

# La variedad de Chow de 1-ciclos de grado 3 en $\mathbb{P}^3$

Autor: Andrés Piedra

Asesor: Dr. Felipe Zaldívar

DOCTORADO EN MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-I  
21 de Febrero de 2018, México D.F.

Atte:

---

Vo. Bo. Dr. Felipe de Jesús Zaldívar Cruz.

*Dedicado a  
mis padres:  
Virgilio Piedra e Irma Tavira.*



# Índice general

Introducción .....	v
Capítulo 1 La construcción de la variedad de Chow .....	1
1.1 Resultados generales sobre la variedad de Chow .....	4
1.2 Ejemplos conocidos de variedades de Chow .....	6
1.3 El esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$ .....	11
Capítulo 2 Una descripción parcial de la variedad de Chow de 1-ciclos de grado 3 en $\mathbb{P}^3$ .....	15
2.1 El esquema $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$ .....	17
2.2 El esquema $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ .....	18
2.3 La estratificación de la componente $H(3, 1)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$ .....	20
2.4 La estratificación de la componente $H(3, 0)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$ .....	22
2.5 La estratificación de la componente $H(3, -1)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ .....	23
2.6 La estratificación de la componente $H(3, -2)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ .....	31
2.7 Las componentes de la variedad de Chow $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .....	39
Capítulo 3 Perspectivas .....	47
Bibliografía .....	55



## Introducción

Con el fin de resolver problemas en geometría algebraica enumerativa, uno trabaja con varias clases de espacios de parámetros o espacios de módulos. La idea básica es la siguiente: estamos interesados en el comportamiento de cierta colección  $X_\alpha$  de objetos geométricos de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ ; estos pueden ser por ejemplo subvariedades cerradas de una variedad fija, colecciones de  $n$  puntos distintos, ordenados sobre una variedad fija, u objetos más generales tales como curvas no singulares de género fijo, curvas no singulares de género y grado fijo, etc. Intentamos encontrar un espacio  $\mathcal{H}$  que parametrice a estos objetos: esto significa que un punto de  $\mathcal{H}$  corresponde a uno de estos objetos, una curva sobre  $\mathcal{H}$  corresponde a una variación no singular de una familia de dimensión 1 de objetos, etc. La correspondencia es supuesta *natural* o *funtorial* en el siguiente sentido: podemos considerar un funtor  $F$  de variedades a conjuntos, diciendo que  $F(V)$  es el conjunto de familias de objetos indexados por la variedad  $V$ . Entonces se requiere que exista un isomorfismo natural del funtor  $F$  al funtor  $\text{Hom}(-, \mathcal{H})$ .

Un importante concepto en geometría algebraica es el de ciclos. La teoría clásica Chow se remonta a las primeras décadas del siglo XX. En la visión moderna con esquemas de Grothendieck la cuestión natural es ¿cuándo la variedad de Chow( $X$ ) puede ser extendida a un esquema de Chow?, por ejemplo si los ciclos de un esquema algebraico con ciertas condiciones tienen estructura de esquema. La construcción clásica también es problemática, ya que la construcción de la variedad de Chow depende del encaje de  $X$  en un espacio proyectivo. Además, no es claro cual funtor es el que el esquema de Chow podría representar.

En un trabajo conjunto con van der Waerden en 1936 [10], Chow asocia a cada subvariedad proyectiva de un grado dado en un espacio proyectivo fijo un polinomio homogéneo de tal forma que los coeficientes de este polinomio, son las *coordenadas de Chow* de la variedad en consideración, y al variar las variedades de un grado dado en el mismo espacio proyectivo, definen una variedad algebraica: la variedad de Chow. En el desarrollo posterior de la geometría algebraica, las coordenadas de Chow o la variedad de Chow fueron rebasadas por la construcción por Grothendieck de los esquemas de Hilbert de (sub)variedades (cerradas) con el mismo polinomio de Hilbert. La versatilidad y funtorialidad de esta construcción dió a los esquemas de Hilbert una ventaja importante sobre las variedades de Chow. Con el énfasis reciente en métodos efectivos, construcciones explícitas como la de la variedad de Chow han vuelto al interés de la geometría. Actualmente podría pensarse que ninguna de las dos construcciones substituye a la otra y de alguna manera se complementan. Aspectos funtoriales son mejor vistos con esquemas de Hilbert. Especializaciones son mejor tratadas con variedades de Chow.

El objetivo principal de este artículo es describir la variedad de Chow que parametriza 1-ciclos de grado 3 en el espacio proyectivo de dimensión 3,  $\mathbb{P}^3$ . Para lograr lo antes dicho, hemos dividido el presente trabajo en tres capítulos, los cuales a modo de resumen registran lo siguiente: en el Capítulo 1 presentamos como inicio, la construcción de la variedad

de Chow. Posteriormente los resultados generales acerca de esta variedad, los ejemplos conocidos de variedades de Chow que servirán de motivación para este artículo, así como algunos resultados básicos acerca de esquemas de Hilbert con polinomio de Hilbert  $p(m) = dm - g + 1$ , donde  $d$  y  $g$  son respectivamente, el grado y género de la curva que parametrizan éstos. En el Capítulo 2 exponemos prácticamente el artículo al cual esta dedicado ese trabajo, es decir, mediante la aplicación del morfismo birracional Hilbert-Chow, y usando estratificaciones de las componentes de Hilbert correspondientes a las componentes de la variedad de Chow que parametriza 1-ciclos de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$ , damos una descripción básicamente completa de la variedad de Chow en cuestión. Las estratificaciones de las correspondientes componentes Hilbert se logran mediante especializaciones o límites planos de familias de curvas que parametrizan estas componentes. Finalmente, en el tercer capítulo proponemos algunos resultados conjeturales que podrían ser logrados a partir de la motivación existente acerca de variedades de Chow, y de los resultados obtenidos en este artículo.

A lo largo de este trabajo, todas las variedades (o esquemas) estarán definidas sobre un campo algebraicamente cerrado  $\mathbb{K}$  de característica cero, y  $x_0, x_1, x_2, x_3$  serán las coordenadas proyectivas de  $\mathbb{P}^3$  cuando tengan que usarse.

# Capítulo 1

## La construcción de la variedad de Chow

Antes de dar inicio con la construcción de las coordenadas de Chow y de la variedad de Chow, es importante enfatizar que las coordenadas de Chow y la variedad de Chow son generalizaciones naturales de las coordenadas de Plücker para la variedad Grassmanniana  $\mathbb{G}(m, n)$ , pensándola a esta como la variedad dada por las subvariedades lineales de dimensión  $m$  del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ . Entonces, la variedad de Chow, la cual denotaremos por  $\mathcal{C}_{m,d}(\mathbb{P}^n)$  es la variedad dada por las subvariedades de dimensión  $m$  y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ , es decir, los puntos de  $\mathcal{C}_{m,d}(\mathbb{P}^n)$  corresponden a los ciclos de dimensión  $m$  y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^n$ . Las coordenadas de Chow de un ciclo irreducible  $Z$  de grado  $d$  y dimensión  $m$  se definen tomando la intersección de  $Z$  con subespacios lineales  $W \subset \mathbb{P}^n$  de codimensión  $m$ . Cuando  $W$  está en posición general, la intersección  $Z \cap W$  es un conjunto finito de  $d$  puntos. Entonces, las coordenadas de estos  $d$  puntos son funciones algebraicas de las coordenadas de Plücker correspondientes a  $W \in \mathbb{G}(n - m, n)$ ; se toma entonces una función simétrica de estas funciones algebraicas, un polinomio homogéneo conocido como la forma de Chow de  $Z$ . Así, las coordenadas de Chow de  $Z$  son los coeficientes de este polinomio o forma de Chow. Estas coordenadas definen un punto en el espacio proyectivo correspondiente a todas estas formas. La cerradura de este conjunto de puntos es la variedad de Chow. Una característica interesante de la variedad de Chow, es que aparte de su existencia no es fácil decir algo más al respecto, y de hecho parece en general un objeto intratable. Por ejemplo, incluso en casos más simples ( $m = 1$  y grado pequeño), las siguientes preguntas parecen ser bastante difíciles:

- ¿Cuál es la dimensión de una componente de la variedad de Chow?
- ¿Dado un punto en la variedad de Chow, cuál es el espacio tangente de la variedad de Chow en ese punto?

Las siguientes son definiciones básicas acerca de la construcción de la variedad de Chow.

**Definición 1.1.** Sea  $V$  una variedad de dimensión  $n$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Una subvariedad irreducible  $W \subseteq V$  de dimensión  $m$  ( $m \leq n$ ) se llama *un ciclo primo o irreducible* de  $V$ . Sea  $Z_*(V)$  el módulo libre abeliano generado por todos los ciclos irreducibles de  $V$ . Entonces,  $Z_*(V) = \bigoplus_{r \geq 0} Z_r(V)$ , donde  $Z_r(V)$  denota el grupo libre abeliano generado por los ciclos irreducibles de  $V$  de dimensión  $r$  (los elementos de este grupo se llaman *ciclos homogéneos, ciclos puros de dimensión  $r$ , o  $r$ -ciclos*). Así pues, los elementos de  $Z_*(V)$  son sumas formales  $v = \sum_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha}$  donde solamente un número finito de multiplicidades  $m_{\alpha}$  son distintos de cero y  $V_{\alpha}$  es una subvariedad irreducible de  $V$ . Las *componentes* de un ciclo  $v$  son las  $V_{\alpha}$  con coeficientes distintos de cero. El *soporte* del ciclo  $v = \sum_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha}$  es la unión de las componentes  $V_{\alpha}$ , y esta unión resulta ser una variedad (no necesariamente irreducible). Si  $X$  es una variedad tal que las componentes de  $v$  están contenidas en  $X$ , decimos que  $v$  está soportada en  $X$ .



**Definición 1.2.** Un ciclo es llamado positivo (o efectivo) si todos sus coeficientes son positivos. Si  $v$  y  $v'$  son ciclos de  $V$  y  $v - v'$  es positivo, escribimos esto diciendo que  $v > v'$ . La parte positiva y negativa de  $v$  son  $v_+ = \sum_{m_\alpha > 0} m_\alpha V_\alpha$  y  $v_- = \sum_{m_\alpha < 0} (-m_\alpha) V_\alpha$ , respectivamente. Esto nos da una composición canónica de  $v$  como ciclos positivos  $v = v_+ - v_-$ .

Dado un encaje proyectivo  $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , cualquier ciclo de dimensión  $r$ , viene acompañado de un grado, éste se define en la siguiente:

**Definición 1.3.** El grado de un ciclo  $v = \sum_\alpha m_\alpha V_\alpha$  soportado por una variedad proyectiva  $V$  es la suma  $\sum_\alpha m_\alpha d_\alpha$ , donde  $d_\alpha$  es el grado de  $V_\alpha$  en  $V$ .

A continuación veremos que a cada ciclo  $v = \sum_\alpha m_\alpha V_\alpha$  es posible asociarle una hipersuperficie irreducible.

Si  $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$  es una subvariedad irreducible de dimensión  $k-1$  y grado  $d$ . Sea  $\mathcal{Z}(X)$  el conjunto de todos los subespacios proyectivos  $L$  en  $\mathbb{P}^{n-1}$  de dimensión  $n-k-1$  que interseccionan a  $X$ . Ésta es una subvariedad en la Grassmaniana  $G(n-k, n)$  que parametriza todos los subespacios proyectivos de dimensión  $n-k-1$  en  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.** La subvariedad  $\mathcal{Z}(X)$  es una hipersuperficie irreducible de grado  $d$  en la Grassmaniana  $G(n-k, n)$ .

*Demostración.* La variedad  $\mathcal{Z}(X)$  está incluida en el diagrama

$$\mathcal{Z}(X) \xleftarrow{q} B(X) \xrightarrow{p} X,$$

donde  $B(X) = \{(x, L) : x \in L\} \subseteq X \times G(n-k, n) \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \times G(n-k, n)$  es la correspondencia de incidencia. Las proyecciones  $q$  y  $p$  son dadas naturalmente por:  $q(x, L) \mapsto L$  y  $p(x, L) \mapsto x$ , respectivamente. En general el subespacio proyectivo de dimensión  $n-k-1$  que intersecciona a  $X$ , lo hace solamente en un punto. Por lo tanto,  $q$  es un isomorfismo birracional. La proyección  $p$  es una fibrición Grassmaniana, es decir, la fibra de  $p$  para cada punto  $x \in X$  es isomorfa a la Grassmaniana  $G(n-k-1, n-1)$ . Así, si  $X$  es irreducible, entonces lo es  $B(X)$  y por tanto  $\mathcal{Z}(X)$ . Además tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Z}(X) &= \dim B(X) = (n-k-1)k + (k-1) = k(n-k) - 1 \\ &= \dim G(n-k, n) - 1. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $\mathcal{Z}(X)$  es una hipersuperficie en  $G(n-k, n)$ . Para encontrar el grado de  $\mathcal{Z}(X)$  escojamos una bandera genérica  $N \subset M \subset \mathbb{P}^{n-1}$  de subespacios proyectivos tal que  $\dim N = n-k-2$ , y  $\dim M = n-k$ , y contamos el número de subespacios  $L \in \mathcal{Z}(X)$  de dimensión  $n-k-1$  que satisfacen la relación  $N \subset L \subset M$ . Puesto que el grado de  $X$  es  $d$ , entonces la intersección  $M \cap X$  contendrá típicamente  $d$  puntos, digamos  $x_1, \dots, x_d$ . El subespacio  $L \in \mathcal{Z}(X)$  que contiene a  $N$  y está contenido en  $M$  será generado proyectivo por  $N$  y  $x_i$ . Así, el número es igual a  $d$ , como se quería.  $\square$

Se llamará a  $\mathcal{Z}(X)$  la hipersuperficie asociada de  $X$ . Si  $\mathcal{B} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{B}_m$  es el anillo de coordenadas bajo el encaje de Plücker, de la Grassmaniana  $G(n-k, n)$ , entonces  $\mathcal{Z}(X)$  [18, Proposición 2.1, (b)] es definido por los ceros de algún elemento  $R_X \in \mathcal{B}_d$  el cual es único salvo un factor constante. El polinomio  $R_X$  puede ser representado como una función polinomial  $R_X(f_1, \dots, f_s)$  en los coeficientes de  $s$  formas lineales indeterminadas  $f_1, f_2, \dots, f_s$  sobre  $\mathbb{C}^n$  (o más precisamente, en los coeficientes  $c_{ij}$  de  $f_i = \sum c_{ij} x_j$ ) las cuales se anulan siempre que el subespacio proyectivo  $\{f_1 = \dots = f_s = 0\}$  de  $\mathbb{P}^{n-1}$  intersecciona a  $X$ . Además, el polinomio  $R_X(f_1, \dots, f_s)$  se puede escribir [18, Ejemplo 4.4]

como un producto alternante de determinantes de alguna matriz cuyas entradas dependen linealmente de los coeficientes de los  $f_i$ . La propiedad homogénea de  $R_X(f_1, \dots, f_s)$  es: si  $g = (g_{ij})$  es una matriz en  $\text{GL}(k)$ , se tiene que

$$R_X(g_{11}f_1 + \dots + g_{1k}f_k, \dots, g_{k1}f_1 + \dots + g_{kk}f_k) = \det(g)^d R_X(f_1, \dots, f_k)$$

donde  $d$  es el grado de  $X$ . El espacio de polinomios con esta propiedad lo denotamos por  $\mathcal{B}_d$ .

**Definición 1.5.** El elemento  $R_X \in \mathcal{B}_d$  mencionado arriba es llamado la *forma Chow* de la variedad  $X$ .

Si escogemos una base para  $\mathcal{B}_d$ , podemos asociarle a  $X$  la colección de coordenadas del vector  $R_X$  respecto a esta base. Estas coordenadas serán llamadas las *coordenadas Chow de  $X$* . En [18, Subsección C, pág. 102] se puede ver que la variedad  $X$  se puede recuperar a partir de sus coordenadas Chow, es decir, a partir del vector  $R_X$ .

En general, si  $X = \sum_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha}$  es un ciclo algebraico efectivo de dimensión  $k - 1$  y grado  $d$  en  $\mathbb{P}^{n-1}$ , definimos la forma Chow de  $X$  como

$$R_X = \prod R_{V_{\alpha}}^{m_{\alpha}} \in \mathcal{B}_d,$$

donde  $R_{V_{\alpha}}$  es la forma Chow de  $V_{\alpha}$ . Las coordenadas del vector  $R_X$  son llamadas las coordenadas de Chow de  $X$ .

Enseguida presentamos algunos ejemplos de hipersuperficies asociadas y formas Chow.

**Ejemplo 1.6.** Sea  $X \subset \mathbb{P}^3$  el eje  $x$ , y consideremos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Si expresamos a  $X$  en términos de ecuaciones paramétricas, resulta que  $X = [s : 0 : 0 : t]$ . Por definición  $\mathcal{Z}(X)$  es el conjunto de todos los subespacios de dimensión 2 en  $\mathbb{C}^4$  que intersectan al eje  $x$ . Sea  $V \in \mathcal{Z}(X) \subset G(2, 4)$ . Entonces podemos escribir a  $V$  de la siguiente forma  $V = (a_1s + a_2t, b_1s + b_2t, c_1s + c_2t, t)$ . Luego, tenemos dos casos: (1) si  $V \cap X = \{\infty\}$ , entonces se tiene que  $t = 0$  y como consecuencia  $V = (a_1s, b_1s, c_1s, 0)$ . Además, tenemos que  $(a_1s, b_1s, c_1s, 0) = (s, 0, 0, 0)$ . Así,  $b_1 = c_1 = 0$  y también  $a_1 = 1$ . Por lo tanto,  $V = (s, b_2t, c_2t, t)$ ; (2) si  $V \cap X \neq \{\infty\}$ , haciendo  $s = 0$  resulta que cuando se intersecta  $V$  con  $X$ , se obtiene que  $(a_2t, b_2t, c_2t, t) = (0, 0, 0, t)$ . Por lo tanto,  $b_2 = c_2 = 0$ . Así,  $V = (a_1s + a_2t, b_1s, c_1s, t)$ .

Por lo tanto, tenemos dos tipos de planos que intersectan a  $X$ , a saber,

$$V_1 = (1, 0, 0, 0)s + (0, b_2, c_2, 1)t, \text{ y } V_2 = (a_1, b_1, c_1, 0)s + (a_2, 0, 0, 1)t.$$

Luego,  $V_1 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, b_2, c_2, 1) \rangle$  y  $V_2 = \langle (a_1, b_1, c_1, 0), (a_2, 0, 0, 1) \rangle$ . Usando las coordenadas de Plücker podemos encajar a  $V_1$  y a  $V_2$  en  $\mathbb{P}^5$ . Entonces, tenemos que

$$V_1 \mapsto b_2p_{12} + c_2p_{13} + p_{14}, \text{ y } V_2 \mapsto -a_2b_1p_{12} - a_2c_1p_{13} + a_1p_{14} + b_1p_{24} + c_1p_{34},$$

donde los  $p_{ij}$  son las coordenadas de Plücker. Ahora deseamos encontrar el ideal que define a  $\mathcal{Z}(X)$ . El plano  $V_1$  se anula sobre el ideal  $I_1 = (x_3, x_4, x_5, b_2x_0 - c_2x_1 - x_2)$ . Sin embargo, como esto debe ser cierto para todo  $b_2, c_2$ , se sigue que  $I_1 = (x_3, x_4, x_5)$ . Similarmente tenemos que  $V_2$  se anula sobre el ideal  $I_2 = (x_3)$ . Por lo tanto, el polinomio definido por  $\mathcal{Z}(X)$  es  $x_3 \in \mathcal{B}_1$ . Así, la forma Chow para  $X$  es  $R_X = x_3$ .

**Ejemplo 1.7.** Sea  $C$  una curva irreducible de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$ . Su hipersuperficie asociada es la variedad de todas las rectas que intersectan a  $C$ . En  $(\mathbb{P}^3)^* \times (\mathbb{P}^3)^*$  consideramos el conjunto  $V(C)$  de todos los pares de planos  $(H, H')$  tales que  $H \cap H' \cap C \neq \emptyset$ . El conjunto  $V(C)$  es una subvariedad de dimensión 5 en  $(\mathbb{P}^3)^* \times (\mathbb{P}^3)^*$ , y por lo tanto es definido por un polinomio bihomogéneo,  $R_C(u, v)$  en las variables  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  y

$v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ . Como  $R_C(u, v)$  es determinado (salvo por un múltiplo escalar) por la curva  $C$ , éste es la forma Chow de  $C$ . Por razones de simetría, el grado de  $R_C(u, v)$  en los dos conjuntos de variables es el mismo y no es difícil ver que coincide con el grado de la curva  $C$ . Por lo tanto, a la curva  $C$  le asociamos el punto Chow  $[R_C(u, v)] \in \mathbb{P}(V_{d,d})$ , donde  $\mathbb{P}(V_{d,d})$  es el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial  $V_{d,d} := H^0((\mathbb{P}^3)^* \times (\mathbb{P}^3)^*, \mathcal{O}(d, d))$  de polinomios bihomogéneos en  $u, v$  de bigrado  $(d, d)$ .

Más generalmente, si  $C$  es un ciclo algebraico efectivo de dimensión 1 en  $\mathbb{P}^3$ , es decir, si  $C$  es la suma de componentes irreducibles  $C_1, \dots, C_n$ , contando con multiplicidades  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , entonces la forma Chow de  $C$  es, por definición,  $R_C = \prod f_{C_i}^{m_i}$ , y el punto de Chow es definido por  $[R_C]$ .

**Ejemplo 1.8.** Sea  $X$  una hipersuperficie en  $\mathbb{P}^{n-1}$ . La Grasmaniana  $G(n-k, n)$  coincide con  $\mathbb{P}^{n-1}$  y la hipersuperficie asociada  $\mathcal{Z}(X)$  coincide con  $X$ .

En general, no es fácil calcular la forma Chow de variedades. En [26, Capítulo 4] se expone un método para calcular formas Chow.

El siguiente resultado es un teorema debido a Chow y van der Waerden.

**Teorema 1.9.** *La aplicación  $X \mapsto R_X$  define un encaje de  $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{B}_d)$  como una variedad algebraica cerrada.*

*Demostración.* Ver [18, C, págs. 126-131].

La variedad  $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$  con la estructura algebraica definida por el encaje del Teorema 1.9 es llamada *la variedad de Chow* y su encaje en  $\mathbb{P}(\mathcal{B}_d)$  es llamado en encaje de Chow.

Una observación que podemos hacer es que, una parametrización de tipo Chow es bastante insensible, y esto queda manifestado en el hecho de que un punto sobre una variedad de Chow correspondiente a una curva  $C$ , en general aparte de la multiplicidad no se ve afectada por ninguna componente de dimensión cero de  $C$ , puntos incrustados, o estructuras de esquemas no reducidos. Esta observación pudiese ser ya, una ventaja o desventaja en contraste con el esquema de Hilbert.

En este trabajo, estaremos interesados particularmente en estudiar 1-ciclos de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$ , es decir, curvas de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$ . En la siguiente sección se presentan algunos resultados generales de varianza topológica de la variedad de Chow, tomando en consideración la característica del campo  $\mathbb{K}$ .

## 1.1. Resultados generales sobre la variedad de Chow

En [1], Angéniol muestra que los ciclos de codimensión  $p$  de un esquema  $X$  son parametrizados por un espacio algebraico  $\mathcal{C}^p(X)$ . Esto es bajo la condición de que  $X$  sea un esquema separado de dimensión pura  $n$  sobre un esquema base afín con campos residuales de característica cero, y que  $X$  sea un subesquema cerrado de un esquema no singular. Cuando  $X$  es una variedad sobre  $\mathbb{C}$ , Angéniol también prueba que  $\mathcal{C}^p(X)$  es un esquema y que el esquema reducido asociado es isomorfo a la variedad de Chow dada por la construcción clásica.

Como la construcción de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{r,d}(X)$  depende del encaje de  $X$  en algún espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ , es común denotar a ésta como  $\mathcal{C}_{r,d}(X, \iota)$ , donde  $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  es el encaje dado.

En [31], Nagata muestra que cuando  $X$  es una variedad normal, existe un encaje  $\iota$  tal que  $\mathcal{C}_{0,d}(X, \iota)$  es normal. Cuando el campo  $\mathbb{K}$  es de característica cero cualquier encaje

es suficiente, pero cuando  $\mathbb{K}$  es de característica positiva, no es cierto que  $\mathcal{C}_{0,d}(X, \iota)$  es siempre normal. Así, en característica positiva, la variedad de Chow depende del encaje  $\iota$ , incluso para 0-ciclos. Por ejemplo, en [31] se prueba que la variedad de Chow de ciclos de dimensión cero y grado dos en  $\mathbb{P}^3$  sobre  $\mathbb{Z}_2$  no es normal, pero hay un encaje en algún  $\mathbb{P}^N$  tal que la variedad de Chow es normal. Entonces estas dos variedades no pueden ser isomorfas como conjuntos algebraicos. Este análisis muestra que (en general) la construcción de las variedades de Chow en la categoría de conjuntos algebraicos y morfismos algebraicos no es posible. Por lo tanto, esto hace que la definición de variedad de Chow de ciclos de una variedad  $X$  dependa del encaje  $\iota$ . Una breve discusión sobre este punto y una reproducción de los ejemplos de Nagata pueden ser encontrados en [27, Capítulo I, Ejemplo 4.2].

