



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**FACTORIZACIÓN DE HADAMARD
PARA POLINOMIOS HURWITZ**

Tesis que presenta
M. en C. Carlos Arturo Loredo Villalobos
para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Sinodales:

Luis Verde Star

Dr. Luis Verde Star
Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez
Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz
Dr. Moisés Bonilla Estrada

UAM – Iztapalapa
UAM – Iztapalapa
IPN – CINVESTAV
IPN – CINVESTAV

J. Torres

[Signature]

[Signature]

[Signature]

México, D. F. Noviembre de 2012



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**FACTORIZACIÓN DE HADAMARD PARA
POLINOMIOS HURWITZ**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

M. en C. CARLOS ARTURO LOREDO VILLALOBOS

DIRECTOR DE TESIS
DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ

México, D.F. 6 de noviembre de 2012.

*Dedicado a Lorelie,
a mis padres y hermanas,
por su apoyo y motivación;
a los grandes amigos
que me ha dado mi alma mater.*

Índice general

Resumen	I
Introducción	III
1. Polinomios Hurwitz y criterios de estabilidad	1
1.1. Polinomios Hurwitz	1
1.2. Criterio de Routh-Hurwitz	3
1.3. Teorema de Hermite-Biehler	4
1.4. <i>Test</i> de estabilidad	6
1.5. Criterio de Routh	8
2. Producto de Hadamard	13
2.1. Definición del producto de Hadamard	13
2.2. Notas históricas	14
2.3. Algunas propiedades	15
3. Estabilidad del producto de Hadamard	17
3.1. Antecedentes del problema	17
3.2. Estabilidad y producto de Hadamard	18
4. Factorización estable de Hadamard	25
4.1. Análisis de polinomios de grado pequeño	25
4.2. Condiciones necesarias	29

4.3. Condiciones necesarias y suficientes	40
5. Relación con sistemas	43
5.1. La grúa	43
5.2. El motor Dedra de Fiat	47
Conclusiones y perspectivas	51
Bibliografía	55

Agradecimientos

El presente trabajo es la conclusión de un proyecto iniciado hace algunos años por invitación del Dr. Baltazar Aguirre. Durante este tiempo he tenido la fortuna de poder colaborar con él en otras publicaciones y diversos proyectos. Es por ello que quiero agradecer al profesor Aguirre el apoyo brindado y la confianza que ha depositado en mi durante todo este tiempo.

Quiero agradecer también al Dr. Javier Sánchez Pozos por sus enseñanzas, en el aula o fuera de ella. Sin duda, lo que he aprendido de su persona son parte ahora de mi formación matemática y trato de seguir su ejemplo para conducirme en mi actividad profesional.

Agradezco a CONACyT por el apoyo económico otorgado durante mis estudios de doctorado mediante su programa de becas a posgrados de calidad.

Finalmente quiero agradecer a cada uno de los sinodales por sus comentarios y observaciones que enriquecieron el presente trabajo.

Resumen

Los polinomios Hurwitz o estables juegan un papel importante en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y en la teoría de control. Una propiedad importante de dichos polinomios está relacionada con el producto de Hadamard. En décadas pasadas se probó que si $p, q \in \mathbb{R}[x]$ son dos polinomios Hurwitz, entonces su producto de Hadamard, denotado por $(p * q)$, es también un polinomio Hurwitz, es decir el producto de Hadamard preserva la estabilidad. Sin embargo la afirmación recíproca no siempre es cierta; es decir, no todos los polinomios Hurwitz pueden factorizarse como producto de dos polinomios estables del mismo grado n , si $n \geq 4$. En este trabajo presentamos algunos resultados para garantizar la existencia de dicha factorización, a la que hemos denominado factorización estable de Hadamard.

Introducción

El problema de determinar las raíces con parte real negativa de un polinomio con coeficientes reales ha sido ampliamente estudiado por los matemáticos desde el siglo XIX. Este tipo de polinomios se conocen en la literatura como polinomios estables o polinomios Hurwitz. Una gran cantidad de información sobre polinomios Hurwitz ha sido generada debido a su importancia para verificar la estabilidad de sistemas lineales continuos. Existen varios criterios para verificar si un polinomio es Hurwitz, quizá el más conocido sea el *Criterio de Routh-Hurwitz* (Hurwitz (1895)), aunque también son frecuentemente usados el *Teorema de Hermite-Biehler* (Hermite (1856)) y el *Test de estabilidad* (Bhattacharyya *et al.* (1995)). Cada uno por supuesto ofrece diferentes enfoques. Otros criterios, no menos importantes, y algunas preguntas interesantes sobre polinomios Hurwitz pueden ser encontradas en Bhattacharyya *et al.* (1995), Gantmacher (1959), Hinrichsen & Pritchard (2004) y Lancaster & Tismenetsky (1985).

La presencia de incertidumbres cuando se modela un fenómeno físico obliga a considerar la estabilidad de familias de polinomios. Excelentes referencias sobre familias de polinomios Hurwitz son Ackerman (2002), Barmish (1994) y Bhattacharyya *et al.* (1995). Al respecto es importante mencionar el *Teorema de Kharitonov* (Kharitonov (1978)) el cual es el más famoso resultado sobre familias de polinomios estables. Kharitonov estudió la estabilidad de una cierta clase de familias de polinomios, los llamados polinomios intervalo. Otras preguntas sobre polinomios intervalo pueden ser encontradas en Blanchini *et al.* (1998), Dabbene *et al.* (2007) y Willems &

Tempo (1999). A partir del hecho que el conjunto de polinomios Hurwitz no es convexo, la estabilidad de segmentos de polinomios también ha sido investigada (ver para consulta Aguirre *et al.* (2002), Aguirre & Suárez (2006), Bialas (1985) y Hinrichsen & Kharitonov (1995)). Puntos de vista geométricos y topológicos han sido utilizados en algunos trabajos. Por ejemplo en Hinrichsen & Pritchard (2004) se muestra que el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n con coeficientes positivos, \mathcal{H}_n^+ , es contraíble. Con ideas de topología diferencial en Aguirre-Hernández *et al.* (2009) se probó que \mathcal{H}_n^+ es un haz vectorial sobre \mathcal{H}_{n-k}^+ .

Por otra parte, también la relación entre producto de Hadamard y polinomios Hurwitz ha sido estudiada. En Garloff & Wagner (1996) se mostró que el conjunto de polinomios Hurwitz es cerrado bajo el producto de Hadamard. Sin embargo el procedimiento inverso, es decir factorizar un polinomio estable en dos polinomios estables, considerando como operación producto al producto de Hadamard, no siempre es posible. Así en Garloff & Shrinivasan (1996) se mostró que existen polinomios Hurwitz de grado 4 que no pueden factorizarse como producto de dos polinomios Hurwitz. Otras preguntas relacionadas pueden encontrarse en Garloff & Wagner (1994). La relación entre polinomios estables multivariados y el producto de Hadamard puede consultarse en Rodríguez-Angeles *et al.* (2004). Los resultados de Garloff y Wagner también han sido usados para el análisis de robustez (ver Fernández-Anaya (1999) y Loaiza (1999)).

En este proyecto estamos interesados en la factorización de un polinomio estable, entendiendo el término factorizable, no en el sentido de la operación producto usual de polinomios, sino en el sentido del producto de Hadamard. Entonces, a partir del resultado dado en Garloff & Shrinivasan (1996), un problema que aún no había sido resuelto era determinar bajo que condiciones un polinomio estable puede descomponerse en dos polinomios que sean también estables. En otras palabras, hallar condiciones para que un polinomio estable acepte una factorización estable de Hadamard. Es así que en el presente trabajo presentamos algunos resultados para que exista dicha factorización.

Grosso modo, el trabajo está conformado por cuatro capítulos. Los tres primeros ayudan a dar un contexto del problema a resolver, mientras que en el último mostramos nuestra contribución a la factorización de Hadamard. En el primer capítulo hacemos una revisión de los polinomios Hurwitz y de tres de los criterios clásicos que pueden encontrarse en la literatura para determinar, en condiciones necesarias y suficientes, cuándo un

polinomio real es Hurwitz. En el segundo capítulo abordamos el producto de Hadamard y algunas de sus propiedades. En el capítulo tres revisamos la conexión entre el producto de Hadamard y la estabilidad de polinomios, haciendo mención de cómo se ha aplicado dicho producto a distintas clases de polinomios estables. Finalmente, en el capítulo cuatro presentamos los resultados de nuestra investigación para resolver el problema de factorizar un polinomio estable con coeficientes reales así como su relación en sistemas donde podrían ser de utilidad estos resultados.

Polinomios Hurwitz y criterios de estabilidad



Los antecedentes y orígenes de los polinomios Hurwitz se remontan a la segunda mitad del siglo XIX. Durante esa época varios matemáticos se dieron a la tarea de encontrar condiciones necesarias y suficientes para determinar el número de raíces de una ecuación algebraica de grado arbitrario en distintas localidades del plano complejo (sobre y fuera del eje real, sobre el eje imaginario, en alguna de las mitades del plano, etc.).

James C. Maxwell (1831-1879) Nació en Edimburgo. Se graduó en Trinity College en 1854. Uno de los más importantes logros de Maxwell fue su extensión y formulación matemática de las teorías de electricidad y magnetismo de M. Faraday. Ganó el Premio Adams de 1857 con un artículo referente al movimiento de los anillos de Saturno. Alrededor de 1862 propuso que el fenómeno de la luz es un fenómeno electromagnético. En 1866, independientemente de L. Boltzmann, formula la Teoría cinética de los gases. En 1868, formuló el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de una ecuación algebraica de grado n se localicen en la mitad izquierda del plano, obteniendo resultados para cuando $n = 3$. Alrededor de 1874 formula cuatro ecuaciones diferenciales parciales que hoy llevan su nombre.

1.1. Polinomios Hurwitz

Los polinomios Hurwitz juegan un gran papel en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en la Teoría de Control. La estabilidad global de sistemas lineales invariantes $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (o local en sistemas no lineales) puede determinarse estudiando las raíces de su polinomio característico. Sabemos que un sistema será asintóticamente estable si todos sus valores propios están en la mitad izquierda del plano complejo. Este criterio es conocido desde el siglo XIX, sin embargo debido a la ausencia de procedimientos sistemáticos para calcular las raíces de polinomios de orden mayor a 5, la importancia de encontrar condiciones para verificar la estabilidad de un sistema considerando sólo los coeficientes del polinomio característico, fue uno de los principales problemas por resolver para los matemáticos de la naciente teoría matemática de la estabilidad.

En 1968 James Maxwell (Maxwell (1868)) propuso el problema matemático de encontrar condiciones bajo las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica se ubicaran en la mitad izquierda del plano complejo. Maxwell sabía que un sistema permanecía estable si todas las raíces del polinomio característico asociado tenían parte real negativa. El problema planteado por Maxwell ya había sido abordado por Charles Hermite en 1856. En Hermite (1856), Hermite estableció una conexión entre las raíces de un polinomio con coeficientes complejos y la *signatura* de una cierta forma cuadrática. En 1877, Edward Routh, basándose en el teorema de Sturm y en la teoría de índices de Cauchy, elaboró un algoritmo para determinar el número k de raíces con parte real positiva de un polinomio real. Como consecuencia, cuando $k = 0$ este algoritmo provee un criterio de estabilidad. La solución propiamente analítica del problema original planteado por Maxwell la dió Adolf Hurwitz en 1895 (ver Hurwitz (1895)) basándose en los trabajos de Hermite – e independiente de la investigación hecha por Routh años atrás. Las desigualdades obtenidas por Hurwitz son conocidas en nuestros días como el *criterio de Routh-Hurwitz*. Ahora bien, las desigualdades del criterio de Routh-Hurwitz no son independientes entre sí; estas circunstancias fueron estudiadas por los matemáticos franceses Liénard y Chipart. En 1914 establecieron un criterio equivalente al de Routh-Hurwitz que reducía en casi la mitad el número de desigualdades. Otros criterios fueron desarrollados durante la primera mitad del siglo XX y son parte de la variedad de técnicas existentes hoy en día para verificar la estabilidad de un polinomio.

Definición 1.1. Decimos que un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz (o estable) si todas sus raíces tienen parte real negativa, es decir, $p \in \mathbb{R}[x]$ es Hurwitz si todas sus raíces pertenecen al conjunto $\mathbb{C}^- = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < 0\}$.

Entre los criterios clásicos que nos permiten determinar cuándo un polinomio es Hurwitz, destacan:

- El criterio de Routh-Hurwitz
- El test de Routh
- El Teorema de Hermite-Biehler
- El Teorema de Leonhard-Mihailov
- El criterio de Lienhard-Chipart

Estos criterios y otros tópicos relacionados pueden consultarse con detalle en Bhattacharyya *et al.* (1995), Gantmacher (1959), Hinrichsen & Pritchard (2004), Lancaster & Tismenetsky (1985), Loredó (2005), Díaz (2010). A continuación enunciaremos algunos de ellos.

1.2. Criterio de Routh-Hurwitz

Definición 1.2. Considérese el polinomio real

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Denotamos por $H(p)$ a la matriz de Hurwitz de p , la cual queda definida como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Obsérvese que $H(p)$ es una matriz cuadrada. Denotemos ahora por Δ_i ($i = 1, \dots, n$) a los menores principales diagonales de $H(p)$, es decir:

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}, \dots$$

Teorema 1.3 (Criterio de Routh-Hurwitz). *Sea*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$$

con $a_n > 0$ y $H(p)$ la matriz de Hurwitz asociada a p . Entonces $p(t)$ es Hurwitz si y sólo si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

Demostración. Ver Bhattacharyya *et al.* (1995) o bien Gantmacher (1959).

■

■ **Ejemplo 1.4.** Considérese el polinomio $p(t) = t^4 + 5t^3 + 10t^2 + 10t + 4$, en este caso la matriz de Hurwitz asociada es:

$$H(p) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$



Adolf Hurwitz (1859-1919)
Nació en Hildesheim, Hanover. Se graduó en la Universidad de Berlín. En 1884 acepta la invitación de Lindemann para ocupar una plaza en Königsberg donde permanece 8 años. Ahí dio clases a Hilbert y Minkowski. En 1892 ocupa el lugar que dejó Frobenius en Eidgenössische Polytechnikum Zürich (Suiza). Hurwitz permaneció el resto de su vida en Zurich. Estudió la superficie de Riemann y la teoría de funciones complejas.

Los menores principales de $H(p)$ son:

$$\Delta_1 = 5, \Delta_2 = 40, \Delta_3 = 300, \Delta_4 = 4\Delta_3.$$

A partir de que todos ellos son positivos, se tiene que $p(t)$ es Hurwitz.

