estrictamente convexa en $A(x)$, para cada $x \in X$. Entonces usando la Proposición 6 del Capítulo 2 en [4], concluímos que f^* es única.

(ii) Supóngase que la Condición 5.2.4 se cumple. De nuevo como en la prueba de (i) y similar a la demostración del Lema 5.4.4, cuando

$$\int V_n (y) Q (dy \mid \cdot, \cdot),$$

$n = 1, 2, \cdots$ es convexa en $\mathbb{K}$ se puede probar que

$$\int V^* (y) Q (dy \mid \cdot, \cdot),$$

es también convexa en $\mathbb{K}$. Entonces, como en (i):

$$c(\cdot, \cdot) + \alpha \int V^* (y) Q (dy \mid \cdot, \cdot),$$

es estrictamente convexa y entonces el resultado se sigue.

(iii) Supóngase que la Condición 5.2.6 se cumple. Sea $x \in X$. De la Condición 5.2.6(c) obtenemos que existe $\overline{f} \in \mathbb{F}$, tal que

$$Q\left(\cdot \mid x, \overline{f}(x)\right) \overset{est}{\leq} Q(\cdot \mid x, a), \tag{5.74}$$

$a \in A(x)$ y

$$c\left(x, \overline{f}(x)\right) = \min_{a \in A(x)} c(x, a) < c(x, a), \tag{5.75}$$

para $a \in A(x), a \neq \overline{f}(x)$.

Entonces, de (5.74) y (5.75) usando que $V^*(\cdot)$ es no negativo y no decreciente y del Lema 5.1.3 se tiene que

$$c\left(x, \overline{f}(x)\right) + \alpha \int V^*(y) Q\left(dy \mid x, \overline{f}(x)\right) < \\ c(x,a) + \alpha \int V^*(y) Q(dy \mid x, a), \qquad (5.76)$$

para $x \in X$, $a \in A(x), a \neq \overline{f}(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int V^*(y) Q(dy \mid x, a) \right] \\ &= c\left(x, \overline{f}(x)\right) + \alpha \int V^*(y) Q\left(dy \mid x, \overline{f}(x)\right), \qquad (5.77) \end{aligned}$$

$x \in X$ y de (5.76) y (5.77) obtenemos que $\overline{f}$ es óptima y única (de hecho $\overline{f} = f^*$). ■

Capítulo 6

Convergencia

En este capítulo resolvemos el problema de la convergencia de minimizadores del AIV a la política óptima de PDMs descontados de horizonte infinito.

El capítulo está basado en [19].

Para un PDM descontado, recuérdese que los minimizadores del algoritmo de iteración de valores se denotan por $f_n, n = 1, 2, \cdots$ y la política óptima se denota por f^*.

Los resultados principales de este capítulo son los Teoremas 6.1.6 y 6.2.12. En tales teoremas se presentan los resultados de convergencia puntual y convergencia uniforme sobre compactos de $\{f_n\}$ a f^*.

Una suposición que usaremos en este capítulo de convergencia es la siguiente:

Suposición 6.0.5 *Supóngase que la Suposición 2.0.8 se satisface y que f^*, dada en (2.14), es única.*

6.1. Convergencia Puntual de Minimizadores

En esta sección se presentan las suposiciones y el teorema que aseguran la convergencia puntual de minimizadores del AIV de PDMs a la política óptima.

Notación 6.1.1

a. Para cada $x \in X$, $\widehat{A}(x) := A_{V^*(x)}(x) = \{a \in A(x) \mid c(x, a) \leq V^*(x)\}$, donde V^* es la función de valor,

b. Para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$,

$$G_n(x, a) := c(x, a) + \alpha \int V_{n-1}(y)\, Q(dy \mid x, a), \tag{6.1}$$

para cada $n = 1, 2, \cdots$, donde V_{n-1} es la función dada en (3),

c. Para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$,

$$G(x, a) := c(x, a) + \alpha \int V^*(y)\, Q(dy \mid x, a).$$

Observación 6.1.2 *Obsérvese que como la función de costo c es inf-compacta sobre $\mathbb{K}$, entonces $\widehat{A}(x)$ es compacto, para cada $x \in X$. Además, para cada $x \in X$ y $n = 1, 2, \cdots, f_n(x)$ y $f^*(x)$ pertenecen a $\widehat{A}(x)$.*

Suposición 6.1.3 *a. Para cada $x \in X$, $c(x, \cdot)$, es una función continua sobre $A(x)$.*

b. Para cada $x \in X$,

$$\int V_n(y)\, Q(dy \mid x, \cdot), n = 1, 2, \cdots, \tag{6.2}$$

$$\int V^*(y)\, Q(dy \mid x, \cdot), \tag{6.3}$$

son funciones finitas y continuas sobre $A(x)$.

Observación 6.1.4 *La continuidad requerida en la Suposición 6.1.3 trivialmente se cumple para PDMs con espacio de acciones finito o numerable. Posteriormente, se presentan algunos ejemplos de PDMs con espacio de estados y espacio de acciones no numerables para ilustrar (en particular) la Suposición 6.1.3.*

El siguiente Lema se usará en la prueba del Teorema 6.1.6 abajo, su prueba se sigue del Teorema de Dini (ver [35]).

Lema 6.1.5 *Sea $x \in X$ fijo y sea $\Gamma \subset A(x)$ un conjunto compacto no vacío. Si la Suposición 6.1.3 se satisface, entonces $G_n(x, \cdot) \to G(x, \cdot)$, $n \to \infty$, uniformemente sobre Γ.*

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Se sabe que $V_n \uparrow V^*$(ver Lema 2.0.11b) y de la Suposición 6.1.3: $G_n(x, \cdot), n = 1, 2, \cdots, G(x, \cdot)$ son funciones continuas sobre Γ. Entonces, $G_n(x, \cdot) \uparrow G(x, \cdot)$ y por el Teorema de Dini ([14] p. 239), se tiene que $G_n(x, \cdot) \to G(x, \cdot)$, $n \to \infty$, uniformemente sobre Γ. ■

Ahora, presentamos el primer teorema de convergencia de minimizadores.

Teorema 6.1.6 *Si la Suposición 6.1.3 se satisface, entonces* $\{f_n\} \to f^*$ *puntualmente.*

Demostración. Supóngase que existe un $x \in X$ tal que $f_n(x) \nrightarrow f^*(x)$. Sea $\{f_{n_k}(x)\}$ una subsucesión de $\{f_n(x)\}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$d(f_{n_k}(x), f^*(x)) \geq \varepsilon > 0, \tag{6.4}$$

para todo entero k.

Ya que $\widehat{A}(x)$ es un conjunto compacto (ver Observación 6.1.2), podemos tomar $g(x) \in \widehat{A}(x)$ y una subsucesión $\{f_{n_{k_l}}(x)\}$ de $\{f_{n_k}(x)\}$, tal que

$$f_{n_{k_l}}(x) \to g(x) \in \widehat{A}(x) \tag{6.5}$$

cuando $l \to +\infty$. Además, obsérvese que

$$d(f_{n_{k_l}}(x), f^*(x)) \to d(g(x), f^*(x)) \tag{6.6}$$

cuando $l \to \infty$. Entonces de (6.4) se tiene que:

$$d(g(x), f^*(x)) \geq \varepsilon. \tag{6.7}$$

Obsérvese que por el Lema A.0.2 (ver Apéndice A) y el Lema 6.1.5 (con $\Gamma = \widehat{A}(x)$):

$$\lim_{l \to +\infty} G_{n_{k_l}}(x, f_{n_{k_l}}(x)) = G(x, g(x)). \tag{6.8}$$

Además, para cada $l \geq 1$,

$$G_{n_{k_l}}(x, f_{n_{k_l}}(x)) = V_{n_{k_l}}(x) \tag{6.9}$$

(ver Observación 2.0.10).

Se sigue de (2.14), (6.8), (6.9) y del Lema 2.0.11b que:

$$\begin{aligned} \lim_{l \to +\infty} G_{n_{k_l}}(x, f_{n_{k_l}}(x)) &= V^*(x) \\ &= G(x, f^*(x)) \\ &= G(x, g(x)). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Pero, por la unicidad de la política óptima f^*, se tiene que

$$f^*(x) = g(x),$$

lo cual es una contradicción a (6.7). Por lo tanto,

$$f_n(x) \to f^*(x),$$

$n \to \infty$, para cada $x \in X$. ■

Ahora, se presenta un corolario que proporciona casos especiales del Teorema 6.1.6. Esos casos están relacionados con el concepto de HP (ver [10], [14], [33], [29], [46], [47], [48] y [49]).

Corolario 6.1.7 *Supóngase que las integrales (6.2) y (6.3) son finitas. Si A es un conjunto finito o numerable, entonces para cada $x \in X$ existe un entero positivo $N^*(x)$ tal que $f_n(x) = f^*(x)$, para todo $n \geq N^*(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Supóngase que A es un conjunto finito o numerable con la métrica discreta. Ya que en este caso la Suposición 6.1.3 se satisface trivialmente se sigue que $f_n(x) \to f^*(x)$, $n \to \infty$. Entonces existe un entero positivo $N^*(x)$ tal que $f_n(x) \in \{f^*(x)\}$, para todo $n \geq N^*(x)$ (en la métrica discreta se tiene que $\{f^*(x)\}$ es un conjunto abierto). Entonces, $f_n(x) = f^*(x)$, para todo $n \geq N^*(x)$. Como x es arbitrario, el resultado se sigue. ■

6.2. Convergencia Uniforme de Minimizadores

En esta sección se presentan las suposiciones y el teorema que aseguran la convergencia uniforme, sobre conjuntos compactos, de minimizadores del AIV de PDMs descontados a la política óptima.