Dados dos encajes  $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  y  $\iota' : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n'}$  de una variedad  $X$ , existe una biyección canónica  $\varphi : \mathcal{C}_{r,d}(X, \iota) \rightarrow \mathcal{C}_{r,d}(X, \iota')$ . La aplicación  $\varphi$  manda una forma de Chow  $F_v \in \mathcal{C}_{r,d}(X, \iota)$ , correspondiente al ciclo  $v = \sum_{i=1}^n n_i \iota(V_i)$ , a la forma de Chow  $\varphi(F_v) = F_{v'}$  correspondiente al ciclo  $v' = \sum_{i=1}^{n'} n_i \iota'(V_i)$ . En [25] se demuestra que  $\varphi$  es un *homeomorfismo* de espacios topológicos. Así,  $\mathcal{C}_{r,d}(X, \iota)$  es independiente del encaje salvo homeomorfismo.

En [25], Hoyt ha generalizado el resultado de Nagata. Él demuestra que existe un encaje  $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  tal que para cualquier encaje  $\iota' : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n'}$ , el homeomorfismo canónico  $\varphi : \mathcal{C}_{r,d}(X, \iota) \rightarrow \mathcal{C}_{r,d}(X, \iota')$  es un morfismo finito de variedades. Luego, es posible ver que  $\mathcal{C}_{r,d}(X, \iota)$  es independiente de la elección del encaje  $\iota$  con esta propiedad y es entonces una variedad de Chow universal de  $X$ . Todos estos resultados se cumplen para campos algebraicamente cerrados, pero es posible generalizar a cualquier campo.

Cuando  $X$  es una variedad sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión pura  $n$ , Barlet [2] ha mostrado que la variedad de Chow es independiente del encaje salvo isomorfismo de variedades. De hecho, Barlet construyó un espacio analítico, denotado por  $B_p(X)$ , el cual parametriza ciclos de codimensión  $p$ , y prueba que éste es isomorfo a la variedad de Chow  $\mathcal{C}_d^p(X, \iota)$  [2, Capítulo IV, Teorema 7].

Como la variedad de Chow no disfruta de manera general de una buena descripción funtorial, las descripciones de las correspondientes familias de ciclos y la estructura infinitesimal no son bien comprendidas. Una familia de ciclos, parametrizada por una variedad  $T$ , es una colección de ciclos  $\{\mathcal{Z}_t\}_{t \in T}$  sobre  $X$ , continua. Una interpretación natural de continuidad es que, se requiere que  $\{\mathcal{Z}_t\}$  sea inducida por un morfismo  $T \rightarrow \mathcal{C}_{r,d}(X \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$ . Tal familia es representada por un ciclo  $\mathcal{Z}$  sobre  $X \times T$ . Sin embargo, resultan serios problemas con este enfoque: (1) como  $X$  depende del encaje en un espacio proyectivo (en característica positiva), entonces no se tiene una buena noción de continuidad. (2) el ciclo  $\mathcal{Z}$  que representa a la familia  $\{\mathcal{Z}_t\}$  no es plano. (3) es deseable tener una noción de familias de ciclos sobre esquemas no reducidos. En particular, es importante tener una teoría infinitesimal para poder estudiar deformaciones de ciclos. La construcción clásica de la variedad de Chow viene sin una estructura infinitesimal, esto es, es una variedad y no un esquema. Por lo tanto, no es del todo claro lo que significa la frase: *una familia parametrizada por un esquema*.

El tercer problema es de suma importancia. Una posible solución, estrechamente relacionada a la construcción de la variedad de Chow, es representar familias de ciclos como ciertas familias de divisores sobre una Grassmaniana que parametriza subespacios lineales de dimensión complementaria. El método introducido por Barlet [2] es de una naturaleza dual. En lugar de intersectar con subespacios, él estudia *proyecciones* sobre espacios afines

de la misma dimensión del ciclo. Una familia es entonces un objeto, en su caso un ciclo  $\mathcal{Z}$  sobre  $X \times T$ , el cual induce una familia de 0-ciclos sobre cualquier proyección.

Cuando el esquema parámetro  $T$  es no reducido, en general no hay un objeto, tan simple como un ciclo sobre  $X \times T$  que induce una familia de 0-ciclos sobre cada proyección. El método dado en [35] no requiere la existencia de tal objeto. En su lugar, una familia  $\mathcal{S}$  se define como una colección de 0-ciclos, indexada por todas las proyecciones que satisfacen condiciones de compatibilidad. Bajo condiciones apropiadas sobre  $T$  y la familia  $\mathcal{S}$ , se pueden encontrar objetos geométricos simples, que inducen a esta familia. Por ejemplo, si  $T$  es reducido, entonces  $\mathcal{S}$  es representada por un ciclo  $\mathcal{Z}$  sobre  $X \times T$  (como antes). Si los ciclos de la familia  $\mathcal{S}$  no tienen multiplicidad o son divisores, entonces existe un subesquema  $Z$  sobre  $X \times T$  que induce a  $\mathcal{S}$ . Si  $T$  es de característica cero, entonces  $\mathcal{S}$  es representada por su clase fundamental relativa. Angéniol [1], trabajando exclusivamente en característica cero, inicia del lado opuesto y define una familia como una clase, la clase relativa fundamental e impone condiciones sobre esta clase para asegurar que induce un 0-ciclo sobre cada proyección. En el enfoque de Angéniol, la aplicación de la dualidad y la teoría de residuos, requiere una teoría más profunda. Por otro lado, él es capaz de dar una teoría de deformación para familias de ciclos y mostrar la representabilidad. En [35], David Rydh crea un método técnico que tiene la ventaja de dar una definición con mayor generalidad, sin asumir la proyectividad, la no singularidad, la característica cero, etc. También define un funtor contravariante  $\text{Chow}_{r,d}(X)$  de esquemas a conjuntos tal que su restricción a esquemas reducidos es representado por la variedad  $\mathcal{C}_{r,d}(X \hookrightarrow \mathbb{P}^n)$ , para un encaje proyectivo suficientemente amplio.

Una exposición sobre la variedad de Chow en característica positiva se puede ver en [27, Capítulo 1, Sección 1.4].

## 1.2. Ejemplos conocidos de variedades de Chow

En la literatura se sabe en particular que, la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^3)$  de 1-ciclos de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$  tiene una componente irreducible, digamos  $\mathcal{R}_d$ , de dimensión  $4d$ , cuyo miembro genérico es una curva racional no singular. Además, el punto Chow de cualquier espacio curva irreducible con grado  $d$  y género geométrico cero pertenece a  $\mathcal{R}_d$ . Excepto para el caso cuando  $d = 1$  ó  $2$ , muy poco se sabe sobre esta variedad. En [6], Coray hace un estudio enumerativo de la variedad  $\mathcal{R}_d$ . Schubert [36] y Todd [37] estudiaron el caso  $d = 3$  de cúbicas alabeadas sujeta a varias restricciones. En [6] se prueba que las curvas que pasan a través de un punto dado en  $\mathbb{P}^3$  describen una subvariedad de codimensión 2 en  $\mathcal{R}_d$  y que las curvas que cortan a una recta dada  $l \subset \mathbb{P}^3$  son representadas en  $\mathcal{R}_d$  por una subvariedad de codimensión 1. Respecto a la cuestión enumerativa, si  $P^{\alpha|\beta}$  denota el número de curvas racionales de grado  $d$  que pasan a través de  $\alpha$  puntos dados y cortan a  $\beta$  rectas dadas en  $\mathbb{P}^3$ , en [6] Coray prueba que los números  $P^{\alpha|\beta}$  son finitos (pero posiblemente igual a cero) si  $2\alpha + \beta = 4d$ .

Entonces, de acuerdo a lo anterior, veremos que los primeros ejemplos interesantes de variedades de Chow son dados por curvas de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$ . Este caso se remonta desde 1848 por Cayley [4].

**Ejemplo 1.10.** La variedad de Chow  $\mathcal{C}_{r-1,1}(\mathbb{P}^{n-1})$  es la Grassmaniana  $\mathbb{G}(r-1, n-1)$ , y su encaje Chow coincide con el encaje de Plücker. Luego, Si  $d = 1$ ,  $n = 4$ , y  $r = 2$ , entonces la variedad de Chow parametriza rectas en  $\mathbb{P}^3$ , y es isomorfa a la Grassmaniana de rectas en  $\mathbb{P}^3$ ,  $\mathbb{G}(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$  (una hipersuperficie cuádrlica) mediante el encaje de Plücker [38].

**Ejemplo 1.11.** La variedad de Chow  $\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1})$  parametriza ciclos de grado  $d$  y codimensión 1 en  $\mathbb{P}^{n-1}$ , es decir, parametriza hipersuperficies en  $\mathbb{P}^{n-1}$ . La forma Chow de una hipersuperficie irreducible es justamente su ecuación, es decir, un polinomio irreducible homogéneo de grado  $d$  en  $n$  variables. Los ciclos algebraicos de codimensión 1 corresponden a todos los polinomios (irreducibles o no) homogéneos distintos de cero, de grado  $d$ . Por lo tanto, la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1})$  es el espacio proyectivo de tales polinomios, es decir,

$$\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{P}^{N-1}, \quad \text{donde } N = \binom{n+d-1}{d}.$$

Las ideas dadas para el siguiente ejemplo son tomadas de [23, pág. 275] y para ello necesitamos la siguiente definición:

**Definición 1.12.** Una contracción  $\varphi : X \rightarrow Z$  es una aplicación propia de variedades normales irreducibles con fibras conexas. El *lugar excepcional*  $\text{Exc}(\varphi) := E$  de una contracción birracional  $\varphi$  es el subconjunto más pequeño de  $X$  tal que  $\varphi$  es un isomorfismo sobre  $X \setminus E$ . Si la codimensión de  $E$  es mayor o igual a dos, entonces  $\varphi$  se llama una *contracción pequeña*.

**Nota:** Si  $\varphi$  es una contracción pequeña, entonces la imagen  $\varphi(E)$  es singular en  $Z$ . En efecto, un argumento debido a D. Chen corre como sigue: si  $Z$  fuera suave (o normal) entonces uno puede definir teoría de intersección sobre  $Z$ . Si  $z$  en  $\varphi(E)$  es un punto general, entonces tomamos una curva  $C$  contenida en  $\varphi^{-1}(z)$ . Como  $\varphi$  es una contracción pequeña,  $\varphi$  preserva cualquier cosa en codimensión 1 ( $\varphi$  es un isomorfismo en codimensión 1, es decir, el lugar excepcional en  $\varphi$  es de codimensión 2 o mayor), en particular,  $\varphi^* \varphi_* D = D$  para una clase de divisor  $D$  sobre  $X$ . Entonces el producto intersección  $C \cdot D = C \cdot \varphi^* \varphi_* D = \varphi_* C \cdot \varphi_* D = 0$ , donde hemos utilizado la fórmula de proyección y que  $\varphi_* C = 0$  debido a que  $C$  es contraída. Pero esto resulta imposible, por ejemplo, si  $D$  es una clase de divisores amplios.

**Ejemplo 1.13.** La variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$  es una variedad conexas con dos componentes irreducibles de dimensión 8, en  $\mathbb{P}^{19}$ . Debido a que los ciclos deben ser de dimensión pura, una componente, digamos  $\mathcal{C}$  parametriza cónicas planas y la otra componente, digamos  $\mathcal{C}'$  parametriza un par de rectas oblicuas. Ahora bien, como tanto una cónica plana como un par de rectas oblicuas especializan a un par de rectas incidentes (Sección 2.1 y Sección 2.2), entonces un par de rectas incidentes, y por lo tanto una recta doble deben estar en la intersección de las componentes  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ .

Una manera de calcular la dimensión de la componente  $\mathcal{C}$  es la siguiente: sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de todas las cónicas en  $\mathbb{P}^2$ . Si las coordenadas están dadas por  $x, y, z$ , entonces una cónica  $C$  está determinada salvo un escalar por una ecuación cuadrática de la forma

$$a_0 x^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + a_3 xy + a_4 yz + a_5 zx = 0.$$

En otras palabras, una curva de grado dos queda completamente determinada por los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , y  $a_5$ . Tal ecuación determina un punto proyectivo  $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5] \in \mathbb{P}^5$ , y recíprocamente, cualquier punto de  $\mathbb{P}^5$  determina un único polinomio cuadrático (salvo escalares). Así, el espacio de parámetros de todas las cónicas en  $\mathbb{P}^2$  es  $\mathcal{P} = \mathbb{P}^5$ . Los puntos correspondientes a cónicas *degeneradas* (par de rectas) forman una hipersuperficie en  $\mathbb{P}^5$ , y los puntos correspondientes a *rectas dobles* forman una subvariedad de dimensión 2, en esta hipersuperficie. Así pues, la dimensión de componente  $\mathcal{C}$  es 8.

Por otro lado, dado que una recta en  $\mathbb{P}^3$  depende de 4 parámetros, entonces la dimensión de la componente  $\mathcal{C}'$  es también 8. La variedad  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$  tiene una descripción relativamente fácil en esta componente, es decir, la componente  $\mathcal{C}'$  que parametriza un par de rectas disjuntas es isomorfa al producto simétrico  $\text{Sym}^2\mathbb{G}(1, 3)$  [23, pág. 275]. Aplicando en Teorema 3.2, se sigue que la variedad proyectiva  $\text{Sym}^2(\mathbb{G}(1, 3))$  es singular a lo largo de la diagonal. En la Figura 1 se presenta la idea (geométrica) intuitiva de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$ .

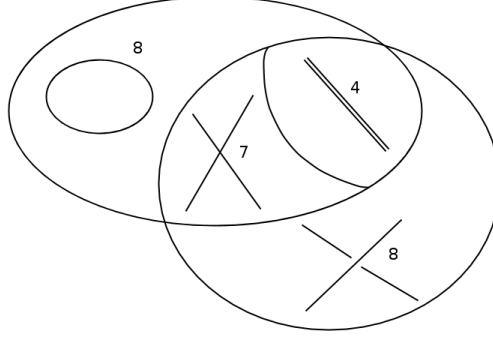


Figura 1. La variedad  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3) = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ .

Para una recta  $L$  en  $\mathbb{P}^3$  uno puede montar una infinidad de estructuras de rectas dobles (en el sentido de esquemas de Hilbert) sobre dicha recta [32, Proposición 1.4]. Esto último se logra dando una dirección normal a cada punto de la recta  $L$ . Por ejemplo, una recta doble de género  $-1$  con soporte  $x_0 = x_1 = 0$ , tiene ideal

$$(x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0(ax_2 + bx_3) + x_1(cx_2 + dx_3)).$$

Si variamos los parámetros  $a, b, c, d$  se obtienen diferentes estructuras de esquemas soportadas en  $L$ . La variedad de Chow, para cualquier caso, registra solamente el punto  $2L$ . Por lo tanto, desde el punto de vista de Chow la dimensión del espacio de rectas dobles en  $\mathbb{P}^3$  es 4, ya que la variedad de Chow sólo reconoce a la recta reducida. Una generalización de la clasificación de rectas dobles presentada en [32, Proposición 1.4], aparece en [8, Lema 2.1].

Usando el morfismo Hilbert-Chow (éste se definirá en el Capítulo 3) y la idea dada en [33], se puede ver que los abiertos densos de las componentes  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son no singulares. En efecto, dado que una cónica plana no singular  $C$  es la intersección de un plano y una superficie no singular de grado 2, su gavilla normal es de la forma

$$\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_C(2) \oplus \mathcal{O}_C(1).$$

Por lo tanto, del teorema de Riemman Roch se sigue que

$$h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) = h^0(C, \mathcal{O}_C(2) \oplus \mathcal{O}_C(1)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(2)) + h^0(C, \mathcal{O}_C(1)) = 5 + 3 = 8.$$

Esto prueba que el abierto de cónicas no singulares de la componente  $\mathcal{C}$ , es no singular. Ahora, si  $W = L_1 \cup L_2$ , donde  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas disjuntas en  $\mathbb{P}^3$ , entonces la gavilla normal de  $W$  es

$$\mathcal{N}_{W/\mathbb{P}^3} = \mathcal{N}_{L_1 \cup L_2/\mathbb{P}^3} = [\mathcal{O}_{L_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_1}(1)] \oplus [\mathcal{O}_{L_2}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_2}(1)].$$

Así, el teorema de Riemman Roch implica que

$$\begin{aligned} h^0(W, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) &= h^0(W, [\mathcal{O}_{L_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_1}(1)] \oplus [\mathcal{O}_{L_2}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_2}(1)]) \\ &= h^0(L_1, [\mathcal{O}_{L_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_1}(1)]) + h^0(L_2, [\mathcal{O}_{L_2}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_2}(1)]) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8, \end{aligned}$$

y por tanto, el abierto denso en  $\mathcal{C}'$  es no singular.

La variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$  es singular a lo largo del espacio de rectas de multiplicidad dos. Para tal hecho vamos a considerar la correspondencia de incidencia

$$\Gamma = \{(C, H) : C \subset H\} \subset \mathcal{C} \times (\mathbb{P}^3)^*,$$

junto con las las proyecciones  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}$  y  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow (\mathbb{P}^3)^*$ , donde  $(\mathbb{P}^3)^*$  es el espacio dual de  $\mathbb{P}^3$ , es decir, el espacio de hiperplanos en  $\mathbb{P}^3$ . En la segunda proyección, la fibra  $\pi_2^{-1}(H)$  sobre cada  $H \in (\mathbb{P}^3)^*$  es isomorfa al espacio  $\mathbb{P}^5$  de cónicas en el plano  $H$ . De hecho con la topología de Zariski, es posible demostrar que el morfismo  $\pi_2$  es  $\mathbb{P}^5$ -fibrado sobre  $(\mathbb{P}^3)^*$ , [28, Teorema 3,4,1]. En particular,  $\Gamma$  es no singular (y por tanto normal) y de dimensión 8 ( $\dim \Gamma = \dim \pi_2^{-1}(H) + \dim \mathbb{P}^{3*} = 5 + 3 = 8$ ). El morfismo  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}$  es birracional, pues una cónica plana general  $C \in \mathcal{C}$  está sobre un único plano  $H$ , pero este morfismo colapsa el lugar donde  $C = 2L$  es una recta de multiplicidad 2; específicamente, para cada  $L \in \mathbb{G}(1, 3)$  la subvariedad  $\{(2L, H) : L \subset H\}$  es aplicada a un sólo punto de la componente  $\mathcal{C}$ , a saber, al punto  $2L$ . Sean  $E = \{(2L, H) : L \subset H, H \text{ es cualquier plano en } \mathbb{P}^3\} \subset \Gamma$  y  $D = \{2L : L \text{ es cualquier recta en } \mathbb{P}^3\} \subset \mathcal{C}$ . La dimensión de  $D$  es 4. Nótese que  $E$  tiene codimensión 3 en  $\Gamma$ . El morfismo  $\pi_1$  contrae  $E$  a  $D$ , y la fibra sobre  $2L$  es  $\mathbb{P}^1$  (cada fibra parametriza planos  $H$  que contienen a  $L$ ). Entonces  $\pi_1$  es una contracción pequeña [5, Caso III, pág. 14]. Por lo tanto, la variedad  $\mathcal{C}$  será singular a lo largo de la imagen del lugar excepcional de la contracción pequeña, ver la nota de la Definición 1.12.

Por otro lado, la identificación

$$\mathcal{C}' \cong \text{Sym}^2(\mathbb{G}(1, 3)) = \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)/S_2,$$

donde  $S_2$  es el grupo simétrico actuando sobre el producto por permutación de los factores, implica que la componente  $\mathcal{C}'$  es normal. En efecto, como  $\mathbb{G}(1, 3)$  es no singular (en particular normal) entonces  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  es no singular (en particular normal). Luego, el cociente de una variedad normal por un grupo finito resulta ser normal. Por lo tanto, el producto simétrico  $\text{Sym}^2(\mathbb{G}(1, 3))$  es normal, y por tanto lo es  $\mathcal{C}'$ .

Por último, la igualdad  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3) = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$  formalmente quiere decir que

$$\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3) = V(P_{\text{ChowConic}}) \cup V(P_{\text{ChowLines}}),$$

donde  $P_{\text{ChowConic}}$  es el ideal primo homogéneo en  $\mathbb{Q}[V]$ , donde  $V \cong \mathbb{C}^{21}/\mathbb{C}$  y cuya variedad comprende las formas Chow de curvas irreducibles de grado 2 en  $\mathbb{P}^3$ . El ideal  $P_{\text{ChowConic}}$  tiene codimensión 11 y grado 92, y es generado mínimamente por 21 cuádricas y 35 cúbicas. El ideal radical  $P_{\text{ChowConic}} \cap P_{\text{ChowLines}}$  tiene codimensión 11, grado  $232 = 92 + 140$ , y es mínimamente generado por 230 cúbicas [3].

**Ejemplo 1.14.** La variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  que parametriza 1-ciclos de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$ , es una variedad equidimensional que contiene cuatro componentes irreducibles de dimensión 12 [18, Ejemplo 1.4]. Los miembros genéricos correspondientes a cada componente son:

- (1) una cúbica plana no singular;
- (2) una cúbica alabeada;



- (3) una cónica plana no singular unión una recta disjunta;
- (4) tres rectas disjuntas.

Describir las cuatro componente de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  es la meta de esta tesis, por tal motivo hemos dedicado todo el Capítulo 3 al estudio de esta variedad.

Por la clasificación de Hartshorne de curvas en  $\mathbb{P}^3$  [22, IV.6], las posibilidades para un 1-ciclo de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$  son: una curva irreducible no singular, una recta unión disjunta una curva cuadrática plana, o tres rectas disjuntas. Sin embargo, puesto que una curva cúbica irreducible no singular en  $\mathbb{P}^3$  es una curva cúbica plana o una cúbica alabeada (una curva racional), entonces se sigue que la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  sólo contiene cuatro componentes irreducibles, cuyos puntos genérico son (1) – (4) antes mencionadas.

Hasta este punto uno podría conjeturar que para cada grado  $d$ , la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^3)$  que parametriza 1-ciclos de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$  es equidimensional, de dimensión  $4d$ . Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que esta conjetura no es cierta.

**Ejemplo 1.15.** Consideremos la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,4}(\mathbb{P}^3)$  de 1-ciclos de grado 4 en  $\mathbb{P}^3$ . Esta variedad tiene varias componentes irreducibles correspondientes a cada una de las posibilidades que puede ocurrir para un 1-ciclo de grado 4. Las posibilidades son:

- (1) una curva irreducible de grado 4;
- (2) una curva cúbica y una recta;
- (3) dos curvas cuádricas;
- (4) una curva cuádrica y dos rectas;
- (5) cuatro rectas disjuntas.

Es claro de los ejemplos previos que las componentes en los casos (2) – (5) tienen dimensión 16. En efecto, como la dimensión del espacio de curvas cúbicas es 12 y una recta depende de cuatro parámetros, se sigue que la componente correspondiente a (2) es de dimensión 16; dado que el espacio de cuádricas es de dimensión 8, se sigue que la componente correspondiente a (3) es de dimensión 16. De los casos (2) y (3) resulta claramente que las componentes correspondientes a (4) y (5) son también de dimensión 16. Así pues, resta analizar la subvariedad  $C \subset \mathcal{C}_{1,4}(\mathbb{P}^3)$  que parametriza curvas irreducibles de grado 4. Esta subvariedad es reducible debido a que las curvas irreducibles de grado 4 pueden ser de tres tipos diferentes [22, Capítulo IV, Sección 6]:

- (1.1) una curva cuártica plana;
- (1.2) una curva racional de grado 4;
- (1.3) una curva elíptica espacial de grado 4 (intersección de dos superficies cuádricas).

Sean  $\mathcal{C}_{1,1}$ ,  $\mathcal{C}_{1,2}$ , y  $\mathcal{C}_{1,3}$  las componentes correspondientes a las curvas (1,1), (1,2), y (1,3). No es difícil ver que la dimensión de las componentes  $\mathcal{C}_{1,2}$  y  $\mathcal{C}_{1,3}$  son de dimensión 16. La dimensión de la componente correspondiente a (1,1) es la siguiente suma: (el número de parámetros que definen a un plano)+(la dimensión del espacio de cuárticas en un plano dado), es decir,  $3 + 14 = 17$ . Así, la conjetura sobre la equidimensionalidad de la variedad  $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^3)$  es falsa.

En [11], Eisenbud y Harris prueban el siguiente:

**Teorema 1.16.** *La dimensión de la variedad de Chow ( $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^r)$ ) es dada por*

$$\dim(\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^r)) = \max(2d(r-1), 3(r-2) + d(d+3)/2),$$

*y el punto genérico de una componente de esta dimensión es la unión de  $d$  rectas o una curva plana.*

También prueban que en  $\mathbb{P}^3$ , la dimensión máxima de una componente de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^3)$  cuyo punto genérico es una curva irreducible no degenerada es archivada por la componente que parametriza curvas que están sobre una superficie cuádrica de bigrado balanceado (esto es, una intersección completa con la cuádrica o residual a las rectas individuales en intersecciones completas). Para  $d \geq 8$ , ésta es la única componente de esta dimensión.

La siguiente sección será dedicada a exponer algunos resultados básicos acerca del esquema de Hilbert.

### 1.3. El esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$

A principios del desarrollo de la teoría de esquemas en la geometría algebraica moderna, Grothendieck construyó el espacio de módulos fino para familias planas de esquemas, conocido como el esquema de Hilbert. Los polinomios de Hilbert son una parte esencial de la teoría moderna de clasificación para variedades algebraicas. En efecto, fijado un polinomio arbitrario  $p(m) \in \mathbb{Q}[m]$ , una de las preguntas naturales que uno puede hacerse es, ¿qué subvariedades de  $\mathbb{P}^n$  tienen polinomio de Hilbert  $p(m)$ ? Resulta que el conjunto de todas las subvariedades con polinomio de Hilbert  $p(m)$  forman, en una manera natural, un esquema, llamado el *esquema de Hilbert*. El esquema de Hilbert con polinomio de Hilbert dado es así un espacio de parámetros para subvariedades de  $\mathbb{P}^n$ , y la comprensión de su estructura nos ayuda a comprender la manera en la que subvariedades de  $\mathbb{P}^n$  se relacionan unas con otras. Abundan también otras cuestiones interesantes acerca de este esquema, como por ejemplo:

- ¿cuál es la dimensión de este esquema?
- ¿cuántas componentes tiene?
- ¿qué significa si hay una trayectoria de un punto a otro en el esquema de Hilbert?
- ¿qué interpretación geométrica se puede dar a las diferentes componentes del esquema de Hilbert?, etc.