■ **Ejemplo 1.5.** Considérese el polinomio real de grado cuatro $p(t) = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$, con $a_4 > 0$. Entonces

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales diagonales son

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_3, \\ \Delta_2 &= a_3a_2 - a_1a_4, \\ \Delta_3 &= a_3a_2a_1 - a_4a_1^2 - a_0a_3^2, \\ \Delta_4 &= a_0\Delta_3. \end{aligned}$$

Luego, $p(t)$ es Hurwitz si y sólo si todos los coeficientes son positivos y $a_3a_2a_1 - a_4a_1^2 - a_0a_3^2 > 0$.

1.3. Teorema de Hermite-Biehler

Algunos de los resultados que se presentan en este trabajo se apoyan en el Teorema de Hermite-Biehler (ver Díaz (2010)). A continuación presentamos algunas definiciones necesarias para enunciar dicho teorema.

Definición 1.6. Considérese el polinomio real $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$. Podemos escribir a $p(t)$ de la siguiente forma

$$p(t) = (a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots) + t(a_1 + a_3t^2 + a_5t^4 + \dots)$$

al evaluarlo en $i\omega$ obtenemos

$$p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots)$$

Definimos:

$$\begin{aligned} p^e(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ p^o(\omega) &= a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots \\ p^{par}(t) &= a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots \\ p^{imp}(t) &= a_1t + a_3t^3 + a_5t^5 + \dots \end{aligned}$$

Definición 1.7. Decimos que un polinomio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ satisface la *propiedad de la alternancia* si y sólo si

- a) los coeficientes principales de $p^{par}(t)$ y $p^{imp}(t)$ tienen el mismo signo;
- b) las raíces positivas $\omega_{e,i}$ de $p^e(\omega)$ y $\omega_{o,i}$ de $p^o(\omega)$ se van alternado, es decir

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \dots$$

Observación 1.8. Sea $m = \text{grado}[p^e(\omega)]$ y $l = \text{grado}[p^o(\omega)]$. Si

- $m = l$, entonces

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \dots < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m} < \omega_{o,m}$$

- $m = l + 1$, entonces

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \dots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}$$

La figura 1.1 ilustra el inciso b) de la propiedad de la alternancia, obsérvese la forma en que se alternan las raíces de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ de un cierto polinomio estable $p(t)$.

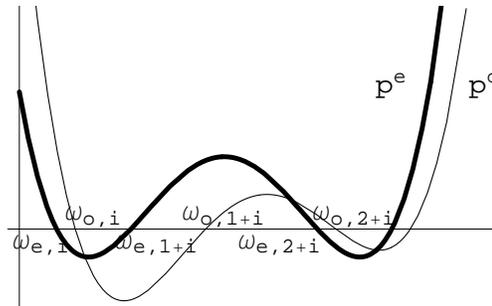


Figura 1.1: Ilustración de la propiedad de la alternancia.

Teorema 1.9 (Hermite-Biehler). Un polinomio real $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de la alternancia.

Demostración. Ver Bhattacharyya *et al.* (1995) o bien Gantmacher (1959).

■

■ **Ejemplo 1.10.** Considérese el polinomio $p(t) = 10 + 28t + 33t^2 + 21t^3 + 7t^4 + t^5$. Al evaluarlo en $i\omega$ obtenemos:

$$p(i\omega) = i\omega^5 + 7\omega^4 - 21i\omega^3 - 33\omega^2 + 28i\omega + 10$$

de donde separamos:

$$p^e(\omega) = 7\omega^4 - 33\omega^2 + 10$$

$$p^o(\omega) = \omega^4 - 21\omega^2 + 28$$

Puede verificarse que las raíces positivas de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ se alternan, como lo muestra la figura 2.

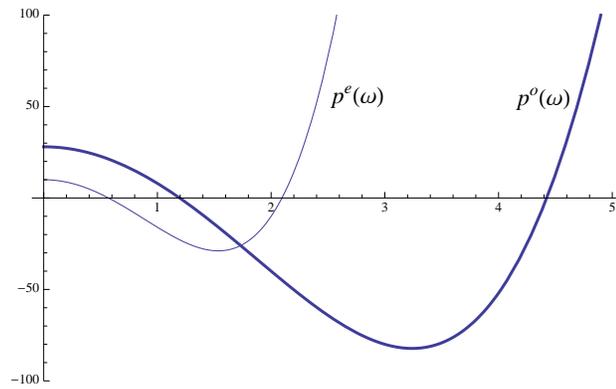


Figura 1.2:

El enunciado anterior se ha restringido al caso de un polinomio con coeficientes reales, sin embargo el teorema es más general, cubriendo el caso con coeficientes complejos. Una prueba de este teorema puede consultarse en Bhattacharyya *et al.* (1995). Otras generalizaciones del Teorema de Hermite-Biehler pueden consultarse en Díaz (2010).

1.4. Test de estabilidad

El *test* de estabilidad es un procedimiento iterativo que consiste en determinar si un polinomio es Hurwitz, verificando si un polinomio de grado menor lo es. El procedimiento puede demostrarse por medio del *Teorema de Hermite-Biehler* y el *Teorema de la intersección de la frontera* (ver Ackerman

(2002), Bhattacharyya *et al.* (1995), Frazer & Duncan (1929)), aunque otras pruebas pueden encontrarse en Holtz (2003) y en Hinrichsen & Pritchard (2004).

Definición 1.11. Dado el polinomio $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, si $a_{n-1} \neq 0$ y $n \geq 2$, definimos

$$\begin{aligned} Q(t) &= a_{n-1} t^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} \right) t^{n-2} + a_{n-3} t^{n-3} \\ &\quad + \left(a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} \right) t^{n-4} + a_{n-5} t^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Teorema 1.12. Si $P(t)$ tiene todos sus coeficientes positivos, $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si $Q(t)$ es Hurwitz.

Demostración. Ver Bhattacharyya *et al.* (1995) o bien Hinrichsen & Pritchard (2004) ■

A partir de este teorema puede generarse un algoritmo para verificar la estabilidad de un polinomio $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ de grado $n \geq 2$ con $a_n > 0$.

Algoritmo 1.13 (Test de estabilidad para polinomios reales).

1. Hacer $P_0(t) = P(t)$.
2. Verificar que todos los coeficientes de $P_i(t)$ sean positivos, con $i = 0, 1, 2, \dots$. Si no lo son P no es Hurwitz. Si lo son y grado $P_i(t) = 2$ entonces P es Hurwitz. Si lo son y grado $P_i(t) > 2$, continuar.
3. Construir $P_{i+1}(t) = Q(t)$, según el teorema anterior, reemplazando P por P_i . Hacer $i = i + 1$ y regresar al paso 2.

■ **Ejemplo 1.14.** Verifiquemos si el polinomio $q(t) = t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1$ es Hurwitz. Hacemos

$$P_0(t) = t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1$$

Luego construimos $P_1(t)$:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 5t^4 + \left(10 - \frac{1}{5} 10 \right) t^3 + 10t^2 + \left(5 - \frac{1}{5} 1 \right) t + 1 \\ &= 5t^4 + 8t^3 + 10t^2 + \frac{24}{5}t + 1 \end{aligned}$$

Los coeficientes de $P_1(t)$ son todos positivos cumpliéndose así el paso 2) del algoritmo, entonces construimos $P_2(t)$:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= 8t^3 + \left(10 - \frac{5}{8} \left(\frac{24}{5}\right)\right) t^2 + \frac{24}{5}t + \left(1 - \frac{5}{8} \cdot 0\right) \\ &= 8t^3 + 7t^2 + \frac{24}{5}t + 1 \end{aligned}$$

Vemos que $P_2(t)$ cumple el paso 2) del algoritmo, entonces construimos a continuación $P^{(3)}(t)$:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= 7t^2 + \left(\frac{24}{5} - \frac{8}{7}(1)\right) t + 1 \\ &= 7t^2 + \frac{128}{75}t + 1 \end{aligned}$$

Como $P_3(t)$ es de grado 2 y todos sus coeficientes son positivos entonces, por el paso 4) del algoritmo, podemos concluir que $q(t)$ es Hurwitz.

1.5. Criterio de Routh

Consideremos el polinomio real

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + a_{n-3} z^{n-3} + \dots \quad (a_n \neq 0)$$

Evaluando f en $i\omega$:

$$f(i\omega) = a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + a_{n-2} (i\omega)^{n-2} + a_{n-3} (i\omega)^{n-3} + \dots$$

Hagamos

$$f_1(\omega) = a_n \omega^n - a_{n-2} \omega^{n-2} + a_{n-4} \omega^{n-4} - \dots$$

$$f_2(\omega) = a_{n-1} \omega^{n-1} - a_{n-3} \omega^{n-3} + a_{n-5} \omega^{n-5} - \dots$$

y construimos una sucesión generalizada de Sturm:

$$f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \dots, f_m(\omega),$$

por medio del algoritmo de Euclides:

$$f_3(\omega) = \frac{a_n}{a_{n-1}} \omega f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0 \omega^{n-2} - c_1 \omega^{n-4} + c_2 \omega^{n-6} - \dots$$



Edward John Routh (1831-1907)
Nació en Quebec, Canada.
Llegó a Inglaterra en 1842 y
estudió bajo el cuidado de De
Morgan en Londres. Routh fue
el más famoso instructor en
Cambridge donde publicó varios
textos de matemáticas aplicadas:
*A Treatise on Dynamics of Rigid
Bodies* (1860), *A Treatise on
Analytic Statistics* (1891) y *A
Treatise on Dynamics of a Particle*
(1898). En 1877 Routh recibió el
Premio Adams por sus trabajos
en estabilidad dinámica. Fue
miembro de la *Royal Society*.

donde

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}, \\
 c_1 &= a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}, \\
 c_2 &= a_{n-6} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-7}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Luego calculamos f_4 :

$$f_4(\omega) = \frac{a_{n-1}}{c_0} \omega f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0 \omega^{n-3} - d_1 \omega^{n-5} + d_2 \omega^{n-7} - \dots$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{c_0} c_1, \\
 d_1 &= a_{n-5} - \frac{a_{n-1}}{c_0} c_2, \\
 d_2 &= a_{n-7} - \frac{a_{n-1}}{c_0} c_3, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Los coeficientes de los polinomios restantes $f_5(\omega), \dots, f_{n+1}(\omega)$ son similarmente determinados. Con dichos coeficientes formamos el *esquema de Routh*:

$$\left. \begin{array}{cccc}
 a_n, & a_{n-2}, & a_{n-4}, & a_{n-6}, & \dots \\
 a_{n-1}, & a_{n-3}, & a_{n-5}, & a_{n-7}, & \dots \\
 c_0, & c_1, & c_3, & \dots & \\
 d_0, & d_1, & d_3, & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & &
 \end{array} \right\} \tag{1.5}$$

Las fórmulas (1.3) y (1.4) muestran como obtener cada fila de este esquema.

Teorema 1.15 (Routh). *El número de raíces de un polinomio real $f(z)$ en el semiplano derecho ($\operatorname{Re} z > 0$) es igual al número de variaciones de signo de la primera columna del esquema de Routh.*

Demostración. Ver Gantmacher (1959) ■

Corolario 1.16 (Criterio de Routh). *Todas las raíces del polinomio real $f(z)$ tienen parte real negativa si y sólo si al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo*

■ **Ejemplo 1.17.** Considérese el polinomio del ejemplo 1.4, aplicaremos el esquema de Routh para verificar que es estable. En este caso $a_4 = 1$, $a_3 = 5$, $a_2 = a_1 = 10$ y $a_0 = 4$, a continuación hacemos

$$f_1(\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 4$$

$$f_2(\omega) = 5\omega^3 - 10\omega$$

Ahora usando (1.3) y (1.4) obtenemos:

$$c_0 = a_2 - \frac{a_4}{a_3}a_1 = 8$$

$$c_1 = a_0 = 4$$

$$d_1 = a_1 - \frac{a_3}{c_0}c_1 = \frac{15}{2}$$

Esquemáticamente:

a_4	a_2	a_0		1	10	4
	a_3	a_1		5	10	
	c_0	c_1		8	4	
	d_1			$\frac{15}{2}$		

Como los elementos de la primera columna del esquema de Routh son del mismo signo, entonces concluimos que $p(t)$ es Hurwitz.

Existe una relación entre el test de estabilidad y el esquema de Routh. Supongamos que $\text{grado}[P(t)]$ es par, entonces obsérvese que los coeficientes de la parte par e impar de $P_0(t)$ aparecen respectivamente en la fila 1 y 2 del esquema de Routh, comenzando por los coeficientes principales. Luego, los coeficientes de la parte impar y par de $P_1(t)$ aparecen respectivamente en las filas 2 y 3. Los coeficientes de la parte par e impar de $P_2(t)$ aparecen ahora en las filas 3 y 4 y así sucesivamente. Puede verificarse que todas las entradas diferentes de cero en el esquema de Routh de un polinomio Hurwitz con coeficientes positivos deben ser positivos (es decir del mismo signo, como se asegura en el corolario anterior).

■ **Ejemplo 1.18.** Considérese el polinomio mónico $P(t) = t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$, aplicando el algoritmo 1.13 generamos los siguientes polinomios:

$$P_1(t) = a_3t^3 + \left(a_2 - \frac{a_1}{a_3}\right)t^2 + a_1t + a_0$$

$$P_2(t) = \left(a_2 - \frac{a_1}{a_3}\right)t^2 + \left(a_1 - \frac{a_0 a_3^2}{a_2 a_3 - a_1}\right)t + a_0$$

Como $a_4 = 1 > 0$ entonces P es Hurwitz si y sólo si

$$a_0, a_1, a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0 \quad (1.6)$$

Ahora, si construimos el esquema de Routh obtenemos:

$$P(i\omega) = \omega^4 - a_3 i \omega^3 - a_2 \omega^2 + a_1 i \omega + a_0$$

Hacemos

$$P_1(\omega) = \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0$$

$$P_2(\omega) = i\omega(-a_3 \omega^2 + a_1)$$

y aplicando (1.3) y (1.4) obtenemos:

$$c_0 = a_2 - \frac{a_1}{a_3}$$

$$c_1 = a_0$$

$$d_0 = a_2 - \frac{a_3^2}{a_2 a_3 - a_1} a_0$$

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccc} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ c_0 & c_1 & 0 \\ d_0 & a_2 - \frac{a_3^2}{a_2 a_3 - a_1} a_0 & 0 \end{array}$$

Luego, P será Hurwitz si los elementos de la primera columna del esquema son todos positivos, es decir si se cumplen las desigualdades de (1.6). Compárense estos resultados ¹ con el ejemplo 1.5 tomando $a_4 = 1$.

¹Puede consultarse el capítulo 1 de Loredo (2005) para confirmar estas desigualdades.