Notación 6.2.1 *Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío*

$$\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma := \{(x, a) \in \mathbb{K} \mid x \in \varsigma, a \in \widehat{A}(x)\}.$$

Las condiciones que nos garantizan la convergencia uniforme de minimizadores son las siguientes.

Suposición 6.2.2 *a. La multifunción $x \to A(x)$ es semicontinua superiormente (s.c.s.) y, para cada $x \in X$, $A(x)$ es un conjunto cerrado.*

b. $c(\cdot,\cdot)$ *es una función continua en* $\mathbb{K}$.

c. $V_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \cdots$, *y* $V^*(\cdot)$ *son funciones continuas en* X.

d. Las integrales

$$\int V_n(y)\, Q(dy \mid \cdot,\cdot) \tag{6.11}$$

$n = 1, 2, \cdots$ *y*

$$\int V^*(y)\, Q(dy \mid \cdot,\cdot) \tag{6.12}$$

son funciones continuas finitas en $\mathbb{K}$.

Lema 6.2.3
a. La Suposición 6.2.2a implica que $\mathbb{K}$ *es un conjunto cerrado en* $X \times A$. *Además, si* J *es un conjunto cerrado no vacío en* $\mathbb{K}$, *entonces* J *también es un conjunto cerrado en* $X \times A$.
b. Si J *es un conjunto cerrado no vacío en* $X \times A$ *y* $\widehat{J} \subset X \times A$ *es un conjunto compacto tal que* $J \subset \widehat{J}$, *entonces* J *es un conjunto compacto.*

Demostración. a. Bajo la Suposición 6.2.2a, $\mathbb{K}$ es un conjunto cerrado en $X \times A$ como una consecuencia de la Proposición 7, p. 110 [2] (ver también la Proposición D3 en el Apéndice D, p.182 [28]). Por otro lado, ya que J es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$ se sigue que $J = \mathbb{K} \cap \widehat{F}$, para algún conjunto $\widehat{F}$ cerrado en $X \times A$. Por lo tanto, J es un conjunto cerrado en $X \times A$ (ver Teorema 7.2, p. 77 [21]).
b. Obsérvese que $J = J \cap \widehat{J}$ y que J es cerrado en $X \times A$, entonces J es cerrado en $\widehat{J}$. Ahora, puesto que $\widehat{J}$ es un conjunto compacto se tiene que J es un conjunto compacto. ■

Lema 6.2.4 *Sea* $\varsigma \subset X$ *un conjunto compacto no vacío. Si la Suposición 6.2.2 se cumple, entonces* $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ *es un conjunto cerrado en* $X \times A$.

Demostración. Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío. Consideremos una sucesión

$$\{(x_n, a_n)\} \subset \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma,$$

y

$$(x, a) \in \mathbb{K},$$

tales que $(x_n, a_n) \to (x, a)$. Obsérvese que $x \in \varsigma$. Además, $c(x_n, a_n) \leq V^*(x_n)$, para todo $n = 1, 2, \cdots$, de la Suposición 6.2.2 se tiene que $c(x, a) \leq V^*(x)$, entonces $a \in \widehat{A}(x)$. Así, $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$. Finalmente, del Lema 6.2.3a, resulta que $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto cerrado en $X \times A$. ■

Suposición 6.2.5 *a. El espacio de controles A es un conjunto compacto.*

b. Para cada $x \in X$, $A(x)$ es compacto.

c. El costo c es estrictamente no acotado, i.e., existen sucesiones de conjuntos compactos no decrecientes $X_n \uparrow X$ y $A_n \uparrow A$ tales que $\Lambda_n := X_n \times A_n$ es un subconjunto de $\mathbb{K}$, y

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{(x,a)\in\Lambda_n^c} c(x, a) = +\infty, \tag{6.13}$$

donde Λ_n^c denota el complemento de Λ_n.

Observación 6.2.6 *El modelo lineal con costo cuadrático claramente satisface la Suposición 6.2.5c (ver [28] y el Ejemplo 6.3.5 dado más adelante).*

Lema 6.2.7 *Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío. Si las Suposiciones 6.2.2a, 6.2.2b y 6.2.2c y, además, una de las suposiciones 6.2.5a, 6.2.5b, ó 6.2.5c se satisfacen, entonces $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Se suponen 6.2.2a, 6.2.2b y 6.2.2c. Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío. Obsérvese que, del Lema 6.2.4, $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto cerrado en $X \times A$. Entonces en cada caso de la demostración se aplicará el Lema 6.2.3b con $J = \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ y con un conjunto adecuado $\widehat{J} \subset X \times A$.

Primer caso, si la Suposición 6.2.5a se cumple, como $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma \subset \widehat{J} := \varsigma \times A$ con ς y A conjuntos compactos, entonces $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto.

Segundo caso, si la Suposición 6.2.5b se cumple, obsérvese que

$$A(\varsigma) := \cup_{x\in\varsigma} A(x),$$

lo que implica que $A(\varsigma)$ es un conjunto compacto si ς es un conjunto compacto (ver [4] p. 72). Como

$$\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma \subset \widehat{J} := \varsigma \times A(\varsigma), \tag{6.14}$$

entonces $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto.

Tercer caso, si la Suposición 6.2.5c se cumple es posible probar que existe un entero positivo n_0 tal que $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma \subset \Lambda_{n_0}$. Por contradicción, supongamos que para cada $n = 1, 2, \cdots$, existen $(x_n, a_n) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ tales que $(x_n, a_n) \notin \Lambda_n$ y obsérvese que

$$c(x_n, a_n) \leq V^*(x_n) \leq L := \sup_{x \in \varsigma} V^*(x) < +\infty, \tag{6.15}$$

para todo $n = 1, 2, \cdots$.

Entonces,

$$\limsup_{n \to \infty} c(x_n, a_n) \leq L. \tag{6.16}$$

Finalmente, como

$$\inf_{(x,a) \in \Lambda_n^c} c(x, a) \leq c(x_n, a_n), \tag{6.17}$$

para todo $n = 1, 2, \cdots$, entonces

$$+\infty = \lim_{n \to \infty} \inf_{(x,a) \in \Lambda_n^c} c(x, a) \leq \limsup_{n \to \infty} c(x_n, a_n), \tag{6.18}$$

lo cual es una contradicción a (6.16). Entonces, existe n_0 tal que

$$\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma \subset \widehat{J} := \Lambda_{n_0}$$

Por lo tanto, $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto. ■

Corolario 6.2.8 *Supongamos que las Suposiciones 6.2.2a, 6.2.2b y 6.2.2c se satisfacen. Entonces, cada una de las suposiciones 6.2.5a, 6.2.5b, o 6.2.5c implica que la multifunción $x \to \widehat{A}(x)$ es s.c.s.*

Demostración. Para cada $n = 1, 2, \cdots$ sean $x_n, x \in X$ tales que

$$x_n \to x, \tag{6.19}$$

$n \to +\infty$, sean $a_n \in \widehat{A}(x_n), n = 1, 2, \cdots$. Definamos $\varsigma = \{x_n\} \cup \{x\}$, obsérvese que ς es compacto. Ya que $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto (ver Lema 6.2.7) y $(x_n, a_n) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ entonces existen una sucesión $\{(x_{n_k}, a_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ y $(x, a) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ tales que

$$(x_{n_k}, a_{n_k}) \to (x, a), \tag{6.20}$$

si $k \to \infty$. En particular obsérvese que $a \in \widehat{A}(x)$, entonces por el Lema A.0.5 $x \to \widehat{A}(x)$ es s.c.s. ■

Lema 6.2.9 *Supóngase que la Suposición 6.2.2 se satisface y que también una de las Suposiciones 6.2.5a, 6.2.5b, o 6.2.5c se satisface. Entonces f^* es una función continua.*

Demostración. Supongamos que f^* no es una función continua en un punto, digamos en x. Entonces, existen una sucesión $\{x_n\}$ en X y un punto $x \in X$ tales que

$$x_n \to x, \tag{6.21}$$

pero

$$f^*(x_n) \not\to f^*(x). \tag{6.22}$$

Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tales que

$$d\left(f^*(x_{n_k}), f^*(x)\right) \geq \varepsilon, \tag{6.23}$$

para todo k. Sean $y_{n_k} := f^*(x_{n_k}), k = 1, 2, \cdots$. Observemos que $y_{n_k} \in \widehat{A}(x_{n_k}), k = 1, 2, \cdots$. Ahora, como $x \to \widehat{A}(x)$ es compacto valuada y s.c.s., existen una subsucesión $\left\{y_{n_{k_l}}\right\}$ y $y \in \widehat{A}(x)$ tales que

$$y_{n_{k_l}} \to y. \tag{6.24}$$

Si hacemos $k \to +\infty$ en (6.23) obtenemos:

$$d\left(y, f^*(x)\right) \geq \varepsilon. \tag{6.25}$$

Además

$$V^*\left(x_{n_{k_l}}\right) = c\left(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}\right) + \alpha \int V^*(y)\, Q\left(dy \mid x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}\right), \tag{6.26}$$

entonces, usando la Suposición 6.2.2 obtenemos que

$$V^*(x) = c(x, y) + \alpha \int V^*(y)\, Q(dy \mid x, y), \tag{6.27}$$

haciendo $l \to +\infty$ en 6.26; pero

$$V^*(x) = c\left(x, f^*(x)\right) + \alpha \int V^*(y)\, Q\left(dy \mid x, f^*(x)\right), \tag{6.28}$$

implica que $f^*(x) = y$ por la unicidad de la política óptima, esto es una contradicción a (6.25). Por lo tanto, f^* es una función continua. ■

