083398

CALCULO ESTOCASTICO CON TIEMPO LOCAL

TESIS QUE PRESENTA

JERONIMO ZAMORA CARRILLO

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMATICAS.

1985

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

CALCULO ESTOCASTICO CON TIEMPO LOCAL

CONTENIDO.

083398

INTRODUCCION.

En este trabajo se presenta el cálculo estocástico utilizando el tiempo local. Los ejemplos que se proporcionan de este tipo de cálculo se basan en procesos que están en función del movimiento browniano. No se pretende originalidad en los resultados, muchos de ellos se encuentran en el libro de P. Levy de procesos estocásticos y movimiento browniano y también en el libro de Ito-McKean (6). Pero la exposición hecha aquí sigue la idea de presentar el tiempo local mediante la extensión de la fórmula de Ito a funciones convexas, con lo cual se obtiene la herramienta fundamental para lo que llamaremos "Cálculo Estocástico con Tiempo Local".

El tema se haya desarrollado en tres capítulos.

En el primer capítulo se prueba la existencia y unicidad del tiempo local para semimartingalas continuas; el cual es un proceso que depende de dos variables; esto se hace via una extension de la fórmula de Ito a las funciones convexas. Como ejemplo importante se dan las Fórmulas de Tanaka. Además, se ven las propiedades fundamentales del tiempo local: crece donde el proceso alcanza el nivel deseado, la medibilidad, la continuidad en las dos variables. También se prueba la Fórmula de Densidad de Ocupación y se hace ver que el tiempo local definido corresponde a la idea del tiempo de estancia de un proceso estocástico (sojourn time). Como ejemplo se calcula el tiempo local del valor absoluto de un proceso.

El segundo capítulo contiene el cálculo estocástico de Ito ligado con el tiempo local, lo cual es llamado Cálculo Estocástico con Tiempo Local. Se prueba en primer lugar una fórmula de Azema-Yor que permite ver cuando el producto de dos procesos es martingala local, y se aplica a algunos casos particulares.

El tercer capítulo contiene los ejemplos de aplicación del Cálculo Estocástico con Tiempo Local. En el primer ejemplo se obtiene la ley del tiempo local detenido en el primer instante en el cual el movimiento browniano alcanza un nivel dado. En el segundo ejemplo se hace lo mismo, salvo que ahora se utiliza el movimiento browniano reflejado. El siguiente ejemplo generaliza resultados del Capítulo II y se obtienen aplicaciones para encontrar la ley de un proceso. Por último se trata el problema de reflexión aplicado a los procesos estocásticos. En este último ejemplo se obtiene explicitamente la forma de las soluciones para el problema de reflexión, con lo cual se tiene mas herramienta para obtener leyes de procesos. Además se prueban identidades de filtraciones.

CAPITULO I

TIEMPO LOCAL. DEFINICION Y RESULTADOS FUNDAMENTALES.

Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ una semimartingala continua con valores en $\mathbb{R}$. En lo que sigue se verá que asociado con X existe un proceso creciente y continuo, llamado el Tiempo Local de X, el cual mide, en cierto sentido, el tiempo que tarda X en un nivel a. Para el caso de que el proceso sea un movimiento Browniano (abreviado m.b.) y $a = 0$, entonces el conjunto $\{t : X_t = 0\}$ indica el tiempo que pasa X en el nivel cero; si quisieramos medir tal conjunto de una manera usual con la medida de Lebesgue, obtenemos que

$$\int_0^\infty I_{\{0\}}(X_s)\ ds = 0$$

(i.e. el conjunto de ceros tiene medida de Lebesgue cero). Sin embargo, como se verá, el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(X_s)\ ds$$

existe, no necesariamente se anula y corresponde al tiempo

Nota: Para ver que el conjunto de ceros tiene medida cero es suficiente probar que $E\int_0^\infty I_{\{0\}}(X_s)ds = 0$. Pero por el teorema de Fubini $E\int_0^\infty I_{\{0\}}(X_s)\ ds = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty I_{\{0\}}(X_s)dsdP = \int_0^\infty P(x\in\{0\})ds = 0.$

local del m.b. en el nivel cero. Este límite permite interpretar al tiempo local como una medida del tiempo de estancia, el tiempo que pasa X en el nivel cero.

El tiempo local es una herramienta esencial en el cálculo estocástico. Por un lado, su aplicación a las ecuaciones diferenciales estocásticas permite dar demostraciones sencillas para la existencia y unicidad de soluciones. Otra aplicación está en el cálculo estocástico, lo cual se presenta en este trabajo junto con algunos ejemplos para obtener leyes de procesos.

I.1. CONSTRUCCION

Es bien sabido que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ y X es una semimartingala continua, se tiene la Fórmula de Ito:

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_o^t f''(X_s) d[X,X]_s$$

donde $[X,X]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, la variación cuadrática de X. Si f es solo una función convexa, es decir algo menos que de clase $\mathscr{C}^2$, subsiste una fórmula similar como se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA I.1

Sea f una función convexa, entonces existe un proceso creciente y continuo, denotado A_t , tal que

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f'_-(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t \,.$$

f'_- denota la derivada izquierda de f.

Notemos antes que nada que A_t es un proceso de variación finita. Para la demostración del teorema necesitaremos considerar el siguiente lema.

LEMA I.2

Sea f convexa y $j \in \mathcal{C}^{\infty}$ con soporte compacto en $]-\infty,0]$ tal que $\int_{-\infty}^{0} j(x)dx = 1$. Definamos $j_n(y) = nj(ny)$ y $f_n(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x+y)\ j_n(y)\ dy$. Entonces f_n es convexa y f_n y f'_n convergen puntualmente a f y f' respectivamente.

Demostración. Como $f_n = (f*j_n) \in \mathcal{C}^2$ y es localmente acotada, entonces f_n está bien definida. Veamos que f_n es convexa:

$$f_n((1-a)x + ay) = \int_{-\infty}^{0} f(z + (1-a)x + ay)\ j_n(z)\ dz$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \{af(y+z) + (1-a)f(x+z)\}\ j_n(z)\ dz$$

$$= af_n(y) + (1-a)f_n(x).$$

Ahora veamos que f_n converge puntualmente a f :

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{0} f(z+x)\ j_n(z)\ dz = \int_{-\infty}^{0} f(z+x)\ nj(nz)dz\ ,$$

haciendo $t = nz$ se obtiene

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{0} f(\frac{t}{n} + x)j(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{0} f(x)j(t)dt = f(x)$$

Analogamente, con el teorema de la convergencia dominada se obtiene que f'_n converge puntualmente a f'_- .

≢ ≢

Demostración del Teorema I.1

Como f_n es convexa podemos usar, para cada n, la Fórmula de Ito:

$$(1) \qquad f_n(X_t) = f_n(X_o) + \int_o^t f_n'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^n$$

donde $A_t^n = \int^t f_n''(X_s)\, d[X,X]_s$. Como $f_n'' \geq 0$, entonces $A^n{}_t$ es creciente en t. Podemos considerar que $\{X_t\}$ es acotadaaltomaruntiempodeparo,así que f_-'es localmente acotada, y como $f_n' \uparrow f_-'$, por el teorema de la convergencia dominada para integrales estocásticas

$$\int_o^t f_n'(X_s)dX_s \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_o^t f_-'(X_s)dX_s, \text{en probabilidad.}$$

Así tenemos que $f_n(X_t)$, $f_n(X_o)$, $\int_o^t f_n'(X_s)dX_s$ convergen a $f(X_t)$, $f(X_o)$, $\int_o^t f_-'(X_s)dX_s$, de donde A_t^n converge a una v. a. A_t. Como A_t^n es un proceso creciente , A_t se puede regularizar en un proceso creciente y continuo a la derecha. De lo cual obtenemos

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f_-'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t$$

≠ ≠

TEOREMA I.3 *(FORMULA DE TANAKA)*

Para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$|X_t - a| = |X_o - a| + \int_o^t \text{sgn}(X_s - a)\, dX_s + A_t$$

$$(X_t - a)^+ = (X_o - a)^+ + \int_o^t I_{\{X_s > a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} A_t$$

$$(X_t - a)^- = (X_o - a)^- - \int_o^t I_{\{X_s \le a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} A_t$$