Producto de Hadamard

El producto de Hadamard juega un papel sustancial dentro del análisis matricial y sus aplicaciones. Dos áreas con tradición donde actualmente se utiliza el producto de Hadamard son las formas cuadráticas y las desigualdades matriciales. Recientemente el producto de Hadamard ha sido utilizado en la teoría matemática de estabilidad.



Issai Schur (1875 - 1941)

Nació en la provincia de Mogilyov (ahora Bielorusia). Ingresó a la Universidad de Berlín en 1894 y obtuvo su doctorado en 1901. Frobenius fue uno de sus profesores y director de su tesis doctoral. Entre 1911 y 1916 fué profesor en la Universidad de Bonn hasta que en 1919 fue promovido como profesor de tiempo completo en la Universidad de Berlín. Schur es principalmente conocido por sus trabajos en la teoría de representación de grupos, aunque también en teoría de números y análisis. En una serie de artículos él introdujo el concepto de multiplicadores Schur (producto de Schur). Fue miembro de la Academia de Prusia entre 1922 y 1938. Padebió de la campaña nacionalista nazi hasta que decidió salir de Alemania para vivir en Palestina en 1939, donde murió.

2.1. Definición del producto de Hadamard

Una de las operaciones binarias entre matrices es el producto de Hadamard, que en relación al producto convencional resulta más simple y quizá mucho menos conocido.

Definición 2.1. Sean A y B dos matrices de $m \times n$ con entradas en \mathbb{C} . El producto de Hadamard de A y B se define como $[A * B]_{ij} = A_{ij}B_{ij}$, para toda $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La única condición para realizar el producto de Hadamard es simplemente que las matrices a operar tengan la misma dimensión – no necesariamente deben ser matrices cuadradas – y la multiplicación se realice entrada por entrada, como la tradicional suma de matrices. Por esta razón el producto de Hadamard es conocido también como producto entrada por entrada o producto Schur, porque uno de los primeros en obtener un resultado usando dicho producto fue Issai Schur.

2.2. Notas históricas

El producto de Hadamard, en apariencia un producto simple e ingenuo – no en un sentido peyorativo, sino un poco inusual – aparece en diversas áreas matemáticas, sin embargo es poco mencionado en los textos de álgebra lineal y es considerado más un tópico propio del análisis matricial.

Se considera a Schur como el primero en realizar un estudio sistemático de las propiedades algebraicas del producto entrada por entrada. En Schur (1911), Schur probó que si A y B son matrices positivas semidefinidas del mismo tamaño, entonces $A * B$ es también positiva semidefinida. Por la importancia de su resultado es que algunos autores llaman al producto entrada por entrada el *producto de Schur*. El nombre producto de Hadamard parece ser el más común, quizá porque el término fue acuñado por Von Neumann y P. Halmos lo introdujo en la literatura matemática en su texto *Finite Dimensional Vector Spaces* (Halmos (1958)). La idea del término usado por Von Neumann pudo haber sido la influencia de un famoso escrito de 1889 (Hadamard (1899)) en el que Hadamard estudió dos series de Maclaurin $f(z) = \sum a_n z^n$ y $g(z) = \sum b_n z^n$ con radio de convergencia positivo y su composición $h(z) = \sum a_n b_n z^n$, obtenida como un producto coeficiente a coeficiente. Sin embargo, Hadamard nunca mencionó el producto entrada por entrada en su artículo, la importancia de dicho producto así como el renombre matemático que Hadamard tenía en esa época – pues él había probado el *Teorema del número primo* en 1896 (Hadamard (1896)) – le dieron motivos a Von Neumann para asociar el nombre de Hadamard con los productos término por término de cualquier tipo.

El producto de Hadamard aparece de formas distintas en varias áreas de la matemática. Por ejemplo en convolución de funciones periódicas, el principio del mínimo débil en ecuaciones diferenciales parciales, funciones características en teoría de probabilidad, teoría de operadores, por mencionar algunas aplicaciones. Otro ejemplo, que tiene relación con nuestra investigación, se refiere a que el producto de Hadamard de dos matrices Routh-Hurwitz totalmente no negativas es también una matriz totalmente no negativa. Muchos otros ejemplos de dónde aparece el producto de Hadamard pueden consultarse en Horn (1989), Horn & Johnson (1991) y en Fallat & Johnson (2011).

2.3. Algunas propiedades

La matriz identidad bajo el producto de Hadamard es la matriz J de $m \times n$ con todas sus entradas iguales a uno. Es decir

$$J_{ij} = 1 \text{ para toda } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Si $A \in M_{m \times n}$ entonces A tiene una inversa de Hadamard, la cual denotamos \hat{A} , si y sólo si $A_{ij} \neq 0$ para toda $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Más aún

$$\hat{A}_{ij} = (A_{ij})^{-1}$$

Puede demostrarse que el conjunto de matrices de $m \times n$ con entradas distintas de cero forman un grupo abeliano bajo el producto de Hadamard. Más aún el producto de Hadamard es un operador lineal. Puede también relacionarse el producto de Hadamard con la multiplicación tradicional de matrices a través de matrices diagonales, así, $A * B = AB$ si y sólo si A y B son diagonales. Como consecuencia, el producto de Hadamard relaciona los elementos de la diagonal de una matriz diagonalizable A con sus valores propios (ver Horn & Johnson (1991)).

Para finalizar este capítulo, daremos una definición de producto de Hadamard en el contexto de polinomios con coeficientes reales. Esta será la que utilizaremos en lo que resta del presente trabajo.

Definición 2.2. Considérense dos polinomios

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

$$q(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$$

en $\mathbb{R}[t]$, no necesariamente del mismo grado. El producto de Hadamard de dos polinomios se define como

$$(p * q)(t) = a_k b_k t^k + a_{k-1} b_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 b_1 t + a_0 b_0, \quad (2.1)$$

donde $k = \min(n, m)$.

Obsérvese, en efecto, que se trata de un producto coeficiente por coeficiente.

Estabilidad del producto de Hadamard

Como adelantamos en el capítulo precedente una de las aplicaciones recientes del producto de Hadamard esta relacionada con la estabilidad de sistemas lineales.



Jacques S. Hadamard (1865 - 1963)

Nació en Versailles, Fra. En 1884 comienza sus estudios universitarios en la École Normale Supérieure, donde tiene por profesores a Hermite, Darboux y Picard. Obtuvo el grado de doctor en 1892, con uno de los primeros trabajos sobre funciones analíticas y singularidades. En ese año obtiene el premio de Ciencias Matemáticas con su escrito: *Determination of the number of primes less than a given number*. Las contribuciones hechas por Hadamard abarcan varias áreas, principalmente ecuaciones diferenciales no lineales, geometría y análisis complejo. Entre sus alumnos podemos mencionar a Fréchet, Lévy y Mandelbrot

3.1. Antecedentes del problema

Los orígenes de las conjeturas relativas a las raíces de la composición de polinomios reales se remontan al siglo XIX. En 1894, A. Malo en su artículo *Note sur les équations algébriques* (Malo (1985)) consideraba el siguiente problema: dados dos polinomios reales

$$f(t) = A_0t^m + A_1t^{m-1} + \dots + A_m$$

$$g(t) = B_0t^m + B_1t^{m-1} + \dots + B_m$$

encontrar bajo que condiciones el polinomio

$$P(t) = A_0B_0t^m + A_1B_1t^{m-1} + \dots + A_mB_m$$

tiene únicamente raíces reales.

Tiempo después, en 1942, L. Weisner mostró que cuando todos los ceros de $f(t)$ pertenecen a un sector S del plano complejo y todos los ceros de $g(t)$ son reales, entonces $P(t)$ tiene sus ceros en el sector $\pm S$ (ver Weisner

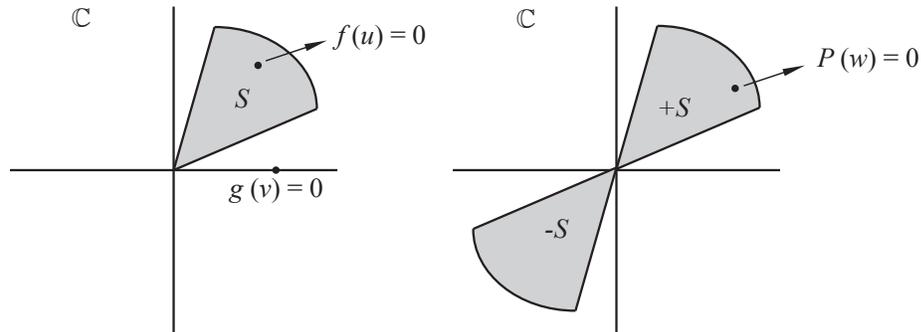


Figura 3.1: Esquema de los resultados de L. Weisner

(1942)). Y en el caso en que $g(t)$ tiene solamente ceros no positivos, los ceros de $P(t)$ están en el mismo sector S .

En 1949 N. G. de Bruijn demostró en de Bruijn (1949) que si los ceros de $f(t)$ pertenecen al sector S_1 con un ángulo α y los ceros de $g(t)$ pertenecen al sector S_2 con un ángulo β , ambos sectores con vértice al origen, y si $\alpha + \beta < 2\pi$ entonces todos los ceros de $P(t)$ se encuentran en el sector $S = \{-\omega_1\omega_2 : \omega_1 \in S_1, \omega_2 \in S_2\}$ con ángulo $\alpha + \beta$.

En 1996 Garloff y Wagner extendieron los resultados de Bruijn en el contexto de estabilidad, probando que si $f(t)$ y $g(t)$ son estables entonces $P(t)$ también es estable. De manera muy particular, G. Fernández (en Fernández-Anaya (1999)) mostró que el producto de dos polinomios intervalo estables resulta ser un polinomio intervalo estable.

3.2. Estabilidad y producto de Hadamard

Los criterios de estabilidad dan condiciones para determinar la estabilidad de un polinomio $p \in \mathbb{R}[t]$. Podríamos ahora preguntarnos qué pasa cuando operamos dos polinomios estables: ¿el resultado será un polinomio estable? La respuesta es: no siempre. La suma (coeficiente con coeficiente) de dos polinomios Hurwitz no es Hurwitz (ver Bialas (1985)). El cociente de dos polinomios Hurwitz realizado coeficiente a coeficiente de las potencias respectivas tampoco es necesariamente estable (ver Garloff & Wagner (1994)). Sin embargo bajo el producto de Hadamard sucede algo interesante.

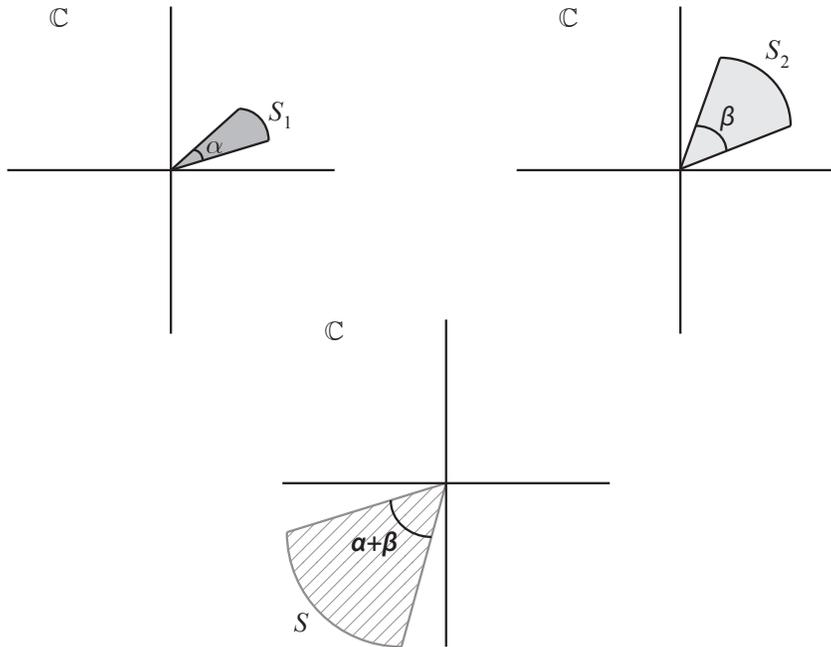


Figura 3.2: Esquema de los resultado de de Bruijn: los sectores de la parte superior representan las hipótesis mientras que el sector de abajo la conclusión

En el artículo Garloff & Wagner (1996), Garloff y Wagner probaron que la estabilidad de polinomios con coeficientes reales se preserva bajo el producto de Hadamard. Antes de presentar su principal resultado es necesario definir algunas clases de polinomios estables. Como se dijo en el capítulo 1 un polinomio $p \in \mathbb{R}[t]$ es Hurwitz (o estable) si toda raíz de p está en la mitad izquierda abierta del plano complejo, decimos ahora que p es *quasi-estable* si toda raíz de p está en la mitad izquierda o sobre el eje imaginario del plano complejo. Adicionalmente, decimos que p es *sinusoidal* si toda raíz de p es un imaginario puro o cero y p será *quasi-sinusoidal* si exactamente una raíz de p no es un imaginario puro o cero y es negativa.

Teorema 3.1 (Garloff & Wagner (1996)). Sean $F, P \in \mathbb{R}[t]$ *quasi-estables*.

1. Entonces $F * P$ es *quasi-estable*.
2. Si F o P son *sinusoidales* entonces $F * P$ es *sinusoidal*. Si F y P son *sinusoidales* y la multiplicidad del 0 tanto para F como para P tiene diferente paridad entonces $F * P = 0$.

3. Si F y P son *quasi-sinusoidales* y la multiplicidad del 0 tanto para F como para P tiene la misma paridad, entonces $F * P$ es *quasi-sinusoidal*.
4. Si 1) y 2) no aplican, entonces $F * P$ no tiene raíces imaginarias puras excepto posiblemente en el origen.
5. Como un caso especial de 4), si F y P son Hurwitz entonces $F * P$ también es estable.

El anterior resultado abarca distintos tipos de polinomios, pero en particular el enunciado que a nosotros interesa es el siguiente:

Teorema 3.2 (Garloff & Wagner (1996)). Si $F, P \in \mathbb{R}[t]$ son Hurwitz entonces $F * P$ es Hurwitz.

El teorema 3.2 lo que afirma es que el conjunto de polinomios estables es cerrado bajo el producto de Hadamard. La demostraciones de los teoremas 3.1 y 3.2 se basan en el Teorema de Hermite-Biehler.