La definición formal de este esquema la exponemos enseguida.

**Definición 1.17.** Sea  $S$  un esquema localmente noetheriano sobre  $\mathbb{K}$  y  $X$  un  $S$ -esquema localmente proyectivo. Definimos el *functor de puntos*  $h_{X/S}$  de  $X$  como el functor que relaciona a la categoría de esquemas con la categoría de conjuntos de la siguiente manera: dado un esquema  $T$ ,  $h_{X/S}(T)$  es el conjunto de  $S$ -morfismos  $t : T \rightarrow X$ , el cual denotamos por  $\mathcal{M}(T, X)$ .

**Definición 1.18.** Sean  $p(m) \in \mathbb{Q}[m]$  un polinomio y  $X$  un  $S$ -esquema. El *functor de Hilbert* asociado a  $p(m)$  y  $X$ , es un functor  $h_{X/S}^{p(m)}$  que asocia a cada esquema  $Z$  el conjunto de subesquemas cerrados  $Y \hookrightarrow Z \times_S X$ , los cuales son planos sobre  $Z$ , y cuyas fibras sobre puntos de  $Z$  tienen polinomio de Hilbert  $p(m)$ . El *esquema de Hilbert* es un  $S$ -esquema  $\text{Hilb}^{p(m)}(X/S)$  que representa al functor  $h_{X/S}^{p(m)}$ . Para ver la construcción y más detalles de este esquema, el lector puede consultar [27, pág. 8].

El grupo de automorfismos  $\text{PGL}(n+1)$  de  $\mathbb{P}^n$  actúa sobre el conjunto de subvariedades en  $\mathbb{P}^n$  con polinomio de Hilbert fijo, induciendo una acción natural sobre el esquema de Hilbert. Por lo tanto, el cociente del esquema de Hilbert por  $\text{PGL}(n+1)$  debería darnos un espacio de parámetros para variedades proyectivas salvo equivalencia proyectiva, al menos sobre el rango de todos los posibles polinomios de Hilbert. Desafortunadamente, en general no es una cuestión simple definir la estructura de variedad algebraica sobre este conjunto

cociente. Esto nos lleva al tema difícil y a la vez interesante de la *teoría de invariantes geométricos*, desarrollada por David Mumford en su búsqueda de espacios de módulos para variedades algebraicas [29].

Grothendieck [17] probó que  $\text{Hilb}^{p(m)}(\mathbb{P}^n)$  existe como un esquema proyectivo, y Hartshorne [21] mostró que este esquema es conexo. A pesar de los años que han transcurrido, poco se conoce acerca de la estructura de este esquema. Incluso el esquema de Hilbert que parametriza subesquemas de dimensión cero en  $\mathbb{P}^n$  no es del todo claro, excepto en algunos casos. De hecho, hasta la fecha no hay un método estándar para estudiar la geometría del esquema de Hilbert. El caso que nos interesa es cuando el polinomio de Hilbert de nuestras variedades es de la forma  $p(m) = dm - g + 1$ , donde  $d$  y  $g$  son el grado y género de la variedad dada, respectivamente. Esto es, estamos interesados en el esquema de Hilbert que parametriza curvas en  $\mathbb{P}^3$  con polinomio de Hilbert  $p(m) = dm - g + 1$ . Algunas propiedades básicas de estos esquemas son:

- (1) Los esquemas de Hilbert son propios y proyectivos [17], [20].
- (2) Como un espacio de módulos fino, estos esquemas vienen equipados con una familia plana universal, es decir, existe un subesquema  $C \subset \text{Hilb}^{dm-g+1}(\mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}^n$  cuya fibra sobre  $[C]$  (es decir, el punto sobre  $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$  que parametriza al subesquema  $C \subset \mathbb{P}^n$ ) es precisamente  $C$  y para cualquier esquema  $B$ , la aplicación de conjuntos

$$\mathcal{M}(B, \text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{subesquemas } \mathcal{C} \subset B \times \mathbb{P}^n \text{ cuyas fibras} \\ \text{sobre } B \text{ son curvas de grado } d \text{ y género } g \end{array} \right\},$$

dada por  $f \mapsto (f \times \text{id})^{-1}(Z)$  es una biyección.

Podríamos pensar por algún momento que la existencia de una familia universal hace un poco accesible a la teoría de esquemas de Hilbert, pero aún así resultan serias complicaciones a la hora de estudiar estos esquemas.

Resultan serios problemas como consecuencia de la construcción del esquema de Hilbert. Por ejemplo, hay muchas maneras diferentes en que una curva (o esquema)  $C$  podría tener  $p_C(m) = dm - g + 1$  como polinomio de Hilbert. Si consideramos una curva  $C$  de grado  $d$  y género  $g$ , por supuesto su polinomio de Hilbert es  $p_C(m) = dm - g + 1$ . Ahora, supongamos que tenemos otra curva  $C'$  de género  $g + 1$ , y consideremos  $C' \cup \{p\}$  donde  $p$  es cualquier punto en  $\mathbb{P}^r$  que no está sobre el soporte de  $C'$ . Este es un subesquema de  $\mathbb{P}^r$  que tiene polinomio de Hilbert  $p_{C' \cup \{p\}}(m) = dm - (g + 1) + 1 + 1 = dm - g + 1$ . Entonces, cada esquema de Hilbert correspondiente al polinomio  $p(m) = dm - g + 1$  contendrá componentes cuyo punto genérico corresponde a una curva de género  $g' > g$  y una colección de  $g' - g$  puntos de  $\mathbb{P}^r$ , si tal configuración es viable.

Las siguientes son algunas definiciones básicas que usaremos frecuentemente en las secciones posteriores.

**Definición 1.19.** Sea  $X$  una variedad no singular sobre un campo  $\mathbb{K}$ , y sea  $Y \subset X$  un subesquema cerrado definido por una gavilla de ideales  $\mathcal{I}$ . Definimos la *gavilla normal* de  $Y$ , denotada por  $\mathcal{N}_{Y/X}$  como el dual a la gavilla conormal  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ . En otras palabras,

$$\mathcal{N}_{Y/X} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}, \mathcal{O}_Y).$$

Si  $Y$  es no singular, entonces la gavilla conormal y la gavilla normal son localmente libres. En este caso  $\mathcal{N}_{Y/X}$  es llamado el haz normal.

Si se desea estudiar las propiedades locales del esquema  $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$  en un punto  $C$ , la cohomología de la gavilla normal  $\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^n}$  resulta ser una herramienta importante para

tal fin. La sucesión exacta de gavillas que resulta ser de gran utilidad para calcular la cohomología de la gavilla normal  $\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^n}$ , es la que sigue,

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_C \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_C} \rightarrow \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^n} \rightarrow 0.$$

Por otro lado, una consecuencia de la universalidad del esquema de Hilbert, y la existencia de un esquema adecuado de deformaciones de primer orden, es que, el espacio tangente de Zariski del esquema de Hilbert en un punto  $C$ , consiste exactamente de las deformaciones de primer orden del subesquema  $C \subset \mathbb{P}^n$ . Éstas a su vez están dadas por las secciones globales de la gavilla normal de  $C$  en  $\mathbb{P}^n$ . En la teoría de esquemas es también conocida la siguiente igualdad

$$T_C(\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)) = H^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^n}).$$

Esta igualdad, a menudo en la práctica permite describir la estructura local del esquema  $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$ .

**Definición 1.20.** Sea  $X$  un espacio topológico. Dados cualesquiera  $x, y \in X$ . Decimos que  $y$  es una *especialización* de  $x$  (o  $x$  especializa a  $y$ ) en  $X$  si  $y$  está en la cerradura  $\overline{\{x\}}$ , y denotamos esto por  $x \rightarrow y$ . A partir de esta definición se definen los siguientes conjuntos:

$$\text{Sp}(X) := \{y \in X : x \rightarrow y\} \quad \text{y} \quad \mathcal{E} := \{y \in X : y \rightarrow x\}.$$

Si  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow x$  en  $X$ , entonces  $y$  se llama una *especialización genérica* de  $x$  en  $X$ , y denotamos esto por  $x \leftrightarrow y$ . El punto  $x$  es un punto inicial si  $x \leftrightarrow z$  para cualquier  $z$  en  $X$  tal que  $z \rightarrow x$ ;  $x$  es final si  $x \leftrightarrow z$  para cualquier  $z$  en  $X$  tal que  $x \rightarrow z$  en  $X$ . Si  $x \rightarrow y$  en  $X$ , entonces se dice que  $y$  es una *especialización cerrada* de  $x$  en  $X$  si se tiene  $z = x \circlearrowleft z = y$  para cualquier  $z$  en  $X$  tal que  $x \rightarrow z$  y  $z \rightarrow y$  en  $X$ .

**Definición 1.21** ([12], pág. 66 – 70). Un esquema afín  $X = \text{Spec}k[x_1, \dots, x_n]/I \subset \mathbb{A}^n$  tiene una *componente incrustada* si para algún subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{A}^n$  que intersecta a  $X$  en un subconjunto denso de  $X$ , la cerradura de  $X \cap U$  en  $X$  no es igual a  $X$ . Esto es equivalente a decir que la descomposición primaria del ideal  $I$  contiene primos incrustados. Un *punto incrustado* ocurre cuando el ideal primo incrustado es maximal.

Antes de continuar vale la pena hacer explícita la siguiente observación: el límite de una familia de curvas en el sentido del esquema de Hilbert no necesita coincidir con la noción usual de límite. Específicamente, supóngase que  $\{C_t\}_{t \in \mathbb{K}^*}$  es una familia de un parámetro de curvas abstractas no singulares de género  $g$ ,  $\varphi_t : C_t \rightarrow \mathbb{P}^n$  una familia de aplicaciones de grado  $d$  con  $\varphi_t$  un incrustamiento para  $t \neq 0$ , y  $\varphi_0$  biracional pero no un incrustamiento. Entonces, el género aritmético de la curva imagen  $\overline{C_t} = \varphi_t(C_t)$  es  $g$  para  $t \neq 0$ , pero estrictamente mayor que  $g$  para  $t = 0$ . En otras palabras, si para  $t \neq 0$ ,  $P_t$  es el punto en el esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{dm-1+g}(\mathbb{P}^n)$  correspondiente a  $\overline{C_t}$ , entonces el límite de  $P_t$  cuando  $t \rightarrow 0$  no puede corresponder a  $\overline{C_0}$ ; en efecto,  $\overline{C_0}$  corresponde a un punto sobre un esquema diferente. De echo, la curva en  $\mathbb{P}^n$  correspondiente al  $\lim_{t \rightarrow 0} P_t$  es una curva no reducida con soporte igual al soporte de  $\overline{C_0}$ , pero con estructuras incrustadas en las singularidades de  $\overline{C_0}$ .

**Ejemplo 1.22.** Consideremos la familia de cúbicas alabeadas dada por  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ ,  $(s : t) \mapsto (s^3 : s^2t : cst^2 : t^3)$ . El límite usual de estas curvas cuando  $t \rightarrow 0$  es la cúbica plana cuspidal  $(s^3 : s^2t : 0 : t^3)$  dada por las ecuaciones  $z = y^3 - x^2w = 0$ . Si queremos encontrar el límite plano debemos de permitir que el ideal (no sólo los generadores) pueda degenerarse. Las ecuaciones de la curva para  $t \neq 0$  son  $xz - cy^2 = cxy - yz = c^2yw - z^2 =$

0. Con el fin de encontrar el ideal de el límite plano necesitamos incluir más generadores (o al menos uno de grado 3):

$$(xz - cy^2, cxy - yz, c^2yw - z^2, y^3 - x^2w) \mapsto (xz, yz, z^2, y^3 - x^2w),$$

cuando  $c \rightarrow 0$ . El último ideal describe una cúbica plana cuspidal con un punto incrustado no plano en el punto cuspidal.

## Capítulo 2

### Una descripción parcial de la variedad de Chow de 1-ciclos de grado 3 en $\mathbb{P}^3$

El caso que nos interesa es cuando  $r = 1$  y  $d = 3$ , esto es, la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  que parametriza 1-ciclos de grado 3 en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ . Las posibilidades para un 1-ciclo de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$  son: una curva cúbica irreducible, una recta y una cónica plana, o tres rectas. Más aún, como una curva cúbica en  $\mathbb{P}^3$  es una curva cúbica plana o una *curva cúbica alabeada* (una curva normal racional no singular), entonces se sigue que la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  tiene cuatro componentes irreducibles. En este artículo, denotamos por:  $\mathcal{C}^1$  la componente cuyo punto genérico parametriza curvas cúbicas planas no singulares;  $\mathcal{C}^2$  la componente cuyo punto genérico parametriza curvas cúbicas alabeadas;  $\mathcal{C}^3$  la componente cuyo punto genérico parametriza la unión disjunta de una recta y una cónica plana no singular, y  $\mathcal{C}^4$  la componente cuyo punto genérico parametriza tres rectas disjuntas. La componente  $\mathcal{C}^1$  tiene dimensión la suma del número de parámetros que definen a un plano, más la dimensión del espacio de cúbicas en el plano dado, esto es,  $\dim \mathcal{C}^1 = 3 + 9 = 12$ . Luego, la dimensión de  $\mathcal{C}^2$  es también 12. En efecto, como todas las curvas cúbicas alabeadas son congruentes bajo el grupo  $\mathrm{PGL}_4$ , si consideramos  $\mathcal{H}$  el espacio de cúbicas alabeadas, y fijamos una cúbica alabeada estándar  $C_0 \in \mathcal{H}$  dada por la imagen del mapeo de Veronese  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ , tenemos el mapeo  $\mathrm{PGL}_4 \rightarrow \mathcal{H}$  que manda un  $g \in \mathrm{PGL}_4$  a  $g(C_0)$ . La fibra de este mapeo sobre cualquier  $C \in \mathcal{H}$  es el subgrupo de  $\mathrm{PGL}_4$  que mapea  $C$  en sí mismo, esto es, el grupo  $\mathrm{PGL}_2$ . Así,

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim \mathrm{PGL}_4 - \dim \mathrm{PGL}_2 = 12.$$

También,  $\dim \mathcal{C}^3 = 12$ , ya que una cónica plana no singular depende de 8 parámetros y la dimensión de la Grassmannian  $\mathbb{G}(2, 3)$  es 4. Finalmente,  $\dim \mathcal{C}^4 = 12$ . Entonces, la variedad de Chow

$$\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3) = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2 \cup \mathcal{C}^3 \cup \mathcal{C}^4$$

es una variedad equidimensional de dimensión pura 12. Para el siguiente cálculo usaremos el morfismo Hilbert-Chow el cual introduciremos más tarde: observe que los conjuntos abiertos principales de cada una de estas componentes son no singulares (para el espacio tangente de la variedad de Chow, ver [26, Sección 6]). En efecto, para el conjunto abierto principal en  $\mathcal{C}^2$ , sea  $C$  una curva cúbica alabeada. Después de la identificación de  $C$  con la línea proyectiva  $\mathbb{P}^1$ , se sigue [14, Proposición 6, pág. 458] que la gavilla normal de  $C$  es  $\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_C(5) \oplus \mathcal{O}_C(5)$ . Por lo tanto, por Riemann-Roch

$$h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5)) + h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5)) = 12.$$

Similarmente, para el conjunto abierto principal en  $\mathcal{C}^1$  cualquier curva plana no singular  $C$  de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$  es una intersección completa. Así, la gavilla normal de  $C$  es  $\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_C(3) \oplus \mathcal{O}_C(1)$ . Un cálculo similar como el anterior muestra que  $h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) = 12$ . Luego, para el conjunto abierto principal en  $\mathcal{C}^3$ , sea  $C = C' \cup L$ , donde  $C'$  es una cónica

plana no singular y  $L$  es una recta disjunta a  $C'$  en  $\mathbb{P}^3$ . Entonces, la gavilla normal de  $C$  es

$$\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3} = \mathcal{N}_{C'/\mathbb{P}^3} + \mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^3} = [\mathcal{O}_{C'}(2) \oplus \mathcal{O}_{C'}(1)] \oplus [\mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1)],$$

y un cálculo directo muestra otra vez que  $h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) = 12$ . Y finalmente, para el conjunto abierto principal en  $\mathcal{C}^4$ , sea  $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , donde  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son tres rectas disjuntas en  $\mathbb{P}^3$ . Entonces,

$$\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3} = [\mathcal{O}_{L_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_1}(1)] \oplus [\mathcal{O}_{L_2}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_2}(1)] \oplus [\mathcal{O}_{L_3}(1) \oplus \mathcal{O}_{L_3}(1)],$$

y así  $h^0(C, \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^3}) = 12$ .

En [7], Chen probó que la compactificación Chow  $\mathcal{C}^2$  del espacio de cúbricas alabeadas no es normal. En [6, Lema 2.4], Coray probó que la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,m}(\mathbb{P}^3)$  tiene una componente irreducible de dimensión  $4m$ , cuyo punto genérico es una curva racional no singular. Más aún, cualquier espacio curva irreducible de grado 3 y género geométrico cero pertenece a esa componente. Por [6, Sección 2A], las curvas que pasan a través de un punto dado  $P \in \mathbb{P}^3$  describen una subvariedad de codimensión 2 en  $\mathcal{C}^2$ .

Nuestra meta es obtener las compactificaciones de las componentes de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  mediante una comparación con las componentes de los esquemas de Hilbert correspondientes. Una estrategia básica para estudiar una estratificación de una componente de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  es estudiar la estratificación de la correspondiente componente en el esquema de Hilbert asociado. Para este fin necesitamos especializaciones explícitas a nivel de esquemas para poder hacer uso del morfismo birracional Hilbert-Chow. De este morfismo hablaremos más adelante. Puesto que para una curva proyectiva de grado  $d$  en  $\mathbb{P}^3$  su polinomio de Hilbert es de la forma  $dm + 1 - g$ , donde  $g$  es el género aritmético de la curva dada, entonces debemos considerar esquemas de Hilbert de la forma  $\text{Hilb}^{dm+1-g}(\mathbb{P}^3)$ . Recordemos ahora cuales son las componentes de los correspondientes esquemas de Hilbert que usaremos para hacer la comparación con las correspondientes componentes de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Para empezar, para la componente  $\mathcal{C}^1$  cuyo punto genérico es una curva cúbica plana no singular, la cual tiene género aritmético 1, el correspondiente esquema es  $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$  y, más específicamente, su componente que parametriza curvas cúbicas planas no singulares. Para la componente  $\mathcal{C}^2$  cuyo punto genérico es una curva cúbica alabeada de género aritmético 0, el correspondiente esquema de Hilbert es  $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$ , y de hecho sólo la componente de dimensión 12 que parametriza a estas cúbricas alabeadas, [33]. Para la componente  $\mathcal{C}^3$  cuyo punto genérico es la unión disjunta de una recta y una cónica plana no singular, el correspondiente esquema es  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ , y más específicamente la componente que parametriza a estas curvas. Finalmente, para la componente  $\mathcal{C}^4$  cuyo punto genérico parametriza tres rectas disjuntas, el correspondiente esquema es  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ , y específicamente su componente que parametriza a estas curvas. En general, hay morfismos birracionales  $\varphi : \text{Hilb}^{3m+1-g}(\mathbb{P}^3) \rightarrow \mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  que olvidan la estructura de esquema, excepto para la multiplicidad de las correspondientes curvas, [7, Proposición. 1.6]. Restringiremos estos morfismos a las componentes de Hilbert que contienen los puntos genéricos correspondientes de las correspondientes componentes de la variedad de Chow. Entoces, estaremos interesados en estudiar solamente los morfismos birracionales Hilbert-Chow.

- (1)  $\varphi_1 : H(3, 1) \rightarrow \mathcal{C}^1$
- (2)  $\varphi_2 : H(3, 0) \rightarrow \mathcal{C}^2$
- (3)  $\varphi_3 : H(3, -1) \rightarrow \mathcal{C}^3$
- (4)  $\varphi_4 : H(3, -2) \rightarrow \mathcal{C}^4$

Es importante anticipar que la descripción de la variedad de  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  será parcial debido a que en la estratificación de la componente de nuestro interés en el esquema  $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$  hay una infinidad de  $\text{PGL}_4$ -órbitas para cúbicas planas no singulares, y por tanto tendremos un número infinito de subespacios localmente cerrados en la componente  $\mathcal{C}^1$  de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

A continuación expondremos a modo de resumen los ejemplos conocidos de esquemas de Hilbert de curvas en  $\mathbb{P}^3$  para los casos especiales en que:

- (1) El polinomio de Hilbert es  $p(m) = 2m + 1 - g$ , para  $g = 0, -1$ .
- (2) El polinomio de Hilbert es  $p(m) = 3m + 1 - g$ , para  $g = 0, 1, -1, -2$ .

En ambos casos  $g$  es el género aritmético de las curvas que tienen polinomio de Hilbert dado. En la literatura se sabe que la descripción completa del esquema  $\text{Hilb}^{3m+1-g}(\mathbb{P}^3)$  no está disponible, pero se han obtenido descripciones de las componentes que parametrizan curvas que son localmente Cohen-Macaulay (es decir, curvas sin componentes de dimensión cero). En general, para  $g < -1$  estas componentes no siempre son irreducibles. Para el caso en que  $p(m) = 3m + 1 - g$  y  $g = -1, -2$ , nosotros presentamos como trabajo propio una estratificación casi completa de una componente del esquema  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ , y una estratificación de una componente del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ .

Decimos que dos curvas en  $\mathbb{P}^3$  son proyectivamente equivalentes si una se obtiene como la imagen de la otra bajo la acción de  $\text{PGL}_4$ . Una *órbita* es el conjunto de todas las curvas que son proyectivamente equivalentes, es decir, es una clase de equivalencia proyectiva. Definimos un *estrato* como el espacio de curvas en el esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{dm+1-g}(\mathbb{P}^3)$  que consisten de puntos que parametrizan todas las curvas en una órbita. Decimos que una órbita  $B$  es una especialización de la órbita  $A$  si existe una familia de curvas en  $A$ , que depende de un parámetro, cuyo límite es una curva en  $B$ . En este caso también decimos que una curva  $C$  en la órbita  $B$  es una especialización (o límite plano) de las curvas de la órbita  $A$ . Un *diagrama de estratificación* es un diagrama en el que se indica la dimensión de cada estrato así como también las relaciones de inclusión bajo cerradura.

Nótese que en general el lugar que parametriza a los elementos de una órbita no es un subconjunto cerrado del esquema de Hilbert correspondiente, puesto que su cerradura podría contener además de las curvas de la órbita correspondiente, todas sus especializaciones. En su lugar diremos que es sólo localmente cerrado, es decir, es un subconjunto abierto de un conjunto cerrado. Con esta observación, si cierta órbita no tiene más especializaciones, entonces el correspondiente lugar en el esquema de Hilbert es un subconjunto cerrado, de hecho es una subvariedad cerrada, puesto que es la imagen de una variedad irreducible.

Bajo este análisis podemos decir que una manera de visualizar a un esquema de Hilbert y sus distintas componentes es fijarnos en los estratos de las curvas parametrizadas. En algunos casos hay una cantidad finita de órbitas bajo la acción del grupo  $\text{PGL}_4$ , y entonces una cantidad finita de estratos en el esquema  $\text{Hilb}^{dm+1-g}(\mathbb{P}^3)$ . Para exhibir una familia plana, es suficiente dar una parametrización en términos de  $t$  y verificar la continuidad de la dimensión; esto corresponde a escoger un **arc** sobre el esquema  $\text{Hilb}^{dm+1-g}(\mathbb{P}^3)$ .

## 2.1. El esquema $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$

Recuerde que el polinomio de Hilbert de una cónica plana es  $p(m) = 2m + 1$ .

**Teorema 2.1.** *El esquema  $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$  parametriza cónicas planas (no singulares y singulares, incluyendo rectas dobles planas). Este esquema tiene una sólo componente*



irreducible, es de dimensión 8 y es isomorfo al  $\mathbb{P}^5$ -fibrado  $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{S}^*)$ , donde  $\mathcal{S}$  es el subfibrado universal de  $\mathbb{P}^{3*}$ .

*Demostración.* Ver [9, Ejemplo 4.6], o bien [28, Teorema 3.4.1]. Aquí,  $\mathbb{P}^{3*}$  es el dual del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  y consiste de todos los planos en  $\mathbb{P}^3$ .  $\square$

**Lema 2.2.** *Si  $C \subset \mathbb{P}^3$  es una curva que tiene polinomio de Hilbert  $2m + 1$ , entonces  $C$  es una cónica plana o su especialización.*

*Demostración.* La idea es considerar la curva reducida  $C_{\mathrm{red}}$  (ésta se define como la unión de todas las componentes irreducibles de  $C$ , de dimensión 1) y posteriormente estudiar los casos para el grado de la curva  $C_{\mathrm{red}}$ . Los detalles aparecen en [28, Lema 3.4.3].  $\square$

El esquema  $\mathrm{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$  contiene los siguientes espacios de curvas:

- (i) *Cónicas planas no singulares.* La dimensión de este subespacio abierto es 8. Basta elegir un plano en  $\mathbb{P}^3$  ( $\dim \mathbb{G}(2, 3) = 3$ ), y la familia de cónicas en el plano (este espacio es de dimensión 5).
- (ii) *Cónicas singulares.* La dimensión de este subespacio localmente cerrado es 7. Elegimos un plano (dimensión 3), un punto como el nodo ( $\dim \mathbb{G}(0, 2) = 2$ ) y dos direcciones (dimensión 2).
- (iii) *Rectas dobles planas.* Este subespacio cerrado es de dimensión 5. Basta elegir un plano y una recta sobre él.