Demostración. La derivada izquierda de $f(x) = (x - a)^+$ es $I_{]a,\infty]}$; entonces por el Teorema I.1 existe un proceso creciente y continuo A_t^+ tal que

$$(X_t - a)^+ = (X_o - a)^+ + \int_o^t I_{]a,\infty]}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^+ \;;$$

analogamente se obtiene

$$(X_t - a)^- = (X_o - a)^- - \int_o^t I_{]-\infty,a]}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^- \;.$$

Ahora, como

$$X_t - a = (X_t - a)^+ - (X_t - a)^-$$

se obtiene

$$X_t = X_o + \int_o^t dX_s + \frac{1}{2} (A_t^+ - A_t^-)$$

o sea $A_t^+ = A_t^-$; por consiguiente

$$\begin{aligned} |X_t - a| &= (X_t - a)^+ + (X_t - a)^- \\ &= (X_o - a)^+ + (X_o - a)^- + \int_o^t I_{\{X_o > a\}} dX_s - \\ &\qquad \int_o^t I_{\{X_o \le a\}}\, dX_s + A_t \\ &= |X_o - a| + \int_o^t \mathrm{sgn}(X_s - a)\, dX_s + A_t \end{aligned}$$

≢ ≢

Definición.

El proceso A_t del teorema anterior es llamado el *Tiempo Local* de X en el nivel a . La notación será $L_t^a(X) \equiv A_t$. Para el caso $a = 0$ se denota por $L_t(X)$, o simplemente L_t cuando se sobreentienda de cual proceso se trata.

Notemos que a partir de $X_t^+ = X_0^+ + \int_0^t I_{]0,\infty[}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} L_t$ tenemos que $L_t \geq 0$. Si $T_b = \sup\{t:\ X_t = b\}$ entonces $L_\infty^a = L_{T_b}^a$.

I.2 RESULTADOS FUNDAMENTALES.

TEOREMA I.4

La medida dL_t^a tiene soporte en el conjunto $\{t\ :\ X_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Considérese la función $f(x) = (x-a)^2$, con $a \in \mathbb{R}$ y apliquemos la fórmula de Ito:

(1) $$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + [X,X]_t \ .$$

También obtenemos

$$|X_t - a|^2 = |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, d(|X_s - a|) + [\,|X|,|X|\,]_t;$$

pero de la fórmula de Tanaka

$$d(|X_t - a|) = \mathrm{sgn}(X_t - a)\, dX_t + dL_t^a$$

así que

$$(2) \qquad |X_t - a|^2 = |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a)\, dX_s$$
$$+ 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + [X,X]_t \,.$$

Entonces combinando (1) y (2) obtenemos

$$2\int_0^t (X_s - a) dX_s = 2\int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + 2\int_0^t |X_s - a| dL_s^a$$

y como $|X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) = X_s - a$, obtenemos

$$\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a = 0 \quad ;$$

o sea que $|X_s - a| = 0$ c.s. dL_t^a, es decir la medida dL_t^a tiene soporte en $\{t : X_s = a\}$.

$\not\equiv \not\equiv$

Ahora veamos como el tiempo local admite una versión medible en (a,t). Para esto consideremos el siguiente teorema general.

NOTA: Veamos que $[|X|,|X|]_t = [X,X]_t$. De la fórmula de Tanaka $|X_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} L_t$, entonces

$$[|X|,|X|]_t = \int_0^t \{\operatorname{sgn} X_s\}^2 d[X,X]_s = \int_0^t d[X,X]_s = [X,X]_t \,.$$

TEOREMA I.5 *(de Fubini para integrales estocásticas)*

Sea $H : \mathbb{R} \times (\Omega \times \mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(a,\omega,s) \in \mathbb{R}$ uniformemente acotado y $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ - medible, donde $\mathcal{P}$ es la σ-álgebra previsible de $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Entonces existe un proceso $K : \mathbb{R} \times (\Omega \times \mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ - medible, tal que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $K(a,\cdot,\cdot)$ es indistinguible de $\int_0^{\cdot} H(a,\cdot,s)dX_s(\cdot)$

Mas aun, si ν es una medida acotada en $\mathbb{R}$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} K(a,\omega,t)\ \nu(da) = \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}} H(a,\omega,s)\ \nu(da)\right] dX_s(\omega)$$

para cada t .

Demostración. Sea $H_n(a,\omega,s) = f_n(a)\ h_n(\omega,s)$ donde f_n es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible y h_n es $\mathcal{P}$-medible, tal que $H_n \uparrow H$ puntualmente; y sea $K_n(a,\omega,t) = \int_0^t f_n(a)h_n(\omega,s)\ dX_s(\omega)$

$$K_n(a,\omega,t) \uparrow K(a,\omega,t) = \lim K_n = \lim \int_0^t H_n(a,\omega,s)\ dX_s(\omega)$$

$$= \int_0^t H(a,\omega,s)\ dX_s(\omega)$$

Así que K es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ - medible

$\not\leq \not\leq$

COROLARIO I.6

Existe un proceso $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$ - medible, $\tilde{L}$, tal que, para cada a, $\tilde{L}(a,\cdot,\cdot)$ es indistinguible de L^a .

Demostración Sea $H(a,\omega,s) = I_{]a,\infty[}(X_s(\omega))$, entonces $\int_0^t I_{]a,]}(X_s)\, dX_s$ es un proceso creciente, $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}$- medible; luego, por la fórmula de Tanaka,

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{]a,\infty]}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\tilde{L}_t^a$$

Puesto que $(X_t - a)^+$ y $\int_0^t I_{]a,\infty]} dX_s$ son $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}$-medibles entonces $\tilde{L}_t^a$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}$-medibles.

≠ ≠

TEOREMA I.7 (Fórmula de Densidad de Ocupación)

Si f es una función Borel medible, entonces

$$\int_0^t f(X_s)\, d[X,X]_s = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a\, da \,, \qquad f \text{ boreliana.}$$

Demostración. Sea φ de soporte compacto, existen α y β constantes tales que

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x - a|\, \varphi''(a)\, da \quad .$$

La fórmula de Tanaka $|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a$, nos permite escribir:

$$\varphi(X_t) = \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\{|X_t - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a\}\varphi''(a) da$$

$$= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |X_o - a|\varphi''(a)da + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi''(a)\int_o^t sgn(X_s - a)dX_s da$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi''(a)\ L_t^a\ da$$

$$= \alpha(X_t - X_o) + \varphi(X_o) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_o^t sgn(X_s - a)\varphi''(a)dX_s da$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi''(a)\ L_t^a\ da\ .$$

Por otro lado: $\varphi'(x) = \alpha + \frac{1}{2}\int_o^t sgn(x - a)\ \varphi''(a)\ da$; y entonces, usando el teorema de Fubini

---

NOTA: . El nombre de fórmula de Densidad de Ocupación se justifica por lo siguiente: sea $f \equiv 1$, entonces $\int_o^t d[X,X]_s =$ $\int_{\mathbb{R}} L_t^u\ du$; lo cual quiere decir que la medida $d[X,X]_t$ tiene densidad L_t^u con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Si $f \equiv I_A$, A boreliano de $\mathbb{R}$, y X un m. b. , entonces

$$\int_A L_t^a\ da = \int_{\mathbb{R}} I_A(a)L_t^a\ da = \int_o^t I_A(X_s)\ d[X,X]_s = \int_o^t I_A(X_s)\ ds$$

El último miembro derecho de esta cadena de igualdades se conoce con el nombre de Tiempo de ocupación de A por el proceso $\{X_t\}_{t\geq o}$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\varphi''(a)dX_s da = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(X_s - a)\varphi''(a)\, da dX_s$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \{\varphi'(X_s) - \alpha\}\, dX_s$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \varphi'(X_s)\, dX_s - \alpha(X_s - X_0)$$

Luego

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi'(X_s)\, dX_s + \int_{\mathbb{R}} \varphi''(a) L_t^a\, da .$$

Comparando con la fórmula de Ito tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi''(a)\, L_t^a\, da = \int_0^t \varphi''(X_s)\, d[X,X]_s$$

Si consideramos $f = \varphi''$ se obtiene el resultado.

