Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA- IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ANILLOS PURO-SEMISIMPLES Y PRERRADICALES

Tesis que presenta
Eder Santiago Martelo Gómez
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González

Jurado calificador:
Presidente: Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía — Hugo A. Rincón M.
Secretario: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González — R. Fernández G.
Vocal: Dr. Carlos Enrique Signoret Poillon

Ciudad de México, Julio de 2016

Índice general

Agradecimientos

Hace dos años decidí dejar todo lo que conocía y tenía en mi país Colombia, y me embarqué en un viaje tratando de conseguir un mejor futuro en éste, mi nuevo hogar, México. No puedo creer que el momento de culminar esta etapa haya lllegado, miro hacia atrás y me lleno de satisfacción y nostalgia por todos los logros que he alcanzado. Dejar mi Colombia querida no fue fácil pero si que valió la pena ya que en este hermoso país aprendí tanto que sólo tengo palabras de agradecimiento, gracias México.

En segundo lugar, quiero agradecer a toda mi familia por todo su apoyo incondicional desde el primer momento que decidí tomar este camino tan lejos de todos ellos. A mi madre Mary Luz Gómez le agradezco por siempre darme la fortaleza en los momentos que más necesitaba. Espero que hoy, esas lágrimas que una vez derramaste por tristeza al verme partir se conviertan en lágrimas de orgullo y felicidad porque he cumplido un logro más en mi carrera profesional. A mi Padre Santiago Martelo, por enseñarme que siempre hay que trabajar fuerte para lograr lo que se quiere, y que para triunfar hay que estudiar. Gracias mamá y papá por brindarme siempre su apoyo y por el amor que sé siempre me han tenido. A mi hermano Hernán Darío por su cariño sincero y porque sé que siempre puedo contar él en las buenas y en las malas. A mi hermano, Edwin, le agradezco por siempre tomar ese rol de hermano mayor y querer siempre lo mejor para mí, gracias por tus consejos y tu apoyo emocional. A mi hermano Efraín que aunque nunca hemos tenido la mejor relación que un hermano podría desear, gracias porque sé que de una u otra forma puedo contar contigo y deseo que tengas muchos éxitos en los proyectos que tienes.

A la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, de la cual me siento orgulloso de ser estudiante. Al Departamento de Matemáticas y a sus profesores de los cuales me llevo muy buenos recuerdos.

A la Maestra Iseo González, le agradezco por brindarme todo su apoyo desde el primer el día que llegue a la universidad. Sin usted no hubiese sido posible llegar hasta donde estoy. Siempre con la sencillez y amabilidad que la caracteriza, me hizo sentir como en casa.

A mi asesor, el Doctor Rogelio Fernández-Alonso de quién he aprendido mucho, tengo mucho que agradecer desde que me dio su voto de confianza para trabajar con él, a pesar de que el tiempo jugaba en contra. Gracias por estar siempre presente en mi crecimiento académico a lo largo de mi paso por la maestría, por su paciencia y por su dedicación al ayudarme a sacar este proyecto adelante.

A la Doctora Patricia Saavedra por brindarme su apoyo en los momentos más complicados que tuve al estar tan lejos de mi familia. De verdad, muchas gracias todo sus consejos y por todo su apoyo incondicional.

A los Doctores Carlos Signoret y Hugo Rincón por haberse tomado el tiempo de leer este trabajo, además de todas las sugerencias que dieron para la mejora del mismo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico.

A todos muchas gracias.

E.S. Martelo Gómez

Resumen

Para un anillo R asociativo con unidad, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es semisimple.
(2) Todo R-módulo es inyectivo.
(3) La retícula de prerradicales R-pr es booleana finita.
(4) Todo R-módulo es semisimple.

Sin embargo, si se considera R un anillo puro-semisimple izquierdo, esto equivale a que todo R-módulo izquierdo es puro-inyectivo; más aún, se prueba que la condición de ser puro-semisimple es equivalente a que todo R-módulo izquierdo es una suma directa de módulos finitamente generados. Por otro lado, aunque los resultados obtenidos acerca de la retícula de prerradicales de esta clase de anillos no son abundantes, en este trabajo se da una cota para la cardinalidad de dicha retícula y también se proponen estudiar los anillos puro-semisimples u otras clases de anillos relacionadas por medio de una conexión de Galois correspondiente a una relación entre módulos y sucesiones exactas.

Introducción

En la Teoría de Anillos y Módulos se estudian clases de anillos definidos con ciertas propiedades. Muchos resultados importantes a lo largo de la historia del Álgebra se centran en caracterizar anillos por medio de su categoría de módulos, y en particular en México a partir de los trabajos de F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso y C.Signoret ([**17**],[**18**],[**19**]), por medio de su retícula de prerradicales. Un caso concreto se remite a los anillos semisimples artinianos, los cuales han sido objeto de estudio hace varias décadas, y para los cuales se ha encontrado su estructura, descrita por medio del Teorema de Wedderburn-Artin en términos de anillos de matrices con coeficientes en un anillo con división. Se puede decir que se tiene una información muy completa acerca de este tipo de anillos, tanto desde el punto de vista de su categoría de módulos, como el de su retícula de prerradicales, que se caracteriza por ser una retícula booleana finita.

Este trabajo pretende reseñar el estudio de una clase más amplia de anillos, los anillos puro-semisimples, de tal forma que éste pueda conducir a estudiar nuevas clases de anillos. Si bien un anillo puro-semisimple izquierdo tiene muchas formas de ser caracterizado, la que se tendrá en cuenta en el desarrollo de este proyecto se relaciona con el tipo de sucesiones exactas de módulos izquierdos que se escinden. Esta clase de anillos ha sido objeto de estudio a lo largo de los años, pero la mayor parte de los resultados que se tienen giran alrededor de caracterizaciones por medio de su categoría de módulos; por ejemplo, se sabe que los anillos puro-semisimples izquierdos y derechos son precisamente los anillos de tipo de representación finita, es decir, aquellos con un número finito de clases de isomorfismos de módulos izquierdos y derechos finitamente generados e inescindibles (ver [**2**],[**10**],[**21**]). El enfoque que se quiere realizar está dirigido, entre otras cosas, a dar caracterizaciones para esta clase de anillos por medio de su retícula de prerradicales.

El primer capítulo establece conceptos y propiedades generales de la Teoría de Categorías y Teoría de Retículas. Esto permitirá contar con los requisitos necesarios para introducir a los prerradicales. Este capítulo termina con una sección sobre conexiones de Galois, que brindará una nueva forma de abordar el estudio de los anillos puro-semisimples y otras clases de anillos.

El segundo capítulo se centra en la Teoría de Módulos y Prerradicales, dando a conocer teoremas fundamentales en ambas teorías, los cuales serán de gran herramienta para el desarrollo de capítulos posteriores. Cabe notar que las secciones referidas a la Teoría de Módulos, fueron tomadas de los capítulos 2, 3 y 4 de [**1**], en caso de que el lector desee obtener más información al respecto.

El tercer capítulo, da como referencia las caracterizaciones conocidas sobre los anillos semisimples en relación a su categoría de módulos y su retícula de prerradicales; Enunciando teoremas importantes como el de Wedderburn-Artin y enfocándose a mostrar que un anillo R es semisimple si y sólo si todo R-módulo es inyectivo, lo cual es equivalente a que toda sucesión exacta de R-módulos se escinde; todo lo anterior equivalente a que su retícula de prerradicales, R-pr sea booleana finita. Este capítulo es de suma importancia puesto que muestra el paso inicial para el estudio de los anillos puro-semisimples.

El cuarto capítulo está dirigido al estudio de los anillos puro-semisimples, pasando por una parte introductoria sobre el producto tensorial y un breve estudio sobre límites directos de módulos. La sección 4.3 propone mostrar teoremas importantes de módulos planos y relacionarlos con el concepto de una sucesión exacta pura. La sección 4.4 está dedicada al estudio de los anillos puro-semisimples, partiendo de que un anillo es puro-semisimple izquierdo si toda sucesión exacta pura de módulos izquierdos se escinde. La mayoría de resultados presentados en esta sección muestran caracterizaciones de los anillos puro-semisimples por medio de su categoría de módulos y están basados sobre teoremas encontrados en el artículo de Birge Huisgen-Zimmermann (ver, [**14**]). Esta sección finaliza mostrando que para un anillo R puro-semisimple, existe una biyección entre la retícula de prerradicales, R-pr y un conjunto, lo cual brinda una cota para la cardinalidad de este conjunto. Este capítulo finaliza con la introducción de una herramienta alterna que puede servir como material para el estudio de propiedades relativas a esta clase de anillos y otras clases de anillos relacionadas. Esta herramienta se construye con una conexión de Galois, que a su vez define dominios de planitud y de pureza.

Capítulo 1

Categorías, copos y retículas

1.1. Categorías

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de

1. Una clase de objetos, denotada por $Ob(\mathcal{C})$
2. Para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ de flechas o morfimos,
3. Para cada terna (A, B, C) de objetos, una función

$$\circ\colon Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

llamada composición.

Se escribirá $A \to B$ para un elemento arbitrario de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces se denotará por $f\colon A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.

Ahora bien, se deben cumplir las siguientes propiedades:

4. Si A, A', B, B' son objetos de $\mathcal{C}$ tales que
$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') \neq \emptyset$$
Entonces, $A = A'$ y $B = B'$; esto es, cada morfismo $f : A \to B$ tiene un único dominio A y un único codominio B.
5. Para cada objeto A existe un morfismo $id_A : A \to A$ llamada identidad de A. Estas flechas cumplen que si $f : B \to C$ entonces $f \circ id_B = f = id_C \circ f$
6. La composición es asociativa: Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son morfismos, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
En muchos casos se usará la notación gf para refererirse a $g \circ f$.

La notación $A \in \mathcal{C}$ significará $A \in Ob(\mathcal{C})$ y la clase de morfismos de $\mathcal{C}$ será escrita por $Mor(\mathcal{C}) = \bigcup\limits_{A,B\in\mathcal{C}} Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $Ob(\mathcal{C})$ es un conjunto se dice que la categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña.*

DEFINICIÓN 1.1.3. Un *morfismo* $f : A \to B$ en una categoría es un *isomorfismo* si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Si existe un isomorfismo $A \to B$ se dice que A es isomorfo a B y se escribe $A \simeq B$.

OBSERVACIÓN 1.1.4. Se deben tener en cuenta las siguientes afirmaciones:

- La composición de isomorfismos es un isomorfismo
- La relación **ser isomorfo a** establece una relación de equivalencia en los objetos de una categoría
- Si $f : A \to B$ es un ismorfismo y $g, h : B \to A$ cumplen que $g \circ f = id_A = h \circ f$ y $f \circ g = id_B = f \circ h$, entonces $g = h$.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, entonces su clase de morfismos es un conjunto, pues es una unión de de conjuntos indicada sobre un conjunto.

EJEMPLO 1.1.5. Una clase de objetos donde los únicos morfismos son las identidades. A esta categoría se le conoce como *discreta*

EJEMPLO 1.1.6. La categoría $\mathbf{0}$, que no consta de ningún objeto y ningún morfismo.

EJEMPLO 1.1.7. La *categoría discreta* $\mathbf{1}$, que consta de un único objeto y su identidad.

EJEMPLO 1.1.8. La categoría $\mathbf{2}$, que consta de objetos $*, \star$ y de una único morfismo $* \to \star$ además de las dos identidades.

EJEMPLO 1.1.9. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Considere $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, la cual tiene como objetos a los pares (C, D) donde $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$, y sus morfismos $(C, D) \to (C', D')$ son pares (f, g) donde $f : C \to C'$ y $g : D \to D'$ son morfismos. La composición se define coordenada a coordenada y finalmente considerando $id_{C \times D} = (id_C, id_D)$ es claro que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría, llamada *categoría producto.*

EJEMPLO 1.1.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Considere $\mathcal{C}^{op}$, la cual consta de los mismos objetos de $\mathcal{C}$, pero cumple que $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$, y la composición se define como $f \circ_{op} g := g \circ f$ para todo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en $\mathcal{C}$. Tomando las mismas identidades en $\mathcal{C}^{op}$ que en $\mathcal{C}$, se tiene que $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría, llamada *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$. Observe que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

DEFINICIÓN 1.1.11. Una categoría $\mathcal{C}$ es una *subcategoría* de una categoría $\mathcal{D}$ si se cumple que:

1. $Ob(\mathcal{C}) \subset Ob(\mathcal{D})$

2. $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \subset Hom_{\mathcal{D}}(A,B)$ para todo $A, B \in Ob(\mathcal{C})$
3. Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$, entonces se tiene que $g \circ_{\mathcal{D}} f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ y además $g \circ_{\mathcal{C}} f = g \circ_{\mathcal{D}} f$
4. Si $A \in Ob(\mathcal{C})$ entonces $id_A^{\mathcal{D}} \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ y cumple que $id_A^{\mathcal{C}} = id_A^{\mathcal{D}}$

Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{D}$, se escribirá, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Una subcategoría $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ es *plena* si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) = Hom_{\mathcal{D}}(A,B)$.

Definición 1.1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $A \in \mathcal{C}$ es *inicial* (resp. *final*) si para todo $X \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $A \to X$ (resp. $X \to A$). Un objeto que es inicial y final se le llama *objeto cero*.

Observación 1.1.13. Un objeto inicial en $\mathcal{C}$ es un objeto final en $\mathcal{C}^{op}$ y un objeto final en $\mathcal{C}$ es un objeto inicial en $\mathcal{C}^{op}$. De esta forma, un objeto cero en $\mathcal{C}$ es también objeto cero en $\mathcal{C}^{op}$.

Proposición 1.1.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si existe un objeto inicial (o final) en $\mathcal{C}$ entonces es único salvo isomorfismo. En particular, si existe un objeto cero entonces es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean A, A' objetos iniciales en $\mathcal{C}$. Entonces, al ser A inicial existe un único morfismo $f : A \to A'$. Sólo basta demostrar que f es un isomorfismo. Puesto que A' es también inicial, existe un único morfismo $g : A' \to A$, pero $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ y ya que A es inicial se debe tener $g \circ f = id_A$. De la misma forma se prueba que $f \circ g = id_{A'}$ y así f es un isomorfismo. La unicidad del objeto final se deduce de la la unicidad del objeto inicial en $\mathcal{C}^{op}$. $\square$

Categorías concretas: Los siguientes ejemplos son categorías cuyos objetos son conjuntos con estructura adicional, y cuyos morfismos son funciones que respetan la estructura.

Ejemplo 1.1.15. **Set**, la categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones. Hay un único objeto inicial que es el conjunto vacío, $\emptyset$. Los objetos finales son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$. En particular, no hay objeto cero en **Set**.

Ejemplo 1.1.16. **Mon, Grp, Ab**: Las categorías de monoides, grupos y grupos abelianos con morfismos de monoides, grupos y grupos abelianos respectivamente. Observar que se tiene una una cadena de subcategorías plenas **Ab** $\subset$ **Grp** $\subset$ **Mon**. En **Mon** los objetos iniciales y finales (por tanto cero) son los monoides triviales $\{e\}$. Por lo tanto, también en **Grp** y **Ab**.

Ejemplo 1.1.17. **Rng**, la categoría de anillos (no necesariamente con unidad) y morfismos de anillos. Los objetos iniciales y finales (por tanto cero) son los anillos triviales $\{0\}$.

Ejemplo 1.1.18. **Ring**, la categoría de anillos con unidad y morfismos de anillos que respetan la unidad. Observe que $\mathbf{Ring} \subset \mathbf{Rng}$ es una subcategoría no plena. Los objetos finales son los anillos triviales $\{0\}$. Éste no es un objeto inicial pues el cero debe ir al cero y el uno al uno y en este caso particular $1 = 0$. El anillo $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial.

Ejemplo 1.1.19. **CRing**, la categoría de anillos conmutativos con unidad y morfismos de anillos que respetan la unidad. Es una subcategoría plena de **Ring**.

Ejemplo 1.1.20. **Fld**, la categoría de campos y morfismos de campos. Es una subcategoría no plena de **CRing**. No hay objetos iniciales y finales, puesto que no existen morfismos entre campos de diferente característica

Ejemplo 1.1.21. R-**Mod** (resp. **Mod**-R), la categoría de módulos unitarios izquierdos (resp. Derechos) sobre un anillo R con unidad y morfismos de R-módulos. Si $A, B \in R$-Mod (o en Mod-R,) se denotará por $Hom_R(A, B)$ a $Hom_{R\text{-Mod}}(A, B)$

Ejemplo 1.1.22. **Top**, la categoría de espacios topológicos y las funciones continuas.

1.1.1. Monomorfismos y epimorfismos.

Definición 1.1.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $m : A \to B$ de $\mathcal{C}$ es un *monomorfismo*, si para todo $X \in \mathcal{C}$ y $f, g : X \to A$ morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $m \circ f = m \circ g$, se tiene que $f = g$.

Dualmente, un morfismo $e : A \to B$ es un *epimorfismo*, si para todo $Y \in \mathcal{C}$ y $f, g : B \to Y$ morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $f \circ e = g \circ e$ se tiene que $f = g$.

Observación 1.1.24. Las siguientes propiedades se pueden verificar de manera sencilla:

- La composición de monomorfismo (resp. epimorfismo) es un monomorfismo (resp. epimorfismo).
- Si $f \circ g$ es un monomorfismo, entonces g es un monomorfismo.
- Si $f \circ g$ es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.

,

Ejemplo 1.1.25. En **Set**, los monomorfismos son las funciones inyectivas y los epimorfimos son las funciones suprayectivas.

Ejemplo 1.1.26. En **Top**, los monomorfismos son las funciones continuas inyectivas y los epimorfismos son las funciones continuas suprayectivas.

Ejemplo 1.1.27. En R-**Mod**, los monomorfismos son los morfismos inyectivos y los epimorfismos son los morfismos suprayectivos

Ejemplo 1.1.28. En **Ring**, los monomorfismos son los morfismos inyectivos de anillos. Pero, los epimorfismos no tienen que ser suprayectivos: La inclusión $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo de anillos que claramente no es suprayectiva.

1.1.2. Funtores.

Definición 1.1.29. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un *funtor covariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ consta de una clase funcional $F_O : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$, y para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ una función $F_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(F_O(A), F_O(B))$. Se denotará a F_O y $F_{A,B}$ por F. Se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Si $A \in Ob(\mathcal{C})$ entonces $F(id_A) = id_{F(A)}$
2. Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son morfismos en $\mathcal{C}$ entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

A menudo se omitirá el paréntesis: Se colocará FA en vez de $F(A)$ y Ff en vez de $F(f)$.

Un *funtor contravariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ (o equivalentemente, un funtor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$).

Explícitamente, un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consta de una clase funcional $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$, y para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ una función $F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FB, FA)$. Se debe cumplir que $F(id_A) = id_{FA}$ para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, y si $A \to^f B \to^g C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. Se define su composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, de la siguiente forma: Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $(GF)(A) := G(F(A))$. Si $f : A \to A'$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ entonces $GF(f) : GF(A) \to GF(A')$ se define como $(GF)(f) := G(F(f))$. Esto hace de $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un funtor.

Definición 1.1.30. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es *fiel (resp. pleno)* si para todo $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, la función $F_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ es inyectiva (resp. suprayectiva).

Proposición 1.1.31. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a. *Si* $f\colon C \to C'$ *es un isomorfismo en* $\mathcal{C}$ *entonces* Ff *es un isomorfismo en* $\mathcal{D}$. *Además,* $(Ff)^{-1} = F(f^{-1})$
b. *Si* F *es un funtor fiel, entonces refleja monomorfimos y epimorfismos. Esto es, si* f *es un morfismo de* $\mathcal{C}$ *tal que* Ff *es un monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces* f *es un monomorfismo (resp. epimorfismo).*
c. *Si* F *es un funtor fiel y pleno, entonces refleja isomorfismos. Esto es, si* f *es un morfismo tal que* Ff *es un isomorfismo, entonces* f *es un isomorfismo.*

Demostración. a) Si existe $g\colon C' \to C$ tal que $gf = id_C$ y $fg = id_{C'}$, entonces $Fg \circ Ff = F(gf) = F(id_C) = id_{FC}$. Análogamente, se verifica que $Ff \circ Fg = id_{FC'}$. Por lo tanto, $F(g) = F(f^{-1})$ es la inversa de Ff.