Se puede ver explícitamente [28, Sección 4.1] que: (i) especializa a (ii), y que (ii) especializa a (iii). Denotaremos por  $H(2, 0)$  a la única componente que tiene el esquema  $\mathrm{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$ , donde 2, 0 son el grado y género respectivamente de las curvas en  $\mathbb{P}^3$  parametrizadas por  $H(2, 0)$ .

## 2.2. El esquema $\mathrm{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$

Vamos a notar que para este esquema de Hilbert las cosas se ponen un poco más interesantes debido a que  $-1$  no es el género aritmético máximo para curvas de grado 2 en  $\mathbb{P}^3$ ; a saber, 0 es el género máximo para estas curvas. Esto traerá como consecuencia la presencia de componentes incrustadas en las curvas. Es importante mencionar que en este momento estamos entrando a un territorio no muy familiar, esto se debe a que a la fecha no se conoce exactamente la descripción de cada una de las componentes de este esquema. En [28, Sección 3.5] se presentan algunos resultados parciales acerca de la descripción de dichas componentes y se prueba el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.** *El esquema  $\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$  tiene dos componentes irreducibles  $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \cup \mathcal{H}''$ , donde:*

- (a) *Un punto genérico de  $\mathcal{H}'$  parametriza un par de rectas oblicuas y un punto genérico de  $\mathcal{H}''$  parametriza una cónica plana unión un punto aislado.*
- (b) *Sea  $\mathcal{H}_1 := \mathrm{Bl}_{\Delta} \mathrm{Sym}^2 \mathbb{G}(1, 3)$ , donde  $\Delta$  es la diagonal de  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Este esquema es no singular, de dimensión 8, y además existe un morfismo biyectivo de  $\mathcal{H}_1$  a  $\mathcal{H}'$ .*
- (c) *Sea  $\mathcal{H}_2 := \mathrm{Bl}_{\Sigma}(\mathrm{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3) \times \mathbb{P}^3)$ , donde  $\Sigma = \{([C], p) : p \in C\}$  es la correspondencia de incidencia (o la curva universal) de  $\mathrm{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3) \times \mathbb{P}^3$ . Este esquema es no singular, de dimensión 11, y existe un morfismo biyectivo de  $\mathcal{H}_2$  a  $\mathcal{H}''$ .*

En [8, Teorema 1.1], Chen, Cozkun y Nollet demuestran que las componentes  $\mathcal{H}'$  y  $\mathcal{H}''$  son no singulares, y como consecuencia de estos hechos resulta que  $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}_1$ , y

$\mathcal{H}'' \cong \mathcal{H}_2$ . En ese mismo artículo ellos dan una generalización del isomorfismo  $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}_1$ , es decir, entre otras cosas se demuestra que la componente del esquema de Hilbert cuyo punto genérico es un par de subespacios lineales de codimensión 2 en  $\mathbb{P}^n$ , para  $n \geq 3$  es isomorfo al blow-up del producto simétrico  $\text{Sym}^2\mathbb{G}(n-2, n)$  a lo largo de la diagonal y además interseca transversalmente a la otra componente del esquema  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ .

**Lema 2.4.** *Si  $C \subset \mathbb{P}^3$  es una curva que tiene polinomio de Hilbert  $2m+2$ , entonces  $C$  es una especialización de dos rectas oblicuas o de una cónica plana unión un punto aislado.*

*Demostración.* La prueba se hace considerando las posibilidades para el grado de la curva reducida  $C_{red}$ , [28, Lema 3.5.3].  $\square$

De ahora en adelante y cuando sea necesario, denotaremos por  $H(2, -1)$  a la componente del esquema  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$  que tiene como punto genérico un par de rectas oblicuas. La componente  $H(2, -1)$  contiene los espacios de curvas, cuyos puntos genéricos son:

- (I) *Dos rectas oblicuas.* Este subespacio es abierto y de dimensión 8.
- (II) *Una cónica singular con un punto incrustado espacial.* La dimensión de este subespacio localmente cerrado es 7. Dado que el punto incrustado está determinado (es decir, ocurre en el punto singular), la dimensión de este espacio es la misma que la dimensión del espacio de cónicas singulares, a saber, 7.
- (III) *Una recta doble sin puntos incrustados.* La dimensión de este subespacio localmente cerrado es 7. Escogemos un plano (dimensión 4) y una dirección en cada punto de la recta doble (dimensión 3).
- (IV) *Una recta doble con un punto incrustado espacial.* La dimensión de este subespacio localmente cerrado es 6. Escogemos una recta en  $\mathbb{P}^3$  como soporte (dimensión 4), un plano que contiene a dicha recta y un punto incrustado.

En [28, pág. 39] se puede ver que: (I) especializa a (II), (I) especializa a (III), y tanto (II) como (III) especializan a (IV). En la Figura 2 se muestra la idea geométrica (intuitiva) de las componentes  $H(2, 0)$  y  $H(2, -1)$  de los esquemas  $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$  y  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ , respectivamente.

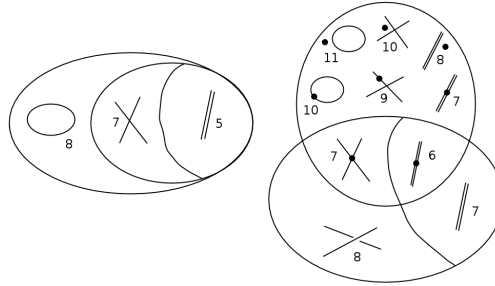


Figura 2. Los esquemas  $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$  y  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ .

En estos momentos es importante puntualizar dos cosas: primero, sea  $C \in \mathbb{P}^n$  una curva de grado  $d$  y género  $g$ . Si  $P \in \mathbb{P}^n$  es cualquier punto que no está sobre el soporte de  $C$ , entonces  $C \cup \{P\}$  es un subsquema de  $\mathbb{P}^n$  con polinomio de Hilbert  $md - g + 2$ , es decir, una curva de grado  $d$  y género  $g - 1$ . Esto último significa que para cualquier  $g' > g$  y cualquier componente  $H_0$  del esquema  $\text{Hilb}^{dm+1-g'}(\mathbb{P}^n)$  de curvas de grado  $d$  y género  $g'$  en  $\mathbb{P}^n$  contendrá una componente irreducible cuyo punto genérico corresponde a una curva  $C \in H_0$  más una colección de  $g' - g$  puntos de  $\mathbb{P}^n$ . Por otro lado, en términos

de esquemas de Hilbert tenemos una infinidad de estructuras dobles soportadas sobre una recta, incluso sin permitir que la estructura tenga puntos incrustados. Una recta doble puede tener cualquier género aritmético no positivo. En general, para  $g \leq -2$ , la dimensión de la componente del esquema  $\text{Hilb}^{2m+1-g}(\mathbb{P}^n)$  cuyo punto genérico corresponde a una recta doble de género  $g$  sin puntos incrustados tiene dimensión  $(-g+3)(n-1)-1$ .

### 2.3. La estratificación de la componente $H(3, 1)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$

Por la clasificación de curvas en  $\mathbb{P}^3$  [21, pág. 345] se tiene que las cúbicas planas tienen género 1, y de hecho éste es el género aritmético máximo para curvas de grado 3. Por lo tanto, éstas deben tener polinomio de Hilbert  $p(m) = 3m$ . En [28, pág. 32] se prueba el siguiente teorema y el siguiente lema:

**Teorema 2.5.** *El esquema  $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$  tiene sólo una componente, y parametriza curvas cúbicas planas y sus especializaciones en  $\mathbb{P}^3$ . La dimensión es 12 y es isomorfo al  $\mathbb{P}^9$ -fibrado  $\mathbb{P}(\text{Sym}^3 \mathcal{S}^*)$ , donde  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{P}^{3*}$  es el subfibrado universal.*

Es importante mencionar que un esquema de Hilbert que parametriza curvas planas de grado  $d$  es siempre de la forma  $\mathbb{P}(\text{Sym}^d \mathcal{S}^*)$ . En [28, Sección 3.7] se presentan algunas ideas posibles para probar que un subesquema de dimensión 1 que tiene polinomio de Hilbert

$$p(m) = dm - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$$

es necesariamente plana.

**Lema 2.6.** *Si  $C \subset \mathbb{P}^3$  es una curva que tiene polinomio de Hilbert  $3m$ , entonces es una cúbica plana no singular o sus especializaciones.*

*Demostración.* [28, Lema 3.7.2]

El esquema  $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$  es no singular y contiene los espacios localmente cerrados de curvas, cuyos puntos genéricos son:

- (I) Una cúbica plana nodal.
- (II) Una cónica plana, y una recta que la corta en dos puntos.
- (III) Una cúbica cuspidal.
- (IV) Tres rectas que se cortan en tres puntos diferentes.
- (V) Una cónica y una recta tangente.
- (VI) Tres rectas concurrentes.
- (VII) Una recta doble plana y una recta que la interseca en un punto.
- (VIII) Una recta triple.

En [23, pág. 121] aparecen las especializaciones de los espacios (I)-(VIII). Como antes, denotaremos a la componente de  $\text{Hilb}^{3m}(\mathbb{P}^3)$  por  $H(3, 1)$ .

Para este caso, debido a que hay infinitas clases de equivalencias proyectivas que parametrizan una cúbica no singular, resulta imposible dibujar toda la estratificación de esta componente. En la teoría general se conoce que todas las cúbicas planas no singulares en  $\mathbb{P}^2$  pueden ser escritas en la forma normal de Weierstrass [16]:

$$x_1^2 = 4x_0^3 - \alpha x_0 x_2^2 - \beta x_2^3,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes y estas curvas resultan no ser proyectivamente equivalentes para ciertas parejas  $(\alpha, \beta)$ . Otra manera de escribir la ecuación que define a curvas cúbicas

no singulares es la siguiente:

$$x_1^2 x_2 = x_0(x_0 - x_2)(x_0 - \lambda x_2),$$

y dos de tales curvas  $C_\lambda$  y  $C_{\lambda'}$  son equivalentes si y sólo si los invariantes

$$j(\lambda) = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}, \quad \text{y} \quad j(\lambda') = 256 \frac{(\lambda'^2 - \lambda' + 1)^3}{\lambda'^2(\lambda' - 1)^2}$$

coinciden [24, Sección 10.16]. Afortunadamente, las siguientes afirmaciones con ciertas [16, Sección 15.2]:

- (i) Todas las cúbicas planas singulares pertenecen a órbitas finitas;
- (ii) Todas las cúbicas planas singulares que tienen el mismo tipo geométrico son proyectivamente equivalentes;
- (iii) Todas las cúbicas no singulares y cúbicas nodales pueden especializar a cúbicas cuspidales.

Por lo tanto, el diagrama de estratificación puede partir del estrato de cúbicas nodales. Una vez considerada una sola componente con punto genérico una cúbica no singular e ignoramos todas las demás componentes con puntos genéricos cúbicas no singulares, el diagrama luce como se muestra en la Figura 3. Los números que aparecen en la columna derecha de la figura son las dimensiones de los correspondientes espacios de curvas en la estratificación.

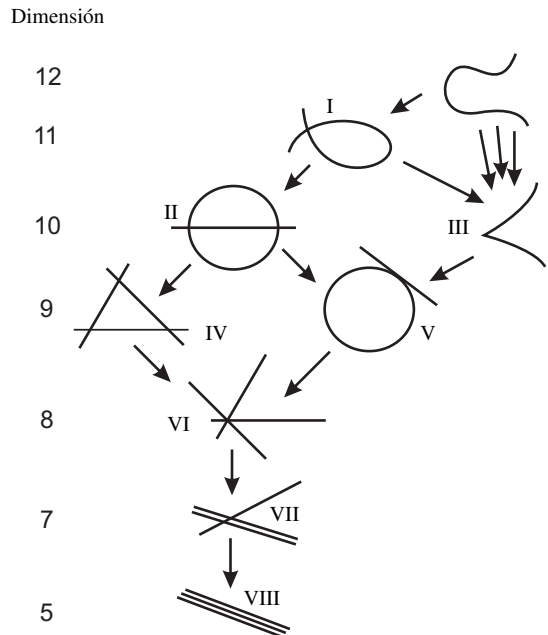


Figura 3. Estratificación de  $H(3, 1)$

## 2.4. La estratificación de la componente $H(3, 0)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$

Es importante recordar que para el caso de curvas de grado 3, el género aritmético máximo es 1, y éste corresponde a curvas planas de grado 3. Nuevamente, esta situación trae como consecuencia la presencia de puntos incrustados o aislados en las curvas. Las curvas en  $\mathbb{P}^3$  con género 0 son verdaderamente interesantes debido a que el tipo más general de estas curvas son irreducibles, reducidas, no planas y curvas no degeneradas. Estas curvas son conocidas como *cúbicas alabeadas*.

En [33], Pione y Schlessinger estudiaron el esquema  $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$  de curvas de grado 3 y género aritmético 0 en  $\mathbb{P}^3$  y probaron el siguiente:

**Teorema 2.7.** *El esquema  $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$  consiste de dos componentes irreducibles,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$ , de dimensión 12 y 15, respectivamente. La componente  $\mathcal{H}$  es la cerradura del espacio de cúbicas alabeadas y la componente  $\mathcal{H}'$  es la cerradura del espacio de cúbicas planas unión un punto fuera del plano. Ambas componentes son no singulares y racionales, se intersectan transversalmente y su intersección es no singular, racional y de dimensión 11.*

De hecho, ellos describieron explícitamente la componente  $\mathcal{H}$ , que parametriza al espacio de cúbicas alabeadas en  $\mathbb{P}^3$ . Esta componente contiene los espacios de curvas, cuyos miembros genéricos son:

- (I) Una cúbica no singular alabeada.
- (II) Una cónica y, una recta que intersecta a la cónica en un punto.
- (III) Una cúbica plana con un nodo, con un punto incrustado en el nodo.
- (IV) Tres rectas no coplanares.
- (V) Una cónica y, una recta que intersecta a la cónica en dos puntos, con un punto incrustado en uno de los puntos de intersección.
- (VI) Una cúbica plana con una cúspide, con un punto incrustado en la cúspide.
- (VII) Una recta doble de género  $-1$ , y una recta que la corta.
- (VIII) Tres rectas concurrentes no coplanares.
- (IX) Tres rectas coplanares, con un punto incrustado en uno de los puntos de intersección.
- (X) Una cónica y una recta tangente, con un punto incrustado en su intersección.
- (XI) Una recta doble plana de género 0 con una recta que no está en su plano.
- (XII) Una recta doble plana y una recta en su plano con un punto incrustado en algún lugar de la recta doble.
- (XIII) Tres rectas concurrentes y coplanares, con un punto incrustado en su punto común.
- (XIV) Una recta triple sobre un cono cuadrado.
- (XV) Una recta doble plana y una recta en su plano con un punto incrustado en su intersección.
- (XVI) Una recta triple plana con un punto incrustado.
- (XVII) Una recta triple dada por el cuadrado del ideal que define a la recta.

En [23, pág. 155] se puede ver algunas maneras para calcular la dimensión del espacio de cúbicas alabeadas. En [28, pág. 44] aparecen los detalles de como calcular la dimensión de cada espacio de curvas (I)-(XVII), así como las especializaciones entre las órbitas. En la Figura 4 se muestra esta componente junto con los miembros genéricos (I)-(XVII) y sus respectivas dimensiones. Los puntos remarcados son los puntos incrustados de multiplicidad 1 en las curvas. La componente que parametriza cúbicas alabeadas la vamos a denotar por  $H(3, 0)$ , donde como antes; 3, 0 son el grado y género de las curvas en  $\mathbb{P}^3$  parametrizadas por  $H(3, 0)$ .

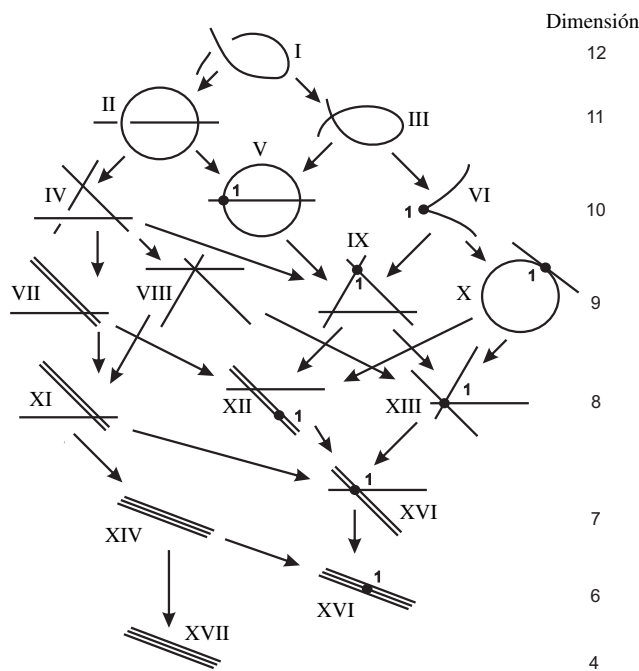


Figura 4. Estratificación de  $H(3, 0)$

## 2.5. La estratificación de la componente $H(3, -1)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$

Hemos llegado al punto en el que vamos a exponer la primera parte del artículo al cual está enfocado esta tesis. Antes que nada vamos a dar algunos hechos relativamente recientes de lo que se ha hecho acerca de este esquema de Hilbert. Por ejemplo, Martin-Deschamps and Perrin [30] mostraron que la componente que parametriza curvas que son localmente Cohen-Macaulay es no singular, irreducible y de dimensión 12. En general, para  $g < -1$  este hecho no es cierto. Nollet [32] mostró que para el caso de curvas de grado 3 y género  $-2$  la componente que parametriza curvas que son localmente Cohen-Macaulay contiene dos componentes: (i) una componente que tiene como punto genérico la unión de una recta doble de género  $-3$  y una recta que la corta, (ii) una componente representada por tres rectas disjuntas, esta es de dimensión 12 (esta componente se estudiará en la Sección 2.6). En la literatura se sabe que la descripción completa de estos esquemas no está disponible aún, pero si se sabe que el esquema  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$  tiene tres componentes irreducibles [9, Ejemplo 4.7], cuyos puntos genéricos son:

- (1) *Una cónica plana no singular unión disjunta una recta.* La dimensión de la componente correspondiente es 12, pues la dimensión del espacio de cónicas en  $\mathbb{P}^3$  es 8 y  $\dim \mathbb{G}(1, 3) = 4$ .
- (2) *Una cúbica alabeada unión un punto aislado.* En las primeras líneas de este capítulo se vió que la dimensión del espacio de cúbicas alabeadas en  $\mathbb{P}^3$  es 12 y como  $\dim \mathbb{G}(0, 3) = 3$ , entonces la dimensión de la componente correspondiente es 15.

- (3) *Una cúbica plana no singular unión, dos puntos aislados.* Como el espacio de cúbicas planas en  $\mathbb{P}^3$  es de dimensión 12 y la dimensión del espacio de puntos en  $\mathbb{P}^3$  es 3, entonces la componente correspondiente es de dimensión 18.

La aportación que daremos es sobre la descripción de una de las componentes irreducibles de este esquema, a saber, aquella que tiene como punto genérico la unión disjunta de una cónica plana no singular y una recta. En nuestra notación esta componente será denotada por  $H(3, -1)$ .

Nuestro primer resultado es el siguiente:

**Lema 2.8.** *Si  $C \in H(3, -1) \subset \text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ , entonces  $C$  es la unión disjunta de una cónica plana no singular y una recta, o su especialización.*

*Demostración.* Vamos a considerar la curva reducida  $C_{\text{red}}$  de la curva  $C$ . Para todo  $m$  positivo,  $P_{C_{\text{red}}}(m) \leq P_C(m)$ . De aquí resultan los siguientes casos:

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 3$ ,  $C_{\text{red}}$  plana y reducible. En este caso  $C_{\text{red}}$  debe ser la unión de una cónica no singular y una recta, es decir, una cúbica plana reducible. En cualquier posición de la cónica y la recta, la cúbica tiene polinomio de Hilbert  $3m$ , Sección 2.3. Por lo tanto, para poder alcanzar el género aritmético  $-1$ , la curva  $C$  debe tener dos puntos extras, incrustados o separados. El caso  $C_{\text{red}}$  plana e irreducible no puede ocurrir por cuestiones de dimensión, ya que si agregamos dos puntos extras a la curva reducida  $C_{\text{red}}$ , la dimensión del espacio de curvas con estas propiedades será mayor que la dimensión de la componente  $H(3, -1)$ .

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 3$ ,  $C_{\text{red}}$  no plana y reducible. Si  $C_{\text{red}}$  es conexo, entonces debe ser la unión de una cónica plana no singular y una recta que no está en el plano, o la unión de una cónica plana singular y una recta. En ambos casos el polinomio de Hilbert de  $C_{\text{red}}$  es  $3m+1$ , y entonces la curva  $C$  debe tener un punto incrustado o separado. Si  $C_{\text{red}}$  no es conexa, entonces las posibilidades para  $C_{\text{red}}$  son: la unión disjunta de una cónica plana y una recta, o tres rectas disjuntas. Pero tres rectas disjuntas tiene polinomio de Hilbert  $3m+3$ , así este caso no puede ocurrir. El caso  $C_{\text{red}}$  no plana e irreducible no ocurre por cuestiones de dimensión.

El caso:  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  plana e irreducible no puede ocurrir [28, (iii), pág. 32].

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  plana, y reducible. Aquí  $C_{\text{red}}$  es la unión de dos rectas. Como en  $\mathbb{P}^2$  dos rectas distintas siempre se intersectan, entonces  $C_{\text{red}}$  es una cónica singular, y por lo tanto una de las rectas debe tener estructura de multiplicidad dos en  $C$ . Así  $C$  contiene la intersección de una recta con una recta doble. Escribimos  $C = C'_{\text{red}} \cup Z$ , donde  $C'_{\text{red}}$  es la unión de una recta con una recta doble, y  $Z$  es la unión de los subesquemas de  $C$  de dimensión cero. Como  $C'_{\text{red}}$  es plana entonces es una degeneración de una cúbica plana (con polinomio de Hilbert  $3m$ ). Por lo tanto,  $Z$  debe contener dos puntos incrustados de  $C$ .

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  no plana, y reducible. Si  $C_{\text{red}}$  es conexa, entonces está contenida en una superficie cuádrlica [28, (vii), pág. 33] y su polinomio de Hilbert es  $3m+1$ . Por lo tanto,  $C$  debe tener un punto incrustado o separado. Si  $C_{\text{red}}$  no es conexa, tenemos dos rectas oblicuas y una de ellas debe ser de multiplicidad dos con posibles componentes de dimensión cero. Si  $C_{\text{red}}$  es la unión disjunta de una recta doble de género  $-1$  y una recta, entonces su polinomio de Hilbert es  $(2m+2) + (m+1) = 3m+3$ , así este caso no puede ocurrir. Si  $C_{\text{red}}$  es la unión disjunta de una recta doble de género 0 con otra recta, entonces su polinomio de Hilbert es  $(2m+1) + (m+1) = 3m+2$ , así  $C_{\text{red}} = C$ . Las únicas curvas no singulares de grado dos son cónicas de género aritmético 0, y una unión disjunta de dos rectas, de género aritmético  $-1$ . En el último caso no podemos tener una recta doble de género  $\leq -2$ , ya que  $P_{C_{\text{red}}}(m) \leq P_C(m)$ .

Si  $\deg(C_{\text{red}}) = 1$ , entonces  $C_{\text{red}}$  es una recta con estructura de multiplicidad tres. Las posibilidades para  $C$  son:  $C$  es una recta triple de género 1 con dos puntos incrustados o separados, o  $C$  es una recta triple de género 0 con un punto incrustado o separado, o  $C$  es una recta triple de género  $-1$ .

Del siguiente resultado obtendremos dos stratas de la estratificación de la componente  $H(3, -1)$ .

**Proposición 2.9.** *La componente  $H(3, -1)$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$  contiene dos subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (i) *Una cónica plana singular unión disjunta una recta. Este subespacio es de dimensión 11.*
- (ii) *Una recta doble unión disjunta una recta. Este subespacio es de dimensión 9.*

*Demostración.* Sea  $C \cup L$  el punto genérico de la componente  $H(3, -1)$ , donde  $C$  es una cónica plana no singular, y  $L$  una recta disjunta a  $C$  en  $\mathbb{P}^3$ . La cónica  $C$  vista en el esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$ , resulta ser el punto genérico de éste, [28, pág. 22]. Si en el abierto principal de la componente  $H(3, -1)$  fijamos la recta  $L$ , entonces la curva  $C$  en  $H(2, 0)$  especializa a una cónica plana singular. Por lo tanto, el espacio cuyo punto genérico es (i) está contenido en  $H(3, -1)$  claramente. Similarmente, dado que una cónica singular en  $H(2, 0)$  especializa a una recta doble, entonces el espacio cuyo punto genérico es el ítem (ii) también está contenido en  $H(3, -1)$ , y (i) especializa a (ii) en  $H(3, -1)$ . La dimensión de los espacios representados por (i) and (ii) son 11 y 9, respectivamente. El espacio de cónicas singulares y rectas dobles en  $\text{Hilb}^{2m+1}(\mathbb{P}^3)$  son de dimensión 7 y 5, respectivamente.  $\square$

En los siguientes ejemplos mostraremos especializaciones explícitas de curvas dentro de la componente  $H(3, -1)$ , es decir, curvas cuyo polinomio de Hilbert es  $3m + 2$ . Todos estos ejemplos junto con la Proposición 2.9 serán usadas para dar la descripción casi completa de la estratificación de la componente  $H(3, -1)$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ . Para los estratas de curvas cuya estructura de esquema reducido son cónicas planas singulares, si la posición del punto incrustado es predeterminado (por ejemplo, en el nodo) la dimensión de la órbita es la misma que el espacio de cónicas singulares sin ningún punto incrustado.