$\not\equiv \not\equiv$

COROLARIO I.8

Para cada a y t

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)\, d[X,X]_s .$$

Si X es martingala continua

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[a-\varepsilon,a+\varepsilon]}(X_s)\, d[X,X]_s$$

Demostración. Por la Fórmula de Densidad de Ocupación

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)\, d[X,X]_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} I_{[a,a+\varepsilon]}(u)\, L_t^u$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} L_t^u\, du \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} L_t^a$$

≠ ≠

Para el caso del m.b. el límite anterior queda

$$L_t = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{\{|B_s|<\varepsilon\}}\, ds$$

Si X es de variación finita entonces $[X,X] = 0$ y por la Fórmula de Densidad de Ocupación

$$0 = \int_0^t \varphi(X_s)\, d[X,X]_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\, L_t^u\, du$$

Así, para $\varphi \equiv 1$ tenemos $0 = \int_{\mathbb{R}} L_t^u\, du \Rightarrow L_t^u = 0$ c.s.Lebesgue.

TEOREMA I.9

Toda semimartingala continua admite una modificación del proceso L_t^a, $a\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}^+$, tal que el mapeo $(a,t) \longmapsto L_t^a$ es casi seguramente continuo en t y cadlag en a. Mas aun, si $X = M + V$ entonces

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2\int_0^t I_{\{X_s=a\}}\, dV_s = 2\int_0^t I_{\{X_s=a\}}\, dX_s$$

Demostración. De la fórmula de Tanaka

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{\{X_s>a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} L_t^a;$$

o sea, como $X_t = M_t + V_t$,

$$L_t^a = 2\{(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dM_s - \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dV_s\} .$$

Primero veamos que el proceso $\hat{M}_t^a = \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dM_s$ poseé una modificación bicontinua; para esto se utilizará el criterio de Kolmogorov, (ver (8) p. 14).

Puesto que $[X,X]_t = [M,M]_t$, y por la fórmula de densidad de ocupación, con $\varphi(\omega) = I_{]a,\infty[}(\omega)$,

$$\hat{M}_t^a = \int_0^t I_{\{X_s > a\}} d[M,M]_s = \int_{\mathbb{R}} I_{]a,\infty[}(u) L_t^u \, du = \int_a^{\infty} L_t^u \, du$$

por otro lado, para $a < b$:

$$\int_a^b L_t^u \, du = \hat{M}_t^a - \hat{M}_t^b = \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dM_s - \int_0^t I_{\{X_s > b\}} dM_s$$

$$= \int_0^t I_{\{a < X_s \le b\}} dM_s \quad ;$$

entonces

$$[\hat{M}^a - \hat{M}^b, \hat{M}^a - \hat{M}^b] = \int_0^t I_{\{a < X_s \le b\}} d[M,M]_s .$$

Por la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, para T tiempo de paro, tenemos que

$$E\left\{\sup_{t \le T} |\hat{M}_t^a - \hat{M}_t^b|^p\right\} \le C_p E\left\{|[\hat{M}^a - \hat{M}^b, \hat{M}^a - \hat{M}^b]_{t \wedge T}|^{p/2}\right\}$$

$$= C_p \; E\left\{\left|\int_t^T I_{\{a < X_s \le b\}} d[M,M]_s\right|^{p/2}\right\}$$

$$\le C_p \, (b-a)^{p/2} \, E\left\{\frac{1}{b-a} \int_a^b (L_T^u)^{p/2} du\right\}^{p/2}$$

$$\le C_p (b-a)^{p/2} \left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (L_T^u)^{p/2} \, du\right] dP(u)\right\}^{p/2}$$

$$\le C_p (b-a)^{p/2} \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b \sup_x \int_{\mathbb{R}} (L_T^x)^{p/2} dP(x) du \right\}^{p/2}$$

$$= C_p (b-a)^{p/2} \left\{ \sup_x E(L_T^x)^{p/2} \right\}^{p/2}$$

Obtenemos entonces que

$$(1) \qquad E \left\{ \sup_{t \le T} |\hat{M}_t^a - \hat{M}_t^b|^p \right\} \le C_p (b-a)^{p/2} \left\{ \sup_x E(L_T^x)^{p/2} \right\}^{p/2} .$$

De la fórmula de Tanaka :

$$L_T^x = 2\{(X_T - x)^+ - (X_o - x)^+ - \int_o^T I_{\{X_s > x\}} dX_s\} ,$$

y por otro lado $|(X_T - x)^+ - (X_o - x)^+| \le |X_T - X_o|$;

entonces, existe K_p constante tal que

$$|L_T^x|^{p/2} \le K_p \left\{ |X_T - X_o|^{p/2} + |\int_o^T I_{\{X_s > x\}} dX_s|^{p/2} \right\}.$$

Asi

$$E|L_T^x|^{p/2} \le K_p E|X_T - X_o|^{p/2} + K_p E|\int_o^T I_{\{X_s > x\}} dX_s|^{p/2}$$

Pero

$$E|\int_o^T I_{\{X_s > x\}} dX_s|^{p/2} \le E|\int_o^T I_{\{X_s > x\}} dM_s|^{p/2} + E|\int_o^T I_{\{X_s > x\}} dV_s|^{p/2}$$

$$\le E[M,M]_T^{p/2} + E\{\int_o^T dV_s\}^{p/2} .$$

O sea que

$$(2) \quad E|L_T^x|^{p/2} \le K_p\{E|X_T - X_o|^{p/2} + E[M,M]_T^{p/2} + E\{\int_o^T dV_s\}^{p/2}\}$$

De (1) y (2) se obtiene

$$E\{\sup_{t\le T}|\hat{M}_t^a - \hat{M}_t^b|^p\} \le C_p K_p (b-a)^{p/2} E\{|X_T - X_o|^{p/2} + [M,M]_T^{p/2} + \left(\int_o^T dV_s\right)^{p/2}\}^{p/2}$$

Esto nos dice que $\{\hat{M}_T^a\}$, con T un tiempo de paro, posee una modificación bicontinua. Entonces, $\{\hat{M}_t^a\}_{t\ge 0}$ posee una modificación bicontinua.

Ahora veamos que $\hat{V}_t^a = \int_o^t I_{\{X_s > a\}} dV_s$ es cadlag: del teorema de Lebesgue

$$(3) \qquad \hat{V}_t^{a-} = \lim_{u\uparrow a} \int_o^t I_{\{X_s > u\}} \, dV_s = \int_o^t I_{\{X_s \ge a\}} \, dV_s$$

$$(4) \qquad \hat{V}_t^{a+} = \lim_{u\downarrow a} \int_o^t I_{\{X_s > u\}} \, dV_s = \int_o^t I_{\{X_s > a\}} \, dV_s = \hat{V}_t^a$$

De (4) se obtiene que $L_t^a = L_t^{a+}$; y como $I_{\{X_s = a\}} = \lim_{u\uparrow a} I_{\{X_s > u\}} - I_{\{X_s < a\}}$ entonces

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2(\hat{V}_t^{a-} - \hat{V}_t^a) = 2\int_o^t I_{\{X_s = a\}} \, dV_s \; .$$

Obtenemos de esta manera que L_t^a admite una versión continua en t y cadlag en a.

