

FUNDAMENTACION MATEMATICA DE LAS
ALGEBRAS DE LIE ASOCIADAS A LA
SOLUCION EXPONENCIAL DE ECUACIONES
DIFERENCIALES LINEALES NO AUTONOMAS

~~XXXXXXXXXX~~
90613

TESIS QUE PRESENTA
JOSE LEONARDO SAENZ CETINA ,
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS

SEPTIEMBRE 1989

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

12-10-90
Bryant



A MIS PADRES

12-10-90
Bryant

12-10-90
Bryant

AGRADECIMIENTOS

090613

Deseo agradecer al Dr. Rodolfo Suárez Cortez, Jefe del Area de Ecuaciones Diferenciales y Geometría del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, el haberme sugerido la realización de este trabajo, así como el haber aceptado ser mi asesor durante el desarrollo del mismo. Asimismo quisiera agradecer al Dr. Luis Verde Star, Jefe del Departamento de Matemáticas, y a la M. en C. María José Arroyo Paniagua, Secretaria Académica de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, por su invaluable apoyo a lo largo de estos años de estudio en la Maestría en Matemáticas. Y finalmente, pero no menos importante, mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

INDICE

CAPITULO	PAGINA
INTRODUCCION	1
1. EL CASO DISCRETO	4
2. EL CASO CONTINUO	13
3. LA FORMULA DE FRIEDRICHS-MAGNUS	26
CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFIA	48

INTRODUCCION

090613

En conexión con la teoría cuántica de campos, K. O. Friedrichs [F] se plantea el problema de resolver la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = H(t)U(t) \quad (1)$$

en la forma

$$U(t) = \exp \Omega(t) \quad (2)$$

donde $U(t), H(t)$ son operadores y $U(0) = I$ es la identidad. La dificultad es obtener $\Omega(t)$ en términos del operador $H(t)$. W. Magnus [Mag2] encontró la solución dando un método recursivo para la evaluación de $\Omega(t)$ en forma de una serie de multiconmutadores y obteniendo

$$\Omega(t) = \int_0^t H(t_1) dt_1 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t [H(t_1), H(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

donde $[H_1, H_2] = H_1 H_2 - H_2 H_1$ y los términos omitidos son integrales múltiples de multiconmutadores de H , de orden cada vez mayor.

Esta expresión, que se llamará la fórmula de Friedrichs-Magnus, es el análogo continuo de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([[[x, y], y] + [[x, y], x]]) + \dots \quad (4)$$

Esta fórmula se deduce al tratar de escribir $e^x e^y$ como e^z , donde x, y son elementos de un álgebra no conmutativa. K. O. Friedrichs probó que tal z es un elemento del álgebra de Lie generada por $\{x, y\}$.

En base a (4) es posible dar una solución heurística al problema (1)-(2) de la siguiente manera: sea $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ una partición del intervalo $[0, t]$. Si consideramos $H(t)$ constante e igual a $H(s_1)$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ y definimos los operadores

$$U_n(t) = e^{H(s_n)\Delta s_n} e^{H(s_{n-1})\Delta s_{n-1}} \dots e^{H(s_1)\Delta s_1} \quad (5)$$

donde $\Delta s_1 = s_1 - s_{1-1}$, resulta que $U_n(t) \rightarrow U(t)$ si $\max \Delta s_1 \rightarrow 0$.

Ahora bien, si denotamos la z de (4) por $x \# y$ y usamos esta operación $\#$ en (5) tenemos que

$$U_n(t) = \exp(H(s_n)\Delta s_n \# H(s_{n-1})\Delta s_{n-1} \# \dots \# H(s_1)\Delta s_1)$$

y de aquí que $U(t) = \exp \Omega(t)$ donde

$$\Omega(t) = \lim_{\max \Delta s_1 \rightarrow 0} (H(s_n)\Delta s_n \# \dots \# H(s_1)\Delta s_1).$$

La serie (4) puede no converger aún para el caso más sencillo de matrices 2×2 (ver [B], [C] y [H]). Si $H(t)$ es una matriz, se pueden dar condiciones simples de convergencia de (3) cuando t es suficientemente pequeño. Para condiciones de convergencia en todo $t \geq 0$ véanse [Mag2], [NW1], [NW2], [We] y [Wic]. Es importante señalar que B. Mielnik y J. Plebański [MP] obtuvieron un acercamiento más efectivo para la fórmula continua (véase la ecuación (3.17)).

Las fórmulas (3) y (4) han sido aplicadas a diferentes campos de la matemática y la física; por ejemplo a la teoría de grupos (véanse [A], [La], [Ly] y [Mag1]), teoría del control (véanse [HMS1], [HMS2] y [Ku]), ecuaciones diferenciales parciales (ver [S1]) y a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (véanse [S2] y [HSW]). Una lista extensiva de sus aplicaciones a la física se encuentra en R. M. Wilcox [Wil] y en S. Steinberg [S2]. En los últimos años las aplicaciones de estas fórmulas se han incrementado considerablemente debido a que se han desarrollado nuevos métodos algebraicos que permiten manejar estas fórmulas mejor (ver [MP]) y sobre todo por el uso de la

computadora para el cálculo de los coeficientes (ver [GR]) y para la manipulación de símbolos (véanse [Mac] y [PRF]).

El propósito de esta tesis será el de introducir estructuras matemáticas que nos permitan poner la fórmula (3) bajo un fundamento matemático riguroso. Para esto se recurrirá a los siguientes pasos. En el primer capítulo se revisará el caso discreto basado en el tratamiento de las álgebras de Lie libres que nos permitirán deducir la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. En base a esto, en el segundo capítulo se abordará el caso continuo a través de la construcción de diversos espacios que nos permitirán la extensión de los resultados más importantes del caso discreto para series de integrales similares a (3). Finalmente, en el tercer capítulo se terminarán de establecer, para el caso continuo, las analogías con el caso discreto culminando en la obtención de la fórmula de Friedrichs-Magnus.

CAPITULO 1

EL CASO DISCRETO

En este capítulo exponemos someramente la manera clásica de obtener la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para álgebras de Lie libres. Se tratará básicamente de un resumen, adaptado a nuestras necesidades, de la teoría hecha explícita en la referencia [J] en sus páginas 3, 6 y 167-174. Se hará especial énfasis en los teoremas de Dynkin-Specht-Wever, Friedrichs y Baker-Campbell-Hausdorff, ya que sus extensiones para el caso continuo conformarán la parte fundamental para lograr los objetivos de esta tesis.

§1. ALGEBRAS DE LIE LIBRES

Definición 1. - Sea A un álgebra sobre un campo F . Se dice que A es un álgebra de Lie si su multiplicación satisface las condiciones $(x, y, z \in A)$

$$\begin{aligned}x^2 &= 0, \\(xy)z + (yz)x + (zx)y &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Si A es asociativa una manera de darle la estructura de álgebra de Lie es usando el conmutador, o producto de Lie, de la siguiente forma: si $x, y \in A$:

$$[x, y] = xy - yx.\tag{1.2}$$

El álgebra de Lie resultante se denota por A_L .

Definición 2. - Un álgebra (de Lie) libre generada por un conjunto X consiste de un par $(\mathcal{F}, i)$ ($(\mathcal{FL}, i)$) formado por un álgebra (de Lie) $\mathcal{F}$ ($\mathcal{FL}$) y una función i de X en $\mathcal{F}$ ($\mathcal{FL}$) tal que si θ es cualquier función de X en un álgebra (de Lie) $\mathcal{U}$ entonces existe un único homomorfismo θ' de $\mathcal{F}$ ($\mathcal{FL}$) en $\mathcal{U}$ tal que $\theta = \theta' \circ i$.

Una forma de construir $\mathcal{FL}$ es usando el producto tensorial de la siguiente manera: tomemos el espacio lineal M sobre F generado por X . Ahora formemos el álgebra libre

$$\mathcal{F} = F \oplus M \oplus (M \otimes M) \oplus \dots \quad (1.3)$$

Entonces $\mathcal{FL}$ será la subálgebra generada por el subconjunto X en el álgebra de Lie $\mathcal{F}_L$. Un elemento $a \in \mathcal{F}$ es un elemento de Lie si $a \in \mathcal{FL}$.

Para nuestro desarrollo será suficiente restringir nuestra atención al caso de un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Entonces

$$M = \overbrace{F \otimes F \otimes \dots \otimes F}^{r \text{ veces}}$$

y el álgebra de Lie generada por X se indica simplemente como $\mathcal{F} = F\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. El álgebra $\mathcal{F}$ es graduada con $M_m = M \otimes M \otimes \dots \otimes M$ (m veces) como el espacio de elementos homogéneos de grado m . Una base para M_m es el conjunto de monomios de la forma $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$ para $i_j = 1, \dots, r$. Así, $\dim M_m = r^m$.

Consideremos la colección de combinaciones lineales de elementos de Lie de la forma

$$[\dots [[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_m}] \quad (1.4)$$

$i_j = 1, 2, \dots, r$, y con $m = 1, 2, \dots$. La identidad de Jacobi (1.1) muestra que este subespacio V es una subálgebra de $\mathcal{F}_L$. Como V contiene a cada $x_i \in X$ se sigue entonces que $V = \mathcal{L}$. Como además todo elemento de $\mathcal{L}$ es una suma de elementos homogéneos de Lie, tenemos entonces que un elemento es de Lie si y sólo si sus partes homogéneas son elementos de Lie. Vemos también que si a es un elemento de Lie el cual es homogéneo de grado m entonces a es una combinación de elementos de la forma (1.4).

Sea $\mathcal{F}'$ el ideal bilateral $M \otimes (M \otimes M) \otimes \dots$ de $\mathcal{F}$. Un elemento de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}'$ si y sólo si es una combinación lineal de monomios $x_{i_1} \dots x_{i_m}$, con $m \geq 1$. Como los diferentes monomios de este tipo forman una base para $\mathcal{F}'$ tenemos una transformación lineal O de $\mathcal{F}'$ en $\mathcal{L}$ tal que

$$Ox_i = x_i,$$

$$O(x_{i_1} \dots x_{i_m}) = [x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots [x_{i_m}, x_{i_1}] \dots]], \text{ con } m \geq 1. \quad (1.5)$$

La propiedad que necesitamos del operador O es que, para toda $a, b \in \mathcal{L}$

$$O[ab] = [Oa, b] + [a, Ob] \quad (1.6)$$

(ver [J], pág. 169).

