
UAM-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Posgrado en Matemáticas

**Trayectorias de Polinomios estables
y Diseño de Controles Lineales**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

M. C. Jorge Antonio López Rentería

Director de Tesis:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

México, DF. Octubre del 2013



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UAM-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Programa de Posgrado en Matemáticas

Trayectorias de Polinomios estables
y Diseño de Controles Lineales

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias

(Matemáticas)

Presenta:

M. C. Jorge Antonio López Rentería

Director de Tesis:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

SINODALES

Presidente:

Dr. Luis Verde Star
UAM-I, México, DF.

Secretario:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
UAM-I, México, DF.

Vocal:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez
UAM-I, México, DF.

Vocal:

Dr. Moisés Bonilla Estrada
CINVESTAV, México, DF.

Vocal:

Dr. Guillermo Fernández Anaya
Universidad Iberoamericana, México, DF.

México, DF.

Octubre del 2013

SINODALES

Presidente:

Dr. Luis Verde Star
UAM-I, México, DF.

Secretario:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
UAM-I, México, DF.

Vocal:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez
UAM-I, México, DF.

Vocal:

Dr. Moisés Bonilla Estrada
CINVESTAV, México, DF.

Vocal:

Dr. Guillermo Fernández Anaya
Universidad Iberoamericana, México, DF.

“...Cuando se ha eliminado lo imposible, lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad...”

Sherlock Holmes

“...Los carpinteros dan forma a la madera; Los flecheros dan forma a las flechas; Los sabios se dan forma a sí mismos...”

Buda

“...He fallado una y otra vez en mi vida, por eso he conseguido el éxito...”

Michael Jordan

Agradecimientos

En este apartado lo quiero dirigir para agradecer a todos los que impactaron en cualquier forma a mi formación en el posgrado. Primeramente, deseo agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado como becario. Deseo agradecer al Departamento de Matemáticas, su administración y su planta docente por el apoyo que se me brindó durante mi estancia en el posgrado.

Aprovecho para mostrar mis agradecimientos especialmente a mi director de tesis, Dr. Baltazar Aguirre Hernández, quien fué pilar fundamental en la realización del presente trabajo, así como a mis sinodales por sus valiosos comentarios y correcciones, el Dr. Luis Verde Star, Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez, Dr. Moisés Bonilla Estrada y el Dr. Guillermo Fernández Anaya. Muy especialmente, quiero agradecerle al Dr. Fernando Verduzco González, por su gran aporte en la realización de mi trabajo de tesis.

En lo personal, quiero agradecer a mis compañeros del posgrado con quienes tuve oportunidad de intercambiar conocimientos matemáticos y, sobre todo, por las grandes experiencias que tuvimos.

Por último, y no menos importante, mis grandes agradecimientos a mi esposa María de Los Ángeles Mata González por su gran apoyo y comprensión durante mis ausencias por motivos académicos.

A todos aquellos quienes por descuido, no han sido incluidos y estuvieron brindándome su apoyo, les pido disculpas al igual que mis agradecimientos por todo lo que lograron en mi.

A mi esposa
María de los Ángeles
y mi hija Angelita
por su valioso apoyo
y comprensión

Índice general

Introducción	IX
1. Rayos y segmentos de polinomios Hurwitz	1
1.1. Hurwitz-estabilidad de rayos de polinomios	1
1.2. Direcciones y combinaciones convexas	6
1.3. Hurwitz-estabilidad de segmentos de polinomios	8
2. El máximo intervalo de estabilidad	17
2.1. El criterio del valor propio: el teorema de Bialas (1985)	17
2.2. El criterio de las raíces	22
3. Curvas estables conectoras	33
3.1. Herramienta de topología algebraica	33
3.2. La curva Hurwitz-conectora	36
3.3. La curva Schur-conectora	42
4. Aplicación: control de la bifurcación de Hopf	47
4.1. Formas multilineales y tensores	48
4.2. La bifurcación de Hopf en el plano	49
4.3. Formulación del Problema	50
4.4. Maquinaria para la prueba del teorema 4.3.1	54
4.5. Un Ejemplo	63

Resumen

En este trabajo se estudiarán y analizarán algunos tipos de trayectorias en el espacio de polinomios estables (Hurwitz y Schur). Se presentarán algunas propiedades topológicas de tales trayectorias, así como su relación, conexión y la manera en que impactan en los espacios estables. Se utilizan tales curvas de conexión para diseñar controles escalares de retroalimentación lineal de la forma $u(x) = -c(\mu)^T x$ para controlar la estabilidad en sistemas de control lineal. Llevando tales diseños a sistemas no lineales (sistemas afines), se diseña un tipo de control lineal para provocar y controlar la bifurcación de Hopf.

Introducción

Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ con coeficientes constantes y $x \in \mathbb{R}^n$. Es bien conocido que si el polinomio característico $p_A(t)$ es un polinomio Hurwitz, esto es, todas sus raíces tienen parte real negativa, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si consideramos ahora el sistema controlable

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{2}$$

escrito en forma canónica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y diseñamos un control lineal de la forma $u = -kc^T x$, donde $c^T = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, entonces el sistema controlado es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - kc_n & -a_{n-1} - kc_{n-1} & -a_{n-2} - kc_{n-2} & \cdots & -a_1 - kc_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico del sistema en lazo abierto (1) es $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$, mientras que el sistema en lazo cerrado o sistema con control (2) es $p_c(t) = p_0(t) + kp_1(t)$, con $p_1(t) = c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_n$.

De aquí podemos ver que el problema de diseñar controles estabilizantes $u = -kc^T x$ está relacionado con el problema de saber si un rayo de polinomios es estable.

Se ha generado gran cantidad de información a cerca de los polinomios Hurwitz desde que Maxwell propuso el problema de encontrar condiciones para que un polinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa [66].

En [32] se hizo un estudio bibliográfico de trabajos relacionados con polinomios estables que fueron reportados entre 1987 y 1991. Los libros [3], [15] y [18] son trabajos muy recomendables para consultar acerca de familias de polinomios estables.

Al principio, los investigadores se enfocaron en el problema propuesto por Maxwell y fueron obtenidos criterios como el de Routh-Hurwitz, el teorema de Hermite-Biehler, entre algunos otros de igual importancia. Podemos encontrar la prueba de algunos de esos criterios en los libros [18], [36],[55], y en las tesis [30] y [60]. Después, los científicos empezaron a estudiar otro tipo de problemas relacionados, por ejemplo, el problema de dar condiciones para que una familia de polinomios consista solo de polinomios Hurwitz. Este tipo de problemas tiene su motivación en aplicaciones, pues cuando se modelan fenómenos físicos se deben considerar este tipo de familias polinomiales en presencia de incertidumbres y/o perturbaciones. Tal vez los resultados más famosos acerca de familias de polinomios Hurwitz son los teoremas de Kharitonov [51] y el teorema de las aristas [17], en los cuales se consideran intervalos y politopos de polinomios, respectivamente. Sin embargo, se han estudiado también otro tipo de familias, como por ejemplo, conos y rayos de polinomios (ver [43] y [5]) o segmentos de polinomios (ver por ejemplo [9], [19] y [26]). Recientemente, se ha estudiado la relación entre los polinomios Hurwitz y el producto de Hadamard (ver [61], [62] y [63]).

También se han estudiado propiedades topológicas del espacio de polinomios estables (ver [7], [8] y [44]). En particular, consideraremos el espacio de polinomios reales Hurwitz, denotado por \mathcal{MH}_n^+ , el cual es el espacio topológico de polinomios reales mónicos de grado n con coeficientes reales positivos y raíces con parte real negativa (esto es, raíces en \mathbb{C}^-). En [18] podemos verificar que el espacio \mathcal{MH}_n^+ es un conjunto abierto y en [7], los autores muestran que \mathcal{MH}_n^+ es un haz vectorial trivial suave sobre \mathcal{MH}_{n-k}^+ de rango k , así como la generación de rayos de un polinomio Hurwitz. Dan algunas propiedades topológicas y diferenciales de \mathcal{MH}_n^+ .

Otro muy importante conjunto de polinomios, el cual se estudia en teoría de control de sistemas discretos, es el espacio de polinomios mónicos de grado n con todas sus raíces en el disco unitario; tales polinomios son llamados polinomios Schur y el conjunto entero es denotado por \mathcal{MS}_n . En relación a las familias de polinomios Schur, recientemente se ha podido determinar un intervalo de estabilidad para sistemas de datos de muestras [37] y [38]. En cuanto al aspecto topológico, en [33] y [44] los autores muestran que el espacio \mathcal{MS}_n es contraíble al polinomio t^n y como consecuencia, \mathcal{MH}_n^+ es contraíble al polinomio $(t+1)^n$ via la transformación de Möbius. Así, \mathcal{MH}_n^+ y \mathcal{MS}_n son conexos por trayectorias. En [7] y [8] se estudia a los polinomios con un enfoque de la topología diferencial, mientras que en [10] se hace con un enfoque de topología algebraica. En este último, los autores presentan estructuras homeomorfas entre conjuntos de polinomios, el espacio de sus coeficientes y el espacio de sus raíces. Un enfoque similar se presenta en este trabajo en el capítulo 3.

Entrando en materia para este trabajo, podemos hablar acerca del teorema de intersección con la frontera para familias de polinomios. Muchas pruebas de resultados en estabilidad estan

basadas en este teorema [27] y el principio de exclusión del cero (ver [18] para las pruebas). En este sentido ha sido apreciada la importancia de esos dos resultados. Otro enfoque en el cual se pueden estudiar estos dos teoremas lo podemos ver en [75], en el cual se presentan los llamados mapeos *guardián* y *semiguardián*, quienes son los encargados de informar cuando estamos dentro o fuera de la zona de estabilidad.

Por otra parte, dado un segmento de polinomios $p_0(t) + kp_1(t)$, con k en un conjunto acotado K , existen técnicas para encontrar los valores k_{\min}^- y k_{\max}^+ , los cuales son el mínimo y el máximo valor de $k \in K$ tal que el segmento de polinomios $p_0(t) + kp_1(t)$ es robustamente estable. Al intervalo con extremos k_{\min}^- y k_{\max}^+ se le conoce como máximo intervalo de estabilidad y se le denota como $K = [k_{\min}^-, k_{\max}^+]$. Uno de los métodos se aplica utilizando las matrices de Hurwitz de los polinomios fijos $p_0(t)$ y $p_1(t)$ (ver [19]), donde $\text{grad}(p_0) > \text{grad}(p_1)$ y $p_0(t)$ es Hurwitz estable ; mientras que el otro utiliza el principio de exclusión del cero sobre la familia polinomial $p_c(i\omega)p_0(i\omega)$ (ver [57]).

Existe una relación entre rayos estables y segmentos de polinomios estables: si $p_0(t) + kg(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k \geq 0$, entonces $(\frac{1}{1+k})p_0(t) + (\frac{k}{1+k})g(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k \geq 0$, lo cual significa que la estabilidad del rayo $p_0(t) + kg(t)$ es equivalente a la estabilidad del segmento abierto $[p_0(t), g(t))$. Podemos ver que para $g(t)$ Hurwitz estable obtenemos la estabilidad del segmento cerrado $[p_0(t), g(t)]$.

Para el análisis de la estabilidad robusta de un sistema lineal, debido a la no convexidad del conjunto de polinomio estables Hurwitz, es importante tener métodos computacionales disponibles para verificar la estabilidad de una combinación convexa de polinomios.

Es bien conocido que \mathcal{MH}_n^+ no es convexo [88], por lo que no todo segmento o rayo de polinomios consiste de polinomios Hurwitz. Aún cuando se tengan ambos extremos estables, no se garantiza la estabilidad de todo el segmento debido a la falta de convexidad de \mathcal{MH}_n^+ . En este trabajo, para dos polinomios Hurwitz, nos hemos planteado encontrar una trayectoria que una a ambos polinomios con la propiedad de que esté totalmente contenida en \mathcal{MH}_n^+ . Sin embargo, no hay en la literatura de teoría de control una curva en particular que una a dos polinomios Schur o Hurwitz. Es de particular interés la obtención de esta curva conectora estable para el diseño de controles de retroalimentación lineal.

Debido a estos antecedentes, hemos establecido la relación entre los siguientes problemas:

1. Estabilidad de rayos de polinomios.
2. Estabilidad de segmentos de polinomios.
3. El máximo intervalo de estabilidad.
4. Estabilidad de trayectorias de polinomios.
5. Diseño de controles de estabilidad $u = c(\mu)^T x$, $\mu \in [a, b]$.

El diseño de controles de retroalimentación de estados se ha llevado un poco más allá de los sistemas lineales. Existe una buena cantidad de información e investigación en el problema

de diseño de este tipo de controles para sistemas no-lineales, como los llamados sistemas afines de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3)$$

donde x son las coordenadas locales de una variedad diferenciable M (Variedad del espacio de estados), f y g son campos vectoriales sobre M representados también en coordenadas locales y $u \in \mathcal{U}$ los controles admisibles (ver por ejemplo [49, 80]). En el presente trabajo se toman las coordenadas locales como \mathbb{R}^n . La dirección de investigación en los sistemas no-lineales afines que abordaremos, es con respecto a la bifurcación de estos y el diseño de controles con los cuales podamos controlar dicha bifurcación. Específicamente, aquella bifurcación en la cual para un punto de equilibrio x_0 la matriz Jacobiana $A(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, del sistema (3) posee un par de valores propios $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, y para un valor μ_0 , el sistema posee un par de valores propios imaginarios puros $\lambda_{1,2}(\mu) = \pm i\omega_0$. Entonces, genericamente, un único ciclo límite bifurca del equilibrio x_0 mientras este cambia su estabilidad, esto es, mientras el parámetro μ pasa a través del cero, entonces $\lambda_{1,2}(\mu)$ cruzan el eje imaginario de la zona de estabilidad (\mathbb{C}^-) a la zona de inestabilidad (\mathbb{C}^+) o vice versa. Este fenómeno es llamado bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf [48, 70, 74, 83], a la cual sólomente nos estaremos refiriendo como la bifurcación de Hopf. Existe una amplia literatura acerca del problema de estabilizar un sistema no lineal mediante controles de retroalimentación de estados [1, 2, 11, 14, 23, 34, 40, 41]. En [1], los autores diseñan un control de retroalimentación de estados *no-lineal* para resolver los problemas de estabilización local y del control de la bifurcación de Hopf en sistemas no lineales con dos modos no controlables. En [2], los autores hacen algo similar para sistemas con un sólo punto crítico no controlable. En [40], se estudia a sistemas afines con dos modos no controlables en el eje imaginario, en el cual se presenta el control de la orientación local de las soluciones periódicas, la variedad central, y la estabilización de la bifurcación de Hopf mediante un control de retroalimentación de estados *no-lineal* (ver también [41]). En [82] se derivan condiciones suficientes para asegurar el control de la bifurcación de Hopf en sistemas no lineales con dos modos no controlables en el eje imaginario. Los autores utilizan el teorema de la variedad central para reducir el análisis a sistemas de dimensión dos, donde las expresiones están dadas en términos del campo vectorial original y, la ley de control diseñada (*no-lineal*) tiene un término constante, el cual establece la estabilidad del punto de equilibrio, y los términos cuadráticos determinan la orientación y la estabilidad de las soluciones periódicas cerca del origen. En [34], los autores presentan un control de retroalimentación de estados *lineal* para *estabilizar* un punto de equilibrio de sistemas no lineales con uno y dos modos no controlables. Para ello, utilizan técnicas y resultados de teoría de bifurcaciones. En estos trabajos se diseñan controles de retroalimentación de estados de los cuales debemos resaltar que, para controlar la bifurcación de Hopf, los controles que se proponen son no lineales y si son lineales, sólo estabilizan. Aunque en la literatura se menciona la existencia de controles lineales para controlar la bifurcación de Hopf (ver [1]), no se ha dado uno explícitamente. En este trabajo se diseña un control lineal con el cual se provoca y controla la bifurcación de Hopf.