Lema 6.2.10 *Sea $\Theta \subset \mathbb{K}$ un conjunto compacto no vacío. Si la Suposición 6.2.2 se cumple, entonces $\{G_n\}$ converge uniformemente a G sobre Θ.*

Demostración. Supóngase que $\Theta \subset \mathbb{K}$ es un conjunto compacto no vacío. Obsérvese que $G_n \uparrow G$ puntualmente en Θ y G_n, $n = 1, 2, \cdots$, G son funciones continuas. Entonces, por el Teorema de Dini se tiene que ([35] p. 239), $G_n(\cdot, \cdot) \to G(\cdot, \cdot)$ uniformemente en Θ. ■

Lema 6.2.11 *Si la Suposición 6.2.2 se satisface y una de las Suposiciones 6.2.5a, 6.2.5b, o 6.2.5c también se satisface, entonces para cada conjunto compacto no vacío $\varsigma \subset X$ se tiene que: para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $(x, a) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ si*

$$|G(x, f^*(x)) - G(x, a)| < \delta, \tag{6.29}$$

entonces

$$d(f^*(x), a) < \varepsilon. \tag{6.30}$$

Demostración. Sea $\varsigma \subset X$ un subconjunto compacto, no vacío, arbitrario fijo. La prueba es por contradicción. Supóngase que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe $(x_\delta, a_\delta) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ que satisface

$$|G(x_\delta, f^*(x_\delta)) - G(x_\delta, a_\delta)| < \delta, \tag{6.31}$$

y

$$d(f^*(x_\delta), a_\delta) \geq \varepsilon. \tag{6.32}$$

Sean $\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. Entonces, existe $(x_n, a_n) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ tal que

$$|G(x_n, f^*(x_n)) - G(x_n, a_n)| < \frac{1}{n}, \tag{6.33}$$

y

$$d(f^*(x_n), a_n) \geq \varepsilon, \tag{6.34}$$

para cada $n = 1, 2, \cdots$. Entonces, ya que $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$ es un conjunto compacto, existe una subsucesión $\{(x_{n_k}, a_{n_k})\}$ de $\{(x_n, a_n)\}$ y $(x, a) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$, tal que $(x_{n_k}, a_{n_k}) \to (x, a)$, cuando $k \to \infty$ y para cada $k = 1, 2, \cdots$,

$$|G(x_{n_k}, f^*(x_{n_k})) - G(x_{n_k}, a_{n_k})| < \frac{1}{n_k}. \tag{6.35}$$

Bajo la Suposición 6.2.2, si $k \to \infty$ en (6.35), se tiene que:

$$G(x,a) = G(x, f^*(x)). \tag{6.36}$$

Esto implica que

$$a = f^*(x) \tag{6.37}$$

(recuérdese la unicidad de f^*).

Además, de (6.34), para todo $k = 1, 2, \cdots$,

$$d(f^*(x_{n_k}), a_{n_k}) \geq \varepsilon. \tag{6.38}$$

Así, si hacemos $k \to \infty$ en la última desigualdad y usando el hecho de que $f^*(x_{n_k}) \to f^*(x)$ (ver el Lema 6.2.9),

$$d(f^*(x), a) \geq \varepsilon, \tag{6.39}$$

lo cual es una contradicción a (6.37). ■

Ahora, se probará la convergencia uniforme, sobre conjuntos compactos de minimizadores del AIV de PDMs descontados a la política óptima.

Teorema 6.2.12 *Si la Suposición 6.2.2 y una de las Suposiciones 6.2.5a, 6.2.5b, ó 6.2.5c se satisfacen, entonces $\{f_n\} \to f^*$ uniformemente sobre compactos.*

Demostración. Sea $\varsigma \subset X$ un subconjunto compacto no vacío fijo. Aplicando el Lema 6.2.10 con $\Theta = \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$, se tiene que $G_n(\cdot,\cdot) \to G(\cdot,\cdot)$ uniformemente en $\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$. Obsérvese que $f_n(x)$ minimiza a $G_n(x,\cdot)$ en $A(x)$ y $f^*(x)$ es el único minimizador de $G(x,\cdot)$ en $A(x)$, para todo $x \in \varsigma$ y para todo n. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(x, f_n(x)) - G(x, f^*(x)) \\ &\leq G(x, f_n(x)) - G_n(x, f_n(x)) \\ &\quad + G_n(x, f^*(x)) - G(x, f^*(x)) \\ &\leq 2 \sup_{(x,a)\in\widehat{\mathbb{K}}_\varsigma} |G(x,a) - G_n(x,a)| \end{aligned} \tag{6.40}$$

para todo $x \in \varsigma$ y para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 6.2.11 podemos elegir $\delta > 0$ tal que para todo $(x,a) \in \widehat{\mathbb{K}}_\varsigma$, si

$$|G(x, f^*(x)) - G(x,a)| < \delta, \tag{6.41}$$

entonces
$$d\left(f^{*}\left(x\right),a\right)<\varepsilon. \tag{6.42}$$

Además, el Lema 6.2.10 garantiza la existencia de un entero positivo R tal que
$$2\sup_{(x,a)\in\widehat{\mathbb{K}}_{\varsigma}}\left|G\left(x,a\right)-G_{n}\left(x,a\right)\right|<\delta, \tag{6.43}$$

cuando $n\geq R$. En consecuencia, de (6.40) y (6.43), si $n\geq R:$
$$\left|G\left(x,f^{*}\left(x\right)\right)-G\left(x,f_{n}\left(x\right)\right)\right|<\delta, \tag{6.44}$$

para todo $x\in\varsigma$.

Combinando (6.44), (6.41) y (6.42) es posible obtener que
$$d\left(f^{*}\left(x\right),f_{n}\left(x\right)\right)<\varepsilon, \tag{6.45}$$

para todo $n\geq R$ y para todo $x\in\varsigma$. Así, $f_{n}\rightarrow f^{*}$ uniformemente en ς. Como ς es arbitrario, el resultado se sigue. ■

Observación 6.2.13 *En [30] se dan condiciones que aseguran la convergencia de $V(\pi_n,\cdot)$ a $V^{*}(\cdot)$, donde $\pi_n=\{f_n,f_n,\cdots\},n=1,2,\cdots$, para el caso de recompensas acotadas y no acotadas, tales resultados se obtienen bajo la hipótesis de que $A(x)$ es compacto para cada $x\in X$.*

6.3. Ejemplos

En esta sección se presentan tres ejemplos que ilustran la teoría desarrollada en este Capítulo.

Observación 6.3.1 *Consideremos PDMs que satisfacen las Suposiciones 2.0.8, 6.0.5, 6.2.5a, 6.2.5b y que las integrales (6.11) y (6.12) son finitas. Con respecto a la continuidad, requerida en las Suposiciones 6.2.5c y 6.2.5d, para $V_n,n=1,2,\cdots,V^{*}$ y las integrales (6.11) y (6.12), obsérvese lo siguiente:*

a. La continuidad mencionada, trivialmente se cumple para modelos discretos (i.e. PDMs para los cuales X y A son conjuntos finitos o numerables).

b. *Para modelos acotados (i.e. PDMs con función de costo acotada y conjuntos de acciones admisibles compactos), la continuidad de las integrales (6.11) y (6.12) se sigue directamente de la continuidad fuerte de la ley de transición* Q*. Si además, la multifunción* $x \to \widehat{A}(x)$ *es continua, entonces la continuidad de* $V_n, n = 1, 2, \cdots$ *y de* V^**, es una consecuencia inmediata del Teorema del Máximo (ver Proposición D.3(c) p. 130 en [27]), usando la continuidad de la función de costo* c*, las integrales (6.11) y (6.12) y las ecuaciones de optimalidad (2.11) y (2.13).*

c. *En [20] se han presentado dos condiciones de convexidad (ver Condiciones C1 y C2 en [20]), cada una de las cuales garantizan que* $V_n, n = 1, 2, \cdots, V^*$ *y las integrales (6.11) y (6.12) son funciones convexas (ver Lema 6.2 p. 433 y su demostración en [20]). Si además* X, A *y* $\mathbb{K}$ *son conjuntos abiertos, entonces la continuidad requerida en las Suposiciones 6.2.2c y 6.2.2d.*

Ejemplo 6.3.2 *Un modelo de inventarios. Sean* $M > 0, X = A = [0, M]$, $A(x) = [0, M - x], x \in X$, *y*

$$x_{t+1} = [x_t + a_t - \xi_t]^+, \tag{6.46}$$

$t = 0, 1, \cdots$, *donde* $z^+ := max\{0, z\}$ *y* $\{\xi_t\}$ *son variables aleatorias, i.i.d. que toman valores en* $S = [0, \infty)$, *y con densidad común* Δ*. Sea* ξ *un elemento genérico de la sucesión* $\{\xi_t\}$.