A continuación estableceremos dos criterios importantes para decidir si un elemento de $\mathcal{F}$ es de Lie.

Teorema de Dynkin-Specht-Wever. - Si F es de característica cero, entonces un elemento homogéneo a de grado $m > 0$ es un elemento de Lie si y sólo si $Oa = ma$, donde O está definido por (1.5).

Demostración

La condición es evidentemente suficiente. Ahora sea a un

elemento de Lie el cual es homogéneo de grado m . Usaremos inducción sobre m . Hemos visto que a es una combinación de términos de la forma (1.4). Por lo tanto, es suficiente probar que $0a = ma$ para a como en (1.4). Tenemos por (1.6)

$$\begin{aligned} 0[\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_m}] &= [0[\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_{m-1}}], x_{i_m}] + \\ &\quad [[\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_{m-1}}], 0x_{i_m}] \\ &= (m-1)[\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_m}] + [\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_m}] \\ &= m[\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_m}]. \end{aligned}$$

Definamos el mapeo diagonal del álgebra $\mathfrak{F}$ en el álgebra $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}$ como el homomorfismo, δ , tal que a cada elemento x_i de X le asigna

$$\delta x_i = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i. \quad (1.7)$$

La siguiente caracterización para elementos de Lie no requiere de la reducción a elementos homogéneos.

Teorema de P. Friedrichs. Sea $\mathfrak{F} = F\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ el álgebra libre generada por los x_i sobre un campo de característica cero. Entonces $a \in \mathfrak{F}$ es un elemento de Lie si y sólo si $\delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, donde δ está dada por (1.7).

Demostración

Tenemos que $[a \otimes 1 + 1 \otimes a, b \otimes 1 + 1 \otimes b] = [a, b] \otimes 1 + 1 \otimes [a, b]$ lo cual implica que el conjunto de elementos que satisfacen $\delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ es una subálgebra de $\mathfrak{F}$. Esta incluye los x_i , por lo tanto contiene a $\mathfrak{F}_L$.

Inversamente, sea $y_1, y_2, \dots$ una base para $\mathfrak{F}_L$. Por la

construcción de $\mathcal{F}$ los elementos $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m}$, con m arbitrario y $k_i \geq 0$ forman una base para $\mathcal{F}$. Por lo tanto los productos

$(y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m}) \otimes (y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_n^{l_n})$ forman una base para $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \delta(y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m}) &= (y_1 \otimes 1 + 1 \otimes y_1)^{k_1} (y_2 \otimes 1 + 1 \otimes y_2)^{k_2} \dots (y_m \otimes 1 + 1 \otimes y_m)^{k_m} \\ &= y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m} \otimes 1 + k_1 y_1^{k_1-1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m} \otimes y_1 + k_2 y_1^{k_1} y_2^{k_2-1} \dots y_m^{k_m} \otimes y_2 + \\ &\quad \dots + k_m y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m-1} \otimes y_m + *, \end{aligned}$$

donde $*$ representa una combinación de elementos básicos de la forma $y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_s^{j_s} \otimes y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_t^{l_t}$ con $\sum l_i > 1$. Se sigue que, para

que δa sea una combinación de elementos básicos de la forma $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m} \otimes 1$ y $1 \otimes y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_s^{j_s}$ es necesario que en la expresión para a en términos de la base escogida solamente haya elementos

base $y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_m^{k_m}$ con un $k_i = 1$ y los demás $k_j = 0$ con coeficientes distintos de cero. Esto significa que a es una combinación lineal de los y_i , por lo tanto $a \in \mathcal{F}_1$. ■

§2.- LA FÓRMULA DE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF

Usaremos ahora el criterio dado por el teorema de Friedrichs para derivar la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Para esto necesitamos extender el álgebra $\mathcal{F} = F\{x_1, \dots, x_r\}$ al álgebra $\bar{\mathcal{F}}$ de series de potencias formales en los x_i .

Recordemos que M_m es el subespacio de $\mathcal{F}$ de elementos homogéneos de grado m . Sea $\bar{\mathcal{F}}$ la suma directa completa de los espacios M_m ; luego los elementos de $\bar{\mathcal{F}}$ son expresiones de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + \dots \quad (1.8)$$

donde a_i es de grado i . La igualdad, la adición y la multiplicación escalar están definidas de manera natural, en base a (1.8), componente a componente. La multiplicación en $\bar{\mathcal{F}}$ está dada por "el producto de Cauchy"

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

donde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \in M_k.$$

Como es de esperar, $\bar{\mathcal{F}}$ es un álgebra. Más aún, el subconjunto de $\bar{\mathcal{F}}$ de elementos $\sum a_i$ tales que $a_i = 0$ si $i \geq m$ para $m = 0, 1, 2, \dots$ es una subálgebra que puede ser identificada con $\mathcal{F}$. El subconjunto $\bar{\mathcal{F}}^{(1)}$ de los elementos de la forma $a_1 + a_{1+1} + \dots$, con a_k homogéneo de grado k , es un ideal bilateral de $\bar{\mathcal{F}}$. Definimos una valuación en $\bar{\mathcal{F}}$ tomando

$$|0| = 0 \text{ y } |a| = 2^{-1} \text{ si } a \neq 0 \text{ y } a \in \bar{\mathcal{F}}^{(1)} \text{ pero } a \notin \bar{\mathcal{F}}^{(1+1)}. \quad (1.9)$$

Esta cumple

- (i) $|a| \geq 0$, $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.
- (ii) $|ab| \leq |a||b|$.
- (iii) $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$.

Dados $a, b \in \bar{\mathcal{F}}$ definamos $d(a, b) = |a-b|$. Es sencillo verificar que d es una métrica para $\bar{\mathcal{F}}$ y que, bajo esta métrica, las operaciones algebraicas son continuas. La propiedad no arquimediana (iii) de la valuación implica el criterio muy simple de que la serie $x_1 + x_2 + \dots$ converge si y sólo si $|x_i| \rightarrow 0$. Claramente, la subálgebra $\mathcal{F}$ es densa en $\bar{\mathcal{F}}$.

Si la característica de $\mathcal{F}$ es cero y $z \in \bar{\mathcal{F}}^{(1)}$, entonces $|z^n| \rightarrow 0$, por lo que las series

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (1.10)$$

y

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (1.11)$$

convergen en $\overline{\mathcal{F}}$. Un cálculo directo muestra que

$$\exp(\log(1+z)) = 1+z \text{ y } \log(\exp z) = z.$$

Más aún,

$$\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2) \text{ si } [z_1, z_2] = 0 \quad (1.12)$$

y

$$\log(1+z_1)(1+z_2) = \log(1+z_1) + \log(1+z_2) \text{ si } [z_1, z_2] = 0. \quad (1.13)$$

Usando la construcción anterior, a partir del álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ obtenemos el álgebra de series de potencias formales $\overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$. Si

$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, con $a_i \in \mathcal{M}_i$, entonces $\Sigma(a_i \otimes 1)$ y $\Sigma(1 \otimes a_i)$ son elementos de $\overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$ que denotaremos por $a \otimes 1$ y $1 \otimes a$, respectivamente. Las

funciones $a \mapsto a \otimes 1$, $a \mapsto 1 \otimes a$ son monomorfismos y homeomorfismos de

$\overline{\mathcal{F}}$ en $\overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$. Se cumple que $[a \otimes 1, 1 \otimes b] = 0$ para cualesquiera $a, b \in \overline{\mathcal{F}}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

También, en caso de característica cero se satisface

$\exp(a \otimes 1) = (\exp a) \otimes 1$ y $\exp(1 \otimes a) = 1 \otimes \exp a$, y se obtienen fórmulas

similares para la función $\log$.

Por $\overline{\mathcal{F} \mathcal{L}}$ denotaremos al subconjunto de $\overline{\mathcal{F}}$ de elementos de la forma $b_1 + b_2 + \dots$ donde b_i es un elemento de Lie en $\mathcal{M}_i$. Es claro que $\overline{\mathcal{F} \mathcal{L}}$

es una subálgebra de $\overline{\mathcal{F}}$, y a sus elementos les llamaremos desde

ahora elementos de Lie. El homomorfismo diagonal δ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$

tiene una extensión a un homomorfismo de $\overline{\mathcal{F}}$ en $\overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$ al que también

denotaremos por δ . Finalmente, el teorema de Friedrichs también

se cumple para δ de $\overline{\mathcal{F}}$ en $\overline{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}}$ en el caso de característica cero.

Tomemos ahora $r = 2$ y denotemos los dos generadores por x y y de tal modo que $\mathfrak{F} = F\{x, y\}$ y F de característica cero. Consideremos el elemento $\exp x \exp y$ de $\overline{\mathfrak{F}}$ al que podremos denotar por $1+z$, donde $z \in \mathfrak{F}^{(1)}$ y de esta forma tener

$$\exp x \exp y = 1+z = \exp w \text{ donde } w = \log(1+z) \quad (1.14)$$

Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff. - El elemento

$w = \log(\exp x \exp y)$ es un elemento de Lie, esto es $w \in \overline{\mathfrak{F}}_2$.

Demostración

Tenemos que

$$\delta(\exp x \exp y) = (\exp \delta x)(\exp \delta y) = (\exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x))((\exp(y \otimes 1 + 1 \otimes y)))$$

de (1.12):

$$= (\exp(x \otimes 1))(\exp(1 \otimes x))(\exp(y \otimes 1))(\exp(1 \otimes y))$$

$$= ((\exp x) \otimes 1)(1 \otimes \exp x)((\exp y) \otimes 1)(1 \otimes \exp y)$$

$$= ((\exp x) \otimes 1)((\exp y) \otimes 1)(1 \otimes \exp x)(1 \otimes \exp y)$$

$$= ((\exp x \exp y) \otimes 1)(1 \otimes (\exp x \exp y))$$

Por lo tanto, de (1.14)

$$\delta(1+z) = ((1+z) \otimes 1)(1 \otimes (1+z)).$$

Así

$$\delta(\log(1+z)) = \log \delta(1+z) = \log(((1+z) \otimes 1)(1 \otimes (1+z)))$$

de (1.13):

$$= \log((1+z) \otimes 1) + \log(1 \otimes (1+z)) = (\log(1+z)) \otimes 1 + 1 \otimes \log(1+z)$$

Por lo cual $\log(1+z)$ satisface la condición de Friedrichs y por tanto, $\log(1+z) \in \overline{\mathfrak{F}}_2$.