El resto del presente trabajo esta organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se establece una condición suficiente para que un rayo de polinomios

sea Hurwitz. Tal condición es una desigualdad matricial, la cual provee una sencilla prueba algebraica para la estabilidad de rayos de polinomios. Como una aplicación al sistema estable en lazo abierto, se muestra que existe un cono de ganancias c , tal que la función $u = -kc^T x$ es un control de retroalimentación estabilizante para todo $k > 0$. Se presenta también, una desigualdad similar a las de los rayos para la estabilidad de segmentos de polinomios, y finalmente, se da una aproximación de mínimo extremo izquierdo. Estos resultados fueron reportados en [9] y [6].

En el capítulo 2, se presentan los resultados de Bialas para resolver el problema de encontrar el máximo intervalo de estabilidad. Se desarrolla una técnica más sencilla que la de Bialas para ese mismo problema. Basado en este resultado, también se aborda el problema de estimación del mínimo extremo izquierdo. El contenido de este capítulo está basado en artículo [57].

En el capítulo 3, se prueba la existencia de una curva Hurwitz-conectora y una curva densa en \mathcal{MH}_n^+ , mediante combinaciones convexas lineales y homotopía de caminos. Se exhiben algunas propiedades del mapeo de Viète y otras versiones de la transformación de Möbius para probar la existencia de una curva Schur-conectora y su respectiva curva densa. Este capítulo está basado en los trabajos [58] y [59].

En el capítulo 4, utilizando las ideas en la construcción de la curva Hurwitz-conectora, se diseña un control lineal para llevar al sistema no lineal (3) a presentar la bifurcación de Hopf. Además, se dan condiciones necesarias para controlar esta bifurcación, es decir, para controlar el signo de la velocidad de cruce y del primer coeficiente de Lyapunov¹.

¹No confundir al primer coeficiente de Lyapunov con el exponente Lyapunov pues con el primero podemos determinar la estabilidad de un sistema de ecuaciones ordinarias, según su signo; mientras que el exponente de Lyapunov de un sistema dinámico es el número que caracteriza el grado de separación entre dos trayectorias muy cercanas

Capítulo 1

Rayos y segmentos de polinomios Hurwitz

En este capítulo se aborda el problema de determinar la estabilidad de un rayo de polinomios reales $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ y/o el segmento convexo de polinomios reales $(1 - \mu)p_0(t) + \mu p_1(t)$, $\mu \in [0, 1]$, con $p_0(t)$ estable y en el caso del segmento, $p_1(t)$ también estable. Se presentan algunas técnicas para resolver tales problemas, así como una prueba sencilla para calcular el mínimo extremo izquierdo del rayo $P(t, k)$. Este capítulo está basado en los trabajos reportados en [5] y [9].

1.1. Hurwitz-estabilidad de rayos de polinomios

Dado que el criterio de Routh-Hurwitz y resultados relacionados usualmente llegan a ser complicados cuando se aplican en estudios teóricos, aquí se presenta un enfoque para obtener caracterizaciones de rayos de polinomios Hurwitz en términos de los coeficientes correspondientes. Más específicamente, obtenemos condiciones suficientes para un conjunto cónico $p_0 + K$ que consiste solo de polinomios estables, donde p_0 es un polinomio estable de grado n y K es un cono convexo de polinomios de grado (n) , $(n - 1)$ o $(n - 2)$. La condición algebraica suficiente es la desigualdad matricial (1.2), la cual es una prueba algebraica simple. Se verá que el rayo de polinomios dado por $p_0(t) + kp_1(t)$ ($k \geq 0$), donde $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$ y $p_1(t) = 5t^2 + 11t + \frac{13}{2}$, consiste de polinomios Hurwitz que no satisfacen las condiciones tipo Rantzer propuestas en [43] pero satisfacen la condición (1.2) propuesta en esta sección. Los resultados principales de esta sección fueron obtenidos en el trabajo de Aguirre, Ibarra y Suárez [5].

Como una aplicación del resultado antes mencionado, estudiaremos el problema de diseño de controles de retroalimentación de alta ganancia de la forma $u = -kc^T x$, donde $c \in \mathbb{R}^n$, y $k > 0$. Esto es, se establecen condiciones suficientes sobre $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ para asegurar que el polinomio correspondiente $c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_n$ sea Hurwitz (desigualdad (1.2)). Más aún, para todo c que satisfaga esas condiciones, se prueba que el sistema a lazo cerrado correspondiente es asintóticamente estable para todos los valores del parámetro de alta ganancia k .

1.1.1. Prueba de Hurwitz-estabilidad para rayos de polinomios

Dado un polinomio real $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, defínase la matriz

$$D_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

y sean $D_{(n,n-1)}^i$, $D_{(n,n-1)}^j$ el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de la matriz $D_{(n,n-1)}$, respectivamente.

Teorema 1.1.1. *Sea $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio de Hurwitz. Sea $D_{(n,n-1)}$ la matriz correspondiente definida por (1.1). Si el vector c es una solución al sistema de desigualdades lineales*

$$D_{(n,n-1)} c \succ 0, \quad (1.2)$$

entonces el polinomio $f(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$ es Hurwitz, donde el símbolo \succ (\prec) significa que toda componente de un vector dado es positivo (negativo).

Demostración. Presentaremos la prueba para n par (hacemos $n = 2m$), el caso cuando n es impar es análogo. Sea $F(t) = p_0(-t)$. Entonces $F(t)$ es un polinomio real de grado n con todas sus raíces en \mathbb{C}^+ . Considere el polinomio $F(t)f(t)$, el cual es un polinomio de grado $2n - 1$. Note que $p_0(i\omega)$ y $f(i\omega)$ pueden ser escritos como

$$p_0(i\omega) = P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2)$$

y

$$f(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2),$$

donde P , Q , p y q son polinomios reales. Tenemos

$$F(i\omega)f(i\omega) = [P(\omega^2) - i\omega Q(\omega^2)][p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)] = [Pp + \omega^2 Qq] + i\omega[Pq - Qp].$$

Después de algunos cálculos obtenemos

$$(Pq - Qp)(\omega^2) = - \sum_{i=1}^n (D_{(n,n-1)}^i c) \omega^{2(n-i)}.$$

Note la correspondencia entre los coeficientes de este polinomio y las desigualdades lineales (1.2). Dado que $D_{(n,n-1)}^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$, se sigue que $F(i\omega)f(i\omega)$ no interseca el eje real para $\omega > 0$. Sean l y r el número de raíces de $F(t)f(t)$ contenidos en \mathbb{C}^- y \mathbb{C}^+ , respectivamente. Dado que $F(i\omega)f(i\omega)$ no interseca al eje real para $\omega > 0$, $F(t)f(t)$ no tiene raíces en el eje

imaginario. Sea $\theta(\omega)$ el argumento de $F(i\omega)f(i\omega)$. Denotemos por $\Delta_0^\infty\theta = \theta(\infty) - \theta(0)$ el cambio neto en el argumento. Es conocido que $\Delta_0^\infty\theta = (\pi/2)(l-r)$ ([39], p. 174; [45], p. 406). El hecho que $F(i\omega)f(i\omega)$ no intersekte al eje real para $\omega > 0$ implica que $|\Delta_0^\infty\theta| < \pi$. Por otro lado, sabemos que al menos n raíces están en \mathbb{C}^+ , entonces $r \geq n$ y $l \leq n-1$. De aquí que, $l-r < 0$. Adicionalmente, $l-r$ es un número impar, pues $l+r = 2n-1$. Así que, la igualdad $\Delta_0^\infty\theta = (\pi/2)(l-r)$ implica que $\Delta_0^\infty\theta = -\pi/2$. Por lo tanto, $l-r = -1$, de donde se sigue que $r = n$ y $l = n-1$. De aquí que, las $n-1$ raíces de $f(t)$ están contenidas en \mathbb{C}^- , como se pretendía. \square

Observación 1.1.1. *Note que la conclusión en el teorema 1.1.1 implica que $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \succ 0$ ó $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \prec 0$ y dado que de la primer desigualdad en (1.2) se sigue que $c_1 > 0$, tenemos que necesariamente $c \succ 0$.*

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.3)$$

donde la pareja (A, b) es controlable, $x, b \in \mathbb{R}^n$ y $u = -kc^T x$ es una función de control. Sin pérdida de generalidad, supóngase que la pareja (A, b) está dada en la forma canónica (ver [16]),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Es bien conocido que uno de los valores propios del sistema en lazo cerrado $\dot{x} = Ax - kbc^T x$, digamos λ_1 , tiene la propiedad que $\lambda_1/k \rightarrow c_1$ cuando $k \rightarrow \infty$ y el resto converge a las raíces del polinomio $f(t) = c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots + c_n$ [87, 77]. Por otro lado, si $c \succ 0$ es una solución de (1.2), se sigue del teorema 1.1.1 que el polinomio $f(t)$ es Hurwitz. Por lo tanto, el sistema a lazo cerrado es asintóticamente estable en el origen para k suficientemente grande. Esto muestra que el control $u(t) = -kc^T x$ es una retroalimentación de alta ganancia. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado que muestra una propiedad adicional del control y que puede aplicarse en el diseño de retroalimentaciones estabilizantes de alta ganancia.

Teorema 1.1.2. *Considere el sistema lineal (1.3) escrito en la forma canónica (1.4). Suponga que A es Hurwitz, esto es, el polinomio en lazo abierto $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ es Hurwitz. Si $c \succ 0$ es una solución de (1.2), entonces, para toda $k > 0$, el control $u(t) = -kc^T x$ es un control estabilizante.*

Demostración. Supóngase que n es par (el caso para n impar es análogo). Sea $n = 2m$ y $k > 0$. Es suficiente ver que el polinomio en lazo cerrado es Hurwitz. Sean $P_c(t)$ y $P_0(t)$ los polinomios en lazo cerrado y en lazo abierto, respectivamente. Considere el polinomio $p_c(t)p_0(-t)$ y sean $\theta_1(\omega)$ y $\Delta_0^\infty\theta_1 = \theta_1(\infty) - \theta_1(0)$ el argumento y el cambio neto en el argumento de $p_c(i\omega)p_0(-i\omega)$, respectivamente. Siguiendo ideas similares como en la prueba del teorema 1.1.1 obtenemos que $\Delta_0^\infty\theta_1 \leq \pi$. Por otro lado, $p_c(0)p_0(0) = a_{2m}(a_{2m} + kc_{2m})$, el cual es un número real positivo. De aquí que $\theta_1(0) = 0$. Ahora, analizaremos $\theta_1(\omega)$ cuando ω es grande. Primero, tenemos para ω grande, $p_c(i\omega)p_0(-i\omega) \approx \omega^{4m} - ic_1\delta\omega^{4m-1}$. Por lo tanto, $p_c(i\omega)p_0(-i\omega)$ está en el cuarto cuadrante cuando ω es muy grande y

$$\frac{\text{Im}[p_c(i\omega)p_0(-i\omega)]}{\text{Re}[p_c(i\omega)p_0(-i\omega)]} \rightarrow 0$$

cuando $\omega \rightarrow \infty$. De aquí que, $\theta_1(\infty) = 2s\pi$, donde s es un entero. Entonces, dado que $\Delta_0^\infty\theta_1 = \theta_1(\infty) - \theta_1(0) = 2s\pi$ y $|\Delta_0^\infty\theta_1| \leq \pi$, obtenemos que $\Delta_0^\infty\theta_1(\omega) = 0$. Por lo tanto, el polinomio $p_c(t)p_0(-t)$ tiene tantas raíces en \mathbb{C}^- como en \mathbb{C}^+ . Dado que tal polinomio es de grado $2n$, entonces hay n raíces en \mathbb{C}^+ . En efecto, las raíces contenidas en \mathbb{C}^+ corresponden a las raíces de $p_0(-t)$, pues el polinomio en lazo abierto es un polinomio Hurwitz. Finalmente, se sigue que las n raíces en \mathbb{C}^- corresponden a las raíces de $p_c(t)$, lo cual significa que $p_c(t)$ es Hurwitz. \square

Observación 1.1.2. *En la introducción se señaló que en general, la retroalimentación de alta ganancia no necesariamente es un control estabilizante para todo valor del parámetro k e ilustramos este hecho con un ejemplo. Esto amplía la importancia de los teoremas 1.1.1 y 1.1.2.*

El teorema 1.1.1 puede ser escrito en términos de polinomios como sigue.