Finalmente, utilizando la fórmula de densidad de ocupación,

$$\int_o^t I_{\{X_s = a\}} d[M,M]_s = \int_o^t I_{\{X_s = a\}} d[X,X]_s = \int_R I_{\{a\}}(u) L_t^u \, du = 0;$$

por consiguiente

$$\int_o^t I_{\{X_s = a\}} \, dM_s = 0 \; .$$

≢ ≢

EJEMPLO

Si X es una semimartingala continua, entonces

$$L_t^a(|X|) = L_t^a(X) + L_t^{(-a)-}(X) \qquad \text{si} \quad a \geq 0$$

$$L_t^a(|X|) = 0 \qquad \text{si} \quad a < 0 .$$

Puesto que

$$I_{[a,a+\varepsilon]}(|X_s|) = \begin{cases} 1 & a \leq |X_s| \leq a+\varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & a \leq X_s \leq a+\varepsilon \quad \text{ó} \quad -(a+\varepsilon) \leq X_s \leq -a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$I_{[-(a+\varepsilon)-h,-a-h]}(X_s) + I_{[a,a+\varepsilon]}(X_s)$$

$$= \begin{cases} 1 & a \leq X_s \leq a+\varepsilon \quad \text{ó} \quad -(a+\varepsilon)-h \leq X_s \leq -a-h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[a,a+\varepsilon]}(|X_s|)d[|X|,|X|]_s$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[a,a+\varepsilon]}(X_s) + \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[-a-h-\varepsilon,-a-h]}(X_s)d[X,X]_s$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} L_t^a(X) + L_t^{(-a)-} \qquad \text{si} \quad a > 0 .$$

Si $a < 0$, como $|X| \geq 0$, $I_{[a,a+\varepsilon]}(|X|) = 0$, $0<\varepsilon<|a|$, luego

$$L_t^a(|X|) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{[a,a+\varepsilon]}(|X|)d[X,X]_s = 0 .$$

CAPITULO II

CALCULO ESTOCASTICO CON TIEMPO LOCAL.

En todo lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ denotará una semimartingala continua y adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sean

$$S_t(\omega) = \sup \{s<t : X_s(\omega) = 0\}$$

$$D_t(\omega) = \inf \{s>t : X_s(\omega) = 0\} .$$

Por convención $\sup \emptyset = 0$, $\inf \emptyset = \infty$; en particular se se tiene $S_0 = 0$ y $S_t \leq t \leq D_t$.

Sea L_t el tiempo local de X en cero; como la medida dL_t tiene soporte en $\{t : X_t = 0\}$ entonces $L_{D_t} = L_t = L_{S_t}$.

También se tiene que $\{S_t \leq u\} = \{D_u \geq t\}$; esto es cierto, pues si $D_u < t$ entonces $S_t \leq u \leq D_u < t$ y esto quiere decir que hay puntos entre S_t y t donde X se anula, o sea que S_t no es el supremo. Cambiando el argumento para $S_t > u$, obtenemos la igualdad deseada.

LEMA II.1

D_t es un tiempo de paro

Demostración.

$$\{D_t(\omega) \le u\} = \bigcap_n \{D_t(\omega) < u + \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_n \{\inf(s>t : X_s = 0) < u + \frac{1}{n}\}$$

$$= \bigcap_n \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ t<r<u+\frac{1}{n}}} \{X_r(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}_{u^+} = \mathcal{F}_u$$

≢ ≢

S_t no es un tiempo de paro; en efecto, sea $t > u$ y si S_t es un tiempo de paro, entonces $\mathcal{F}_u \ni \{\omega : S_t(\omega) \le u\}$ $= \{\omega : D_u(\omega) \ge t\} \in \mathcal{F}_t$ y entonces $\{D_u \ge t\} \in \mathcal{F}_u \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_u$. Así que será tiempo de paro si $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$, pero esto en general no sucede debido a la continuidad del conjunto de índices y al hecho de que $\{\mathcal{F}_t\}$ es una filtración creciente.

Para cualquier proceso W, se define el conjunto de ceros de la trayectoria $W(\omega)$ como

$$\mathcal{O}_W = \{s : W_s(\omega) = 0\} .$$

Si W es una martingala continua no trivial, entonces $\mathcal{O}_W$ es un conjunto cerrado perfecto (es decir, sin puntos aislados. Ver (10) p. 17).

TEOREMA II.2

Sea $Z = \{Z_t\}_{t\geq 0}$ un proceso previsible acotado y $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ una semimartingala continua tal que $\mathcal{O}_X \leq \mathcal{O}_Y$; entonces

a) Z_{S_t} es también previsible,

b) $Z_{S_t} Y_t = Z_o Y_o + \int_o^t Z_{S_u} \, dY_u$

Demostración. a) Sea T un tiempo de paro y consideremos el proceso $Z_t = I_{[0,T]}(t) = I_{\{t\leq T\}}$. Como

$$Z_{S_t} = I_{\{S_t \leq T\}} = I_{\{D_T \geq t\}} = I_{[0,D_T]}(t),$$

puesto que D_T es un tiempo de paro, $I_{[0,D_T]}$ es previsible así que Z_{S_t} es previsible. El resultado es cierto para los previsibles elementales. Los previsibles elementales forman una clase monótona que genera a la σ-álgebra de los previsibles, entonces resulta en general que Z_{S_t} es previsible.

b) Sea $Z_t = I_{\{t\leq T\}}$, con T un tiempo de paro. Como $Y_{D_T} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} Z_{S_t} Y_t &= I_{\{S_t \leq T\}} Y_t = I_{\{t\leq D_T\}} Y_t = Y_{t\wedge D_T} \\ &= Z_o Y_o + \int_o^{t\wedge D_T} dY_s = Z_o Y_o + \int_o^t I_{\{s\leq D_T\}} \, dY_s \\ &= Z_o Y_o + \int_o^t Z_{S_u} \, dY_u . \end{aligned}$$

Nuevamente tenemos que el resultado es cierto para previsibles elementales, así que también es cierto para los previsibles acotados.

≢ ≢

COROLARIO II.3

Si X, Y son martingalas locales continuas entonces

a) $Z_{S_t} Y_t = Z_o Y_o + \int_o^t Z_{S_u} \, dY_u$ es martingala local.

b) El tiempo local de $Z_{S_t} Y_t$, en el nivel cero, está dado por $\int_o^t |Z_{S_u}| \, dL_u(Y)$.

c) En particular se tiene que $Z_{S_t} X_t$ es martingala local con tiempo local $\int_o^t |Z_{S_u}| \, dL_u(X) = \int_o^t |Z_u| \, dL_u(X)$.

Demostración. Consideremos $|Y|$ la cual es una semimartingala no negativa tal que $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_{|Y|}$; luego, aplicando b) del teorema anterior

$$|Z_{S_t} Y_t| = |Z_o Y_o| + \int_o^t |Z_{S_u}| \, d|Y_u| \, .$$

De la fórmula de Tanaka $d|Y_u| = \mathrm{sgn}(Y_u) \, dY_u + dL_u(Y)$ obtenemos

$$|Z_{S_t} Y_t| = |Z_o Y_o| + \int_o^t |Z_{S_u}| \mathrm{sgn}(Y_u) \, dY_u + \int_o^t |Z_{S_u}| \, dL_u(Y) \, .$$

Como $|Z_{S_u}| \mathrm{sgn}(Y_u) = Z_{S_u} \mathrm{sgn}(Z_{S_u} Y_u)$, y por la parte b) del teorema II.2 $d(Z_{S_u} Y_u) = Z_{S_u} dY_u$; entonces obtenemos que:

$$(1) \quad |Z_{S_t} Y_t| = |Z_o Y_o| + \int_o^t \mathrm{sgn}(Z_{S_u} Y_u) d(Z_{S_u} Y_u) + \int_o^t |Z_{S_u}| dL_u(Y).$$

Por otro lado, usando la fórmula de Tanaka :

$$(2) \quad |Z_{S_t} Y_t| = |Z_o Y_o| + \int_o^t \operatorname{sgn}(Z_{S_u} Y_u)\, d(Z_{S_u} Y_u) + L_t(Z_S Y) .$$

De (1) y (2) obtenemos que el tiempo local de $\{Z_{S_t} Y_t\}_{t\geq 0}$ es igual a

$$\int_o^t |Z_{S_u}|\, dL_u(Y) .$$

Ahora, en el caso particular de $Y = X$ tenemos que el tiempo local de $Z_{S_t} X_t$ es igual a $\int_o^t |Z_{S_u}|\, dL_u(X)$. Pero la medida dL_t tiene soporte en $\mathcal{O}_X$ y $S_t = t$ para cualquier t que sea límite por la izquierda de puntos de $\mathcal{O}_X$; los únicos puntos de $\mathcal{O}_X$ para los cuales $S_t \neq t$ son los extremos derechos de los intervalos de $\mathcal{O}_X^c$ y solo hay una colección numerable de tales puntos ; pero como L_t es continuo dL_t no tiene átomos, así que $|Z_{S_t}| = |Z_t|$ c.s. dL , luego

$$\int_o^t |Z_{S_u}|\, dL_u = \int_o^t |Z_u|\, dL_u .$$

II.1. CASOS PARTICULARES.