Ahora que sabemos que $w = \log(1+z)$ es un elemento de Lie, podemos obtener una fórmula explícita para él por el teorema de Dynkin-Specht-Wever. Tenemos

$$z = \exp x \exp y - 1 = \sum_{p,q} \frac{x^p y^q}{p!q!}, \text{ con } p+q > 0$$

y

$$z^m = \sum_{p_1, q_1} \frac{x^{p_1} y^{q_1} x^{p_2} y^{q_2} \dots x^{p_m} y^{q_m}}{p_1! q_1! p_2! q_2! \dots p_m! q_m!}, \text{ con } p_1 + q_1 > 0.$$

Por lo que

$$\log(1+z) = \sum_m \sum_{p_1, q_1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1} y^{q_1} x^{p_m} y^{q_m}}{p_1! q_1! p_m! q_m!}, \text{ con } p_1 + q_1 > 0.$$

Como éste es un elemento de Lie, podemos aplicar el operador $\mathcal{O}$ a los términos de grado k y obtenemos k veces la parte homogénea de grado k de este elemento, con lo cual resulta la siguiente expresión de $\log(1+z)$ como elemento de Lie

$$\log(1+z)$$

$$= \sum_m \sum_{p_1, q_1} \frac{(-1)^{m-1}}{m(\Sigma(p_1 + q_1))} \frac{[\dots [\overbrace{x, x}^{p_1}, \dots, x], \overbrace{y, \dots, y}^{q_1}], \dots, y], \dots, y], \dots, y]}{p_1! q_1! \dots p_m! q_m!}.$$

Calculando los primeros términos de esta serie se obtiene

$$\log(1+z) = x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{12}[[x,y],y]+\frac{1}{12}[[x,y],x]+\dots \quad (1.15)$$

expresión a la que se le suele llamar la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

CAPITULO 2

EL CASO CONTINUO

En este capítulo construiremos diversos espacios que nos permitirán extender los resultados más importantes del capítulo anterior al caso continuo. El nombre de continuo se deberá a que las funciones que usaremos para definir los espacios en que trabajaremos tendrán dominios contruídos a partir de un intervalo cerrado de los reales.

§1.- PRELIMINARES

Sean $F = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y S_n el grupo de permutaciones de orden n .

Definición 1.-El álgebra de permutaciones de n elementos, FS_n , es el conjunto de sumas formales del tipo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i,$$

con $r_i \in F$ y $\sigma_i \in S_n$, y además $\sigma_j \neq \sigma_k$ si $j \neq k$. Las operaciones algebraicas en FS_n se definen de la siguiente manera: la suma de dos elementos de FS_n está dada por

$$\sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i + \sum_{i=1}^{n!} s_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n!} (r_i + s_i) \sigma_i,$$

si $s \in F$, la multiplicación por el escalar s está dada por

$$s \sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n!} (sr_i) \sigma_i,$$

y finalmente, el producto de dos elementos de FS_n está dado por

$$\left[\sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i \right] \left[\sum_{j=1}^{n!} s_j \sigma_j \right] = \sum_{i=1}^{n!} \sum_{j=1}^{n!} (r_i s_j) (\sigma_i \sigma_j),$$

en el que $\sigma_i \sigma_j$ denota el producto usual (composición) de permutaciones de S_n calculado de derecha a izquierda.

Las operaciones definidas anteriormente le dan a FS_n la estructura de un álgebra asociativa con unidad sobre F , como es fácil de comprobar. La identidad en FS_n es la permutación identidad de S_n la cual denotaremos simplemente por 1.

Sean ahora X un espacio lineal sobre F , $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Designamos por $\mathcal{F}(T^n, X)$ el espacio lineal de funciones $a : T^n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$, donde $T = [0, t] \subset \mathbb{R}$. Cada permutación $\sigma \in S_n$ puede ser identificada con el siguiente operador lineal sobre $\mathcal{F}(T^n, X)$

$$\sigma a(t_1, \dots, t_n) = a(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}). \quad (2.1)$$

Como $(\sigma_1 \sigma_2)a = \sigma_1(\sigma_2 a)$, la regla de aplicación (2.1) se encuentra en concordancia con el convenio de evaluación del producto de dos permutaciones de derecha a izquierda. La regla (2.1) se extiende a los elementos de FS_n linealmente, es decir, de la siguiente manera: si $a \in \mathcal{F}(T^n, X)$ entonces

$$\left[\sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i \right] a = \sum_{i=1}^{n!} r_i \sigma_i a.$$

Denotemos por $C_{1,k}$ a la siguiente permutación cíclica en S_n

$$C_{1,k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ k & 1 & \dots & k-2 & k-1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Definamos ahora dos elementos especiales D_n y E_n de FS_n

$$D_n = \frac{1}{n} (1 - C_{1,2}) (1 - C_{1,3}) \dots (1 - C_{1,n}) \quad (2.3)$$

y

$$E_n = \frac{1}{n} (1 - C_{1,n}^{-1}) (1 - C_{1,n-1}^{-1}) \dots (1 - C_{1,2}^{-1}), \quad (2.4)$$

en los que 1, recordemos, denota la permutación identidad. En particular, si B es un álgebra asociativa sobre F , $H \in \mathcal{F}(T, B)$ y $\mathcal{H}(t_1, \dots, t_n) = H(t_1) \dots H(t_n)$ tenemos que D_n corresponde al siguiente arreglo de Lie (véase [MP], pág. 247)

$$\begin{aligned} D_n(\mathcal{H}(t_1, \dots, t_n)) &= D_n(H(t_1) \dots H(t_n)) \\ &= \frac{1}{n} [\dots [[H(t_1), H(t_2)], H(t_3)], \dots, H(t_n)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como se ve, nD_n corresponde a la transformación lineal $\mathcal{O}$ dada en el capítulo anterior para el caso discreto. La propiedad más importante que tienen los objetos D_n y E_n es la de ser proyecciones, es decir,

$$D_n^2 = D_n \quad (2.6)$$

y

$$E_n^2 = E_n. \quad (2.7)$$

Una prueba esbozada para (2.6) se encuentra en [MKS] (pág. 365).

Las permutaciones $C_{1,k}$ serán de gran relevancia en la teoría subsiguiente; para poder manipularlas de una manera adecuada se dan a continuación una proposición y varios corolarios que sintetizan sus propiedades más importantes.

Proposición 1. - Sea $m > 0$ y sean $i_1 < \dots < i_m$ unos m enteros positivos cualesquiera. Tomemos ahora a los i_{m+1} enteros positivos menores que i_m distintos de los anteriores y llamémosles $i_{m+1} < \dots < i_1$. Entonces

$$C_{1,1} \dots C_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & i_m \\ i_m & i_{m-1} & \dots & i_1 & i_{m+1} & \dots & i_1 \end{pmatrix}.$$

Demostración

La demostración será por inducción sobre m y supondremos que $i_1 \geq 2$. El caso $i_1 = 1$, conviniendo que $C_{1,1} = 1$, será inmediato de aquél.

Para $m = 1$ la igualdad vale ya que por (2.2)

$$C_{1,i_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i_1 \\ i_1 & 1 & \dots & i_1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que vale para $m = k$. Probémoslo para $m = k+1$.

Sean $i_1 < \dots < i_{k+1}$ junto con $i_{k+2} < \dots < i_{i_{k+1}}$ los primeros i_{k+1} enteros positivos. Por la hipótesis inductiva

$$C_{1,i_1} \dots C_{1,i_k} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & i_k \\ i_k & \dots & i_1 & i_{k+2} & \dots & i_{i_{k+1}+1} \end{bmatrix}$$

Nótese que $i_{i_k+1} < i_k < i_{k+1}$. Por lo tanto

$$C_{1,i_1} \dots C_{1,i_k} C_{1,i_{k+1}} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & i_k \\ i_k & \dots & i_1 & i_{k+2} & \dots & i_{i_{k+1}+1} \end{bmatrix} C_{1,i_{k+1}}.$$

De (2.2)

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & i_k \\ i_k & \dots & i_1 & i_{k+2} & \dots & i_{i_{k+1}+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i_{k+1} \\ i_{k+1} & 1 & \dots & i_{k+1} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & i_{k+1} \\ i_{k+1} & i_k & \dots & i_1 & i_{k+2} & \dots & i_{i_{k+1}+1} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 1.1. - $C_{1,2} \dots C_{1,n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Corolario 1.2. - Sean $n \geq m > 0$ y sean $i_1 < \dots < i_m$ unos m enteros positivos menores o iguales que n . Tomemos ahora a los $n-m$ enteros positivos menores o iguales que n distintos de los anteriores y llamémosles $i_{m+1} < \dots < i_n$. Entonces

$$C_{1,i_1} \dots C_{1,i_m} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ i_m & i_{m-1} & \dots & i_1 & i_{m+1} & \dots & i_n \end{bmatrix}.$$

Demostración

Sólo es preciso observar que $i_k = k$ para $k \geq i+1$ por lo que nos encontramos con lo previsto por la proposición 1. ■

Conservando la notación del corolario anterior se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 1.3.-

$$C_{1,1_1} \dots C_{1,1_m} C_{1,2} \dots C_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_m & i_{m+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Corolario 1.4.- $C_{1,1_1} \dots C_{1,1_m} C_{1,2} \dots C_{1,n} = C_{1,1_{m+1}} \dots C_{1,1_n}$

Corolario 1.5.-

$$C_{1,1_1} \dots C_{1,1_m} C_{1,2} \dots C_{1,n} = C_{1,1_{m+1}} \dots C_{1,1_n} C_{1,2} \dots C_{1,n-m} (C_{1,n})^m.$$

Reescribimos a continuación los dos corolarios anteriores en formas que nos serán más útiles posteriormente.