Corolario 1.1.1. *Dado un polinomio de Hurwitz $p_0(t)$, sea G la familia de polinomios $p_1(t) = c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \dots + c_n$ tal que $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \succ 0$ satisface la desigualdad (1.2). Se asegura que para cada $p_1(t) \in G$, el rayo de polinomios $p_0(t) + kp_1(t)$, $k \geq 0$, es Hurwitz.*

Observación 1.1.3. *Estos resultados pueden ser extendidos a los casos cuando $\text{grad}(p_1(t)) = n$ y $n - 2$. La condición (1.2) debe satisfacerse por una matriz como la de abajo. Dado un polinomio real $p_0(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$, definimos la matriz real $D_{(n,n)} \in \mathcal{M}_{n \times (n+1)}$ como*

$$D_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

y denotemos por $D_{(n,n)}^i$ el i -ésimo renglón de $D_{(n,n)}$. Si $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})^T \succ 0$ es una solución de $D_{(n,n)}c \succ 0$, entonces el polinomio $p_1(t) = c_1t^n + c_2t^{n-1} + \dots + c_{n+1}$ es Hurwitz

y, más aún, $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz para toda $k > 0$. Para el caso cuando el grado de $p_1(t)$ es $n - 2$, definamos la matriz $D_{(n,n-2)} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}$ como

$$D_{(n,n-2)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})^T \succ 0$ es solución para $D_{(n,n-2)}c \succ 0$, el polinomio $p_1(t) = c_1 t^{n-2} + c_2 t^{n-3} + \cdots + c_{n-1}$ es Hurwitz y, más aún, $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz para toda $k > 0$.

Ejemplo 1.1.1. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-6,5k, -11k, -5k)x. \quad (1.5)$$

La matriz $D_{(3,2)}$ y su inversa $D_{(3,2)}^{-1}$ están dadas por

$$D_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & 6 & -1 \\ 0 & -6 & 11 \end{pmatrix}, \quad D_{(3,2)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2,0167 & 0,1833 & 0,0167 \\ 1,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$ es el polinomio a lazo abierto y $p_1(t) = 5t^2 + 11t + \frac{13}{2}$ es el polinomio que proporciona el sistema a lazo cerrado. Consecuentemente, $p_0(t) + kp_1(t)$, $k \geq 0$, es un rayo de polinomios Hurwitz. Por otro lado, veremos que no es posible verificar que este rayo consiste de polinomios Hurwitz utilizando las condiciones tipo Rantzer de [43], como se afirmaba en la introducción de la sección.

Las condiciones en [43] son las siguientes: supóngase que $p_0(t)$ es un polinomio Hurwitz y $p_1(t)$ es un polinomio semiestable¹, entonces el rayo de polinomios $p_0(t) + kp_1(t)$ consiste de polinomios Hurwitz si se asegura una de las cuatro condiciones siguientes:

(i) La diferencia $d = p_1 - p_0$ satisface

$$\frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} < 0, \quad \omega \in \{\omega > 0 | d(i\omega) \neq 0\}.$$

(ii) Los polinomios p_0, p_1 tienen al menos una raíz en el semiplano izquierdo abierto y

$$\frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} < \left| \frac{\sin(2 \arg[d(i\omega)])}{2\omega} \right|, \quad \omega \in \{\omega > 0 | d(i\omega) \neq 0\}.$$

¹Un polinomio es semiestable si la parte real de sus raíces no es estrictamente positiva.

(iii) Los polinomios p_0, p_1 tienen al menos una raíz en el semiplano izquierdo abierto y

$$\frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} \leq 0, \quad \omega \in \{\omega > 0 | d(i\omega) \neq 0\}.$$

(iv) Los polinomios p_0, p_1 tienen al menos dos raíces en el semiplano izquierdo abierto y

$$\frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} \leq \left| \frac{\sin(2 \arg[d(i\omega)])}{2\omega} \right|, \quad \omega \in \{\omega > 0 | d(i\omega) \neq 0\}.$$

Para este ejemplo $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$, $p_1(t) = 5t^2 + 11t + \frac{13}{2}$, son polinomios Hurwitz y, $d(t)$, $d(i\omega)$ y $\arg(d(i\omega))$ están dados por

$$d(t) = (p_1 - p_0)(t) = -t^3 - t^2 + \frac{1}{2}, \quad d(i\omega) = \frac{1}{2} + \omega^2 + i\omega^3, \quad \arg(d(i\omega)) = \arctan\left(\frac{\omega^3}{\frac{1}{2} + \omega^2}\right).$$

No es difícil verificar que no se cumplen (i)-(iv).

$$(1) \quad \frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} = \frac{\frac{3}{2}\omega^2 + \omega^4}{(\frac{1}{2} + \omega^2)^2 + \omega^6} > 0 \text{ para toda } \omega \in \{\omega > 0 | d(i\omega) \neq 0\} = (0, \infty).$$

Entonces (i) no se satisface.

$$(2) \quad \sin(2 \arg[d(i\omega)]) = \frac{2\omega^3(\frac{1}{2} + \omega^2)}{(\frac{1}{2} + \omega^2)^2 + \omega^6}, \text{ de aquí que } \frac{\partial \arg(d(i\omega))}{\partial \omega} < \frac{\sin(2 \arg[d(i\omega)])}{2\omega} \text{ lo cual se satisface si y solo si}$$

$$\frac{\frac{3}{2}\omega^2 + \omega^4}{(\frac{1}{2} + \omega^2)^2 + \omega^6} < \frac{2\omega^3(\frac{1}{2} + \omega^2)}{2\omega[(\frac{1}{2} + \omega^2)^2 + \omega^6]},$$

esto es, $\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. Así, no se cumple (ii).

(3) De las desigualdades anteriores es inmediato que (iii) y (iv) tampoco se satisfacen.

En consecuencia, aunque el rayo $p_0(t) + kp_1(t)$, $k \geq 0$, consista de polinomios Hurwitz, no es posible verificar este hecho utilizando las condiciones tipo Rantzer obtenidas en [43].

1.2. Direcciones y combinaciones convexas

En la derivación de resultados analíticos, regularmente es más conveniente describir el polinomio con un parámetro de incertidumbre $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$, utilizando la noción de combinaciones convexas. Si $K[k^-, k^+]$, la familia de polinomios asociada tiene como puntos extremos $p(t, k^-)$ y $p(t, k^+)$. Más aún, dado cualquier $k \in K$, podemos ver a $p(t, k)$ como

un punto en el segmento de línea que una a $p(t, k^-)$ y $p(t, k^+)$ en el espacio de polinomios; expresamos $p(t, k)$ como una combinación convexa de $p(t, k^-)$ y $p(t, k^+)$ tomando

$$\mu = \frac{k^+ - k}{k^+ - k^-}$$

y escribiendo

$$\tilde{p}(t, k) = \mu p(t, k^-) + (1 - \mu)p(t, k^+).$$

Inversamente, para todo $\mu \in [0, 1]$, le corresponde algún $k \in [k^-, k^+]$ tal que $\tilde{p}(t, \mu) = p(t, k)$. Dado este isomorfismo entre $k \in K$ y $\mu \in [0, 1]$ es equivalente si trabajamos con la familia original de polinomios o trabajamos con una familia equivalente $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}(\cdot, \mu) : \mu \in [0, 1]\}$ definida por

$$\tilde{p}(t, \mu) = \mu \tilde{p}_0(t) + (1 - \mu)\tilde{p}_1(t),$$

donde $\tilde{p}_0(t)$ y $\tilde{p}_1(t)$ son polinomios fijos. Esto es, $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$. Por supuesto que los polinomios fijos asociados a $\tilde{\mathcal{P}}$ no son los mismos asociados a \mathcal{P} .

Observación 1.2.1 (Representación usando una dirección). *Para la familia de polinomios descrita por $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ y $k \in [k^-, k^+]$, sean $f(t) = p_0(t) + k^-p_1(t)$ y $g(t) = p_0(t) + k^+p_1(t)$. Tomemos $\mu = \frac{k-k^-}{k^+-k^-}$ y definamos*

$$p(t, \mu) = f(t) + \mu g(t).$$

Entonces la familia $\hat{\mathcal{P}} = \{p(\cdot, \mu) : \mu \in [0, 1]\}$ representa a la misma familia original.

Motivados por el análisis de robustez de sistemas con incertidumbre en los parámetros, se han propuesto diferentes enfoques para estudiar la estabilidad de segmentos de polinomios ([19, 20, 24, 26, 72]). La pregunta es como encontrar condiciones sobre los polinomios estables $p_0(t)$ y $p_1(t)$ tal que el segmento de polinomios descrito por $p(t, \mu) = \mu p_0(t) + (1 - \mu)p_1(t)$ es estable para toda $\mu \in [0, 1]$. El primer resultado donde fueron obtenidas las condiciones necesarias y suficientes, fué el *teorema de Bialas*, que se presentan en la sección 2.1.2 del capítulo 2 (ver [15, 19, 35]). Un enfoque diferente, en términos del dominio de la frecuencia, el cual es conocido como el *lema del segmento*, fué establecido por Chapellat y Bhattacharyya (ver [26] y [18]). En este lema, la estabilidad de $p(t, \mu)$ es equivalente a ciertas condiciones que deben ser satisfechas por la parte par y la parte impar asociados a los polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$. Por otro lado, N. Bose obtuvo un método para determinar la estabilidad de segmentos de polinomios complejos y es conocido como *prueba de Bose* [21].

Basado en los criterios anteriores, han sido desarrollado varios algoritmos para probar eficientemente la estabilidad de segmentos de polinomios. Se utilizó el lema del Segmento para desarrollar un algoritmo en [24]. En la misma dirección, más recientemente, en [47] se obtuvo un procedimiento para la estabilidad Hurwitz de combinaciones convexas de polinomios en un número finito de operaciones. Relacionado al trabajo de Bose [22], en [20] hay una prueba que puede ser utilizada para determinar la estabilidad de segmentos de polinomios complejos. Además, En [24] se obtuvieron las bien conocidas *condiciones de Rantzer* (ver [43]).

1.3. Hurwitz-estabilidad de segmentos de polinomios

En esta sección exponemos las condiciones para la estabilidad de segmentos de polinomios que fueron presentadas en [9].

1.3.1. Prueba de Hurwitz-estabilidad para segmentos de polinomios

El objetivo principal de esta subsección es obtener condiciones para la estabilidad de segmentos de polinomios. Siguiendo las ideas expuestas en la sección 1.1.1, aquí estudiaremos el problema de obtener condiciones algebraicas simples para verificar la estabilidad de un segmento de polinomios. Es importante notar que el enfoque propuesto en esta sección, provee condiciones suficientes usadas cuando $\text{grad}(p_0) = n$ y $\text{grad}(p_1) = n, n-1, n-2$ en contraste con el Lemma del Segmento, donde se supone $\text{grad}(p_0) = \text{grad}(p_1)$. Como se vió en [16], no es necesario estudiar los casos cuando $\text{grad}(p_1(t)) < n-2$.

Este enfoque para el caso $\text{grad}(p_0) = \text{grad}(p_1)$ es como sigue: Dado un polinomio Hurwitz estable $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, sea $p_1(t) = c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \dots + c_{n+1}$ un polinomio arbitrario de grado n . Definamos la matriz

$$E_{(n,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Si los polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$ son Hurwitz estables y el vector $c = (c_1, \dots, c_{n+1})^T \succeq 0$ satisface el sistema de desigualdades lineales

$$E_{(n,n)} c \succeq 0, \quad (1.7)$$

entonces, la combinación convexa $\lambda p_0(t) + (1-\lambda)p_1$ es Hurwitz estable para toda $\lambda \in [0, 1]$. El símbolo $\succeq 0$ ($\preceq 0$) significa que toda componente de un vector dado es no negativa (no positiva) y el símbolo \succeq significa que toda componente de un vector dado es no negativa, pero existe al menos una componente positiva.

Se puede obtener un resultado similar para el caso $\text{grad}(p_1(t)) = n-1$. En este caso la matriz $E_{(n,n-1)} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ está definida por

$$E_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

y la desigualdad correspondiente es

$$E_{(n,n-1)c} \succneq 0. \quad (1.9)$$

También estudiaremos la situación cuando es conocido uno de los polinomios Hurwitz, digamos $p_0(t)$, y el problema es encontrar todos los posibles $p_1(t)$ tales que $\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)$ es Hurwitz para toda $\lambda \in [0, 1]$.

Finalmente, se utiliza el mismo enfoque para estimar el mínimo extremo izquierdo de un segmento estable, esto es, dados los polinomios Hurwitz estables $p_0(t)$ y $p_1(t)$ tales que el vector de coeficientes de p_1 satisface (1.7) ó (1.9), entonces se encontró un número $k_0 < 0$ tal que $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $k > k_0$. El problema de calcular el mínimo extremo izquierdo fué resuelto por Bialas [5], y se aborda en el capítulo 2. Aunque k_0 es solo una estimación de k_{\min} , lo interesante del presente enfoque es que k_0 es obtenido por un cálculo algebraico sencillo. Contrario a la estabilidad de segmentos donde se han reportado una buena cantidad de trabajos, el caso de rayos con relación al mínimo extremo izquierdo, podemos mencionar solo el trabajo de Bialas, de donde se ve la importancia de la subsección 1.3.2, y los trabajos [5] y [9].

Los resultados principales de esta sección están basados en el siguiente lema, donde se dan condiciones suficientes para que un polinomio real sea Hurwitz.

Lema 1.3.1. *Sean $F(t)$ y $f(t)$ polinomios reales de grado n , tales que $f(t)$ tiene coeficientes positivos, $f(0) \neq 0$ y las raíces de $F(t)$ están contenidas en \mathbb{C}^+ . Considere el polinomio de grado $2n$ dado por $F(t)f(t)$. Si $F(i\omega)f(i\omega) \neq 0$ y $F(i\omega)f(i\omega)$ no interseca a \mathcal{L} para toda $\omega > 0$, donde \mathcal{L} es una línea recta en el plano complejo que pasa a través del origen, entonces todas las raíces de $f(t)$ están en \mathbb{C}^- .*

Demostración. Suponga que n es par (el caso impar es análogo). Sea $n = 2m$ y sean $F(t), f(t)$ dados por

$$\begin{aligned} F(t) &= b_0 t^{2m} + b_1 t^{2m-1} + \dots + b_{2m}, \\ f(t) &= d_0 t^{2m} + d_1 t^{2m-1} + \dots + d_{2m}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_0 > 0$, entonces $b_{2m} > 0$ también, dado que las raíces de $F(t)$ están en \mathbb{C}^+ . Sean l y r el número de raíces de $F(t)f(t)$ contenidas en \mathbb{C}^- y \mathbb{C}^+ , respectivamente. Sea $\theta(\omega)$ el argumento de $F(i\omega)f(i\omega)$. Denotemos por $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \theta(\infty) - \theta(0)$ el cambio neto en el argumento. Dado que $F(t)f(t)$ no tiene raíces en el eje imaginario, tenemos que $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \frac{\pi}{2}(l - r)$ ([13, pag. 174]; [23, pag. 406]). El hecho de que $F(i\omega)f(i\omega)$ no interseca a \mathcal{L} para $\omega > 0$, implica que $|\Delta_0^\infty \theta(\omega)| \leq \pi$.