Este resultado abre nuevas posibilidades para el análisis de estabilidad robusta de familias de polinomios con dependencias de parámetros no lineales, pues permite, en algunos casos, separar los parámetros por medio de la factorización de Hadamard para obtener polinomios con un menor número de parámetros y realizar el análisis de estabilidad en los polinomios factores, con la consecuente ganancia de simplicidad. Para ilustrar lo anterior, considérese el polinomio:

$$p(t) = (\lambda_1 - 1)t^3 + (\lambda_1^2 \lambda_3^2)t^2 + (\lambda_1 + 2)(1 - \lambda_3)t + (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - 1)$$

que depende de tres parámetros, aplicando el producto de Hadamard podemos descomponerlo en los dos polinomios:

$$p_1(t) = (\lambda_1 - 1)t^3 + \lambda_1^2 t^2 + (\lambda_1 + 1)t + (\lambda_1 + 2)$$

$$p_2(t) = t^3 + \lambda_3^2 t^2 + (1 - \lambda_3)t + (\lambda_2 - 1)$$

cuya estabilidad resulta más sencilla de analizar.

En Fernandez-Anaya (1999) se aplica dicha idea en el caso de polinomios intervalo. En Loaiza (1999) se utiliza el teorema 3.2 para analizar la estabilidad en el caso de bolas de polinomios y politopos.

Ahora bien, podríamos preguntarnos ¿el recíproco del teorema 3.2 es también verdadero? La respuesta, es de nuevo: no siempre.

Definición 3.3. Si un polinomio estable $f \in \mathbb{R}[t]$ puede escribirse como $f = p * q$, para ciertos $p, q \in \mathbb{R}[t]$ estables, diremos entonces que f tiene una factorización estable de Hadamard.

En Garloff & Shrinivasan (1996) se muestra que dado un polinomio estable, éste no necesariamente tiene una factorización estable de Hadamard del mismo grado. Considérese el polinomio real

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \quad (3.1)$$

y supongáse que $a_n > 0$. Si $n = 2$, que f sea Hurwitz es equivalente a que $a_0, a_1, a_2 > 0$ entonces existen varias factorizaciones estables de Hadamard para f . Si $n = 3$, que f sea Hurwitz es equivalente a las condiciones $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ y $a_0 a_3 < a_1 a_2$. Se puede elegir a los polinomios

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{1/\alpha} t^k \quad q(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{1/\beta} t^k$$

como una factorización estable de Hadamard, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ son tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Sin embargo, si $n = 4$ existen polinomios estables f que no siempre aceptan una factorización estable de Hadamard en dos polinomios p y q de grado 4.

■ **Ejemplo 3.4.** Sea $f(t) = t^4 + t^3 + 3t^2 + t + 1$. Puede verificarse que f es Hurwitz. Una factorización de Hadamard de f es

$$p(t) = t^4 + t^3 + \sqrt[3]{3} t^2 + t + 1$$

$$q(t) = t^4 + t^3 + \sqrt[3]{3^2} t^2 + t + 1$$

Sin embargo puede verificarse que p no es Hurwitz.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el polinomio f en (3.1) es mónico. Si $n = 4$ entonces, según el ejemplo 1.5 del capítulo 2, f es Hurwitz si y sólo si $a_k > 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ y

$$a_1^2 + a_0 a_3^2 < a_1 a_2 a_3 \quad (3.2)$$

Si existe un factorización estable de Hadamard $f = p * q$ con

$$p(t) = t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

$$q(t) = t^4 + \frac{a_3}{b_3}t^3 + \frac{a_2}{b_2}t^2 + \frac{a_1}{b_1}t + \frac{a_0}{b_0}$$

entonces se debe cumplir que $b_k > 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ y

$$b_1^2 + b_0b_3^2 < b_1b_2b_3 \quad (3.3)$$

y similarmente

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \frac{a_0}{b_0}\left(\frac{a_3}{b_3}\right)^2 < \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3} \quad (3.4)$$

Se mostrará que no siempre es posible encontrar constantes positivas b_k tales que (3.3) y (3.4) se cumplan al mismo tiempo. Multiplicando (3.4) por $b_1b_2b_3$ se obtiene

$$a_1^2r + a_0a_3^2s < a_1a_2a_3 \quad (3.5)$$

donde

$$r = \frac{b_2b_3}{b_1} \quad s = \frac{b_1b_2}{b_0b_3}$$

Sustituyendo r y s en (3.3) obtenemos

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)b_1b_2b_3 < b_1b_2b_3$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 \quad (3.6)$$

y dado que r y s son positivas, se debe tener que $r, s > 1$. De la expresión (3.2) podemos escribir

$$a_1a_2a_3 = a_1^2(1 + \kappa + \epsilon) \quad (3.7)$$

donde $\kappa = a_0a_3^2/a_1^2$ y ϵ es una constante (que depende de a_0, a_1, a_2, a_3). Ahora dividamos (3.5) entre a_1^2 y aplicando (3.7)

$$r + \kappa s < 1 + \kappa + \epsilon$$

por lo tanto

$$\frac{1}{1 + \kappa + \epsilon - \kappa s} + \frac{1}{s} < \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \quad (3.8)$$

Luego, para hallar el valor mínimo de s del lado derecho de la desigualdad (3.8), con $s \in (0, (1 + \kappa + \epsilon)/\kappa)$, derivamos respecto a s , obteniendo

$$s = \frac{1 + \kappa + \epsilon}{\kappa} \left(\frac{\kappa - \sqrt{\kappa}}{\kappa - 1} \right)$$

y sustituyendo dicho valor en (3.8) obtenemos

$$\frac{1 + \kappa + 2\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa + \epsilon} < \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \quad (3.9)$$

Pero la desigualdad (3.9) contradice (3.6), si $\epsilon \leq 2\sqrt{\kappa}$. Si elegimos $a_0 = a_1 = a_3 = 1$ y $a_2 = 3$, entonces $\kappa = 1$ y por (3.7) $\epsilon = 1$. Esto muestra que las desigualdades (3.3) y (3.4) no se satisfacen al mismo tiempo. Por lo tanto existen polinomios Hurwitz de grado 4 que no aceptan una factorización estable de Hadamard en dos polinomios también de grado 4.

En Rodriguez-Angeles *et al.* (2004) se muestra también que el recíproco del teorema 3.2 no es verdadero en el caso de polinomios multivariados.

Entonces, según los resultados anteriores, surge la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe cumplir un polinomio Hurwitz para poder descomponerlo en dos polinomios igualmente Hurwitz si consideramos el producto de Hadamard? La respuesta a dicho planteamiento la analizaremos en el siguiente capítulo.

Factorización estable de Hadamard: un enfoque con el test de estabilidad

En esta sección presentamos condiciones necesarias para que un polinomio Hurwitz admita una factorización estable de Hadamard. Analizaremos primero los casos de polinomios con grado pequeño y posteriormente presentaremos un resultado que es válido para polinomios Hurwitz de grado par y que nos permite dar condiciones sobre los de grado impar. El contenido de este capítulo está basado en los resultados de los artículos Loredo-Villalobos & Aguirre-Hernández (2011) y Loredo-Villalobos & Aguirre-Hernández (*) (una versión resumida de este último fue publicado en Loredo-Villalobos & Aguirre-Hernández (2012)).



Jürgen Garloff (19??-)
Estudió sociología, filosofía y matemáticas en las universidades de Cologne y Heidelberg. Es profesor en la Facultad de Ciencias Computacionales de la Universidad de Ciencias Aplicadas en Konstanz, Alemania. Sus áreas de interés son optimización global, control robusto, análisis matricial (enfocado a la total positividad) y polinomios (en especial la distribución de raíces bajo el producto de Hadamard).

4.1. Análisis de polinomios de grado pequeño

Como dijimos en la sección 3.2, según los resultados de Garloff & Shrinivasan (1996), todo polinomio Hurwitz de grado 2 y 3 admite una factorización estable de Hadamard en dos polinomios Hurwitz del mismo grado que el original. El siguiente teorema muestra dicho resultado cuando el grado del polinomio es 3.

Teorema 4.1. *Sea $f(t) = \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ Hurwitz. Entonces existen dos polinomios $p(t)$ y $q(t)$ Hurwitz de grado 3 tales que $(p * q)(t) = f(t)$.*

Demostración. Como f es Hurwitz entonces se cumple que

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3 > 0$$

por lo tanto

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0\alpha_3} > 1$$

Podemos entonces elegir cuatro números reales $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ tales que

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0\alpha_3} > \frac{a_1a_2}{a_0a_3} > 1 \quad (4.1)$$

Definimos

$$p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

$$q(t) = \frac{\alpha_3}{a_3}t^3 + \frac{\alpha_2}{a_2}t^2 + \frac{\alpha_1}{a_1}t + \frac{\alpha_0}{a_0}$$

Luego p y q son Hurwitz y además $(p * q)(t) = f(t)$. ■

Corolario 4.2. Sean $f(t) = \alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$ y $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ dos polinomios Hurwitz. Si

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0\alpha_3} > \frac{a_1a_2}{a_0a_3}$$

entonces existe una factorización estable de Hadamard de f donde p es factor.

En Garloff & Shrinivasan (1996) se afirma que el resultado del teorema 4.1 es válido, sin embargo hemos decidido incluir una prueba alternativa para exponer algunas ideas que aplicaremos en los resultados principales de éste capítulo.

Teorema 4.3. Sea $f(t) = \alpha_4t^4 + \alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$ Hurwitz. Si

$$\frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1} < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2 \quad (4.2)$$

entonces existen dos polinomios $p(t)$ y $q(t)$ Hurwitz de grado 4 tales que $(p * q)(t) = f(t)$.

Demostración. Considérese el polinomio

$$r(t) = \alpha_3^2t^3 + c_1\alpha_3t^2 + \alpha_1\alpha_3t + \alpha_0\alpha_3$$

donde

$$\frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1} < c_1 < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2$$

En particular

$$\frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1} < c_1,$$

por lo tanto $r(t)$ es Hurwitz, más aún, si elegimos $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ tales que:

$$\frac{\alpha_1 c_1}{\alpha_0 \alpha_3} > \frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} > 1,$$

entonces por el teorema 4.1 existe una factorización estable de Hadamard:

$$g(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

$$h(t) = \frac{\alpha_3^2}{a_3} t^3 + \frac{c_1 \alpha_3}{a_2} t^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{a_1} t + \frac{\alpha_0 \alpha_3}{a_0},$$

tal que $(g * h)(t) = r(t)$, con g y h Hurwitz. Ahora, aplicando la fórmula (1.2) del *test* de estabilidad a g y h obtenemos

$$p(t) = d_4 t^4 + \sqrt{a_3} t^3 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} + \frac{a_1}{a_3} d_4 \right) t^2 + \frac{a_1}{\sqrt{a_3}} t + \frac{a_0}{\sqrt{a_3}} \quad (4.3)$$

$$q(t) = e_4 t^4 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{a_3}} t^3 + \left(\frac{\sqrt{a_3} c_1}{a_2} + \frac{a_3 \alpha_1}{a_1 \alpha_3} e_4 \right) t^2 + \frac{\sqrt{a_3} \alpha_1}{a_1} t + \frac{\sqrt{a_3} \alpha_0}{a_0} \quad (4.4)$$

igualmente Hurwitz. A partir de

$$c_1 < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 < c_1 &< \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} + \alpha_2 - 2\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3}} \\ \Rightarrow \left(c_1 - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} - \alpha_2 \right)^2 &\geq 4 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3} \\ \Rightarrow \left(c_1 - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} \right)^2 - 2 \left(c_1 - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} \right) \alpha_2 + \alpha_2^2 &\geq 4 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3} \\ \Rightarrow \left(c_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} - \alpha_2 \right)^2 - 4 \frac{c_1 \alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} &\geq 0 \end{aligned}$$

La última desigualdad es el discriminante de la ecuación

$$\frac{a_1 \sqrt{a_3} c_1}{a_3 a_2} d_4^2 + \left(c_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} - \alpha_2 \right) d_4 + \frac{a_2 a_3 \alpha_1 \alpha_4}{a_1 \sqrt{a_3} \alpha_3} = 0 \quad (4.5)$$

Lo anterior garantiza que $d_4 \in \mathbb{R}$. Así, elegimos

$$e_4 = \frac{\alpha_4}{d_4}$$

y por lo tanto podemos escribir (4.5) como

$$\alpha_2 = \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} + \frac{a_1}{a_3} d_4 \right) \left(\frac{\sqrt{a_3} c_1}{a_2} + \frac{a_3 \alpha_1}{a_1 \alpha_3} \frac{\alpha_4}{d_4} \right) \quad (4.6)$$

Haciendo el producto de Hadamard de p y q

$$p * q = d_4 e_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} + \frac{a_1}{a_3} d_4 \right) \left(\frac{\sqrt{a_3} c_1}{a_2} + \frac{a_3 \alpha_1}{a_1 \alpha_3} e_4 \right) t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

tenemos finalmente que $(p * q)(t) = f(t)$ ■

■ **Ejemplo 4.4.** Considérese el polinomio Hurwitz $f(t) = t^4 + t^3 + 9t^2 + t + 1$. Sean

$$\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_0 = 1, \alpha_2 = 9,$$

Se puede verificar que sus coeficientes satisfacen la desigualdad (4.2). Tomemos c_1 tal que $1 < c_1 < 4$, digamos $c_1 = 3$. Construimos a continuación r :

$$r(t) = t^3 + 3t^2 + t + 1$$

el cual puede verificarse fácilmente que también es Hurwitz. A partir de la ecuación (4.1) elegimos a_0, a_1, a_2, a_3 tales que

$$3 > \frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} > 1$$

Tomemos por ejemplo $a_1 = a_2 = 2$, $a_0 = 2$ y $a_3 = 1$, así $r(t)$ puede descomponerse en dos polinomios estables, con ellos usando las ecuaciones (4.3) y (4.4) hallamos

$$p(t) = d_4 t^4 + t^3 + (2 + 2d_4)t^2 + 2t + 2$$

$$q(t) = \frac{1}{d_4} t^4 + t^3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2d_4} \right) t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$$

Determinamos a continuación el valor del parámetro d_4 resolviendo la ecuación cuadrática dada por (4.6):

$$(2 + 2d_4) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2d_4} \right) = 9$$

$$\Rightarrow 3d_4 + \frac{1}{d_4} + 4 = 9$$

$$\Rightarrow 3d_4^2 - 5d_4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow d_4 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Sustituyendo una de las raíces, obtenemos

$$p(t) = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}t^4 + t^3 + \left(2 + \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right)t^2 + 2t + 2$$

$$q(t) = \frac{6}{5 - \sqrt{13}}t^4 + t^3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5 - \sqrt{13}}\right)t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

Puede verificarse que en efecto $(p * q)(t) = f(t)$.

Observación 4.5. Al momento de hallar la factorización de f en el caso $n = 4$ puede observarse que no es necesario explicitar los polinomios intermedios $g(t)$ y $h(t)$ de grado $n = 3$.