Sea $\varphi: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de Borel localmente acotada y consideremos $Z_t = \varphi(L_t)$, con L_t el tiempo local de X en cero. Como $L_{S_t} = L_t$ y de la parte b) del Teorema II.2 tenemos

$$\varphi(L_t) Y_t = \varphi(0) Y_o + \int_o^t \varphi(L_s)\, dY_s$$

con Y una semimartingala tal que $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_Y$.

II.1.1. Sean $\{M_t\}$ una semimartingala local nula en cero, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $Y_t = M_t + \alpha L_t$ tal que $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_Y$. Entonces

$$\varphi(L_t)Y_t - \alpha \int_0^t \varphi(L_u)dL_u$$

es una martingala local. En efecto, por el párrafo anterior,

$$\varphi(L_t)Y_t = \varphi(0)Y_0 + \int_0^t \varphi(L_u)dY_u$$

$$= \varphi(0)Y_0 + \alpha\int_0^t \varphi(L_u)dL_u + \int_0^t \varphi(L_u)dM_u \ ;$$

como $\int_0^t \varphi(L_u)\ dM_u$ es martingala local, obtenemos el resultado.

II.1.2. Sea X martingala local, entonces

$$\varphi(L_t)X_t^+ - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(L_u)dL_u \quad \text{y} \quad \varphi(L_t)|X_t| - \int_0^t \varphi(L_u)dL_u$$

son martingalas locales. Esto se sigue por :

$$\varphi(L_t)X_t^+ = \varphi(0)X_0^+ + \int_0^t \varphi(L_u)\ dX_u^+$$

$$= \varphi(0)X_0^+ + \int_0^t I_{\{X_u \geq 0\}}\ dX_u + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(L_u)dL_u \quad ,$$

$$\varphi(L_t)|X_t| = \varphi(0)|X_0| + \int_0^t \varphi(L_u)d|X_u|$$

$$= \varphi(0)|X_0| + \int_0^t \varphi(L_u)\mathrm{sgn}(X_u)dX_u + \int_0^t \varphi(L_u)dL_u ;$$

puesto que $\int_0^t I_{\{X_u \geq 0\}} dX_u$ y $\int_0^t \varphi(L_u) \operatorname{sgn}(X_u) dX_u$ son martingalas locales, se obtiene lo deseado.

II.1.3. Sean X una martingala local, $X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s$ y $\tilde{X}_t = X_t^* - X_t$ y sea $\tilde{L}_t$ el tiempo local de $\tilde{X}_t$. Como $\tilde{X}_t \geq 0$ y ademas $\tilde{X}_0 = 0$, entonces $\tilde{X}_t^- = 0$; luego, de la fórmula de Tanaka se tiene

$$0 = \tilde{X}_t^- = -\int_0^t I_{\{\tilde{X}_s = 0\}} \, d\tilde{X}_s + \frac{1}{2} \tilde{L}_t .$$

Así que

$$\tilde{L}_t = 2\int_0^t I_{\{\tilde{X}_s = 0\}} \, d\tilde{X}_s = 2 \int_0^t I_{\{X_s^* = X_s\}} (dX_s^* - dX_s)$$

Por otra parte usando la fórmula b) del Teorema II.2

$$\tilde{X}_t Z_{S_t} = \int_0^t Z_{S_u} dX_u^* - \int_0^t Z_{S_u} \, dX_u \ ;$$

por lo tanto

$$Z_{S_t}(X_t^* - X_t) - \int_0^t Z_{S_u} \, dX_u^* = - \int_0^t Z_{S_u} \, dX_u \quad ;$$

como el segundo miembro es una martingala local entonces

$$Z_{S_t}(X_t^* - X_t) - \int_0^t Z_{S_u} dX_u^*$$

es una martingala local.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^2$ entonces $\varphi(X_t^*)$ es una semimartingala continua y

$$\int_0^t \varphi(X_s^*)\, dX_s^* - (X_t^* - X_t)\varphi(X_t^*)$$

$$= \int_0^t \varphi(X_s^*)dX_s^* - \int_0^t \varphi(X_s^*)dX_s^* + \int_0^t \varphi(X_s^*)dX_s - \int_0^t (X_s^*-X_s)\varphi'(X_s^*)dX_s^*$$

Como X_t^* crece solo en el conjunto $\{t : X_t^* = X_t\}$, esto dice que la medida dX_t^* tiene soporte en $\{t: X_t^* = X_t\}$, luego la ultima integral se anula;

$$\int_0^t \varphi(X_s^*)dX_s^* - (X_t^* - X_t)\varphi(X_t) = \int_0^t \varphi(X_s^*)\, dX_s$$

es una martingala local.

C A P I T U L O III

EJEMPLOS

III.1. Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un m.b. en $\mathbb{R}$ que parte de cero y sea

$$T_a = \inf \{t : B_t = a\}$$

con $a \in \mathbb{R}^+$. Entonces $L^b_{T_a}$ tiene ley exponencial de parámetro $2(a - b)$, $0 \leq b < a$.

Sea $\varphi(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda \geq 0$. Se tiene

$$\phi(L^b_t) := \int_0^t e^{-\lambda L^b_s} \, dL^b_s = -\frac{1}{\lambda} \{\exp(-\lambda L^b_t) - 1\} .$$

Luego, de II.1.2,

$$\frac{1}{2} \phi(L^b_t) - (B_t - b)^+ \varphi(L^b_t) = -\lambda^{-1} \exp(-\lambda L^b_t) \left\{\frac{1}{2} + \lambda(B_t - b)^+\right\} - \frac{1}{2\lambda}$$

es una martingala local; como T_a es un tiempo de paro finito c.s.

$$E\left\{\frac{1}{2} \phi(L^b_{T_a}) - (B_{T_a} - b)^+ \varphi(L^b_{T_a})\right\}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} E\left\{\exp\left[-\lambda L^b_{T_a}\right]\left(\frac{1}{2} + \lambda(a-b)\right) - \frac{1}{2}\right\} = 0$$

o sea

$$E\left\{\exp\left[-\lambda L_T^b\right]\right\} = \frac{1}{1 + 2\lambda(a-b)}$$

Lo cual es la transformada de Laplace de la variable $L_{T_a}^b$ con ley exponencial de parámetro $2(a-b)$.

III.2. Sean $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un m.b. en $\mathbb{R}$ que parte de cero y

$$\tilde{T}_a = \inf\{t : |B_t| = a\}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Entonces $L_{\tilde{T}_a}$ tiene ley exponencial de parámetro a.

Sean $\varphi(x) = e^{-\lambda x}$ y $\phi(L_t) := \int_0^t \exp(-\lambda L_s)\, dL_s = -\lambda^{-1}\{\exp(-\lambda L_t) - 1\}$. Así que

$$\phi(L_t) - |B_t|\varphi(L_t) = -\lambda^{-1}\{\exp(-\lambda L_t) - 1\} - |B_t|\exp(-\lambda L_t)$$

$$= -\lambda^{-1}\{1 + \lambda|B_t|\}\exp(-\lambda L_t) + \lambda^{-1}$$

es una martingala local. Como $\tilde{T}_a$ es tiempo de paro,

$$\lambda^{-1} E\{(1 + \lambda a)\exp(-\lambda L_{\tilde{T}_a})\} = \lambda^{-1} \quad ;$$

o sea $E\{\exp(-\lambda L_{\tilde{T}_a})\} = (1 + \lambda a)^{-1}$

III.3. Los resultados de la sección II.1.3 se pueden generalizar como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA III.1

Con la notación de II.1.3, X una martingala local nula en cero y F suficientemente suave:

(a) Si $\frac{1}{2}F''_{xx} + F'_z = 0$ y $F'_y(x,x,z) = 0$ para cada x,z entonces $F(X_t, X^*_t, [X,X]_t)$ es una martingala local.

(b) Si $\frac{1}{2}F''_{xx} + F'_z = 0$ entonces $F(X_t, L_t, [X,X]_t)$ es martingala local.