Ahora, analizaremos $\theta(\infty) - \theta(0)$ cuando ω es muy grande. Primero, tenemos que para ω muy grande, $F(i\omega)f(i\omega) \approx b_0 d_0 \omega^{4m} - i[b_1 d_0 + b_0 d_1] \omega^{4m-1}$. Así que, $Re[F(i\omega)f(i\omega)] > 0$ y $\frac{Im[F(i\omega)f(i\omega)]}{Re[F(i\omega)f(i\omega)]} \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. Dado que $F(0)f(0) = b_{2m}d_{2m} > 0$, se sigue que $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \theta(\infty) - \theta(0) = 2s\pi$, donde s es un número entero. Dado que $F(i\omega)f(i\omega)$ no interseca a \mathcal{L} para toda $\omega > 0$, entonces $|\Delta_0^\infty \theta(\omega)| \leq \pi$, y por tanto tenemos que $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = 0$.

Por lo tanto, el polinomio $F(t)f(t)$ tiene tantas raíces en \mathbb{C}^- como en \mathbb{C}^+ . Dado que tal polinomio tiene grado $2n$, hay n raíces en \mathbb{C}^+ . En efecto, las raíces en \mathbb{C}^+ corresponden a $F(t)$. De aquí se sigue que las n raíces en \mathbb{C}^- corresponden a las raíces de $f(t)$, lo cual significa que $f(t)$ es Hurwitz estable. ■

Observación 1.3.1. *Casos particulares del lema 1.3.1, son situaciones en las cuales \mathcal{L} es el eje real o el eje imaginario. Cuando \mathcal{L} es uno de esos ejes, las matrices asociadas son fáciles de calcular. Nuestros resultados principales están basados en esos dos casos.*

En el siguiente teorema aplicamos el lema 1.3.1, cuando \mathcal{L} es el eje imaginario.

Teorema 1.3.1. *Considere los polinomios Hurwitz estables $p_0(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$ y $p_1(t) = c_1t^n + c_2t^{n-1} + \dots + c_{n+1}$. Si $c = (c_1, \dots, c_{n+1})^T \succeq 0$ es una solución de (1.7), entonces, para toda $\lambda \in [0, 1]$, el polinomio $\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)$ es Hurwitz estable.*

Demostración. Supongamos que n es par (el caso impar es análogo). Sea $n = 2m$ y $\lambda \in [0, 1]$. Sean p, q, P, Q los polinomios

$$\begin{aligned} p(L) &= c_{2m+1} - c_{2m-1}L + c_{2m-3}L^2 + \dots + (-1)^m c_1 L^m \\ q(L) &= c_{2m} - c_{2m-2}L + \dots + (-1)^{m-1} c_2 L^{m-1} \\ P(L) &= a_{2m} - a_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1} a_2 L^{m-1} + (-1)^m L^m \\ Q(L) &= a_{2m-1} - a_{2m-3}L + \dots + (-1)^{m-1} a_1 L^{m-1}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Entonces se asegura que

$$\begin{aligned} [\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1](i\omega) &= [\lambda P + (1 - \lambda)p](\omega^2) + i\omega[\lambda Q + (1 - \lambda)q](\omega^2) \\ p_0(i\omega) &= P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2). \end{aligned}$$

Considere el polinomio $p_0(-t)[\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)]$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} p_0(-i\omega)[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1](i\omega) &= P(\omega^2)[\lambda P(\omega^2) + (1 - \lambda)p(\omega^2)] \\ &\quad + \omega^2 Q(\omega^2)[\lambda Q(\omega^2) + (1 - \lambda)q(\omega^2)] \\ &\quad + i\omega(1 - \lambda)[P(\omega^2)q(\omega^2) - Q(\omega^2)p(\omega^2)]. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} p_0(-i\omega)[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1](i\omega) &= \lambda[P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2)] \\ &\quad + (1 - \lambda)[P(\omega^2)p(\omega^2) + \omega^2 Q(\omega^2)q(\omega^2)] \\ &\quad + i\omega(1 - \lambda)[P(\omega^2)q(\omega^2) - Q(\omega^2)p(\omega^2)]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dado que

$$P(\omega^2)p(\omega^2) + \omega^2 Q(\omega^2)q(\omega^2) = \sum_{i=1}^{n+1} (E_{(n,n)}^i \cdot c) \omega^{2(n+1-i)},$$

y el vector $c \succeq 0$ es una solución del sistema de desigualdades (1.7), el polinomio $P(\omega^2)p(\omega^2) + \omega^2Q(\omega^2)q(\omega^2)$ no tiene raíces positivas. Consecuentemente, para toda $\omega > 0$, $p_0(-i\omega)[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p_1](i\omega)$ no intersecta al eje imaginario. Finalmente, dado que $p_0(-t)$ y $\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)$ satisfacen las hipótesis del lema 1.3.1, tenemos que el polinomio $\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $\lambda \in [0, 1]$. \square

Observación 1.3.2. *El teorema 1.3.1 puede ser extendido al caso cuando $\text{grad}(p_1(t)) = n - 1$. Para probar este resultado necesitamos redefinir los polinomios $p(L)$ y $q(L)$ como*

$$\begin{aligned} p(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \cdots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1}, \\ q(L) &= c_{2m-1} - c_{2m-3}L + \cdots + (-1)^{m-1}c_1L^{m-1}, \end{aligned}$$

y la prueba sigue los mismos pasos que el teorema 1.3.1.

Por otro lado, usando el mismo método, el teorema 1.3.1 no puede ser extendido al caso cuando $\text{grad}(p_1(t)) = n - 2$, dado que la matriz correspondiente $E_{n,n-2}$ en $\mathcal{M}_{n \times (n-1)}$ esta dada por

$$E_{(n,n-2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

pero la primer desigualdad implica que $-c_1 \geq 0$, la cual no se satisface, pues $c_1 > 0$.

Observación 1.3.3. *En la subsección 1.1.1 se obtuvieron condiciones similares a (1.7) para la estabilidad de rayos de polinomios. Existe una relación obvia entre los rayos estables y los segmentos de polinomios estables: si $p_0(t) + kg(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k \geq 0$, entonces $(\frac{1}{1+k})p_0(t) + (\frac{k}{1+k})g(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k \geq 0$, lo cual significa que la estabilidad del rayo $p_0(t) + kg(t)$ es equivalente a la estabilidad del segmento abierto $[p_0(t), g(t)]$. Observe que para $g(t)$ Hurwitz estable obtenemos la estabilidad del segmento cerrado $[p_0(t), g(t)]$.*

En la prueba del Teorema 1.3.1, cuando analizamos la función compleja $p_0(-i\omega)[\lambda p_0(t) + (1 - \lambda)p_1(t)](i\omega)$ definida en (1.11), la línea recta \mathcal{L} fué el eje imaginario. Una posibilidad diferente sería considerar \mathcal{L} como el eje real. Tal análisis fué hecho en la subsección 1.1.1, y los resultados fueron dados en términos de una desigualdad similar $D_{(n,j)}c \succ 0$, $j = n, n - 1, n - 2$, dada por las siguientes matrices:

$$D_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

para el caso cuando $\text{grad}(p_1(t)) = n$, mientras que

$$D_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

para el caso $\text{grad}(p_1(t)) = n-1$; y para $\text{grad}(p_1(t)) = n-2$, la matriz $D_{(n,n-2)} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}$ es

$$D_{(n,n-2)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Reescribiendo esos resultados para segmentos de polinomios en lugar de rayos, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Considere el polinomio Hurwitz estable $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$. Si $p_1(t)$ es un polinomio Hurwitz estable con $\text{grad}(p_1(t)) = n, n-1$, o $n-2$, y su vector de coeficientes c satisface el sistema de desigualdades lineales*

$$D_{(n,j)} c \succneq 0, \quad j = n, n-1, n-2, \quad (1.16)$$

dependiendo del grado de $p_1(t)$, entonces el polinomio $\lambda p_0(t) + (1-\lambda)p_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $\lambda \in [0, 1]$.

1.3.2. El mínimo extremo izquierdo

En esta subsección, dados los polinomios Hurwitz estables $p_0(t)$ y $p_1(t)$, nos interesa el problema de estimar el mínimo $k_{\min}^- < 0$ tal que $p_0(t) + kp_1(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k > k_{\min}^-$ (ver [19]). Usando los resultados presentados en las secciones anteriores, encontraremos un número $k_0 < 0$ tal que $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $k > k_0$, si el vector de coeficientes de p_1 satisface (1.7) o (1.9). k_0 es una estimación de k_{\min}^- ($k_0 > k_{\min}^-$), pues no sabemos si k_0 es el número más pequeño con esta propiedad. El problema de calcular el mínimo extremo izquierdo k_{\min}^- fué resuelto por Bialas [19], y lo abordamos en el capítulo 2. Con el enfoque que se presenta a continuación, k_0 se obtiene por un calculo algebraico.

Considere el polinomio

$$p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t),$$

donde $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ está dado. Suponga que $p_0(t)$ es un polinomio Hurwitz estable, y sea $E_{(n,n)}$ la matriz correspondiente definida como en (1.6). Si el vector de coeficientes $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})^T \succeq 0$ del polinomio $p_1(t) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i t^{n+1-i}$ es una solución del sistema de desigualdades lineales (1.7), entonces $p_0(t) + k p_1(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k \geq 0$. En la sección 2.1.2 se proba que

$$k_{\min}^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-[-H^{-1}(p_0)H(p_1)]}, \quad (1.17)$$

donde $H(p_0), H(p_1)$ son las matrices de Hurwitz de los polinomios p_0 y p_1 , respectivamente, y $\lambda_{\min}^-[-H^{-1}(p_0)H(p_1)]$ es el mínimo valor propio negativo de la matriz $-H^{-1}(p_0)H(p_1)$. Observe que, numéricamente (1.17) no es fácil de calcular, pues los cálculos implican resolver un problema de valores propios de orden n . Enseguida, daremos la técnica para obtener una estimación de k_{\min}^- .

Defínase la matriz

$$Z_{(n,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -2a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -2a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

y denotemos por $Z_{(n,n)}^i$ el i -ésimo renglón de la matriz $Z_{(n,n)}$ y sea $a = (1, a_1, \dots, a_n)^T$.

Teorema 1.3.3. *Sea $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio Hurwitz estable. Sea $E_{(n,n)}$ la matriz correspondiente definida por (1.6). Si $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})^T \succeq 0$ es un vector solución del sistema de desigualdades lineales (1.7), cada componente de $E_{(n,n)}c$ es positiva, y el polinomio $p_1(t)$ está dado por $p_1(t) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i t^{n+1-i}$, entonces $p_0(t) + k p_1(t)$ es un polinomio Hurwitz estable para toda $k > k_0$, donde*

$$k_0 = \max_{i=1, \dots, n+1} \left(-\frac{Z_{(n,n)}^i a}{E_{(n,n)}^i c} \right).$$

Demostración. De una manera similar a la prueba del teorema 1.3.1, tenemos

$$\begin{aligned} p_0(-i\omega)[p_0 + k p_1](i\omega) &= [P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2)] \\ &\quad + k[P(\omega^2)p(\omega^2) + \omega^2 Q(\omega^2)q(\omega^2)] \\ &\quad + i\omega k[P(\omega^2)q(\omega^2) - Q(\omega^2)p(\omega^2)]. \end{aligned}$$

Note que la expresión $P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2) + k[P(\omega^2)p(\omega^2) + \omega^2 Q(\omega^2)q(\omega^2)]$ puede ser escrito como

$$\omega^{2(n+1)} + \sum_{i=1}^{n+1} (Z_{(n,n)}^i a + k E_{(n,n)}^i c) \omega^{2(n+1-i)}.$$

Si $k > k_0$, entonces

$$k > -\frac{Z_{(n,n)}^i a}{E_{(n,n)}^i c} \quad \forall i = 1, \dots, n+1.$$

Dado que $E_{(n,n)}^i c > 0$ para toda $i = 1, \dots, n+1$, se sigue que $kE_{(n,n)}^i c > -Z_{(n,n)}^i a$ y entonces $Z_{(n,n)}^i a + kE_{(n,n)}^i c > 0$ para toda $i = 1, \dots, n+1$. Por lo tanto, para toda $\omega > 0$, $p_0(-i\omega)[p_0 + kp_1](i\omega)$ no intersecta el eje imaginario, de lo cual tenemos que $p_0(-t)$ y $p_0(t) + kp_1(t)$ satisfacen las hipótesis del lema 1.3.1. Esto implica que el polinomio $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $k > k_0$, lo cual prueba el teorema. \square

Observación 1.3.4. *La extensión del teorema 1.3.3 para el caso donde $\text{grad}(p_1(t)) = n - 1$ resulta ser de la siguiente manera: $p_0(t) + kp_1(t)$ es Hurwitz estable para toda $k > k_0$ si,*

$$k_0 = \max_{i=1, \dots, n} \left(-\frac{Z_{(n,n-1)}^i a}{E_{(n,n-1)}^i c} \right),$$

y

$$Z_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} a_1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -2a_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -2a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -2a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Observación 1.3.5. *Para el segmento de polinomios $p(t, q) = p_0(t) + q[p_1(t) - p_0(t)]$ donde $q \in [0, 1]$, se sigue del teorema 1.3.3 que $p(t, q)$ es Hurwitz estable para toda $q \geq q_0$, donde $q_0 = \frac{k_0}{1+k_0}$. Si $k_0 \leq -1$, resulta que $p(t, q)$ es Hurwitz estable para toda $q \in (-\infty, 0]$.*

Ejemplo 1.3.1. *Sean $p_0(t) = t^3 + 7t^2 + 14t + 8$, $p_1(t) = t^2 + 4t + 6$. Para calcular k_0 , primero tenemos que*

$$\begin{aligned} Z_{(3,2)} a &= \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 84 \\ 64 \end{pmatrix} \\ E_{(3,2)} c &= \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -8 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 48 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, $k_0 = \max(-\frac{21}{3}, -\frac{84}{6}, -\frac{64}{48}) = -\frac{4}{3}$. Para calcular k_{\min}^- , encontramos que

$$H(p_0) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad H(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$H^{-1}(p_0)H(p_1) = \begin{pmatrix} \frac{7}{45} & \frac{26}{45} & 0 \\ -\frac{1}{90} & \frac{11}{45} & 0 \\ \frac{7}{720} & -\frac{4}{45} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \sigma(-H^{-1}(p_0)H(p_1)) = \left\{ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{5} \pm \frac{1}{15}i \right\}.$$

Por tanto, $\lambda_{\min}^- = -\frac{3}{4}$, así que $k_{\min}^- = -\frac{4}{3} = k_0$.