4.2. Condiciones necesarias para la factorización estable de Hadamard

En esta sección proporcionamos condiciones necesarias para que un polinomio tenga una factorización estable de Hadamard en dos polinomios del mismo grado; tales condiciones están dadas en términos de los coeficientes del polinomio original. Antes de presentar nuestros resultados observemos primero que la ecuación (1.2) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} R_P(t) = & a_{n-1}^2 t^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3})t^{n-2} + a_{n-1}a_{n-3}t^{n-3} \\ & + (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})t^{n-4} + a_{n-1}a_{n-5}t^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Así, el teorema 1.12 puede enunciarse de la siguiente manera:

Corolario 4.6. Si $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ tiene todos sus coeficientes positivos, $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si $R_P(t)$ es Hurwitz.

Como se mencionó en el capítulo 1, la idea fundamental del *test* de estabilidad radica en construir un polinomio estable de grado $n - 1$ a partir de uno de grado n . Los resultados de la presente tesis doctoral hacen uso de dicha idea. La siguiente proposición, similar al *test* de estabilidad, nos

permite construir una familia de polinomios de grado n dado un polinomio de grado $n - 1$, de modo que la estabilidad de la familia de grado n es equivalente a la estabilidad del polinomio de grado $n - 1$. Esta idea fue utilizada en Aguirre-Hernández *et al.* (2009).

Teorema 4.7. *Considere el polinomio real con coeficientes positivos*

$$g(t) = d_{n-1}t^{n-1} + d_{n-2}t^{n-2} + \cdots + d_1t + d_0$$

Definimos la familia

$$\begin{aligned} G_s(t) = st^n + \sqrt{d_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{d_{n-2}}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}}s \right) t^{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-3} + \cdots \\ \left(\frac{d_2}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_1}{d_{n-1}}s \right) t^2 + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}t + \frac{d_0}{\sqrt{d_{n-1}}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

si n es par y

$$\begin{aligned} G_s(t) = st^n + \sqrt{d_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{d_{n-2}}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}}s \right) t^{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-3} + \cdots \\ \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}t^2 + \left(\frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_0}{d_{n-1}}s \right) t + \frac{d_0}{\sqrt{d_{n-1}}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

si n es impar. Entonces $g(t)$ es Hurwitz si y sólo si $G_s(t)$ es Hurwitz para todo $s > 0$.

Demostración. Haremos la prueba para n par, el caso impar es similar. Sea $s > 0$ y $G_s(t)$ como en (4.8) una familia de polinomios Hurwitz. Tomemos $P_s(t) = \sqrt{d_{n-1}}G_s(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} P_s(t) = \sqrt{d_{n-1}}st^n + d_{n-1}t^{n-1} + \left(d_{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}s \right) t^{n-2} + d_{n-3}t^{n-3} + \cdots \\ + \left(d_2 + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}s \right) t^2 + d_1t + d_0 \end{aligned}$$

también es Hurwitz. Hagamos:

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \sqrt{d_{n-1}}s \\
 \beta_{n-1} &= d_{n-1} \\
 \beta_{n-2} &= d_{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}s \\
 &\vdots \\
 \beta_2 &= d_2 + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}s \\
 \beta_1 &= d_1 \\
 \beta_0 &= d_0
 \end{aligned}$$

Así

$$P_s(t) = \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \beta_{n-2} t^{n-2} + \cdots + \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Aplicando la expresión (4.7) y el corolario 4.6 tenemos que $P_s(t)$ es Hurwitz si y sólo si

$$\begin{aligned}
 R_{P_s}(t) &= \beta_{n-1}^2 t^{n-1} + (\beta_{n-1}\beta_{n-2} - \beta_n\beta_{n-3})t^{n-2} + \beta_{n-1}\beta_{n-3}t^{n-3} + \cdots \\
 &\quad + (\beta_{n-1}\beta_2 - \beta_n\beta_1)t^2 + \beta_{n-1}\beta_1 t + \beta_{n-1}\beta_0
 \end{aligned}$$

es Hurwitz. Observemos que

$$\begin{aligned}
 \beta_{n-1}\beta_{n-i} - \beta_n\beta_{n-i-1} &= d_{n-1}d_{n-i} \\
 \beta_{n-1}\beta_{n-i-1} &= d_{n-1}d_{n-i-1}
 \end{aligned}$$

para $i = 2, 4, \dots, n-2$, por lo que finalmente tenemos que

$$g(t) = \frac{1}{d_{n-1}} R_{P_s}(t) = d_{n-1} t^{n-1} + d_{n-2} t^{n-2} + d_{n-3} t^{n-3} + \cdots + d_2 t^2 + d_1 t + d_0$$

también es Hurwitz. ■

Observación 4.8. La familia de polinomios dada en la ecuación (4.8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 G_s(t) &= s \left[t^n + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}} t^{n-2} + \frac{d_{n-5}}{d_{n-1}} t^{n-4} + \cdots + \frac{d_1}{d_{n-1}} t^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{d_{n-1}}} [d_{n-1} t^{n-1} + d_{n-2} t^{n-2} + \cdots + d_2 t^2 + d_1 t + d_0] \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

y entonces la familia se identifica como un rayo de polinomios. Análogamente ocurre con la ecuación (4.9).

Otro hecho importante en el que se sustentan nuestros resultados tiene que ver con la total positividad de la matriz de Hurwitz asociada un polinomio estable.

Teorema 4.9. *La matriz de Hurwitz de un polinomio estable f que satisfaga $f(0) > 0$ es totalmente positiva.*

Esto significa que todos los menores de la matriz de Hurwitz son positivos. Este teorema fue probado parcialmente por B. A. Asner (Asner (1970)) y posteriormente por J. H. Kemperman (Kemperman (1982)). Asner probó la total no negatividad de la matriz de Hurwitz considerando polinomios *cuasi-estables*, mientras que Kemperman probó la total positividad analizando las entradas de la *matriz infinita de Hurwitz*.

Con estas ideas presentamos a continuación nuestros principales resultados.

Teorema 4.10. *Sea $f(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ un polinomio Hurwitz de grado par con coeficientes positivos. Si $f(t)$ tiene una factorización estable Hadamard en dos polinomios Hurwitz con coeficientes positivos, entonces*

$$\frac{\alpha_{i+1}\alpha_0}{\alpha_1} < \frac{\alpha_{i-1}\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2\sqrt{\frac{\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad (4.11)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$.

Demostración. Supongase que $f(t)$ tiene una factorización de Hadamard

$$g(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.12)$$

$$h(t) = \frac{\alpha_n}{a_n} t^n + \frac{\alpha_{n-1}}{a_{n-1}} t^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_2}{a_2} t^2 + \frac{\alpha_1}{a_1} t + \frac{\alpha_0}{a_0} \quad (4.13)$$

donde $g(t)$ y $h(t)$ son polinomios Hurwitz con coeficientes positivos. Aplicando el *test* de estabilidad a g y h , construimos los polinomios $R_g(t)$ y $R_h(t)$ según la ecuación (4.7), esto es

$$R_g(t) = d_{n-1} t^{n-1} + d_{n-2} t^{n-2} + d_{n-3} t^{n-3} + \dots + d_1 t + d_0 \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned}
d_{n-1} &= a_{n-1}^2, \\
d_{n-2} &= a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-3}, \\
d_{n-3} &= a_{n-3}a_{n-1}, \\
&\vdots \\
d_2 &= a_2a_{n-1} - a_n a_1, \\
d_1 &= a_1a_{n-1}, \\
d_0 &= a_0a_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$R_h(t) = e_{n-1}t^{n-1} + e_{n-2}t^{n-2} + e_{n-3}t^{n-3} + \cdots + e_1t + e_0 \tag{4.16}$$

donde

$$\begin{aligned}
e_{n-1} &= \frac{\alpha_{n-1}^2}{a_{n-1}}, \\
e_{n-2} &= \frac{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}}{a_{n-2}a_{n-1}} - \frac{\alpha_n\alpha_{n-3}}{a_n a_{n-3}}, \\
e_{n-3} &= \frac{\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}}{a_{n-3}a_{n-1}}, \\
&\vdots \\
e_2 &= \frac{\alpha_2\alpha_{n-1}}{a_2a_{n-1}} - \frac{\alpha_n\alpha_1}{a_n a_1}, \\
e_1 &= \frac{\alpha_1\alpha_{n-1}}{a_1a_{n-1}}, \\
e_0 &= \frac{\alpha_0\alpha_{n-1}}{a_0a_{n-1}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A partir de que $g(t)$ y $h(t)$ son polinomios Hurwitz, $R_g(t)$ y $R_h(t)$ lo son también por el *test* de estabilidad. En consecuencia $(R_g * R_h)(t)$ es un polinomio Hurwitz (ver Garloff & Wagner (1996)). Ahora obsérvese que $R_g * R_h$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
(R_g * R_h)(t) &= \alpha_{n-1}^2 t^{n-1} + \alpha_{n-1}c_{n-2}t^{n-2} + \alpha_{n-1}\alpha_{n-3}t^{n-3} \\
&\quad + \alpha_{n-1}c_{n-4}t^{n-4} + \cdots + \alpha_{n-1}c_2t^2 + \alpha_{n-1}\alpha_1t + \alpha_{n-1}\alpha_0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde

$$c_{n-2} = \frac{d_{n-2}e_{n-2}}{\alpha_{n-1}}, \quad c_{n-4} = \frac{d_{n-4}e_{n-4}}{\alpha_{n-1}}, \dots, \quad c_2 = \frac{d_2e_2}{\alpha_{n-1}}. \tag{4.19}$$

Sea $r(t)$ el polinomio

$$r(t) = \frac{1}{\alpha_{n-1}}(R_g * R_h)(t) = \alpha_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \dots + c_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0.$$

A partir de que $r(t)$ es un polinomio Hurwitz, por los resultados de Asner (1970) y Kemperman (1982) tenemos que todos los menores de la matriz de Hurwitz asociada a $r(t)$ son positivos, en particular:

$$c_2\alpha_1 - \alpha_0\alpha_3 > 0, c_4\alpha_3 - \alpha_5c_2 > 0, \dots, \alpha_{n-3}c_{n-2} - \alpha_{n-1}c_{n-4} > 0. \quad (4.20)$$

Esto implica que

$$c_2 > \frac{\alpha_3\alpha_0}{\alpha_1}, c_4 > \frac{\alpha_5\alpha_0}{\alpha_1}, \dots, c_{n-2} > \frac{\alpha_{n-1}\alpha_0}{\alpha_1}. \quad (4.21)$$

También nótese que $R_h(t)$ puede escribirse como

$$R_h(t) = \frac{\alpha_{n-1}^2}{d_{n-1}}t^{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}c_{n-2}}{d_{n-2}}t^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}c_2}{d_2}t^2 + \frac{\alpha_{n-1}\alpha_1}{d_1}t + \frac{\alpha_{n-1}\alpha_0}{d_0}. \quad (4.22)$$

Aplicando el teorema 4.7 a los polinomios (4.14) y (4.22) obtenemos las familias de polinomios

$$\begin{aligned} G_s(t) = & st^n + \sqrt{d_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{d_{n-2}}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}}s \right) t^{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-3} + \dots \\ & + \left(\frac{d_2}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_1}{d_{n-1}}s \right) t^2 + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}t + \frac{d_0}{\sqrt{d_{n-1}}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

y

$$\begin{aligned} H_s(t) = & \frac{\alpha_n}{s}t^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-1} + \left(\frac{c_{n-2}\sqrt{d_{n-1}}}{d_{n-2}} + \frac{d_{n-1}\alpha_{n-3}\alpha_n}{d_{n-3}\alpha_{n-1}s} \right) t^{n-2} + \dots \\ & + \left(\frac{c_2\sqrt{d_{n-1}}}{d_2} + \frac{d_{n-1}\alpha_1\alpha_n}{d_1\alpha_{n-1}s} \right) t^2 + \frac{\sqrt{d_{n-1}}\alpha_1}{d_1}t + \frac{\sqrt{d_{n-1}}\alpha_0}{d_0}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

que depende del parámetro s . Más aún, tenemos que $G_s(t)$ y $H_s(t)$ son polinomios Hurwitz para toda $s > 0$ si y sólo si $R_g(t)$ y $R_h(t)$ son Hurwitz. Además, $s > 0$ satisface que $f = G_s * H_s$ si y sólo si

$$\left(\frac{d_i}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{i-1}}{d_{n-1}}s \right) \left(\frac{c_i\sqrt{d_{n-1}}}{d_i} + \frac{d_{n-1}\alpha_{i-1}\alpha_n}{d_{i-1}\alpha_{n-1}s} \right) = \alpha_i \quad (4.25)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Es decir

$$\frac{c_i d_{i-1}}{d_i \sqrt{d_{n-1}}} s^2 + \left(c_i + \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} - \alpha_i \right) s + \frac{d_i \sqrt{d_{n-1}} \alpha_{i-1} \alpha_n}{d_{i-1} \alpha_{n-1}} = 0 \quad (4.26)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Obsérvese que las ecuaciones (4.26) tienen al menos una solución porque $f(t)$ tiene al menos una factorización Hadamard $f = g * h$. Entonces tenemos que

$$c_i < \alpha_i - \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} \quad (4.27)$$

$$\Delta_i = \left(c_i + \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} - \alpha_i \right)^2 - 4 \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n c_i}{\alpha_{n-1}} > 0 \quad (4.28)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Podemos reescribir las ecuaciones (4.28) como

$$\Delta_i = \left(\frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - c_i \right)^2 - 4 \frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}} > 0 \quad (4.29)$$

que son equivalentes a

$$c_i < \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2 \sqrt{\frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad \text{o} \quad c_i > \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i + 2 \sqrt{\frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad (4.30)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Estudiando (4.27) y (4.30) vemos que no es posible que

$$c_i < \alpha_i - \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} \quad \text{y} \quad c_i > \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i + 2 \sqrt{\frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}}}.$$

por lo que debe entonces cumplirse

$$c_i < \alpha_i - \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} \quad \text{y} \quad c_i < \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2 \sqrt{\frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}}}$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Por otro parte, por el *test* de estabilidad se tiene que

$$0 < \alpha_i \alpha_{n-1} - \alpha_{i-1} \alpha_n$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Entonces

$$\frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2 \sqrt{\frac{\alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_n}{\alpha_{n-1}}} < \alpha_i - \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}}.$$

Esto implica que

$$c_i < \frac{\alpha_{i-1}\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2\sqrt{\frac{\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad (i = 2, 4, \dots, n-2). \quad (4.31)$$

Usando (4.21) obtenemos

$$\frac{\alpha_{i+1}\alpha_0}{\alpha_1} < c_i < \frac{\alpha_{i-1}\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2\sqrt{\frac{\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad (4.32)$$

para $i = 2, 4, \dots, n-2$, de donde

$$\frac{\alpha_{i+1}\alpha_0}{\alpha_1} < \frac{\alpha_{i-1}\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \alpha_i - 2\sqrt{\frac{\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} \quad (4.33)$$

para $i = 2, 4, \dots, n-2$. ■

El siguiente resultado es inmediato.