Demostración. a) De la fórmula de Ito se obtiene

$$F(X_t, X^*_t, [X,X]_t) = F(X_o, X^*_o; [X,X]_o) + \int_o^t \{F'_x dX_s + F'_y dX^*_s + F'_z d[X,X]_s\}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_o^t \{F''_{xx} d[X,X]_s + F''_{xy} d[X,X^*]_s + F''_{xz} d[X,[X,X]]_s$$

$$+ F''_{yy} d[X^*,X^*]_s + F''_{yz} d[X^*,[X,X]] + F''_{zz} d[[X,X]]\}$$

$$= F(X_o, X^*_o, [X,X]_o) + \int_o^t \{F'_x dX_s + F'_y dX^*_s + F'_z\, d[X,X]_s\}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_o^t F''_{xx}\, d[X,X]_s$$

$$= F(X_o, X_o, [X,X]_o) + \int_o^t (F'_x dX_s + F'_y dX^*_s)$$

$$+ \int_o^t (F'_z + \frac{1}{2}F''_{xx})\, d[X,X]_s$$

$$= F(X_o, X^*_o, [X,X]) + \int_o^t F'_x\, dX_s + \int_o^t F'_y\, dX_s \quad ;$$

puesto que $F'_y(x,x,z) = 0$ y $(X^*_t)' = \begin{cases} X'_t & \text{si } X_t = X^*_t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

entonces $\int_o^t F'_y \, dX^*_s = 0$; y por consiguiente

$$F(X_t, X^*_t, [X,X]_t) = F(X_o, X^*_o, [X,X]_o) + \int_o^t F'_x \, dX_s$$

es una martingala local.

b) Nuevamente usando la fórmula de Ito,

$$\begin{aligned} F(X_t,L_t,[X,X]_t) = {} & F(X_o,L_o,[X,X]_o) + \int_o^t \{F'_x dX_s + F'_y dL_s + F'_z d[X,X]_s\} \\ & + \frac{1}{2}\int_o^t \{F''_{xx}\, d[X,X]_s + F''_{yy}\, d[L,L]_s + F''_{zz}\, d[[X,X]]_s \\ & + F''_{xy} d[X,L]_s + F''_{xz} d[X,[X,X]]_s + F''_{yz} d[L,[X,X]]_s\} \\ = {} & F(X_o,L_o,[X,X]_o) + \int_o^t \{F'_x dX_s + F'_y dL_s + F'_z d[X,X]_s\} \\ & + \frac{1}{2}\int_o^t F''_{xx}\, d[X,X]_s \, . \\ = {} & F(X_o,L_o,[X,X]_o) + \int_o^t F'_x \, dX_s + \int_o^t F'_y \, dL_s \, . \\ = {} & F(X_o,L_o,[X,X]_o) + \int_o^t F'_x \, dX_s - \int_o^t F'_y \operatorname{sgn}(X_s) dX_s \\ & + \int_o^t F'_y \, d|X_s| \; ; \end{aligned}$$

por consiguiente $F(X_t,L_t,[X,X]_t)$ es una martingala local.

≠ ≠

COROLARIO III.2

a) $(X^*_t - X_t)^2 - [X,X]_t$ es una martingala local.

b) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el proceso

$$Z^{\alpha\beta}_t = \left[\beta\cosh\beta(X^*_t - X_t) - \alpha\,\mathrm{senh}\,\beta(X^*_t - X_t)\right]\exp\left\{\alpha X^*_t - \frac{\beta^2}{2}[X,X]_t\right\}$$

es martingala local.

b') $Z^{\alpha\beta}_t = \left[\beta\cosh\beta|X_t| - \alpha\,\mathrm{senh}\,\beta|X_t|\right]\exp\left\{\alpha L_t - \frac{\beta^2}{2}[X,X]_t\right\}$

es martingala local.

c) Si B es un m.b. y $\tilde{T}_a = \inf\{t : |B_t| = a\}$, entonces para $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$,

$$E\left[\exp\left\{\alpha L_{\tilde{T}_a} - \frac{\beta^2}{2}\tilde{T}_a\right\}\right] = \beta\{\beta\cosh a\beta - \alpha\,\mathrm{senh}\,a\beta\}^{-1}$$

Demostración. a) Sea $F(x,y,z) = (y-x)^2 - z$. Puesto que $F''_{xx} = 2$ y $F'_z = -1$ entonces $\frac{1}{2}F''_{xx} + F'_z = 0$, además $F'_y(x,x,z) = 2(x-x) = 0$; por consiguiente

$F(X_t, X^*_t, [X,X]_t) = (X^*_t - X_t)^2 - [X,X]_t$ es martingala local.

b) Sea $F(x,y,z) = \left[\beta\cosh\beta(y-x) - \alpha\,\mathrm{senh}\,\beta(y-x)\right]e^{\alpha y-\beta^2 z/2}$

Como $\frac{1}{2}F''_{xx} = \frac{1}{2}\beta^2\left[\beta\cosh\beta(y-x) - \alpha\,\mathrm{senh}\,\beta(y-x)\right]e^{\alpha y-\beta^2 z/2}$ y

$F'_z = -\frac{1}{2}\beta^2\left[\beta\cosh\beta(y-x) - \alpha\,\mathrm{senh}\,\beta(y-x)\right]e^{\alpha y-\beta^2 z/2}$ entonces

$\frac{1}{2}F''_{xx} + F'_z = 0$. Por otro lado

$F'_y = \left[\beta^2 \operatorname{senh}\beta(y-x) - \alpha\cosh\beta(y-x)\right] \alpha\exp(\alpha y - \frac{\beta^2}{2}z)$, luego $F'_y(x,x,z) = 0$. Entonces el proceso $\{Z_t^{\alpha\beta}\}_{t\geq 0}$ es martingala local.

b') Es claro que la función

$$F(x,y,z) = \left[\beta\cosh\beta x - \alpha\operatorname{senh}\beta x\right]\exp\{\alpha y - \beta^2 z/2\}$$

satisface $\frac{1}{2} F''_{xx} + F'_z = 0$; por consiguiente el proceso

$$Z_t^{\alpha\beta} = \left[\beta\cosh\beta|X_t| - \alpha\operatorname{senh}\beta|X_t|\right] \exp\{\alpha L_t - \beta^2[X,X]_t/2\}$$

es una martingala local.

c) Puesto que $\tilde{T}_a$ es un tiempo de paro, y el proceso del inciso b') es una martingala local, entonces

$$Z_{\tilde{T}_a}^{\alpha\beta} = \left[\beta\cosh a\beta - \alpha\operatorname{senh} a\beta\right]\exp\{\alpha L_{\tilde{T}_a} - \beta^2\, \tilde{T}_a/2\}$$

es una martingala. Además $Z_0^{\alpha\beta} = \beta\cosh 0 - \alpha\operatorname{senh} 0 = \beta$.
Por el teorema de paro

$$E\{Z_{\tilde{T}_a}^{\alpha\beta}\} = E\{Z_0^{\alpha\beta}\} = \beta \quad ;$$

es decir

$$E\left[(\beta\cosh a\beta - \alpha\operatorname{senh} a\beta)\exp\{\alpha L_{\tilde{T}_a} - \beta^2\tilde{T}_a/2\}\right] = \beta \quad ,$$

de donde se obtiene el resultado.

≢ ≢

III.4 (a) Si X es una martingala local continua, nula en cero, $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ y $a>0$, entonces

$$\frac{1}{2} F(L_t^a) + [(M_t^+ - a) \wedge 0]F'(L_t^a) - \frac{1}{2} \int_0^t F'(L_s^a)dL_s^0$$

es una martingala local.