Suposición 6.3.3 a. Δ, *es una función de densidad continua y acotada. (Obsérvese que la correspondiente función de distribución* G *de* ξ *es una función continua.)*

b. c *es una función no negativa, continua y estrictamente convexa en* $\mathbb{K}$ *(Obsérvese que* $\mathbb{K}$ *es un conjunto compacto en este Ejemplo); también,* c *es una función creciente en la primera variable.*

Lema 6.3.4 *a. Este ejemplo satisface las Suposiciones 2.0.8, 6.0.5, 6.2.5a, y 6.2.5b.*

b. La Suposición 6.2.2 se cumple.

Demostración. *a.* Claramente, este Ejemplo satisface las Suposiciones 2.0.8a, 2.0.8c. Con respecto a la Suposición 2.0.8b, obsérvese que si $\mu : X \to \mathbb{R}$

es una función medible y acotada entonces:

$$\int \mu(y)\, Q(dy \mid x,a) = \mu(0)\,[1 - G(x+a)] + \int I_{[0,x+a]}(u)\,\mu(u)\,\Delta(x+a-u)\,du \tag{6.47}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$.

Como G es una función continua se sigue que $\mu(0)\,[1 - G(x+a)]$ es una función continua en (x,a). Ahora, como μ es una función acotada y Δ es una función continua y acotada se sigue del Teorema de Convergencia Dominada que

$$\int I_{[0,x+a]}(u)\,\mu(u)\,\Delta(x+a-u)\,du \tag{6.48}$$

es una función continua en $\mathbb{K}$. Por lo tanto,

$$\int \mu(y)\, Q(dy \mid \cdot,\cdot) \tag{6.49}$$

es una función continua en $\mathbb{K}$.

Obsérvese que es posible verificar que el Ejemplo satisface la Condición 5.2.2, entonces la unicidad de la política óptima se cumple.

Finalmente, obsérvese que las Suposiciones 6.2.5a, y 6.2.5b se cumplen trivialmente.

b. Primeramente obsérvese, que para cada $x \in X$, $A(x)$ es un conjunto cerrado. Ahora, ya que c es acotado se sigue que, para cada $n = 1, 2, \cdots, V_n$ y V^* son funciones acotadas y son medibles de la Suposición 2.0.8 (lo cual se cumple del inciso *a*) conjuntamente con el Lema 2.0.11. Entonces, de la acotación de V_n y V^* se sigue que las integrales (6.11) y (6.12) son finitas y la continuidad fuerte de Q permite concluir que (6.11) y (6.12) son continuas en $\mathbb{K}$. Finalmente, la multifunción $x \to A(x)$ es continua (i.e. $x \to A(x)$ es s.c.s. y s.c.i.). Por lo tanto, la continuidad de las integrales (6.11) y (6.12), la continuidad del costo c, y la Proposición D.3(c) p. 130 en [27] implican que V_n y V^* son continuas. ■

Ejemplo 6.3.5 *Consideramos el Ejemplo 5.3.10*

Este ejemplo claramente satisface la suposición $c \geq 0$ y además es semicontinuo inferiormente en $\mathbb{K}$.

Observación 6.3.6 *Se ha probado en el Ejemplo 5.3.10 que se satisfacen la Suposiciones 2.0.8, 6.0.5 y la Condición 5.2.4. Este ejemplo también satisface las Suposiciones 6.2.2a, 6.2.2b y 6.2.5c. Se verificó que*

$$W(x) = \bar{l}\left(x^2 + (\alpha/(1-\alpha))\,\sigma^2\right),$$

con $\bar{l} := q + r\left(\widehat{\gamma}^2/\delta^2\right)$, $x \in X$ *es una cota superior para* $V_n(x), n = 1, 2, \cdots$ *y* $V^*(x), x \in X$. *De hecho,* $W(x) = V(f, x), x \in X$ *para* $f(x) = -(\widehat{\gamma}/\delta)\,x$, $x \in X$. *Ya que*

$$\int W(y)\,Q(dy \mid x, a) = \bar{l}\left[(\widehat{\gamma}x + \delta a)^2 + \sigma^2\right] + \frac{\bar{l}\alpha\sigma^2}{1-\alpha} < \infty, \tag{6.50}$$

$(x, a) \in \mathbb{R}^2$, *se sigue que las integrales (6.11) y (6.12) son finitas. Finalmente, como para este Ejemplo la Condición 5.2.4 se cumple, se sigue que* V_n *y* V^* *son convexas en* $\mathbb{R}$ *y las integrales (6.11) y (6.12) son convexas en* $\mathbb{R}^2$, *entonces las Suposiciones 6.2.2c y 6.2.2d se cumplen.*

Ejemplo 6.3.7 *Sean* $X = A = A(x) = \mathbb{R}$. *Consideremos*

$$x_{t+1} = x_t + a_t^2 + \xi_t, \quad t = 0, 1, \cdots, \tag{6.51}$$

con costo

$$c(x, a) = h(x) + g(a), \tag{6.52}$$

donde $h(x) = e^x, g(a) = 2a^4 + a + 1,\ x, a \in \mathbb{R}$.

Suposición 6.3.8 *Las perturbaciones* ξ_t, $t = 0, 1, \cdots$ *son variables aleatorias i.i.d. con valores en* $S = \mathbb{R}$. *Además, supóngase que* ξ_0 *tiene una densidad* Δ *y*

$$k := \int e^s \Delta(s)\,ds < \infty, \tag{6.53}$$

con $0 < \alpha k < 1$.

Observación 6.3.9 *Claramente* c *es no negativo (de hecho,* $h(x) > 0, x \in X$ *y* $g(a) \geq 5/8, a \in A$*) y continuo; además las Suposiciones 6.2.2a y 6.2.2b se satisfacen. La inf-compacidad de* c *en* $\mathbb{K}$ *y la Suposición 6.2.5c se siguen del hecho que*

$$\lim_{a\to+\infty} g(a) = \lim_{a\to-\infty} g(a) = +\infty. \tag{6.54}$$

También, este Ejemplo satisface la Condición C1 de [7] (obsérvese que este Ejemplo no satisface la Condición C2 de [7]). Por lo tanto, la Suposición 6.0.5 se sigue.

Lema 6.3.10 *a. Q definida por (6.51) es fuertemente continua.*

b. Existe $\pi \in \Pi$ tal que $V(\pi, x) < \infty$, para cada $x \in X$.

Demostración. *a. De (6.51) y del Teorema de Cambio de Variable obtenemos que*

$$Q(B \mid x, a) = \int I_B \left[x + a^2 + s\right] \Delta(s)\, ds = \int_B \Delta(s - (x + a^2))ds, \quad (6.55)$$

para $x \in X, a \in A$ y $B \in \mathcal{B}(X)$. Por lo tanto, de la Suposición 6.3.8 y del Ejemplo C.6 en el Apéndice C de [11] resulta que Q es fuertemente continuo.

b. Sea $f \in \mathbb{F}$ dado por $f(x) = 0$, para todo $x \in X$. Entonces, se puede demostrar por inducción que

$$E_x^f\left[c(x_t, f)\right] = k^t e^x + 1, \quad (6.56)$$

para cada $t = 0, 1, \cdots$ y $x \in X$, donde k se definió en la Suposición 6.3.8. Ahora, de (6.56) y de la Suposición 6.3.8, tenemos que para cada $x \in X$:

$$V(f, x) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t E_x^f c(x_t, f) = \frac{e^x}{1 - \alpha k} + \frac{1}{1 - \alpha} < \infty. \quad (6.57)$$

■

Observación 6.3.11 *Finalmente, similar al Ejemplo anterior (ver Observación 6.3.6) las Suposiciones 6.2.2c y 6.2.2d se siguen de los Lemas 3.9b y 6.2 (y sus demostraciones) de [20].*

Parte IV

CONCLUSIONES

Capítulo 7

Conclusiones y Problemas Abiertos

En este capítulo se mencionan las conclusiones de esta tesis y los problemas abiertos que se han detectado a partir de los resultados obtenidos.

7.1. Conclusiones

En esta tesis consideramos PDMs descontados, en espacios de Borel, con las siguientes características: (a) son de horizonte infinito;(b) tienen función de costo no negativa y (posiblemente) no acotada;(c) tienen al menos una política estacionaria óptima, caracterizada por la Ecuación de Programación Dinámica; y (d) la función de valores óptimos se aproxima mediante el Algoritmo de Iteración de Valores.

Las consecuencias obtenidas en el trabajo son las siguientes.

Primero en el Capítulo 5 se obtuvo:

I. LA UNICIDAD DE LA POLÍTICA ÓPTIMA.

Dicha unicidad, fue obtenida para PDMs que satisfacen una de tres posibles condiciones ajenas.

Estas condiciones imponen restricciones en los elementos de los modelos de control de Markov considerados.

Dos de las condiciones, presentan hipótesis de convexidad en los elementos de los modelos de control respectivos. Esencialmente, estas condiciones de tipo convexo, implican que el lado derecho de la Ecuación de Programación

Dinámica es una función estrictamente convexa con respecto a los controles, de donde se obtiene la unicidad de la política óptima.

La tercera condición no tiene hipótesis de convexidad en los elementos de los modelos de control considerados, pero impone ciertas hipótesis de órdenes estocásticos en la ley de transición y también requiere que la función de costo tenga un mínimo único con respecto a los controles. Lo anterior implica que el lado derecho de la Ecuación de Programación Dinámica también está ordenado teniendo como mínimo único, el mínimo de la función de costo; de aquí se obtiene la unicidad de la política óptima.