Enseguida, presentamos un ejemplo donde $k_0 > k_{\min}^-$.

Ejemplo 1.3.2. Para los polinomios $p_0(t) = t^3 + 7t^2 + 14t + 8$, $p_1(t) = 26t^2 + 137t + 90$, obtenemos que $k_0 > k_{\min}^-$. Definiendo las matrices $Z_{(3,2)}$, $E_{(3,2)}$ como en (1.19) y (1.8), respectivamente, tenemos

$$Z_{(3,2)}a = \begin{pmatrix} 21 \\ 84 \\ 64 \end{pmatrix}, \quad E_{(3,2)}c = \begin{pmatrix} 45 \\ 1080 \\ 720 \end{pmatrix}$$

del cual $k_0 = \max(-\frac{21}{45}, -\frac{84}{1080}, -\frac{64}{720}) = -\frac{7}{90} = -0.07778$. Por otro lado, dadas las matrices Hurwitz $H(p_0)$ y $H(p_1)$, $\sigma(-H^{-1}(p_0)H(p_1)) = \{-11.25, -4.1399, -9.5601\}$, y $\lambda_{\min}^- = -11.25$. Finalmente, $k_{\min}^- = -0.088889 < k_0 = -0.07778$.

Capítulo 2

El máximo intervalo de estabilidad

En esta sección, nos concentraremos en ideas técnicas debidas a Bialas ([19]), con refinamientos hechos por Fu y Barmish (ver [15, 35]). Adicionalmente, consideraremos el rayo de polinomios reales $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ con k tomando valores en un conjunto acotado $K = [k^-, k^+]$. Utilizaremos los coeficientes de $p_0(t)$ y $p_1(t)$ para construir una matriz especial cuyos valores propios nos permitirán obtener el máximo intervalo de estabilidad.

2.1. El criterio del valor propio: el teorema de Bialas (1985)

Comenzaremos el análisis con las siguientes definiciones técnicas que pueden ser vistas en las páginas 50 y 51 de [15].

Definición 2.1.1 (Subfamilias). *Considere el polinomio $p_0(t) + kp_1(t)$, con $p_0(t)$ estable y el conjunto acotado $K = [k^-, k^+]$, donde $k^- \leq 0$ y $k^+ \geq 0$. Definamos*

$$\mathcal{P}(k^+) = \{p(\cdot, k) \mid 0 \leq k \leq k^+\} \text{ y } \mathcal{P}(k^-) = \{p(\cdot, k) \mid k^- \leq k \leq 0\},$$

las cuales son subfamilias de la familia original $\mathcal{P} = \{p(\cdot, k) : k \in K\}$.

Definición 2.1.2 (Intervalo máximo de estabilidad). *Asociado con la subfamilia $\mathcal{P}(k^+)$, definimos el margen de robustez derecho como*

$$k_{\text{máx}}^+ = \sup \{k^+ : \mathcal{P}(k^+) \text{ es robustamente estable}\},$$

y asociado con la subfamilia $\mathcal{P}(k^-)$, definimos el margen de robustez izquierdo como

$$k_{\text{mín}}^- = \inf \{k^- : \mathcal{P}(k^-) \text{ es robustamente estable}\}.$$

Consecuentemente, al intervalo

$$K_{\text{máx}} = (k_{\text{mín}}^-, k_{\text{máx}}^+)$$

lo llamaremos *máximo intervalo de estabilidad*.

Definición 2.1.3 (La matriz Hurwitz). *Para un polinomio fijo*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0,$$

con $a_n > 0$, el arreglo de tamaño $n \times n$

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Es llamada la matriz de Hurwitz asociada a $p(t)$.

Observación 2.1.1 (Criterio de estabilidad de Hurwitz). *Recordemos el criterio clásico de estabilidad de Hurwitz: Un polinomio $p(t)$ es estable si y sólo si todos los menores principales de $H(p)$ son positivos. Por ejemplo, el primer menor principal es el $\Delta_1 = a_{n-1}$, el segundo menor principal es*

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

y el último menor principal es $\Delta_n = \det H(p)$.

Definición 2.1.4 ($\lambda_{\max}^+(M)$ y $\lambda_{\min}^-(M)$). *Dada una matriz de tamaño $n \times n$, definimos $\lambda_{\max}^+(M)$ como el máximo valor propio real positivo de M . Cuando M no tenga valores propios reales positivos $\lambda_{\max}^+(M) = 0^+$. Similarmente, definimos $\lambda_{\min}^-(M)$ como el mínimo valor propio real negativo de M . Cuando M no tenga valores propios reales negativos, entonces $\lambda_{\min}^-(M) = 0^-$.*

Enseguida, estableceremos los siguientes tres lemas técnicos. El primer lema consiste de la fórmula de Orlando, y el segundo lema, es un resultado clásico en dependencia continua de las raíces de un polinomio con parámetros.

Lema 2.1.1 (Fórmula de Orlando). *Considere un polinomio fijo*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0,$$

con $a_n > 0$, raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y matriz Hurwitz $H(p)$. Entonces

$$\det H(p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n-1} a_0 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j).$$

Para una prueba ver Gantmakher [36].

Lema 2.1.2 (Dependencia continua de las raíces). *Considere la familia de polinomios \mathcal{P} descrita por $p(t, k) = \sum_{i=0}^n a_i(k)t^i$ y $k \in K$. Supóngase que \mathcal{P} tiene grado invariante y funciones coeficientes $a_0(k), a_1(k), \dots, a_n(k)$, los cuales dependen continuamente de k . Entonces las raíces de $p(t, k)$ varían continuamente con respecto a $k \in K$. Esto es, existen mapeos continuos $\lambda_i : K \rightarrow \mathbb{C}$, para $i = 1, \dots, n$, tales que $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ son las raíces de $p(t, k)$.*

Para una prueba ver Bhattacharyya ([18]) ó Marden (1966).

Lema 2.1.3 (Invarianza de la no singularidad). *Considere la familia de polinomios \mathcal{P} descrita por $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ y con $k \in K = [k^-, k^+]$. Suponga que $p_0(t)$ es estable con coeficientes positivos y que $\text{grad}(p_0(t)) > \text{grad}(p_1(t))$. Entonces la subfamilia $\mathcal{P}(k^+)$ es robustamente estable si y sólo si $H(p(\cdot, k))$ es no singular para toda $k \in [0, k^+]$. Similarmente, la subfamilia $\mathcal{P}(k^-)$ es robustamente estable si y sólo si $H(p(\cdot, k))$ es no singular para toda $k \in [k^-, 0]$.*

Demostración. Estableceremos el resultado para $\mathcal{P}(k^+)$ y notaremos que la prueba para $\mathcal{P}(k^-)$ es idéntica. Procediendo con la prueba de necesidad, asumimos que $\mathcal{P}(k^+)$ es robustamente estable y simplemente observamos que la no singularidad de $H(p(\cdot, k))$ para toda $k \in [0, k^+]$ se sigue del criterio clásico de estabilidad de Hurwitz; esto es, el último menor principal, el cual es el determinante de $H(p(\cdot, k))$, no debe ser cero para toda $k \in [0, k^+]$.

Para la prueba de suficiencia, asumiremos que $H(p(\cdot, k))$ es no singular para toda $k \in [0, k^+]$ y debemos probar que $\mathcal{P}(k^+)$ es robustamente estable. Procediendo por contradicción, supóngase que $p(t, k^*)$ es inestable para algún $k^* \in [0, k^+]$. De acuerdo con el lema 2.1.2, existe una raíz $\lambda_j(k)$ la cual varía continuamente en $k \in [0, k^*]$, tal que $\lambda_j(k)$ se encuentra en el semiplano abierto izquierdo cuando $k = 0$ (pues $p_0(t)$ es estable) y se encuentra sobre el semiplano cerrado derecho en $k = k^*$. Por continuidad de $\lambda_j(k)$, existe $\hat{k} \in [0, k^*]$ tal que $\lambda_j(\hat{k})$ está sobre eje imaginario. Para completar la prueba, afirmamos que $H(p(\cdot, \hat{k}))$ es singular, la cual es la contradicción buscada. Esta afirmación se establece fácilmente a partir de la fórmula de Orlando, en el lema 2.1.1. Para esto, hay dos casos. El primer caso es que $\lambda_j(\hat{k}) = 0$, es decir, tenemos una raíz igual a cero en \hat{k} . Así que, el término independiente $a_0(k)$ de (2.1) debe ser cero en $k = \hat{k}$, y por la fórmula de Orlando, tenemos que $\det H(p(\cdot, \hat{k})) = 0$. El segundo caso es que $\lambda_j(\hat{k}) \neq 0$. Dado que $\lambda_j(\hat{k})$ es imaginario puro, debemos tener una raíz diferente $\lambda_r(\hat{k})$ tal que $\lambda_r(\hat{k}) = -\lambda_j(\hat{k})$. Esto implica que el término $\lambda_r(\hat{k}) + \lambda_j(\hat{k})$ en la fórmula de Orlando debe ser cero, y de nuevo tenemos que $\det H(p(\cdot, \hat{k})) = 0$. ■ □

Teorema 2.1.1 (Criterio del valor propio). *Considere el polinomio*

$$p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$$

con $p(t, 0) = p_0(t)$ estable, con coeficientes positivos y $\text{grad}(p_0(t)) > \text{grad}(p_1(t))$. Entonces el intervalo máximo para estabilidad robusta está descrito por

$$k_{\text{máx}}^+ = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1))} \quad \text{y} \quad k_{\text{mín}}^- = \frac{1}{\lambda_{\text{mín}}^-(-H^{-1}(p_0)H(p_1))},$$

donde $H(p_1)$ es una matriz de tamaño $n \times n$, obtenida al tratar a p_1 como un polinomio de orden n y de esta manera poder efectuar la multiplicación $H^{-1}(p_0)H(p_1)$.

En el teorema 2.1.1, tratar a $p_1(t)$ como polinomio de grado n es en el sentido de que si $m < n$ es el grado de $p_1(t)$, consideramos los $n - m$ términos $t^n, t^{n-1}, \dots, t^{n-m}$ con coeficiente cero y los sumamos a $p_1(t)$ para obtener simbólicamente un polinomio de grado n con matriz de Hurwitz $H(p_1)$ de tamaño $n \times n$.

Demostración del teorema 2.1.1. Para la prueba, derivaremos la fórmula para $k_{\text{máx}}^+$ y simplemente notaremos que la fórmula para $k_{\text{mín}}^-$ se obtiene a través de ideas similares. Para $k^+ \geq 0$ fijo se sigue del lema 2.1.3 que $\mathcal{P}(k^+)$ es robustamente estable si y sólo si $H(p(\cdot, k))$ es no singular para toda k . Dado que

$$H(p(\cdot, k)) = H(p_0 + kp_1) = H(p_0) + kH(p_1),$$

se sigue que $k_{\text{máx}}^+$ es el valor más grande de k^+ tal que

$$\det[H(p_0) + kH(p_1)] \neq 0,$$

para toda $k \in (0, k^+)$. Ahora, dado que $p_0(t)$ es estable, $H(p_0)$ es invertible y podemos multiplicar por $H^{-1}(p_0)/k$ y caracterizar $k_{\text{máx}}^+$ por la condición

$$\det\left[\frac{1}{k}I + H^{-1}(p_0)H(p_1)\right] \neq 0, \text{ para toda } k \in (0, k_{\text{máx}}^+).$$

Para esto, tenemos dos casos a considerar.

Caso I. La matriz $-H^{-1}(p_0)H(p_1)$ no tiene valores propios reales positivos. En este caso $\det\left[\frac{1}{k}I + H^{-1}(p_0)H(p_1)\right] \neq 0$ para toda $k \in (0, \infty)$. Dado que $\lambda_{\text{máx}}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1)) = 0^+$, se tiene que

$$k_{\text{máx}}^+ = \lim_{r \rightarrow \lambda_{\text{máx}}^+} \frac{1}{r} = +\infty.$$

Así, $\det\left[\frac{1}{k}I + H^{-1}(p_0)H(p_1)\right] \neq 0$ para toda $k \in \left(0, \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1))}\right)$.

Caso II. La matriz $-H^{-1}(p_0)H(p_1)$ tiene valores propios reales positivos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r$. Así que

$$\det\left[\frac{1}{k}I + H^{-1}(p_0)H(p_1)\right] = 0,$$

si y sólo si $\frac{1}{k} = \lambda_j$, es decir $k = \frac{1}{\lambda_j}$, para algún j . Notemos que

$$0 < \frac{1}{\lambda_r} \leq \frac{1}{\lambda_{r-1}} \leq \dots \leq \frac{1}{\lambda_1}.$$

Por tanto, si $k < \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1))}$, entonces $\det\left[\frac{1}{k}I + H^{-1}(p_0)H(p_1)\right] \neq 0$, por lo cual, $k_{\text{máx}}^+ = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}^+}$.

Combinando ambos casos obtenemos la fórmula

$$k_{\text{máx}}^+ = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1))}.$$

□

Ejemplo 2.1.1. Considere los polinomios $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 6$ y $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$. Consideremos el polinomio $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$. Tenemos que

$$H(p_0(t)) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } H(p_1(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$-H(p_0(t))^{-1}H(p_1(t)) = - \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ -\frac{1}{66} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{1}{66} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} & 0 \\ \frac{1}{66} & \frac{13}{66} & 0 \\ -\frac{1}{66} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

el cual tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{6}$ y $\lambda_3 = \frac{2}{11}$. De aquí que $\lambda_{\text{máx}}^+(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = \frac{2}{11}$ y $\lambda_{\text{mín}}^-(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = -\frac{1}{6}$. Por tanto el polinomio $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ es robustamente estable en $[k_{\text{mín}}^-, k_{\text{máx}}^+] = [-6, \frac{11}{2}]$. □

Ejemplo 2.1.2. Considere los polinomios $p_0(t) = t^3 + 5t^2 + 8t + 4$ y $p_1(t) = t^2 - 2t + 2$. Es claro que $p_0(t)$ es Hurwitz estable, pues la condición $a_1a_2 - a_3 = 36 > 0$. $p_1(t)$ no es Hurwitz estable. Luego,

$$H(p_0(t)) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } H(p_1(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$-H(p_0(t))^{-1}H(p_1(t)) = - \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{5}{36} & 0 \\ \frac{5}{144} & -\frac{25}{144} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{144} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

el cual tiene valores propios $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.18661$ y $\lambda_3 = 0.29772$. De aquí que

$$\lambda_{\text{máx}}^+(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = 0.29772$$

y

$$\lambda_{\text{mín}}^-(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = -0.5.$$

Por tanto el polinomio $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ es robustamente estable para toda $k \in [-2, 3.3589]$.