(b) Para el movimiento Browniano, la transformada de Laplace de la ley de $L_{\tau_t}^a$ donde $\tau_t = \inf\{s : L_s^0 = t\}$ es $\lambda[1 + \frac{1}{2}\lambda a + \lambda]^{-1}$

Demostración. (a) Usando la fórmula de Tanaka

$$dX_t^+ = I_{\{X_t>0\}}\, dX_t + \frac{1}{2}\, dL_t^0 .$$

Luego, usando otra vez la fórmula de Tanaka,

$$\frac{1}{2}\, dL_t^a = d(X_t^+ - a)^- + I_{\{X_t^+ \le a\}}\, dX_t^+$$

$$= d(X_t^+ - a)^- + I_{\{X_t^+ \le a\}} I_{\{X_t>0\}} dX_t + \frac{1}{2} I_{\{X_t^+\le a\}}\, dL_t^0$$

De la fórmula de Ito, teniendo en cuenta que L_t^a es de variación finita, obtenemos

$$F(L_t^a) = \int_0^t F'(L_s^a)\, dL_s^a$$

$$= 2\int_0^t F'(L_s^a)\, d(X_s^+-a)^- + 2\int_0^t F'(L_s^a)\, I_{\{X_s^+\le a\}}\, I_{\{X_s>0\}}\, dX_s$$

$$+ \int_0^t F'(L_s^a)\, I_{\{X_s^+\le a\}}\, dL_s^0$$

$$= 2F'(L_t^a)[X_t^+ - a]^- + \int_0^t F'(L_s^a)dL_s^0 +$$

$$+ 2\int_0^o F'(L_s^a) I_{\{X_s^+\le a\}} I_{\{X_s>0\}}\, dX_s$$

Luego

$$\frac{1}{2}\,F(L_t^a) - F'(L_t^a)[X_t^+ - a]^- - \frac{1}{2}\int_0^t F'(L_s^a)\,dL_s^o$$

$$= \int_0^t F'(L_s^a)I_{\{X_s^+\le a\}}I_{\{X_s>0\}}\,dX_s$$

es una martingala local.

b) Sea $F(x) = e^{-\lambda x}$, entonces por a):

$$\frac{1}{2}\,\exp(-\lambda L_t^a) - (B_t^+ - a)^-\lambda\exp(-\lambda L_t^a) + \frac{1}{2}\,\lambda\int_0^t \exp(-\lambda L_s^a)dL_s^o$$

es martingala local. Luego, como τ es un tiempo de paro,

$$\frac{1}{2}\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a) - \lambda(B_{\tau_t}^+ - a)^-\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a) + \frac{1}{2}\,\lambda\int_0^t \exp(-\lambda L_{\tau_s}^a)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a) - \lambda(B_{\tau_t}^+ - a)^-\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a) + \frac{1}{2}\,\lambda\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a)$$
$$- \frac{1}{2}\,\lambda\exp(-\lambda L_{\tau_o}^a) \;.$$

Como L_t^a crece donde $B_t - a$ se anula, entonces lo anterior es igual a

$$[\frac{1}{2} + \lambda a + \frac{1}{2}\,\lambda]\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a) - \frac{1}{2}\,\lambda \;.$$

Luego, por el teorema de tiempo de paro

$$E\{\exp(-\lambda L_{\tau_t}^a)\} = \frac{1}{2}\lambda(\frac{1}{2} + \lambda a + \frac{1}{2}\,\lambda)^{-1}$$

≢ ≢

III.5. PROBLEMA DE REFLEXION Y TIEMPO LOCAL.

Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, y $y \in \mathscr{C}$. Se dice que la pareja (z,k), con $z,k \in \mathscr{C}$, es solución del *Problema de Reflexión asociado a* y (en adelante abreviado $PR(y)$) si

(1) $z = y + k$

(2) $z \geq 0$

(3) k es una función creciente, nula en cero, tal que $\displaystyle\int_0^{\infty} z(t)\, dk(t) = 0$.

TEOREMA III.3

Para $y \in \mathscr{C}$ tal que $y(0) \geq 0$, el $PR(y)$ admite una solución única dada por

$$k(t) = \sup_{[0,t]} \bar{y}(s) ,$$

donde $\bar{y}(s) = \sup\{-y(s),0\}$, y $z(t) = y(t) + k(t)$.

Demostración. Unicidad . Sean (z,k) y (z',k') dos soluciones del $PR(y)$; entonces $z(t) = y(t) + k(t)$ y $z'(t) = y(t) + k'(t)$, luego $z(t) - z'(t) = k(t) - k'(t)$. Entonces

$$(z(t) - z'(t))^2 = (k(t) - k'(t))^2$$

$$= 2\int_0^t (k(s) - k'(s))\, d(k(s)-k'(s))$$

$$= 2\int_0^t (z(s) - z'(s))\, d(k(s)-k'(s))$$

$$= -2\left[\int_0^t z'(s)\, dk(s) + \int_0^t z(s)\, dk'(s)\right]$$

Debido a (2) y (3) de la definición de PR(y), se obtiene $(z(t) - z'(t))^2 \leq 0$; o sea $z(t) = z'(t)$, de donde $k(t) = k'(t)$.

<u>Existencia</u> . Sea $k(t) = \sup\limits_{[0,t]} \bar{y}(s)$ y $z(t) = y(t) + k(t)$. Es claro que $k \in \mathcal{C}$, es creciente, positiva y $k(0) = 0$ pues $\bar{y}(0) = 0$.

<u>$z(t) \geq 0 \quad \forall\, t$</u>. En efecto, como $y^-(s) = -\min(y(s),0) = \sup(-y(s),0) = \bar{y}(s)$ entonces

$$z(t) = y(t) + k(t) = y^+(t) - y^-(t) + k(t)$$

$$= y^+(t) - \bar{y}(t) + \sup_{[0,t]} \bar{y}(s) \geq 0 \; .$$

<u>$k(t)$ crece sobre el conjunto $\{s : z(s) = 0\}$</u> . En efecto, sea t_o un punto de crecimiento a la derecha para k ; es decir $k(t_o+\varepsilon) \geq k(t_o)$, luego $\bar{y}(t_o) = -y(t_o)$. Por la definición de k, para cualquier h existe $t_h \in [t_o, t_o+h]$ tal que $k(t_o) < \bar{y}(t_h) \leq k(t_o+h)$, entonces

$$k(t_o) = \bar{y}(t_o) = -y(t_o) \; ;$$

así que $z(t_o) = 0$.

Por consiguiente $\int_0^\infty z(t)\, dk(t) = 0$.

≢ ≢

III.5.1 APLICACION A LOS PROCESO ESTOCASTICOS

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espacio de probabilidad que satisface las condiciones habituales y $\{Y_t\}$ un proceso continuo con valores en $\mathbb{R}$. Se dice que la pareja de procesos (Z_t, K_t) resuelve el PR(Y) si, para todo $\omega \in \Omega$, $(Z_t(\omega), K_t(\omega))$ es una solución de PR(Y(ω)) como se definió anteriormente.

Para todo proceso Y continuo, tal que $Y_0 \geq 0$, existe una única solución del PR(Y), (Z,K) dado por

$$Z_t = Y_t + K_t \quad y \quad K_t = \sup_{[o,t]} \bar{Y}_s \quad \text{donde} \quad \bar{Y}_s = \sup(-Y_s, 0).$$

A partir de la definición resulta que Z y K son $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$ -medibles; y tambien, si el proceso Y es $\mathcal{F}_t$-adapatado así lo son Z y K .

TEOREMA. III.4

Sea Y una semimartingala continua, $Y = M + V$ donde M es una martingala local continua y V un proceso de variación finita. Sea (Z,K) una solución de PR(Y) y L el tiempo local de Z en el nivel cero, entonces

$$K_t = -\int_0^t I_{\{Z_s=0\}} \, dV_s + \frac{1}{2} L_t = \sup_{[0,t]} \bar{Y}_s$$

Demostración. Del Teorema I.9 se tiene que

$$L_t = 2\int_0^t I_{\{Z_s=0\}} \, dZ_s = 2\int_0^t I_{\{Z_s=0\}} (dV_s + dK_s) ,$$

pues Z es una semimartingala continua positiva.

entonces

$$K_t = - \int_o I_{\{Z_s=0\}} \, dV_s + \frac{1}{2} L_t \, .$$

≢ ≢

Si X es una semimartingala continua con tiempo local L en el nivel cero, entonces se sigue de la fórmula de Tanaka que

$$(X^+, \tfrac{1}{2} L) \, , \quad (X^-, \tfrac{1}{2} L) \quad y \quad (|X|, L)$$

son las respectivas soluciones de

$$PR\left(X_o^+ + \int_o^t I_{\{X_s>0\}} \, dX_s\right), \qquad PR\left(X_o^- - \int_o^t I_{\{X_s\leq 0\}} \, dX_s\right) \qquad y$$

$$PR\left(|X_o| + \int_o^t sgn(X_s) \, dX_s\right) \, .$$

En particular

$$L_t = 2 \sup_{[0,t]} \left\{ \sup\left[-X_o^+ - \int_o^t I_{\{X_s>0\}} \, dX_s \, , \, 0\right] \right\}$$

$$= 2 \sup_{[0,t]} \left\{ \sup\left[-X_o^- + \int_o^t I_{\{X_s\leq 0\}} \, dX_s \, , \, 0\right] \right\}$$

$$= 2 \sup_{[0,t]} \left\{ \sup\left[-|X_o| - \int_o^t sgn(X_s) \, dX_s \, , \, 0\right] \right\}$$

Para el caso del movimiento browniano se tiene lo siguiente.