Corolario 1.6.- $C_{1,n}^{-1} \dots C_{1,2}^{-1} C_{1,1_m}^{-1} \dots C_{1,1_1}^{-1} = C_{1,1_n}^{-1} \dots C_{1,1_{m+1}}^{-1}$

Corolario 1.7.-

$$(C_{1,n})^m C_{1,n}^{-1} \dots C_{1,2}^{-1} C_{1,1_m}^{-1} \dots C_{1,1_1}^{-1} = C_{1,n-m}^{-1} \dots C_{1,2}^{-1} C_{1,1_n}^{-1} \dots C_{1,1_{m+1}}^{-1}.$$

Sea $N_n(t)$ el álgebra conmutativa sobre F de funciones de $\mathfrak{F}(T^n, F)$ que se anulan en casi todo $T^n = [0, t]^n$. Es fácil de comprobar que $FS_n(N_n(t)) = N_n(t)$. En particular

$$E_n(N_n(t)) \subset N_n(t), \quad (2.8)$$

resultado que será de utilidad más adelante.

§2.- ALGEBRAS DE RANGO CONTINUO Y ESPACIOS LINEALES ORDENADOS DE

RANGO CONTINUO

Definición 2.- Sea $A_n(t)$, para cada $n = 1, 2, \dots$, un subespacio lineal del espacio de Banach L_p de funciones definidas en $T^n = [0, t]^n$ y con valores en F ; sea además $A_0(t) = F$. Al conjunto de sucesiones infinitas

$$A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} A_n(t) = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : a_n \in A_n(t) \right\}$$

se le llama un álgebra de coeficientes si satisface

- i) para cada $\sigma \in S_n$ y $a \in A_n(t)$, tenemos que $\sigma a \in A_n(t)$,
- ii) dados $a \in A_k(t)$ y $b \in A_m(t)$, la función $a \circ b$ es un elemento de $A_{k+m}(t)$, donde

$$(a \circ b)(t_1, \dots, t_{k+m}) = a(t_1, \dots, t_k) b(t_{k+1}, \dots, t_{k+m}). \quad (2.9)$$

Dado que $A_n(t) \subset L_p$ entenderemos que (2.9) es una igualdad como funciones en L_p , esto es, (2.9) se cumple en casi todas partes de T^n . Esta convención se seguirá de aquí en adelante.

Por ejemplo, si $A_n(t)$ es el espacio de funciones reales continuas de n variables, entonces $A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} A_n(t)$ es un álgebra de coeficientes. El concepto de "álgebra de coeficientes" se usa en la definición de series de Volterra, las cuales son aplicadas frecuentemente en la solución de problemas en sistemas y teoría de control (véase [R]).

Sea $A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} A_n(t)$ un álgebra de coeficientes. Las

operaciones algebraicas en $A(t)$ están definidas de la siguiente manera: si $a, b \in A(t)$, esto es, $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $a_n, b_n \in A(t)$, y $\alpha \in F$, entonces

$$a+b = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\alpha a = \{\alpha a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$ab = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{k=0}^n a_k \circ b_{n-k}.$$

Como puede comprobarse, las operaciones definidas de esa manera son cerradas en $A(t)$. También es fácil de ver que con ellas $A(t)$ es un álgebra asociativa con unidad sobre F .

Tomando en cuenta (2.8) la siguiente definición no presenta problema alguno.

Definición 3.- Sea $n \geq 2$. A un elemento $a \in A_n(t)$ se le llama un coeficiente ordenado de grado n si

$$E_n a = a, \quad (2.10)$$

donde E_n , recordemos, está dado por (2.4).

Nótese que esta definición es el análogo continuo del teorema de Dynkin-Specht-Wever.

Por ejemplo, si $a(t_1, t_2) = t_1 - t_2 \in A_2(t)$ entonces $a(t_1, t_2)$ es un coeficiente ordenado de grado dos ya que

$$\begin{aligned} E_2(a(t_1, t_2)) &= \left[\frac{1}{2}(1 - C_{1,2}^{-1}) \right] a(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(1 - C_{1,2}^{-1})(a(t_1, t_2)) \\ &= \frac{1}{2}(a(t_1, t_2) - a(t_2, t_1)) = \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - (t_2 - t_1)) \\ &= t_1 - t_2 = a(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Pero no necesariamente todo elemento de $A_2(t)$ debe ser uno de éstos, por ejemplo, si $b(t_1, t_2) = t_1 + t_2 \in A_2(t)$ entonces éste no es un coeficiente ordenado de grado dos ya que

$$E_2(b(t_1, t_2)) = \frac{1}{2}(b(t_1, t_2) - b(t_2, t_1)) = \frac{1}{2}(t_1 + t_2 - (t_2 + t_1)) = 0$$

Sea $\Lambda_n(t)$ el conjunto de coeficientes ordenados de grado n en $A_n(t)$, si $n \geq 2$. Observemos que $\Lambda_n(t)$ es subespacio lineal de $A_n(t)$; esto se deduce de que $E_n^2 = E_n$, por (2.7), y por lo tanto $\Lambda_n(t) = E_n(A_n(t))$.

Definición 4. - El espacio lineal ordenado $\Lambda(t)$ es la sucesión infinita de espacios lineales $\prod_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(t)$, con $\Lambda_0(t) = \{0\}$ y $\Lambda_1(t) = A_1(t)$. A cada elemento de $\Lambda(t)$ se le llamará una sucesión de coeficientes ordenados.

Desde luego, $\Lambda(t)$ es subespacio lineal de $A(t)$.

Definamos ahora el operador $E : A(t) \rightarrow A(t)$, como la transformación lineal tal que, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$, se tiene que

$$E(a) = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (2.11)$$

en donde $b_0 = 0$ y $b_1 = a_1$ y si $n \geq 2$ entonces

$$b_n(t_1, \dots, t_n) = E_n(a_n(t_1, \dots, t_n)).$$

Por la definición de sucesión de coeficientes ordenados y el hecho de que, por (2.7), $E_n^2 = E_n$, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2. - El operador E es una proyección, esto es $E^2 = E$, y además $\text{Rango } E = \Lambda(t)$.

El operador E es un "ordenador" que "fuerza" a los elementos del álgebra $A(t)$ a adquirir la estructura de una sucesión de coeficientes ordenados. El concepto de ordenador, así como el análisis de otros ejemplos, puede encontrarse en [MP].

Sea G un espacio de Hilbert sobre el campo F y A el álgebra de operadores continuos sobre G , es decir, A es el álgebra de transformaciones lineales continuas que van del espacio G en sí mismo. Siguiendo la manera de proceder en el capítulo anterior construyamos, como en (1.2), el álgebra libre $\mathcal{A} = F \oplus A \oplus (A \otimes A) \oplus \dots$ y su extensión a las series de potencias formales $\bar{\mathcal{A}}$. Recordemos que para tratar problemas de convergencia de series en $\bar{\mathcal{A}}$ hemos definido una valuación dada por (1.8). Las álgebras $\mathcal{A}$ y $\bar{\mathcal{A}}$ son asociativas con unidad. Para evitar cualquier confusión entre el producto usual de operadores definido en A con el producto libre dado en las dos últimas denotaremos a este último por $\otimes$.

Dado que G es un espacio de Hilbert, tiene definida una norma a partir de su producto interior. Esta norma permite a su vez definir una norma estándar en el álgebra de operadores A que da lugar a una métrica. Sea, pues, $H : \mathbb{R} \rightarrow A$ una función continua y que se anula sólo en un conjunto finito de puntos del intervalo $T = [0, t]$. Induciendo a partir de la norma de A la norma en los espacios homogéneos $A \otimes \dots \otimes A$ (véase [Kö]) llegamos a que todo producto de la forma $H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n)$ es una función continua de n variables. Si tomamos $a_n \in A_n(t)$ tendremos que la función de n variables reales $a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n)$ es integrable sobre $T^n = [0, t]^n$. Por lo tanto la integral

$$\int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (2.12)$$

está definida y es un elemento homogéneo de grado n en $\bar{A}$.

Con todo esto definimos

Definición 5. - El álgebra de rango continuo $A(t)$ es el subconjunto de $\bar{A}$ de elementos que se pueden dar de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (2.13)$$

donde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$.

$A(t)$ es una subálgebra de $\bar{A}$ como es fácil de comprobar. En particular, la multiplicación es cerrada en $A(t)$ por (2.9) y la definición del producto de Cauchy de dos series.

Definamos la función $\Phi : A(t) \rightarrow A(t)$, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$, por

$$\Phi(a) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (2.14)$$

Φ es un epimorfismo entre álgebras asociativas con unidad como es, de nuevo, fácil de comprobar.

Nótese que como H es continua y nula sólo en un conjunto finito de puntos de $[0, t]$ se tiene que, para cualquier n , si para toda $s \in (0, t]$ ocurre que

$$\int_0^s \dots \int_0^s a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n = 0$$

entonces necesariamente $a_n = 0$ (en L_p). Luego todo elemento de $A(t)$ se escribe de una manera única de la forma dada por (2.13).

Y como Φ es de antemano un epimorfismo entre $A(t)$ y $\mathcal{A}(t)$ tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3. - $A(t)$ y $\mathcal{A}(t)$ son isomorfas como álgebras asociativas con unidad. El isomorfismo está dado por Φ .

Definición 6. - El espacio lineal ordenado de rango continuo $\lambda(t)$ es el subconjunto de elementos de $\mathcal{A}(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t u_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

(nótese, $u_0 = 0$) con $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(t)$. A cada elemento de $\lambda(t)$ se lo llamará un elemento ordenado.

En otras palabras $\lambda(t) = \Phi(\Lambda(t))$, por lo que $\lambda(t)$ es subespacio lineal de $\mathcal{A}(t)$.

El espacio $\lambda(t)$ será para nosotros el más importante de todos los mencionados antes ya que todo elemento ordenado podrá, por un empleo adecuado del teorema de Fubini, ser reescrito en la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t \frac{u_n(t_1, \dots, t_n)}{n} [\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)] dt_1 \dots dt_n$$

(el producto de Lie $[\cdot]$ está, desde luego, referido al producto libre $\otimes$).