En el trabajo se presentan diversos ejemplos que cumplen las condiciones de unicidad. Entre estos ejemplos se encuentran algunos modelos discretos (i.e. PDMs con espacios de estados y de controles, ambos conjuntos finitos y/o numerables), el problema del regulador lineal y un modelo de inventarios.

La siguiente consecuencia se aplica a PDMs descontados para los cuales existe una política estacionaria óptima única, y fue desarrollada en el Capítulo 6.

II. CONVERGENCIA DE MINIMIZADORES DEL ALGORITMO DE ITERACIÓN DE VALORES A LA (ÚNICA) POLÍTICA ESTACIONARIA ÓPTIMA.

Dicha convergencia fue obtenida en los sentidos puntual y uniforme sobre compactos.

Esencialmente, para el desarrollo de II, fueron necesarias hipótesis de continuidad en la función de costo, en la función de valores óptimos, en las funciones de iteración de valores. También fue necesaria la continuidad de las integrales involucradas en el lado derecho de la Ecuación de Programación Dinámica, así como de las integrales involucradas en el lado derecho de las ecuaciones del Algoritmo de Iteración de Valores (la continuidad requerida en el caso de las integrales es continuidad sobre la gráfica de la multifunción $x \to A(x)$).

Una de las principales herramientas en la obtención de los resultados de convergencia de la tesis fue el Teorema de Dini. Las hipótesis de este teorema quedan validadas debido a las hipótesis de continuidad mencionadas en el párrafo anterior, y al hecho de que cuando la función de costo es no negativa, las funciones de iteración de valores forman una sucesión creciente que converge a la función de valores óptimos.

La teoría desarrollada se ilustra con diversos ejemplos.

Primero se presenta un ejemplo de inventarios con espacios de estados y de controles, ambos compactos y con función de costo acotada. Para este ejemplo las hipótesis de continuidad son obtenidas a partir de la continuidad fuerte del kérnel de transición y del teorema conocido en la literatura como el Teorema del Máximo.

También se presentan el problema del regulador lineal y un modelo con dinámica no lineal y con costo no cuadrático y no acotado. Para estos ejemplos las hipótesis de continuidad se cumplen debido a que todas las funciones para las cuales se requiere continuidad, resultan ser funciones convexas definidas en conjuntos convexos y abiertos, contenidos en espacios euclidianos.

Finalmente, cabe señalar que a partir de las convergencias puntual y uniforme sobre compactos de los minimizadores del algoritmo de iteración de valores a la política óptima, es posible pensar en extender el concepto conocido en la literatura de PDMs como Horizonte de Pronóstico (HP). Esta extensión se puede obtener a partir de la definición de convergencia, ya sea puntual o uniforme sobre compactos. En efecto, supóngase que $\{f_n\}$ denota la sucesión de minimizadores del algoritmo de iteración de valores y f^* la política óptima correspondiente. Si $\{f_n\}$ converge a f^*, uniformemente sobre compactos, dado un compacto ς, contenido en el espacio de estados, y $\varepsilon > 0$, existe un entero $N(\varsigma, \varepsilon)$ tal que $\{f_n\}$ pertenece a la ε-vecindad de f^* para todo $n > N(\varsigma, \varepsilon)$ y para todo $x \in \varsigma$. Entonces, tal entero $N(\varsigma, \varepsilon)$ fungiría como la extensión del HP.

La siguiente consecuencia fue desarrollada en el Apéndice B.

III. DETECCIÓN DE UNA POLÍTICA QUE APROXIMA A LA POLÍTICA ÓPTIMA

Los requerimientos para III, fueron: (a) la convergencia uniforme sobre compactos de $\{f_n\}$ a f^*; (b) la unicidad de cada $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$; (c) la compacidad de los conjuntos de controles admisibles; y (d) contar con una tasa de convergencia para la convergencia de las funciones de iteración de valores a la función de valores óptimos; esta última hipótesis se garantiza en el apéndice suponiendo costo acotado.

Dado un conjunto compacto ς, contenido en el espacio de estados, y dado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ a f^* sobre ς, garantiza la existencia de un entero positivo $N(\varsigma, \varepsilon)$ tal que $d\left(f_{N(\varsigma,\varepsilon)}(x), f^*(x)\right) < \varepsilon$ para todo $x \in \varsigma$ (d denota la métrica en el espacio de controles). En este sentido, $f_{N(\varsigma,\varepsilon)}(x)$ aproxima a $f^*(x)$ para todo $x \in \varsigma$.

En el Apéndice B, es presentado un algoritmo que permite detectar tal entero $N(\varsigma,\varepsilon)$ y la correspondiente $f_{N(\varsigma,\varepsilon)}$ aproximante.

También en el mencionado Apéndice se proporciona un ejemplo para ilustrar la teoría desarrollada.

7.2. Problemas Abiertos

En esta sección se mencionan algunos problemas abiertos que han sido observados a partir de los problemas que se han tratado en esta tesis.

Como primer problema se plantea la posibilidad de:

I. Establecer los resultados de unicidad de la política óptima y de la convergencia puntual y uniforme sobre compactos, de la sucesión de minimizadores del algoritmo de iteración de valores a la política óptima, al caso de PDMs descontados con función de costo no necesariamente no negativa.

   En esta situación, por ejemplo, podría no aplicarse el Teorema de Dini, el cual se utilizó para demostrar la convergencia de f_n a f^*.

Otro problema importante es:

II. Establecer los resultados de unicidad y de convergencia, correspondientes, para PDMs con otros criterios de rendimiento, por ejemplo, para el criterio de costo promedio esperado (ver la Observación 2.0.5).

Observación 7.2.1 *Para el problema de costo promedio, podría utilizarse el hecho de que con kérneles con minorantes el caso de costo promedio es equivalente a un problema con costo descontado (ver [23] y [25]). También, podrían utilizarse resultados que estudian el problema de costo promedio via problemas de costo descontado (ver [26] y [40]).*

También se plantea lo siguiente:

III. En el Apéndice B, dado un compacto $\varsigma \in X$ y $\varepsilon > 0$, se proporciona un algoritmo para detectar un entero positivo $N(\varsigma,\varepsilon)$ y $f_{N(\varsigma,\varepsilon)}$, que aproxima uniformemente a f^* en ς, pero no se han dado cotas para tal $N(\varsigma,\varepsilon)$. Por lo tanto, se propone estimar el número de iteraciones del Algoritmo para determinar $N(\varsigma,\varepsilon)$.

Parte V

APÉNDICES

Apéndice A

Resultados Básicos

Lema A.0.2 *Sea Y un espacio métrico. Supóngase que $g_n, g : Y \to \mathbb{R}$ son funciones continuas para cada $n = 1, 2, \cdots$. Entonces $g_n(z_n) \to g(z)$ para cada $z \in Y$ y sucesión $z_n \to z$, si y sólo si $\{g_n\}$ converge a g uniformemente sobre conjuntos compactos.*

Demostración. Supóngase que $g_n(z_n) \to g(z)$, para cada $z \in Y$ y sucesión $z_n \to z$, pero no tenemos una convergencia uniforme sobre algún subconjunto compacto $\varsigma \subset Y$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$, también una sucesión de enteros $n_1 < n_2 < \cdots$ y una sucesión de puntos $y_k \in \varsigma, k = 1, 2, \cdots$, tales que

$$|g_{n_k}(y_k) - g(y_k)| \geq \varepsilon, \tag{A.1}$$

para cada $k \geq 1$. Es posible suponer sin pérdida de generalidad que $y_k \to y \in \varsigma$ (recuérdese que ς es un conjunto compacto). De la hipótesis, se sigue que $g_{n_k}(y_k) \to g(y)$; por la continuidad de g, se tiene que

$$|g_{n_k}(y_k) - g(y_k)| \leq |g_{n_k}(y_k) - g(y)| + |g(y) - g(y_k)| \to 0, \tag{A.2}$$

$k \to \infty$, lo cual es una contradicción a (A.1).

Ahora, supóngase que $g_n \to g$ uniformemente sobre conjuntos compactos y $z_n \to z$; entonces $\varsigma := \{z_n\} \cup \{z\}$ es compacto, así que $g_n \to g$ uniformemente sobre ς; entonces

$$|g_n(z_n) - g(z)| \leq |g_n(z_n) - g(z_n)| + |g(z_n) - g(z)| \tag{A.3}$$

y la continuidad de g, se tiene que $g_n(z_n) \to g(z)$, $n \to \infty$. ■

Observación A.0.3 *El Lema A.0.2 es un caso particular del resultado 7.5 del Capítulo XII en [21]. De hecho, el Lema A.0.2 se cumple cuando g_n y g están definidas en un espacio topológico Y (1^o numerable) y toman valores en un espacio métrico Z (ver [21]).*

Presentamos un resultado de multifunciones. La definición y otras caracterizaciones de multifunciones se pueden ver en el Apéndice D de [28].