(I) *Una cónica plana no singular unión disjunta una recta.* En coordenadas proyectivas, una curva de este estilo es descrita por un ideal de la forma

$$(x_3, x_1^2 - x_0x_2) \cap (x_0 + x_2, x_1 + x_2),$$

y la dimensión de este esquema es claramente 12.

(II) *Una cónica no singular y una recta que la interseca en un punto, con un punto incrustado en dicha intersección.* Ésta es una especialización de (I), y para ver esto es suficiente considerar la familia  $X_t = C \cup L_t$ , con  $t \in \mathbb{K}^*$  y donde:

- (i)  $C$  es una cónica plana no singular definida por el ideal  $(x_3, x_1^2 - x_0x_2)$ . El polinomio de Hilbert de esta cónica es  $2m + 1$ .
- (ii)  $L_t$  es la recta definida por el ideal  $(x_0 + tx_2, x_1 + tx_2)$ .

Cuando  $t \neq 0$ , tenemos el ideal saturado

$$\begin{aligned} I(X_t) &= (x_3, x_1^2 - x_0x_2) \cdot (x_0 + tx_2, x_1 + tx_2) \\ &= (x_0x_3 - x_1x_3, x_2x_3t + x_1x_3, x_0x_1^2 - x_1^3 - x_0^2x_2 + x_0x_1x_2, \\ &\quad x_1^2x_2t - x_0x_2^2t + x_1^3 - x_0x_1x_2), \end{aligned}$$



y tomando el límite cuando  $t \rightarrow 0$ , obtenemos el esquema

$$X_0 = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_1x_3, x_0x_3 - x_1x_2, x_1^3 - x_0x_1x_2, x_0x_1^2 - x_1^3 - x_0^2x_2 + x_0x_1x_2)$$

Una descomposición primaria para el  $I(X_0)$  es

$$I(X_0) = (x_1, x_0) \cap (x_3, x_1^2 - x_0x_2) \cap (x_3, x_0, x_1^3).$$

Por lo tanto, el esquema límite  $X_0$  consiste de una cónica plana no singular y una recta que la interseca en el punto  $[0 : 0 : 1 : 0]$  con un punto incrustado en éste punto. El polinomio de Hilbert del esquema  $X_0$  es  $3m + 2$ , y la dimensión del espacio que parametriza estos esquemas es 11. Nótese que el grado del punto incrustado  $(x_3, x_0, x_1^3)$  en  $(x_1, x_3, x_0x_3, x_1^2 - x_0x_2)$  es 1. Éste y todos los ejemplos sobre especializaciones fueron calculados usando Macaulay2 [19], y los comandos de entrada los presentaremos para este ejemplo. Por simplicidad renombramos las coordenadas como sigue:  $x = x_0$ ,  $y = x_1$ ,  $z = x_2$  and  $w = x_3$ .

```

i1 : R= QQ[x, y, z, w, t];
i2 : C=ideal (w, y^2 - x*z);
o2 : Ideal of R
i3 : Lt=ideal (x + t*z, y + t*z);
o3 : Ideal of R
i4 : Xt=intersect (C, Lt);
o4 : Ideal of R
i5 : saturate (Xt, t)
o5 : ideal (x*w - y*w, z*w*t + y*w, x*y^2 - y^3 - x^2*z + x*y*z, y^2*z*t - x*z^2*t +
      y^3 - x*y*z)
o5 : Ideal of R
i6 : trim (Xt + idealt)
o6 : ideal (t, y*w, x*w - y*w, y^3 - x*y*z, x*y^2 - y^3 - x^2*z + x*y*z)
o6 : Ideal of R
i7 : S=ZZ/101[x, y, z, w];
i8 : m=matrix{{y*w, x*w - y*w, y^3 - x*y*z, x*y^2 - y^3 - x^2*z + x*y*z}}
o8 : Matrix S^1 < --- S^4
i9 : hilbertPolynomial coker m
o9 : -P_0 + 3P_1
o9 : ProjectiveHilbertPolynomial
i10 : I= ideal m;
o10 : Ideal of S
i11 : codim I
o11 : =2
i12 : degree I
o12 : 3
i13 : primaryDecomposition I
o13 : {ideal (y, x), ideal (w, y^2-x*z), ideal (w, x, y^3)}.

```

Las especializaciones from (III) to (XIX), fueron también calculadas usando Macaulay2 [19], pero por brevedad solamente presentaremos los ideales saturados resultantes así como sus descomposiciones primarias.

(III) *Una cónica plana singular unión disjunta una recta.* Este esquema es una especialización de (I), Proposición 2.9. La dimensión de este espacio es 11.

(IV) *Una cónica plana no singular y una recta que la corta en dos puntos, con puntos incrustados en cada punto de intersección.* Una familia plana de esquemas del tipo (II)

especializa a este esquema. Vamos a considerar la siguiente familia  $X_t = L_t \cup C \cup \{P\}$ , donde:

- (i)  $L_t$  la recta definida por el ideal  $(x_1 + tx_0, x_3 + tx_1)$ ,
- (ii)  $C$  es la cónica plana definida por el ideal  $(x_3, x_1^2 - x_0x_2)$  y
- (iii) el punto incrustado  $P$  definido por  $(x_3, x_0, x_1^3)$ .

Cuando  $t \rightarrow 0$ , obtenemos el esquema

$$X_0 = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_3^2, x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1^3 - x_0x_1x_2).$$

Una descomposición primaria para el ideal  $I(X_0)$  es  $I(X_0) = (x_3, x_1) \cap (x_3, x_1^2 - x_0x_2) \cap (x_1, x_0, x_3^2) \cap (x_2, x_1, x_3^2)$ . Por lo tanto, el esquema límite  $X_0$  es una cónica plana y una recta que la corta en los puntos  $[0 : 0 : 1 : 0]$  and  $[1 : 0 : 0 : 0]$  y la dimensión del espacio de estas curvas es 10.

(V) *Tres rectas no coplanares con un punto incrustado en un nodo.* La dimensión del espacio de estas curvas es 10. Este esquema es una especialización de (II). Consideremos los siguientes esquemas:

- (i) la recta  $L$  definida por el ideal  $(x_1, x_0)$ ,
- (ii) el punto  $P$  definido por el ideal  $(x_3, x_0, x_1^3)$ , y
- (iii) la cónica  $C_t$  definida por el ideal  $(x_3, tx_1^2 - x_0x_2)$ .

Si para  $t \neq 0$ , consideramos la familia  $X_t = L \cup \{P\} \cup C_t$ , obtenemos el ideal saturado

$$I(X_t) = (x_1x_3, x_0x_3, x_1^3t - x_0x_1x_2, x_0x_1^2t - x_0^2x_2),$$

y cuando  $t \rightarrow 0$ , obtenemos el esquema

$$X_0 = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_1x_3, x_0x_3, x_0x_1x_2, x_0^2x_2).$$

Una descomposición primaria para el ideal  $I(X_0)$  es  $(x_0, x_1) \cap (x_0, x_3) \cap (x_0^2, x_1, x_3) \cap (x_2, x_3)$ .

Este esquema también es una especialización de (III), y para ver esto basta considerar la familia de ideales

$$I(X_t) = (x_3, x_1x_2) \cdot (x_0, x_2 - tx_1) = (x_0x_3, x_1x_3t - x_2x_3, x_0x_1x_2, x_1^2x_2t - x_1x_2^2).$$

(VI) *Una cónica plana no singular y una recta tangente con un punto incrustado de multiplicidad dos en el punto de tangencia.* El esquema (IV) especializa a este esquema. Sean  $x, y, z$  las coordenadas afines en  $\mathbb{A}^3$ . Si consideramos la familia  $X_t$  formada por los esquemas:

- (i) una cónica  $C$  definida por el ideal  $(z^2, yz, xz, x^2 - y)$ ,
- (ii) la recta  $L_t$  definida por  $(z, y - tx)$ , y
- (iii) el punto  $P$  definido por  $(x - t, y - t^2, z^2)$ .

Cuando  $t \rightarrow 0$ , obtenemos el esquema

$$X_0 = \text{Spec } k[x, y, z]/(z^2, yz, x^2z, x^2y - y^2),$$

y  $(z^2, yz, x^2z, x^2y - y^2) = (z, y) \cap (z, x^2 - y) \cap (y, z^2, x^2)$  es una descomposición primaria del ideal  $I(X_0)$ . La dimensión del espacio de curvas con estas propiedades es 9.

(VII) *Tres rectas planas distintas con puntos incrustados en dos nodos.* Este esquema es una especialización de (IV). Sea

- (i) Sea  $N$  el esquema

$$N = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_2x_3, x_0x_3, x_2^2, x_0x_2).$$

Este esquema tiene polinomio de Hilbert  $2m + 2$ . Una descomposición primaria para el ideal  $I(N)$  es  $(x_2x_3, x_0x_3, x_2^2, x_0x_2) = (x_0, x_2) \cap (x_0, x_2^2, x_3) \cap (x_2, x_3)$ .

- (ii)  $L_t$  es la recta definida por el ideal  $(x_2 + tx_1, x_1 + tx_3)$ . Nótese que para cada  $t \neq 0$ , la recta  $L_t$  interseca a una de las rectas  $(x_0, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ .

Si consideramos la familia  $X_t = N \cup L_t$ , entonces se desprende que

$$I(X_t) = (x_2x_3, x_0x_3, x_2^2, x_0x_2) \cdot (x_2 + tx_1, x_1 + tx_3).$$

Calculando el ideal saturado y tomando el límite cuando  $t \rightarrow 0$  resulta el esquema definido por el ideal

$$(x_2^2, x_0x_2, x_1x_2x_3, x_0x_1x_3) = (x_0, x_1, x_2^2) \cap (x_0, x_2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_0, x_2^2, x_3) \cap (x_2, x_3).$$

La dimensión del espacio de curvas con estas propiedades es 9.

Este esquema es también una especialización de (V), y para verlo basta tomar la familia de ideales

$$I(X_t) = (x_3^2, x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1^3t - x_0x_1x_2).$$

(VIII) *Tres rectas concurrentes no coplanares con un punto incrustado de multiplicidad 1 en el punto de concurrencia.* La dimensión de este espacio es 9. Una familia de esquemas de tipo (V) puede especializar a este esquema. Consideramos la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas:

- (i) la cónica singular  $C$  determinada por el ideal  $(x_0x_3, x_2)$ ,
- (ii) el punto incrustado  $P$  sobre el punto singular de la cónica  $C$ , definido por el ideal  $(x_0, x_2^2, x_3)$ , y
- (iii) una recta  $L_t$  dada por  $(x_0 + tx_1, x_3)$ .

El ideal saturado  $I(X_t)$  es de la forma

$$(x_2x_3, x_0x_3, x_1x_2^2t + x_0x_2^2, x_0x_1x_2t + x_0^2x_2),$$

y cuando  $t \rightarrow 0$  resulta el esquema límite dado por el ideal

$$I(X_0) = (x_0, x_2) \cap (x_0, x_3) \cap (x_0^2, x_2^2, x_3) \cap (x_2, x_3).$$

(IX) *Una recta doble de género  $-1$  y una recta que la con un punto incrustado en algún lugar de la recta doble.* Este esquema es una especialización de (V). Considerando la familia  $X_t$  dada por la unión de esquemas:

- (i) la cónica singular  $(x_3, x_1x_2)$ ,
- (ii) la recta  $L_t(x_3 + tx_0, x_2)$ , y el
- (iii) punto incrustado  $P$  definido por  $(x_0, x_2^2, x_3)$ ,

obtenemos el esquema límite dado por el ideal saturado  $(x_3^2, x_2x_3, x_1x_2^2, x_0x_1x_2)$ . Una descomposición primaria para este ideal es dado por

$$(x_3^2, x_2x_3, x_1x_2^2, x_0x_1x_2) = (x_2, x_3^2) \cap (x_1, x_3) \cap (x_0, x_2^2, x_3).$$

Nótese que  $\deg((x_2, x_3^2)/(x_0, x_2^2, x_3)) = 1$ , es decir, la multiplicidad del punto incrustado es 1. La dimensión de este espacio de curvas es 9.

(X) *Una recta doble de género 0 unión disjunta una recta.* Ésta es una especialización de (III), Proposición 2.9.

(XI) *Tres rectas concurrentes y coplanares con un punto incrustado de multiplicidad dos en su punto común.* Este esquema se puede ver como una especialización del (VI), (VII) and (VIII). Para la primera especialización tomamos la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas, en coordenadas afines:

- (i) una cónica  $(z, x^2 - (x+t)y)$ ,
- (ii) una recta  $(z, y)$ , y
- (iii) el punto incrustado  $(y, z^2, x^2)$ .

El esquema límite  $X_0$  es dado por el ideal saturado

$$(z^2, yz, x^2z, x^2y - xy^2),$$

y una descomposición primaria para este ideal es

$$(z, x) \cap (z, y) \cap (z, x - y) \cap (z^2, yz, xy, y^2, x^2).$$

La dimensión del espacio de curvas de tipo  $X_0$  es 8. Para las especializaciones (VII) a (XI) y (VIII) a (XI), podemos tomar la familia de ideales

$$(x_2^2, x_0x_2, x_1^2x_2 - x_1x_2t, x_0^2x_1 + x_0x_1^2 - x_0x_1t)$$

y

$$(x_3, x_1x_2) \cdot (x_3 + tx_1, x_1 + (1+t)x_2) \cdot (x_3^2, x_2, x_1^2),$$

respectivamente.

(XII) *Una recta doble (plana) y una recta en su plano con un punto incrustado en la intersección  $P$  y otro punto incrustado en algún otro lugar de la recta doble.* No es difícil ver que (VII) especializa a este esquema. Si consideramos la familia de esquemas  $X_t = L_t \cup C \cup \{P_1, P_2\}$ , donde

- (i)  $L_t$  es la recta  $(x_1 + tx_2, x_3)$ ,
- (ii)  $C$  es la cónica singular  $(x_3, x_0x_1)$ , y
- (iii)  $P_1, P_2$  son los puntos incrustado definidos por  $(x_0, x_1, x_3^2)$  y  $(x_1, x_2, x_3^2)$ ,

entonces obtenemos el esquema límite

$$(x_3^2, x_1x_3, x_0x_2x_3, x_0x_1^2) = (x_1^2, x_3) \cap (x_0, x_3) \cap (x_0, x_1, x_3^2) \cap (x_1, x_2, x_3^2).$$

La dimensión de este espacio es 8. Este esquema es también una especialización de (IX), basta elegir una familia de ideales de la forma

$$(x_3^2t + x_2x_3, x_2x_3t + x_2^2, x_1x_3^2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2, x_0x_1x_2).$$

(XIII) *Una recta doble de género 0 y una recta que la corta con un punto incrustado de multiplicidad 1 en el punto de intersección.* La dimensión de este espacio es 8. Éste es una especialización de (VIII). Tomamos la familia  $X_t$  como la unión de los esquemas:

- (i) la cónica  $C$  dada por  $(x_3, x_1x_2)$ ,
- (ii) la recta  $(x_3 + tx_1, x_2)$ , y
- (iii) el punto incrustado  $(x_3, x_2^2, x_1^2)$ .

Cuando  $t \rightarrow 0$  el esquema límite es  $X_0 = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_3^2, x_2x_3, x_1x_2^2, x_1^2x_2)$ .

Una descomposición primaria para el ideal que determina a este esquema es

$$I(X_0) = (x_2, x_3^2) \cap (x_1, x_3) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3).$$

Este esquema es también una especialización de (IX) y (X), y para ver esto tomamos las familias

$$(x_2, x_3^2) \cdot (x_1, x_3) \cdot (x_1 + tx_0, x_2^2, x_3)$$

y

$$(x_1x_2, x_0x_2t - x_2x_3, x_1x_3^2, x_0x_3^2t - x_3^3),$$

respectivamente.

(XIV) *Una recta triple de género  $-1$  sin puntos incrustados.* [32, Proposición 3.6].

(XV) *Una recta doble (plana) y una recta en su plano con un punto incrustado de multiplicidad dos en su intersección.* Ésta es una especialización de (XI), (XII) y (XIII). En el primer caso usaremos coordenadas afines  $x, y, z$  en  $\mathbb{A}^3$ . Consideramos la familia  $X_t$  formada por los siguientes esquemas:

- (i) la cónica plana  $C$  definida por  $(z, xy)$ ,

- (ii) la recta  $L_t$  dada por  $(z, x + ty)$ , y
- (iii) el punto  $P$  definido por  $(z^3, yz, xz, xy, y^2, x^2)$ .

Cuando  $t \rightarrow 0$ , obtenemos el ideal saturado  $I(X_0) = (yz, xz, z^3, x^2y)$ , y una descomposición primaria para éste es  $(x^2, z) \cap (y, z) \cap (x, y, z^3)$ . El espacio de curvas con estas propiedades es de dimensión 7.

Las otras especializaciones se obtienen a partir de las familias de ideales

$(x_3^2, x_1x_3, x_0x_1^2, x_0x_2x_3t + x_0^2x_3)$  y  $(x_3^2t + x_2x_3, x_2x_3t + x_2^2, x_1x_3^2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2, x_1^2x_2)$ , respectivamente.

(XVI) *Una recta triple de género 1 con dos puntos incrustados  $P \neq Q$ .* Este esquema es una especialización de (XII). Es suficiente considerar la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas:

- (i) la recta doble  $(x_1^2, x_3)$ ,
- (ii) la recta dada por  $(x_1 + tx_0, x_3)$ , y
- (iii) los puntos incrustados  $(x_0, x_1, x_3^2)$  y  $(x_1, x_2, x_3^2)$

para obtener el ideal saturado

$$(x_3^2, x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1^3) = (x_1^3, x_3) \cap (x_0, x_1, x_3^2) \cap (x_1, x_2, x_3^2).$$

La dimensión de este espacio es 7.

(XVII) *Una recta triple sobre un cono cuadrado, es decir, dirección normal de primer orden constante, segunda dirección normal variando con un punto incrustado en algún lugar.* La dimensión de este espacio es 7. Es fácil ver que (XIII) especializa a este esquema. Tomamos la familia:

- (i) la recta doble  $(x_2, x_3^2)$  y escribiremos ésta como  $(x_2, x_1x_2 - x_3^2)$  para recordar que está sobre el cono definido por  $x_1x_2 = x_3^2$ ,
- (ii) la recta parametrizada por el ideal  $(x_2 - tx_3, x_3 - tx_1)$ , y
- (iii) el punto incrustado definido por  $(x_1^2, x_2^2, x_3)$ .

El ideal límite es  $(x_2x_3, x_2^2, x_3^3, x_1^2x_2 - x_1x_3^2)$  y una descomposición primaria para éste, es

$$(x_2x_3, x_2^2, x_3^3, x_1^2x_2 - x_1x_3^2) = (x_2x_3, x_2^2, x_1x_2 - x_3^2) \cap (x_1, x_2x_3, x_2^2, x_3^3).$$

La familia de esquemas (XIV) también especializa a este esquema y para demostrar esta afirmación tomamos la familia de rectas triples

$$(x_0^2, x_0x_1, x_1^3, x_0x_2^2 - x_1^2x_2 - tx_1^2x_3).$$

(XVIII) *Una recta triple con un punto incrustado de multiplicidad dos.* Éste es una especialización de (XV). El esquema límite de la familia de esquemas:

- (i) la recta  $L_t$  dada por  $(x_2, x_0 + tx_3)$ ,
- (ii) la recta doble  $L$  definida por  $(x_0, x_2^2)$ , y
- (iii) el punto  $P$  dado por el ideal  $(x_0^2, x_2^2, x_3)$ ,

es definido por el ideal saturado

$$(x_2^2, x_0^2, x_0x_2x_3) = (x_0, x_2^2) \cap (x_0^2, x_2) \cap (x_0^2, x_2^2, x_3).$$

La dimensión de esta familia de esquemas es 6.

Este esquema es también una especialización de (XVI) y (XVII), y esto resulta al considerar las familias

$$(x_3^2, x_1x_3, x_1^3, x_0x_2x_3t + x_0^2x_3)$$

y

$$(x_0x_1, x_0^2, x_1^3, x_1^2x_2t - x_0x_2^2),$$

respectivamente.

(XIX) Una recta triple dada por el cuadrado del ideal de una recta con un punto incrustado en algún lugar. Éste es una especialización de (XVII). Es suficiente considerar la familia  $X_t$  formada por la unión de los siguientes esquemas:

- (i) la recta triple  $(x_2x_3, x_2^2, tx_1x_2 - x_3^2)$ , y
- (ii) el punto incrustado  $(x_1, x_2x_3, x_2^2, x_3^3)$ .

El esquema límite que resulta de esta familia es determinado por el ideal saturado

$$(x_2x_3, x_2^2, x_3^3, x_1x_3^2) = (x_2, x_3^2) \cap (x_2^2, x_3) \cap (x_1, x_2, x_3^3).$$

Nótese que  $(x_2, x_3^2) \cap (x_2^2, x_3) = (x_2^2, x_2x_3, x_3^2)$ , es decir, tenemos una recta triple dada por el cuadrado del ideal de la recta  $(x_2, x_3)$ .

En la Figura 5 presentamos la estratificación casi completa de la componente  $H(3, -1)$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{3m+2}(\mathbb{P}^3)$ . Esta estratificación será suficiente para dar una descripción (mediante el morfismo Hilbert-Chow) de la componente  $\mathcal{C}^3$  de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Los números cercanos a los puntos remarcados indican (como antes) la multiplicidad de los puntos incrustados.

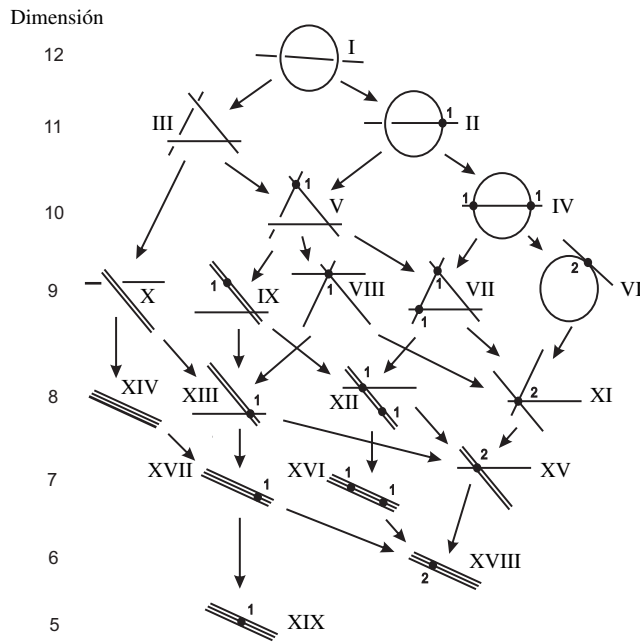


Figura 5. Estratificación de  $H(3, -1)$

Tal vez existan otros espacios localmente cerrados cuyos puntos genéricos sean rectas con estructura de multiplicidad tres en la estratificación de la componente  $H(3, -1)$ , pero para nuestros fines, la estratificación presentada será suficiente.

## 2.6. La estratificación de la componente $H(3, -2)$ del esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$

En la literatura no hemos encontrado una información completa (y al parecer no existe aún) acerca del esquema de Hilbert que parametriza curvas de grado 3 y género aritmético

$-2$  en  $\mathbb{P}^3$ , es decir, del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ , pero sí un poco de la componente conexa que parametriza curvas que no tienen componentes de dimensión cero, a ésta la denotaremos por  $\mathcal{F}$ .

En [32, Proposición 3.4] Nollet prueba que  $\mathcal{F}$  no es irreducible y que contiene dos componentes irreducibles, cuyos miembros genéricos son:

1. *La unión de una recta doble de género  $-3$  y una recta que la corta.* La componente correspondiente tiene dimensión 13.
2. *Tres rectas disjuntas.* La componente correspondiente es de dimensión 12, y contiene los siguientes subespacios localmente cerrados:
  - (i) El espacio de curvas  $W = Z \cup L$  formada por *la unión de una recta doble  $Z$  de género  $-1$  y una recta disjunta  $L$ .* Este espacio irreducible es de dimensión 11.
  - (ii) *Rectas triples de tipo  $(0, 0)$ .* Este espacio de curvas tiene dimensión 10.

Los detalles de estos hechos aparecen en [32]. En nuestra notación, a esta componente la denotaremos por  $H(3, -2)$ .

A través de las especializaciones de curvas con polinomio de Hilbert  $3m + 3$  y más aún, dentro de la componente  $H(3, -2)$  del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$  presentaremos la estratificación casi completa de esta componente.