Finalmente, para poder abordar problemas de convergencia en A , el álgebra de operadores, damos a continuación las siguientes definiciones.

Definición 7. - El álgebra de coeficientes convergentes $\mathcal{U}(t)$ es el conjunto de elementos $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$ tales que la serie

$$a_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \dots H(t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (2.15)$$

donde I es el operador identidad, converge absolutamente en A .

$\mathcal{U}(t)$ es subálgebra de $A(t)$; de nueva cuenta, es el producto de Cauchy de dos series el que nos garantiza la cerradura de la multiplicación en $\mathcal{U}(t)$.

Definamos ahora la función $\Xi : \mathcal{U}(t) \rightarrow A$, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{U}(t)$, por

$$\Xi(a) = a_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \dots H(t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (2.16)$$

Definición 8. - El espacio lineal de coeficientes ordenados convergentes $\mathcal{L}(t)$ es $\mathcal{L}(t) = A(t) \cap \mathcal{U}(t)$; esto es, las sucesiones de coeficientes ordenados tales que la serie (2.15) converge absolutamente en A . A cada elemento de $\mathcal{L}(t)$ se le llamará una sucesión de coeficientes ordenados convergentes.

§3.- EL ÁLGEBRA DE COEFICIENTES FINITO DIMENSIONAL

Construiremos a continuación un álgebra de coeficientes particular que será de utilidad para obtener la fórmula de Friedrichs-Magnus.

Sea la función escalón

$$\bar{\theta}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > 0 \\ 0 & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases}$$

y las funciones de n variables

$$\theta_{i,j}(t_1, \dots, t_n) = \bar{\theta}(t_i - t_j) \quad (2.17)$$

para $1 \leq i, j \leq n$ con $i \neq j$. Además, sea $\theta_1(t_1, \dots, t_n) = 1$.

Notemos que $\theta_{i,j} = 1 - \theta_{j,i}$ en casi todo $\mathbb{R}^n$.

Se define $A_n^f(t)$ como el subespacio lineal del espacio L_p sobre $\mathbb{R}$ generado por las restricciones a T^n de θ_1 y las funciones

$$\theta_{\hat{1}, \hat{j}}^n(t_1, \dots, t_n) = \theta_{i_1, j_1} \theta_{i_2, j_2} \dots \theta_{i_k, j_k},$$

en donde $\hat{1} = (i_1, \dots, i_k)$ y $\hat{j} = (j_1, \dots, j_k)$ con $1 \leq k \leq n-1$ y se cumpla que $i_p \leq i_{p+1}$ y si $i_p = i_{p+1}$ entonces $j_p < j_{p+1}$. La multiplicación entre elementos de $A_n^f(t)$ y $A_m^f(t)$ se define de la misma forma que (2.9), esto es, se define para $\theta_{\hat{1}, \hat{j}}^n \in A_n^f(t)$ y $\theta_{\hat{1}', \hat{j}'}^m \in A_m^f(t)$ como

$$\theta_{\hat{1}, \hat{j}}^n \circ \theta_{\hat{1}', \hat{j}'}^m = \theta_{\hat{1}'', \hat{j}''}^{n+m},$$

en donde $\hat{1}'' = (i_1, \dots, i_k, n+i'_1, \dots, n+i'_r)$ y $\hat{j}'' = (j_1, \dots, j_k, n+j'_1, \dots, n+j'_r)$ y se extiende por linealidad en los demás productos posibles.

Observemos que cada $A_n^f(t)$ es un espacio lineal de dimensión finita.

Un elemento distinguido de este espacio es

$$\theta_n(t_1, \dots, t_n) = \theta_{1,2} + \dots + \theta_{n-1,n} \quad (2.18)$$

Obsérvese que $\prod_{n=0}^{\infty} A_n^f(t)$ es un álgebra de coeficientes a la que llamaremos el álgebra de coeficientes finito dimensional y se denotará por $A^f(t)$. Los otros espacios, para este caso, se denotarán por $\Lambda_n^f(t), \mathcal{A}^f(t), \lambda^f(t), \mathcal{U}^f(t)$ y $\mathcal{Z}^f(t)$. Por otro lado, como $\Lambda_n^f(t) \subset A_n^f(t)$, también $\Lambda_n^f(t)$ es de dimensión finita.

CAPITULO 3

LA FORMULA DE FRIEDRICHS-MAGNUS

En este capítulo terminaremos de extender los resultados del caso discreto en el caso continuo que hemos construido y finalmente obtendremos la fórmula de Friedrichs-Magnus la cual es el análogo continuo a la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Usaremos, pues, la notación del capítulo anterior y los conceptos del primer capítulo.

§1.- EL CRITERIO DE FRIEDRICHS

Siguiendo los pasos de la sección 2 del capítulo 1, tomemos el producto tensorial del álgebra A consigo misma, esto es, $A \otimes A$ y su álgebra formal asociada $\overline{A \otimes A}$. Los elementos de $\overline{A \otimes A}$ son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n d_{m, n-m} \quad (3.1)$$

donde $d_{m, n-m} = c_{n, m} (a \otimes b)$ con $c_{n, m} \in F$ y a, b son elementos homogéneos de A de grados, respectivamente m y $n-m$. Cuando el elemento $d_{i, j}$ no es nulo lo llamaremos un elemento homogéneo de grado (i, j) . Es inmediato que todo elemento de $\overline{A \otimes A}$ se escribe de una manera única como una serie (3.1) de elementos homogéneos de distintos grados (i, j) . El producto libre $\circ$ dado en $\overline{A}$ se relacionará con el nuevo producto $\otimes$ dado en $\overline{A \otimes A}$ de la manera usual, es decir, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ están en $\overline{A}$ se tendrá

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes (\gamma \otimes \delta) = (\alpha \circ \gamma) \otimes (\beta \otimes \delta) \quad (3.2)$$

Abusando de la notación tensorial consideremos ahora la subálgebra $A(t) \otimes A(t)$ de $\overline{A \otimes A}$. $A(t) \otimes A(t)$ consta de elementos de la forma

$$\begin{aligned}
 & a_{0,0}(1 \otimes 1) + \int_0^t a_{1,0}(t_1)(H(t_1) \otimes 1) dt_1 + \int_0^t a_{0,1}(t_1)(1 \otimes H(t_1)) dt_1 + \\
 & \sum_{n=2}^{\infty} \left(\int_0^t \dots \int_0^t a_{n,0}(t_1, \dots, t_n) ((H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n)) \otimes 1) dt_1 \dots dt_n + \right. \\
 & \quad \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^t \dots \int_0^t a_{n,m}(t_1, \dots, t_n) (H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_{n-m})) \otimes \\
 & \quad \quad (H(t_{n-m+1}) \otimes \dots \otimes H(t_n)) dt_1 \dots dt_n + \\
 & \quad \left. \int_0^t \dots \int_0^t a_{n,n}(t_1, \dots, t_n) (1 \otimes (H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n))) dt_1 \dots dt_n \right) \\
 & \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

con los $a_{n,m} \in A(t)$. Nótese que cada integral de (3.3) es un elemento homogéneo de grado $(n-m, m)$.

Sea $\Phi' : A(t) \rightarrow A(t) \otimes A(t)$ función tal que, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ está en $A(t)$, entonces

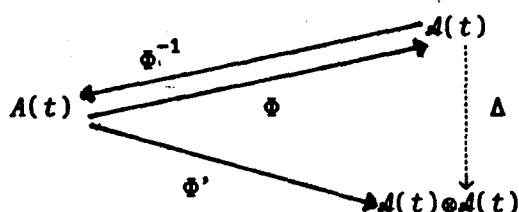
$$\Phi'(a) = a_0(1 \otimes 1) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) \otimes \dots \otimes (H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n)) \\
 dt_1 \dots dt_n$$

Φ' es un homomorfismo entre álgebras asociativas con unidad, esto sencillo de comprobar.

Finalmente, tenemos $\Delta : A(t) \rightarrow A(t) \otimes A(t)$ homomorfismo que hace

conmutativo el siguiente diagrama



Otra manera de decir lo mismo es $\Delta = \Phi' \circ \Phi^{-1}$ ($\circ$ denota composición). Aún más concretamente

$$\Delta \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n \right]$$

$$= a_0(1 \otimes 1) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) \otimes \dots \otimes (H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n))$$

$$dt_1 \dots dt_n \quad (3.4)$$

Δ es un homomorfismo entre álgebras asociativas con unidad, debido a que es composición de Φ' y Φ^{-1} que lo son. Por otro lado, Δ resulta ser el análogo continuo del mapeo diagonal δ definido por (1.7) en el capítulo 1.

Finalizamos esta sección exponiendo el criterio de Friedrichs que es la importante realización continua del teorema de Friedrichs.