Definición A.0.4 *Sean X y Y espacios de Borel (no vacíos). Sea Ψ una multifunción de X a Y. Ψ es s.c.s. en X si $\{x \in X \mid \Psi(x) \cap F \neq \emptyset\}$ es cerrado en X para cualquier conjunto cerrado $F \subset Y$.*

Lema A.0.5 *Sean X y Y espacios de Borel (no vacíos). Sea Ψ una multifunción de X a Y. Supóngase que $\Psi(x) \neq \emptyset$ es compacto para cada $x \in X$. Entonces Ψ es s.c.s. si y sólo si, para cada $x \in X$ y para cualquier sucesión $x_n \to x$ en X y cualquier sucesión $\{y_n\}$ tal que $y_n \in \Psi(x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ y $y \in \Psi(x)$ tal que $y_{n_k} \to y$.*

Demostración. Supóngase que $x \in X$, $x_n \to x$ en X y $y_n \in \Psi(x_n)$, para todo $n = 1, 2, \cdots$. Por las hipótesis sobre $x \to \Psi(x)$, de la Proposición 5, p. 72 en [3], se sigue que $\cup_{z \in \varsigma} \Psi(z)$ es un conjunto compacto, donde ς es el conjunto compacto definido como

$$\varsigma := \{x_1, x_2, \cdots\} \cup \{x\}. \tag{A.4}$$

Así, debido al hecho que para cada n, $y_n \in \cup_{z \in \varsigma} \Psi(z)$, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ y $y \in Y$ tales que $y_{n_k} \to y$. Ya que $\Psi(x)$ es compacto también es cerrado. Por lo tanto,

$$Gr(\Psi) := \{(\widehat{x}, \widehat{y}) \mid \widehat{x} \in X, \widehat{y} \in \Psi(\widehat{x})\} \tag{A.5}$$

es cerrado (ver Proposición 7, p. 110 [1]; o Proposición D3 en el Apendice D, p. 182 [11]). Entonces, ya que $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in Gr(\Psi)$, para todo k, y $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x, y)$ en $X \times Y$, entonces $(x, y) \in Gr(\Psi)$, i. e. $y \in \Psi(x)$.

Recíprocamente, sean $F \subset X$ un conjunto cerrado y

$$x_n \in \{x \in X \mid \Psi(x) \cap F \neq \emptyset\}, \tag{A.6}$$

$n = 1, 2, \cdots$, tal que $x_n \to \overline{x}$ en X. Entonces, para cada n, sean: $y_n \in \Psi(x_n) \cap F$, $\{y_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{y_n\}$ y $y \in \Psi(\overline{x})$, tales que $y_{n_k} \to y$. Obsérvese que para cada k, $y_{n_k} \in \Psi(x_{n_k}) \cap F \subset F$ y F es cerrado en X, entonces $y \in F$. Así, $y \in \Psi(\overline{x}) \cap F$. Por lo tanto, $\overline{x} \in \{x \in X \mid \Psi(x) \cap F \neq \emptyset\}$. ■

El lema siguiente (ver Ejemplo C.6 en el Apéndice C en [28]) se ha usado para probar algunos resultados concernientes a la propiedad de que el kernel Q es fuertemente continuo.

Lema A.0.6 *Sean X y Y espacios de Borel. Sea P un kérnel estocástico de X dado Y y supóngase que existe una medida σ-finita m sobre X tal que, para cualquier $y \in Y$, $P(\cdot \mid y)$ tiene una densidad $p(\cdot \mid y)$ con respecto a m, es decir,*

$$P(B \mid y) = \int_B p(x \mid y)\, m(dx), \tag{A.7}$$

para todo $B \in \mathbb{B}(X)$, $y \in Y$. Si $p(x \mid \cdot)$ es continua en Y para cualquier $x \in X$, entonces P es fuertemente continua.

Una forma más precisa del lema anterior, que hemos usado, es la siguiente:

Lema A.0.7 *Consideremos un PDM con modelo de control de Markov*

$$(X, A, \{A(x) \,|x \in X\}, Q, c).$$

Supóngase que $X = \mathbb{R}$, y que Q está inducida por la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = g(x_t, a_t) + \xi_t, \tag{A.8}$$

donde $\xi_t, t = 0, 1, \cdots$, son variables aleatorias con valores en $S = \mathbb{R}$, con función de densidad Δ continua, y g es una función real definida en $\mathbb{K}$. Entonces Q es fuertemente continua.

Demostración. Se sigue del Teorema de Cambio de Variable y del Teorema de Scheffé (ver [11]). ■

Apéndice B

Un Algoritmo de Detección

En este Apéndice se consideran PDMs descontados, para los cuales $\{f_n\} \to f^*$ uniformemente sobre compactos; específicamente, se suponen las hipótesis 6.2.2 y 6.2.5b.

Para tales PDMs, el Teorema 6.2.12 garantiza que dado $\varsigma \subset X$ compacto y $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\varsigma, \varepsilon)$, tal que

$$d\left(f_{N(\varsigma,\varepsilon)}(x), f^*(x)\right) < \varepsilon,$$

para todo $x \in \varsigma$.

El objetivo del Apéndice es describir una forma de **detectar** uno de tales enteros $N(\varsigma, \varepsilon)$.

Suposición B.0.8 *a. El conjunto de acciones admisibles $A(x)$, $x \in X$, es compacto.*

b. El costo c está acotado, esto es, existe $M > 0$ tal que:

$$0 \leq c(x, a) \leq M, \tag{B.1}$$

para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$.

c. Para cada $n = 1, 2, \cdots$, el minimizador f_n es único

Observación B.0.9 *Del acotamiento de c es posible demostrar que (ver [28])*

$$|V_n(x) - V^*(x)| < \frac{M\alpha^n}{1-\alpha} = O(n), \tag{B.2}$$

$n = 1, 2, \cdots$.

Notación B.0.10 *Sean $x \in X$ y $n = 1, 2, \cdots$.*

a. Sea d la métrica sobre el espacio de controles A. Para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(f_n(x))$ es la $\varepsilon-$vecindad de $f_n(x)$ sobre $A(x)$, i.e.

$$B_\varepsilon(f_n(x)) = \{a \in A(x) \mid d(a, f_n(x)) < \varepsilon\}. \tag{B.3}$$

$B_\varepsilon^c(f_n(x))$ es el complemento de $B_\varepsilon(f_n(x))$ con respecto a $A(x)$, i.e.

$$B_\varepsilon^c(f_n(x)) = \{a \in A(x) \mid d(a, f_n(x)) \geq \varepsilon\}. \tag{B.4}$$

Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío y sea $\varepsilon > 0$.

b. $\mathbb{K}_\varsigma := \{(x, a) \in \mathbb{K} \mid x \in \varsigma, a \in A(x)\}$.

c. $\mathbb{K}_n := \{(x, a) \in \mathbb{K} \mid x \in \varsigma, a \in B_\varepsilon^c(f_n(x))\}$, donde $n = 1, 2, \cdots$

d. Consideramos también

$$D_n(x, a) = G_n(x, a) - V_n(x), \tag{B.5}$$

$(x, a) \in \mathbb{K}, n = 1, 2, \cdots$ y

$$D(x, a) = G(x, a) - V^*(x), \tag{B.6}$$

$(x, a) \in \mathbb{K}$.

Lema B.0.11 *Para cada $n = 1, 2, \cdots$, f_n es continua.*

Demostración. Se sigue de la unicidad de f_n; la prueba es similar a la demostración de que f^* es continua (ver Lema 6.2.9). ■

Lema B.0.12 *Sean $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío y $\varepsilon > 0$. Si las Suposiciones 6.2.2 y 6.2.5b se cumplen, entonces $\mathbb{K}_n$ es un conjunto compacto, para cada $n = 1, 2, \cdots$. Además, $\mathbb{K}_\varsigma$ es un conjunto compacto. (Obsérvese que $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}_\varsigma$, para todo $n = 1, 2, \cdots$).*

Demostración. Sea $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío y sea $\varepsilon > 0$. Fijemos un entero positivo n. Primero se demuestra que $\mathbb{K}_n$ es un conjunto cerrado en $X \times A$. Sean $(x_k, a_k) \in \mathbb{K}_n$, $k = 1, 2, \cdots$, tales que $(x_k, a_k) \to (x, a) \in \mathbb{K}$. Obsérvese que $x \in \varsigma$. Además, $a_k \in B_\varepsilon^c(f_n(x_k))$, $k = 1, 2, \cdots$.

Como $f_n(\cdot)$ es una función continua, se sigue que $f_n(x_k) \to f_n(x)$ cuando $k \to \infty$. Entonces, $d(a_k, f_n(x_k)) \geq \varepsilon$ para todo $k = 1, 2, \cdots$, implica $d(a, f_n(x)) \geq \varepsilon$, por lo tanto $a \in B_\varepsilon^c(f_n(x))$. Así, $\mathbb{K}_n$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$ y del Lema 6.2.3a, se sigue que $\mathbb{K}_n$ es un conjunto cerrado en $X \times A$.

Obsérvese que $A(\varsigma) = \cup_{x \in \varsigma} A(x)$ es un conjunto compacto (ver [4], p. 72). Como

$$\mathbb{K}_n \subset \varsigma \times A(\varsigma), \tag{B.7}$$

y del Lema 6.2.3b (con $\widehat{J} = \varsigma \times A(\varsigma)$), se sigue que $\mathbb{K}_n$ es un conjunto compacto.

Ahora, sean $(x_n, a_n) \in \mathbb{K}_\varsigma$, para cada $n = 1, 2, \cdots$, tales que $(x_n, a_n) \to (x, a) \in \mathbb{K}$. Así, como ς es un conjunto compacto, entonces $x \in \varsigma$. Por lo tanto $(x, a) \in \mathbb{K}_\varsigma$, i.e., $\mathbb{K}_\varsigma$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$. Puesto que $\mathbb{K}_\varsigma \subset \varsigma \times A(\varsigma)$, se sigue que $\mathbb{K}_\varsigma$ es un conjunto compacto. ■

El siguiente teorema nos da un criterio para **detectar** uno de los enteros $N(\varsigma, \varepsilon)$ (nótese que en la demostración del teorema se necesita el hecho de que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos a f^*).