Corolario 4.11. *Considere un polinomio Hurwitz de grado par con coeficientes positivos*

$$f(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Si el sistema de ecuaciones (4.11) no se satisface, entonces $f(t)$ no tiene una factorización Hadamard.

■ **Ejemplo 4.12.** Considere el polinomio Hurwitz $f(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 5t + 1$. Aquí $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 1$. Entonces el sistema de desigualdades (4.11) se convierte en la desigualdad

$$\frac{2}{5} < \frac{5}{2} + 3 - 2\sqrt{\frac{15}{2}}$$

la cual no se satisface. En consecuencia $f(t)$ no tiene una factorización de Hadamard estable.

■ **Ejemplo 4.13.** Considérese el polinomio Hurwitz

$$f(t) = t^6 + 36t^5 + 225t^4 + 400t^3 + 225t^2 + 36t + 18$$

Aquí: $\alpha_0 = 18, \alpha_1 = \alpha_5 = 36, \alpha_2 = \alpha_4 = 225, \alpha_3 = 400, \alpha_6 = 1$. Entonces el sistema (4.11) se convierte en el sistema de desigualdades:

$$\frac{400(18)}{36} < \frac{(36)(1)}{36} + 225 - 2\sqrt{\frac{36(1)(225)}{36}}$$

$$\frac{36(18)}{36} < \frac{400(1)}{36} + 225 - 2\sqrt{\frac{400(1)(225)}{36}}$$

Obsérvese que la primera desigualdad no se satisface ya que no es posible que $200 < 196$. En consecuencia $f(t)$ no tiene una factorización de Hadamard estable en dos polinomios estables de grado 6.

■ **Ejemplo 4.14.** Considérese el polinomio Hurwitz

$$f(t) = t^4 + 8t^3 + 9t^2 + 2t + 1.$$

En este caso $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 9, \alpha_3 = 8, \alpha_4 = 1$. Entonces el sistema (4.11) se convierte en la desigualdad

$$\frac{8}{2} < \frac{2}{8} + 9 - 2\sqrt{\frac{9}{4}}$$

la cual se satisface. Entonces f podría tener una factorización Hadamard estable. En efecto, f tiene una factorización $f = g * h$ con

$$g(t) = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 4$$

y

$$h(t) = t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.$$

Existe una diferencia importante al obtener un resultado similar para polinomios estables de grado impar. Aplicando las mismas ideas como en el caso par, cuando intentamos dar una prueba para polinomios de grado impar obtenemos

$$r(t) = \alpha_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + \alpha_2t^2 + c_1t + \alpha_0$$

en lugar de

$$r(t) = \alpha_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$$

y entonces llegamos a las desigualdades

$$\alpha_2c_1 - \alpha_0c_3 > 0, \alpha_4c_3 - \alpha_2c_5 > 0, \dots, \alpha_{n-3}c_{n-2} - \alpha_{n-1}c_{n-4} > 0$$

en lugar de la ecuación (4.20). Esta diferencia no nos permite obtener un resultado similar al teorema (4.10). Sin embargo podemos establecer un resultado que da condiciones necesarias en términos de un sistema de desigualdades.

Teorema 4.15. *Considere $f(t) = \alpha_{2m+1}t^{2m+1} + \alpha_{2m}t^{2m} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0$ un polinomio Hurwitz de grado impar con coeficientes positivos. Si $f(t)$ tiene una factorización de Hadamard en dos polinomios Hurwitz con coeficientes positivos, entonces el siguiente sistema de desigualdades tiene al menos una solución (x_1, \dots, x_{m-1}) donde $x_k > 0$, para $k = 1, \dots, m-1$*

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha_0}x_1x_{m-1} + \sqrt{\alpha_{2m}} &< \sqrt{\alpha_2}x_{m-1} \\
\sqrt{\alpha_0}x_2x_{m-1} + \sqrt{\alpha_{2m}}x_1 &< \sqrt{\alpha_4}x_{m-1} \\
\sqrt{\alpha_0}x_3x_{m-1} + \sqrt{\alpha_{2m}}x_2 &< \sqrt{\alpha_6}x_{m-1} \\
&\vdots \\
\sqrt{\alpha_0}x_{m-1}^2 + \sqrt{\alpha_{2m}}x_{m-2} &< \sqrt{\alpha_{2m-2}}x_{m-1}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Demostración. Suponga que $f(t)$ tiene una factorización Hadamard

$$\begin{aligned}
\bar{g}(t) &= b_{2m+1}t^{2m+1} + b_{2m}t^{2m} + \dots + b_1t + b_0 \\
\bar{h}(t) &= \frac{\alpha_{2m+1}}{b_{2m+1}}t^{2m+1} + \frac{\alpha_{2m}}{b_{2m}}t^{2m} + \dots + \frac{\alpha_1}{b_1}t + \frac{\alpha_0}{b_0}.
\end{aligned}$$

Si siguiendo el procedimiento dado en la demostración del teorema (4.10), podemos obtener $R_{\bar{g}}(t)$ y $R_{\bar{h}}(t)$ y definimos

$$r(t) = \frac{1}{a_{2m}} (R_{\bar{g}} * R_{\bar{h}})(t).$$

En este caso $r(t)$ puede escribirse como

$$r(t) = \alpha_{2m}t^{2m} + c_{2m-1}t^{2m-1} + \dots + \alpha_2t^2 + c_1t + \alpha_0.$$

Entonces $r(t)$ es un polinomio Hurwitz de grado par con factorización Hadamard $\frac{1}{a_{2m}}R_{\bar{g}}(t)$ y $R_{\bar{h}}(t)$ y en consecuencia las desigualdades (4.3) se satisfacen, esto es

$$\frac{c_{2k+1}\alpha_0}{c_1} < \frac{c_{2k-1}\alpha_{2m}}{c_{2m-1}} + \alpha_{2k} - 2\sqrt{\frac{c_{2k-1}\alpha_{2k}\alpha_{2m}}{c_{2m-1}}}$$

$k = 1, 2, \dots, m-1$. Entonces

$$\frac{c_{2k+1}\alpha_0}{c_1} < \left(\sqrt{\alpha_{2k}} - \sqrt{\frac{c_{2k-1}}{c_{2m-1}}} \sqrt{\alpha_{2m}} \right)^2. \tag{4.35}$$

Por el *test* de estabilidad $\alpha_{2k}c_{2m-1} - c_{2k-1}\alpha_{2m} > 0$ (ver los coeficientes de $r(t)$). Luego, la desigualdad (4.35) implica

$$\sqrt{\frac{c_{2k+1}}{c_1}}\sqrt{\alpha_0} < \sqrt{\alpha_{2k}} - \sqrt{\frac{c_{2k-1}}{c_{2m-1}}}\sqrt{\alpha_{2m}}$$

para $k = 1, \dots, m-1$. Si definimos $x_k = \sqrt{\frac{c_{2k+1}}{c_1}}$, las desigualdades (4.34) se satisfacen. ■

■ **Ejemplo 4.16.** Considérese el polinomio Hurwitz

$$f(t) = t^5 + 4t^4 + 3t^3 + 5t^2 + t + 1$$

En este caso $\alpha_5 = 1, \alpha_4 = 4, \alpha_3 = 3, \alpha_2 = 5, \alpha_1 = 1, \alpha_0 = 1$ y $m = 2$. Analizamos la desigualdad $x_1^2 + \sqrt{4} < \sqrt{5}x_1$, esto es, $x_1^2 - \sqrt{5}x_1 + 2 < 0$. A partir de que el correspondiente determinante es $(\sqrt{5})^2 - 4(1)(2) = 5 - 8 = -3$ entonces la desigualdad $x_1^2 - \sqrt{5}x_1 + 2 < 0$ no se satisface for $x_1 > 0$ y el polinomio $f(t)$ no tiene una factorización de Hadamard estable.

Observación 4.17. La existencia de una solución de (4.34) es equivalente a $0 < \alpha_{2m-2}\alpha_2 - \alpha_{2m}\alpha_0$. Supongase que (4.34) se satisface. Entonces de la primera y última desigualdad tenemos que

$$\sqrt{\alpha_{2m}} < \sqrt{\alpha_0}x_1x_{m-1} + \sqrt{\alpha_{2m}} < \sqrt{\alpha_2}x_{m-1}$$

y

$$\sqrt{\alpha_0}x_{m-1}^2 < \sqrt{\alpha_0}x_{m-1}^2 + \sqrt{\alpha_{2m}}x_{m-2} < \sqrt{\alpha_{2m-2}}x_{m-1}$$

esto es

$$\sqrt{\alpha_{2m}} < \sqrt{\alpha_2}x_{m-1} \quad \text{y} \quad \sqrt{\alpha_0}x_{m-1}^2 < \sqrt{\alpha_{2m-2}}x_{m-1}$$

Así

$$\frac{\sqrt{\alpha_{2m}}}{\sqrt{\alpha_2}} < x_{m-1} < \frac{\sqrt{\alpha_{2m-2}}}{\sqrt{\alpha_0}} \quad (4.36)$$

y en consecuencia $0 < \alpha_{2m-2}\alpha_2 - \alpha_{2m}\alpha_0$. Por otra parte, si $0 < \alpha_{2m-2}\alpha_2 - \alpha_{2m}\alpha_0$ entonces

$$\frac{\sqrt{\alpha_{2m}}}{\sqrt{\alpha_2}} < \frac{\sqrt{\alpha_{2m-2}}}{\sqrt{\alpha_0}}.$$

Claramente, podemos encontrar $x_{m-1} > 0$ tal que (4.36) se cumple. Puede verse que x_{m-1} satisface

$$\sqrt{\alpha_{2m}} < \sqrt{\alpha_2}x_{m-1} \quad \text{y} \quad \sqrt{\alpha_0}x_{m-1}^2 < \sqrt{\alpha_{2m-2}}x_{m-1},$$

entonces podemos encontrar $x_1, x_2, \dots, x_{m-2} > 0$, suficientemente pequeños tales que (4.34) se satisface. De esta forma tenemos los siguientes resultados:

Corolario 4.18. *Sea $f(t) = \alpha_5 t^5 + \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ un polinomio Hurwitz con coeficientes positivos. Si $f(t)$ tiene una factorización estable de Hadamard, entonces la desigualdad*

$$\sqrt{\alpha_0} x_1^2 + \sqrt{\alpha_4} < \sqrt{\alpha_2} x_1$$

tiene al menos una solución para x_1 , con $x_1 > 0$, si y sólo si

$$\alpha_2 - 4\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_4} > 0.$$

Corolario 4.19. *Si el polinomio Hurwitz de grado impar con coeficientes positivos $f(t) = \alpha_{2m+1} t^{2m+1} + \alpha_{2m} t^{2m} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ tiene una factorización estable de Hadamard, entonces*

$$0 < \alpha_{2m-2} \alpha_2 - \alpha_{2m} \alpha_0 \quad (4.37)$$

se cumple para $m = 3, 4, \dots$

4.3. Condiciones necesarias y suficientes

Teorema 4.20. *Considérese el polinomio Hurwitz $f(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ con coeficientes positivos. Entonces $f(t)$ tiene una factorización estable de Hadamard en dos polinomios si y sólo si*

$$\frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1} < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2. \quad (4.38)$$

Teorema 4.21. *Sea $f(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ un polinomio Hurwitz con coeficientes reales positivos. La existencia de dos polinomios Hurwitz $R_G(t)$, $R_H(t)$ de grado $n-1$ y una solución del sistema de ecuaciones cuadráticas:*

$$\frac{c_i d_{i-1}}{d_i \sqrt{d_{n-1}}} s^2 + \left(c_i + \frac{\alpha_{i-1} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} - \alpha_i \right) s + \frac{d_i \sqrt{d_{n-1}} \alpha_{i-1} \alpha_n}{d_{i-1} \alpha_{n-1}} = 0, \quad (4.39)$$

para al menos un $s > 0$ con $i = 2, 4, \dots, n-2$ [$i = 1, 3, \dots, n-2$], si n es par [impar], es equivalente al hecho de que $f(t)$ tiene una factorización estable de Hadamard en dos polinomios de grado n .

Demostración.

\Rightarrow) : Consideremos primero el caso par. Supongamos que $f(t)$ es Hurwitz y que existen dos polinomios Hurwitz $R_G(t)$ y $R_H(t)$ de grado de grado $n - 1$

$$R_G(t) = d_{n-1}t^{n-1} + d_{n-2}t^{n-2} + \dots + d_2t^2 + d_1t + d_0$$

$$R_H(t) = \frac{\alpha_{n-1}^2}{d_{n-1}}t^{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}c_{n-2}}{d_{n-2}}t^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}c_2}{d_2}t^2 + \frac{\alpha_{n-1}\alpha_1}{d_1}t + \frac{\alpha_{n-1}\alpha_0}{d_0}$$

y supongamos que la ecuación (4.39) tiene una raíz real. Aplicando el teorema 4.7 a R_G y R_H obtenemos dos familias de polinomios Hurwitz de un parámetro

$$G_s(t) = st^n + \sqrt{d_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{d_{n-2}}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}}s \right) t^{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-3} + \dots \\ + \left(\frac{d_2}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_1}{d_{n-1}}s \right) t^2 + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}t + \frac{d_0}{\sqrt{d_{n-1}}}$$

$$H_s(t) = \frac{\alpha_n}{s}t^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-1} + \left(\frac{c_{n-2}\sqrt{d_{n-1}}}{d_{n-2}} + \frac{d_{n-1}\alpha_{n-3}\alpha_n}{d_{n-3}\alpha_{n-1}s} \right) t^{n-2} + \dots \\ + \left(\frac{c_2\sqrt{d_{n-1}}}{d_2} + \frac{d_{n-1}\alpha_1\alpha_n}{d_1\alpha_{n-1}s} \right) t^2 + \frac{\sqrt{d_{n-1}}\alpha_1}{d_1}t + \frac{\sqrt{d_{n-1}}\alpha_0}{d_0}$$

Entonces $f(t) = (G_s * H_s)(t)$ si y sólo si

$$\left(\frac{d_i}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{i-1}}{d_{n-1}}s \right) \left(\frac{c_i\sqrt{d_{n-1}}}{d_i} + \frac{d_{n-1}\alpha_{i-1}\alpha_n}{d_{i-1}\alpha_{n-1}s} \right) = \alpha_i \quad (4.40)$$

para $i = 2, 4, \dots, n - 2$. Así, para algún $s > 0$, la ecuación (4.40) es equivalente a la ecuación (4.39). Por lo tanto existe una factorización estable de Hadamard de $f(t)$.