□

Para consolidar las ideas técnicas asociadas al teorema 2.1.1 y la representación en combinaciones convexas establecidas en la sección anterior, se presenta el teorema de Bialas (1985).

Teorema 2.1.2 (Bialas (1985)). *Considere la familia de polinomios \mathcal{P} descrita por $p(t, \mu) = \mu p_0 + (1 - \mu)p_1$ con $\mu \in [0, 1]$, donde $p_0(t)$ y $p_1(t)$ fijos, y $p_0(t)$ estable con todos sus coeficientes positivos. Suponga que $n = \text{grad}(p_0(t)) > \text{grad}(p_1(t))$. Entonces \mathcal{P} es robustamente estable si y sólo si la matriz $H^{-1}(p_0)H(p_1)$ no tiene valores propios reales positivos.*

Note que la prueba del teorema 2.1.2 se puede establecer como una imitación sencilla de la prueba del teorema 2.1.1. Sin embargo, debemos tener cuidado en hacer distinción entre el problema del margen de robustez y el problema de estabilidad de segmentos, pues en el problema del máximo intervalo de estabilidad, los extremos no son estables, es decir, tenemos un segmento abierto de polinomios Hurwitz.

2.2. El criterio de las raíces

En esta sección se propone un método alternativo para calcular el máximo intervalo de estabilidad, utilizando la generalización de los ya conocidos teorema intersección con la frontera (TIF) y el principio de exclusión del cero (PEC). Para eso, consideraremos una familia de polinomios $P(\lambda, t)$ que satisfaga la hipótesis 1. El contenido de esta sección está basado en los resultados de [57].

2.2.1. El teorema de intersección con la frontera y el principio de exclusión del cero

Hipótesis 1. *Sea $P(t, \mu)$ una familia de polinomios reales que satisface:*

- (1) *grado fijo n ,*
- (2) *sus coeficientes son continuos respecto de μ en un intervalo fijo $I = [a, b]$.*

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} y sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ cualquier subconjunto abierto dado. Denotemos a la frontera de \mathcal{S} por $\partial\mathcal{S}$ y su complemento como $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$. Los siguientes resultados se presentan en [18], pag. 34.

Teorema 2.2.1 (El teorema de intersección con la frontera). *Bajo la hipótesis 1, supóngase que $P(t, a)$ tiene todas sus raíces en \mathcal{S} y que $P(t, b)$ tiene al menos una raíz en \mathcal{U} . Entonces existe al menos un ρ en $(a, b]$ tal que*

- (i) *$P(t, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$,*
- (ii) *$P(t, \rho)$ tiene al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$.*

Ahora, suponga que $\delta(t, p)$ denota a un polinomio cuyos coeficientes dependen continuamente del vector de parámetros $p \in \mathbb{R}^l$ el cual varía en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ y que genera a la familia de polinomios

$$\Delta(t) := \{\delta(t, p) \mid p \in \Omega\}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.2.2 (El principio de exclusión del cero). *Asuma que la familia de polinomios (4.3) tiene grado constante, contiene al menos un polinomio estable y que Ω es conexo por trayectorias. Entonces la familia completa es estable si y sólo si*

$$0 \notin \Delta(t^*) \text{ para toda } t^* \in \partial\mathcal{S}$$

A continuación, presentaremos nuestras generalizaciones. En ellas consideraremos $\mathcal{S} = \mathbb{C}^-$.

Teorema 2.2.3 (Generalización 1 del TIF). *Bajo la hipótesis 1, suponga que $P(a, t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ , y $P(b, t)$ tiene a lo más $n_1 - 1$ raíces en \mathbb{C}^- y al menos $n - n_1 + 1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Entonces existe al menos un ρ en $(a, b]$ tal que*

- (i) $P(\rho, t)$ tiene al menos n_1 raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$,
- (ii) $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R}$.

Demostración. Dado que $P(\lambda, t)$ satisface las hipótesis 1, por el lema 2.1.2 existen n funciones continuas, raíces de $P(\lambda, t)$, digamos $t_1(\lambda), \dots, t_n(\lambda)$, $\lambda \in [a, b]$. Denotemos por $\alpha_j(\lambda) = \Re(t_j(\lambda))$ como las partes reales de las raíces. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para $j = 1, \dots, n_1$, $\alpha_j(a) \in \mathbb{R}^-$ y para $j = n_1 + 1, \dots, n$, $\alpha_j(a) \in \mathbb{R}^+$, mientras que para $\lambda = b$, a lo más $n_1 - 1$ $\alpha_j(b)$'s están en \mathbb{R}^- y al menos $n - n_1 + 1$ están en \mathbb{R}^+ . Entonces existe al menos un $t_j(\lambda)$ tal que $\alpha_j(a) < 0$ y $\alpha_j(b) > 0$. Sea $\alpha_{j_1}(\lambda), \dots, \alpha_{j_m}(\lambda)$ tales funciones. Entonces, por continuidad y el teorema del valor intermedio tenemos que para cada $1 \leq r \leq m$ existe un $\rho_r \in (a, b]$ tal que $\alpha_{j_r}(\rho_r) = 0$. Definamos ahora $\rho = \min\{\rho_r \mid r = 1, \dots, m\}$. Por lo que para $\lambda = \rho$, en al menos un $\alpha_{j_r}(\rho) = 0$. Por tanto $P(\rho, t)$ tiene n_1 raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$ con al menos una raíz en $i\mathbb{R}$, como se deseaba. \square

De forma análoga podemos establecer el siguiente teorema, cuya prueba se similar a la del teorema (2.2.4).

Teorema 2.2.4 (Generalización 2 del TIF). *Bajo la hipótesis 1, suponga que $P(a, t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ , y que $P(b, t)$ tiene m_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - m_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Si $n_1 \neq m_1$, entonces existe al menos un ρ en $(a, b]$ tal que*

- (i) $P(\rho, t)$ tiene al menos n_1 raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$,
- (ii) $P(\rho, t)$ tiene al menos $n - n_1$ raíces en $\mathbb{C}^+ \cup i\mathbb{R}$,
- (iii) $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R}$.

Utilizando las mismas ideas expuestas en las generalizaciones del teorema de intersección con la frontera, se presenta la generalización del principio de exclusión del cero, cuya prueba es seguida de los teoremas antes mencionados.

Teorema 2.2.5 (Generalización del PEC). *Consideremos la familia de polinomios $P(\lambda, t)$ con grado constante, donde $\lambda \in \Omega$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ es un conjunto conexo por trayectorias. Supóngase que existe un elemento de la familia con n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Entonces, la familia completa continúa teniendo n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ si y sólo si*

$$P(\lambda, i\omega) \neq 0 \text{ para toda } \lambda \in \Omega \text{ y para toda } \omega \in \mathbb{R}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Si todos los elementos de la familia tienen n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ , entonces es claro que $P(\lambda, i\omega) \neq 0$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$ y para toda $\lambda \in \Omega$.

(\Leftarrow) Supóngase que $P(\lambda, i\omega) \neq 0$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$ y para toda $\lambda \in \Omega$. Si existiera $\lambda_0 \in \Omega$ tal que el polinomio $P(\lambda_0, t)$ tiene m_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - m_1$ raíces en \mathbb{C}^+ con $n_1 \neq m_1$, entonces del teorema 2.2.4 tenemos que existe ρ tal que $P(\rho, i\omega) = 0$ para algún $\omega \in \mathbb{R}$, el cual es una contradicción. \square

Es posible redirigir todos estos resultados con el enfoque presentado en [75], introduciendo los mapeos guardián y semiguardián para que los resultados queden en términos de estos mapeos.

2.2.2. El criterio de las raíces [López-Rentería *et. al.* (2011)]

Ahora, estamos listos para presentar el método alternativo para calcular el máximo intervalo de estabilidad. Sea $p_0(t)$ un polinomio de grado n y $p_1(t)$ un polinomio tal que $n \geq \deg p_1(t)$. Considere la familia de polinomios $p_c(t) = p_0(t) + kp_1(t)$. Al evaluar $p_0(-t)$ y $p_c(t)$ en $i\omega$, obtenemos

$$\begin{aligned} p_0(-i\omega) &= P(\omega^2) - i\omega Q(\omega^2) \\ p_c(i\omega) &= P(\omega^2) + kp(\omega^2) + i\omega[Q(\omega^2) + kq(\omega^2)], \end{aligned}$$

donde p, q, P, Q son polinomios. Entonces

$$\begin{aligned} p_c(i\omega)p_0(-i\omega) &= P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2) \\ &+ k[p(\omega^2)P(\omega^2) + \omega^2 q(\omega^2)Q(\omega^2)] \\ &+ ik\omega[q(\omega^2)P(\omega^2) - p(\omega^2)Q(\omega^2)]. \end{aligned}$$

Definamos los polinomios

$$\begin{aligned} F(\omega) &= p(\omega^2)P(\omega^2) + \omega^2 q(\omega^2)Q(\omega^2) \\ G(\omega) &= P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2) \\ H(\omega) &= q(\omega^2)P(\omega^2) - p(\omega^2)Q(\omega^2). \end{aligned}$$

Así que, podemos reescribir a $p_c(i\omega)p_0(-i\omega)$ como

$$p_c(i\omega)p_0(-i\omega) = G(\omega) + kF(\omega) + ik\omega H(\omega).$$

Definición 2.2.1. Para un polinomio arbitrario $f(t)$ definimos el conjunto de sus raíces como

$$R(f) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid f(\zeta) = 0\}.$$

Denotemos por $R(f)_{\mathbb{R}^+}$ al conjunto de elementos reales positivos de $R(f)$. Es claro que $R(f)_{\mathbb{R}^+}$ podría ser un conjunto vacío.

Ahora, con los polinomios $F(\omega)$, $G(\omega)$ y $H(\omega)$ definidos anteriormente, definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} K^+ &= \{F(\omega_l) \mid \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) > 0\}, \\ K^- &= \{F(\omega_l) \mid \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) < 0\}. \end{aligned}$$

Si no hay elementos en $R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$ tales que $F(\omega_l) > 0$, entonces definiremos $K^+ = \{0^+\}$. Similarmente, Si no hay elementos en $R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$ tales que $F(\omega_l) < 0$, entonces definiremos $K^- = \{0^-\}$. Note que sólo puede suceder que $K^- = \{0^-\}$, ó $K^+ = \{0^+\}$ Pero ambos a la ves no puede ser posible, dado que siempre podemos evaluar en $\omega = 0$. Esto es, siempre podemos tener un extremo.

Así, se obtiene el siguiente método alternativo para calcular el máximo intervalo de estabilidad.

Teorema 2.2.6. Considere la familia de polinomios $p_c(t) = p_0(t) + kp_1(t)$ con $p_0(t)$ Hurwitz estable y con todos sus coeficientes positivos, y sea $F(\omega)$, $G(\omega)$, $H(\omega)$ los polinomios definidos anteriormente. Entonces el máximo intervalo de estabilidad para $p_c(t)$ está descrito por

$$\begin{aligned} k_{\min}^- &= \max \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) \in K^+ \right\}, \\ k_{\max}^+ &= \min \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) \in K^- \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por la generalización del principio de exclusión del cero, la familia de polinomios $p_c(t)p_0(-t)$ tiene n raíces en \mathbb{C}^- y n raíces en \mathbb{C}^+ si y sólo si

$$p_c(i\omega)p_0(-i\omega) \neq 0,$$

para toda $\omega \in \mathbb{R}$. Así que, si para algún $\omega \in \mathbb{R}$, k satisface

$$p_c(i\omega)p_0(-i\omega) = 0,$$

entonces

$$G(\omega) + kF(\omega) + ik\omega H(\omega) = 0.$$

Por consecuencia

$$\begin{aligned} \omega H(\omega) &= 0 \\ G(\omega) + kF(\omega) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Y este sistema se satisface si y sólo si $k = -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)}$, donde $\omega_l = 0$ ó $\omega_l \in R(H)$. Dado que $G(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$, y queremos encontrar el mínimo $k > 0$, y el máximo $k < 0$ para el cual el sistema (2.2) ya no se satisface, entonces

$$\begin{aligned} k_{\min}^- &= \text{máx} \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) > 0, \omega_l = 0 \text{ ó } \omega_l \in R(H) \right\}, \\ k_{\max}^+ &= \text{mín} \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) < 0, \omega_l = 0 \text{ ó } \omega_l \in R(H) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, por la simetría $F(\omega)$ y $H(\omega)$, solamente consideraremos las raíces reales positivas de $H(\omega)$. Así que,

$$\begin{aligned} k_{\min}^- &= \text{máx} \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) \in K^+ \right\}, \\ k_{\max}^+ &= \text{mín} \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} \mid F(\omega_l) \in K^- \right\}, \end{aligned}$$

lo cual finaliza la prueba. □

Observación 2.2.1. *No es necesario considerar en la demostración los casos en el cual $F(\omega_l) = 0$, pues de considerarlos, en el sistema (2.2) pediríamos que $G(\omega_l) = 0$. pero*

$$\begin{aligned} G(\omega_l) &= |p_0(i\omega_l)|^2 \\ &= p_0(i\omega_l)p_0(-i\omega_l) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual es imposible, puesto que $p_0(t)$ es Hurwitz. Sin embargo, si ocurriese $K^+ = \{0^+\}$ ó $K^- = \{0^-\}$, entonces evaluamos en $\omega = 0$ y dependiendo del signo de $F(0)$, se tendría

$$k_{\min}^- = \lim_{r \rightarrow 0^+} -\frac{G(0)}{r} = -\infty$$

ó

$$k_{\max}^+ = \lim_{r \rightarrow 0^-} -\frac{G(0)}{r} = +\infty.$$

El siguiente ejemplo ilustra la segunda parte de la observación 2.2.1.