Teorema B.0.13 *Sean $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío y $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo. Si las Suposiciones 6.2.2 y B.0.8 se satisfacen, entonces existe un entero positivo $N(\varsigma, \varepsilon)$ tal que se cumple al menos una de las condiciones: $\mathbb{K}_{N(\varsigma,\varepsilon)} = \emptyset$ ó*

$$\inf_{(x,a) \in \mathbb{K}_{N(\varsigma,\varepsilon)}} D_{N(\varsigma,\varepsilon)}(x, a) > O(N(\varsigma, \varepsilon)). \tag{B.8}$$

Demostración. Supóngase que existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto compacto no vacío $\varsigma \subset X$, tal que $\mathbb{K}_n \neq \emptyset$ y

$$\inf_{(x,a) \in \mathbb{K}_n} D_n(x, a) \leq O(n), \tag{B.9}$$

para todo n.

Así, para cada n, sea $(x_n, a_n(x_n)) \in \mathbb{K}_n$, tal que

$$\inf_{(x,a) \in \mathbb{K}_n} D_n(x, a) = D_n(x_n, a_n(x_n)). \tag{B.10}$$

Obsérvese que la relación (B.10) es válida, ya que para cada $n = 1, 2, \cdots$, $D_n(\cdot, \cdot)$ es continua y $\mathbb{K}_n$ es un conjunto compacto no vacío (ver Lema B.0.12).

Entonces, de (B.9) y (B.10), se sigue que

$$0 \leq D_n(x_n, a_n(x_n)) \leq O(n), \tag{B.11}$$

para todo n. Sean $y_n := a_n(x_n) \in A(x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Puesto que $(x_n, y_n) \in \mathbb{K}_n$, $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}_\varsigma$, para todo n y $\mathbb{K}_\varsigma$ es un conjunto compacto (ver Lema B.0.12); existe una subsucesión $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ de $\{(x_n, y_n)\}$ y $(x, y) \in \mathbb{K}_\varsigma$ tales que $x_{n_k} \to x$ y $y_{n_k} \to y$. Como $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in \mathbb{K}_{n_k}$,

$$d(y_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k})) \geq \varepsilon, \tag{B.12}$$

para todo k. Si $k \to \infty$, en la desigualdad anterior, obtenemos

$$d(y, f^*(x)) \geq \varepsilon, \tag{B.13}$$

entonces $y \neq f^*(x)$. (Obsérvese que del Teorema 6.2.12, $f_n \to f^*$ uniformemente en ς. De la Suposición 6.2.2 y Lema A.0.2, se sigue que $f_{n_k}(x_{n_k}) \to f^*(x)$, $k \to +\infty$.)

Ahora, probaremos que $D_n(\cdot,\cdot)$ converge a $D(\cdot,\cdot)$ uniformemente en $\mathbb{K}_\varsigma$. Ya que $V_n(x) \uparrow V^*(x)$; entonces, para el $\varepsilon > 0$ dado, existe un entero positivo N_1 tal que

$$|V_n(x) - V^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{B.14}$$

para todo $n \geq N_1$ y para todo $x \in \varsigma$ (nótese que de la Suposición 5.3.15d y el Teorema de Dini, se sigue que V_n converge a V^* uniformemente sobre ς). Del Lema 6.2.10 (con $\Theta = \mathbb{K}_\varsigma$) existe un entero positivo N_2, para el mismo $\varepsilon > 0$, tal que

$$|G_n(x, a) - G(x, a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{B.15}$$

para todo $n \geq N_2$ y para todo $(x, a) \in \mathbb{K}_\varsigma$. Sea $\overline{N} = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, para todo $n \geq \overline{N}$ y para todo $(x, a) \in \mathbb{K}_\varsigma$,

$$\begin{aligned} |D_n(x,a) - D(x,a)| &= |G_n(x,a) - V_n(x) - G(x,a) + V^*(x)| \\ &\leq |G_n(x,a) - G(x,a)| \\ &\quad + |V_n(x) - V^*(x)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{B.16}$$

donde (B.16) es válida debido a (B.14) y (B.15).

Por lo tanto, $D_n(\cdot,\cdot)$ converge a $D(\cdot,\cdot)$ uniformemente en $\mathbb{K}_\varsigma$.

Ahora, consideremos

$$0 \leq D_{n_k}\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) \leq O\left(n_k\right), \tag{B.17}$$

$k = 1, 2, \cdots$. Por el Lema A.0.2, y ya que

$$\lim_{k \to \infty} O\left(n_k\right) = 0, \tag{B.18}$$

es posible obtener, usando $k \to \infty$ en (B.17), que

$$D\left(x, y\right) = 0. \tag{B.19}$$

De la unicidad de la política f^*, se concluye que $y = f^*\left(x\right)$. Esto es una contradicción a (B.13). Esto completa la demostración del Teorema. ■

Observación B.0.14 *Sean $\varsigma \subset X$ un conjunto compacto no vacío y $\varepsilon > 0$. Bajo las Suposiciones del Teorema B.0.13 se tiene que existe un entero positivo $N\left(\varsigma, \varepsilon\right)$ (el cual por simplicidad denotaremos por N) tal que:*

i. $\mathbb{K}_N = \emptyset$; *ó*

ii.

$$\inf_{(x,a) \in \mathbb{K}_N} D_N\left(x, a\right) > O\left(N\right). \tag{B.20}$$

Obsérvese que bajo i o ii se obtiene que

$$d(f_N(x), f^*(x)) < \varepsilon \tag{B.21}$$

para todo $x \in \varsigma$.

En efecto, si se cumple i, entonces $B^c_\varepsilon\left(f_N\left(x\right)\right) = \emptyset$ para todo $x \in \varsigma$ (recuérdese que ς es distinto del vacío), es decir, $B_\varepsilon\left(f_N\left(x\right)\right) = A\left(x\right)$ para todo $x \in \varsigma$. De donde se obtiene (B.21).

Supóngase que ii se cumple. Sean $x \in \varsigma$ y $a \in B^c_\varepsilon\left(f_N\left(x\right)\right)$. Entonces, usando (B.5), (B.6), el Lema 2.0.11b, (B.2) y ii, tenemos

$$
\begin{aligned}
D(x,a) &= c(x,a)+\alpha\int V^*(y)\,Q(dy\mid x,a)-V^*(x)\\
&\geq c(x,a)+\alpha\int V^*(y)\,Q(dy\mid x,a)-V_N(x)\\
&= c(x,a)+\alpha\int V^*(y)\,Q(dy\mid x,a)-\alpha\int V_{N-1}(y)\,Q(dy\mid x,a)\\
&\quad +\alpha\int V_{N-1}(y)\,Q(dy\mid x,a)-V_N(x)\\
&= D_N(x,a)+\alpha\int\left[V^*(y)-V_{N-1}(y)\right]Q(dy\mid x,a)\\
&\geq D_N(x,a)-\alpha O(N-1)\\
&\geq \inf_{(x,a)\in\mathbb{K}_N} D_N(x,a)-\alpha O(N-1)\\
&= \inf_{(x,a)\in\mathbb{K}_N} D_N(x,a)-O(N)\\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Como $D(x,a)>0$, se sigue que a no es óptima para x.

En particular, $(x,f^*(x))\notin\mathbb{K}_N$, es decir, $f^*(x)\in B_\varepsilon(f_N(x))$ o equivalentemente

$$d\left(f_N(x),f^*(x)\right)<\varepsilon.$$

Como $x\in\varsigma$ es arbitrario, se sigue (B.21).

Usando la Observación B.0.14 podemos proponer el siguiente Algoritmo para **detectar** un N que cumpla (B.21).

Algoritmo B.0.15 *Sean $\varsigma\subset X$ compacto y no vacío, y $\varepsilon>0$;*

1. Tómese $n=1$.

2. Si $\mathbb{K}_n=\emptyset$, entonces parar y f_n es una ε-aproximación de f^* en ς. En otro caso continuar.

3. Calcular:

$$\inf_{(x,a)\in\mathbb{K}_n} D_n(x,a).$$

4. Si $\inf_{(x,a)\in\mathbb{K}_n} D_n(x,a)>O(n)$, entonces parar y el correspondiente minimizador f_n es una ε-aproximación para f^* en ς. En caso contrario ir al paso siguiente.

5. Incrementar n en una unidad y regresar al paso 2.

Ejemplo B.0.16 *Considérese:*

a. $X = A = [0, 1]$.

b. $A(x) = [0, 1 - x], x \in X$.

c. $x_{t+1} = [x_t + a_t - \xi_t]^+$, *donde* $\{\xi_t\}$ *es una sucesión de variables aleatorias i.i.d., que toman valores en* $S = [0, \infty)$, *con densidad común* Δ *continua y acotada.*

d. $c(x, a) = x + \left[a - \frac{1}{2}(1 - x)\right]^2$, *para* $(x, a) \in \mathbb{K}$.

El factor de descuento es $\alpha = \frac{1}{55}$.

Observación B.0.17 *Este ejemplo satisface las hipótesis 2.0.8, 6.0.5, 6.2.5a, 6.2.5b, 6.2.2 (ver Ejemplo 6.3.2).*

Lema B.0.18 *El Ejemplo B.0.16 satisface las Suposiciones B.0.8.*

Demostración. Las Suposiciones B.0.8a y B.0.8b son inmediatas. Para B.0.8c, obsérvese que el costo es estrictamente convexo, entonces por un argumento similar a la prueba de que f^* es única, se puede concluir que f_n es única para cada $n = 1, 2, \cdots$. ■

Lema B.0.19 *Si* $\varepsilon = 0{,}2$ *y* $\varsigma = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, *entonces* $N(\varsigma, \varepsilon) = 1$; *es decir,* $d(f_1(x), f^*(x)) < 0{,}2$ *para todo* $x \in \varsigma$.