Para el caso impar seguimos los mismos razonamientos sólo que en este caso tomamos

$$G_s(t) = st^n + \sqrt{d_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{d_{n-2}}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_{n-3}}{d_{n-1}}s \right) t^{n-2} + \frac{d_{n-3}}{\sqrt{d_{n-1}}}t^{n-3} + \dots \\ + \frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}}t^2 + \left(\frac{d_1}{\sqrt{d_{n-1}}} + \frac{d_0}{d_{n-1}}s \right) t + \frac{d_0}{\sqrt{d_{n-1}}}$$

y

$$\begin{aligned}
 H_s(t) = & \frac{\alpha_n}{s} t^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{d_{n-1}}} t^{n-1} + \left(\frac{c_{n-2} \sqrt{d_{n-1}}}{d_{n-2}} + \frac{d_{n-1} \alpha_{n-3} \alpha_n}{d_{n-3} \alpha_{n-1} s} \right) t^{n-2} + \dots \\
 & + \frac{\sqrt{d_{n-1}} \alpha_2}{d_2} t^2 + \left(\frac{c_1 \sqrt{d_{n-1}}}{d_1} + \frac{d_{n-1} \alpha_0 \alpha_n}{d_0 \alpha_{n-1} s} \right) t + \frac{\sqrt{d_{n-1}} \alpha_0}{d_0}.
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow) : Ver Loredo-Villalobos & Aguirre-Hernández (2011)

■

Relación con sistemas

En este capítulo mostraremos como los resultados anteriores pueden ser útiles en el estudio de algunos problemas en teoría de control.

5.1. La grúa

El modelo de una grúa que discutiremos brevemente a continuación es analizado en Ackerman (2002). Considérese la grúa que se describe en la figura 5.1. La tarea de la grúa es, por ejemplo, colocar contenedores en el interior de un barco. En primera instancia la masa de carga es únicamente el gancho que se encuentra al final de la cuerda. El gancho debe llegar a descansar encima del contenedor. Generalmente, una persona ayuda a detener el movimiento pendular del gancho para fijarlo al contenedor. Como propósito, la colocación del gancho por encima de la posición conocida del contenedor y la amortiguación del movimiento pendular del gancho se realizará automáticamente. Después de levantar el contenedor, este se transporta a cierta distancia cerca de la escotilla del barco. Este movimiento puede ser realizado mediante un control anticipado teniendo en cuenta la fuerza limitada del motor de la grúa y algunas restricciones de seguridad.

Un control por realimentación es necesario con el fin de posicionar el contenedor encima de la escotilla y para amortiguar el movimiento oscilatorio. El contenedor debe estar casi en reposo antes de que pueda ser bajado al buque. La masa de la carga varía, desde el peso del gancho hasta el máximo de carga que la grúa puede soportar. También la longitud de la cuerda

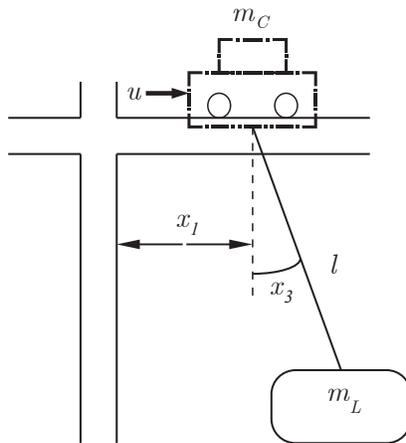


Figura 5.1: Esquema simplificado de la grúa y las variables que se consideran en su modelación.

es variable. En contraste la masa de la grúa varía poco. Un modelo lineal es usado para diseñar el control.

La señal de entrada es la fuerza u que acelera la grúa, la masa de la grúa es m_c , los restantes parámetros son la longitud de la cuerda l , la masa de carga m_L y la aceleración de la gravedad g . Si la posición de la grúa es x_1 entonces su velocidad será $x_2 = \dot{x}_1$ y si el ángulo de la cuerda es x_3 entonces su velocidad angular será $x_4 = \dot{x}_3$. Ahora bien, una serie de suposiciones son hechas para simplificar el modelo:

- La dinámica y la no linealidad de la conducción del motor se consideran poco significativas.
- La cabina de la grúa se mueve a lo largo del riel sin fricción.
- La cuerda no tiene masa ni elasticidad.
- No hay amortiguamiento pendular.
- l y m_L son constantes durante toda la operación.

La masa de la cabina y de la carga son unidas en una sola fuerza longitudinal F . Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned}
\text{cabina (horizontal):} & \quad m_c \ddot{x}_1 = u + F \sen x_3 \\
\text{carga (horizontal):} & \quad m_L \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + l \sen x_3) = -F \sen x_3 \\
\text{carga (vertical):} & \quad m_L \frac{d^2}{dt^2} (l \cos x_3) = -F \cos x_3 + m_L g
\end{aligned}$$

Eliminando F y calculando las derivadas se llega a un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned}
(m_L + m_c) \ddot{x}_1 + m_L l (\ddot{x}_3 \cos x_3 - \dot{x}_3^2 \sen x_3) &= u \\
m_L \ddot{x}_1 \cos x_3 + m_L l \ddot{x}_3 &= -m_L g \sen x_3
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahora, suponiendo que $m_L > 0$, $m_C > 0$ y $l > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= f_1(x_3, x_4, u) \\
\ddot{x}_3 &= f_2(x_3, x_4, u)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1(x_3, x_4, u) &= \frac{u + (g \cos x_3 + l x_4^2) m_L \sen x_3}{m_C + m_L \sen^2 x_3} \\
f_2(x_3, x_4, u) &= -\frac{u \cos x_3 + (g + l x_4^2 \cos x_3) m_L \sen x_3 + g m_C \sen x_3}{l(m_C + m_L \sen^2 x_3)}
\end{aligned}$$

Si consideramos el vector de estado

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

entonces el modelo no lineal del espacio de estado se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x_3, x_4, u) \\ x_4 \\ f_2(x_3, x_4, u) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Para diseñar el control linealizamos el sistema (5.4) considerando lo siguiente: para valores de x_3 pequeños y velocidades angulares pequeñas x_4 , se cumple que

$$\cos x_3 \approx 1, \quad \sen x_3 \approx x_3, \quad \sen^2 x_3 \approx 0, \quad x_4^2 \approx 0$$

Así derivamos un modelo lineal del espacio de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

donde

$$a_{23} = \frac{m_L}{m_C} g, \quad a_{43} = -\frac{(m_L + m_C)g}{m_C l}, \quad b_2 = \frac{1}{m_C}, \quad b_4 = -\frac{1}{m_C l}$$

El polinomio característico del sistema sin control es

$$\begin{aligned} p_A(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^2(s^2 - a_{43}) \\ &= s^2 \left(s^2 + \left(1 + \frac{m_L}{m_C} \right) \frac{g}{l} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

y para evitar coeficientes racionales podemos escribir (5.6) como

$$p(s) = l m_C p_A(s) = (m_C + m_L) g s^2 + l m_C s^4 \quad (5.7)$$

Ahora bien, el modelo a lazo cerrado con salida realimentada será:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{aligned}$$

con una ley de control $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{y}$, donde A y \mathbf{b} son como en (5.5), $C = I$ y

$$\mathbf{k}^T = - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{R}$$

En este caso el polinomio característico está dado por

$$\bar{p}(s) = l m_C p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4$$

donde

$$a_0 = k_1 g, \quad a_1 = k_2 g, \quad a_2 = (m_L + m_C) g + k_1 l - k_3, \quad a_3 = k_2 l - k_4, \quad a_4 = l m_C$$

En particular cuando $m_C = 1000$, $l = 12$, $m_L = 1500$, $k_1 = 500$, $k_2 = 2850$ y $k_4 = 1600$ (ver Ackerman (2002), pag. 337), se obtiene el polinomio

$$\bar{p}(t, k_3) = 12000t^4 + 34200t^3 + (31000 - k_3)t^2 + 28500t + 5000$$

Si $k_3 = 16000$ entonces se obtiene el polinomio Hurwitz

$$\bar{p}(t, 16000) = 12000t^4 + 34200t^3 + 15000t^2 + 28500t + 5000$$

Aquí $\alpha_0 = 5000$, $\alpha_1 = 28500$, $\alpha_2 = 15000$, $\alpha_3 = 34200$, $\alpha_4 = 12000$. Entonces el sistema de desigualdades (4.11) se traduce en la desigualdad $6000 < 505.10258$ la cual no se satisface. En consecuencia $\bar{p}(t, 16000)$ no tiene una factorización estable de Hadamard.

Observación 5.1. Sería interesante descubrir el significado físico que la factorización estable de Hadamard tiene para el polinomio asociado al modelo en un problema real.

5.2. El motor Dedra de Fiat

En esta sección consideraremos un modelo lineal del espacio de estado para el motor Dedra de la compañía automotriz Fiat analizado en Abate & Nunzio (1990), Abate *et al.* (1994) y Barmish (1994). El punto central es el control de la velocidad de ralentí de un motor de ignición. Este problema es particularmente importante en el tránsito de una ciudad, pues el consumo de combustible depende considerablemente del desempeño del motor cuando esta en marcha el automóvil. Dos formas comunes de lograr un bajo consumo de combustible implican disminuir la velocidad de las revoluciones del motor y aumentar la relación aire-combustible. Sin embargo controlar estos procesos no resulta sencillo.

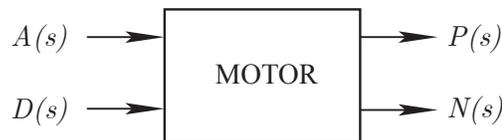


Figura 5.2: Configuración del motor Dedra con dos entradas y dos salidas.

El modelo linealizado del motor Dedra tiene dos entradas: la chispa de avance $A(s)$ y la apertura de la válvula del acelerador $D(s)$, así como

dos salidas: el colector de presión $P(s)$ y la velocidad del motor $N(s)$. En Abate *et al.* (1994) se muestra que la matriz de funciones de transferencia que representa el modelo del motor está dada por:

$$G(s, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} g_{11}(s, \mathbf{q}) & g_{12}(s, \mathbf{q}) \\ g_{21}(s, \mathbf{q}) & g_{22}(s, \mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{11}(s, \mathbf{q}) &= \frac{-q_3 q_6}{f(s, \mathbf{q})} \\ g_{12}(s, \mathbf{q}) &= \frac{q_1(q_7 s + q_5)}{f(s, \mathbf{q})} \\ g_{21}(s, \mathbf{q}) &= \frac{q_6(s + q_2)}{f(s, \mathbf{q})} \\ g_{22}(s, \mathbf{q}) &= \frac{q_1 q_4}{f(s, \mathbf{q})} \\ f(s, \mathbf{q}) &= q_7 s + (q_2 q_7 + q_5) s + (q_3 q_4 + q_2 q_5) \end{aligned} \quad (5.8)$$

con $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_7)$ un vector de parámetros. Según las especificaciones de la compañía Fiat, existen condiciones de operación de interés que son expresadas en términos de los parámetros q_i . Tres puntos particulares de operación fueron usados como fuente de validación de varias condiciones de desempeño del motor. Los valores de los parámetros q_i de los tres puntos de operación se muestran en el cuadro 5.1 (ver pag. 155 de Barmish (1994)). Un compensador es a continuación conectado al motor como controlador.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
A	2.1608	0.1027	0.0357	0.5607	0.0100	4.4962	1.0000
B	3.4329	0.1627	0.1139	0.2539	0.0208	2.0247	1.0000
C	2.1608	0.1027	0.0357	0.5607	0.0208	4.4962	10.0000

Cuadro 5.1: Tres puntos particulares de operación para los parámetros q_i .

El controlador fue diseñado originalmente por métodos cuadráticos (ver Abate & Nunzio (1990)). El controlador tiene entradas $p(s) = P_0(s) - P(s)$ y $n(s) = N_0(s) - N(s)$, donde $P(s)$ es la presión del motor y $P_0(s)$ es la referencia para la presión, $N(s)$ es la velocidad del motor y $N_0(s)$ es la referencia para la velocidad. Las dos salidas del controlador son tomadas como señales analógicas que representan la chispa de avance $a(s)$ y

la apertura de la válvula $d(s)$. El modelo del controlador por funciones de transferencia es

$$\begin{pmatrix} a(s) \\ d(s) \end{pmatrix} = H(s) \begin{pmatrix} p(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

con

$$H(s) = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} h_{11}(s) &= \frac{k_{22}s}{r(s)} \\ h_{12}(s) &= \frac{k_{23}s + k_1}{r(s)} \\ h_{21}(s) &= \frac{k_{12}s + (k_{12}k_{24} + 0.05k_{12} - k_{14}k_{22})}{r(s)} \\ h_{22}(s) &= \frac{k_{13}s + (k_{13}k_{24} - k_{14}k_{23} + 0.05k_{13} + k_{11})}{r(s)} \\ &\quad + \frac{k_{11}k_{24} - k_{14}k_{21} + 0.05k_{11}}{sr(s)} \\ r(s) &= s + k_{24} + 0.05 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Para completar la descripción del controlador añadimos la matriz de ganancia

$$K_C = \begin{pmatrix} 0.0081 & 0.1586 & 0.0872 & -0.1202 \\ 0.0187 & 0.0848 & 0.1826 & -0.0224 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores k_{ij} de K_C , obtenemos las entradas $h_{ij}(s)$ de $H(s)$:

$$\begin{aligned} h_{11}(s) &= \frac{0.0848s}{s + 0.0276} \\ h_{12}(s) &= \frac{0.1826s + 0.0187}{s + 0.0276} \\ h_{21}(s) &= \frac{0.1586s + 0.0145703}{s + 0.0276} \\ h_{22}(s) &= \frac{0.0872s^2 + 0.0324552s + 0.0024713}{s(s + 0.0276)} \end{aligned}$$

Ahora para obtener el polinomio de lazo cerrado hacemos uso del numerador de la función racional

$$R(s, \mathbf{q}) = \det[I + G(s, \mathbf{q})H(s)]$$

donde $G(s, \mathbf{q})$ y $H(s)$ son como en (5.8) y (5.9). El polinomio obtenido completo puede consultarse en el apéndice A de Barmish (1994).