Para probar b) Sea f un morfismo de $\mathcal{C}$ y suponga que $fg = fh$. Entonces, $Ff \circ Fg = Ff \circ Fh$. Dado que Ff es un monomorfismo, entonces $Fg = Fh$. Pero, F es fiel, por lo tanto $g = h$. De la misma forma, se puede probar que si Ff es un epimorfismo entonces f es epimorfismo.

c) Sea $f\colon C \to C'$ morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $Ff\colon FC \to FC'$ es un isomorfismo. Puesto que F es pleno, existe $g\colon C' \to C$ tal que $(Ff)^{-1} = Fg$. As,

$$F(id_C) = id_{FC} = Fg \circ Ff = F(gf)$$

Dado que F es fiel, se tiene que $id_C = gf$. Del mismo modo, $fg = id_{C'}$ y por tanto f es un isomorfismo.

□

A continuación se dan algunos ejemplos de funtores:

Ejemplo 1.1.32. Toda categora $\mathcal{C}$ define un funtor $id_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, llamado *funtor identidad*, que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ le asocia A y a cada morfismo f de $\mathcal{C}$ le asocia f.

Ejemplo 1.1.33. Sea $D \in \mathcal{D}$. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es constante D si $FC = D$ para todo $C \in \mathcal{C}$ y si $Ff = id_D$ para todo morfismo f de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.1.34. Una subcategoría $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ define un funtor $i\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, el funtor inclusión. Este funtor siempre es fiel. Es pleno si y sólo si $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{D}$.

1.1.3. Transformaciones naturales.

Definición 1.1.35. Dados dos funtores $S, T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una *transformación natural* $\tau\colon S \to T$ es una función que asigna a cada objeto c

de $\mathcal{C}$ un morfismo $\tau_c = \tau c\colon Sc \to Tc$ de $\mathcal{D}$ tal que para todo morfismo $f\colon c \to c'$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c' & Sc' \arrow[r, "\tau c'"] & Tc' \end{tikzcd}$$

cuando esto se cumple, se dice que $\tau_c\colon Sc \to Tc$ es natural en c.

Una transformación natural es llamada a menudo un morfismo de funtores. Una transformación natural τ con toda componente τc invertible en $\mathcal{D}$ es llamada una equivalencia natural o un isomorfismo natural. En símbolos se expresaría, $\tau\colon S \cong T$.

Observación 1.1.36. Sean $\mathcal{C}$, y $\mathcal{D}$ dos categorías. Considere todos los funtores $R, S, T, ...\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Si $\sigma\colon R \to S$ y $\tau\colon S \to T$ son transformaciones naturales, entonces para cada $c \in \mathcal{C}$ se define la composición $(\tau \cdot \sigma)c = \tau c \circ \sigma c$, la cual es la componente en c de la transformación $\tau \cdot \sigma\colon R \to T$.

Para ver que $\tau \cdot \sigma$ es natural, sea $f\colon c \to c'$ un morfismo en C y considere el diagrama

$$\begin{tikzcd} Rc \arrow[r, "Rf"] \arrow[d, "\sigma c"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\tau\cdot\sigma)c"'] & Rc' \arrow[d, "\sigma c'"] \arrow[dd, bend left=60, "(\tau\cdot\sigma)c'"] \\ Sc \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\tau c"'] & Sc' \arrow[d, "\tau c'"] \\ Tc \arrow[r, "Tf"] & Tc' \end{tikzcd}$$

Dado que σ y τ son transformaciones naturales, los dos cuadros pequeños son conmutativos. De ahí, el diagrama anterior conmuta y por tanto $\tau \cdot \sigma$ es natural.

Esta composición de transformaciones es asociativa; más aún, tiene para cada funtor T una identidad, $\mathbf{1}_T\colon T \to T$ con componentes $\mathbf{1}_T c = \mathbf{1}c$.

Por tanto, dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se puede construir formalmente una categoría funtor $\mathcal{C}^{\mathcal{D}} = Funt(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ con objetos los funtores $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y morfismos las transformaciones naturales entre tales funtores.

Además de esta composición, existe otra operación entre transformaciones naturales llamada, producto estrella.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "F"'] \arrow[dd, bend right=60, "HF"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "G"] \arrow[dd, bend left=60, "KG"] \\
\mathcal{B} \arrow[d, "H"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "K"] \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Si $\tau\colon F \to G$ y $\sigma\colon H \to K$ son transfromaciones naturales entonces se define

$$\sigma \star \tau\colon HF \to HG$$

de forma de que para cada $A \in \mathcal{A}$ se defina un morfismo en $\mathcal{C}$ por

$$(\sigma \star \tau)_A\colon (HF)A \to (KG)A$$

Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$
FA \xrightarrow{\tau_A} GA \qquad
\begin{tikzcd}
(HF)A \arrow[r, "H(\tau_A)"] \arrow[d, "\sigma_{FA}"'] & (HG)A \arrow[d, "\sigma_{GA}"] \\
(KF)A \arrow[r, "K(\tau_A)"'] & (KG)A
\end{tikzcd}
$$

y defina

$$
\begin{aligned}
(\sigma \star \tau)_A &:= K(\tau_A) \circ \sigma_{FA} \\
&= \sigma_{GA} \circ H(\tau_A)
\end{aligned}
$$

De esta forma, $(\sigma \star \tau)_A$ es natural en A y esto implica que $\sigma \star \tau\colon HF \to KG$ es natural.

1.1.4. Funtores Adjuntos.

DEFINICIÓN 1.1.37. Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Se dice que $\langle F, G\rangle$ es un *par adjunto*, si para cada $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$, se tiene una biyección entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB)$.

DEFINICIÓN 1.1.38. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas. Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor covariante. Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una *sucesión exacta corta* de objetos de $\mathcal{C}$. Entonces

1. F es exacto, si $0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$ es de nuevo sucesión exacta.
2. F es exacto derecho, si si $FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC \longrightarrow 0$ es de nuevo sucesión exacta.

3. F es exacto izquierdo, si si $0 \longrightarrow FA \longrightarrow FB \longrightarrow FC$ es de nuevo sucesión exacta.

Es claro que la definición es análoga para cuando F es contravariante.

TEOREMA 1.1.39. *Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores entre las categorías abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Si $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto Entonces, G es exacto izquierdo y F es exacto derecho. Además, F preserva coproductos y G preserva productos.*

EJEMPLO 1.1.40. Considere $\mathcal{C} = R$-Mod y $\mathcal{D} = S$-Mod. Sea ${}_SU_R$ un bimódulo y considere

$$F = U \otimes_R \_\_$$

y

$$G = \mathrm{Hom}_S(U, \_\_)$$

Es decir, $\mathrm{Hom}(U \otimes A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(U, B))$

Nota: F es exacto derecho pero es adjunto izquierdo y G es exacto izquierdo y es adjunto derecho.

TEOREMA 1.1.41. *Dado un par de funtores $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ son equivalentes*

(a) *$\langle F, G\rangle$ es un par adjunto*
(b) *Existen transformaciones naturales*

$$\varepsilon\colon FG \to \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \quad y \quad \eta\colon \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to GF$$

que cumplen lo siguiente
(i) $(G \star \varepsilon) \circ (\eta \star G) = \mathbf{1}_G$
(ii) $(\varepsilon \star F) \circ (F \star \eta) = \mathbf{1}_F$

1.1.5. Productos y coproductos. En Teoría de Categorías, el producto de dos (o más) objetos es una noción que captura la esencia detrás de otras construcciones en otras áreas de las matemáticas tales como producto cartesiano, el producto directo de grupos, de anillos y el prodcuto de espacios topológicos, entre otros. Esencialmente el producto de una familia de objetos es el "más general"de los objetos que admite morfismos a cada uno de los objetos dados.

DEFINICIÓN 1.1.42. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, X_1, X_2 objetos en $\mathcal{C}$. Un objeto X es el *producto* de X_1 y X_2 denotado $X_1 \times X_2$ si y sólo si satisface la siguiente propiedad universal: Existen morfismos $\pi_1\colon X \to X_1, \pi_2\colon X \to X_2$, llamadas proyecciones tal que para cualquier objeto Y y un par de morfismos $f_1\colon Y \to X_1, f_2\colon Y \to X_2$ existe un único morfismo $f\colon Y \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

el único morfismo f recibe el nombre de morfismo producto de f_1 y f_2 y se denota por $\langle f_1, f_2 \rangle$.

Se acaba de definir el producto binario. En lugar de dos objetos considere una familia arbitraria de objetos indiciada por algún conjunto I. Entonces, se tiene lo siguiente:

Definición 1.1.43. Un objeto X es el producto de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ si y sólo si existen morfismos $\pi_i \colon X \to X_i$, tal que para cualquier objeto Y y una familia de morfismos $f_i \colon Y \to X$ indicados por I, existe un único morfismo $f \colon Y \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $i \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\pi_1"] \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i
\end{tikzcd}
$$

el producto es denotado por $X = \prod_{i \in I} X_i$

Por otro lado, el coproducto o suma categórica de dos (o más) objetos es una noción que captura la esencia detrás de otras construcciones en otras áreas de las matemáticas tales como la unión disjunta en conjuntos y de espacios topológicos, el producto libre de grupos, la suma directa de módulos y espacios vectoriales, entre otras. El coproducto de una familia de objetos es esencialmente el menos general de los objetos en el cual cada uno de los objetos de la familia dada admite un morfismo. El coproducto es la noción dual del producto categórico, esto es, la definición de coproducto es la misma que la de producto sólo que con la direccin de las flechas invertidas.

Definición 1.1.44. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$. Un objeto X es el *coproducto* de dicha familia si y sólo si existen morfismos $\iota_i \colon X_i \to X$, llamadas inyecciones canónicas, tal que para cualquier objeto Y y una familia de morfismos $f_i \colon X_i \to Y$ indicados por I, existe un único morfismo $f \colon X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ X_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "f_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

y el coproducto X es denotado por $\bigoplus_{i\in I} X_i$

Si la familia consta de dos objetos X_1, X_2, el coproducto es $X_1 \oplus X_2$ y el diagrama toma la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & X_1 \bigoplus X_2 \arrow[u, dashed, "f"] & X_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

1.2. Copos y retículas

1.2.1. Conjuntos parcialmente ordenados. La mayor parte de los resultados de esta sección pueden ser encontrados en [**13**] para mayor información.

Observación 1.2.1. Todo lo desarrollado en esta sección se puede expresar para clases en vez de conjuntos.

Definición 1.2.2. Una relación " $\leq$ "sobre un conjunto P es un *orden parcial* si satisface las siguientes condiciones:

1. *Reflexiva* : Para todo $a \in P$ se tiene que $a \leq a$
2. *Antisimétrica*: Para todo $a, b \in P$, si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
3. *Transitiva*: Para todo a, b, c elementos de P, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

   En este caso, a la pareja $\langle P, \leq\rangle$ se le llama *conjunto parcialmente ordenado o copo.*

   Se denotará $a \geq b$ a la expresión $a \leq b$. También se usará la notación $a < b$ $(b > a)$ para decir que $a \leq b$ y $a \neq b$ $(b \geq a$ y $b \neq a)$

Definición 1.2.3. Sean $\langle P, \leq\rangle$ y $\langle Q, \preceq\rangle$ dos copos y sea $f\colon P \to Q$ una función. Entonces,

1. f es un *morfismo de copos que preserva orden* si para todo $a, b \in P$ con $a \leq b$ se tiene que $f(a) \preceq f(b)$.

2. f es un *morfismo de copos que invierte orden* si para todo $a, b \in P$ con $a \leq b$ se tiene que $f(a) \succeq f(b)$.
3. f es un *isomorfismo de copos* si f es biyectiva tal que para todo $a, b \in P$, $a \leq b$ si y sólo si $f(a) \preceq f(b)$.
4. f es un *anti-isomorfismo de copos* si f es una función biyectiva y tal que para todo $a, b \in P$, $a \leq b$ si y sólo si $f(a) \succeq f(b)$

Observación 1.2.4. Si $\langle P, \leq\rangle$ y $\langle Q, \preceq\rangle$ son dos copos y se tiene que $f\colon P \to Q$ es una función biyectiva con inversa f^{-1}, entonces f es un (anti-)isomorfismo de copos si y sólo si f y f^{-1} (invierten) preservan orden.

Definición 1.2.5. Dado un copo $\langle P, \leq\rangle$ con $a, b \in P$ y $a \leq b$, se define el intervalo determinado por a y b como :

$$[a, b] := \{c \in P \mid a \leq c \leq b\}$$

Definición 1.2.6. Sea $\langle P, \leq\rangle$ un copo y $Q \subset P$.
Se dice que $m \in Q$ es:

1. el *elemento menor* de Q si para todo $a \in Q,\ m \leq a$
2. el *elemento mayor* de Q si para todo $b \in Q,\ b \leq m$
3. un *elemento mínimo* de Q si no existe $a \in Q$ tal que $a < m$
4. un *elemento máximo* de Q si no existe un $b \in Q$ tal que $m < b$.

Definición 1.2.7. Si Sea $\langle P, \leq\rangle$ es un copo y $Q \subset P$.
Entonces se dice que $c \in P$ es:

1. una *cota inferior* de Q, si $c \leq a$ para todo $a \in Q$
2. una *cota superior* de Q, si $c \geq b$ para todo $b \in Q$.
3. el *ínfimo* de Q si es la mayor cota inferior de Q.
4. el *supremo* de Q si es la menor cota superior de Q.

Nota: Observe que no siempre se puede hablar de la existencia de un ínfimo o un supremo

Definición 1.2.8. Sea $\langle P, \leq\rangle$ un copo con elemento mayor y elemento menor $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ respectivamente. Entonces:

1. Un elemento $a \in P$ con $a \neq \mathbf{0}$ se llama *átomo* si no existe $b \in P$ tal que $\mathbf{0} < b < a$.
2. Un elemento $a \in P$ con $a \neq \mathbf{1}$ se llama *coátomo* si no existe $b \in P$ tal que $a < b < \mathbf{1}$

Definición 1.2.9. Sea $\langle P, \leq\rangle$ un copo entonces P se dice que es *totalmente ordenado o una cadena*, si para todo $a, b \in P$ se tiene que $a \leq b$ ó $b \leq a$. Es decir, cada par de elementos de P es comparable y en este caso a "$\leq$" se le llama orden total u orden lineal.

Definición 1.2.10. Un copo $\langle P, \leq \rangle$ se llama *inductivo* si toda cadena en $\langle P, \leq \rangle$ tiene una cota superior en P.

Lema 1.2.11 (**Lema de Zorn**). *Todo copo inductivo tiene (al menos) un elemento máximo.*

1.2.2. Retículas.

Definición 1.2.12. Un copo $\langle L, \leq \rangle$ es una *retícula* si para todo $a, b \in L$ existe el supremo y el ínfimo de $\{a, b\}$. El supremo será denotado por $a \vee b$ y al ínfimo por $a \wedge b$.

Definición 1.2.13. Sean $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \preceq, \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$ dos retículas. Una función $f \colon L \to L'$ es un *morfismo de retículas* si para cada $a, b \in L$ se cumple que

1. $f(a \vee_L b) = f(a) \vee_{L'} f(b)$
2. $f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_{L'} f(b)$

Definición 1.2.14. Sean $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \preceq, \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$ dos retículas. Una función $f \colon L \to L'$ es un *anti-morfismo de retículas* si para cada $a, b \in L$ se cumple que

1. $f(a \vee_L b) = f(a) \wedge_{L'} f(b)$
2. $f(a \wedge_L b) = f(a) \vee_{L'} f(b)$

Observación 1.2.15. Si f es un morfismo (anti-morfismo) de retículas biyectivo entonces f es un isomorfismo (anti-isomorfismo).

De forma intuitiva se puede observar que todo (anti-)isomorfismo de retículas es un (anti-)isomorfismo de copos. No obstante, como las operaciones reticulares se definen en términos del orden, también resulta que todo (anti-)isomorfismo de copos es un (anti-)isomorfismo de retículas, como se afirma en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.16. *Sean $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \preceq, \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$ dos retículas. Una función $f \colon L \to L'$ es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de copos si y sólo si es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de retículas*

Demostración. Sea $f \colon L \to L'$ un isomorfismo de copos, entonces existe $f^{-1} \colon L' \to L$ y f^{-1} preserva el orden. Así, $f(a \wedge_L b) \preceq f(a)$ y $f(a \wedge_L b) \preceq f(b)$, de donde $f(a \wedge_L b) \preceq f(a) \wedge_{L'} f(b)$. Por otro lado, $f(a) \wedge_{L'} f(b) \preceq f(a)$ y $f(a) \wedge_{L'} f(b) \preceq f(b)$, luego $f^{-1}(f(a) \wedge_{L'} f(b)) \leq a$ y $f^{-1}(f(a) \wedge_{L'} f(b)) \leq b$. Por tanto, $f^{-1}(f(a) \wedge_{L'} f(b)) \leq a \wedge_L b$; esto es, $f(a) \wedge_{L'} f(b) \leq f(a \wedge_L b)$ y así se concluye que $f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_{L'} f(b)$. De forma anloga se prueba que $f(a \vee_L b) = f(a) \vee_{L'} f(b)$ y con esto se concluye que f es un isomorfimos de retículas.

Recíprocamente, suponga ahora que $f \colon L \to L'$ es un isomorfismo de retículas. Sean $a, b \in L$ con $a \leq b$ entonces, $f(a) = f(a \wedge_L b) =$

$f(a) \wedge_{L'} f(b) \preceq f(b)$. Esto es, f preserva el orden. Ahora, si $a', b' \in L'$ con $a \preceq b$, entonces existen $a, b \in L$ tales que $f(a) = a'$ y $f(b) = b'$. De esta forma, se tiene que $f^{-1}(a') = f^{-1}(a' \wedge_{L'} b') = f^{-1}(f(a) \wedge_{L'} f(b)) = f^{-1}(f(a \wedge_L b)) = a \wedge_L b \leq b = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(b')$. Esto demuestra que f^{-1} preserva el orden y se concluye que f es un isomorfismo de copos.

El caso para el cual f es un anti-isomorfismo tiene una demostración similar a la anterior. □

Definición 1.2.17. Se dice que $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una *retícula distributiva* si para cada $a, b, c \in L$ se tiene que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Definición 1.2.18. Se dice que $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una *retícula modular* si para cada $a, b, c \in L$ con $b \leq a$, se tiene que $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$

Observación 1.2.19. Toda retícula distributiva es modular.

Definición 1.2.20. Se dice que $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una *retícula completa* si para cada subconjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de L existen el supremo y el ínfimo de $\{a_i\}_{i \in I}$ (denotados por $\bigvee\limits_{i \in I} a_i$ y $\bigwedge\limits_{i \in I} a_i$ respectivamente.)

Definición 1.2.21. Dada una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ con elemento menor $\mathbf{0}$, decimos que L es atómica, si para cada $b \in L$ con $b \neq \mathbf{0}$, existe un átomo $a \in L$ tal que $a \leq b$

Definición 1.2.22. Dada una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ con elemento mayor $\mathbf{1}$, decimos que L es coatómica, si para cada $b \in L$, con $b \neq \mathbf{1}$, existe un coátomo $a \in L$ tal que $a \geq b$

1.2.3. Producto de Retículas. Diferentes clases de retículas pueden ser descritas de manera más sencilla como combinaciones aritméticas de retículas más pequeñas si se usa una generalización de operaciones aritméticas como la adición, producto y exponenciación. En esta parte se tendrán en cuenta las dos últimas.