Teorema 1 (Criterio de Friedrichs).- Un elemento α de $A(t)$ está en $\lambda(t)$, es decir, es un elemento ordenado, si y sólo si $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

Demostración

→) Si $\alpha \in \lambda(t)$ entonces existe $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(t)$ tal que $\alpha = \Phi(a)$, pero como a está en $\Lambda(t)$ ocurre que $a = E(a)$, esto por (2.11) es $a_0 = 0$ y $a_n = E_n(a_n)$ para $n \geq 2$. De donde que

$$\begin{aligned}\alpha = \Phi(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_0^t a_1(t_1) H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t E_n(a_n(t_1, \dots, t_n)) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) \\ &\quad dt_1 \dots dt_n\end{aligned}$$

Aplicando Δ dada por (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \int_0^t a_1(t_1) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) dt_1 + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t E_n(a_n(t_1, \dots, t_n)) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) \otimes \dots \otimes (H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n)) \\ &\quad dt_1 \dots dt_n\end{aligned}$$

Por el teorema de Fubini podemos reordenar cada una de las integrales múltiples de tal manera que las variables conserven su índice ordenado en cada a_n . Procediendo así obtenemos

$$\begin{aligned}&= \int_0^t a_1(t_1) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) dt_1 + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) D_n((H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes (H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n))) dt_1 \dots dt_n\end{aligned}$$

De (2.5) tenemos

$$= \int_0^t a_1(t_1) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) dt_1 +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) [\dots [H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1),$$

$$H(t_2) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_2)], \dots, H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n)] dt_1 \dots dt_n$$

El producto de Lie $[\cdot]$ está, desde luego, referido al producto

libre $\otimes$. Y como por inducción puede probarse que

$$[\dots [H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1), H(t_2) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_2)], \dots, H(t_n) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_n)]$$

$$= [\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)] \otimes 1 + 1 \otimes [\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)]$$

continuamos aplicando esta propiedad

$$= \int_0^t a_1(t_1) (H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1)) dt_1 +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) ([\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)] \otimes 1 +$$

$$1 \otimes [\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)]) dt_1 \dots dt_n$$

$$= \left[\int_0^t a_1(t_1) H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) [\dots [H(t_1), H(t_2)],$$

$$\dots, H(t_n)] dt_1 \dots dt_n \right] \otimes 1 + 1 \otimes$$

$$\left[\int_0^t a_1(t_1) H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) [\dots [H(t_1), H(t_2)],$$

$$\dots, H(t_n)] dt_1 \dots dt_n \right]$$

Por (2.5) de nuevo:

$$= \left[\int_0^t a_1(t_1) H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) D_n(H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n))$$

$$dt_1 \dots dt_n \right] \otimes 1 + 1 \otimes$$

$$\left[\int_0^t a_1(t_1)H(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) D_n(H(t_1) \odot \dots \odot H(t_n)) \right. \\ \left. dt_1 \dots dt_n \right]$$

Por el teorema de Fubini otra vez:

$$= \left[\int_0^t a_1(t_1)H(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t E_n(a_n(t_1, \dots, t_n))H(t_1) \odot \dots \odot H(t_n) \right. \\ \left. dt_1 \dots dt_n \right] \otimes 1 + 1 \otimes$$

$$\left[\int_0^t a_1(t_1)H(t_1)dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t E_n(a_n(t_1, \dots, t_n))H(t_1) \odot \dots \odot H(t_n) \right. \\ \left. dt_1 \dots dt_n \right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n)H(t_1) \odot \dots \odot H(t_n) dt_1 \dots dt_n \right] \otimes 1 + 1 \otimes$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n)H(t_1) \odot \dots \odot H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

$$= \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$$

↔) Sea $\alpha = \Phi(a)$, $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$, como de costumbre. Por hipótesis $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$. Antes de igualar, desarrollemos $\Delta(\alpha)$

$$\Delta(\alpha) = a_0(1 \otimes 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{m=1}^n \odot(H(t_m) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_m)) \\ dt_1 \dots dt_n$$

$$= a_0(1 \otimes 1) + \int_0^t a_1(t_1)(H(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes H(t_1))dt_1 +$$

090613

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \left[\left(\prod_{m=1}^n \odot H(t_m) \right) \odot 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \#S_j = m}} \left[\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \odot H(t_p) \right) \odot \left(\prod_{q \in S_j} \odot H(t_q) \right) \right] + 1 \odot \prod_{m=1}^n \odot H(t_m) \right] dt_1 \dots dt_n$$

$J_n = \{1, \dots, n\}$ y tanto él, como cada subconjunto S_j y $J_n \setminus S_j$,

considerados como conjuntos ordenados. Tomando en cuenta que

$a_0(1 \odot 1) = a_0 \odot 1 = 1 \odot a_0$, e integrando separadamente y reagrupando

obtenemos, continuando

$$= \alpha \odot 1 + 1 \odot \alpha - a_0(1 \odot 1) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \left[\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \#S_j = m}} \left[\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \odot H(t_p) \right) \odot \left(\prod_{q \in S_j} \odot H(t_q) \right) \right] \right] dt_1 \dots dt_n$$

$$dt_1 \dots dt_n$$

Y ahora sí, aplicando la hipótesis podemos cancelar $\alpha \odot 1 + 1 \odot \alpha$ en la

expresión anterior e igualar lo restante a cero

$$-a_0(1 \odot 1) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \#S_j = m}} \left[\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \odot H(t_p) \right) \odot \left(\prod_{q \in S_j} \odot H(t_q) \right) \right] dt_1 \dots dt_n = 0$$

$$dt_1 \dots dt_n = 0$$

Esto implica inmediatamente que $a_0 = 0$. Por otro lado, puede

notarse que cada integral múltiple de la expresión anterior

representa un elemento homogéneo de distinto grado (i, j) en $\overline{A \otimes A}$.

Lo cual nos lleva directamente a que la anulación de la expresión

se verifica cuando y sólo cuando se da la de cada integral

múltiple. Luego entonces

$$\int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \#S_j = m}} \left[\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \odot H(t_p) \right) \otimes \left(\prod_{q \in S_j} \odot H(t_q) \right) \right] dt_1 \dots dt_n$$

$$= 0 \quad (3.5)$$

para $n \geq 2$ y para m entre 1 y $n-1$. Para proseguir el análisis, nos interesamos ahora en la sumatoria que se encuentra bajo el signo de integral. Primeramente, tenemos que para cada S_j se tiene $J_n \setminus S_j = \{i_1, \dots, i_{n-m}\}$ y $S_j = \{i_{n-m+1}, \dots, i_n\}$; más explícitamente, $i_1 < \dots < i_{n-m}$ e $i_{n-m+1} < \dots < i_n$, todos ellos distintos y cuya reunión es J_n . Luego, podemos emplear el lenguaje de permutaciones para expresar aquélla, esto es

$$\sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \#S_j = m}} \left[\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \odot H(t_p) \right) \otimes \left(\prod_{q \in S_j} \odot H(t_q) \right) \right]$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{n-m} \\ i_{n-m+1} < \dots < i_n}} \left[\begin{pmatrix} 1 & \dots & n-m & n-m+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_{n-m} & i_{n-m+1} & \dots & i_n \end{pmatrix} \left(\prod_{p=1}^{n-m} \odot H(t_p) \right) \otimes \left(\prod_{q=n-m+1}^n \odot H(t_q) \right) \right]$$

Aplicamos el corolario 1.3 del capítulo 2 para continuar

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-m} \leq n} C_{1,i_1} \dots C_{1,i_{n-m}} C_{1,2} \dots C_{1,n-m} \left[\left(\prod_{p=1}^{n-m} \odot H(t_p) \right) \otimes \left(\prod_{q=n-m+1}^n \odot H(t_q) \right) \right]$$

Sustituyendo esto en (3.5) obtenemos

$$\int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-m} \leq n} C_{1,i_1} \dots C_{1,i_{n-m}} C_{1,2} \dots C_{1,n-m}$$

$$\left[\left(\prod_{p=1}^{n-m} \odot H(t_p) \right) \otimes \left(\prod_{q=n-m+1}^n \odot H(t_q) \right) \right] dt_1 \dots dt_n = 0$$

Aplicamos, a continuación, el teorema de Fubini a la integral anterior para que las variables t_i conserven su índice ordenado en el producto de los $H(t)$

$$\int_0^t \dots \int_0^t \left[\sum_{n \geq i_{n-m} > \dots > i_1 \geq 1} C_{1,n-m}^{-1} \dots C_{1,2}^{-1} C_{1,i_{n-m}}^{-1} \dots C_{1,i_1}^{-1} \right.$$

$$\left. \left(a_n(t_1, \dots, t_n) \right) \right] \left[\prod_{p=1}^{n-m} \odot H(t_p) \right] \otimes \left[\prod_{q=n-m+1}^n \odot H(t_q) \right] dt_1 \dots dt_n = 0$$

Conviniendo que $\prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} = 1$, otra forma de presentar la ecuación anterior es

$$\int_0^t \dots \int_0^t \left[\prod_{k=2}^{n-m} C_{1,n-m-k+2}^{-1} \sum_{n \geq i_{n-m} > \dots > i_1 \geq 1} C_{1,i_{n-m}}^{-1} \dots C_{1,i_1}^{-1} \right.$$

$$\left. \left(a_n(t_1, \dots, t_n) \right) \right] \left[\prod_{p=1}^{n-m} \odot H(t_p) \right] \otimes \left[\prod_{q=n-m+1}^n \odot H(t_q) \right] dt_1 \dots dt_n = 0$$

Denotando

$$\rho_{n,m} = \sum_{n \geq i_{n-m} > \dots > i_1 \geq 1} C_{1,i_{n-m}}^{-1} \dots C_{1,i_1}^{-1}$$

y

$$\sigma_{n,m} = \left[\prod_{k=2}^{n-m} C_{1,n-m-k+2}^{-1} \right] \rho_{n,m}$$

llegamos a que la integral anterior se anula, según lo convenido, cuando y sólo cuando $\sigma_{n,m}(a) = 0$. Como esto debe verificarse para cada una de las integrales múltiples arrivamos, pues, al siguiente sistema infinito de ecuaciones

$$\{\sigma_{n,m}(a) = 0, \text{ para } n \geq 2 \text{ y } m \text{ entre } 1 \text{ y } n-1.$$

Las ecuaciones de este sistema no son independientes entre sí. Para reducirlo, apliquemos el corolario 1.7 del capítulo 2 y veremos que

$$\sigma_{n,1} = (C_{1,n}^m) \sigma_{n,n-1}$$

luego, tenemos el sistema reducido, denotando por $[]$ la función mayor entero menor o igual, siguiente

$$\{\sigma_{n,m}(a) = 0, \text{ para } n \geq 2 \text{ y } m \text{ entre } \left[\frac{n+1}{2} \right] \text{ y } n-1. \quad (3.6)$$

A partir de él debemos llegar a que $E_n(a) = a_n$ para $n \geq 2$. Una forma de expresar lo anterior, más útil a nuestros propósitos, es $(nE_n - n)a_n = 0$ para $n \geq 2$. Recordemos que

$$nE_n = \prod_{k=2}^n (1 - C_{1,n-k+2}^{-1}) = 1 + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1}$$

y, por ende,

$$nE_n - n = -(n-1) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1}$$

Exponemos a continuación la estrategia a seguir. El lector estará de acuerdo en que si logramos establecer las identidades

siguientes:

Para n impar:

$$nE_n - n = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^i C_{1,1-k+2}^{-1} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^n C_{1,n-k+1+1}^{-1} \right] \sigma_{n,n-i}$$

Para n par:

$$nE_n - n = \sum_{i=1}^{n/2-1} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^i C_{1,1-k+2}^{-1} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^n C_{1,n-k+1+1}^{-1} \right]$$

$$\sigma_{n,n-1} + (-1)^{n/2} \frac{n}{2} \left[\prod_{k=2}^{n/2} C_{1,\frac{n}{2}-k+2}^{-1} \right] \sigma_{n,n/2}$$

habremos, en virtud del sistema de ecuaciones (3.6), logrado nuestro objetivo.