TEOREMA III.5

Sea (Z,K) la solución de PR(B) donde B es un m.b. tal que $B_o \geq 0$. Entonces Z tiene la misma ley que $|B|$.

Demostración. $Z_t = B_t + K_t = B_t + \sup_{[0,t]} \bar{B}_s$ es m.b.

De las observaciones anteriores $(|B|,L)$ es solución de PR$\left[B_o + \int_o^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s\right]$. Como $[B,B]_t = \int_o^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s = t$

entonces $\hat{B}_t := B_o + \int_o^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$ es un m.b.; por lo tanto

$$Z_t = B_t + \sup_{[0,t]} \bar{B}_s$$

y

$$|B_t| = \hat{B}_t + \sup_{[0,t]} \bar{\hat{B}}_s$$

tienen la misma ley.

≢ ≢

Puesto que $B_t^* - B_t$ es submartingala positiva y es solucion del PR$(-B_t)$, pues $B_t^* - B_t = -B_t + B_t^*$; entonces $|B_t|$ y $B_t^* - B_t$ tienen la misma ley.

Denotemos con $\mathcal{F}^X$ la σ-álgebra mínima a la cual X está adaptada.

LEMA III.6

Sea B un m.b.. Entonces, el proceso $\hat{B}_t = \int_o^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$ es un m.b., nulo en cero, $\mathcal{F}^{\hat{B}} = \mathcal{F}^{|B|}$ y $L_t = \sup_{s \leq t} (-\hat{B}_s)$

Demostración. Puesto que $[\hat{B},\hat{B}]_t = \int_0^t dB_s = t$, entonces $\hat{B}$ es un m.b.. De la fórmula de Tanaka y la unicidad de $PR(\hat{B}_t)$ tenemos que

$$|B_t| = \hat{B}_t + L_t \ ,$$

lo cual nos asegura la contención $\mathcal{F}^{|B|} \subseteq \mathcal{F}^{\hat{B}}$. Ahora bien, por la caracterización del tiempo local como límite de un proceso que depende de $|B|$, (Corolario I.7), tenemos que $\mathcal{F}^{L} \subseteq \mathcal{F}^{|B|}$ y por consiguiente $\mathcal{F}^{\hat{B}} \subseteq \mathcal{F}^{|B|}$

$\not\equiv \not\equiv$

TEOREMA III.7 *(de Levy)*

Los proceso bidimensionales $(B_t^* - B_t,\ B_t^*)$ y $(|B_t|,\ L_t)$ tienen la misma ley.

Demostración. Por un lado, usando la fórmula de Tanaka, $|B_t| = \hat{B}_t + L_t$; por el otro, $B_t^* - B_t = -B_t + B_t^*$. Entonces el Teorema III.5 (del Problema de Reflexión) nos dice que B^* y $B^* - B$ se obtienen de $-B$ y a su vez L y $|B|$ se obtienen de $\hat{B}$. Como $-B$ y $\hat{B}$ tienen la misma ley, entonces $(B^* - B,\ B^*)$ y $(|B|,\ L)$ tienen la misma ley.

$\not\equiv \not\equiv$

Es claro que $\mathcal{F}^{B^*-B} \subseteq \mathcal{F}^{B}$. Puesto que $B_t \leq B_t^*$, y si $\{\omega : B_t^* \leq c\} \in \mathcal{F}_t^{B^*}$ entonces $\{\omega : B_t \leq c\} \in \mathcal{F}_t^{B}$, luego $\mathcal{F}^B \subseteq \mathcal{F}^{B^*}$; así que $\mathcal{F}^{B^*-B} = \mathcal{F}^B$.

Así que la filtración de $B^*_t - B_t$ es la misma que la de B_t . Por consiguiente la filtración de $(B^*_t - B_t, B^*_t)$ es tambien $\mathcal{F}^B$, mientras que la filtración de $(|B|, L)$ es $\mathcal{F}^{|B|}$ la cual es algo mas chica.

Sea B un m.b., nulo en cero, $B^*_t = \sup_{s\leq t} B_s$; entonces $\tilde{B}_t = B^*_t - B_t$ es una semimartingala continua y positiva cuya ley es la de $|B|$, es decir: $\tilde{B}$ es m.b. reflejante.

Como $L^a_t(\tilde{B}) = 0$ si $a < 0$, pues $L^a_t(\tilde{B})$ crece en $\{t : \tilde{B}_t = a\}$, entonces, por el Teorema I.9 ,

$$L_t(\tilde{B}) = 2\int_0^t I_{\{\tilde{B}_s=0\}}\, dB^*_s = 2\int_0^t I_{\{B^*_s=B_s\}}\, dB^*_s .$$

Puesto que B^* crece en $\{t : B^*_t = B_t\}$, entonces

$$L_t(\tilde{B}) = 2\int_0^t dB^*_s = 2B^*_s .$$

Vemos, en primer lugar, que L^a_t es discontinuo en $a = 0$; y , por otro lado, que $\frac{1}{2} L_t(\tilde{B})$ tiene la misma ley que B^* y este a su vez tiene la misma ley que $L_t(B)$. De la fórmula de Tanaka $2L_t(B) = L_t(|B|)$, entonces $L_t(|B|)$ tiene la misma ley que B^*. Obtenemos entonces que el proceso $(|B_t|, \frac{1}{2}L_t(|B|))$ tiene la misma ley que $(B^*_t - B_t, B^*_t)$.

IV. CONCLUSIONES.

En este trabajo se muestra la utilidad del tiempo local definido a partir de una extensión de la fórmula de Ito. Con esta definición , el cálculo estocástico se liga bien con la teoría de martingalas. Sin embargo, este tipo de cálculo se encuentra restringido al caso unidimensional, esto se debe a que hasta ahora no se ha podido dar una definición adecuada de lo que se llamaría el tiempo local en mayores dimensiones.

Mediante este tipo de cálculo se pueden encontrar explicitamente, y con relativa facilidad, leyes de algunos procesos. Aquí solo se hizo cálculo estocástico aplicado a procesos que están en función del movimiento browniano. Será interesante también desarrollar la teoría necesaria para procesos con saltos, donde se tiene el proceso de Poisson.

BIBLIOGRAFIA.

(1) *Astérisque*, Vols. 52-53, *Temps Locaux*, 1978 Societé Mathématique de France.

(2) Dacunha-Castelle, D.; Duflo,M. *Probabilités et Statistiques*, T. II Edit. Masson.(1985)

(3) Doob, J. L. *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Inc. (1953).

(4) Gihman, I.I.; Skorohod, A.V. *The theory of Stochastic Processes*. Springer-Verlag. (1974).

(5) Ikeda, N; Watanabe, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* . North Holland Publishing Company-Kodansha Ltd. (1981)

(6) Ito, K.; McKean, H.P. *Diffussion Processes and their Sample Paths*. Springer-Verlag. (1974).

(7) Chung, K.L. *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer-Verlag. (1982).

(8) Kopp, P.E. *Martingales and Stochastic Integrals* Cambridge University Press. (1984)

(9) Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations* Springer Verlag, (1985).

(10) Pérez Bercoff, H. *Tesis doctoral* Universite Louis Pasteur, Strasbourg (1982).

(11) Schuss, Z. *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations.* John Wiley & Sons. (1980).

(12) Yor, M.; Revuz, D. *Continuous Martingale Calculus* Springer Verlag (por aparecer).