Definición 1.2.23. Sean $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \leq', \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$ dos retículas. Se define el producto LL' como el conjunto

$$LL' := \{(a, a') | a \in L, a' \in L'\}.$$

Si se define la relación " $\preceq$ " en LL' por

$$(a, a') \preceq (b, b') \text{ si y sólo si } a \leq b \text{ y } a' \leq' b'$$

Entonces, resulta que $\langle LL', \preceq \rangle$ es un copo.
Más aún, se tiene que $\langle LL', \preceq \rangle$ es una retícula, con el supremo y el ínfimo dados por

$$(a, a') \vee (b, b') = (a \vee_L b, a' \vee_{L'} b')$$
$$(a, a') \wedge (b, b') = (a \wedge_L b, a' \wedge_{L'} b')$$

La definición anterior se puede generalizar para el producto de n retículas, $L_1 L_2, ..., L_n$ con $n \geq 1$. De hecho, se tiene la siguiente generalización

Definición 1.2.24. Dadas $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \preceq, \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$ dos retículas, se define a $L^{L'}$ como el conjunto de todos los morfismos de retículas $f \colon L' \to L$. Dicho conjunto, con el orden dado por $f \preceq g$ si y sólo si $f(a') \leq g(a')$ para todo $a' \in L'$ y con el supremo e ínfimo dados por

1. $f \vee g := h_1$ donde $h_1 \colon L' \to L$ es un morfismo de retículas tal que para cada $a' \in L'$, $h_1(a') = f(a') \vee_L g(a')$
2. $f \wedge g := h_2$ donde $h_2 \colon L' \to L$ es un morfismo de retículas tal que para cada $a' \in L'$, $h_2(a') = f(a') \wedge_L g(a')$

De esta forma $L^{L'}$ resulta ser una retícula.

1.3. Conexiones de Galois

Esta sección enuncia resultados relacionados a conexiones de Galois antítonas (que invierten el orden), los cuales serán utilizados en el capítulo final de este trabajo. Estos resultados y sus demostraciones pueden consultarse en [**6**]

Definición 1.3.1. Una *conexión de Galois* es una cuarteta $\langle P, f, g, Q \rangle$ donde $\langle P, \leq \rangle$ y $\langle Q, \preceq \rangle$ son copos, $f \colon P \to Q$ y $g \colon Q \to P$ son funciones tales que para todo $p \in P, q \in Q$ sucede que $f(p) \preceq q$ si y sólo si $p \leq g(q)$.

Una definición alternativa de este concepto está dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.3.2. *Dados los copos $\langle P, \leq \rangle$ y $\langle Q, \preceq \rangle$ y las funciones $f \colon P \to Q$ y $g \colon Q \to P$ son equivalentes*

(1) *$\langle P, f, g, Q \rangle$ es una conexión de Galois*
(2) (a) *Para todo $p \in P$ se tiene que $q \leq gf(p)$ y para todo $q \in Q$ se tiene que $fg(q) \preceq q$*
    (b) *f y g son morfismos de copos.*

Corolario 1.3.3. *Si $\langle P, f, g, Q \rangle$ es una conexión de Galois entonces:*

1. $f \circ g \circ f = f$.
2. $g \circ f \circ g = g$.

Las conexiones de Galois tienen una estrecha relación con el concepto de cerradura (interior) que aparece en muchas áreas de las matemáticas, no sólo en Topología. A continuación se presentan algunas definiciones:

DEFINICIÓN 1.3.4. Sea $\langle P, \leq \rangle$ un copo. Un operador cerradura (interior) sobre P es una función $h\colon P \to P$ que cumple las siguientes condiciones

1. h es un morfismo de orden
2. Para todo $p \in P$ sucede que $p \leq h(p)$ $(h(p) \leq p)$
3. $h \circ h = h$.

Una forma alternativa de definir estos conceptos es refiriéndose a los abiertos y cerrados.

DEFINICIÓN 1.3.5. $\langle P, \leq \rangle$ un copo. Un sistema de cerrados (abiertos) de P es un subconjunto Q de P tal que para todo $p \in P$ el conjunto $\{q \in Q | \ p \leq q\}$ ($\{q \in Q | \ q \leq p\}$) tiene elmento menor (mayor), denotado por $\overline{p}$ (p°). Los elementos de Q se llaman cerrados (abiertos).

Un operador cerradura (interior) induce un sistema de cerrados (abiertos) y viceversa:

TEOREMA 1.3.6. *Sea $\langle P, \leq \rangle$ un copo*

1. *Si h es un operador cerradura (interior) sobre P, entonces $h(P)$ es un sistema de cerrados (abiertos) de P*
2. *Si Q es un sistema de cerrados (abiertos) de P, entonces la función $h\colon P \to P$ definida como $h(p) := \overline{p}$ ($h(p) := p^\circ$) es un operador cerradura (interior) de P.*

Una conexión de Galois también define un operador cerradura y un operador interior

TEOREMA 1.3.7. *Sea $\langle P, f, g, Q \rangle$ una conexión de Galois, entonces:*

1. *$g \circ f$ es un operador cerradura sobre P.*
2. *$\overline{P} = g(Q) = gf(P)$ es un sistema de cerrados de P.*
3. *$f \circ g$ es un operador interior sobre Q*
4. *$Q^\circ = f(P) = fg(Q)$ es un sistema de abiertos de Q.*

DEFINICIÓN 1.3.8. Sean A y B conjuntos. Una *polaridad* entre los conjuntos potencia $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$, ordenados por la contención es una conexión de Galois, $\langle \mathcal{P}(A), f, g, \mathcal{P}(B)^{op} \rangle$

OBSERVACIÓN 1.3.9. En caso de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean clases propias, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son conglomerados.

Las polaridades resultan ser correspondientes con relaciones binarias.

TEOREMA 1.3.10. *Sean A y B conjuntos*

1. *Toda relación $R \subseteq A \times B$ induce una polaridad $\pi_R = \langle \mathcal{P}(A), f, g, \mathcal{P}(B)^{op} \rangle$ dada por las funciones*

$$f_R(X) = \{b \in B |\ \forall x \in X, (x, b) \in R\} \quad X \subseteq A$$
$$g_R(X) = \{a \in A |\ \forall y \in Y, (a, y) \in R\} \quad Y \subseteq B$$

2. *Toda polaridad $\pi = \langle \mathcal{P}(A), f, g, \mathcal{P}(B)^{op} \rangle$ induce la relación*

$$R_\pi = \{(a, b) \in A \times B |\ b \in f(\{a\})\}$$

3. *Dada una relación $R \subseteq A \times B$ se tiene que $R_{\pi_R} = R$. Dada una polaridad $\pi = \langle \mathcal{P}(A), f, g, \mathcal{P}(B)^{op} \rangle$ se tiene que $\pi_{R_\pi} = \pi$. Por tanto, hay una correspondencia biunívoca entre las relaciones de A en B y las polaridades de $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$*

OBSERVACIÓN 1.3.11. Dada una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ y su polaridad $\langle f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}} \rangle$, que a su vez induce sistemas de cerrados en $\mathcal{P}(A)$ y en $\mathcal{P}(B)$, resulta que el menor cerrado en $\mathcal{P}(A)$ es $g_{\mathcal{R}}(B)$ y el mayor abierto en $\mathcal{P}(B)^{op}$ es $f_{\mathcal{R}}(A)$.

Capítulo 2

Módulos y prerradicales

2.1. Módulos

2.1.1. Notación y definiciones básicas. En adelante, se denotará por R a un anillo asociativo con $1 \neq 0$. De igual forma se asumirán las definiciones de anillo, ideal izquierdo, ideal (bilateral), anillo cociente, así como los tres teoremas de isomorfismos de Nöether.

Se debe tener en cuenta la siguiente notación:

- ${}_RM$ significa que M es un R-módulo izquierdo
- M_R significa que M es un R-módulo derecho
- ${}_RM_S$ significa que M es un R-módulo izquierdo y es un S-módulo derecho (y es un bimódulo: $(rm)s = r(ms)$ para todo $r \in R, s \in S$ y $m \in M$.)

Se darán algunos resultados que serán utilizados en secciones posteriores que son temas relacionados a la Teoría de Módulos: muchos de éstos sólo serán expuestos, pues se usarán como herramienta básica en el desarrollo de los capítulos siguientes. Sin embargo, se pueden consultar detalles en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5 del capítulo 3 de [**1**]. Además, todos los módulos considerados en este capítulo son módulos izquierdos sobre R, a menos que se diga lo contrario.

Definición 2.1.1. Dada una sucesión (finita o infinita) de morfismos de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Se dice que es exacta en M_n si $f_{n-1}(M_{n-1}) = \ker\ f_n$. Si es exacta en cada R-módulo , la sucesión se llama exacta. En particular, una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Se llama sucesión exacta corta.

Ejemplo 2.1.2. Sea $M \in R$-Mod y sea $N \leq M$. Entonces,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

es exacta corta. Donde, ι y π son la inclusión y proyección canónicas respectivamente.

LEMA 2.1.3. *Sean* $f\colon M \to N$ *y* $f'\colon N \to M$ *morfismos de* R*-módulos tales que* $ff' = 1_N$. *Entonces,* f *es un epimorfismo,* f' *es un monomorfismo y* $M = Kerf \oplus Im\, f'$.

DEFINICIÓN 2.1.4. Una sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$, se *escinde* en el caso de que exista $f'\colon M \to N$ tal que $f'f = 1_N$ y $g'\colon L \to M$ tal que $gg' = 1_L$.

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Considere la sucesión exacta* $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ *Entonces, la sucesión se escinde si y sólo si* $Im\, f = Ker\, g$ *es un sumando directo de* M.

2.2. Módulos simples

DEFINICIÓN 2.2.1. Un R-módulo $M \neq 0$ se llama *simple* si su retícula de submódulos es $\mathcal{S}(M) = \{0, M\}$

Sea denotará por $\mathbf{S}$ a la clase de todos los R-módulos simples. A continuación se da un resultado que caracteriza los elementos de la clase $\mathbf{S}$

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea* M *un* R*-módulo no nulo. Entonces,* M *es simple si y sólo si para todo* $x \in M$ *tal que* $x \neq 0$ *se tiene que* $\langle x \rangle = M$.

COROLARIO 2.2.3. *Todo* R*-módulo simple es cíclico.*

PROPOSICIÓN 2.2.4. *Sea* M *un* R*-módulo. Entonces,* $M \in \mathbf{S}$ *si y sólo si* $M \cong R/K$, *donde* K *es un ideal izquierdo máximo de* R.

OBSERVACIÓN 2.2.5. Dado $S \in \mathbf{S}$, considere

$$[S] = \{M \mid M \in R\text{-Mod } y\ M \cong S\}$$

Por la proposición 2.2.4, se tiene que existe una correspondencia biunívoca entre la clase de isomorfismo de R-módulos simples y la clase de ideales izquierdos máximos de R, la cual es un conjunto.

Por la observación 2.2.5, se tiene el siguiente resultado

COROLARIO 2.2.6. *Las clases de isomorfismos de* R*- módulos simples formas un conjunto.*

Se puede elegir un representante de cada clase de isomorfismo de R-módulos simples y se obtiene un conjunto completo e irredundante. Tal conjunto será denotado por R-simp.

2.2.1. Módulos inyectivos y proyectivos.

DEFINICIÓN 2.2.7. Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$. se dice que N es *esencial* en M, (denotado por $N \trianglelefteq M$), si para $L \leq M$ se tiene que $N \cap L = 0$ implica que $L = 0$.

DEFINICIÓN 2.2.8. Sean $M, N \in R$-Mod. Entonces, un morfismo $f \colon N \to M$ se llama *morfismo esencial* si $f(N) \trianglelefteq M$.

DEFINICIÓN 2.2.9. Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$. se dice que N es *superfluo* en M, (denotado por $N \ll M$), si para $L \leq M$ se tiene que $N + L = M$ implica que $L = M$.

DEFINICIÓN 2.2.10. Sea P un R-módulo. Se dice que P es *proyectivo* si para cada $f \in Hom_R(P, N)$ y para todo epimorfismo $g \in Hom_R(M, N)$ existe $h \in Hom_R(P, M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $g \circ h = f$.

Pare ver las demostraciones de las siguientes dos proposiciones, consulte capítulo 3 de [**22**].

PROPOSICIÓN 2.2.11. *Un módulo P es proyectivo si y sólo si* $\mathrm{Hom}(P, \_)$ *es exacto.*

PROPOSICIÓN 2.2.12. *Si A es un submódulo de B con A/B proyectivo, entonces A es un sumando directo de B. Toda sucesión exacta $0 \to A \to B \to P \to 0$, con P proyectivo, se escinde.*

DEFINICIÓN 2.2.13. Sea E un R-módulo. Se dice que E es *inyectivo* si para cada $f \in Hom_R(N, E)$ y para todo monomorfismo $g \in Hom_R(N, M)$ existe $h \in Hom_R(M, E)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

es decir, $h \circ g = f$.

PROPOSICIÓN 2.2.14. *Un módulo E es inyectivo si y sólo si el funtor* $\mathrm{Hom}(\_, E)$ *es exacto (derecho).*

Proposición 2.2.15. *Sea $\{E_j : j \in J\}$ una familia de R-módulos inyectivos, entonces $\prod E_j$ es inyectivo.*

Proposición 2.2.16. *Todo sumando D de un módulo inyectivo E es inyectivo.*

Proposición 2.2.17. *Un módulo E es inyectivo si y sólo si toda sucesión exacta corta $0 \to E \to B \to C \to 0$ se escinde. En particular, E es sumando directo de B.*

Se sabe que todo R-módulo puede incluirse en un R-módulo inyectivo. De esta forma, es natural pensar en la mínima inclusión inyectiva de un módulo M.

Definición 2.2.18. Sea M un R-módulo. Una pareja (E, i) es una *cápsula inyectiva* de M, si E es un R-módulo inyectivo y además $i \in Hom_R(M, E)$ es un monomorfismo esencial.

Teorema 2.2.19. *Sea $M \in R$-Mod y sean $(E, i), (E', i')$ cápsulas inyectivas de M. Entonces, existe un isomorfismo $f \colon E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} E' & \\ M \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "i"'] & E \arrow[ul, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Dado que cualquier par de cápsulas inyectivas resultan ser isomorfas, se suele hablar de la cápsula inyectiva de M. En esta situación, se denotará por EM a la cápsula inyectiva de un R-módulo M.

Teorema 2.2.20 (Criterio de Baer). *Un R-módulo E es inyectivo si y sólo si todo R-homomorfismo $f \colon I \to E$, donde I es un ideal izquierdo de R, puede extenderse a R.*

2.2.2. Generadores y cogeneradores, la traza y el rechazo.

Definición 2.2.21. Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y M un R-módulo. Se dice que la clase $\mathcal{A}$ genera a M, si existe un epimorfismo

$$\bigoplus_{A \in I} A \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $I \subseteq \mathcal{A}$ un conjunto.

Definición 2.2.22. Sean $A, M \in R$-Mod. Se dice que A genera a M, si $\{A\}$ genera a M. Esto es, existe un epimorfismo

$$A^{(X)} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde X es un conjunto.

Definición 2.2.23. Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y M un R-módulo. Se dice que la clase $\mathcal{A}$ cogenera a M, si existe un monomorfismo

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{A \in I} A,$$

con $I \subseteq \mathcal{A}$ un conjunto.

Definición 2.2.24. Sean $A, M \in R$-Mod. Se dice que A cogenera a M, si $\{A\}$ cogenera a M. Esto es, existe un monomorfismo

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^X,$$

donde X es un conjunto.

Ejemplo 2.2.25. Dado un $\mathbb{Z}$-módulo A, $\{\mathbb{Z}_n |\ n > 1\}$ genera a A si y sólo si A es de torsión.

Ejemplo 2.2.26. Dado un $\mathbb{Z}$-módulo A, $\mathbb{Q}$ cogenera a A si y sólo si A es libre de torsión.

Ejemplo 2.2.27. R genera a M para todo $M \in R$-Mod.

Ejemplo 2.2.28. $\prod\limits_{R\text{-Simp}} ES$ cogenera a M para todo $M \in R$-Mod.

Definición 2.2.29. Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y M un R-módulo. Se definen

1. *La traza* de M respecto a $\mathcal{A}$ (denotada por $Tr_{\mathcal{A}}(M)$) como:
$$Tr_{\mathcal{A}}(M) = \sum \{f(A) |\ f \in Hom_R(A, M), A \in \mathcal{A}\}$$
2. *El rechazo* de M respecto a $\mathcal{A}$ (denotada por $Rej_{\mathcal{A}}(M)$) como:
$$Rej_{\mathcal{A}}(M) = \bigcap \{\ker\ g \mid g \in Hom_R(M, A), A \in \mathcal{A}\}$$

Proposición 2.2.30. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y $M \in R$-Mod. Entonces,*

1. $M \in Gen(\mathcal{A})$ *si y sólo si* $Tr_{\mathcal{A}}(M) = M$.
2. $M \in Cog(\mathcal{A})$ *si y sólo si* $Rej_{\mathcal{A}}(M) = 0$.

donde $Gen(\mathcal{A})$ representa la clase de módulos generados por A y $Cog(\mathcal{A})$ la clase de módulos cogenerados por A.

Definición 2.2.31. En particular, si M es un R-módulo, entonces se definen

1. *El zoclo* de M (denotado por $\mathrm{Soc}(M)$) como

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}(M) &= Tr_{\mathbf{S}}(M)\\ &= \sum_{A\in\mathbf{S}}\{f(A)|\ f\in Hom_R(A,M)\}\end{aligned}$$

2. *El radical* de M (denotado por $\mathrm{Rad}(M)$) como

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(M) &= Rej_{\mathbf{S}}(M)\\ &= \bigcap_{A\in\mathbf{S}}\{Ker\ g \mid g\in Hom_R(M,A)\}\end{aligned}$$

Observación 2.2.32. Para todo $M \in R$-Mod $Tr_{\mathbf{S}}(M) = Tr_{R\text{-simp}}(M)$ y $Rej_{\mathbf{S}}(M) = Rej_{R\text{-simp}}(M)$.

Se presentan ahora algunas propiedades de la traza y el rechazo.

Proposición 2.2.33. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos. Sean $M, N \in$ R-Mod y $f \in Hom_R(M,N)$, entonces*
1. $f(Tr_{\mathcal{A}}(M)) \leq Tr_{\mathcal{A}}(N)$
2. $f(Rej_{\mathcal{A}}(M)) \leq Rej_{\mathcal{A}}(N)$

Proposición 2.2.34. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y $M, \in$ R-Mod, entonces*
1. $Tr_{\mathcal{A}}(Tr_{\mathcal{A}}(M)) = Tr_{\mathcal{A}}(M)$
2. $Rej_{\mathcal{A}}(M/Rej_{\mathcal{A}}(M)) = 0$

2.3. Condiciones de cadena en módulos

Un conjunto $\mathcal{L}$ de submódulos de M satisface la *condición de cadena ascendente* en caso de que para toda cadena

$$L_1 \leq L_2 \leq ... \leq L_n \leq ...$$

en $\mathcal{L}$, existe n tal que $L_{n+i} = L_n$ $(i = 1, 2, ...)$. Cambiando de sentido las desigualdades se obtiene la condición de *cadena descendente.*

Definición 2.3.1. Un módulo M es *noetheriano* en el caso de que la retícula $\mathcal{S}(M)$ de todos los submódulos de M satisface la condición de cadena ascendente. Y es *artiniano* en el caso de que $\mathcal{S}(M)$ satisface la condición de cadena descendente.

Proposición 2.3.2. *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es noetheriano*
(b) *Todo submódulo de M es finitamente generado*

(c) *Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento máximo.*

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es artiniano*
(b) *Cada módulo que sea factor de M es finitamente cogenerado*
(c) *Todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento mínimo.*

COROLARIO 2.3.4. *Sea M un submódulo no nulo.*

(1) *Si M es artiniano, entonces M tiene un submódulo simple; De hecho,* $\operatorname{Soc} M$ *es un submódulo esencial.*
(2) *Si M es noetheriano, entonces M tiene un submódulo máximo; De hecho,* $\operatorname{Rad} M$ *es un submódulo superfluo.*

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Sea*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos. Entonces M es artiniano (noetheriano) si y sólo si K y N son artinianos (noetherianos).

COROLARIO 2.3.6. *Sea $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$. Entonces M es artiniano (noetheriano) si y sólo si para cada $i = 1, 2, .., n$ se tiene que M_i es artiniano (noetheriano).*

2.3.1. Condiciones de cadena para anillos. Un anillo R es *artiniano izquierdo (artiniano derecho)* en caso de que el módulo regular izquierdo (derecho) ${}_RR$ (R_R) sea un módulo artiniano. El anillo es *artiniano* en caso de que sea artiniano izquierdo y artiniano derecho, esto es, R_R y ${}_RR$ sean módulos artinianos. Los conceptos de *noetheriano derecho, noetheriano izquierdo* o simplemente *noetheriano* son definidos de manera similar.

Se puede ver que el anillo R de matrices 2×2 triangulares superiores

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{Q}$ es artiniano izquierdo y noetheriano izquierdo, pero no es artiniano derecho ni noetheriano derecho. Por otro lado, $\mathbb{Z}$, es un anillo noetheriano que no es artiniano. (ver capítulo 3, sección 10 de [**1**]).