Daremos la demostración para el caso impar; para el caso par, la forma de proceder es análoga y, por esto, se omitirá.

Antes de pasar a la demostración propiamente dicha advertamos que debido al convenio por el cual $C_{1,1} = 1$ podemos reescribir $\rho_{n,m}$ de la siguiente manera, más adecuada a nuestros propósitos

$$\rho_{n,m} = \sum_{\substack{n \geq j_{n-m-1} > \dots > j_1 \geq 2}} C_{1,j_{n-m-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + \sum_{\substack{n \geq 1 > \dots > 1 \geq 2}} C_{1,1}^{-1} \dots C_{1,1}^{-1}$$

(para $m = n-1$ la primera sumatoria se reducirá, por convenio, a 1).

Para n impar:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^n C_{1,n-k+1+1}^{-1} \right] \sigma_{n,n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^n C_{1,n-k+1+1}^{-1} \right]$$

$$\left[\prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} \right] \rho_{n,n-1}$$

Como consecuencia del corolario 1.1 del capítulo 2 tenemos que

$$\left[\prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} \right]^2 = 1.$$

Además

$$\prod_{k=i+1}^n C_{1,n-k+1+1}^{-1} \prod_{k=2}^1 C_{1,1-k+2}^{-1} = \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}. \text{ Así}$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^i (n-i) + (-1)^{n-i} i \prod_{k=2}^1 C_{1,n-k+2}^{-1} \right] \rho_{n,n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{n-i} i \prod_{k=2}^1 C_{1,n-k+2}^{-1} \rho_{n,n-1}$$

Cambiando en la segunda sumatoria el contador i por $n-i$ obtenemos

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1} \rho_{n,1}$$

Ahora bien, como consecuencia del corolario 1.6 del capítulo

2 tenemos que $\prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1} \rho_{n,1} = \rho_{n,n-1}$. Así

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \left[\sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{n \geq l_1 > \dots > l_1 \geq 2} C_{1,l_1}^{-1} \dots C_{1,l_1}^{-1} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + \\
&\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sum_{n \geq l_1 > \dots > l_1 \geq 2} C_{1,l_1}^{-1} \dots C_{1,l_1}^{-1}
\end{aligned}$$

Cambiando en la segunda sumatoria doble el contador i por $i-1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + \\
&\sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} (n-i+1) \sum_{n \geq l_{i-1} > \dots > l_1 \geq 2} C_{1,l_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,l_1}^{-1}
\end{aligned}$$

Cambiando ahora los índices l_k por j_k tenemos

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} +$$

$$\sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} (n-i+1) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (n-i) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} +$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} (n-i+1) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} +$$

$$(-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[(-1)^i (n-i) + (-1)^{i-1} (n-i+1) \right]$$

$$\sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + (-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} \left[(-1)(n-i) + n-i+1 \right]$$

$$\sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} + (-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} (-n+i+n-i+1) \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} +$$

$$(-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1} +$$

$$(-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n C_{1,n-k+2}^{-1}$$

$$= -(n-1) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \dots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \dots C_{1,j_1}^{-1}$$

$$= nE_n - n$$

De todo lo anterior concluimos, $\alpha \in \lambda(t)$. ■

§2. - LA FÓRMULA DE FRIEDRICH-MAGNUS

Definamos, como en la sección 2 del capítulo 1, tanto para $\bar{A}$ como para $\overline{A \otimes A}$, las series

$$\exp x = e + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

y

$$\log(e+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (3.7)$$

donde e representa al elemento identidad en cada álgebra, esto es, 1 si se trata de $\bar{A}$ y 1⊗1 si es $\overline{A \otimes A}$. Recuérdese que si x está en el ideal bilateral $\bar{A}^{(1)} = \overline{A \otimes (A \otimes A) \otimes \dots}$ entonces tanto $\exp x$ como $\log(1+x)$ convergen, esto es, son elementos de $\bar{A}$. Recuérdese también que para casos de convergencia se dan las identidades $\exp(\log(1+x)) = 1+x$ y $\log(\exp x) = x$; además, si $x \otimes y = y \otimes x$ entonces $\exp x \otimes \exp y = \exp(x+y)$ y $\log(1+x) \otimes (1+y) = \log(1+x) + \log(1+y)$.

090613

En lo que sigue nos interesará primordialmente la serie $\log$.

El problema de aplicar lo dicho en el párrafo anterior a las álgebras $\mathcal{A}(t)$ y $\mathcal{A}(t) \otimes \mathcal{A}(t)$ acontece al examinar la convergencia en ellas mismas; si ésta se da los problemas desaparecen. Para los elementos de $\mathcal{A}(t)$ de la forma $1+\beta$ con β en $\mathcal{A}(t)^{(1)} = \mathcal{A}(t) \cap \overline{\mathcal{A}}^{(1)}$ se da un importantísimo caso de convergencia en $\mathcal{A}(t)$ bajo la serie $\log$ que se examina a continuación.

Proposición 1.— Para toda α en $\mathcal{A}(t)$ de la forma

$$\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t a_n(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

se tiene que $\log \alpha$ está en $\mathcal{A}(t)$.

Demostración

— Tenemos que $\alpha = 1+\beta$ con

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t b_{1,n}(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

con $b_{1,n} = a_n$ para toda $n \geq 1$. Las potencias sucesivas de β estarán dadas por expresiones de la forma

$$\beta^m = \sum_{n=m}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t b_{m,n}(t_1, \dots, t_n) H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

las que por ser $\mathcal{A}(t)$ álgebra estarán en $\mathcal{A}(t)$. Nótese que la componente homogénea de menor grado en β^m debe de ser al menos de grado m . Por lo tanto, de (3.7) tenemos que $\log \alpha$ es

$$\log \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t \left[\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m} b_{m,n}(t_1, \dots, t_n) \right] H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n) dt_1 \dots dt_n$$

el cual evidentemente se encuentra en $\mathcal{A}(t)$. ■

Por ser Δ homomorfismo entre álgebras asociativas con unidad se tendrá que si para un $\alpha \in \mathcal{A}(t)$ se tiene $\log \alpha \in \mathcal{A}(t)$ entonces

$$\Delta(\log \alpha) = \log(\Delta \alpha) \quad (3.8)$$

Hasta ahora hemos tomado a t fijo. Sin embargo, conviene considerar a los elementos de $\mathcal{A}(t)$ y $\mathcal{A}(t) \otimes \mathcal{A}(t)$ como funciones en t . Luego podemos, por ejemplo, utilizar la derivada con respecto a t , $\frac{d}{dt}$, la cual se aplicará como es natural componente a componente en cada elemento. Esta derivada no necesariamente se encontrará en los espacios respectivos $\mathcal{A}(t)$ ó $\mathcal{A}(t) \otimes \mathcal{A}(t)$ pero se hallará en $\bar{\mathcal{A}}$ ó $\bar{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}}$ respectivamente. Finalmente, para la derivada del producto tensorial de dos elementos $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ de $\mathcal{A}(t)$ se dará, como puede comprobarse, la conocida regla

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \otimes \beta(t)) = \frac{d}{dt}\alpha(t) \otimes \beta(t) + \alpha(t) \otimes \frac{d}{dt}\beta(t) \quad (3.9)$$

A continuación se prueba el análogo continuo del teorema de Baker-Campbell-Hausdorff.

Teorema 2.- Sea $H(t)$ una función continua de $\mathbb{R}$ en los operadores acotados de un espacio de Hilbert G y que se anula sólo en un conjunto finito de puntos. Sea $U(t)$ la solución de

$$\frac{dU}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = I \quad (3.10)$$

donde I denota al operador identidad. Entonces, si $U(t)$ tiene un logaritmo $\Omega(t)$ dado por la serie (3.7) (poniendo I en lugar de e) y que ésta converge absolutamente en $\mathcal{A}$ entonces resulta que, existe un elemento $\psi(t)$ de $\mathcal{L}^f(t)$ (esto es, una sucesión de coeficientes ordenados convergentes y finito dimensionales) tal que $\Omega(t) = \Xi(\psi(t))$.