Ejemplo 2.2.1. *Considere el sistema de control lineal*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{13}{2}k, -11k, -5k\right)x. \quad (2.3)$$

Entonces, tenemos que $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$ y $p_1(t) = 5t^2 + 11t + \frac{13}{2}$. Primero, Por el método de Bialas tenemos que las matrices Hurwitz de $p_0(t)$ y $p_1(t)$ son

$$H(p_0(t)) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } H(p_1(t)) = \begin{pmatrix} 5 & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} -H(p_0(t))^{-1}H(p_1(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{11}{60} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{60} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{60} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{11}{12} & -\frac{11}{120} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{119}{120} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{19}{120} & -\frac{13}{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^3 - \frac{359}{120}\lambda^2 + \frac{4297}{1140}\lambda - \frac{143}{144}$, el cual es un polinomio de grado tres y sus raíces son $\lambda_{1,2} = -\frac{229 \pm i\sqrt{359}}{240}$ y $\lambda_3 = -\frac{13}{12}$. De donde se se obtiene $\lambda_{\max}^+(-H(p_0)^{-1}H(p_1)) = 0^-$ y $\lambda_{\min}^-(-H(p_0)^{-1}H(p_1)) = -\frac{13}{12}$. Por tanto $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ es robustamente estable para k en $[-\frac{12}{13}, \infty)$.

Ahora, lo haremos con el método alternativo. No es difícil ver que

$$\begin{aligned} p_0(i\omega) &= (6 - 6\omega^2) + i\omega(11 - \omega^2) \\ &= P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2), \\ p_1(i\omega) &= \left(\frac{13}{2} - 5\omega^2\right) + 11i\omega \\ &= p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2). \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 19\omega^4 + 112\omega^2 + 39 \\ G(\omega) &= \omega^6 - 94\omega^4 + 49\omega^2 + 36 \\ H(\omega) &= -5\omega^4 - 9\omega^2 - 11. \end{aligned}$$

Nótese que $F(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$ y por una simple prueba para ecuaciones de segundo orden, observamos $H(\omega)$ no tiene raíces reales. Entonces por la observación 2.2.1, $k_{\max} = +\infty$ y $k_{\min} = -\frac{G(0)}{F(0)} = -\frac{12}{13}$. Consecuentemente, $p_0(t) + kp_1(t)$ es estable para toda $k \in [-\frac{12}{13}, \infty)$.

Observación 2.2.2. Una diferencia de ésta técnica con el método de Bialas, es que en el criterio de las raíces no es necesario calcular la inversa de alguna matriz. Otra diferencia es que en el método de Bialas, siempre se tiene que calcular las raíces de un polinomio de grado n (del polinomio característico de $H(p_0)^{-1}H(p_1)$), mientras que en el método de las raíces, si el grado de $p_0(t)$ y $p_1(t)$ (n y m , respectivamente, $n \geq m$) es par ó impar, entonces $\deg H(\omega) = n + m - 2$ y en el resto de los casos $\deg H(\omega) = n + m - 1$. Por tanto, por simetría de $H(\omega)$, sólo tenemos que encontrar las raíces de un polinomio de grado $\frac{n+m-2}{2}$ o $\frac{n+m-1}{2}$, respectivamente, ambos menores o iguales que $n - 1$.

Ejemplo 2.2.2. Considere los polinomios $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 6$ y $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$, para la familia de polinomios $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$, calcularemos primero el máximo intervalo de estabilidad por el método de Bialas. Primero tenemos que

$$H(p_0(t)) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } H(p_1(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enseguida,

$$\begin{aligned} -H(p_0(t))^{-1}H(p_1(t)) &= - \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ -\frac{1}{66} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{1}{66} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} & 0 \\ \frac{1}{66} & \frac{13}{66} & 0 \\ -\frac{1}{66} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^3 - \frac{2}{11}\lambda^2 - \frac{1}{36}\lambda + \frac{1}{198}$ el cual es un polinomio de grado 3 y tiene como raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{6}$ y $\lambda_3 = \frac{2}{11}$. Así que, $\lambda_{\max}^+(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = \frac{2}{11}$ y $\lambda_{\min}^-(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = -\frac{1}{6}$. Entonces $p(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ es robustamente estable en $[k_{\min}^-, k_{\max}^+] = [-6, \frac{11}{2}]$.

A continuación, calcularemos el máximo intervalo de estabilidad con el criterio de las raíces. Vemos que

$$\begin{aligned} p_0(i\omega) &= (6 - 6\omega^2) + i\omega(12 - \omega^2) \\ &= P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2), \\ p_1(i\omega) &= (1 - \omega^2) + i\omega(-2) \\ &= p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2). \end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 8\omega^4 - 36\omega^2 + 6, \\ G(\omega) &= \omega^6 + 12\omega^4 + 72\omega^2 + 36, \\ H(\omega) &= -\omega^4 + 25\omega^2 - 24. \end{aligned}$$

Por tanto $R(H)_{\mathbb{R}^+} = \{1, \sqrt{24}\}$. Ahora,

$$\begin{aligned} F(1) &= -22 < 0, \\ F(\sqrt{24}) &= 3750 > 0, \\ F(0) &= 6 > 0, \\ G(1) &= 121, \\ G(\sqrt{24}) &= 22527, \\ G(0) &= 36. \end{aligned}$$

Por tanto

$$k_{\text{máx}}^+ = -\frac{G(1)}{F(1)} = \frac{11}{2}$$

y

$$k_{\text{mín}}^- = \text{máx} \left\{ -\frac{G(\sqrt{24})}{F(\sqrt{24})}, -\frac{G(0)}{F(0)} \right\} = -6.$$

Nótese que en este método, solamente necesitamos calcular las raíces de un polinomio de grado dos, mientras que en el método de Bialas se necesitó calcular las raíces de un polinomio de grado tres.

Ejemplo 2.2.3. Considere el sistema de control lineal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-3k, -2k, -k, 0) x. \quad (2.4)$$

De este sistema tenemos que $p_0(t) = t^4 + t^3 + 7t^2 + 2t + 3$ y $p_1(t) = t^2 + 2t + 3$, y sus matrices Hurwitz son

$$H(p_0(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H(p_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

donde la inversa de $H(p_0)$

$$H(p_0(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ -\frac{5}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{32}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

De aquí que, el polinomio característico de grado 4 de la matriz

$$\begin{aligned} -H(p_0(t))^{-1}H(p_1(t)) &= - \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ -\frac{5}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{32}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{18}{7} & -\frac{24}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{13}{7} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & \frac{24}{7} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es $t^4 + \frac{12}{7}t^3 + \frac{3}{7}t^2 - \frac{2}{7}t$ y tiene como raíces como $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2}{7}$ y $\lambda_{3,4} = -1$. Entonces, $\lambda_{\text{máx}}^+(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = \frac{2}{7}$ y $\lambda_{\text{mín}}^-(H(p_0)^{-1}H(p_1)) = -1$. Por lo tanto, el sistema (2.4) es robustamente estable en $[-1, \frac{7}{2}]$.

Enseguida, calcularemos el máximo intervalo de estabilidad con el método de las raíces. Al evaluar a $p_0(t)$ y $p_1(t)$ en $i\omega$ tenemos

$$\begin{aligned} p_0(i\omega) &= (\omega^4 - 7\omega^2 + 3) + i\omega(-\omega^2 + 2) \\ &= P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2), \\ p_1(i\omega) &= (-\omega^2 + 3) + i\omega(2) \\ &= p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2). \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= -\omega^6 + 8\omega^4 - 20\omega^2 + 9, \\ G(\omega) &= \omega^8 - 13\omega^6 + 51\omega^4 - 38\omega^2 + 9, \\ H(\omega) &= \omega^2(-9 + \omega^2). \end{aligned}$$

No es difícil ver que $R(H)_{\mathbb{R}^+} = \{0, 3\}$. Enseguida, $F(0) = 9 > 0$, $F(3) = -252 < 0$ y $G(0) = 9$, $G(3) = 882$. Por lo tanto,

$$k_{\text{máx}}^+ = -\frac{G(3)}{F(3)} = \frac{7}{2}$$

y

$$k_{\text{mín}}^- = -\frac{G(0)}{F(0)} = -1.$$

En este ejemplo se calcularon las raíces del polinomio $H(\omega)$, el cual es un polinomio de grado dos, mientras que con el método de Bialas se calcularon las raíces del polinomio característico de $H(p_0)^{-1}H(p_1)$, que es un polinomio de grado cuatro.

2.2.3. El mínimo extremo izquierdo

En la subsección 1.3.2 se abordó el problema del mínimo extremo izquierdo, del cual se da una aproximación en términos de ciertas desigualdades matriciales que se han estado presentando en el transcurso de este trabajo. A continuación, se utilizan las mismas desigualdades matriciales y el criterio de las raíces para caracterizar a ciertos rayos, a los cuales les podremos calcular el mínimo extremo izquierdo de manera exacta. Si consideramos las matrices $D_{(n,n-1)}$,

$E_{(n,n-1)}$ y $Z_{(n,n-1)}$ definidas en (1.1), (1.8) y (1.19), respectivamente, podemos observar que

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{j=1}^n (E_{(n,n-1)}^j \cdot c) \omega^{2(n-j)} \\ G(\omega) &= -\omega^{2n} + \sum_{j=1}^n (Z_{(n,n-1)}^j \cdot a) \omega^{2(n-j)} \\ H(\omega) &= \sum_{j=1}^n (D_{(n,n-1)}^j \cdot c) \omega^{2(n-j)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

y obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.7. *Considérese el rayo $p_c(t, k) = P_0(t) + kp_1(t)$ con $p_0(t)$ Hurwitz estable y $\text{grad}(p_1(t)) = n-1$. Si el vector $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n) \succ 0$ satisface las desigualdades matriciales $D_{(n,n-1)} \cdot c \succ 0$ y $E_{(n,n-1)} \cdot c \succ 0$, entonces el polinomio $p_c(t)$ es estable para toda $k > k_{\text{mín}}^-$, donde $k_{\text{mín}}^- = -\frac{a_n}{c_n}$.*

Demostración. En lo siguiente haremos uso del criterio de las raíces (teorema 2.2.6) y los conjuntos K^+ y K^- considerados en él. Dado que $E_{(n,n-1)} \cdot c \succ 0$, entonces $E_{(n,n-1)}^i \cdot c > 0$ para toda $i = 1, \dots, n$, y por tanto $F(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \mathbb{R}$. Similarmente, si $D_{(n,n-1)} \cdot c \succ 0$ entonces $D_{(n,n-1)}^i \cdot c > 0$ para toda $i = 1, \dots, n$. Así, $H(\omega)$ no cruza al eje real para toda $\omega \in \mathbb{R}$ y por tanto no tiene raíces reales. Esto implica que $R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$ no contiene elementos tales que $F(\omega_l) < 0$, es decir $K^- = \{0^-\}$, y por tanto, $k_{\text{máx}}^+ = +\infty$. Ahora, como $H(\omega)$ no tiene raíces reales, el único elemento $\omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$ tal que $F(\omega_l) > 0$, es $\omega_l = 0$, y así

$$\begin{aligned} k_{\text{mín}}^- &= -\frac{G(0)}{F(0)} \\ &= -\frac{Z_{(n,n-1)}^n \cdot a}{E_{(n,n-1)}^n \cdot c} \\ &= -\frac{a_n}{c_n} \end{aligned}$$

□

El teorema 2.2.7 puede ser extendido para el caso en el cual el grado de $p_1(t)$ sea n , pues los polinomios (2.5) y los argumentos de la prueba son similares. Luego, el mínimo extremo izquierdo se calcula con la misma fórmula.

Ejemplo 2.2.4. *Retomando el ejemplo 1.3.2, los polinomios son $p_0(t) = t^3 + 7t^2 + 14t + 8$, $p_1(t) = 26t^2 + 137t + 90$. Definiendo las matrices $D_{(3,2)}$, $E_{(3,2)}$ y $Z_{(3,2)}$ como en (1.1), (1.8) y (1.19), respectivamente, tenemos*

$$D_{(3,2)}c = \begin{pmatrix} 26 \\ 505 \\ 164 \end{pmatrix}, \quad E_{(3,2)}c = \begin{pmatrix} 45 \\ 1080 \\ 720 \end{pmatrix}, \quad Z_{(3,2)}a = \begin{pmatrix} 21 \\ 84 \\ 64 \end{pmatrix}$$

del cual $k_0 = \max(-\frac{21}{45}, -\frac{84}{1080}, -\frac{64}{720}) = -\frac{7}{90} = -0.07778$. Por Bialas tenemos que $k_{\min}^- = -0.088889$. Veamos ahora con nuestro enfoque. Primero, vemos que $D_{(3,2)}c \succ 0$ y $E_{(3,2)}c \succ 0$, por lo tanto, tenemos por el teorema 2.2.7 que $k_{\max}^+ = \infty$ y $k_{\min}^- = -\frac{8}{90} = -0.088889$.

Capítulo 3

Curvas estables conectoras

En este capítulo nos enfocaremos en resolver el problema de obtener curvas estables que conecten a dos polinomios estables, ya sea el caso de polinomios Hurwitz o Schur. Antes de empezar el análisis, necesitaremos primero de algunos conceptos de Topología Algebraica que se presentarán en la siguiente sección. Los resultados de este capítulo están reportados en [58].

3.1. Herramienta de topología algebraica

En lo siguiente, nos enfocaremos en ciertos temas específicos de la Topología Algebraica como lo son Homotopía de caminos, El Mapeo de Viète y Transformaciones de Möbius; referente a este último se da una transformación en cierta forma distinta a la que se trata en ([44]) y que se necesitará para resolver el problema de encontrar una curva Schur-conectora, dada una curva Hurwitz-conectora.