TEOREMA 2.3.7. *Sea R un anillo artiniano (izquierdo) entonces R es noetheriano (izquierdo).*

2.4. Series de Composición

DEFINICIÓN 2.4.1. Sea M un módulo no nulo. Una cadena finita de $n+1$ submódulos de M

$$M = M_0 > M_1 ... > M_n = 0$$

es llamada una *serie de composición* de longitud n para M si M_{i-1}/M_i es simple para cada $i = 1, 2, .., n$. Esto es, cada término de la cadena es máximo con respecto a su predecesor.

PROPOSICIÓN 2.4.2. *Un módulo no nulo M tiene una serie de composición si y sólo si M es artiniano y noetheriano*

COROLARIO 2.4.3. *Sean K, M y N módulos no nulos y suponga que existe una sucesión exacta*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

de módulos. Entonces M tiene una serie de composición si y sólo si K y N tienen series de composición

Ahora bien, sea M un módulo arbitrario y sea $L \leq M$. Entonces, sea L o no un término en una serie de composición de M, si L tiene un submódulo máximo K, el módulo simple L/K es llamado un factor de composición de M. Además, si M tiene una serie de composición

$$M = M_0 > M_1 > ... > M_n = 0$$

entonces los módulos simples

$$M_0/M_1, M_1/M_2, ..., M_{n-1}/M_n$$

son llamados los factores de composición de la serie. Si M tiene una segunda serie de composición

$$M = N_0 > N_1 > ... > M_p = 0$$

entonces las dos series son equivalentes en el caso de que $n = p$ y exista una permutación l de $\{1, 2, .., n\}$ tal que

$$M_i/M_{i+1} \cong N_{l(i)}/N_{l(i)+1} \quad (i = 1, 2, ..., n.)$$

La equivalencia significa que para cada R-módulo simple T, el número de copias isomorfas de T en la sucesión de factores de composición de una de las series es igual al número de copias de T en la otra serie.

TEOREMA 2.4.4 (Jordan-Hölder). *Si un módulo M tiene una serie de composición, entonces cada par de series de composición para M son equivalentes*

2.4.1. Longitud de composición.

Es inmediato del Teorema de Jordan-Hölder que para cualquier módulo que tiene series de composición, todas las series de composición para tal módulo tienen la misma longitud.

Para un módulo con serie de composición se puede definir su longitud (de composición) $c(M)$ en forma unívoca por

$$c(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = 0 \\ n & \text{si } M \text{ tiene una serie de composición de longitud } n \end{cases}$$

Si un módulo M no tiene longitud finita, se dice que su longitud es infinita y se escribe

$$c(M) = \infty$$

COROLARIO 2.4.5. *Sean K, M y N módulos y suponga que existe una sucesión exacta*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

de morfismos. Entonces

$$c(M) = c(N) + c(K)$$

COROLARIO 2.4.6. *Sea M un módulo de longitud finita y sean K y N submódulos de M. Entonces*

$$c(K + N) + c(K \cap N) = c(K) + c(N)$$

2.5. El zoclo y el radical

PROPOSICIÓN 2.5.1. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces*

$$\begin{aligned} \operatorname{Soc}(M) &= \sum \{K \leq M \mid K \textit{ es mínimo en } M\} \\ &= \bigcap \{L \leq M \mid L \textit{ es esencial en } M\} \end{aligned}$$

COROLARIO 2.5.2. *Sea M un módulo y sea $K \leq M$. Entonces,*

$$\operatorname{Soc} K = K \cap \operatorname{Soc} M$$

En particular, $\operatorname{Soc}(\operatorname{Soc} M) = \operatorname{Soc} M$.

COROLARIO 2.5.3. *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces,* $\operatorname{Soc} M \trianglelefteq M$ *si y sólo si todo submódulo no cero de M contiene un un submódulo mínimo.*

PROPOSICIÓN 2.5.4. *Sea M un R-módulo. Entonces*

$$\operatorname{Soc} M = Tr_{R\text{-}simp}(M) = Tr_{\bigoplus_{R\text{-}simp}}(M) = \sum_{S \in R\text{-}simp} Tr_S(M)$$

La consencuencia de la proposición anterior es que la clase de R-módulos simples tiene un generador semisimple, que es $\bigoplus\limits_{S \in R\text{-simp}} S$.

Si S es simple, entonces $Tr_S(M)$ es llamada la componente S-homogénea del $\operatorname{Soc} M$. El zoclo de un módulo M es el más grande submódulo de M generado por R-simp.

Hay una versión dual a la Proposición 2.5.1 y es la siguiente:

Proposición 2.5.5. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces*

$$\begin{aligned}\operatorname{Rad} M &= \bigcap\{K \leq M \mid K \text{ es máximo en } M\}\\ &= \sum\{L \leq M \mid L \text{ es superfluo en } M\}\end{aligned}$$

Proposición 2.5.6. *si $f\colon M \to N$ es un epimorfismo y si* $\ker\, f \leq \operatorname{Rad} M$, *entonces* $\operatorname{Rad} N = f(\operatorname{Rad} M)$. *En particular,*

$$\operatorname{Rad}(M/\operatorname{Rad} M) = 0.$$

Proposición 2.5.7. *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces,* $\operatorname{Rad} M = 0$ *si y sólo si M es cogenerado por la clase de módulos simples.*

Proposición 2.5.8. *Sea M un R-módulo izquierdo. Considere* $T = \bigoplus\limits_{R\text{-simp}} S$ *y* $T' = \prod\limits_{R\text{-simp}} S$. *Entonces,*

$$\operatorname{Rad} M = Rej_{T'}(M) = Rej_T(M) = \bigcap_{R\text{-simp}} Rej_S(M)$$

De forma dual se tiene que el radical de M es el menor submódulo de M que contiene todos los submódulos superfluos de M. Sin embargo, el radical de un módulo no necesariamente es superfluo.

2.6. Prerradicales.

Esta sección se dedica a las definiciones y propiedades básicas en la clase de todos los prerradicales sobre el anillo R, la cual será denotada por R-pr. Se presentan operaciones binarias y reticulares; además se definen dos tipos importantes de prerradicales llamados *alfa* y *omega*, los cuales permiten demostrar que R-pr es una gran retícula atómica y coatómica.

Definición 2.6.1. Un *prerradical* sobre el anillo R es un subfuntor del funtor identidad en la categoría R-Mod; esto es, es un funtor

$$\sigma\colon R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

tal que:

1. Para cada $M \in R$-Mod se tiene que $\sigma(M) \leq M$.
2. Para cada $f \in Hom_R(M, N)$ se cumple que $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$.

Ejemplo 2.6.2. Dada $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod, se tiene que $Tr_{\mathcal{A}}()$ y $Rej_{\mathcal{A}}()$ son prerradicales. En particular, $\mathrm{Soc}() = Tr_{\mathbf{S}}()$ y $\mathrm{Rad}() = Rej_{\mathbf{S}}()$

Se denotará por R-pr al conglomerado[1] de todos los prerradicales sobre R.

Los prerradicales cumplen ciertas propiedades respecto a sumas directas y produtos directos, las cuales se pueden enunciar así:

Proposición 2.6.3. *Sean $\sigma \in R$-pr y $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-Mod. Entonces, se tiene que:*

1. $\sigma(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$
2. $\sigma(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$

Demostración. (1). Para cada $\beta \in I$, sea $M_\beta \xrightarrow{\iota_\beta} \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ y $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \xrightarrow{p_\beta} M_\beta$ las inclusiones y proyecciones naturales, respectivamente. Entonces, para cada $\beta \in I$ se tiene que:

$$\iota_\beta(\sigma(M_\beta)) \leq \sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\right) \tag{2.1}$$

y

$$p_\beta\left(\sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\right)\right) \leq \sigma(M_\beta) \tag{2.2}$$

Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\right)$. Entonces por (2.2), para cada $\alpha \in I$ se tiene que $x_\alpha = p_\alpha(x) \in \sigma(M_\alpha)$, de donde $x \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$. Por tanto,

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\right) \leq \bigoplus_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$$

Por otro lado, si $x \in \bigoplus_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$, entonces $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ con $x_\alpha \in \sigma(M_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$, por lo que existen $b_j \in I, j \in \{1, ..., n\}$ tales

[1] Note que un prerradical es una clase, al ser una asignación entre clases. Por tanto R-pr es estrictamente hablando un conglomerado.

que para cada β_j se tiene que $x = \sum_{j=1}^{n} \iota_{\beta_j} p_{\beta_j}(x)$. Ahora, por (2.2), $p_{\beta_j} \in \sigma(M_{\beta_j})$, y por (2.1), $\iota_{\beta_j} p_{\beta_j}(x) \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$ para cada $j = 1, ..., n$. Luego, $x \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$. Por tanto, $\bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha) \leq \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$.

(2). Para cada $\beta \in I$, considere las proyecciones naturales $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{p_\beta} M_\beta$ y sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \sigma\left(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$. Entonces se tiene que $p_\beta\left(\sigma\left(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right)\right) \leq \sigma(M_\beta)$, de donde $x_\beta = p_\beta(x) \in \sigma(M_\beta)$ para cada $\beta \in I$. Luego, $x \in \prod_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha)$, y se concluye la prueba. □

2.6.1. Operaciones y propiedades.

Definición 2.6.4. Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Se dice que $\sigma \preceq \tau$ si y sólo si para cada $M \in R$-Mod se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$.

La anterior definición hace de R-pr un clase parcialmente ordenada.

Definición 2.6.5. Para cada $\sigma, \tau \in R$-pr se definen las siguientes operaciones:

1. El *producto* $\sigma\tau$, tal que para cada $M \in R$-Mod se tiene que $(\sigma\tau)(M) = \sigma(\tau(M))$
2. El *coproducto* $(\sigma : \tau)$, tal que para cada $M \in R$-Mod se cumple que $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$
3. La *cuña* $\sigma \wedge \tau$, tal que para todo $M \in R$-Mod, $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$.
4. La *yunta* $\sigma \vee \tau$, tal que para todo $M \in R$-Mod, $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$.

Observación 2.6.6. En la definición anterior, se permite el uso de los símbolos " $\wedge$ " y " $\vee$ " para denotar a la cuña y yunta, puesto que estas operaciones satisfacen las propiedades del ínfimo y supremo respectivamente con el orden dado en la Definición 2.6.5

Las operaciones en definidas en 2.6.5 se pueden comparar de la siguiente manera:

Proposición 2.6.7. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Entonces, se tiene que*

$$\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$$

Definición 2.6.8. Sean I una clase de índices, $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-pr y $M \in R$-Mod. Se define

1. La cuña arbitraria $\bigwedge_{i\in I} \sigma_i$, por $(\bigwedge_{i\in I} \sigma_i)(M) = \bigcap_{i\in I} \sigma_i(M)$
2. La yunta arbitraria $\bigvee_{i\in I} \sigma_i$, por $(\bigvee_{i\in I} \sigma_i)(M) = \sum_{i\in I} \sigma_i(M)$

La cuña y la yunta definen prerradicales que tienen la propiedad de ser el ínfimo y el supremo con el orden dado en la Definición 2.6.4. Así, se tiene el siguiente resultado

Proposición 2.6.9. $\langle R{-}pr, \preceq, \vee, \wedge\rangle$ *es una gran retícula completa, con elemento mayor el funtor identidad en R-Mod y elemento menor el funtor cero de R-Mod.*

Observación 2.6.10. Aunque R-pr en general no es distributiva, se tiene que R-pr es modular. Además, el nombre de gran retícula se debe a que R-pr satisface las propiedades de una retícula pero no necesariamente es un conjunto.

Proposición 2.6.11. *(Ley Modular)*
Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-pr. Entonces,

$$\sigma \preceq \tau \Rightarrow \sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$$

La siguiente proposición muestra propiedades de distributividad del producto y coproducto respecto a la conjunción y disyunción arbitrarias.

Proposición 2.6.12. *Dados I una clase de índices, $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-pr y $\tau \in R$-pr, se tiene que*

1. $(\bigwedge_{i\in I} \sigma_i)\tau = \bigwedge_{i\in I}(\sigma_i\tau)$
2. $(\bigvee_{i\in I} \sigma_i)\tau = \bigvee_{i\in I}(\sigma_i\tau)$
3. $(\tau : \bigwedge_{i\in I} \sigma_i) = \bigwedge_{i\in I}(\tau : \sigma_i)$
4. $(\tau : \bigvee_{i\in I} \sigma_i) = \bigvee_{i\in I}(\tau : \sigma_i)$

Definición 2.6.13. Sea $\sigma \in R$-pr Se dice que :

1. σ es *idempotente*, si $\sigma^2 = \sigma$.
2. σ es *radical*, si $(\sigma : \sigma) = \sigma$

Proposición 2.6.14. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces, σ es radical si y sólo si $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para todo $M \in R$-Mod.*

Ejemplo 2.6.15. Dada $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod, se tiene que $Tr_{\mathcal{A}}()$ es idempotente y $Rej_{\mathcal{A}}()$ es radical.

De ahora en adelante, R-id denotará la clase de todos los prerradicales idempotentes y R-rad la clase de todos los radicales.

Proposición 2.6.16. *Sea I una clase de índices y $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-pr. Entonces, se tiene que*

1. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-id, entonces $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_i \in R$-id*
2. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-rad, entonces $\bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_i \in R$-rad*

Lema 2.6.17. *Sea $\sigma \in R$-pr. Si $\sigma(ES) = 0$ para cada $S \in R$-Simp entonces $\sigma = 0$.*

Demostración. Sea $\sigma \in R$-pr y $M \in R$-Mod. Dado que $P_0 = \prod\limits_{R\text{-Simp}} ES$ genera la categoría R-Mod, se tiene que existe un monomorfismo $f\colon M \to (P_0)^X$ para cierto conjunto X y puesto que σ es un prerradical y f es mono, se obtiene que

$$\sigma(M) = \sigma(f(M)) \leq \sigma\left((P_0)^X\right) \leq \left(\prod_{R\text{-Simp}} \sigma(ES)\right)^X = 0$$

Lo anterior demuestra que $\sigma(M) = 0$ para cada $M \in R$-Mod, es decir $\sigma = 0$. □

2.6.2. Prerradicales alfa y omega.

Definición 2.6.18. Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Entonces, se dice que N es un *submódulo totalmente invariante* de M si y sólo si para cada $f \in End_R(M)$ se tiene que $f(N) \leq N$.

Ejemplo 2.6.19. Sea $S \in R$-simp. Si $f \in End_R(ES)$ entonces $f(S) = S$, o bien $f(S) = 0$. De esta forma, se sigue S es totalmente invariante en ES.

Ejemplo 2.6.20. Un ideal izquierdo I del anillo R es un submódulo totalmente invariante de R si y sólo si I es un ideal (bilateral) de R.

Definición 2.6.21. Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo totalmente invariante de M. Entonces para cada $K \in R$-Mod se definen los funtores

$$\alpha_N^M(K) := \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M,K)\},$$
$$\omega_N^M(K) := \bigcap\{g^{-1}(N)|g \in Hom_R(K,M)\}.$$

OBSERVACIÓN 2.6.22. En la definición anterior, se tiene que $\alpha_N^M(K)$ y $\omega_N^M(K)$ son submódulos de K. Más aún, α_N^M y ω_N^M son prerradicales sobre R.

OBSERVACIÓN 2.6.23. Dados $M, K \in R$-Mod, se tiene que

$$\alpha_M^M(K) := \sum\{f(M)|f \in Hom_R(M,K)\} = Tr_M(K),$$
$$\omega_0^M(K) := \bigcap\{\ker\ g|g \in Hom_R(K,M)\} = Rej_M(K).$$

Es claro que 0 y M son submódulos totalmente invariantes de M.

OBSERVACIÓN 2.6.24. En principio, α_N^M y ω_N^M se podrían definir para todo submódulo N de M. Sin embargo, en caso de ser N totalmente invariante en M, se cumple que $\alpha_N^M(M) = N = \omega_N^M(M)$.

A los prerradicales α_N^M y ω_N^M con N totalmente invariante en M se les conoce como prerradicales alfa y omega respectivamente.

LEMA 2.6.25. *Sea $M \in R$-Mod y K, N submódulos totalmente invariantes de M tales que $K \leq N$. Entonces,*

$$\alpha_K^M \preceq \alpha_N^M \ \ y \ \ \omega_k^M \preceq \omega_N^M.$$

PROPOSICIÓN 2.6.26. *Sea $M \in R$-Mod. Entonces, N es un submódulo totalmente invariante de M si y sólo si existe $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma(M) = N$.*

PROPOSICIÓN 2.6.27. *Sean $M \in R$-Mod, N un submódulo totalmente invariante de M y $\sigma \in R$-pr. Entonces, $\sigma(M) = N$ si y sólo si $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.*

PROPOSICIÓN 2.6.28. *Sea $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod, entonces para cada $K \in R$-Mod, se tiene que*

$$Tr_{\mathcal{A}}(K) = \sum_{\mathcal{A}} \alpha_M^M(K) = (\bigvee_{\mathcal{A}} \alpha_M^M)(K)$$
$$Rej_{\mathcal{A}}(K) = \bigcap_{\mathcal{A}} \omega_0^M(K) = (\bigwedge_{\mathcal{A}} \omega_0^M)(K)$$

En particular,

$$1 = Tr_{R-Mod}() = \bigvee_{R-Mod} \alpha_M^M$$
$$0 = Rej_{R-Mod}() = \bigwedge_{R-Mod} \omega_0^M$$

Se tiene ahora la siguiente proposición

Proposición 2.6.29. *Sea $\sigma \in R$-pr entonces*

1. $\sigma = \bigvee\{\alpha^M_{\sigma(M)} \mid M \in R\text{-}Mod\}$
2. $\sigma = \bigwedge\{\omega^M_{\sigma(M)} \mid M \in R\text{-}Mod\}$

Demostración. Considere $\sigma \in R$-pr. Entonces,

1. Sea $M \in R$-Mod. Por la Proposición 2.6.27 se tiene que $\alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma \preceq \omega^M_{\sigma(M)}$, de donde $\bigvee\limits_{R\text{-Mod}} \alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma$. Por otro lado, si $L \in R$-Mod, por la Observación 2.6.24 se sigue que
$$\sigma(L) = \alpha^L_{\sigma(L)}(L) \leq \left(\bigvee\nolimits_{R\text{-Mod}} \alpha^M_{\sigma(M)}\right)(L)$$
Demostrando así la igualdad.
2. La desigualdad $\sigma \preceq \bigwedge\limits_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)}$ se sigue nuevamente de la proposición 2.6.27. Aplicando la Observación 2.6.24, si $L \in R$-Mod,
$$\bigwedge_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)}(L) \leq \omega^L_{\sigma(L)}(L) = \sigma(L),$$
es decir, $\bigwedge\limits_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma$ con lo que se demuestra la igualdad.

□

Lema 2.6.30. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma = 1$ si y sólo si $\sigma(R) = R$.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para la suficiencia, suponga que $\sigma(R) = R$. Puesto que R es un generador de la categoría R-Mod, existe un epimorfismo $f\colon R^{(X)} \to M$, con X un conjunto. Además, como $\sigma \in R$-pr, se tiene

$$f\left(\sigma(R^{(X)})\right) \leq \sigma(M) \leq M.$$

Pero,

$$f\left(\sigma(R^{(X)})\right) = f\left((\sigma(R))^{(X)}\right) = f(R^{(X)}) = M.$$

□

Por tanto, $\sigma(M) = M$ para cada $M \in R$-Mod y se concluye que $\sigma = 1$.

Proposición 2.6.31. *R-pr es una gran retícula atómica. El conjunto de sus átomos es*
$$\{\alpha^{ES}_S \mid S \in R\text{-}Simp\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma \neq 0$. Por el Lema 2.6.17, existe $S \in R$-simp, tal que $\sigma(ES) \neq 0$. Dado que S es totalmente invariante en ES se tiene que $\alpha_S^{ES} \preceq \alpha_{\sigma(ES)}^{ES}$ y por la Proposición 2.6.27 $\alpha_{\sigma(ES)}^{ES} \preceq \sigma$.