Demostración

La solución $U(t)$ de (3.10) está dada por la serie

$$U(t) = I + \int_0^t H(t_1) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} H(t_1) H(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} H(t_1) H(t_2) H(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \quad (3.11)$$

Para continuar examinemos la ecuación "diferencial" en $\mathcal{A}$ asociada

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = H(t) \otimes \alpha(t), \quad \alpha(0) = 1 \quad (3.12)$$

La solución de (3.12) es análoga a (3.11) y es

$$\alpha(t) = 1 + \int_0^t H(t_1) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} H(t_1) \otimes H(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} H(t_1) \otimes H(t_2) \otimes H(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \quad (3.13)$$

lo cual se comprueba derivando componente a componente. Al reescribir (3.13) en la forma

$$\alpha(t) = 1 + \int_0^t H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \theta_{1,2} \dots \theta_{n-1,n} H(t_1) \otimes \dots \otimes H(t_n)$$

$$dt_1 \dots dt_n \quad (3.14)$$

se vuelve claro que $\alpha(t)$ está en $\mathcal{A}^f(t)$. Y por la proposición 1 tenemos que $\log \alpha(t) \in \mathcal{A}^f(t)$. Derivemos $\alpha(t) \otimes \alpha(t)$ usando (3.9):

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \otimes \alpha(t)) = \frac{d}{dt} \alpha(t) \otimes \alpha(t) + \alpha(t) \otimes \frac{d}{dt} \alpha(t)$$

y por (3.12) tenemos, continuando:

$$= (H(t) \otimes \alpha(t)) \otimes \alpha(t) + \alpha(t) \otimes (H(t) \otimes \alpha(t))$$

$$= (H(t) \otimes 1 + 1 \otimes H(t)) \otimes (\alpha(t) \otimes \alpha(t))$$

Luego se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \otimes \alpha(t)) = (H(t) \otimes 1 + 1 \otimes H(t)) \circ (\alpha(t) \otimes \alpha(t)), \alpha(0) \otimes \alpha(0) = 1 \otimes 1$$

lo que comparado con (3.12) y teniendo en cuenta (3.14) nos permite sin más deducir que

$$\Delta(\alpha(t)) = \alpha(t) \otimes \alpha(t) \quad (3.15)$$

Finalmente, si $\omega(t) = \log \alpha(t)$ entonces aplicando sucesivamente (3.8) y (3.15) tenemos

$$\begin{aligned} \Delta(\omega(t)) &= \Delta(\log \alpha(t)) = \log(\Delta(\alpha(t))) = \log(\alpha(t) \otimes \alpha(t)) \\ &= \log((\alpha(t) \otimes 1) \circ (1 \otimes \alpha(t))) = \log(\alpha(t) \otimes 1) + \log(1 \otimes \alpha(t)) \\ &= (\log \alpha(t)) \otimes 1 + 1 \otimes \log \alpha(t) \\ &= \omega(t) \otimes 1 + 1 \otimes \omega(t) \end{aligned}$$

De donde que por el criterio de Friedrichs $\omega(t) = \log \alpha(t)$ está en $\lambda^f(t)$. Tomando la preimagen de $\omega(t)$ bajo Φ y llamándola $\psi(t)$ se tiene que $\psi(t) = \Phi^{-1}(\omega(t))$ está en $\Lambda^f(t)$. Pero aún hay más, dado que se tendrá que $\Xi(\psi(t)) = \Omega(t) = \log U(t)$ entonces $\psi(t)$ se encuentra además en $\mathfrak{U}^f(t)$ de lo cual concluimos que $\psi(t) \in \mathcal{L}^f(t)$ y $\Xi(\psi(t)) = \Omega(t)$. ■

Si $H(t)$ y $U(t)$ cumplen lo pedido por el teorema anterior es fácil conseguir una expresión para $\Omega(t)$ en términos de $H(t)$. Recordemos que $U(t)$ está dada por

$$U(t) = I + \int_0^t H(t_1) dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t \theta_{1,2} \dots \theta_{n-1,n} H(t_1) \dots H(t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

luego aplicando la serie $\log$ directamente a $U(t)$ obtenemos, calculando hasta el segundo término, que $\Omega(t)$ es

$$\Omega(t) = \int_0^t H(t) dt + \int_0^t \int_0^t \left[\theta_{1,2} - \frac{1}{2} \right] H(t_1) H(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$$

Como los coeficientes asociados a $\Omega(t)$ son ordenados esto permite, por el teorema de Fubini, reescribir la serie anterior en la forma

$$\Omega(t) = \int_0^t H(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \left[\theta_{1,2} - \frac{1}{2} \right] [H(t_1), H(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots$$

Y finalmente, integrando obtenemos

$$\Omega(t) = \int_0^t H(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t [H(t_1), H(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots \quad (3.16)$$

expresión a la que se le suele llamar la fórmula de Friedrichs-Magnus.

En [Wil] se calcula hasta el término de orden 4. Para obtener los términos de mayor orden es más conveniente usar la expresión para Ω obtenida en [MP]:

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t \frac{(-1)^{n-1} - \Theta_n}{n^2} \binom{n-1}{\Theta_n} [\dots [H(t_1), H(t_2)], \dots, H(t_n)] dt_1 \dots dt_n \quad (3.17)$$

donde Θ_n está dado por (2.18). El siguiente teorema nos da las propiedades básicas que satisface el operador Ω .

Teorema 3. - Sea $H(t)$ una función continua de $\mathbb{R}$ en los operadores acotados de un espacio de Hilbert y que se anula sólo en un conjunto finito de puntos. Sea $U(t, s)$ la familia a dos parámetros que satisface

$$\frac{dU(t, s)}{dt} = H(t)U(t, s), \quad U(t, t) = I$$

Entonces, si existe $\Omega(t, s)$ de manera que

$$\Omega(t, s) = \log U(t, s)$$

se tienen para Ω las siguientes propiedades

1) $\Omega(t, t) = 0$

2) $\Omega(t, s) * \Omega(s, \hat{r}) = \Omega(t, r)$

donde $x * y$ está dada por (1.15).

90613

CONCLUSIONES

Se ha probado que si $H(t)$ es continua y se anula sólo en un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}$ entonces, si la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dU}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = I$$

tiene un logaritmo $\Omega(t)$ dado por la serie

$$\log(I+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

y que ésta converge absolutamente, entonces $\Omega(t)$ está dado por la serie de integrales de productos de Lie siguiente

$$\Omega(t) = \int_0^t H(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} [H(t_1), H(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots$$

Entre los problemas que faltarían por resolver se encuentra el de determinar condiciones de convergencia global, esto es en todo $t \geq 0$, y absoluta para la serie anterior. En otro orden, sería importante determinar si los espacios lineales $\Lambda(t)$, $\lambda(t)$ y $\mathcal{L}(t)$ son álgebras de Lie bajo el conmutador definido a partir del producto de las álgebras respectivas en las que se hallan contenidos.

Estas y otras cuestiones más que permanecen abiertas serían abordadas en trabajos posteriores.

BIBLIOGRAFIA

- [A] ADELSBERGER, H. "Über unendliche diskrete Gruppen".
J. reine, u. angew Math., 163, (1930), 103-124.
- [B] BAKER, H.F. "Alternants and continuous groups".
Proceedings London Mathematical Soc., Vol. 3, (1904),
24-47.
- [C] CAMPBELL, J.E. "On a law of combination of Operators".
Proc. London Math. Soc. 29, (1898), 14-32.
- [F] FRIEDRICHS, K.O. "Mathematical aspects of the Quantum
Theory of Fields". Communications on pure and applied
Mathematics, Vol. VI, (1953), 1-72.
- [GR] GREENSPAN, S. y Richtmyer, R.D. "Expansion of the
Campbell-Baker-Hausdorff Formula by Computer".
Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XVIII,
(1965), 107-108.
- [H] HAUSDORFF, F. "Die symbolische Exponentialformel in der
Gruppentheorie". Ber. der Sächs. Akad. Wiss Leipzig, Math.
Naturwis. Kl, 58, (1906), 19-48.
- [HMS1] HUILLET, T., Monin, A. y Salut, G. "Lie algebraic
representation results for nonstationary evolution
operators". Math. Systems Theory 19, (1987), 205-226.
- [HMS2] HUILLET, T., Monin, A. y Salut, G. "Lie algebraic canonical
representations in nonlinear control systems". Math.
Systems Theory 20, (1987), 193-213.
- [HSW] HLAVATY, L., Steinberg, S. y Wolf, K.B. "Riccati Equations
and Lie Series". Preprint University of New Mexico,
Albuquerque, (1982).

- [J] JACOBSON, N. "Lie Algebras". John Wiley & Sons, Inc., (1962).
- [Kö] KÖTHE, G. "Topological Vector Spaces", Volumen 2. Springer Verlag, (1979).
- [Ku] KUCERA, J. "Solution in large of control problem $\dot{x} = (Au + Bv)x$ ". Czechoslovak Math. H., 17, (1967) No. 92, 91-96.
- [La] LAZARD, M. "Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie". Annales Sci. L'Ecole Normale Supérieure (3), 71, 101-190.
- [Ly] LYNDON, R.C. "On Burnside's problem" Trans. of the Amer. Math. Soc. 77, (1954), 202-215.
- [Mac] MACSYMA, Reference Manual, Project MAC mathlab Group, M.I.T., July 1977.
- [Mag1] MAGNUS, W. "A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside". Annals of Mathematics, 52, (1950), 111-126.
- [Mag2] MAGNUS, W. "On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator". Communications on pure and applied Mathematics Vol. VII, (1954), 649-673.
- [MKS] MAGNUS, W., KARRAS, A. y SOLITAR, D. "Combinatorial Group Theory". Dover Publications, Inc., (1966).
- [MP] MIELNIK, B.; PLEBAŃSKY, J. "Combinatorial approach to Baker-Campbell-Hausdorff exponents". Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XII, No. 3, (1970), 215-254.
- [NW1] NORMAN, E. y WEI, J. "Lie algebraic solution of Linear differential equations", J. Mathematical Phys. 4, (1963), 575-581.
- [NW2] NORMAN, E. y WEI, J. "On global representations of

- solutions of Linear differential equations as a product of exponentials". Proc. Amer. Math. Soc., 15, (1964), 327-334.
- [PRF] PAVELLE, R., Rothstein, M. y Fitch, J. "Computer Algebra". Scientific American 245, No. 6, (1981).
 - [PRS] PULIDO, G., Rodríguez, G. y Suárez, R. "Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff". Cuadernos Universitarios UAM-Azcapotzalco 16, (1985).
 - [R] RUGH, W. "Nonlinear System Theory". The Johns Hopkins University Press, Baltimore (1981).
 - [S1] STEINBERG, S. "Applications of the Lie Algebraic Formulas of Baker, Campbell, Hausdorff, and Zassenhaus to the Calculation of Explicit Solutions of Partial Differential Equations". Journal of Differential Equations 26, (1977), 404-434.
 - [S2] STEINBERG, S. "Lie Series and Nonlinear Ordinary Differential Equations". Preprint University of New Mexico, Albuquerque, (1982).
 - [We] WEI, J. "Note on the global validity of the Baker-Hausdorff and Magnus theorems". J. Mathematical Phys., 4, (1963), 1337-1341.
 - [Wic] WICHMAN, E. "Note on the Algebraic aspect of the Integration of a System of Ordinary Linear Differential Equations" J. Mathematical Phys. 2, (1961), 876-880.
 - [Wil] WILCOX, R.M. "Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics". Journal of Mathematical Physics. Vol. 8. No. 4, (1967), 962-981.