Demostración. Sea $x \in \varsigma$. Cálculos directos muestran que

$$V_1(x) = x, \tag{B.22}$$

con

$$f_1(x) = \frac{1 - x}{2}, \tag{B.23}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_1 &= \left\{(x, a) \in \mathbb{K} \mid x \in \varsigma, a \in B^c_{0,2}(f_1(x))\right\} \\ &= \left\{(x, a) \in \mathbb{K} \mid x \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \left|a - \frac{1}{2}(1 - x)\right| \geq 0{,}2\right\}, \qquad \text{(B.24)}\end{aligned}$$

por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned} \min_{(x,a)\in\mathbb{K}_1} D_1(x,a) &= \frac{1}{25} \\ &> \frac{M\alpha}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Así,

$$f_1(x) = \frac{1-x}{2},$$

es una $\varepsilon(=0{,}2)$ aproximación de la política óptima, para todo $x \in \varsigma$. ■

Parte VI

REFERENCIAS

Referencias

[1] R. B. Ash, Real Analysis and Probability. Academic Press, New York (1972).

[2] J. P. Aubin, and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis. John Wiley, New York, (1984).

[3] J. P. Aubin, Applied Abstract Analysis. John-Wiley, New York, (1977).

[4] J. P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory. North-Holland, New York, (1979).

[5] J. S. Baras, A. J. Dorsey, and A. M. Makowski, Two competing queues with linear costs and geometric service requirements: the μc-rule is often optimal, Adv. Appl. Prob. 17, (1985), 186-209.

[6] J. S. Baras, D.-J. Ma, and A. M. Makowski, K competing queues with geometric service requirements and linear costs: the μc-rule is always optimal, Syst. and Control Lett. 6, North-Holland, (1985), 173-180.

[7] J. C. Bean, and R. L. Smith, Conditions for the existence of planning horizons. Math. of Oper. Res., V. 9, N. 3, (1984), 391-401.

[8] R. Bellman, Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N J, (1957).

[9] D. P. Bertsekas, Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice-Hall, N J, (1987).

[10] C. Bes, and S. P. Sethi, Concepts of forecast and decision horizons: Applications to dynamic stochastic optimization problems. Math. Oper. Res., V. 13 N. 2, (1988), 295-310.

[11] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, (1968).

[12] J. D. Blackburn, and H. Kunreuther, Planning horizons for the dynamic lot size model with backlogging, Manage. Sci., V. 21 N. 3, (1974), 251-255.

[13] R. Cavazos-Cadena, and O. Hernández-Lerma, Adaptive policies for priority assignment in discrete time queues-discounted cost criterion. Control and Cybernetics, V. 19 N. 1-2, (1990), 149-177.

[14] S. Chand, S. P. Sethi, and J. M. Proth, Existence of forecast horizons in undiscounted discrete-time lot size models. Oper. Res., V. 38 N. 5, (1990), 884-892.

[15] S. Chand, S. P. Sethi, and G. Sorger, Forecast horizons in the discounted dynamic lot size model, Manage. Sci., V. 38 N. 7, (1992), 1034-1048.

[16] D. Cruz-Suárez, Conditions for the existence of the forecast horizons in discounted Markov decision processes, Proceedings: The 8th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, IIIS 2004, Orlando, Fl., V. VIII, 207-211.

[17] D. Cruz-Suárez, Horizonte de pronóstico en procesos de control de Markov, Memorias CISCI 2002, Orlando, Fl., V. 2, 269-271.

[18] D. Cruz-Suárez, Horizonte de pronóstico en sistemas de inventarios controlados: Una revisión panorámica, Revista Iberoamericana de Sistemas, Cibernética e Informática, IIIS 2004, V. 1 N. 1, 45-50.

[19] D. Cruz-Suárez, and R. Montes-de-Oca, Minimizers of the value iteration algorithm of discounted Markov decision processes: convergence to optimal policies, sometido 2005.

[20] D. Cruz-Suárez, R. Montes-de-Oca, and F. Salem-Silva, Conditions for the uniqueness of optimal policies of discounted Markov decision processes, Math. Methods Oper. Res., Vol. 60 N. 3, 2004, 415-436.

[21] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Inc., USA, (1966).

[22] E. B. Dynkin, Stochastic concave dynamic programming. Math. USSR Sbornik 16, (1972), 501-515.

[23] E. B. Dynkin and A. A. Yuskevich, Controlled Markov Processes, Springer-Verlag, USA, (1979).

[24] G. D. Eppen, F. J. Gould, and B. P. Pashigian, Extensions of the planning horizon theorem in the dynamic lot size model, Manage. Sci., V. 15 N. 5, (1969), 268-277.

[25] E. I. Gordienko, Stability estimates for controlled Markov chains with a minorant. Stability problems of stochastic models, J. Soviet Math. 40, (1988), no. 4, 481-486.

[26] E. I. Gordienko and O. Hernández-Lerma, Average cost Markov control processes with weighted norms: value iteration. Appl. Math. 23, (1995), 199-218.

[27] O. Hernández-Lerma, Adaptive Markov Control Processes. Springer-Verlag, New York, (1989).

[28] O. Hernández-Lerma, J. B. Lasserre, Discrete-Time Markov Control Processes. Springer-Verlag, New York, (1996).

[29] O. Hernández-Lerma, and J. B. Lasserre, Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes. Springer-Verlag, New York, (1999).

[30] O. Hernández-Lerma, and J. B. Lasserre, Value iteration and rolling plans for Markov control processes with unbounded rewards, J. Math. Anal. Appl. 177, (1993), 38-55.

[31] O. Hernández-Lerma, and W. J. Runggaldier, Monotone approximations for convex stochastic control problems. J. Math. Syst., Estimation, and Control, Birkhäuser, V. 4 N. 1, (1994), 99-140.

[32] D. P. Heyman, and M. J. Sobel, Stochastic Models in Operations Research Volume II: Stochastic Optimization, Mc Graw-Hill, New York, (1984).

[33] W. J. Hopp, J. C. Bean, and R. L. Smith, A new optimality criterion for nonhomogeneous Markov decision processes, Oper. Res., V.35 N. 6, (1987), 875-883.

[34] D. L. Iglehart, Capital accumulation and production for the firm: optimal dynamic policies. Manage. Sci., V. 12 N. 3, (1965), 193-205.

[35] J. L. Kelley, General Topology, Springer-Verlag, (1975).

[36] H. L. Langen, Convergence of dynamic programming models, Math. Oper. Res., V. 6 N. 4, (1981), 493-512.

[37] T. Lindvall, Lectures on the Coupling Method. Wiley, New York, (1992).

[38] R. A. Lundin, and T. E. Morton, Planning horizons for the dynamic lot size model: Zabel vs protective procedures and computational results, Oper. Res., V. 23 N. 4, (1975), 711-734.

[39] E. A. Michael, A survey of continuous selections, Lectures Notes Math., 171, (1970), 54-58.

[40] R. Montes de Oca and O. Hernández-Lerma, Value iteration in average cost Markov control processes on Borel spaces, Acta Appl. Math. 42, (1996), 203-222.

[41] E. L. Porteus, Foundations of Stochastic Inventory Theory, Stanford University Press, Stanford, California, 2002.

[42] M. L. Puterman, Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. Wiley, New York, (1994).

[43] S. M. Ross, Applied Probability Models with Optimization Applications, Dover, New York, (1992).

[44] H. L. Royden, Real Analysis, Macmillan, (1988).

[45] M. Schäl, A selection theorem for optimization problems, Arch. Math., V. XXV, (1974), 219-224.

[46] I. E. Schochetman, and R. L. Smith, Infinite horizon optimization, Math. Oper. Res., V. 14 N. 3, (1989), 559-574.

[47] S. P. Sethi, and S. Bhaskaran, Conditions for the existence of decision horizons for discounted problems in a stochastic enviroment: a note. Oper. Res. Lett., V. 4 N. 2, (1985), 61-64.

[48] J. F. Shapiro, Turnpike planning horizons for a markovian decision model. Manage. Sci., V. 14 N. 5, (1968), 292-300.

[49] R. L. Smith, and R. Q. Zhang, Infinite horizon production planning in time-varying systems with convex production and inventory costs. Manage. Sci., V. 44 N. 9, (1998), 1313-1320.

[50] K. R. Stromberg, Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth International Group. Belmont, California, (1981).

[51] N. L. Stokey, and R. L. Jr. Lucas, Recursive Methods in Economic Dynamics. Harvard University Press, Cambridge, MA, (1989).

[52] J. Thomas, Price-Production decisions with deterministic demand, Manage. Sci., V. 16 N. 11, (1970), 747-750.

[53] H. M. Wagner, and T. M. Whitin, Dynamic version of the economic lot size model, Manage. Sci., (1958), 89-96.

[54] C. C. White, and D. J. White, Markov decision processes, European Journal of Oper. Res. 39, (1989), 1-16, North Holland.

[55] E. Zabel, Some generalizations of an inventory planning horizon theorem, Manage. Sci., V. 10 N. 3, (1964), 465-471.