Sólo falta probar que α_S^{ES} es un átomo para cada $S \in R$-simp. Para esto, sea $S \in R$-Simp y sea $\tau \in R$-pr tal que $\tau \prec \alpha_S^{ES}$. Entonces, $\tau(ES) = 0$ ya que

$$\tau(ES) \prec \alpha_S^{ES}(ES) = S$$

y como S es simple, $\tau(ES) = 0$.

Ahora bien, si $S' \in R$-simp, con $S' \ncong S$. Entonces, $\tau(ES') \leq \alpha_S^{ES}(S') = 0$. Por tanto, por el lema 2.6.17, $\tau = 0$ y se finaliza la prueba.

$\square$

La demostración del siguiente resultado es similar a la de 2.6.31

PROPOSICIÓN 2.6.32. *R-pr es una gran retícula coatómica. El conjunto de coátomos es*

$$\{\omega_I^R |\ I \text{ un ideal máximo de } R\}.$$

Por otro lado, se tiene el siguiente resultado en cuanto a los generadores y cogeneradores en la categoría R-Mod

PROPOSICIÓN 2.6.33. *G es un generador (cogenerador) de R-Mod si y sólo si $\alpha_G^G = 1$. ($\omega_0^G = 0$.)*

TEOREMA 2.6.34. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces,*

1. *$\sigma \in R$-id si y sólo si $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M |\ M \in R\text{-Mod}, \sigma(M) = M\}$*
2. *$\sigma \in R$-rad si y sólo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M |\ M \in R\text{-Mod}, \sigma(M) = 0\}$*

PROPOSICIÓN 2.6.35. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Entonces,*

1. *Si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ y si N es un submódulo totalmente invariante de M entonces, para cada $i \in I$, N_i es un submódulo totalmente invariante de M_i.*
2. *Si $M = \prod_{i\in I} M_i$; $N = \prod_{i\in I} N_i$ y si N es un submódulo totalmente invariante de M entonces, para cada $i \in I$, N_i es un submódulo totalmente invariante de M_i.*

PROPOSICIÓN 2.6.36. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Entonces,*

1. *Si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ y si N es un submódulo totalmente invariante de M entonces*

$$\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} = \alpha_N^M$$

2. *Si* $M = \prod_{i\in I} M_i$; $N = \prod_{i\in I} N_i$ *y si* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *entonces*
$$\bigwedge_{i\in I} \omega_{N_i}^{M_i} = \omega_N^M$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Entonces.

1. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Por definición se tiene que para cada $K \in R$-Mod
$$\alpha_N^M(K) = \sum \left\{ f(\bigoplus_{i\in I} N_i) \mid \ f \in \operatorname*{Hom}_R \left(\bigoplus_{i\in I} M_i, K \right) \right\}$$
y
$$\alpha_{N_i}^{M_i}(K) = \sum \left\{ g(N_i) \mid \ g \in \operatorname*{Hom}_R (M_i, K) \right\}$$
Para cada $i \in I$, sean ι_i y π_i las inclusiones y proyecciones naturales. Entonces, para cada $i \in I$ y $g \in \mathrm{Hom}_R(M_i, K)$ se tiene que
$$g(N_i) = g \circ \pi_i \left(\bigoplus_{i\in I} N_i \right) \leq \alpha_N^M(K)$$
As, $\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} \preceq \alpha_N^M$.

Por otro lado, para cada $f \in \operatorname*{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, K)$ se tiene que
$$f(\bigoplus_{i\in I} N_i) = \sum_{i\in I} f \circ \iota_i(N_i) \leq \sum_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i}(K)$$
As, $\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} \succeq \alpha_N^M$, con lo que termina la demostración.

□

Capítulo 3

Anillos semisimples y sus retículas de prerradicales

3.1. Módulos semisimples

En esta sección R continuará siendo un anillo asociativo con unidad y por "módulo"se entenderá R-módulo izquierdo.

Este capítulo pretende dar a conocer propiedades generales que se tiene en los anillos semisimples en cuanto la descomposición de los módulos en la categoría R-Mod y su clase R-pr, mostrando que una propiedad característica de un anillo semisimple es que todo R-módulo sea semisimple. Estos anillos serán estudiados en la sección 3.2 donde se mostrará el Teorema de Wedderburn-Artin, que caracteriza este tipo de anillos como un producto directo finito de anillos de matrices con coeficientes sobre un anillo con división. Este importante teorema, dará una herramienta muy valiosa para poder tener caracterizaciones sobre la estructura reticular de R-pr.

Se puede decir que el objetivo de este capítulo es tener una motivación para extender estos resultados tomando en cuenta en un estudio posterior a los anillos puro-semisimples. Esto es, ¿qué se puede decir acerca de R-Mod y de R-pr cuando R es puro-semisimple? (Algunas respuestas serán encontradas en el capítulo 4)

Recuerde que un módulo ${}_RT \neq {}_R0$ es simple si $\mathcal{S}({}_RT) = \{0, T\}$.

Un módulo simple puede ser caracterizado en R-Mod como un módulo no cero T tal que todo R- morfismo no cero $T \to N$ ($N \to T$) es un monomorfismo (epimorfismo).

Proposición 3.1.1. *Un R-módulo izquierdo T es simple si y sólo si $T \cong R/I$ para algún ideal izquierdo máximo I de R.*

Definición 3.1.2. Si M es un módulo tal que

$$M = \sum_{i \in I} T_i$$

con T_i simple para cada $i \in I$, entonces M se dice *semisimple.*

Claramente, todo módulo simple es semisimple, entonces para todo anillo no trivial siempre existen módulos semisimples.

Definición 3.1.3. Se dice que una familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M es independiente si para todo $j \in J$

$$N_j \cap (\sum_{I\setminus\{j\}} N_i) = \{0\}$$

En ese caso se dice $\sum_I N_i$ es directa y se denota $\bigoplus_I N_i$.

Lema 3.1.4. *Si M es un módulo tal que*

$$M = \sum_{i\in I} T_i$$

con T_i simple para cada $i \in I$,

Entonces existe un conjunto $J \subseteq I$ tal que $M = \bigoplus_{j\in J} T_j$.

Demostración. Considere la familia de familias

$$\mathcal{A} = \{\{T_j\}_{j\in J} | J \subseteq I \text{ y } \{T_j\}_{j\in J} \text{ es independiente}\}$$

$\mathcal{A}$ es de caracter finito, pues $\{T_i\}_J, J \subseteq I$ es independiente si y sólo si cada subfamilia finita es independiente. Por el Lema de de Tukey[1], existe una familia independiente máxima en $\mathcal{A}$, denótese por $\{T_j\}_J$. Entonces, $\bigoplus_{j\in J} T_j \leq M$. Para demostrar la inclusión recíproca, basta ver que para todo $i \in I, T_i \subseteq \bigoplus_J T_j$. Si esto no ocurriera, entonces existe $i \in I \setminus J$ tal que $T_i \cap \bigoplus_J T_j = \{0\}$, debido a que T_i es simple. Pero entonces $\{T_j\}_J \cup \{T_i\}$ sería independiente, lo cual es una contradicción. Por tanto, $M = \sum_I T_i \subseteq \bigoplus_J T_j$. □

Lema 3.1.5. *Si M es un módulo tal que*

$$M = \sum_{i\in I} T_i$$

con T_i simple para cada $i \in I$,

Entonces para cada submódulo K de M, existe un subconjunto $J \subseteq I$ tal que $\{T_j\}_{j\in J}$ es independiente y

$$M = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} T_j)$$

[1] El Lema de Tukey afirma que todo conjunto de carácter finito tiene elementos máximos.

Demostración. Sea K un submódulo propio de M. Por el Lema 2.1.3 existe $I' \subseteq I$ tal que $M = \bigoplus_{i\in I'} T_i$. Considere

$$S = \{X \subseteq I : \ K \cap \bigoplus_{x\in X} T_x = \{0\}\}$$

Dado que K es propio, existe $i_0 \in I$ tal que $T_{i_0} \not\subseteq K$, por tanto $T_{i_0} \cap K = \{0\}$. Se puede verificar que S satisface las hipótesis del Lema de Zorn 1.2.11 y por tanto existe J un elemento máximo de S. Además, se tiene que $(\bigoplus_{j\in J} T_j) \cap K = \{0\}$, por lo que K esta en suma directa con los T_j con $j \in J$. Por otro lado, es claro que

$$\bigoplus_{j\in J} T_j \oplus K \subseteq M$$

Sólo falta probar que $M \subseteq \bigoplus_{j\in J} T_j \oplus K$, para finalizar la prueba. Sea T_i con $i \in I$. Como $T_i \cap \left(\bigoplus_{j\in J} T_j \oplus K\right)$ es un submódulo de T_i, debe ser igual a T_i pues es simple; ya que si $T_i \cap \left(\bigoplus_{j\in J} T_j \oplus K\right) = \{0\}$ contradice el hecho de que J es máximo. Por tanto,

$$M = \bigoplus_{j\in J} T_j \oplus K$$

$\square$

Proposición 3.1.6. *Si un R-módulo M es generado por un conjunto indicado $\{T_i\}_{i\in I}$ de submódulos simples, entonces para algún $J \subseteq I$*

$$M \cong \bigoplus_{j\in J} T_j$$

Demostración. En el Lema 3.1.5 tome $K = 0$. $\square$

Proposición 3.1.7. *Sea M un R-módulo semisimple con descomposición semisimple $M = \bigoplus_{I} T_i$. Si*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos, entonces la sucesión se escinde y tanto K como N son semisimples. De forma más precisa, existe un subconjunto $J \subseteq I$ e isomorfismos

$$N \cong \bigoplus_{j\in J} T_j \quad y \quad K \cong \bigoplus_{k\in\ I\setminus J} T_k$$

Demostración. Dado que $\operatorname{Im} f$ es un submódulo de M, por el Lema 3.1.4 existe un subconjunto $J \subseteq I$ tal que $M = (\operatorname{Im} f)\oplus(\oplus_{j\in J}T_j)$. Por tanto, la sucesión se escinde y $N \cong M/\operatorname{Im} f \cong \oplus_{j\in J}T_j$. Pero, $M = (\oplus_{k\in I/J}T_k) \oplus (\oplus_{j\in J}T_j)$ y así

$$K \cong \operatorname{Im} f \cong \bigoplus_{k\in I/J} T_k$$

□

El resultado anterior es muy importante ya que garantiza que todo submódulo y todo módulo factor de un módulo semisimple es semisimple. Más aún, todo submódulo es un sumando directo.

Corolario 3.1.8. *Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ un conjunto indicado de submódulos simples de M. Si T es un submódulo simple de M tal que*

$$T \cap (\sum_{i\in I} T_i) \neq 0$$

Entonces existe $i \in I$ tal que $T \cong T_i$.

Demostración. Si T es simple y $(\sum_{i\in I} T_i) \cap T \neq 0$, entonces $T \leq \sum_{i\in I} T_i$. De donde, $M = \sum_{i\in I} T_i$ es semisimple, así por Lema 3.1.4 existe $J \subseteq I$ tal que $M = \oplus_{j\in J}T_j$ y aplicando la Proposición 3.1.7 se obtiene el resultado. □

Teorema 3.1.9. *Para un R-módulo izquierdo las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es semisimple*
(b) *M es generado por módulos simples*
(c) *M es la suma de algún conjunto de submódulos simples*
(d) *M es la suma de sus submódulos simples*
(e) *Todo submódulo de M es un sumando directo*
(f) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

de R-módulos se escinde.

Demostración. La implicación $(a) \Rightarrow (f)$ es por proposición 3.1.7, $(f) \Rightarrow (e)$ es por Proposición 2.1.5 y $(b) \Rightarrow (a)$ es por Proposición 3.1.6. Además $(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ son sencillas de comprobar. Finalmente,

$(e) \Rightarrow (d)$. Suponga que M satisface (e). Se afirma que todo submódulo no nulo de M contiene un submódulo simple. En efecto, sea $x \neq 0$ en M. Entonces, como Rx es finitamente generado, Rx tiene un submódulo máximo, H. Aplicado (e), se tiene que $M = H \oplus H'$ para cierto $H' \leq M$. Aplicado la ley modular, $Rx = Rx \cap M = H \oplus (Rx \cap H')$ y $Rx \cap H' \cong Rx/H$ es simple. Por lo tanto, Rx contiene un submódulo simple.

Ahora bien, considere N como la suma de todos los submódulos simples de M. Entonces, aplicado (e), $M = N \oplus N'$ para cierto $N' \leq M$. Dado que $N \cap N' = 0$, N' no contiene ningún submódulo simple, pero esto implica que $N' = 0$, y por tanto $M = N$. □

PROPOSICIÓN 3.1.10. *Un R-módulo M es semisimple si y sólo si* $\mathrm{Soc}(M) = M$.

DEMOSTRACIÓN. Es de forma directa por la Proposición 2.5.1. □

PROPOSICIÓN 3.1.11. *Si M es un R-módulo semisimple, entonces* $\mathrm{Rad}\, M = 0$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia de la Proposición 2.5.7. □

PROPOSICIÓN 3.1.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo semisimple M.*

(a) *M es fintamente cogenerado*
(b) *$M = T_1 \oplus ... \oplus T_n$ con T_i simple para cada $i = 1, .., n$.*
(c) *M es finitamente generado*

La siguiente proposición caracteriza los módulos semisimples por medio de las condiciones de cadena

PROPOSICIÓN 3.1.13. *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{Rad}\, M = 0$ *y M es artiniano*
(b) $\mathrm{Rad}\, M = 0$ *y M es finitamente cogenerado*
(c) *M es semisimple y finitamente generado*
(d) *M es semisimple y noetheriano*
(e) *M es la suma directa de un conjunto finito de submódulos simples*

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$ es evidente, pues ya que M es artiniano entonces todo módulo cociente de M es finitamente cogenerado y $(d) \Rightarrow (c)$ se debe que al ser M noetheriano todo submódulo de M es finitamente generado.

$(b) \Rightarrow (e)$. Suponga que se cumple (b), entonces por la Proposición 2.5.8 se tiene que M es finitamente cogenerado por la clase de módulos simples y como M es finitamente cogenerado se obtiene que M es isomorfo a un submódulo de un producto finito P de módulos simples. Dado que el producto finito es equivalente a una suma directa, se tiene que P es semisimple y se obtiene el resultado.

$(c) \Leftrightarrow (e)$ por la proposición 3.1.12

$(e) \Rightarrow (a)$ y $(e) \Rightarrow (d)$. Suponga que se cumple (e). Entonces M es semisimple y por la Proposición 3.1.11, se tiene que $\operatorname{Rad} M = 0$. Además, todo módulo simple es artiniano y noetheriano y por el Corolario 2.3.6 se obtiene el resultado. □

COROLARIO 3.1.14. *Para un módulo semisimple M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es artiniano;*
(b) *M es noetheriano;*
(c) *M es finitamente generado;*
(d) *M es finitamente cogenerado.*

3.2. Anillos semisimples

DEFINICIÓN 3.2.1. R se llama *anillo semisimple* si el módulo regular ${}_RR$ es semisimple

Un paso importante para el estudio de la clase de anillos semisimples, es el Teorema de Wedderburn-Artin, pero para llegar a éste, se necesitan algunos resultados previos:

LEMA 3.2.2. **(Lema de Schur)** *Si ${}_RT$ es un módulo simple, entonces $End({}_RT)$ es un anillo con división.*

La siguiente proposición garantiza que todo anillo simple artiniano es semisimple. También se sigue que cualquier suma directa de anillos semisimples es semisimple. En efecto,

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R tiene un generador simple izquierdo*
(b) *R es simple y artiniano izquierdo*
(c) *Para algún simple ${}_RT$, ${}_RR \cong T^{(n)}$ para algún n.*
(d) *R es simple y ${}_RR$ es semisimple.*

Lo anterior tiene como consecuencia a uno de los más importantes teoremas de estructura en Teoría de Módulos:

TEOREMA 3.2.4. **(Teorema de Wedderburn-Artin)**
Un anillo R es semisimple si y sólo si R es el producto directo de un número finito de anillos simples artinianos.

El teorema anterior se puede enunciar en una forma más completa y detallada dada por el siguiente:

TEOREMA 3.2.5 (**Wedderburn-Artin. Estructura de un anillo semisimple**). *Sea R un anillo semisimple. Entonces R contiene un conjunto finito $T_1, T_2, ..., T_m$ de ideales izquierdos mínimos que comprenden un conjunto irredundante de representantes de los R-módulos simples izquierdos. Más aún, para cada elemento de este conjunto, la componente homogenea*

$$Tr_{T_i}(R) = RT_iR \text{ para cada } i = 1, 2, ..., m.$$

son anillos simples artinianos y R es el producto directo de anillos

$$R = \prod_{i=1}^{m} RT_iR$$

Finalmente, T_i es un generador simple para el anillo RT_iR y

$$RT_iR \cong \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$$

donde, $n_i = c(RT_iR)$ y $D_i = End(_RT_i)$ para cada $i = 1, ..., m$.

OBSERVACIÓN 3.2.6. Las demostraciones del *Lema de Schur, el Toerema de Wedderburn-Artin* pueden ser encontradas en la sección 13 del capítulo 4 de [**1**].

PROPOSICIÓN 3.2.7. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) *R es semisimple*
(b) *R tiene un generador semisimple izquierdo*
(c) *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \to K \to M \to L \to 0$$

se escinde.

(d) *Todo R-módulo izquierdo es semisimple*

Más aún, todas las afirmaciones se mantienen y son equivalentes si se cambia "izquierdo"por "derecho"

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 3.2.6 es suficiente probar la equivalencia usando el lado izquierdo en las condiciones.

$(a) \Rightarrow (b)$. Tome $_RR$.

$(b) \Rightarrow (d)$. Existe un epimorfismo, $R^{(X)} \to M \to 0$ donde X es un conjunto. Aplicando Proposición 3.1.6 se obtiene (d).

y $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ es el Teorema 3.1.8

□

COROLARIO 3.2.8. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es semisimple*
(b) *Todo monomorfismo en ${}_RM$ se escinde*
(c) *Todo epimorfismo en ${}_RM$ se escinde.*

Finalmente, en cuanto a los anillos semisimples y a su categoría de R-módulos se puede decir lo siguiente, sintetizado en el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2.9. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

(a) *R es semisimple*
(b) *Todo R-módulo es semisimple*
(c) *Todo R-módulo es inyectivo*
(d) *Toda sucesión exacta de R-módulos se escinde*
(e) *Todo R-módulo es proyectivo*

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$, Si R es semisimple como módulo, dado que R genera a R-Mod entonces por la Proposición 3.1.7 se tiene que todo R-módulo es semisimple.

$(b) \Rightarrow (c)$. Si M es un módulo, entonces M puede ser sumergido en un módulo inyectivo E. Pero, por el Lema 3.1.5 M es un sumando de E, y por tanto es inyectivo.

$(c) \Rightarrow (d)$. Por la Proposición 2.2.17.

$(d) \Rightarrow (e)$. Si M es un módulo, existe una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ con F libre. Dado que esta sucesión se escinde, M es un sumando directo de un libre y por tanto es proyectivo.

$(e) \Rightarrow (a)$. Si I es un ideal de R, entonces R/I es proyectivo por hipótesis. Por la Proposición 2.2.12, I es un sumando de R. Luego por el Teorema 3.1.9, R es semisimple como R-módulo y por tanto semisimple. □

3.3. Prerradicales en anillos semisimples

En esta sección se caracterizan ciertas clases de anillos por medio de la estructura de la gran retícula R-pr.

Se inicia el estudio de prerradicales con anillos simples artinianos.

TEOREMA 3.3.1. *R es un anillo simple artiniano si y sólo si R-pr es una retícula trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que R es un anillo simple artiniano. Entonces, por la Proposición 3.2.3, R tiene un generador simple izquierdo T. Sean $\sigma \in R$-pr y $M \in R$-Mod, por las proposiciones 3.1.7 y 3.2.3 se tiene que $M \cong T^{(X)}$ para cierto conjunto X. Así,

$$\sigma(M) \cong (\sigma(T))^{(X)}$$

Lo anterior es válido para cada $M \in R$-Mod y por tanto σ estará determinado por su valor en T. Dado que T es simple, entonces $\sigma(T) = 0$ ó $\sigma(T) = T$. Si $\sigma(T) = 0$, se obtiene $\sigma = 0$ y $\sigma(T) = T$ entonces $\sigma = 1$.