Para cada uno de los tres puntos de operación considerados en la tabla 5.1, el correspondiente polinomio de lazo cerrado (f_1, f_2, f_3) es calculado, obteniéndose:

$$f_1(t) = t^7 + 1.444309t^6 + 0.7361252t^5 + 0.17729t^4 + \\ 0.02648999t^3 + 2.442136 \times 10^{-3}t^2 + \\ 1.13555 \times 10^{-4}t + 1.73903 \times 10^{-6}$$

$$f_2(t) = t^7 + 1.336368t^6 + 0.6779808t^5 + 0.1802489t^4 + \\ 0.02924289t^3 + 0.002765453t^2 + \\ 1.270495 \times 10^{-4}t + 1.920464 \times 10^{-6}$$

$$f_3(t) = 100t^7 + 68.95635t^6 + 16.31662t^5 + 2.120266t^4 + \\ 0.1708726t^3 + 0.008123757t^2 + \\ 1.965509 \times 10^{-4}t + 1.830692 \times 10^{-6}$$

A continuación verificaremos si el sistema (4.37) se satisface. Para f_1 , (4.37) se convierte en $0.0004300461 > 0$; para f_2 , $0.000495903 > 0$ y para f_3 , $0.017098288 > 0$. Entonces f_1, f_2, f_3 podrían tener una factorización estable de Hadamard.

Conclusiones y perspectivas

El resultado probado por Garloff y Wagner relativo a la cerradura del producto de Hadamard ha sido ampliamente utilizado y difundido en la Teoría de control; así también ha permitido impulsar la investigación sobre el análisis de estabilidad de dicho producto en clases más generales de familias de polinomios. Como mencionamos en el capítulo 3, dicho resultado puede ser aplicado a polinomios dependientes de parámetros, que pudieran descomponerse en dos factores con un menor número de parámetros para analizar por separado la estabilidad de estos polinomios factores más simples. Desafortunadamente en muchos casos la factorización propuesta no resulta siempre estable.

Fue así el objetivo del presente trabajo determinar bajo que condiciones es posible garantizar la existencia de una factorización estable de Hadamard de un polinomio Hurwitz. Para la obtención de los resultados antes expuestos hicimos uso del llamado test de estabilidad y la propiedad de total positividad de la matriz de Hurwitz, así también nos restringimos al caso de polinomios reales con coeficientes positivos. Dada la relación entre el test de estabilidad y el teorema de Hermite-Biehler, podríamos esperar que nuestro resultado puede obtenerse de forma equivalente aplicando dicho teorema. Este es un camino que no exploramos pero queda ahí como una posible investigación. Otro camino que puede explorarse es abordar el problema de la factorización utilizando el criterio de Routh.

Es importante mencionar que el teorema 4.21 nos dice bajo que condi-



Vladimir Kharitonov (1950-)
Nació en Achinsk, Rusia. Se graduó en 1973 como ingeniero en Matemáticas y posteriormente trabajó en el Inst. de Matemáticas Numéricas y Teoría del Control de la Universidad Estatal de Leningrado. Ahí recibió su grado de doctor en 1990. El resultado más destacado de Kharitonov concierne al análisis de estabilidad robusta de polinomios. Así mismo, en relación con el producto de Hadamard, ha escrito y dirigido trabajos referentes a la aplicación de dicho producto a polinomios multivariados. Entre 1995 y 2010, Kharitonov formó parte del equipo de investigadores del hoy Departamento de Control Automático del Cinvestav México. Actualmente es profesor en el Departamento de Matemáticas Aplicadas y Procesos de Control de la Univ. Estatal de San Petesburgo, Rusia.

ciones existirá la factorización estable de Hadamard, desafortunadamente no nos dice explícitamente como obtenerla y además el resultado depende de ciertos parámetros. Esto no le resta mérito al resultado, pues hemos dado un primer paso en la caracterización de la existencia de la factorización estable. Pudimos caracterizar perfectamente las condiciones para polinomios de grado 4 en términos únicamente de los coeficientes, que es el grado a partir del cual, según los resultados de Garloff y Shirinivasan, la factorización estable de Hadamard no es posible encontrar en todos los casos. Otro problema pues que queda a futuro es refinar el teorema 4.21 de forma que el criterio sólo dependa de los coeficientes del polinomio f a factorizar; más aún, tratar de encontrar un algoritmo que nos permita construir los factores estables.

Como fue planteado en la observación 4.18, al analizar un problema real en el que aparece un polinomio Hurwitz resulta interesante el problema de descubrir la interpretación física del hecho que exista o no una factorización estable de Hadamard. Podría también plantearse utilizar las ideas presentadas en este trabajo para abordar el problema del producto de Hadamard para polinomios multivariados, quizás primeramente para el caso de dos polinomios estables con dos variables. Por otra parte la relación entre familias de polinomios Hurwitz y el producto de Hadamard fue estudiada en Loaiza (1999). En dicho trabajo la estabilidad de bolas y politopos de polinomios se estudia usando el resultado de Garloff y Wagner, referente a la cerradura del producto de Hadamard. Sin embargo, pensamos que el problema inverso debería también ser estudiado, esto es, dada una familia de polinomios

$$f_\lambda(t) = \alpha_n(\lambda)t^n + \alpha_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + \alpha_0(\lambda)$$

quisiéramos encontrar condiciones tales que $f_\lambda(t)$ es una familia de polinomios Hurwitz y que tenga una factorización estable de Hadamard $f_\lambda = g_\lambda * h_\lambda$ donde

$$g_\lambda(t) = \beta_n(\lambda)t^n + \beta_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + \beta_0(\lambda)$$

$$h_\lambda(t) = \gamma_n(\lambda)t^n + \gamma_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + \gamma_0(\lambda)$$

son también familias Hurwitz para todo valor del parámetro λ . En particular, dados $p(t)$ and $q(t)$ dos polinomios Hurwitz de grado par, consideremos el segmento $\lambda p(t) + (1 - \lambda)q(t)$. Si el segmento es Hurwitz y todos sus elementos tienen una factorización estable de Hadamard entonces sus

coeficientes satisfacen (4.11) para todo $\lambda \in [0, 1]$. Obviamente las desigualdades (4.11) se cumplen para los coeficientes $p(t)$ y $q(t)$, pero otras condiciones podrían ser necesarias para que se cumpla el sistema (4.11) para toda $\lambda \in [0, 1]$. Puede en este sentido proponerse el siguiente problema: encontrar condiciones en términos de los coeficientes de $p(t)$ y $q(t)$ tales que $\lambda p(t) + (1 - \lambda)q(t)$ tenga una factorización estable de Hadamard para toda $\lambda \in [0, 1]$.

En el caso de polinomios Schur se sabe que todos ellos tienen una factorización de Hadamard en dos polinomios Schur; en este sentido puede plantearse el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que dados dos polinomios Schur su producto de Hadamard sea también un polinomio Schur.

Otra fuente de problemas es explorar todas las ideas expuestas en esta tesis pero en regiones más generales, es decir, no sólo en el semiplano abierto izquierdo o el círculo unitario abierto. Así mismo, los presentes resultados podrían abordarse considerando otras herramientas, como por ejemplo, trabajar con polinomios en otras bases, distintas a la canónica, o bien utilizar las funciones simétricas, que relacionan los coeficientes de un polinomio con sus raíces. Esperamos que los resultados que hemos aportado en este trabajo impulsen posteriores investigaciones y sean útiles en las aplicaciones.

Bibliografía

- Abate, M. and Nunzio, V. (1990). Idle speed control using optimal regulation. *XXIII FISITA Congress, Associazione Tecnica del l'Automobile, Technical paper*, vol. 1, no. 905008, Torino, Italy.
- Abate, M., B. R. Barmish, C. Murillo-Sánchez, R. Tempo (1994). Application of some new tools to Robust Stability Analysis of spark ignition engines: a case study. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 22 – 30.
- Ackerman, J. (2002). *Robust control. The parameter space approach*. Springer-Verlag.
- Aguirre, B., Ibarra, C., and Suárez, R (2002). Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials. *Systems and Control Letters* 46, pp. 255–263.
- Aguirre, B., and Suárez, R (2006). Algebraic test for the Hurwitz stability of a given segment of polynomials". *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 3, 12(2), pp. 261–275.
- Aguirre-Hernández, B.; Frias-Armenta, M and Verduzco, F. (2009). Smooth trivial vector bundle structure of the space of Hurwitz polynomials. *Automatica* 45, pp. 2864-2868.
- Asner Jr., B. (1970). On the total nonnegativity of the Hurwitz matrix. *SIAM J. Appl. Math.* 18(2), pp. 407-414.

- Barmish, B.R. (1994). *New tools for robustness of linear systems*. McMillan.
- Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H., and Keel, L.H. (1995). *Robust control: the parametric approach*. Prentice-Hall.
- Bialas, S. and J. Garloff. (1985) Convex combinations of stable polynomials. *Journal Franklin Inst.* **319**. pp. 373-377.
- Blanchini, F., Tempo, R. and Dabbene, F. (1998). Computation of the minimum destabilizing volume for interval and affine families of polynomials. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, vol. 43, no. 18, pp. 1159-1163.
- de Bruijn, N. G. (1949). Some theorems on the roots of polynomials. *Nieuw Arch. Wisk.* **23**. pp. 66-68.
- Dabbene, F., Polyac, B. and Tempo, R. (2007). On the complete instability of interval polynomials. *Systems and Control Letters*, vol. 56, no. 6, pp. 431-438.
- Díaz-González, E. C. (2010) El teorema de Hermite-Biehler. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Fallat, S. M. and Johnson, C. R. (2007). Hadamard powers and totally positive matrices. *Linear Algebra and its applications*. **423**. pp. 420-427.
- Fallat, S. M. and Johnson C. R. (2011). *Totally Nonnegative Matrices*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press.
- Fernández-Anaya, G. (1999). Stability properties of the Hadamard product of interval polynomials and SPR functions. *Journal of the Franklin Inst. Eng. and App. Math.* vol. 336. **5**. pp. 749-754.
- Frazer, R. and W. Duncan. (1929) On the criteria for the stability of small motions. *Proc. Royal Society A*. vol. **124**, pp. 642-654.
- Gantmacher, F.R. (1959) *Matrix theory*. Vol 2, AMS Chelsea Publishing.
- García-Sosa, F. R. (2010). Estabilización de sistemas de datos muestreados lineales por un control con retardo. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

-
- Garloff, J. and Wagner D. (1994). Preservation of total nonnegativity under the Hadamard product and related topics. *Total positivity and its applications. Proceedings of the meeting held in Jaca*. M. Gasca and C. Micchelli, Eds. Kluwer Acad. Publ.
- Garloff, J. and Wagner D. (1996). Hadamard products of stable polynomials are stable. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202, pp. 797-809.
- Garloff, J. and Shrinivasan B. (1996). The Hadamard factorization of Hurwitz and Schur stable polynomials. *Stability theory*. Jeltsch, R. and Mansour, M. eds. Birkhäuser, pp. 19-21.
- Gregor, J. and Tiser, J. (1998). On the Hadamard powers of polynomials. *Mathematics of control signals and systems*. vol. 11, 4. pp. 372-378.
- Hadamard, J. (1896). Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. math. France*, 14. pp. 199-220.
- Hadamard, J. (1899). Théoreme sur les séries entières. *Acta Math.* 22, pp. 55-63.
- Halmos, P.R. (1958). *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Princeton Univ. Press, Princeton.
- Hermite, C. (1856). Sur le nombre des racines d'une equation algebrique comprise entre des limites donnees. *J. Reine Angew. Math.*, vol 52, pp 39-51.
- Hille, E. (1973). *Analytic Function Theory*, vol. 2. Chelsea Publishing Co.
- Hinrichsen, D., and Kharitonov, V.L. (1995). Stability of polynomials with conic uncertainty. *Math. Control, Signals, and Systems*, 8(2), pp. 97-117.
- Hinrichsen, D. and Pritchard, J. (2004). *Mathematical System Theory I. Modelling, state space analysis, stability and robustness*. Springer-Verlag.
- Holtz, O. (2003). Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz and total positivity. *Linear Algebra and its Applications*. 372. pp. 105-110.
- Horn, R.A. (1989). The Hadamard product. *Matrix Theory and Applications. Proc. of Symposia in Applied Mathematics*. vol. 40. C.R. Johnson Ed. AMS. pp. 87-169.

- Horn, R. A. and Johnson C.R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- Hurwitz, A. (1895). Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. *Math. Ann.*, vol 46, pp. 273–284.
- Kharitonov, V.L. (1978) Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Dif. Urav.*, vol 14, pp. 2086–2088. Translation in *Differential Eq.*, vol 14, pp. 1483-1485, 1979.
- Kemperman, J. (1982). A Hurwitz matrix is totally positive. *SIAM J. Math. Anal.*, 13(2), pp. 331-341.
- Lancaster, P. and Tismenetsky, M. (1985) *The theory of matrices with applications*. Academic Press.
- Loaiza, G. (1999) Aplicación del teorema del producto de Hadamard de polinomios estables al análisis de estabilidad robusta. Tesis de maestría bajo la asesoría de V. Kharitonov. Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV, México.
- Loredo, C. (2005). *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz*. Reporte de los seminarios de Investigación I y II. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Loredo-Villalobos, C. A. & Aguirre-Hernández, B. (2011). Necessary conditions for Hadamard factorizations of Hurwitz polynomials. *Automatica*, vol. 47(7), pp. 1409-1413.
- Loredo-Villalobos, C. A. & Aguirre-Hernández, B. Hadamard factorization of stable polynomials. Sometido a *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*.
- Loredo-Villalobos, C. A. & Aguirre-Hernández, B. (2012). Hadamard factorization of stable polynomials. Advances in mathematical and computational methods. I. Kotsireas, R. Melnik and B. West, Eds. *AIP Proceed.* 1368, pp. 251-254.
- Malo, E. (1985). Note sur les équations algébriques, dont toutes le racines so réeles. *J. Math. Spéc.* 4. pp. 7-10.
- Maxwell, T.C. (1869). On governors. *Proceedings of the Royal Society*, 16, pp. 270-283.

- Neuman, M. (1998). A conjecture concerning the Hadamard product inverse of M-matrices. *Linear Algebra and its Applications*. **285**, pp. 277-290.
- Rodriguez-Angeles, E. Kharitonov, V. and Torres-Muñoz, J. (2004). The Hadamard product of two stable multivariate polynomials is not necessarily stable. *Multidimensional Systems and Signal Processing*. vol. 15, **1**, pp. 57-63.
- Schur, I. (1911). Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.* **140**, pp. 1-28.
- Vardulakis, A. and P. Stoyle. (1978). Generalized resultant theorem. *J. Inst. Maths. Applies.* **22**, pp. 331-335.
- Weisner, L. (1942). Polynomials whose roots lie in a sector. *Amer. J. Math.* **64**, pp. 55-60.
- Willems, J. and Tempo, R. (1999). The Kharitonov theorem with degree drop. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 11, pp. 2218-2220.