Con las mismas ideas de la Proposición 2.8 probamos el siguiente:

**Lema 2.10.** *Si  $C \in H(3, -2) \subset \text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ , entonces  $C$  es la unión de tres rectas disjuntas o su especialización.*

*Demostración.* Consideramos nuevamente la curva reducida  $C_{\text{red}}$  de la curva  $C$ . Para todo  $m$  positivo, tenemos que  $P_{C_{\text{red}}}(m) \leq P_C(m)$ . En consecuencia se desprenden los siguientes casos para  $C_{\text{red}}$ :

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 3$  y  $C_{\text{red}}$  reducible. Si  $C_{\text{red}}$  es no plana y no conexa, entonces debe ser la unión de tres rectas disjuntas o la unión disjunta de una cónica singular y una recta. La unión de tres rectas disjuntas tiene polinomio de Hilbert  $3m + 3$ , y por lo tanto  $C_{\text{red}} = C$ . La unión disjunta de una cónica plana singular y una recta tiene polinomio de Hilbert  $(2m+1) + (m+1) = 3m+2$ . En este caso  $C$  debe tener un punto extra, incrustado o separado. Si  $C_{\text{red}}$  es no plana y conexa tal que tenemos tres rectas, entonces  $C$  debe tener dos puntos extras, incrustados o separado. Si  $C_{\text{red}}$  es plana y conexa tal que tenemos tres rectas, entonces  $C$  debe tener tres puntos incrustados.

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 3$  y  $C_{\text{red}}$  irreducible. Si  $C_{\text{red}}$  es plana, entonces se trata de una curva cúbica, en este caso el polinomio de Hilbert es  $3m$ . Por lo tanto, este caso no puede ocurrir. Si  $C_{\text{red}}$  es no plana, entonces resulta ser una curva cúbica alabeada, cuyo polinomio de Hilbert es  $3m + 1$  y nuevamente este caso no ocurre. Nótese que estos casos no pueden ocurrir por cuestiones de dimensión.

El caso  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  plana, e irreducible no ocurre [32, (iii), pág. 32].

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  plana, y reducible. Aquí  $C_{\text{red}}$  es la unión de dos rectas. Como en  $\mathbb{P}^2$  dos rectas distintas siempre se intersectan, se sigue que  $C_{\text{red}}$  es una cónica singular, y por lo tanto una de las rectas debe tener estructura de multiplicidad dos. Así,  $C$  contiene la intersección de una recta y una recta doble. Entonces podemos escribir  $C = C'_{\text{red}} \cup Z$ , donde  $C'_{\text{red}}$  es la unión de una recta y una recta doble, y  $Z$  es la unión de los subesquemas de  $C$  de dimensión cero. Como  $C'_{\text{red}}$  es plana entonces es una degeneración de una cúbica plana (cuyo polinomio de Hilbert es  $3m$ ). Por lo tanto,  $Z$  debe contener tres puntos incrustados de  $C$ . Dado que  $C'_{\text{red}}$  es conexa, si no es plana entonces está contenida en una superficie cuádrlica no singular [28, (vii), pág. 33] y por tanto su polinomio de

Hilbert es  $3m + 3$ , y así  $C'_{\text{red}} = C$ , pero el último caso no es una especialización de tres rectas disjuntas [32, Proposición 3.4]. Si la recta doble en  $C'_{\text{red}}$  es plana y la otra recta no está en su plano entonces  $Z$  consiste de dos puntos incrustados de  $C$ .

Supongamos  $\deg(C_{\text{red}}) = 2$ ,  $C_{\text{red}}$  no plana, y no conexa. En esta situación tenemos dos rectas disjuntas. Puesto que  $\deg(C) = 3$ , una de las rectas debe tener una estructura de esquema de multiplicidad dos (y posiblemente otras componentes de dimensión cero). Si  $C_{\text{red}}$  es la unión disjunta de una recta doble de género  $-1$  y una recta, entonces tiene polinomio de Hilbert  $(2m + 2) + (m + 1) = 3m + 3$ , y así  $C_{\text{red}} = C$ . Si  $C_{\text{red}}$  es la unión disjunta de una recta doble de género  $0$  y una recta, se sigue que su polinomio de Hilbert es  $(2m + 1) + (m + 1) = 3m + 2$ , y así  $C$  debe tener un punto extra, incrustado o separado. Las únicas curvas no singulares de grado dos son: una cónica de género aritmético  $0$ , y una unión disjunta de dos rectas. Claramente, el primer caso no puede ocurrir, y en el segundo caso no podemos tener una recta doble de género  $\leq -2$  debido a que  $P_{C_{\text{red}}}(m) \leq P_C(m)$ . Si las rectas se intersectan entonces  $C_{\text{red}}$  es la intersección de una recta doble de género  $-1$  con una recta. Así,  $C$  tiene un punto incrustado.

Si  $\deg(C_{\text{red}}) = 1$ , entonces  $C_{\text{red}}$  es una recta con estructura de esquema de multiplicidad tres. Si la recta triple es de género  $1$ ,  $C$  debe tener tres puntos extras, incrustados o separados. Si la recta triple es de género  $0$ ,  $C$  tendrá dos puntos extras, cuando la recta triple es de género  $-1$ , la curva  $C$  tendrá un punto incrustado, y si el género es  $-2$ , la recta triple está sobre una superficie cuádrica.  $\square$

La siguiente proposición es una consecuencia de la estratificación de la componente  $H(2, -1)$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ , Sección 2.2 .

**Proposición 2.11.** *La componente  $H(3, -2)$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$  contiene los subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (i) *Una recta doble de género aritmético  $-1$  sin puntos incrustados, unión disjunta una recta. Este subespacio es de dimensión 11.*
- (ii) *Una cónica plana singular con un punto incrustado espacial unión disjunta una recta. Este subespacio es de dimensión 11.*
- (iii) *Una recta doble con un punto incrustado espacial unión disjunta una recta. Este subespacio es de dimensión 10.*

*Demostración.* Sea  $W = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  la unión disjunta de las rectas  $L_1, L_2$  y  $L_3$  en  $\mathbb{P}^3$ , el punto genérico de la componente  $H(3, -2)$ . El esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$  contiene una componente (de dimensión 8) cuyo punto genérico es un par de rectas disjuntas [8]. Si en el abierto principal de la componente  $H(3, -2)$  fijamos cualquiera de las rectas, digamos a  $L_1$ , y pensamos al par de rectas  $L_2$  y  $L_3$  en la componente  $H(2, -1)$  del esquema  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$ , entonces  $L_1 \cup L_2$  especializa a una cónica plana singular con un punto incrustado espacial y también especializa a una recta doble sin puntos incrustados. Por lo tanto, los espacios cuyos puntos genéricos son (i) y (ii) están en  $H(3, -2)$ . De manera similar, como una cónica plana singular con un punto incrustado espacial especializa a una una recta doble con un punto incrustado espacial en  $H(2, -1)$ , se sigue que el espacio con punto genérico (iii) también está en  $H(3, -2)$ , y como consecuencia inmediata (i) and (ii) especializan a (iii) dentro de  $H(3, -2)$ . Claramente, las dimensiones de los espacios representados por (i), (ii) y (iii) son 11, 11 y 10, respectivamente. Esto último se debe a que el espacio de cónicas planas singulares con un punto incrustado espacial, el espacio de rectas dobles sin puntos incrustados, y el espacio de rectas dobles con un punto incrustado espacial en  $\text{Hilb}^{2m+2}(\mathbb{P}^3)$  son de dimensión: 7, 7 y 6, respectivamente.  $\square$



En [32], Nollet probó que la componente  $H(3, -2)$  es de dimensión 12 y que contiene al subespacio de dimensión 10, de rectas triples de tipo  $(0, 0)$ . En el mismo artículo [32] Nollet probó también que una recta triple con ideal total  $(x^2, xy, y^3, xz^{1-g} - y^2w^{-g})$  está en la clausura de cada componente  $H(3, g)$ , para cualquier género  $g$ . Este hecho justificará la presencia del subespacio cerrado de rectas triples en la componente  $H(3, -2)$ .

Los ejemplos de especializaciones de curvas con polinomio de Hilbert  $3m + 3$  que presentaremos enseguida (como en la Sección 2.5), también nos servirán para exhibir la estratificación casi completa de la componente  $H(3, -2)$  dentro del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ , y entonces vía el morfismo birracional Hilb-Chow  $\varphi_4$  obtendremos la descripción de la componente  $\mathcal{C}^4$  de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

(I) *La unión de tres rectas disjuntas.* Como vimos anteriormente, la dimensión de este espacio es 12. En coordenadas proyectivas podemos definir tres rectas disjuntas por un ideal homogéneo de la forma

$$(x_0, x_1) \cdot (x_2, x_3) \cdot (x_0 - x_2, x_1 - x_3).$$

(II) *Una cónica plana singular con un punto incrustado espacial unión disjunta una recta.* Este espacio es de dimensión 11 y es una especialización de (I), Proposición 2.11.

(III) *Una recta doble de género aritmético  $-1$  sin puntos incrustados unión disjunta una recta.* Este esquema es una especialización de (I) y su dimensión es 11, Proposición 2.11.

(IV) *Tres rectas distintas no coplanares con puntos incrustados de multiplicidad 1 en dos nodos.* Éste es una especialización de (II). Sea  $E$  el esquema afín

$$E = \text{Spec } k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2).$$

El soporte de este esquema es la unión de las dos rectas

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 = 0 \text{ (line } L_1), \\ x_1 &= x_3 = 0 \text{ (line } L_2). \end{aligned}$$

El esquema  $E$  tiene un punto incrustado en la intersección de su soporte, a saber, en el punto  $[1 : 0 : 0 : 0]$ , hecho que hace que el esquema sea no plano. El punto incrustado es consecuencia del límite plano de rectas no coplanares.

Sea  $R_t$  la recta en  $\mathbb{P}^3$  definida por el ideal  $(x_0, x_2 - tx_1)$ . Para  $t \neq 0$  ( $t \in \mathbb{K}^*$ ) consideramos la familia  $X_t = E \cup R_t$  cuya dimensión es 11 (Proposición 2.11, (II)). Estamos interesados en el límite plano de la familia  $X_t$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Para tal interés es suficiente considerar el límite plano de la familia  $Y_t = L_1 \cup R_t$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Tenemos:

$$I(Y_0) = (x_0x_2, x_0x_3, x_2x_3, x_2^2) = (x_2, x_0x_3) \cap (x_0, x_2, x_3)^2 = I(R_0 \cup L_1) \cap (x_0, x_2, x_3)^2.$$

Como  $L_2 \cap R_0 = \emptyset$ , el límite en la familia plana  $X_t$  define tres rectas distintas  $L_1, L_2$  y  $R_0$  con puntos incrustados en dos nodos. La dimensión de la familia de esquemas de tipo  $X_0$  es 10.

(V) *Una recta doble con un punto incrustado espacial unión disjunta una recta.* Este esquema es una especialización de (II) y (III), Proposición 2.11.

(VI) *Una recta triple de género aritmético  $-2$  sin puntos incrustados.* Esta curva es una especialización de (III), [32, Proposición 3.3], y la dimensión de este espacio es 10.

(VII) *Tres rectas distintas y planares con puntos incrustados de multiplicidad 1 en los tres nodos.* Este esquema es una especialización de (IV). Para la especialización es suficiente considerar la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas:

- (i) la cónica singular  $(x_2, x_0x_3)$  y el punto incrustado  $(x_0, x_2^2, x_3)$ ,

(ii) la recta  $(x_2 + tx_1, x_1 + tx_3)$  y el punto incrustado  $(x_1, x_2, x_3^2)$   
para obtener el esquema límite determinado por el ideal saturado

$$I(X_0) = (x_2^2, x_1x_2x_3, x_0x_2x_3, x_0x_1x_3, x_0x_1x_2).$$

Una descomposición primaria para este ideal es

$$I(X_0) = (x_0, x_2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_0, x_1, x_2^2) \cap (x_0, x_2^2, x_3) \cap (x_1, x_2^2, x_3),$$

y la dimensión del espacio de esquemas de este tipo es 9.

(VIII) *Tres rectas concurrentes no coplanares con un punto incrustado de multiplicidad dos en el punto de concurrencia.* La familia de estas curvas es de dimensión 9, y el esquema es una especialización de (IV). Consideramos los esquemas:

- (i) la cónica singular  $C$  dada por el ideal  $(x_0x_3, x_2)$ ,
- (ii) la recta  $L_t$  dada por  $(x_0 + tx_1, x_3)$ , y
- (iii) los puntos incrustados  $P_1$  y  $P_2$  (sobre los nodos) definidos por los ideales  $(x_0, x_2^2, x_3)$   $(x_1, x_2, x_3^2)$ , respectivamente.

Para  $t \neq 0$  consideramos la familia  $X_t = C \cup \{P_1, P_2\} \cup L_t$ . Cuando  $t \rightarrow 0$  obtenemos el esquema definido por

$$I(X_0) = (x_0, x_2) \cap (x_0, x_3) \cap (x_0^2, x_2, x_3^2) \cap (x_2, x_3) \cap (x_0^2, x_2^2, x_3).$$

Nótese que  $(x_0^2, x_2, x_3^2) \cap (x_0^2, x_2^2, x_3) = (x_3^2, x_2x_3, x_2^2, x_0^2)$  y

$$\deg(x_0x_2, x_0x_3, x_2x_3)/(x_3^2, x_2x_3, x_2^2, x_0^2) = 2.$$

(IX) *Una recta doble y una recta que la corta con un punto incrustado de multiplicidad 1 en la intersección y otro punto incrustado de multiplicidad 1 en otro lugar de la recta doble.* No es difícil ver que (IV) and (V) especializan a este esquema. Para la primer especialización consideramos la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas:

- (i) la cónica singular  $(x_2, x_0x_3)$ ,
- (ii) la recta  $L_t$  dada por  $(x_2 + tx_1, x_3)$ , y
- (iii) los puntos incrustados  $P_1$  y  $P_2$  definidos por  $(x_0, x_2^2, x_3)$  y  $(x_1, x_2, x_3^2)$ , respectivamente.

Así, obtenemos el esquema

$$(x_2x_3, x_0x_3^2, x_0x_1x_3, x_2^3, x_0x_2^2) = (x_0, x_2) \cap (x_2^2, x_3) \cap (x_0, x_2^3, x_3) \cap (x_1, x_2, x_3^2).$$

La dimensión de este espacio es 9. Para ver que (V) especializa a este esquema basta considerar la familia de ideales

$$(x_1x_2t + x_0x_1, x_1x_2x_3, x_1^2x_3, x_0x_1x_3, x_0^2x_3, x_0^2x_2t + x_0^3).$$

(X) *Una recta triple de género  $-1$  con un punto incrustado.* Esta familia es de dimensión 9. Si consideramos la familia de rectas triples  $(x_0^2, x_0x_1, x_1^3, x_0x_2^3 - x_1^2x_2x_3 - tx_1^2x_3^2)$ , obtenemos el esquema límite definido por el ideal saturado

$$(x_0x_1, x_0^2, x_1^3, x_0x_2^3 - x_1^2x_2x_3) = (x_0x_1, x_0^2, x_0x_2^2 - x_1^2x_3, x_1^3) \cap (x_2, x_0x_1, x_0^2, x_1^3).$$

(XI) *Tres rectas concurrentes y coplanares con un punto incrustado de multiplicidad tres en su intersección.* La dimensión de esta familia es 8. Este esquema se puede ver como una especialización de (VII). Consideremos la familia  $X_t$  formada por los esquemas:

- (i) la cónica plana  $C$  definida por el ideal  $(z, xy)$ ,
- (ii) la recta  $(z, x + y - t)$ ,
- (iii) el punto  $(x, y, z^2)$ , y
- (iv) los puntos incrustados  $(x, y - t, z^2)$  y  $(x - t, y, z^2)$ .

De esta familia obtenemos el esquema límite definido por el ideal

$$I(X_0) = (z, x) \cap (z, y) \cap (z, x + y) \cap (z^2, xy, y^2, x^2).$$

No es difícil ver que este esquema es también una especialización de (VIII) y para esto, basta tomar la familia de curvas

$$I(X_t) = (x_3, x_1x_2) \cdot (x_3 + tx_1, x_1 + (1+t)x_2) \cdot (x_3^2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2).$$

(XII) *Una recta doble de género 0 y otra recta en su plano con un punto incrustado de multiplicidad dos en la intersección y otro punto incrustado en algún otro lugar de la recta doble.* Este esquema es una especialización de (IX), y para tal afirmación basta considerar la familia  $X_t$  dada por la unión de los esquemas:

- (i) la recta doble  $(x_2^2, x_3)$ ,
- (ii) la recta dada por  $(x_0, x_3 + tx_2)$ , y
- (iii) los puntos incrustados  $(x_0, x_2^3, x_3)$  y  $(x_1, x_2, x_3^2)$ .

Entonces, el esquema límite es dado por el ideal saturado

$$(x_3^2, x_2^2x_3, x_0x_2x_3, x_0x_1x_3, x_0x_2^2) = (x_2^2, x_3) \cap (x_0, x_3) \cap (x_0, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1, x_2, x_3^2).$$

En este caso tenemos que

$$\deg((x_3, x_0x_2^2)/(x_0, x_2^2, x_3^2)) = 2 \quad \text{y} \quad \deg((x_3, x_0x_2^2)/(x_1, x_2, x_3^2)) = 1.$$

La dimensión de esta familia de esquemas es 8. Pero también hay una especialización de (VII) a este esquema, y para ver esto basta considerar la familia de ideales

$$(x_3^2, x_0x_2x_3, x_0x_1x_3, x_1x_2x_3t + x_1^2x_3, x_0x_1x_2t + x_0x_1^2).$$

(XIII) *Una recta triple con tres puntos incrustados diferentes de multiplicidad 1 cada uno.* Vamos a usar coordenadas afines  $x, y, z$  en  $\mathbb{A}^3$  para ver que este esquema es una especialización de (VII). Con la familia de esquemas:

- (i) la recta  $(z, y)$ ,
- (ii) la recta definida por  $(z, y - tx)$ ,
- (iii) la recta  $(z, y + tx - 2t)$ , y
- (iv) los puntos incrustados  $(x, y, z^2)$ ,  $(x - 2, y, z^2)$ , y  $(x - 1, y - t, z^2)$ ,

obtenemos el esquema límite definido por el ideal saturado

$$(z^2, yz, y^3, x^3z - 3x^2z + 2xz),$$

y una descomposición primaria para este ideal es

$$(z, y^3) \cap (x - 1, z^2, yz, y^3) \cap (x - 2, z^2, yz, y^3) \cap (x, z^2, yz, y^3).$$

La dimensión de esta familia de esquemas es 8.

(XIV) *Una recta doble y una recta que la corta pero que no están en el mismo plano, con un punto incrustado de multiplicidad dos en la intersección.* Esta familia es de dimensión 8 y el esquema es una especialización de (IX). Para este hecho es suficiente tomar la familia dada por la unión de los esquemas:

- (i) la recta  $(x_0, x_2)$ ,
- (ii) la recta  $L_t$  dada por  $(x_2^2, x_3)$ , y
- (iii) los puntos incrustados  $(x_0, x_2^3, x_3)$  y  $(x_0 + tx_1, x_2, x_3^2)$ .

Así, resulta el ideal saturado

$$(x_2x_3, x_0x_3^2, x_0^2x_3, x_2^3, x_0x_2^2) = (x_0, x_2) \cap (x_2^2, x_3) \cap (x_0^2, x_0x_2, x_2^3, x_2x_3, x_3^2).$$

Nótese que

$$\deg((x_2x_3, x_0x_3, x_2^2)/(x_0^2, x_0x_2, x_2^3, x_2x_3, x_3^2)) = 2.$$

Esto nos dice que la multiplicidad del punto incrustado es 2. Una familia de esquemas (VIII) también especializa a este esquema, y para tal afirmación es suficiente considerar la familia

$$(x_2x_3, x_0x_3^2, x_0^2x_3, x_0x_2^2t + x_0^2x_2, x_0^2x_2t + x_0^3).$$

(XV) *Una recta doble (plana) y una recta en su plano con un punto incrustado de multiplicidad 3 en la intersección.* Este esquema es una especialización de (XI), (XII) y (XIV). Para la primer especialización vamos a usar coordenadas afines  $x, y, z$  en  $\mathbb{A}^3$ . Consideremos la familia  $X_t$  formada por la unión de los esquemas:

- (i) la cónica plana definida por el ideal  $(z, xy)$ ,
- (ii) la recta  $(z, x + ty)$ , y
- (iii) el punto definido por el ideal  $(z^2, xy, y^2, x^2)$ .

Cuando  $t \rightarrow 0$  resulta el esquema límite  $X_0$  definido por el ideal saturado

$$I(X_0) = (x^2, z) \cap (y, z) \cap (x, y^2, z^2) \cap (x^2, y, z^2).$$

Nótese que  $(x, y^2, z^2) \cap (x^2, y, z^2) = (z^2, y^2, xy, x^2)$  y

$$\deg((z, x^2y)/(z^2, y^2, xy, x^2)) = 3.$$

La dimensión de esta familia de esquemas es 7. Para las especializaciones (XII) a (XV), y (XIV) a (XV), consideramos las familias

$$(x_3^2, x_1^2x_3, x_0x_1x_3, x_0x_1^2, x_0x_2x_3t + x_0^2x_3),$$

y

$$(x_2x_3t + x_3^2, x_0x_3^2, x_0x_2x_3, x_0^2x_3, x_0x_2^2, x_2^3t + x_2^2x_3),$$

respectivamente.

(XVI) *Una recta triple de género 1 con dos puntos incrustados, uno de multiplicidad 2 y otro de multiplicidad 1.* Este esquema resulta ser una especialización de (XIII). Si consideramos la familia dada por la unión de los esquemas:

- (i) la recta triple  $(z, y^3)$ , y
- (ii) los puntos incrustados definidos por los ideales  $(x-t, z^2, yz, y^3)$ ,  $(x-2, z^2, yz, y^3)$ , y  $(x, z^2, yz, y^3)$ ;

obtenemos el ideal límite

$$(z^2, yz, y^3, x^3z - 2x^2z) = (z, y^3) \cap (x-2, z^2, yz, y^3) \cap (z^2, yz, x^2, y^3).$$

La dimensión de esta familia de ideales es 7. Además, una familia de esquemas de tipo (XII) también especializa a este esquema. Para obtener este último hecho basta considerar la familia de esquemas

$$(x_3^2, x_0x_2x_3, x_1^2x_3, x_0x_1x_3, x_0x_1^2t + x_1^3).$$

(XVII) *Una recta triple sobre un cono cuádrico, es decir, con dirección normal de primer orden y variando la segunda dirección normal, con un punto incrustado de multiplicidad 2 en algún lugar de la recta triple.* Hay una especialización de (X) a este esquema. De la familia formada por la unión de los esquemas:

- (i) una recta triple  $(x_0^2, x_0x_1, x_1^3, x_0x_2^2 - x_1^2x_2 - tx_1^2x_3)$ , y
- (ii) el punto incrustado  $(x_2, x_0x_1, x_0^2, x_1^3)$ ,

resulta el ideal saturado

$$(x_0x_1, x_0^2, x_1^3, x_1^2x_2^2 - x_0x_2^3) = (x_1^2 - x_0x_2, x_0x_1, x_0^2) \cap (x_2^2, x_0x_1, x_0^2, x_1^3),$$

y la dimensión de este espacio de esquemas es 7. Una familia de esquemas de tipo (XIV) también especializa a este esquema, y el límite de la siguiente familia plana es prueba de ello

$$(x_3, x_2x_3 - x_0^2) \cdot (x_3 - tx_0, x_0 - tx_2) \cdot (x_2, x_3^2, x_0^2x_3, x_0^3).$$

(XVIII) *Una recta triple de género 1 con un punto incrustado de multiplicidad 3.* Este espacio es de dimensión 6, y un esquema de este tipo es una especialización de (XV), (XVI), y (XVII). Para ver la segunda especialización es suficiente considerar la familia  $X_t$  como la unión de los esquemas:

- (i) el esquema definido por el ideal  $(x_1^3, x_3)$ , y
- (ii) los puntos incrustados  $(x_0, x_1^2, x_3^2)$  y  $(x_1, x_0 + tx_2, x_3^2)$ .

Las especializaciones (XV) a (XVIII), y (XVII) a (XVIII) resultan como límites de las familias planas

$$(x_3^2, x_1^2x_3, x_0x_1x_3, x_0^2x_3, x_0x_1^2t + x_1^3),$$

y

$$(x_0x_1, x_0^2, x_1^3, x_1^2x_2^2t - x_0x_3^3),$$

respectivamente.

(XIX) *Una recta triple dada por el cuadrado del ideal de una recta con un punto incrustado de multiplicidad dos en algún lugar de la recta triple.* Éste es una especialización de (XVII), y para demostrar esta afirmación basta considerar la familia  $X_t$  formada por la unión de los esquemas:

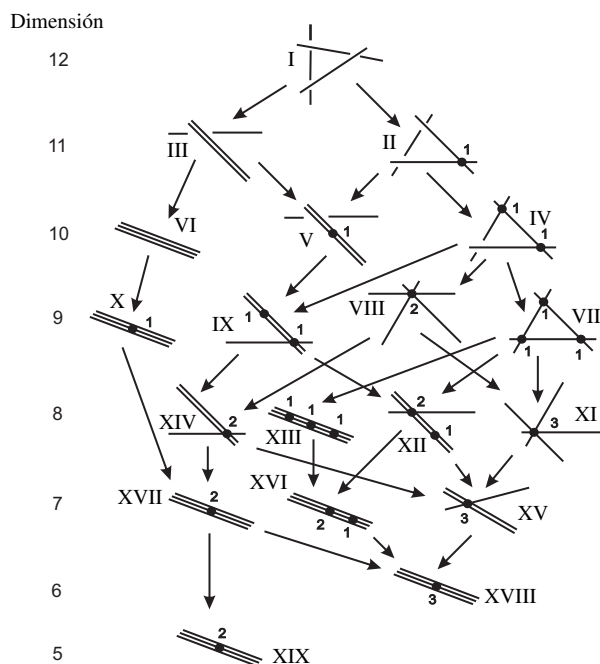
- (i) la recta triple  $(x_3^2, x_0x_3, x_0^2 - tx_2x_3)$ , y
- (ii) el punto incrustado  $(x_2, x_3^2, x_0^2x_3, x_0^3)$ .