Recíprocamente, suponga ahora que R-pr es una retícula trivial, esto es, $R\text{-pr} = \{0, 1\}$. Considere $S \in R$-simp, entonces como $S = \alpha_S^S(S)$ y $S \neq 0$, esto prueba que $\alpha_S^S \neq 0$ y por tanto $\alpha_S^S = 1$. Aplicando la Proposición 2.6.33, S es un generador simple izquierdo de la categoría R-Mod y así R tiene un generador simple izquierdo lo cual implica por la Proposición 3.2.3 que R es simple y artiniano. $\square$

El siguiente teorema caracteriza los anillos semisimples artinianos

Teorema 3.3.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

(a) *R es un anillo semisimple artiniano*
(b) *R-pr es una retícula booleana finita*
(c) *Para cada $\sigma \in R$-pr, $\sigma = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid \alpha_S^{E(S)} \preceq \sigma\}$*
(d) $1 = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-}simp\}$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Dado que todo R-módulo es semisimple, entonces todo prerradical es determinado por sus valores en R-Simp y por tanto R-pr es una gran retícula isomorfa a la retícula de subconjuntos de R-Simp. De ahí, R-pr es finita y booleana.

$(b) \Rightarrow (c)$. En una retícula booleana y atómica, cada elemento es la unión de los átomos debajo de él y lo mismo ocurre en una gran retícula booleana atómica.

$(c) \Rightarrow (d)$. Es inmediato.

$(d) \Rightarrow (a)$. $1 = \mathrm{Soc}_{R\text{-Simp}}$ entonces, $R = \mathrm{Soc}_{R\text{-Simp}}(R)$ y por tanto R es semisimple artiniano. $\square$

Corolario 3.3.3. *R es un anillo semisimple artiniano si y sólo si $[\alpha_N^M, \omega_N^M]$ es una retícula booleana finita para cada $M \in R$ -Mod y cada submódulo totalmente invariante N de M.*

Ejemplo 3.3.4. R es un anillo simple artiniano si y sólo si R-pr es la retícula trivial dada por

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ | \\ \mathbf{0} \end{array}$$

EJEMPLO 3.3.5. Si R es un anillo semisimple y R-simp $= \{S, T\}$, con $S \neq T$, entonces la retícula de prerradicales, R-pr, viene dada por

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\alpha_S^{ES} \arrow[dr, dash] & & \alpha_T^{ET} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}
$$

EJEMPLO 3.3.6. Sea R es un anillo semisimple tal que $|R\text{-simp}| = 3$. Suponga que R-simp $= \{S, T, U\}$, entonces existen ideales izquierdos máximos I, J, K de R tales que $S \cong R/I, T \cong R/J$ y $U \cong R/K$. De esta forma la retícula de prerradicales queda descrita de la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\omega_K^R \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \omega_J^R \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \omega_I^R \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
\alpha_S^{ES} \arrow[dr, dash] & \alpha_T^{ET} \arrow[d, dash] & \alpha_U^{EU} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}
$$

Del Teorema 3.3.2, se sabe que si un anillo es semisimple entonces su retícula de prerradicales resulta booleana finita. Una forma alternativa de probar este resultado es utilizando el Teorema de Wedderburn-Artin 3.2.5 y otros resultados que serán enunciados a continuación:

TEOREMA 3.3.7. *Sea* $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ *donde* R_i *es un anillo para* $i = 1, 2, ..., n$. *Entonces* R-*pr* $\cong \prod_{i=1}^{n} (R_i\text{-}pr)$ *(como producto de retículas)*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado puede ser encontrada en el Teorema 1.118 de [**12**] y está basada en la estructura de los módulos en R-Mod respecto a los módulos en R_i-Mod. (También se puede consultar [**3**].) $\square$

TEOREMA 3.3.8. *Si R y S son Morita equivalentes (R-Mod es una categoría equivalente a S-Mod) entonces R-pr $\cong$ S-pr. (como retículas).*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado puede ser encontrada en el Corolario 3.2 de [**8**], la cual se basa en el Teorema 3.1 de [**8**], que afirma que todo par adjunto $\langle F, G\rangle \colon R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ induce una conexión de Galois $\langle \varphi, \psi\rangle \colon R\text{-pr} \to S\text{-pr}$, donde φ y ψ presevan el orden. De esta forma, el Corolario 3.2 de [**8**], usa el hecho de que una equivalencia es un caso especial de par adjunto, y prueba que φ y ψ son morfimos inversos uno de el otro, obteniendo el isomorfismo de retículas entre R-pr y S-pr. $\square$

COROLARIO 3.3.9. *En particular, si $R \cong M_n(S)$ (como anillos) entonces R-pr $\cong$ S-pr (como retículas).*

El Teorema 3.3.7 proporciona una demostración alterna de la equivalencia entre las condiciones (a) y (b) del Teorema 3.3.2.

COROLARIO 3.3.10. *R es un anillo semisimple artiniano entonces R-pr es una retícula booleana finita.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que R es semisimple artiniano, entonces por el Teorema de Wedderburn-Artin (3.2.5)

$$R \cong \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i)$$

Donde n_i es un entero y D_i un anillo con división para $i = 1, .., n$. Ahora, por los teoremas 3.3.7 y 3.3.8 se tiene que

$$R\text{-pr} \cong \prod_{i=1}^{n} (D_i\text{-pr}) \tag{3.3}$$

Donde el producto de la izquierda hace referencia al producto de retículas (ver sección 1.2).

Ahora bien, si D es un anillo con división y M es un D-módulo entonces $M \cong D^{(X)}$ para cierto conjunto X. De esta forma, todo prerradical en D-pr está determinado por su valor D, los cuales son 0 ó D. Esto prueba que la retícula de prerradicales para un anillo con división resulta ser la retícula trivial. Por lo anterior y la parte (3.3), se tiene que R-pr es el producto finito de retículas de triviales y por tanto es una retícula booleana finita.

$\square$

Capítulo 4

Anillos puro-semisimples y su retícula de prerradicales

4.1. Producto tensorial de módulos

Se considerará a R un anillo asociativo con 1. Esta sección es sólo una herramienta introductoria poder definir los módulos planos y sucesiones exactas puras en términos del producto tensorial por lo que más contenido en detalle y demostraciones de resultados presentados aquí pueden ser encontrados en el capítulo 10 y 11 de [**5**].

Definición 4.1.1. Considere ${}_RN, M_R$ y G un grupo abeliano. Una función $\beta\colon M \times N \to G$ es *R-balanceada* si

1. $\beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n)$ para todo $m_1, m_2 \in M$ y $n \in N$.
2. $\beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2)$ para todo $m \in M$ y $n_1, n_2 \in N$.
3. $\beta(mr, n) = \beta(m, rn)$ para todo $m \in M, n \in N$ y $r \in R$.

Definición 4.1.2. Un *producto tensorial* entre M_R y ${}_RN$ es un par $\langle T, \tau\rangle$ donde T es un grupo abeliano y $\tau\colon M \times N \to T$ es una función R-balanceada que cumple la propiedad universal: Para cada función R-balanceada $\beta\colon M \times N \to G$ existe un único morfismo $f\colon T \to G$ de grupos abelianos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dashed, "f"] \\ M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\beta"'] & G \end{tikzcd}$$

Lo anterior dice que $\tau\colon M \times N \to T$ es un objeto inicial de cierta categoría.

Teorema 4.1.3. *Si existe el producto tensorial. éste es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Todo objeto inicial es único. $\square$

Teorema 4.1.4. *El producto tensorial de módulos existe.*

Demostración. Ver capítulo 10 de [**5**] □

Ahora bien, dados los R-módulos M_R y ${}_RN$. El producto tensorial ente M_R y ${}_RN$ será denotado por $M \otimes_R N$. Si el anillo es claro, se denotará por $M \otimes N$.

Proposición 4.1.5. *Considere M_R y ${}_RN$. Entonces:*

(1) $M \otimes_R R \cong M_R$
(2) $R \otimes_R N \cong_R N$
(3) *Si se tiene que ${}_SM_R$ y ${}_RN_S$ entonces $M \otimes_R N \cong N \otimes_S M$ como grupos abelianos.*
(4) *Si se tiene ${}_RN_T$, entonces $(M \otimes_R N) \otimes_T L \cong M \otimes_R (N \otimes_T L)$ como grupos abelianos.*

Demostración. Las partes (1) y (2) son consecuencias del Teorema 1.12 de [**22**]. La parte (3) de deriva del Corolario 1.9 de [**22**] y finalmente (4) es el Teorema 14, página 371 de [**5**]. □

Teorema 4.1.6. *Si $I \leq R$ es un ideal y ${}_RM$, entonces $R/I \otimes M \cong M/IM$.*

Demostración. Es el Ejemplo 8 de la página 370 de [**5**]. □

Teorema 4.1.7. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos y $\{N_j\}_{j\in J}$ una familia de R-módulos izquierdos. Sean $M_R = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y ${}_RN = \bigoplus_{j\in J} N_j$. Entonces,*

$$M \otimes_R N \cong \bigoplus_{j\in J}\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N_j)$$

Demostración. Ver el Teorema 17, página 373 de [**5**]. □

Corolario 4.1.8. *$R \otimes M^{(I)} \cong (R \otimes M)^{(I)} \cong M^{(I)}$*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.7. □

4.2. Límites directos en R-Mod

Más contenido acerca de esta sección puede ser consultada en [**22**]. Además parte del contenido de esta sección y la siguiente pueden ser consultadas en [**20**].

Definición 4.2.1. Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es *dirigido superiormente* si para todo $p, q \in P$, existe $r \in P$ tal que $p, q \leq r$. Si $\mathcal{M}$ es una categoría y I es un conjunto dirigido, se dice que una pareja $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{j\leq i})$ es un sistema dirigido en $\mathcal{M}$ si cada $M_i \in \mathcal{M}$, y f_{ij} es un morfismo en $\mathcal{M}$ para todo $i \leq j$ con las siguientes propiedades:

1. f_{ii} es la identidad en M_i.
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Se abreviará el sistema $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{j\leq i})$ por $\{M_i, f_{ij}\}$.

Ejemplo 4.2.2. Sea ${}_RM$ un R-módulo izquierdo. Entonces, el par $(\{N \leq M|\ N \text{ es f.g.}\}, \{K \xrightarrow{f_{K,L}} L\})$ donde $f_{K,L}$ es la inclusión, es un sistema dirigido, ya que, si $K, L \leq M$ son finitamente generados, entonces $K, L \hookrightarrow L \oplus K \leq_{f.g.} M$.

Definición 4.2.3. Un *cono* definido desde el sistema dirigido $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{j\leq i})$ hacia un conjunto X es una familia de morfismos $\{M_i \xrightarrow{\psi_i} X\}_I$ tal que si $i \leq j$ entonces $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$. Es decir, si $i \leq j$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta.

El límite directo puede ser definido en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ por medio de una propiedad universal.

Definición 4.2.4. Sea $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ un sistema dirigido de objetos y morfismos de $\mathcal{C}$. El límite directo de ese sistema es un objeto X en $\mathcal{C}$ junto con morfismos $\phi_i\colon X_i \to X$ que satisfacen $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$. El par $\langle X, \phi_i\rangle$ debe ser universal en el sentido de que para cualquier otro par $\langle Y, \psi_i\rangle$ existe un único morfismo $u\colon X \to Y$ que realiza que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\ & X \arrow[d, dashed, "!u"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

conmute para todo $i, j \in I$.

El límite directo es a menudo denotado como $X = \varinjlim X_i$, cuando el sistema directo $\langle X_i, f_{ij} \rangle$ se entiende. Por otra parte, cabe mencionar que el límite directo se puede ver como el objeto inicial de cierta categoría.

Ejemplo 4.2.5. El sistema dirigido $(\{N \leq_{f.g.} M\}, \{K \overset{\iota_{K,L}}{\hookrightarrow} L\})$ del ejemplo 4.2.2. tiene límite directo. Más aún, $\varinjlim \{N \leq_{f.g.} M\} \cong M$.

Considere el cono

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\iota_{K,L}"] \arrow[dr, "\psi_K"'] & & L \arrow[dl, "\psi_L"] \\ & {}_R A & \end{tikzcd}$$

para el sistema $(\{N \leq_{f.g.} M\}, \{K \overset{\iota_{K,L}}{\hookrightarrow} L\})$ y para cada $x \in M$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[rr, "\iota_{Rx,L}"] \arrow[dr, "\psi_{Rx}"'] & & L \arrow[dl, "\psi_L"] \\ & {}_R A & \end{tikzcd}$$

Defina $h \colon M \to A$ como $h(x) = \psi_{Rx}(x)$, está bien definido, pues si $x \in N \leq_{f.g.} M$, entonces $Rx \hookrightarrow N$, y

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[rr, "\iota_{Rx,L}"] \arrow[dr, "\psi_{Rx}"'] & & L \arrow[dl, "\psi_L"] \\ & {}_R A & \end{tikzcd}$$

conmuta y $\psi_{Rx}(x) = \psi_N(x)$. Además resulta que h es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\iota_{K,L}"] \arrow[dr, "\iota_K"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_K"'] & & L \arrow[dl, "\iota_L"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_L"] \\ & M \arrow[d, dashed, "!h"] & \\ & A & \end{tikzcd}$$

Por tanto, $\varinjlim \{N \leq_{f.g.} M\} \cong M$.

Se puede formular el resultado del ejemplo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 4.2.6. *Todo R-módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados.*

Los límites directos no siempre existen en todas las categorías. sin embargo, la categoría R-Mod sí es cerrada bajo límites directos.

Teorema 4.2.7. *Todo sistema dirigido $\{M_i, \varphi_{ij}\}$ de R-módulos tiene límite directo.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $\iota_i \colon M_i \to \bigoplus M_i$ la i-ésima inclusión en la suma. Defina

$$\varinjlim M_i = (\bigoplus M_i)/S,$$

Donde S es el submódulo generado por todos los elementos $\iota_j f_{ij}(m_i) - \iota_i(m_i)$, donde $m_i \in M_i$ y $i \leq j$. Si se define ahora, $\psi \colon M_i \to \varinjlim M_i$ por $m_i \mapsto \iota_i(m_i) + S$, entonces se puede verificar de manera directa que se satisface la propiedad universal del límite directo. $\square$

Los elementos de $\varinjlim N_i$ serán denotados por $\overline{n}$. El siguiente teorema establece la relación entre los límites directos y el producto tensorial.

Teorema 4.2.8. *$M \otimes \_$ conmuta con $\varinjlim\{\_\}$. Es decir, $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \cong \varinjlim\{M \otimes N_i\}$.*

Demostración. Sea $(\{_R N_i\}_I, \{N_i \xrightarrow{f_{ij}} N_j\}_{i \leq j})$ un sistema dirigido de R-módulos y $\{N_i \xrightarrow{\psi_i} \varinjlim\{N_i\}\}$ su límite directo. Al tensar con $_RM$ se obtiene un nuevo sistema dirigido $(\{M \otimes N_i\}_I, \{M \otimes N_i \xrightarrow{1_M \otimes f_{ij}} M \otimes N_j\}_{i \leq j})$, y un cono $\{M \otimes N_i \xrightarrow{1_M \otimes \psi_i} M \otimes \varinjlim\{N_i\}\}$. Para ver que $M \otimes \varinjlim\{N_i\}$ tiene la propiedad universal del límite directo, si $\{M \otimes N_i \xrightarrow{\gamma_i} X\}_I$ es otro cono, basta definir la función bilineal $\gamma \colon M \times \varinjlim\{N_i\} \to X$, como $\gamma(m, \overline{n_i}) = \gamma_i(m \otimes n_i)$. Luego por la propiedad universal del producto tensorial, hay un único $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \xrightarrow{\psi} X$ tal que $\psi \circ \otimes = \gamma$. Así, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N_i \arrow[rr, "1_M \otimes f_{ij}"] \arrow[dr, "1_M \otimes \psi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_i"'] & & M \otimes N_j \arrow[dl, "1_M \otimes \psi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\gamma_j"] \\
& M \otimes \varinjlim\{N_i\} \arrow[d, dashed, "!\psi"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

y se concluye que $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \cong \varinjlim\{M \otimes N_i\}$. $\square$

Proposición 4.2.9. *Sea I un conjunto dirigidio. Suponga que hay una familia de morfimos de sistemas directos sobre I*

$$\{K_i, \varphi_{ij}\} \xrightarrow{t} \{M_i, \psi_{ij}\} \xrightarrow{s} \{N_i, \gamma_{ij}\}$$

tal que

$$0 \to K_i \xrightarrow{t_i} M_i \xrightarrow{s_i} N_i \to 0$$

es exacta para cada $i \in I$. Entonces, hay una sucesión exacta de módulos

$$0 \to \varinjlim K_i \xrightarrow{\vec{t}} \varinjlim M_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim N_i \to 0$$

Demostración. Suponga que $x \in \varinjlim K_i$ y que $\vec{t}\ x = 0$ en $\varinjlim M_i$. Sea $\varinjlim K_i = (\bigoplus K_i)/S$ y sea $\lambda_i \colon K_i \to \bigoplus K_i$ la i-ésima inclusión; sea $\varinjlim M_i = (\bigoplus M_i)/T$ y $\mu_i \colon M_i \to \bigoplus M_i$ la i-ésima inclusión. Entonces, $x = \lambda_i a_i + S$ y $\vec{t}\ (x) = \mu_i t_i a_i + T$. Dado que $\vec{t}\ (x) = 0$, existe $j \geq i$ con $\psi_{ij} t_i a_i = 0$. Como t es un morfismo entre sistemas directos, se tiene que $t_j \varphi_{ij} a_i = 0$. Pero, t_j es mono, de donde $\varphi_{ij} a_i = 0$ y así $x = \lambda_i a_i + S = 0$. Esto prueba que $\overline{t}$ es mono. La demostración de que $\overline{s}$ es epi puede ser encontrada en [**22**]. □

4.3. Módulos planos y sucesiones puras

La mayoría de los resultados presentados en esta sección fueron tomados de [**1**], [**5**] y [**22**].

Definición 4.3.1. M_R es *plano* si $M \otimes_R \_\_$ es un funtor exacto. Es decir, si $M \otimes_R \_\_$ es exacto izquierdo.

Ejemplo 4.3.2. R_R es plano pues $R \otimes_R \_\_ \cong Id$. Es decir, para cada R-módulo M se tiene que $R \otimes_R M \cong M$.

Teorema 4.3.3. *$\bigoplus_{i \in I} P_k$ es plano si y sólo si cada P_k es plano.*

Demostración. En primer lugar, note que si $\{f_k \colon A'_k \to A_k\}$ es una familia de morfimos, existe un único morfismo $\oplus f_k \colon \bigoplus A'_k \to \bigoplus A_k$ con $\sum a'_k \mapsto \sum f(a'_k)$; Más aún, $\oplus f_k$ es mono si y sólo si cada f_k es mono.

Suponga que $f \colon M \to N$ es mono. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus P_k) \otimes M \arrow[r, "1 \otimes f"] \arrow[d] & (\bigoplus P_k) \otimes N \arrow[d] \\
\bigoplus (P_k \otimes M) \arrow[r, "\oplus(1_k \otimes f)"] & \bigoplus (P_k \otimes N)
\end{tikzcd}$$

donde $1_k = 1_{P_k}$ y los morfismos verticales son isomorfismos. Por la indicación inicial, se tiene que $1 \otimes f$ es mono si y sólo si $1_k \times f$ es mono, esto es, $\bigoplus P_k$ es plano si y sólo si cada P_k es plano □

COROLARIO 4.3.4. *Los módulos libres son planos*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo módulo libre es isomorfo a una suma directa del anillo, aplicando el Teorema 4.3.3 y el Ejemplo 4.3.2 se tiene el resultado. □

COROLARIO 4.3.5. *Los módulos proyectivos son planos*

DEMOSTRACIÓN. Si un módulo M es proyectivo entonces es sumando directo de un módulo libre y por el Teorema 4.3.3 se tiene que M es plano. □

TEOREMA 4.3.6. *El límite directo de un sistema de módulos planos, es plano.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\{P_i\}_I, \{P_i \xrightarrow{f_{ij}} P_j\}_{i\leq j})$ un sistema dirigido de R-módulos planos y $0 \to L \xrightarrow{\varphi} M$ exacta. Se quiere probar que $L \otimes \varinjlim\{P_i\} \xrightarrow{\varphi\otimes Id} M \otimes \varinjlim\{P_i\}$ es mono. Dado que cada P_i es plano, para cada $i \in I$, se tiene que $0 \to L \otimes P_i \xrightarrow{\varphi\otimes Id_{P_i}} M \otimes P_i$ es exacta. Por otro lado, se sabe que $L \times \varinjlim\{P_i\} \cong \varinjlim\{L \otimes P_i\}$ y lo mismo para M, así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \otimes P_i \arrow[r, "l\otimes a_i \mapsto \varphi(l)\otimes a_i"] \arrow[d, "l\otimes a_i \mapsto \overline{l\otimes a_i}"'] & M \otimes P_i \arrow[d, "\varphi(l)\otimes a_i \mapsto \overline{\varphi(l)\otimes a_i}"] \\
& \varinjlim\{L \otimes P_i\} \arrow[r] & \varinjlim\{M \otimes P_i\}
\end{tikzcd}$$

Si $\overline{\varphi(l) \otimes a_i} = \overline{0}$ entonces, por la contrucción del límite directo, $\varphi(l) \otimes a_i = \sum_{i\leq j}(\iota_j f_{ij}(x_i) - \iota_i(x_i)) \in \oplus\{M \otimes P_i\}$ par aun número finito de índices. Proyectando sobre el i-ésimo sumando, $\varphi(l) \otimes a_i = \iota_i f_{ij}(x_i) - \iota_i(x_i) = x_i - x_i = 0$ y como $\varphi \otimes Id_{P_i}$ es mono, entonces $l \otimes a_i = 0$ y así $\overline{l \otimes a_i} = \overline{0}$. De esta forma $\varinjlim\{L \otimes P_i\} \to \varinjlim\{M \otimes P_i\}$ es mono y también lo es $L \otimes \varinjlim\{P_i\} \to M \otimes \varinjlim\{P_i\}$. Así se concluye que $\varinjlim\{P_i\}$ es plano. □

COROLARIO 4.3.7. *Si todo submódulo finitamente generado de M es plano, entonces M es plano*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.2.6. se sabe que todo módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados, y por el Teorema 4.3.6, se obtiene el resultado. □

DEFINICIÓN 4.3.8. Una sucesión exacta $0 \to K \to L \to M \to 0$ es *pura* si para todo R-módulo derecho A_R, la sucesión $0 \to A \otimes K \to A \otimes L$ es exacta. Es decir, $0 \to A \otimes K \to A \otimes L \to A \otimes M \to 0$ es exacta (La exactitud de la derecha siempre se tiene).

DEFINICIÓN 4.3.9. Un submódulo N de un R-módulo M se llama *submódulo puro* de M en el caso de que la sucesión exacta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ sea pura.

En el capítulo 4 de [**15**], se muestra una equivalencia a la definición anterior:

PROPOSICIÓN 4.3.10. *N es puro en M si y sólo si para un sistema finito de ecuaciones lineales* $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = a_j, 1 \leq j \leq m$, *donde* $r_{ij} \in R$ *y* $a_i \in N$, *si el sistema tiene solución* $(s_1, ..., s_n) \in M^n$, *también tiene solución* $(t_1, ..., t_n) \in N^n$.

DEFINICIÓN 4.3.11. Un R-módulo ${}_RE$ se dice *puro-inyectivo* si ${}_RE$ tiene la propiedad de inyectividad relativa a la clase de sucesiones exactas puras izquierdas.

Dado que todo R-módulo es límite directo de sus submódulos finitamente generados y los límites directos preservan monomomorfismos, se tiene entonces el siguiente teorema:

TEOREMA 4.3.12. *Una sucesión exacta* $0 \to K \to L \to M \to 0$ *es pura si y sólo si para todo* F_R *finitamente generado se tiene que* $0 \to F \otimes K \to F \otimes L \to F \otimes M \to 0$ *es exacta.*

El siguiente teorema es una caracterización para módulos planos:

TEOREMA 4.3.13. *Sea* ${}_RP$ *un módulo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) ${}_RP$ *es plano*
(b) *Toda sucesión* $0 \to K \to L \to P \to 0$ *es pura*
(c) *Existe una sucesión* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *pura con* N *plano.*

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $0 \to K \to L \to P \to 0$ exacta. Por el Teorema 4.3.8 se medirá la pureza en módulos finitamente generados. Sea F_R finitamente generado, por definición hay una sucesión exacta $0 \to K \to R^n \to F \to 0$. Dado que P y R^n son planos y $R^n \otimes M \cong M^n$ para todo R-módulo M, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & K \otimes A \arrow[r, "f \mapsto d"] \arrow[d, "f \mapsto g"] & K \otimes B \arrow[r, "d \mapsto e"] \arrow[d, "d \mapsto c"] & K \otimes P \arrow[r] \arrow[d, "e \mapsto 0 \Rightarrow e=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r, "b \mapsto c", "g \mapsto c \Rightarrow b=g \Rightarrow a=0"'] \arrow[d, "b \mapsto a"] & B^n \arrow[r, "c \mapsto 0"] \arrow[d, "c \mapsto 0"] & P^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & F \otimes A \arrow[r, "a \mapsto 0"] \arrow[d] & F \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Se quiere probar que $F \otimes A \to F \otimes B$ es mono, pero esto se ve haciendo la persecución de elementos en el diagrama.

$(b) \Rightarrow (c)$. Dado que R es un generador de R-Mod, entonces se tiene la exactitud de $R^{(X)} \to P \to 0$, para cierto conjunto X. Si K es el Ker de dicho epimorfismo, entonces se tiene que existe $0 \to K \to R^{(X)} \to P \to 0$ es exacta pura por hipótesis y además $R^{(X)}$ es plano.

$(c) \Rightarrow (a)$. Considere $0 \to I \hookrightarrow R \to R/I \to 0$. Al aplicar el funtor $Id \otimes \_$, a la sucesión de la hipótesis se obtiene:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & I \otimes M \arrow[r, "e \mapsto f", "f \mapsto c \Rightarrow f=b \Rightarrow a=0"'] \arrow[d, "e \mapsto d"] & I \otimes N \arrow[r, "b \mapsto a"] \arrow[d, "b \mapsto c"] & I \otimes P \arrow[r] \arrow[d, "a \mapsto 0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d \mapsto c"] \arrow[d, "d \mapsto \overline{d}"] & N \arrow[r, "c \mapsto 0"] \arrow[d, "c \mapsto \overline{0}"] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/IM \arrow[r, "\overline{d} \mapsto \overline{0} \Rightarrow \overline{d}=\overline{0}"'] \arrow[d] & N/IN \arrow[r] \arrow[d] & P/IP \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Pues, $R \otimes \_ \cong Id$ y $R/I \otimes A \cong A/IM$ para todo R-módulo A. Lo que se quiere es mostrar que $I \otimes P \to P$ es mono para lo cuál se verifica la persecución de elementos. $\square$

Lema 4.3.14. *Sea ${}_RE$ es cogenerador inyectivo en R-Mod. Entonces* $0 \to_R N \to_R M$ *es exacta si y sólo si* $\mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(N,E) \to 0$ *es exacta.*

Recuerde que un R-módulo M es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}(\_, M)$ es exacto derecho, por lo tanto manda monos a epis.

Teorema 4.3.15. *Sea ${}_RE$ cogenerador inyectivo y ${}_RP_S$, entonces P_S es plano si y sólo si ${}_S\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo.*

Demostración. Suponga que P_S es plano, se probará que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo. Considere $0 \to N \to M$ exacta; dado que P_S es plano, entonces se tiene la exactitud $0 \to P \otimes N \to P \otimes M$ y como E es un cogenerador inyectivo, por el Lema 4.3.13 se tiene que $\mathrm{Hom}(P \otimes M, E) \to \mathrm{Hom}(P \otimes N, E) \to 0$ es exacta. Pero, se sabe que $\mathrm{Hom}(P \otimes M, E) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(P,E))$ y lo mismo para N (par adjunto). De esta forma, se obtiene que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo.

Recíprocamente, suponga ahora que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo. Por demostrar que P_S es plano, para esto considere $0 \to N \to M$, se mostrará que $0 \to P \otimes N \to P \otimes M$ es exacta. Dado que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo, entonces se tiene la exactitud $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(P,E)) \to \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(P,E)) \to 0$. Por el mismo argumento utilizando en la primera parte (par adjunto), se tiene que $\mathrm{Hom}(P \otimes M, E) \to \mathrm{Hom}(P \otimes N, E) \to 0$ es exacta y por ser E cogenerador inyectivo, se aplica el Lema 4.3.13 y se obtiene el resultado.

□

Lema 4.3.16. *El grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de la categoria Ab*

Demostración. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible, siendo éste un cociente de $\mathbb{Q}$, entonces es inyectivo. Sea M un grupo abeliano, y sea $m \in M$, con $m \neq 0$. Si m tiene orden infinito, defina $f\colon \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $m \mapsto \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$; si m tiene orden finito, dígase n, defina $f\colon \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $m \mapsto 1/n + \mathbb{Z}$. En ambos casos, $f(m) \neq 0$. Ahora se usa la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para extender f a todo M. □

Tomando, $R = \mathbb{Z}$ y $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se obtiene:

Corolario 4.3.17. *P_S es plano si y sólo si ${}_S\mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo.*

El siguiente criterio para planitud puede ser comparado en cierta forma al criterio de Baer para la inyectividad.

Teorema 4.3.18. *${}_RP$ es plano si y sólo si para todo ideal derecho I de R se tiene que $0 \to I \otimes P \to R \otimes P \cong P$ es exacta.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$). Es claro por la definición de plano.

($\Leftarrow$). Sea $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$ por hipótesis, $0 \to I \otimes P \to R \otimes P$ es exacta y dado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo, esto implica que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(I, \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R \otimes P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(I \otimes P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

conmute. Esto quiere decir que para cada $I \overset{\varphi}{\to} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ existe $R \overset{\psi}{\to} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $\varphi = \psi \circ \iota$. Como lo anterior ocurre para cada ideal derecho I de R, aplicando el Criterio de Baer 2.2.20, $\mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo y por el Teorema 4.3.15, P es plano. $\square$

El resultado anterior, se puede mejorar si se restringe a ideales finitamente generados.

TEOREMA 4.3.19. *${}_RP$ es plano si y sólo si para todo ideal derecho J finitamente generado de R se tiene que $0 \to J \otimes P \to R \otimes P \cong P$ es exacta.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$). Es por el Teorema 4.3.18.

($\Leftarrow$). Sea $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$. Por lo demostrado en 4.3.18, basta demostrar que $I \otimes P \overset{\iota \star 1}{\to} P$ es mono, donde $i \otimes p \mapsto ip$. Sea $x \in I \otimes P$, entonces $x = \sum_{k=1}^{n} j_k \otimes x_k$ con $j_k \in I$, $x_k \in P$. Considere el ideal finitamente generado $J = \langle j_1, ..., j_n \rangle \hookrightarrow R$. Note que $x \in J \otimes P$. Si $x \mapsto 0$, entonces por la hipótesis, $x = 0$. Esto prueba que $\iota \star 1$ es mono y P es plano. $\square$

LEMA 4.3.20. *Sea I un ideal bilateral de R y sea ${}_RN \leq_R M$ Entonces son equivalentes:*

(a) *$IN = N \cap IM$.*
(b) *$0 \to (R/I) \otimes_R N \to (R/I) \otimes_R M$ es un monomorfismo de R-módulos*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este lema es inmediata debido al Teorema 4.1.6. $\square$

TEOREMA 4.3.21. *Sea I un ideal bilateral de R. Entonces son equivalentes:*

(a) *Para todo $N \leq M, IN = N \cap IM$.*
(b) *Para todo ${}_RJ \leq R, IJ = I \cap J$.*
(c) *$(R/I)_R$ es plano*

DEMOSTRACIÓN. (a) implica (b) es directo, y (b) implica (c) es por el Teorema 4.3.18 junto con el Lema 4.3.20 y finalmente (c) implica (a) es por el Lema 4.3.20. □

4.4. Anillos puro-semisimples

Para poder encontrar las caracterizaciones que hagan posible generalizar resultados hallados en los anillos semisimples y poder hacer un estudio en la retícula de prerradicales de un anillo puro-semisimple, es de suma importancia tener en cuenta como trabajar la Teoría de pureza y puro-inyectividad. Esta teoría podría ser llamada *la Teoría de sistemas de ecuaciones lineales para módulos*. Un sistema típico dentro de este formato tiene la siguiente forma: Empezando con un R-módulo M, un elemento $(m_i)_{i\in I} \in M^I$, y una matriz $(r_{ij})_{i\in I, j\in J}$ con un número finito de elementos de R en cada fila y de esta forma considerar el sistema

$$\sum_{j\in J} r_{ij} X_j = m_i \ \ (i \in I), \quad (\star)$$

y se llama a cada elemento de M^J que satisface la ecuación $(\star)$ una solución en M. Un primer indicador de una relación entre tales sistemas y la teoría de pureza y puro-inyectividad fue expuesta por Fieldhouse ([**9**]), quien observó que la pureza de un submódulo N de un R-módulo M es equivalente a la siguiente condición: *Todo sistema finito de ecuaciones lineales con coeficientes al lado derecho en* N, *el cual es soluble en* M, *tiene solución en* N. Este resultado daba como resultado un puente que conectaba sistemas lineales y el concepto puro-inyectivo, pero tales sistemas no tienen que ser finitos como dice el siguiente resultado

TEOREMA 4.4.1 (Warfield,1969, [**25**]). *Para cada $M \in R$-Mod, son equivalentes*

(1) *M es puro-inyectivo*
(2) *Cualquier sistema de la forma $(\star)$ que sea finitamente soluble en M (esto es, tiene la propiedad que, para cualquier subconjunto finito $J \subseteq I$, el subsistema finito de ecuaciones indicadas por $j \in J$ es soluble en M.) tiene una solución global en M.*
(3) *M es un sumando directo de un R-módulo Hausdorff y compacto N (es decir, N es un grupo abeliano compacto y Hausdorff tal que todas las multiplicaciones por elementos de R son continuas).*

Aunque la parte (3) del teorema anterior relaciona conceptos topológicos, las partes (1) y (2) del Teorema 4.4.1 traen consigo ciertas implicaciones interesantes. Para observarlas, se debe definir lo siguiente:

Definición 4.4.2. Dado un anillo asociativo con identidad, un R-módulo M se dice *algebraicamente compacto* si cada sistema

$$\sum_{j \in J} r_{ij} X_j = m_i \ \ (i \in I)$$

basado en una matriz, (r_{ij}), con un número finito de elementos de R y $m_i \in M$, el cuál es finitamente soluble en M, tiene solución global en M. Más aún, M se dice $\sum$-algebraicamente compacto en caso de que todas las sumas directas de copias de M son algebraicamente compactos.

Luego, el Teorema de Warfield, 4.4.1, lo que afirma es que los módulos puro-inyectivos y los módulos algebraicamente compactos coinciden.

Definición 4.4.3. Un anillo R es puro-semisimple (izquierdo) si toda sucesión exacta pura de R-módulos izquierdos se escinde

Se sabe del capítulo anterior que dado un anillo semisimple R, es posible dar caracterizaciones para la categoría R-Mod y la clase R-pr. De hecho, estas caracterizaciones se pueden sintetizar diciendo que todo R-módulo es semisimple e inyectivo y R-pr es una retícula booleana finita. Lo que se desea en este capítulo es dar caracterizaciones similares que extiendan los resultados anteriores pero tomando en cuenta ahora, los anillos puro-semisimples. De ahora en adelante, se tomará siempre como referencia anillos puro-semisimples izquierdos a menos que se diga contrario.

Teorema 4.4.4. *R es un anillo puro-semisimple izquierdo si y sólo si todo R-módulo izquierdo es puro-inyectivo.*

Demostración. Sea R un anillo puro-semisimple y se $M \in R$-Mod. Se deberá probar que M es puro-inyectivo; para esto considere una sucesión exacta pura $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L$ y un R-morfismo $K \xrightarrow{f} M$. Dado que R es puro-semisimple, existe $\eta\colon L \to K$ tal que $\eta \circ \lambda = 1_K$. Tome $F = f \circ \eta$ y se prueba lo deseado.

Recíprocamente, suponga ahora que todo R-módulo es puro-inyectivo y considere una sucesión exacta pura, $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L \xrightarrow{\mu} M \to 0$. Por hipótesis K es puro-inyectivo y por tanto se tiene que existe $F\colon L \to K$ tal que

$$\begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[u, "Id_K"] \arrow[r, "\lambda"'] & L \arrow[ul, dashed, "F"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es, $F \circ \lambda = Id_K$, lo cual implica que $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L \xrightarrow{\mu} M \to 0$ se escinde y R es puro-semisimple.

□

De acuerdo a este teorema y al hecho de que todo módulo inyectivo es puro-inyectivo, es natural que el primer ejemplo para anillos puro-semisimples sea el siguiente:

EJEMPLO 4.4.5. Todo anillo semisimple es puro-semisimple

Para poder dar una caracterización en torno a la descomposición de módulos cuando un anillo es puro-semisimple, se usa como herramienta el siguiente teorema cuya demostración será omitida pero puede ser encontrada con más detalle en [**14**].

TEOREMA 4.4.6 (Gruson-Jensen,Huisgen-Zimmermann,[**26**]). *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Todo R-módulo es una suma directa de submódulos finitamente generados.*
(2) *Existe un número cardinal $\aleph$ tal que todo R-módulo es una suma directa de submódulos $\aleph$-generados.*
(3) *Todo R-módulo es suma directa de submódulos inescindibles*
(4) *Todo R-módulo es algebraicamente compacto.*

Por el Teorema 4.4.4 y el Teorema de Warfield, 4.4.1, se establece el siguiente resultado

TEOREMA 4.4.7. *Para un anillo R son equivalentes las siguientes condiciones:*

(1) *R es puro-semisimple*
(2) *Toda sucesión exacta pura se escinde*
(3) *Todo R-módulo es puro-inyectivo*
(4) *Todo R módulo es una suma directa de submódulos finitamente generados*
(5) *Existe un conjunto X de R-módulos tal que todo R-módulo es isomorfo a una suma directa de elementos de X.*

Por medio del teorema anterior se puede dar el siguiente ejemplo de un anillo puro-semisimple que no es semisimple.

Ejemplo 4.4.8. Considere $\mathbb{Z}_{p^n}$ con p primo y $n \geq 1$. Como anillo $\mathbb{Z}_{p^n}$ es conmutativo y su retícula de ideales es una cadena finita

$$0 < p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} < ... < p^2\mathbb{Z}_{p^n} < p\mathbb{Z}_{p^n} < \mathbb{Z}_{p^n}$$

que consta de los $\mathbb{Z}_{p^n}$-módulos totalmente invariantes de $\mathbb{Z}_{p^n}$. En [**11**], se demuestra que todo $\mathbb{Z}_{p^n}$-módulo es isomorfo a una suma directa de ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ y utilizando el hecho de que los ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ forman un conjunto, la parte (5) del Teorema 4.4.7 implica que $\mathbb{Z}_{p^n}$ es un anillo puro-semisimple. Además, cabe notar que $\mathbb{Z}_{p^n}$ no es semisimple, por lo que la clase de anillos puro-semisimples es una clase más amplia que la clase de anillos semisimples.

Ejemplo 4.4.9. Sea A una K-álgebra de dimensión finita sobre un campo K. Entonces, por el Teorema 4.6 de ([**23**]), todo A-módulo M, tiene una descomposición de la forma

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

donde $M_1, ..., M_n$ son A-submódulos inescindibles de M. Por la parte (3) del Teorema 4.4.6 [Gruson-Jensen,Huisgen-Zimmermann], y el Teorema 4.4.7, se tiene que toda K-álgebra de dimensión finita, como anillo es puro-semisimple. En particular, si Q es un carcaj finito acíclico y K un campo. Entonces el álgebra de caminos KQ es de dimensión finita y por tanto KQ tiene estructura de anillo puro-semisimple.

Ahora bien, dado un anillo asociativo R con identidad, se sabe que si R es semisimple entonces R es artiniano. ¿sucederá lo mismo en el caso de que R sea puro-semisimple? La demostración no es tan simple como parece. El Teorema de Faith-Walker (capítulo 7, [**1**]), afirma que un anillo R es noetheriano izquierdo si y sólo si existe un cardinal κ tal que todo R-módulo inyectivo es suma directa de módulos κ-generados, por lo tanto (2) del Teorema 4.4.6 implica que un anillo puro-semimple es noetheriano izquierdo.