El esquema límite que resulta de esta familia está determinado por el ideal saturado

$$(x_3^2, x_0x_2x_3, x_0^2x_3, x_0^2x_2, x_0^3) = (x_0, x_3^2) \cap (x_0^2, x_3) \cap (x_0^2, x_2, x_3^2) \cap (x_0^3, x_2, x_3),$$

donde  $(x_0, x_3^2) \cap (x_0^2, x_3) = (x_0^2, x_0x_3, x_3^2)$ , es decir, una recta triple dada por el cuadrado del ideal de la recta  $(x_0, x_3)$ . La dimensión de esta familia de esquemas es 5.

La descripción intuitiva (geométrica) de la componente  $H(3, -2)$  se muestra en la Figura 6. Cada curva en el diagrama de estratificación representa el punto genérico de cada subespacio localmente cerrado y los números que aparecen en la columna de la izquierda son las dimensiones de dichos espacios. Los puntos remarcados en negro son los puntos incrustados en las curvas.

Figura 6. Estratificación de  $H(3, -2)$ 

En [32, Proposición 3.5] Nollet calcula las componentes del esquema de Hilbert  $H(3, g)$  para  $g \leq -3$ . La descripción de las componentes  $H(3, g)$  para  $g \leq 1$  nos dan la descripción de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Es claro que el interés principal de este artículo ha sido exhibir las estratificaciones de las componentes a nivel de Hilbert correspondientes a las componentes de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Comparar la componente  $H(3, -2)$  con el blow-up del producto simétrico  $\text{Sym}^3 \mathbb{G}(1, 3)$  a lo largo de sus diagonales puede ser un trabajo a futuro, bastante interesante. En [8], Chen, Coskun y Nollet mostraron que en general, para  $p_n(m) = 2 \binom{n-2+m}{m} - \binom{n-4+m}{m}$ , la componente  $H_n$  del esquema de Hilbert  $\text{Hilb}^{p_n(m)}(\mathbb{P}^n)$ , cuyo punto genérico parametriza un par de subespacios lineales de codimensión 2 en  $\mathbb{P}^n$  para  $n \geq 3$  es isomorfa al blow-up del cuadrado simétrico de la Grassmanniana  $\mathbb{G}(n-2, n)$  a lo largo de la diagonal, y que el producto simétrico  $\text{Sym}^2 \mathbb{G}(n-2, n)$  es isomorfo a la componente  $\mathcal{C}_n$  de la variedad de Chow que parametriza un par de ciclos de codimensión 2 y grado 1 en  $\mathbb{P}^n$ , para  $n \geq 3$ . Un resultado similar podría pasar con la componente  $H(3, -2)$  del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ , y la componente  $\mathcal{C}^4$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Ésto parece ser un proyecto ambicioso, pero por el momento, en este artículo sólo estaremos interesados, entre otras cosas, en la estratificación de esta componente.

## 2.7. Las componentes de la variedad de Chow $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$

Recordemos que la variedad de Chow parametriza ciclos y no esquemas. De hecho, la construcción del punto Chow no toma en consideración una estructura de esquema no reducido a parte de la multiplicidad de los esquemas. Aunque se pueden tener muchas estructuras dobles soportadas sobre una recta en  $\mathbb{P}^3$ , la variedad de Chow registra para cualquier caso simplemente la recta de multiplicidad dos. Así, en la variedad de Chow,

la familia de rectas dobles es de dimensión 4, pues esta variedad sólo toma en cuenta el soporte de la estructura doble.

El principal interés de este artículo es estudiar la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ , es decir, la variedad que parametriza 1-ciclos de grado 3 en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ . Para fines prácticos de ahora en adelante sólo diremos la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  en vez de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

Aunque al inicio de este capítulo ya se hizo mención del morfismo birracional Hilbert-Chow, ahora citamos [29, 5.10] formalmente este resultado:

**Teorema 2.12.** *Para  $i = 1, 2, 3, 4$ , la componente  $H(3, i - 3)$  admite de manera natural un morfismo birracional  $\varphi_{5-i}$  a  $\mathcal{C}^{5-i}$ , olvidando la estructura de esquema de la curva, pero reconociendo su clase ciclo.*

Los morfismos  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  y  $\varphi_4$  “olvidan” la estructura de esquema excepto para las multiplicidades de las componentes, por ejemplo cualquier estructura de esquema de multiplicidad 3 sobre una recta  $L$  en  $\mathbb{P}^3$  tiene como imagen un sólo punto, a saber  $3L$ , sobre la componente de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  que le corresponda. Por otro lado, si consideramos el punto  $2L + L' \in \mathcal{C}^2$ , donde  $L$  y  $L'$  son rectas en  $\mathbb{P}^3$  que se intersectan en un punto, entonces los puntos en  $\varphi_1^{-1}(2L + L')$  corresponden a estructuras dobles de género  $-1$  sobre la recta  $L$  (las de dimensión 9 sobre la componente  $H(3, 0)$ ), y de hecho se ha probado, por ejemplo en [34, Sección 3] que en  $H(3, 0)$  hay una familia de dimensión 2 de tales estructuras.

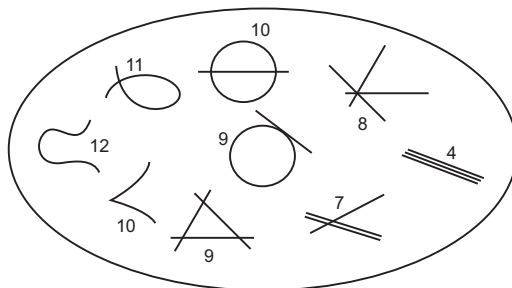
**Definición 2.13.** El lugar de esquemas  $N_{5-i} \subset H(3, i - 3)$  con multiplicidad, es el lugar de curvas que tienen una componente no reducida de dimensión 1.

Del Teorema 2.12 y la descripción de la componente  $H(3, 1)$  en la Sección 2.3, obtenemos la siguiente:

**Proposición 2.14.** *La componente  $\mathcal{C}^1$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  contiene los subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (I) Una cúbica plana no singular.
- (II) Una cúbica nodal.
- (III) Una cónica plana no singular y una recta que la corta en dos puntos.
- (IV) Una cúbica cuspidal.
- (V)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  para toda  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- (VI) Una cónica no singular y una recta tangente a ella.
- (VII)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{P\}$ , donde  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son rectas coplanares en  $\mathbb{P}^3$ .
- (VIII)  $2L + L_1$  tal que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ .
- (IX)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

La descripción (geométrica) intuitiva de la componente  $\mathcal{C}^1$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  aparece en la Figura 7. Los números que aparecen junto a cada curva indican la dimensión del espacio correspondiente.

Figura 7. La componente  $\mathcal{C}^1$ .

**Teorema 2.15.** *El lugar singular de la componente  $\mathcal{C}^1$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  ocurre a lo largo del subespacio localmente cerrado  $D_1 = \{3L : L \text{ es cualquier recta}\}$  y  $D_2 = \{2L + L_1 : L, L_1 \subseteq \mathbb{P}^3 \text{ y } L \cap L_1 \neq \emptyset\}$ .*

*Demostración.* Sea  $(\mathbb{P}^3)^*$  el espacio dual de  $\mathbb{P}^3$ . Consideremos la correspondencia de incidencia  $\Gamma = \{(C, H) : C \subset H\} \subset \mathcal{C}^1 \times (\mathbb{P}^3)^*$ , con las proyecciones  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}^1$  y  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow (\mathbb{P}^3)^*$ . En la proyección  $\pi_2$ , para cada punto  $H \in (\mathbb{P}^3)^*$ , la fibra  $\pi_2^{-1}(H)$  es isomorfa al espacio  $\mathbb{P}^9$  de cúbicas en el plano  $H$ . De hecho, no es duro ver que ésto es un  $\mathbb{P}^9$ -fibrado sobre  $\mathbb{P}^3$  [28, Teorema 3.7.1]. En particular,  $\Gamma$  es no singular (y por lo tanto normal) de dimensión  $\dim \Gamma = \dim \pi_2^{-1}(H) + \dim(\mathbb{P}^3)^* = 9 + 3 = 12$ . Ahora, los puntos de  $\Gamma$  son pares formados por una curva cúbica y un hiperplano que contiene a la curva, y como tal estos puntos pueden ser identificados con puntos del esquema de Hilbert  $H(3, 1)$ . Así, identificamos el morfismo  $\pi_1$  con el morfismo birracional  $\varphi_1$  del Teorema 2.12. El morfismo  $\pi_1$  se colapsa al lugar donde  $C = 3L$  es una recta con multiplicidad 3; específicamente, para cada  $L \in \mathbb{G}(1, 3)$  la subvariedad  $W_L = \{(3L, H) : H \supset L\}$  es mapeada a un sólo punto en  $\mathcal{C}^1$ , a saber, al punto  $3L$ . También, para cada  $L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)$ , con  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ , la subvariedad  $W_{2L_1+L} = \{(2L + L_1, H) : H \supset L, L_1\} \subset \Gamma$  es mapeada a un sólo punto de  $\mathcal{C}^1$ , a saber, al punto  $2L + L_1$ . Sean,

$$E_1 = \bigcup_{L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)} \{(2L + L_1, H) : L, L_1 \subset H\} \text{ y } E_2 = \bigcup_{L \in \mathbb{G}(1, 3)} \{(3L, H) : L \subset H\},$$

subespacios localmente cerrados en  $\Gamma$ , donde  $H$  es cualquier plano en  $\mathbb{P}^3$ . Consideremos también los subespacios  $D_1 = \{3L : L \text{ es cualquier recta}\}$  y  $D_2 = \{2L + L_1 : L, L_1 \text{ son cualesquiera dos rectas y } L \cap L_1 \neq \emptyset\}$ . Es fácil ver que  $\text{codim } E_1 = 5$  y  $\text{codim } E_2 = 7$ , respectivamente. El lugar excepcional del morfismo birracional  $\pi_1$  es  $N_1 = E_1 \cup E_2$ , y es de codimensión  $5 > 2$ . Así,  $\pi_1$  es una contracción pequeña. Por lo tanto, la componente  $\mathcal{C}^1$  es singular a lo largo de la imagen  $\pi_1(N_1) = D_1 \cup D_2$ , ver la nota de la Definición 1.12.  $\square$

La siguiente proposición se sigue del Teorema 2.12 y de la descripción de la componente  $H(3, 0)$ , Sección 2.4.

**Proposición 2.16.** *La componente irreducible  $\mathcal{C}^2$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  contiene los subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (I) Una cúbica alabeada.
- (II) Una cúbica nodal.



- (III) Una cónica y una recta que se intersectan en un punto.
- (IV)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  para toda  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- (V) Una cónica plana no singular y una recta que la corta en dos puntos.
- (VI) Una cúbica cuspidal.
- (VII)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ ,  $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$  y  $L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ .
- (VIII) Una cónica no singular y una recta tangente a ella.
- (IX)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$  y  $L_1, L_2$  and  $L_3$  son no coplanares.
- (X)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$  y coplanares.
- (XI)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ .
- (XII)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

La descripción (geométrica) intuitiva de la componente  $\mathcal{C}^2$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  se muestra en la Figura 8.

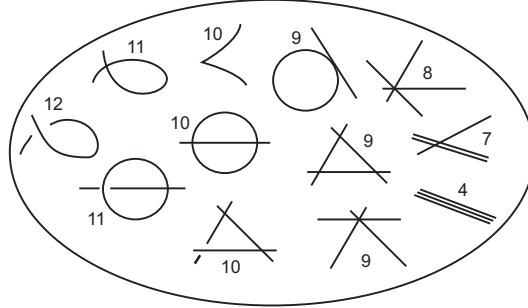


Figura 8. La componente  $\mathcal{C}^2$ .

En [7, Corolario 1.7] Chen probó que la componente  $\mathcal{C}^2$  del espacio de cúbicas alabeadas no es normal. Para la normalización de esta componente  $\mathcal{C}^2$  tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.17.** *La normalización  $\widetilde{\mathcal{C}^2}$  de la componente  $\mathcal{C}^2$  es singular a lo largo de los subespacios localmente cerrados cuyos puntos genéricos son:*

- (XI)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ .
- (XII)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

*Demostración.* Como el morfismo birracional  $\widetilde{\varphi}_2 : H(3, 0) \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}^2}$  es un isomorfismo en codimensión 1, su lugar excepcional  $N_2$  (cuyo punto genérico es una recta doble de género aritmético  $-1$  con una recta que la corta y está en su espacio tangente proyectivo en el punto de intersección) tiene codimensión al menos 2, por [7]. Así,  $\widetilde{\varphi}_2$  es una contracción pequeña, y por lo tanto la imagen  $\widetilde{\varphi}_2(N_2)$  es singular en  $\widetilde{\mathcal{C}^2}$ , ver la nota de la Definición 1.12. Pero esta imagen es exactamente la unión de los subespacios localmente cerrados cuyos puntos genéricos son (XI) and (XII).  $\square$

En [7] se puede ver explícitamente que el lugar excepcional  $N_2$  del morfismo  $\widetilde{\varphi}_2$  consta de los siguientes espacios de curvas:

- (i) Una recta doble  $B$  de género  $-1$  soportada sobre  $L_1$  que corta a  $L_2$  en un punto  $p$  tal que  $L_2 \subset \mathbb{T}_p B$ .
- (ii) Una recta doble  $B$  de género 0 soportada sobre  $L_1$  que corta a  $L_2$  en un punto  $p$  y  $L_2$  no está en el plano que contiene a  $B$ .

- (iii) Una recta doble  $B$  de género 0 soportada sobre  $L_1$  que corta a  $L_2$  en un punto  $p$  con un punto incrustado  $q \neq p$  sobre  $L_1$ , y  $L_2$  está sobre el plano que contiene a  $B$ .
- (iv) Una recta doble  $B$  de género 0 soportada sobre  $L_1$  que corta a  $L_2$  en un punto  $p$  con un punto incrustado en  $p$ , y  $L_2$  está sobre el plano que contiene a  $B$ .
- (v) Una recta triple  $L$  que está sobre un cono cuádrático.
- (vi) Una recta triple (plana)  $L$  con un punto incrustado.
- (vii) Una recta triple (plana)  $L$  cuyo ideal es dado por el cuadrado del ideal que define a  $L$ .

Esto quiere decir que  $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(2L_1 + L_2)$  consiste de las curvas (i), (ii), (iii) y (iv), y  $\widetilde{\varphi}_1^{-1}(3L)$  consiste de las curvas (v), (vi), y (vii) salvo equivalencia proyectiva en  $H(3, 0)$ .

**Proposición 2.18.** *La componente  $\mathcal{C}^3$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  contiene los subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (I) Una cónica plana no singular y una recta disjunta.
- (II)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  pero  $L_1 \cap L_3 = \emptyset$  y  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ .
- (III) Una cónica no singular y una recta que intersecta a la cónica en un punto.
- (IV)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ ,  $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$ , y  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ .
- (V) Una cónica plana no singular y una recta que corta a la cónica en dos puntos.
- (VI)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  para toda  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- (VII) Una cónica no singular y una recta tangente a ella.
- (VIII)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ , y  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son rectas no coplanares.
- (IX)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ , y  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son rectas coplanares.
- (X)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 = \emptyset$ .
- (XI)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ .
- (XII)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

*Demostración.* La prueba se sigue directamente del Teorema 2.12 y de la descripción de la componente  $H(3, -1)$ , Sección 2.5.  $\square$

La descripción intuitiva (geométrica) de la componente  $\mathcal{C}^3$  de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  aparece en la Figura 9.

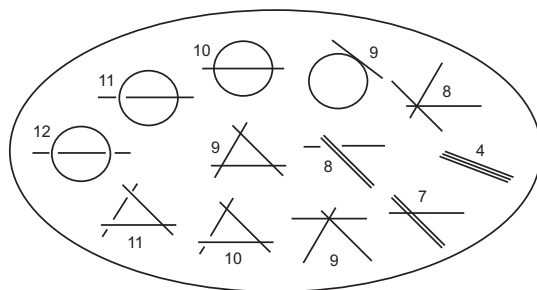


Figura 9. La componente  $\mathcal{C}^3$ .

**Corolario 2.19.** *La compactificación  $\mathcal{C}^3$  del espacio de cónicas planas no singulares unión disjunta una recta, no es normal en la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{C}^3$  fuera normal, el teorema principal de Zariski dice que las fibras del morfismo inducido  $\varphi_3 : H(3, -1) \rightarrow \mathcal{C}^3$  deberían ser conexas. Si tomamos el punto Chow

$L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 = \{P_1\}$ ,  $L_1 \cap L_3 = \{P_2\}$ , y  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$  en  $\mathcal{C}^3$ , se sigue que  $\varphi_3^{-1}(L_1 + L_2 + L_3)$  consiste de dos puntos diferentes en  $H(3, -1)$ , pues se necesita tener un punto incrustado ya sea en  $P_1$  o en  $P_2$  para que  $L_1 + L_2 + L_3$  sea de género aritmético  $-1$ .  $\square$

Si consideramos la normalización  $\widetilde{\mathcal{C}}^3$  de la componente  $\mathcal{C}^3$ , entonces el morfismo  $\varphi_3$  se factoriza a través del morfismo birracional  $\widetilde{\varphi}_3 : H(3, -1) \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^3$ . En este caso también tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.20.** *Con la notación de la Proposición 2.18. La normalización  $\widetilde{\mathcal{C}}^3$  de la componente  $\mathcal{C}^3$  es singular a lo largo de los subespacios localmente cerrados, cuyos puntos genéricos son:*

- (X)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 = \emptyset$ ,
- (XI)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ ,
- (XII)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

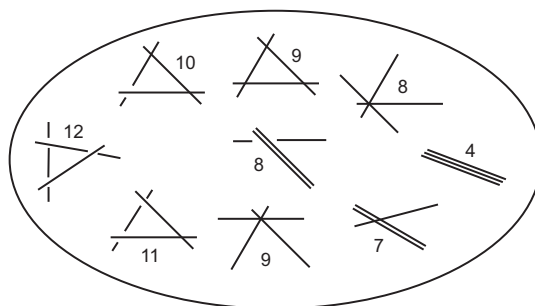
*Demostración.* El lugar excepcional  $N_3$  del morfismo birracional  $\widetilde{\varphi}_3 : H(3, -1) \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^3$  tiene dos componentes,  $M_1$  y  $M_2$ . Un punto genérico de la componente  $M_1$  corresponde a la unión disjunta de una recta doble de género cero y una recta. Un punto genérico de la componente  $M_2$  corresponde a una recta doble de género  $-1$  y una recta que corta a esta recta doble, con un punto incrustado en algún lugar de la recta doble, Sección 2.5. Como  $N_3$  es de codimensión  $\geq 2$ , entonces  $\widetilde{\varphi}_3$  es una contracción pequeña. Por lo tanto, la imagen  $\widetilde{\varphi}_3(N_3)$  es singular en la componente  $\widetilde{\mathcal{C}}^3$ , ver nota de la Definición 1.12.  $\square$

**Proposición 2.21.** *La componente  $\mathcal{C}^4$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$  contiene subespacios localmente cerrados con puntos genéricos:*

- (I)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1, L_2,$  y  $L_3$  son disjuntas.
- (II)  $L_1 + L_2 + L_3$  con  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  pero  $L_1 \cap L_3 = \emptyset$  y  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ .
- (III)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ ,  $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$ , y  $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ .
- (IV)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ , donde  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son rectas no coplanares.
- (V)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_i \cap L_j \neq \emptyset$  para toda  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- (VI)  $L_1 + L_2 + L_3$  tal que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \emptyset$ , donde  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son rectas coplanares.
- (VII)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 = \emptyset$ .
- (VIII)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ .
- (IX)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres en  $\mathbb{P}^3$ .

*Demostración.* La prueba es consecuencia del Teorema 2.12, y la descripción de la componente  $H(3, -2)$ , Sección 2.11.  $\square$

La descripción (geométrica) intuitiva de la componente  $\mathcal{C}^4$  es presentada en la Figura 10. Cada curva representa el punto genérico de un espacio localmente cerrado, y los números son las dimensiones de dichos espacios.

Figura 10. La componente  $C^4$ .

Se sigue entonces el siguiente corolario.

**Corolario 2.22.** *La componente  $C^4$  es singular a lo largo de los subespacios localmente cerrado, cuyos puntos genéricos son:*

- (VI)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 = \emptyset$ ,
- (VII)  $2L + L_1$ , donde  $L$  y  $L_1$  son rectas tales que  $L \cap L_1 \neq \emptyset$ ,
- (VIII)  $3L$ , una recta de multiplicidad tres.

*Demostración.* Si razonamos como en la Proposición 2.11, podemos ver el lugar singular de la componente  $C'$  (cuyo punto genérico representa dos rectas disjuntas) de la variedad  $C_{1,2}(\mathbb{P}^3)$  dentro de la componente  $C^4$  de la variedad  $C_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ . Como el lugar singular de la componente  $C'$  ocurre a lo largo del espacio de rectas dobles, entonces el lugar singular de la componente  $C^4$  ocurre a lo largo de la unión de tres subespacios localmente cerrados que tiene como puntos genéricos a VI, VII y VIII, respectivamente.  $\square$

El siguiente ejemplo junto con el Ejemplo 1.22 son una buena motivación para comprender la intersección entre las componentes de la variedad  $C_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

**Ejemplo 2.23.** Sea  $C$  una curva cúbica alabeada. En coordenadas proyectivas, una cúbica alabeada típica es descrita por un ideal de la forma

$$(x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_3 - x_1x_2).$$

En la Sección 2.4 podemos ver que una familia plana de cúbicas alabeadas se especializa a una cúbica plana nodal, con un punto incrustado en el nodo. Hablando localmente podemos tomar las coordenadas afines

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t, \quad z = at,$$

y considerar el límite cuando  $a \rightarrow 0$ . El ideal que obtenemos es

$$(z^2, yz, xz, y^2 - x^2(x + 1)),$$

el cual define un esquema cuyo soporte es una cúbica nodal con un punto incrustado espacial en el nodo, ver [22, Ejemplo 9,8,4, pág. 259] para más detalles. Por otro lado, en la Sección 2.3 podemos ver que una familia plana de cúbicas planas no singulares se especializa a una cúbica nodal sin puntos incrustados. Este esquema límite tiene exactamente el mismo soporte que el esquema límite de la familia de cúbicas alabeadas. Entonces, desde el punto de vista de la variedad de Chow tenemos que los límites de las dos familias son exactamente el mismo punto Chow, aunque su situación geométrica sea completamente diferente en ambos casos.

En la Figura 11 se muestran, siguiendo las ideas del Ejemplo 2.23 las intersecciones de las componente  $\mathcal{C}^1$ ,  $\mathcal{C}^2$ ,  $\mathcal{C}^3$ , y  $\mathcal{C}^4$  de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

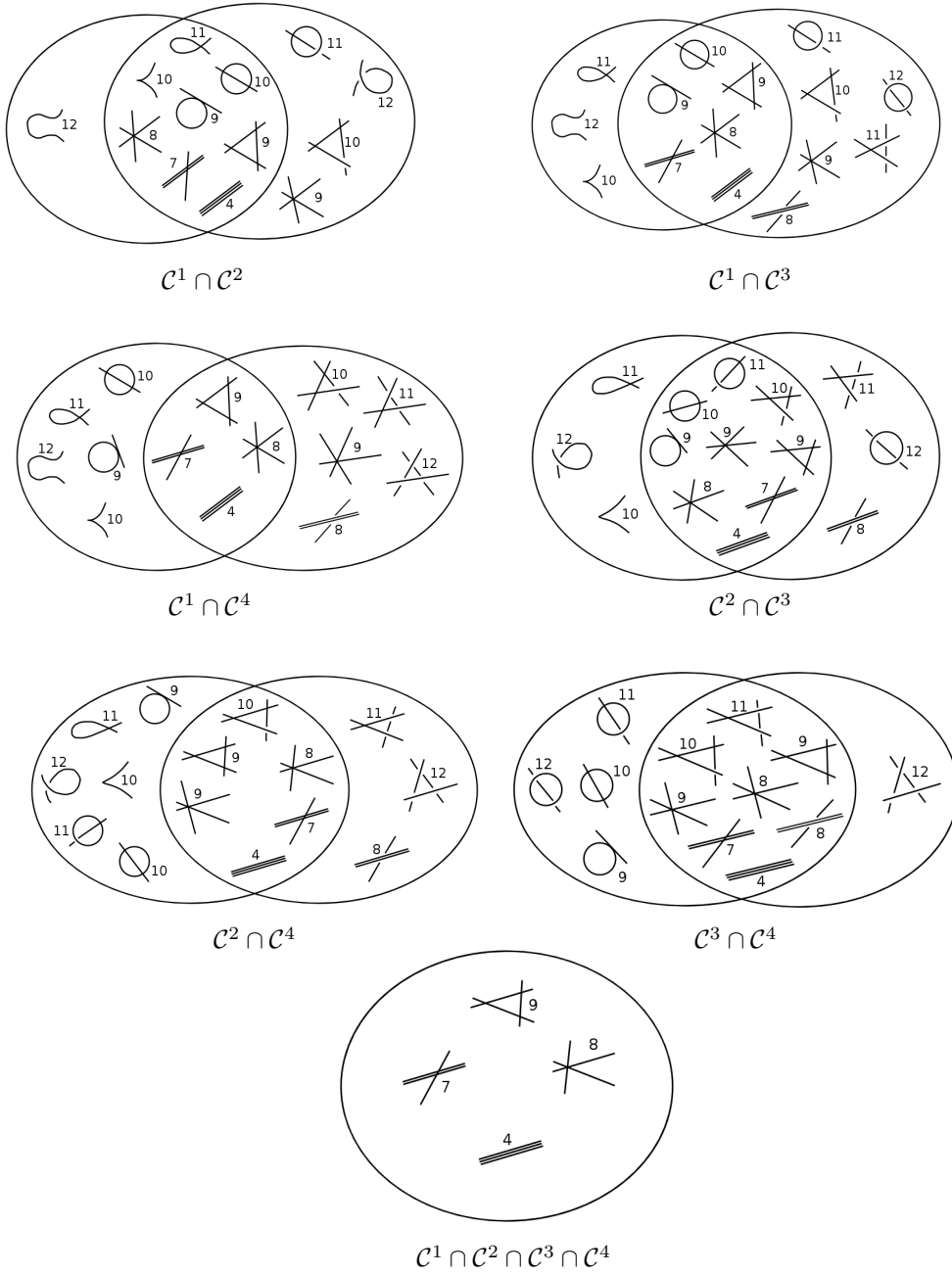


Figura 11. Intersecciones de las componentes de la variedad  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ .

# Capítulo 3

## Perspectivas

Enseguida enlistamos algunos puntos interesantes que pueden resultar exitosos con los calculos, resultados, y motivación de este artículo.

1

El producto simérico se define como:

$$\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3)) = \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)/S_3,$$

donde  $S_3 = \{(), (123), (132), (23), (13), (12)\}$  es el grupo simérico que actúa sobre el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , por permutación de los factores. Los elementos  $(23), (13), (12)$  son involuciones (es decir, elementos de orden dos) en  $S_3$ . En la teoría general se saben dos cosas: (1) cuando  $X$  es una variedad proyectiva, uno puede ver que el producto simérico  $X^n/S_n$  es isomorfo a la variedad de puntos Chow de los ciclos en cuestión; (2) si  $X$  es una variedad de dimensión mayor o igual que 2, el producto simérico  $X^n/S_n$  siempre tiene singularidades.

Luego, la variedad  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  consta de puntos de la forma:

1. Una recta de multiplicidad tres.
2. Una recta  $L$  de multiplicidad dos unión una recta distinta  $L_1$ .
3. Tres rectas distintas,

y las diagonales del producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  son:

- (i)  $\Delta_{123} = \{(L, L, L) : L \in \mathbb{G}(1, 3)\}$
- (ii)  $\Delta_{12} = \{(L, L, L_1) : L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)\}$
- (iii)  $\Delta_{13} = \{(L, L_1, L) : L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)\}$
- (iv)  $\Delta_{23} = \{(L_1, L, L) : L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)\}$

Ahora bien, siguiendo las ideas de [28, Teorema 3.5.1], y del artículo [8], nos gustaría comparar el blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  y la componente  $H(3, -2)$  del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$ .

A continuación expondremos algunos avances sobre esta comparación. Iniciaremos con algunos resultados básicos acerca del producto simérico  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$ .

A través de los estabilizadores del grupo  $S_3$ , a saber,  $(S_3)_{(L,L,L)} = S_3$ ,  $(S_3)_{(L,L,L_1)} = \{(), (12)\}$ ,  $(S_3)_{(L,L_1,L)} = \{(), (13)\}$ , y  $(S_3)_{(L_1,L,L)} = \{(), (23)\}$ , queremos estudiar de manera local las acciones de estos subgrupos sobre el producto  $\mathcal{G} := \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , con la finalidad de usar la información que ya se sabe de la acción del grupo  $S_2$  sobre el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ . Las acciones antes mencionadas son:

- (i)  $(S_3)_{(L,L,L)} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$
- (ii)  $(S_3)_{(L,L,L_1)} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , es decir,  $S_2 \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  ( $(S_3)_{(L,L,L_1)} \cong S_2$ ).
- (iii)  $(S_3)_{(L,L_1,L)} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , es decir,  $S_2 \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

(iv)  $(S_3)_{(L_1, L, L)} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , es decir,  $S_2 \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Como en el producto simétrico  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  los puntos  $(L, L, L_1)$ ,  $(L, L_1, L)$  y  $(L_1, L, L)$  son los mismos, resulta que este producto sólo contiene dos diagonales, a saber:

- (i)  $\Delta_{123} = \{(L, L, L) : L \in \mathbb{G}(1, 3)\}$ ,
- (ii)  $\Delta_{12} = \{(L, L, L_1) : L, L_1 \in \mathbb{G}(1, 3)\}$ .

De hecho,  $\Delta_{123} \subset \Delta_{12}$ .

Para el caso de acciones de grupos finitos sobre una variedad  $X$ , el siguiente teorema determina si el cociente es no singular o no lo es, pero antes de enunciarlo necesitamos la siguiente definición:

**Definición 3.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo  $k$  y sea  $G$  un subgrupo finito del grupo lineal general  $GL(V)$ . Un elemento  $s$  de  $GL(V)$  es llamado *pseudoreflexión* si fija a un subespacio de codimensión 1 y no es la transformación identidad, o equivalentemente, si el kernel  $\ker(s - I)$  tiene codimensión 1 en  $V$ .

Nótese que si  $\dim(V) = n$ , entonces  $V \cong k^n \cong \mathbb{A}^n$ . Se dice que un grupo  $G$  es un grupo pseudoreflexión si  $G$  es generado por el conjunto de todos los elementos pseudoreflexión en  $G$ .

**Teorema 3.2** (Chevalley-Shephard-Todd). *Sea  $X$  una variedad no singular y  $G$  un grupo finito actuando sobre ella. Para  $x \in X$ , sea  $G_x$  el estabilizador de  $x$ . Sea  $p : X \rightarrow X/G_x$  el mapeo cociente. Entonces  $p(x)$  es no singular si y sólo si  $G_x$  es generado por pseudoreflexiones.*

En particular, uno no puede sólo fijarse en el lugar que queda fijo bajo la acción del grupo  $G$  para determinar si el cociente es no singular. Incluso, el lugar fijo podría ser vacío pero el cociente podría todavía ser singular.

Sea  $S_n$  el grupo simétrico actuando sobre  $\mathbb{C}^n$  por permutación de las coordenadas. Entonces, las pseudoreflexiones en  $S_n$  son exactamente las transposiciones  $(i, j)$ , las cuales claramente generan a  $S_n$ . Entonces, el grupo  $S_n$  es un grupo pseudoreflexión complejo. Si  $\mathbb{C}^n = \text{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , en consecuencia el anillo de invariantes  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$  es un anillo de polinomios con generadores  $e_1, \dots, e_n$ , donde

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

es el  $k$ -ésimo polinomio simétrico elemental.

Con el Teorema 3.2 ya en manos, podemos probar fácilmente el siguiente:

**Lema 3.3.** *El producto simétrico  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  es singular a lo largo de sus diagonales.*

*Demostración.* Si  $(L, M, N) \in \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , con  $L, M, N$  rectas distintas en  $\mathbb{P}^3$ , entonces el estabilizador  $(S_3)_{(L, M, N)}$  es trivial (el grupo  $S_3$  actúa libremente sobre las ternas donde las tres entradas son distintas) y por tanto el cociente  $(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)) / (S_3)_{(L, M, N)}$  es automáticamente no singular. Por otro lado, si el punto  $(L, M, N)$  tiene al menos dos entradas repetidas (es decir,  $L = M = N$ ,  $L = M$ ,  $L = N$  o  $M = N$ ), entonces el estabilizador  $(S_3)_{(L, M, N)}$  no es pseudoreflexión, y en consecuencia el Teorema 3.2 asegura que el producto simétrico  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  es singular a lo largo de sus diagonales.  $\square$

**Lema 3.4.** *El producto simétrico  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  es normal.*

*Demostración.* Recuérdese que si  $X$  y  $Y$  son variedades algebraicas se cumple que,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  son no singulares, si y sólo si,  $(x, y) \in X \times Y$  es no singular. En particular, como  $\mathbb{G}(1, 3)$  es no singular, entonces el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  es no singular, y en particular normal. Como el cociente de una variedad normal por un grupo finito sigue siendo normal, resulta que el producto  $\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  es normal.  $\square$

**Lema 3.5.** *La acción del grupo simétrico  $S_2$  sobre la variedad producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  se extiende al blow up  $\text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ , donde  $\Delta$  es la diagonal del producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ .*

*Demostración.* El grupo  $S_2$  actúa sobre el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , y la diagonal  $\Delta$  queda invariante bajo esta acción. Luego, la imagen inversa de  $\Delta$  con respecto al morfismo  $S_2 \times (\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)) \rightarrow \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  es  $S_2 \times \Delta$ . Por lo tanto, aplicando la propiedad universal del Blow up a este morfismo, obtenemos un morfismo  $S_2 \times \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)) \rightarrow \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$  [22, Corolario II.7.15]. Este morfismo satisface las identidades:

$$(\sigma_1 \sigma_2)(L_1, L_2) = \sigma_1(\sigma_2(L_1, L_2)), \quad e(L_1, L_2) = (L_1, L_2),$$

para toda  $(L_1, L_2) \in \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)) - E_\Delta$ . Ahora, como cualesquiera dos morfismo que son iguales sobre un abierto denso son iguales sobre todo el espacio, resulta que las identidades se cumplen para toda  $(L_1, L_2) \in \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ , es decir, el morfismo  $S_2 \times \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)) \rightarrow \text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$  nos da una acción de  $S_2$  sobre  $\text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ .  $\square$

El siguiente Lema junto con el Teorema 3.2 serán fundamentales para ver el lugar no singular del Blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}} \text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$

**Lema 3.6.** *Sea  $X$  cualquier esquema y sea  $H$  algún grupo finito actuando sobre  $X$ . Si  $Y \subset X$  es cualquier subvariedad  $H$ -invariante, entonces*

$$(\text{Bl}_Y X)/H \cong \text{Bl}_{Y/H}(X/H).$$

*Demostración.* Ver [28, Lema 3.5.4].  $\square$

El siguiente resultado es una aplicación del Teorema 3.2 y del Lema 3.6.

**Teorema 3.7.** *EL blow up  $\text{Bl}_\Delta \text{Sym}^2(\mathbb{G}(1, 3))$  es no singular.*

*Demostración.* Por el Lema 3.5, la acción del grupo simétrico  $S_2$  se extiende al blow up  $\text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . EL Lema 3.6 establece que  $\text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))/S_2 \cong \text{Bl}_\Delta \text{Sym}^2 \mathbb{G}(1, 3)$ . Ahora bien, como la involución  $S_2$  actúa sobre  $\text{Bl}_\Delta(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$  dejando fijo al divisor excepcional  $E_\Delta$ , se sigue del Teorema 3.2 que el espacio cociente  $\text{Bl}_\Delta \text{Sym}^2 \mathbb{G}(1, 3)$  es no singular.  $\square$

Siguiendo la idea de la prueba del Teorema 3.7 queremos probar el siguiente:

**Objetivo 3.8.** *El blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}} \text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  es no singular.*

*Demostración.* Con el fin de usar la información que ya se tiene de la acción del grupo  $S_2$  sobre el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  vamos a estudiar la acción del grupo estabilizador  $(S_3)_{(L,L,L_1)}$  sobre  $\mathcal{G}$ , a saber, la acción

$$(S_3)_{(L,L,L_1)} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \text{dada por } (\sigma, (L_1, L_2, L_3)) \mapsto (L_2, L_1, L_3).$$

Como la acción del grupo  $(S_3)_{(L,L,L_1)}$  se extiende al blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{1,2}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ , el Teorema 3.2 implica que el cociente  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$



$\mathbb{G}(1, 3)/(S_3)_{(L, L, L_1)}$  es no singular.

Es un trabajo a futuro encontrar las herramientas complementarias para terminar la prueba del Objetivo 3.8.

**Objetivo 3.9.** *La componente  $H(3, -2)$  del esquema  $\text{Hilb}^{3m+3}(\mathbb{P}^3)$  es isomorfa al blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$ .*

Algunas ideas de la prueba son las siguientes:

Como en [28, Teorema 3.5.1], la idea es seguir los siguientes pasos:

1. Hagamos:  $\mathcal{G}_2 := \text{Bl}_{\Delta_{12}}\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3))$  y  $\mathcal{G}'_2 := \text{Bl}_{\Delta_{12}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . Queremos exhibir como primer paso una función conjuntista

$$\varphi : \mathcal{G}'_2 \longrightarrow H(3, -2).$$

2. Mostraremos que  $\varphi = \varphi \circ \sum$ , donde  $\sum : \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \longrightarrow \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  es una involución en el grupo simétrico  $S_3$ .
3. Construiremos un morfismo de  $\mathcal{G}'_2$  a  $\mathcal{G}_2$ , y concluiremos que  $\mathcal{G}'_2/\sum \cong \mathcal{G}_2$ .
4. Finalmente, concluiremos que la función construida en el paso 1 se extiende a un morfismo regular.

IDEAS: (1) Fuera de la diagonal  $\Delta_{12}$ , si tenemos 3 rectas tales que ninguna configuración de ellas es una recta triple o una recta doble, entonces podemos tomar la unión de las tres rectas como un subesquema de  $\mathbb{P}^3$ , y esto nos definirá un punto en la componente de Hilbert  $H(3, -2)$ . Si de las tres rectas, solamente dos de ellas se intersectan, el esquema que deseamos asociar debe tener un punto incrustado. Si de las tres rectas dos de ellas no se intersectan, el esquema que deseamos asociar debería tener dos puntos incrustados, pero si las tres rectas se intersectan (pero no concurren en un punto), el esquema que asociamos debe de tener tres puntos incrustados. Si las rectas concurren en un punto, entonces el esquema que deseamos asociar debe tener un punto incrustado de multiplicidad dos (si las rectas son no coplanares) o un punto incrustado de multiplicidad tres (si las rectas son coplanares). Como no hay ambigüedad para la elección de puntos cuando dos de las rectas son incidentes, entonces se tiene un mapeo de puntos para  $\varphi$  (fuera de la diagonal  $\Delta_{12}$ ) genéricamente 6 a 1.

Ahora, supongamos que tenemos un punto  $p \in \Delta_{12}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . Dado que ni una recta doble, ni una recta triple están determinadas de manera única en un espacio proyectivo, para hacer una asignación a los puntos de la diagonal  $\Delta_{12}$ , necesitamos hacer el blow up,  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . La idea en mente es hacer este blow up por pedazos, a saber:

- (i)  $\text{Bl}_{\Delta_{123}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ ;
- (ii)  $\text{Bl}_{\{2L \cup L_1\}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ ;
- (iii)  $\text{Bl}_{\{2L \cup L_1\}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . En este caso  $2L \cap L_1 = \{q\}$ .

Analicemos el blow up (i). La fibra de  $\Delta_{123}$  bajo el blow up corresponde a un divisor excepcional dentro del blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ , y la fibra sobre un cada punto de  $\Delta_{123}$  es isomorfo a  $\mathbb{P}^1$ . Como  $\Delta_{123}$  es no singular en el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ , entonces el vector fibrado  $E_{\Delta_{123}} \subseteq \text{Bl}_{\Delta_{123}}\text{Sym}^3(\mathbb{G}(1, 3)) \longrightarrow \Delta_{123}$  es el vector fibrado proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\Delta_{123}}|\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . Dado que el vector fibrado  $E_{\Delta} \longrightarrow \Delta$  ( $\Delta$  es la diagonal en el producto  $\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$ ) es la proyectivización  $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{G}(1, 3)}) \simeq \text{Hom}(V, \mathbb{C}^4/V)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial de dimensión 2. Entonces tenemos que analizar el espacio vectorial  $\text{Hom}(V, \mathbb{C}^4/V) \oplus \text{Hom}(V, \mathbb{C}^4/V)$ .

La matriz que le corresponde a este espacio vectorial es una matriz  $A$  de tamaño  $4 \times 4$  con dos bloques de tamaño  $2 \times 2$  sobre la diagonal y ceros en cualquier otra parte. Nótese que el mapeo cero no es un punto en este espacio proyectivo, así solo consideramos mapeos de rango: 4, 3, 2, 1. Ahora, para identificar un punto  $(L, L, L) \in \Delta_{123}$  con una recta triple necesitamos una estructura (de esquema) triple sobre  $L$ .

Analicemos el blow up (ii). Como el espacio  $\{2L \sqcup L_1\} \subset \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3)$  es no singular, entonces en vector fibrado  $E_{\{2L \sqcup L_1\}} \rightarrow \Delta_{\{2L \sqcup L_1\}}$  es el vector fibrado proyectivo  $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\{2L \sqcup L_1\}} | \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ . Para calcular el blow up sobre el espacio  $\{2L \sqcup L_1\}$  basta hacerlo en el espacio de rectas dobles  $\{2L\}$  y en los casos resultantes pegar la recta disjunta  $L_1$ . El blow up calculado en el Teorema [28, Teorema 3.5.1, pág. 27] podrían ser de mucha ayuda para este caso.

En un trabajo posterior nos gustaría terminar de estudiar la comparación entre la componente  $H(3, -2)$  y el blow up  $\text{Bl}_{\Delta_{12}}(\mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3))$ .

## 2

Otro trabajo interesante basado en los calculos y motivación de este trabajo sería describir las componentes de la variedad de Chow  $\mathcal{C}_{1,4}(\mathbb{P}^3)$ , y en particular decir algo acerca de la componente que parametriza cuatro rectas disjuntas.

## 3

Un problema fundamental, iniciado por Green y Morrison [15] como también por Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [18, Sección 4.3], es describir las ecuaciones que definen a las variedades de Chow. En un trabajo reciente [3] P. Bürgisser, K. Kohon, P. Lairez, y B. Sturmfels presentan una solución computacional definitiva de las ecuaciones de la variedad de Chow para el caso no trivial más pequeño, es decir, para ciclos de dimensión 1 y grado 2 en  $\mathbb{P}^3$ ,  $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$  en nuestra notación. A grandes rasgos el trabajo de ellos consiste en descomponer formas Chow de cónicas planas, formas Chow de pares de rectas, y formas de Hurwitz de superficies cuadráticas, y posteriormente calculan los ideales que definen a cada espacio de formas Chow. Todos los cálculos así como los ideales se pueden ver en [www3.math.tu-berlin.de/algebra/static/pluecker](http://www3.math.tu-berlin.de/algebra/static/pluecker).

Se piensa que hay grandes posibilidades de que se puedan dar las condiciones ideales para resolver el caso de las variedades de ciclos de grado 3 en  $\mathbb{P}^3$  y variedades de ciclos de grado 2 en  $\mathbb{P}^4$ .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

LA VARIEDAD DE CHOW  
DE 1-CICLOS DE GRADO 3  
EN  $P^3$

Tesis que presenta  
**Andrés Piedra Charco**  
Para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias (Matemáticas)**

Asesor: Dr. Felipe de Jesús Zaldivar Cruz

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Felipe de Jesús Zaldivar Cruz

Secretario: Dr. Héctor Díaz Leal Guzmán

Vocal: Dr. Javier Elizondo Huerta

Vocal: Dr. César Lozano Huerta

Vocal: Dr. Jesús Carrillo Pacheco

México, D.F. Enero 2018

 Casa abierta al tiempo <b>UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA</b>		<b>ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA</b>  <small>No. 0055 Matrícula: 212360799</small>	
LA VARIEDAD DE CHOW DE 1-CICLOS DE GRADO 3 EN P <sup>3</sup>		En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 21 del mes de febrero del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:  DR. FELIPE DE JESUS ZALDIVAR CRUZ DR. JESUS CARRILLO PACHECO DR. CESAR LOZANO HUERTA DR. JAVIER ELIZONDO HUERTA DR. HECTOR DIAZ LEAL GUZMAN	
2018   ANDRES PIEDRA CHARCO ALUMNO	Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:  DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)  DE: ANDRES PIEDRA CHARCO		y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:  <p style="text-align: center;"><u>APROBAR</u></p> Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.
	REVISÓ  LIC. JULIO CESAR DE LARA ISSASI DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES	DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI  DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA	
VOCAL  DR. CESAR LOZANO HUERTA	VOCAL CANCELADO DR. JAVIER ELIZONDO HUERTA	SECRETARIO  DR. HECTOR DIAZ LEAL GUZMAN	



## Bibliografía

- [1] B. Angéniol, *Schéme de Chow*, Thèse, Orsay, Paris VI, 1980.
- [2] D. Barlet, “Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d’un espace analytique complexe de dimension finie”. In *Lecture in Mathematics* **482** “*Fontions de plusieurs variables complexes II*”. (S’eminaire F. Norguet), 1-158, Springer-Verlag, Berlín (1975).
- [3] P. Burgisser, K. Kohn, P. Lairez, B. Sturmfels. “Computing the Chow variety of quadratic space curves”. Sixth International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences (MACIS 2015), Berlin, Germany, Nov. 2015. <<http://macis2015.zib.de/>>. <hal-01188213v2>.
- [4] Caley, A. “On the theory of elimination”. *Cambridge and Dublin Math. J.* 3, 116-120 (1848).
- [5] C. Cadman, I. Coskun, K. Jabbusch, M. Joyce, S. J. Kovács, M. Lieblich, F. Sato, M. Szczesny, and J. Zhang, “A first glimpse at minimal model program”. Clay Institute Liftoff Fellowship, 1991.
- [6] D. F. Coray, “Enumerative Geometry of rational space curves”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **46**(1983), 263-287.
- [7] D. Chen, “Mori’s program for the Kontsevich moduli space  $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$ ”. *Int. Math. Res. Not IMRN*, pages Art. ID rnn **067**, 17, 2008.
- [8] D. Chen, I. Cozkun and S. Nollet, “Hilbert scheme of a pair of codimension two linear subspaces”. *Comm. Algebra, To appear*, 2009.
- [9] D. Chen, S. Nollet, “Detaching embedded points”. *Algebra Number Theory*. **6** (2012), No. 4, 731-756.
- [10] W.-L. Chow and B. L. van der Waerden, “Zur algebraischen geometrie”. *IX. Mathematische Annalen*, **113**:692-704, 1937.
- [11] D. Eisenbud, J. Harris, “The dimension of the Chow variety of curves”. *Composition Mathematica* **83.3** 291-310, 1992. <<http://eudml.org/doc/90170>>.
- [12] D. Eisenbud, J. Harris, *The Geometry of Schemes*, New York, Springer-Verlag, Berlín 2000.
- [13] D. Eisenbud, J. Harris, *Intersection Theory in Algebraic Geometry*, New York, Springer-Verlag, Berlín 2013.
- [14] D. Eisenbud and A. Van de Ven, “On the Normal Bundles of Smooth Rational Space Curves”, *Math. Ann.* **256** (1981) 453-463.
- [15] M. Green, I. Morrison, “The equations defining Chow varieties”. *Duke Mathematical Journal* **53**, 733-747, 1986.
- [16] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic curves*, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.
- [17] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV*, Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, **6**, Exp. No. 221, 249-276, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [18] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser . Boston, MA, 1994.
- [19] Grayson, Daniel R., Stillman and Michael E., *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [20] J. C. Greene, The existence of Hilbert schemes, Unpublished senior thesis, Harvard University, 1997.
- [21] R. Hartshorne, *Connectedness of the Hilbert scheme*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scient. no. **29**(1966), 5-48.
- [22] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, New York, Springer-Verlag, Berlín 1997.
- [23] J. Harris, *Algebraic Geometry a First Course*. Graduate Texts in Mathematics 133. Springer-Verlag, Berlín 1992.
- [24] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*. New York, Springer-Verlag, Berlín 1995.
- [25] W.L. Hoyt, “On the Chow Bunches for Different Projective Embeddings of a Complete Variety”. *American Journal of Mathematics*, **88**, 273-278, (1966).
- [26] J. B. Jankans, *Tangent Space of Chow Varieties*, Ph. Thesis, University of California, Irvine, (2013).
- [27] J. Kóllar, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, New York, Springer-Verlag, Berlín 1996.
- [28] Y-H A. Lee, *The Hilbert schemes of curves in  $\mathbb{P}^3$* , Senior Thesis, Harvard University, 2000.

- [29] D. Mumford, John Fogarty and Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Third edition, Springer-Verlag, Berlín, 1994.
- [30] M. Martin-Deschamps and D. Perrin, “Le Schéma de Hilbert des Courbes Gauches localment Cohen-Macaulay”. n’est (presque) jamais réduit, (*Ann. Scient. E.N.S. 4<sup>e</sup> série*, **29**, 757-785 1996).
- [31] M. Nagata, “On the Normality of the Chow Variety of Positive 0–cycles of Degree  $m$  in a Algebraic Variety”. In *Memoirs of the College of Science, University of Tokyo, Series A, XXIX Mathematics No. 2*, 165-176, (1955).
- [32] S. Nollet, “The Hilbert Schemes of Degree Three Curves”. *Ann. Scient. E.N.S (4)*, **30**, 1997, no. 3, 367-384.
- [33] R. Piene and Michael Schlessinger, “On the Hilbert scheme compactification of the space of twisted cubics”. *American J. of Math.*, **107**, no. 4, (1985), 761-774.
- [34] R. Piene, “On the use of parameter and moduli spaces in curve counting”. *Moduli spaces in mathematics and physics*, Oxford, (1998), 57-66, Hindawi Pub. Corp., Cairo, 2001.
- [35] D. Rydh, *Families of cycles and the Chow scheme*, Ph. D. Thesis, May 2008.
- [36] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie* Teubner, Leipzig, 1879.
- [37] J. A. Todd, “On twisted cubic curves which satisfy twelve conditions”. *Proc. Roy. Soc. London Ser A*, **131** (1931), 286-306.
- [38] K. Venkatram, *Birational Geometry of the Space of Rational Curves in Homogeneous Varieties*. Ph. D. Thesis (2011), Massachusetts Institute of Technology.