Por otro lado, uno de los resultados de Chase mencionados en [**14**], afirma que: *Si existe un cardinal κ tal que todo los R-módulos R^I son sumas directas de submódulos κ-generados, entonces R es perfecto izquierdo* (Chase,[**4**]). Teniendo en cuenta todo esto, se puede enunciar el siguiente resultado que muestra que todo anillo puro-semisimple izquierdo es artiniano izquierdo.

Teorema 4.4.10. *Si R es anillo puro-semisimple izquierdo entonces R es artiniano izquierdo.*

Demostración. En primer lugar, la parte (2) del Teorema 4.4.6 [Gruson-Jensen,Huisgen-Zimmermann] dice que existe un número cardinal $\aleph$ tal que todo R-módulo es una suma directa de submódulos

$\aleph$-generados. Pero (2) y el Teorema de Chase ([**4**]) implican que R es perfecto izquierdo. Además, (2) y el Teorema de Faith-Walker ([**1**]) implican que R es noetheriano izquierdo, y al ser R noetheriano izquierdo, cumple la condición de cadenas ascendentes (a.c.c.) en anuladores. Aplicando el Teorema de Faith ([**7**]), como R es perfecto izquierdo y cumple la condición a.c.c. en anuladores entonces R es semiprimario izquierdo (el radical de Jacobson J de R nilpotente y R/J semisimple). Finalmente, por el Teorema de Hopkins (ver capítulo 4, [**1**]), R es semiprimario y noetheriano izquierdo si y sólo si R es artiniano izquierdo. $\square$

La siguiente pregunta en torno a los anillos puro-semisimples es ¿Qué sucede con la retícula R-pr? Una respuesta a este cuestionamiento la da el siguiente resultado:

TEOREMA 4.4.11. *Si R es un anillo puro-semisimple entonces R-pr está en correspondencia biyectiva con un conjunto.*[1]

DEMOSTRACIÓN. Si R es puro-semisimple, entonces por el Teorema 4.4.7, existe un conjunto X de R-módulos tal que todo R-módulo es isomorfo a una suma directa de elementos de X. Sea $X = \{A_x\}_{x\in X}$ y defina $\Gamma\colon R\text{-pr} \to \prod_{x\in X} S_{fi}(A_x)$, donde $S_{fi}(A_x)$, denota los submódulos totalmente invariantes de A_x y $\Gamma(\sigma) = (\sigma(A_x))_{x\in X}$ para todo $\sigma \in R$-pr. Por demostrar que Γ es inyectiva; para esto suponga que $\sigma(A_x) = \gamma(A_x)$ para todo $x \in X$ y se probrará que $\sigma = \gamma$. En efecto, sea $M \in R$-Mod, entonces $M = \bigoplus_{x\in X} N_x^{(\kappa_x)}$ y $N_x \cong A_x$ para todo $x \in X$. Luego, dado que $\sigma(A_x) = \gamma(A_x)$ para todo $x \in X$ entonces $\sigma(N_x) = \gamma(N_x)$ para todo $x \in X$ y de esta forma se tiene que

$$\sigma(M) = \bigoplus_{x\in X} \sigma(N_x)^{(\kappa_x)} = \bigoplus_{x\in X} \gamma(N_x)^{(\kappa_x)} = \gamma(M)$$

Lo anterior es válido para cada $M \in R$-Mod, por tanto $\sigma = \gamma$. De esta forma, hay una función inyectiva de R-pr a el conjunto $\prod_{x\in X} S_{fi}(A_x)$, y se concluye el resultado. $\square$

El teorema anterior proporciona una cota para la cardinalidad de R-pr cuando R es un anillo puro-semisimple y está dada por el siguiente teorema:

[1]Formalmente, R-pr es un conglomerado puesto que sus elementos son funtores entre clases pero se puede expresar diciendo que "R-pr es un conjunto "

TEOREMA 4.4.12. *Sea R un anillo puro-semisimple. Entonces*
(1) *Si $|R| \geq \aleph_0$ entonces $|R\text{-}pr| \leq 2^{2^{|R|}}$*
(2) *Si $|R| < \aleph_0$ entonces $|R\text{-}pr| \leq 2^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere la función a $\Gamma \colon R\text{-pr} \to \prod_{M\in\mathcal{F}} S_{fi}(M)$, donde $S_{fi}(M)$, denota los submódulos totalmente invariantes de M y $\mathcal{F}$ el conjunto completo e irreduntantes de representantes de clases de isomorfismos de R-módulos finitamente generados y $\Gamma(\sigma) = (\sigma(M))_{M\in\mathcal{F}}$ para todo $\sigma \in R$-pr. Por la demostración del Teorema 4.4.11, se tiene que Γ inyectiva y por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq |\prod_{M\in\mathcal{F}} S_{fi}(M)| \tag{4.4}$$

Por lo tanto, para determinar una cota para la cardinalidad de R-pr, basta con encontrar una cota para $|\prod_{M\in\mathcal{F}} S_{fi}(M)|$.

Ahora, si $M \in \mathcal{F}, M \cong R^n/K$ para K submódulo de R^n y $n \geq 1$. Por tanto, $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ donde $\mathcal{F}_n = \{R^n/K : K \leq R^n\}$ y $|\mathcal{F}_n| \leq 2^{|R|^n}$.

Para probar (1), sea $|R| \geq \aleph_0$ entonces $|R|^n = |R|$ y $|\mathcal{F}_n| = 2^{|R|^n} = 2^{|R|}$ lo anterior para cada $n \geq 1$. Así $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0 \cdot 2^{|R|} = 2^{|R|}$. Por otra parte, $|S_{fi}(M)| \leq 2^{|R|^n} = 2^{|R|}$ por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq (2^{|R|})^{|\mathcal{F}|} \leq 2^{2^{|R|}}.$$

Para (2). Si $|R| < \aleph_0$, entonces $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$ y $|S_{fi}(M)| < 2^{|R|^n}$ y por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq (2^{|R|^n})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

$\square$

En el caso que R es un anillo semisimple, la información obtenida sobre la retícula de prerradicales era considerablemente más detallada al decir de que era una retícula booleana finita. Se desea entonces hallar más información referente a propiedades de la retícula de R-pr pero tomando en cuenta los anillos puro-semisimples. Para intentar realizar un estudio más a fondo se propone una herramienta, que quizá en trabajo posterior a éste, pueda dar esta información que se desea; esta herramienta son las *conexiones de Galois*.

4.5. Conexiones de Galois y dominios de planitud

Sea ${}_R\mathcal{E}$ la colección de todas las sucesiones exactas cortas de R-módulos izquierdos de la forma $0 \to N \to M \to K \to 0$ donde N, M, K son R-módulos cualesquiera. Ahora, considere la relación $\mathcal{R} = \{(A_R, E) \in \text{Mod-}R \times {}_R\mathcal{E} |\ A \otimes E \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{E}\}$. Por el Teorema 1.3.10, esta relación induce una conexión de Galois antítona (invierte el orden), dada de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}(\text{Mod-}R) \underset{g_{\mathcal{R}}}{\overset{f_{\mathcal{R}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}({}_R\mathcal{E}) \tag{4.5}$$

Si $\mathcal{C} \subset \text{Mod-}R$ entonces

$$f_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}) = \{E \in {}_R\mathcal{E} : C \otimes E \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{E}, \forall C \in \mathcal{C}\}$$

Lo anterior quiere decir que, $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ consta de las sucesiones exactas de R-módulos, $0 \to N \to M \to K \to 0$, tales que para todo $C \in \mathcal{C}$, la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos, $0 \to C \otimes N \to C \otimes M \to C \otimes K \to 0$ es exacta. Esto equivale a considerar monomorfismos $0 \to N \to M$ tales que para todo $C \in \mathcal{C}$ se tiene la exactitud de $0 \to C \otimes N \to C \otimes M$. En este caso a $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ se le llama *dominio de planitud* de $\mathcal{C}$.

Por otro lado, si $\mathcal{D} \subseteq {}_R\mathcal{E}$ entonces

$$g_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}) = \{A_R \in \text{Mod-}R : A \otimes E \in {}_Z\mathcal{E}, \forall E \in \mathcal{D}\}$$

Es decir, $g_{\mathcal{R}}(\mathcal{D})$ consta de todos los R-módulos derechos, A_R, tales que para toda sucesión exacta, $0 \to N \to M \to K \to 0$, en $\mathcal{D}$ se tiene que $0 \to A \otimes N \to A \otimes M \to A \otimes K \to 0$ es exacta o simplemente que cumpla que $A \otimes N \to A \otimes M$ sea monomorfismo. En este caso, a $g_{\mathcal{R}}(\mathcal{D})$ se le llama *dominio de pureza* de $\mathcal{D}$.

Observación 4.5.1. Note que $A_R \in \text{Mod-}R$ es plano si y sólo si $f_{\mathcal{R}}(\{A\}) = {}_R\mathcal{E}$. Además, $E \in {}_R\mathcal{E}$ es una sucesión exacta pura si y sólo si $g_{\mathcal{R}}(\{E\}) = \text{Mod-}R$

Los Teoremas 4.3.18 y 4.3.19 se pueden reformular en términos de la conexión de Galois (4.5) como sigue:

Proposición 4.5.2. *Para un módulo derecho A_R son equivalentes*

(a) $f_{\mathcal{R}}(\{A\}) = {}_R\mathcal{E}$
(b) $\{0 \to J \to R \to R/J \to 0 |\ {}_RJ \leq R\} \subseteq f_{\mathcal{R}}(\{A\})$
(c) $\{0 \to J \to R \to R/J \to 0 |\ {}_RJ \leq R\ \ f.g.\} \subseteq f_{\mathcal{R}}(\{A\})$

y la Proposición 4.3.12 se puede reformular en términos de la conexión de Galois (4.5) como sigue:

Proposición 4.5.3. *Para una sucesión exacta $E \in {}_R\mathcal{E}$ son equivalentes*

(a) $g_{\mathcal{R}}(\{E\}) = Mod\text{-}R$
(b) $\mathcal{F}_R \subseteq g_{\mathcal{R}}(\{E\})$ *donde* $\mathcal{F}_R$ *son los módulos derechos finitamente generados.*

Observación 4.5.4. Note que si una sucesión exacta $E \in {}_R\mathcal{E}$ se escinde, entonces E es exacta pura.

Considere la siguiente notación: ${}_R\mathbf{P}$ representa la clase de módulos izquierdos planos, ${}_R\mathbf{Pr}$ los izquierdos proyectivos, ${}_R\mathcal{EP}$ las sucesiones exactas puras de módulos izquierdos y ${}_R\mathcal{EE}$ las sucesiones exactas que se escinden; la notación $\mathbf{P}_R$, hará referencia a la clase de módulos derechos planos y $\mathbf{Pr}_R$ denotará la clase de módulos derechos proyectivos. De esta forma, se puede notar que $\mathbf{Pr}_R \subseteq \mathbf{P}_R$ y ${}_R\mathcal{EE} \subseteq {}_R\mathcal{EP}$.

Ahora bien, si se tiene en cuenta la conexión de Galois (4.5), se puede observar que $f_{\mathcal{R}}(\text{Mod-}R) = {}_R\mathcal{EP}$ y $g_{\mathcal{R}}({}_R\mathcal{E}) = \mathbf{P}_R$. Esto significa que ${}_R\mathcal{EP}$ es la menor clase cerrada en $\mathcal{P}({}_R\mathcal{E})$ y que $\mathbf{P}_R$ es la menor clase cerrada en $\mathcal{P}(\text{Mod-}R)$, ambas respecto a la conexión de Galois (4.5). (ver la Observación 1.3.11). La siguiente figura ilustra la situación:

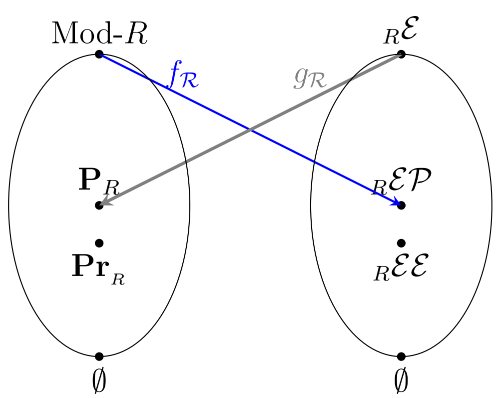

Figura 1. Conexión de Galois inducida por $\mathcal{R}$

Si se considera un anillo R semisimple, de acuerdo al Teorema 3.2.9 y la Observación 4.5.4, se tiene que $\text{Mod-}R = \mathbf{P}_R = \mathbf{Pr}_R$ y ${}_R\mathcal{E} = {}_R\mathcal{EP} = {}_R\mathcal{EE}$.

Si ahora R es un anillo puro-semisimple izquierdo, las cosas cambian: Por un lado, se tiene que todo módulo izquierdo que es plano, es proyectivo. De hecho, esto es una caracterización de los anillos perfectos izquierdos, y en efecto todo anillo puro-semisimple es perfecto (veáse la demostración del Teorema 4.4.10.). Por otro lado, las sucesiones exactas que se escinden coinciden con las sucesiones exactas puras.

Teniendo en cuenta la Figura 1. y el hecho de que ${}_R\mathcal{EP}$ es la menor clase cerrada en $\mathcal{P}({}_R\mathcal{E})$ y que $\mathbf{P}_R$ es la menor clase cerrada en $\mathcal{P}(\text{Mod-}R)$, la idea de usar la conexión de Galois (4.5), es trabajar sobre los sistemas de cerrados que induce esta conexión y así obtener clases de módulos que den caracterizaciones en términos de dominios de planitud y dominios de pureza. Además, se pueden estudiar clases de anillos mediante la coincidencia de alguna clase cerrada en $\mathcal{P}({}_R\mathcal{E})$, con la clase ${}_R\mathcal{EE}$, por un lado, y por el otro, clases de anillos caracterizados por la coincidencia de alguna clase cerrada en $\mathcal{P}(\text{Mod-}R)$ con la clase $\mathcal{P}r_R$. Nótese que estas clases de anillos estarían por un lado en la clase de anillos puro-semisimples, y por el otro en la clase de anillos perfectos. En ambos casos, la clase más pequeña corresponde a la clase de los anillos semisimples.

Otra forma de abordar este tema es utilizando una relación, $\mathcal{S} \subseteq R\text{-Mod} \times {}_R\mathcal{E}$ dada por $(A, E) \in \mathcal{S}$ si y sólo si $\text{Hom}_R(A, E) \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{E}$. De forma análoga, esto inducirá una conexión de Galois y un sistema de cerrados en $\mathcal{P}(R\text{-Mod})$ y $\mathcal{P}({}_R\mathcal{E})$, y se puede hacer un similar al propuesto para la conexión de Galois (4.5).

Finalmente, al tomar en cuenta diversas clases de anillos entre los anillos semisimples y los anillos puro-semisimples, éstos dan la posibilidad de estudiar las retículas de prerradicales en situaciones intermedias.

Conclusiones

Para un anillo R asociativo con unidad, se mostró que son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) R es semisimple.
(2) Todo R-módulo es inyectivo.
(3) Todo R-módulo es proyectivo.
(4) Todo R-módulo es semisimple.
(5) Toda sucesión exacta de R-módulos se escinde.
(6) R-pr es una retícula booleana finita.

Lo anterior muestra que se tienen resultados que describen de forma completa la categoría de módulos y la retícula de prerradicales para un anillo semisimple. Basado en la información que se tiene sobre los anillos semisimples, se hace una reseña acerca de los estudios relacionados a la clase de los anillos puro-semisimples, para analizar algunas caracterizaciones de estos anillos por medio de su categoría de módulos y para poder encontrar más información sobre su retícula de prerradicales con el fin de contribuir con el estudio de los anillos puro-semisimples.

En este trabajo se mostró que para un anillo puro-semisimple izquierdo R, se tienen equivalencias en torno a su categoría R-módulos izquierdos. Estas equivalencias se pueden mencionar diciendo que todo R-módulo es puro inyectivo, que toda sucesión exacta pura de R-módulos izquierdos se escinde y que todo R-módulo izquierdo es suma directa de módulos finitamente generados. Por otro lado, si bien la retícula de prerradicales de un anillo puro-semisimple no está completamente descrita como para el caso de un anillo semisimple, se probó que existe una biyección entre dicha retícula y un conjunto, dando una cota para la cardinalidad de ésta. Finalmente, se proponen conexiones de Galois como una herramienta para estudiar esta clase de anillos pero también con la posibilidad de estudiar clases intermedias de anillos, entre los semisimples y puro-semisimples, los cuales puedan resultar más accesibles.

Bibliografía

[1] Anderson F. W and Fuller K.R. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag New York, 1992

[2] Auslander M. *Representation theory of Artin algebras II.* Communications in Algebra.(1) 269310. (1974)

[3] Bican. L., Kepka T., and Nemec P. *Rings, Modules and Preradicals.* Marcel Dekker, INC. New York and Basel.(1982)

[4] Chase S.U. *Direct products of modules.* Transactions of the American Mathematical Society. 97: 457-473. (1960)

[5] Dummit David S. and Foote Richard M. *Abstract Algebra.* Third edition, John Wiley & Sons, Inc. 2004

[6] Erné M., Koslowski J.,Melton A., and Strecker E., *A primer on Galois Connections.* Papers on general topology and applications (Madison, WI, 1991) Ann. New York Acad. Sci., Vol, 704, pp.103-125

[7] Faith C. *Rings with Ascending Condition on Annihilators.* Institute for Defenses Analyses. New Jersey. 179-191. (1965)

[8] Fernández-Alonso R. and Magaña J. *Rings with Galois Connections between lattices of prerradicals induced by adjoint pairs between categories of modules.* Applied Categorical Structures. DOI 10.007/s10485-10485-015-9395-x Springer Science+Business Media Dordrecht 2015

[9] Fieldhouse D.J. *Aspects of purity in Ring Theory.* Proc. Conf. Univ. Oklahoma, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 7, Dekker, New York, 1974, pp. 185-196

[10] Fuller K.R. and Reiten I. *Note on rings of finite representation type and decompositions of modules.* Proceedings of the American Mathematical Society 50: 9294 (1975).

[11] Gavito Silvia. *La retícula de prerradicales sobre los anillos* $\mathbb{Z}_{p^n}$. Tesis de Maestría. UAM 2005

[12] Gavito Silvia. *Sobre la condición de ser conjunto para retículas de prerradicales.* Tesis de doctorado. UAM 2013

[13] Grätzer G. *Lattice Theory: Foundation.* Birkhäuser, Basel. 2011

[14] Huisgen-Zimmerman Birge *Purity,Algebraic Compactness, Direct Sum Descompositions, and Representation Type.* In Infinite Length Modules (H. Krause and C.M. Ringel, Eds.),331-367, Basel(2000)

[15] Lam and Tsit-Yuen. *Lectures on modules and rings.* Graduate Texts in Mathematics No. 189, Berlin, New York: Springer-Verlag.

[16] Mac Lane Saunders. *Categories for the Working Mathematician.* Second edition,Springer-Verlag New York, 1998

[17] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals.* Communications in Algebra, 30(3):1533-1544, 2002

[18] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals II: Partitions.* Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 1 No. 2 (2002) 201-214.

[19] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals III: Operators.* Journal of Pure and Applied Algebra, 190 (2004) 251-265.

[20] Rincón H. *Notas de Álgebra Moderna.* Transcritas por Alberto Alcalá.

[21] Ringel C.M. and Tachikawa H. *QF-3 rings.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. (272): 4972. (1975)

[22] Rotman Joseph J. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press New York, 1979

[23] Skowroński A. and Yamagata K. *Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory.* European Mathematical Society, 2011

[24] Suppes P. *Axiomatic Set Theory.* Dover Publications, INC. 1972

[25] Warfield R.B., Jr. *Purity and algebraic compactness for modules.* Pacific Journal of Mathematics. 28: 31-3672. (1972)

[26] Zimmermann W. *Einige Charakterisierungen der Ringe über denen reine Untermoduln direkte Sum-manden sind.* Bayer. Akad. Wiss. Math-Natur. KI. S-B. 77-79. (1973)