3.1.1. Homotopía de caminos

Un mapeo continuo $f : [0, 1] \rightarrow X$ es llamado *camino* en X . Los puntos $f(0)$ y $f(1)$ son llamados puntos final e inicial, respectivamente. Así que, f es un camino que une a $f(0)$ y $f(1)$. Un espacio X se dice ser *conexo por trayectorias* si para cualesquier dos puntos x_0 y x_1 en X , existe un camino en X que une a x_0 y x_1 . Si f y g son dos caminos en X , con $f(1) = g(0)$, el producto de f con g , $f * g$, está dado por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(\phi_1(t)) & \text{si } t \in [0, r] \\ g(\phi_2(t)) & \text{si } t \in [r, 1] \end{cases}, \quad (3.1)$$

donde $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son reparametrizaciones continuas en la variable t tales que $\phi_1(0) = 0$, $\phi_1(r) = 1$ y $\phi_2(r) = 0$, $\phi_2(1) = 1$, y además, r define una partición del intervalo $I = [0, 1]$. Esto es, si f es un camino que va x_0 a x_1 , y g es un camino que va de x_1 a x_2 , entonces $f * g$ es un camino que va de x_0 a x_2 . Dos caminos f y g son equivalentes, $f \sim g$, si existe un mapeo continuo $F : I \times I \rightarrow I$ tal que para $t \in I$, $s \in I$, tenemos

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f(t) \text{ y } F(t, 1) = g(t) \\ F(0, s) &= f(0) \text{ y } F(1, s) = g(1). \end{aligned}$$

A $F(t, s)$ se le conoce como la *homotopía* entre f y g . Nótese que \sim es una relación de equivalencia y denotamos por $[f]$ a la clase de todos los caminos g relacionados con f . Así que, si $f \sim g$ entonces $[f] = [g]$. por lo que el producto de caminos definido anteriormente define una operación bien definida en las clases de homotopía $[f] * [g] = [f * g]$, y obtenemos el siguiente lema, del cual podemos ver una prueba en [69].

Lema 3.1.1. *Sea f un camino en X . Sea $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$ una partición del intervalo $[0, 1]$ y definamos $f_i = f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ como la restricción de f a $[a_{i-1}, a_i]$. Entonces*

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n].$$

Aún cuando $*$ no está definida para todos los caminos en X , satisface las propiedades de grupoide. Ahora, un espacio X se dice ser *contraíble* si es homotópicamente equivalente a un punto.

3.1.2. El mapeo de Viète

Denotemos por $\mathbb{C}_n[z]$ al conjunto de polinomios complejos de grado menor o igual que n y sea $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ un polinomio en $\mathbb{C}_n[z]$, con $a_n \neq 0$. Definamos el mapeo

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}_n[z] &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n &\mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

el cual es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_n[z]$ y \mathbb{C}^{n+1} , con \mathbb{C}^{n+1} dotado con el producto interior Hermitiano y su topología inducida. Para este efecto, mediante el homeomorfismo φ , dotaremos a $\mathbb{C}_n[z]$ del producto interior hermitiano y su correspondiente topología inducida. Similarmente, denotaremos por $\mathbb{R}_n[t]$ al conjunto de polinomios reales de variable real de grado menor o igual que n , al cual dotaremos de la norma euclidea y su topología inducida, vía el isomorfismo φ . Denotemos también por $\mathcal{P}_n[t] \subset \mathbb{R}_n[t]$ al conjunto de polinomios mónicos reales de grado fijo n . En lo que sigue, veremos la identificación de las raíces de un polinomio en $\mathbb{C}_n[z]$ con sus coeficientes y la versión para $\mathcal{P}_n[t]$.

Consideraremos el plano complejo extendido o también llamado *Esfera de Riemann*, el cual consiste del plano complejo unido con el punto al infinito, y es denotada como \mathcal{S}^2 . Ahora, consideremos también el n -producto simétrico de la esfera Riemann, el cual consiste de n -adas sin orden de puntos en \mathcal{S}^2 (no necesariamente distintas), y lo denotamos como $Sym^n(\mathcal{S}^2)$. Alternativamente, este espacio es el cociente del producto $(\mathcal{S}^2)^{\times n}$ con el grupo simétrico Σ_n , dotado de la topología cociente. Dada una n -ada sin orden $(z_1, \dots, z_n) \in Sym^n(\mathcal{S}^2)$, podemos asociar el polinomio

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad (3.3)$$

al vector de coordenadas $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, donde $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es el *espacio proyectivo complejo* de n dimensiones. Esta correspondencia define un homeomorfismo entre $Sym^n(\mathcal{S}^2)$ y el

espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, y la estructura compleja sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ se puede llevar sobre $Sym^n(\mathcal{S}^2)$ y vice versa bajo esta correspondencia. En [44], subsección 4.1.1, podemos ver un poco más acerca de la teoría relacionada con esta correspondencia. Tal correspondencia es llamada el *Mapeo proyectivo de Viète* y se puede ver detalladamente en [4] ó [31]. A continuación, describiremos una versión de este mapeo.

Consideremos los *polinomios simétricos elementales* en n variables complejas z_1, \dots, z_n definidos como las funciones continuas $\sigma_k : Sym^n(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}$ dados por

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma_0(z_1, \dots, z_n) = 1 \\ \sigma_k &= \sigma_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_k}, \quad k > 0.\end{aligned}$$

Considere el polinomio complejo $p(z)$ de la ecuación (3.3), junto con su respectiva n -ada de raíces $(z_1, \dots, z_n) \in Sym^n(\mathcal{S}^2)$. El mapeo proyectivo de Viète $v_p : Sym^n(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ está dado por

$$v_p(z_1, \dots, z_n) = ((-1)^n \sigma_n(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_2(z_1, \dots, z_n), -\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \sigma_0(z_1, \dots, z_n)),$$

donde para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$, tenemos que $(-1)^k \sigma_k(z_1, \dots, z_n) = a_{n-k}$, las cuales son las entradas del vector de coeficientes correspondiente al polinomio $p(z)$.

Recordemos que en la n -ada (z_1, \dots, z_n) en $Sym^n(\mathcal{S}^2)$ no importa el orden, así que el $(n+1)$ -vector de coeficientes correspondiente a la n -ada de raíces está determinada de manera única por el mapeo proyectivo de Viète, salvo multiplicadores unitarios. De aquí en adelante estaremos tratando sólo con polinomios mónicos, por lo que omitiremos la n -ésima entrada con el valor 1 y sólo identificaremos a $\mathcal{P}_n[t]$ directamente con \mathbb{R}^n asignándole al polinomio mónico $a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ el vector $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Además, dado que tales polinomios serán polinomios reales en los cuales no consideraremos raíces en el infinito, el correspondiente n -vector de coeficientes de $p(t)$ está en \mathbb{R}^n (via el mapeo de Viète), con la restricción de que si z_j es una entrada de (z_1, \dots, z_n) y si $\bar{z}_j = z_k$ para alguna $k \neq j$, entonces z_k es también una entrada de (z_1, \dots, z_n) . Con todo esto y dado que $\mathbb{C} \subset \mathcal{S}^2$, podemos relajar el mapeo de Viète a $Sym^n(\mathbb{C})$ en lugar de $Sym^n(\mathcal{S}^2)$ y simplemente lo escribiremos como $v_p : Sym^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3.1.3. Transformaciones de Möbius

Para los números complejos a, b, c, d tales que $ad - bc \neq 0$, definamos el mapeo $m : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$ dado por

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $cz + d \neq 0$. Si $c = 0$, definimos $m(\infty) = \infty$, y si $c \neq 0$, definiremos $m(\infty) = \frac{a}{c}$ y $m(-\frac{d}{c}) = \infty$. Tales aplicaciones son llamadas *mapeos de Möbius* y tienen las

siguientes propiedades: los mapeos de Möbius son biyecciones de \mathcal{S}^2 en sí misma, donde la inversa es $m^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$; además, son homeomorfismos de \mathcal{S}^2 . Consideraremos el mapeo m tal que $a = b = c = 1$ y $d = -1$, es decir,

$$m(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad (3.4)$$

el cual es un biholomorfismo de \mathcal{S}^2 en sí misma, con inversa $m^{-1}(\cdot) = m(\cdot)$, y transforma a \mathbb{C}^- en el disco unitario abierto \mathcal{D} y vice versa (ver [44], p. 343, LEMA 3.4.79). Podemos observar que $m(0) = -1$ y $m(\infty) = 1$. La transformación de Möbius para un polinomio complejo $p(z)$ de la forma $p(z) = a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$ inducido por el mapeo de Möbius (3.4) es

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z) &= (z-1)^n p\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \\ &= a_n(z+1)^n + a_{n-1}(z+1)^{n-1}(z-1) + \cdots + a_0(z-1)^n \\ &= \sum_{j=0}^n a_j p_j(z). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta transformación es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathbb{C}_n[z]$ en sí mismo y es involutivo módulo una constante distinta de cero: $\tilde{\tilde{p}} = 2^n p$. Más aún, un polinomio $\tilde{p}(z)$ es Schur estable si y sólo si $p(z)$ es Hurwitz estable ([44], p. 344, LEMA 3.4.81). Claramente, la transformación \sim está también definida para polinomios reales y escribiremos $p(t)$ en lugar de $p(z)$, haciendo referencia a que estaremos tratando con polinomios reales. Cuando estemos tratando con polinomios complejos simplemente escribiremos $p(z)$.

Observación 3.1.1. *Dado que trabajaremos con polinomios de grado fijo n , solamente tendremos raíces distintas de ∞ , y por tanto, podemos también relajar el dominio de la transformación de Möbius de \mathcal{S}^2 a \mathbb{C}^- ó \mathcal{D} . Esta restricción no afecta al mapeo de Viète y dado que el mapeo de Möbius es un homeomorfismo que mapea a \mathbb{C}^- en \mathcal{D} y vice versa, todos nuestros resultados son ciertos aún con esta restricción.*

3.2. La curva Hurwitz-conectora

Como se ha mencionado antes, el hecho de que el conjunto de polinomios reales Hurwitz es contraíble al polinomio $(s+1)^n$ (ver por ejemplo [33] ó [44]) vía la transformación de Möbius dada en (3.5), nos lleva a la conexidad por trayectorias de \mathcal{MH}_n^+ . A continuación presentaremos un teorema en el cual se exhibe en forma explícita una curva particular utilizando combinaciones lineales convexas entre los coeficientes de los factores irreducibles¹ de dos polinomios reales Hurwitz de grado fijo n .

¹Cuando se trata con polinomios reales, pensamos en el campo de polinomios $\mathbb{R}_n[t]$, en el cual los factores irreducibles de los polinomios en este campo son de la forma $t^2 + At + B$ y $t + C$.

Teorema 3.2.1. *Dados dos polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$ en \mathcal{MH}_n^+ , existe un camino $P(t, s)$ en \mathcal{MH}_n^+ que une a $p_0(t)$ con $p_1(t)$. Esto es, \mathcal{MH}_n^+ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean

$$p_0(t) = \prod_{j=1}^{m_1} (t + \delta_j) \prod_{j=m_1+1}^{m_1+n_1} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j), \quad (3.6)$$

y

$$p_1(t) = \prod_{j=1}^{m_2} (t + \rho_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} (t^2 + \gamma_j t + \eta_j), \quad (3.7)$$

las descomposiciones en factores irreducibles de $p_0(t)$ y $p_1(t)$, donde $\delta_j, \alpha_j, \beta_j, \rho_j, \gamma_j, \eta_j$ son positivas para toda j . Supóngase que $p_0(t)$ tiene m_1 raíces reales y $2n_1$ raíces complejas (incluyendo multiplicidades), y $p_1(t)$ tiene m_2 raíces reales y $2n_2$ raíces complejas (incluyendo multiplicidades). Es claro que $m_1 + 2n_1 = m_2 + 2n_2 = n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m_1 > m_2$. Entonces, hay n_1 (n_2 resp.) factores cuadráticos y m_1 (resp. m_2) factores lineales de $p_0(t)$ ($p_1(t)$ resp.). Ahora, podemos reescribir los m_1 factores lineales como

$$\prod_{j=1}^{m_1} (t + \delta_j) = \prod_{j=1}^{m_2} (t + \delta_j) \overbrace{\prod_{j=m_2+1}^{m_1} (t + \delta_j)}^{2(n_2-n_1) \text{ factores}},$$

y así,

$$\begin{aligned} \prod_{j=m_2+1}^{m_1} (t + \delta_j) &= \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t + \delta_j) \prod_{j=m_2+(n_2-n_1)+1}^{m_1} (t + \delta_j) \\ &= (t + \delta_{m_2+1})(t + \delta_{m_2+(n_2-n_1)+1}) \cdots (t + \delta_{m_2+(n_2-n_1)})(t + \delta_{m_1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n_2-n_1} (t^2 + (\delta_{m_2+j} + \delta_{m_2+(n_2-n_1)+j})t + \delta_{m_2+j}\delta_{m_2+(n_2-n_1)+j}) \\ &= \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + (\delta_j + \delta_{(n_2-n_1)+j})t + \delta_j\delta_{(n_2-n_1)+j}) \\ &= \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + a_j t + b_j), \end{aligned}$$

donde $a_j = \delta_j + \delta_{(n_2-n_1)+j}$ y $b_j = \delta_j\delta_{(n_2-n_1)+j}$, $j = m_2 + 1, \dots, m_2 + (n_2 - n_1)$. Ahora, dado que $m_1 + 2n_1 = m_2 + 2n_2$ tenemos que $m_1 = m_2 + 2(n_2 - n_1)$ y $m_1 + n_1 = m_2 + n_2 + (n_2 - n_1)$.

Así que podemos escribir a $p_0(t)$ como

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= \prod_{j=1}^{m_2} (t + \delta_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + a_j t + b_j) \prod_{j=m_1+1}^{m_1+n_1} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j) \\
&= \prod_{j=1}^{m_2} (t + \delta_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + a_j t + b_j) \prod_{j=m_2+2(n_2-n_1)+1}^{m_2+n_2+(n_2-n_1)} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j) \\
&= \prod_{j=1}^{m_2} (t + \delta_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + a_j t + b_j) \prod_{j=m_2+(n_2-n_1)+1}^{m_2+n_2} (t^2 + \alpha_{(n_2-n_1)+j} t + \beta_{(n_2-n_1)+j}).
\end{aligned}$$

Al separar los términos cuadráticos de $p_1(t)$ lo podemos reescribir como

$$p_1(t) = \prod_{j=1}^{m_2} (t + \rho_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+(n_2-n_1)} (t^2 + \gamma_j t + \eta_j) \prod_{j=m_2+(n_2-n_1)+1}^{m_2+n_2} (t^2 + \gamma_j t + \eta_j).$$

Llamemos $N_1 = n_2 - n_1$ y definamos la familia polinomial $P(t, \lambda)$ como

$$\begin{aligned}
P(t, \lambda) &= \prod_{j=1}^{m_2} (t + \lambda(\rho_j - \delta_j) + \delta_j) \\
&\quad \prod_{j=m_2+1}^{m_2+N_1} (t^2 + [\lambda(\gamma_j - a_j) + a_j]t + \lambda(\eta_j - b_j) + b_j) \\
&\quad \prod_{j=m_2+N_1+1}^{m_2+n_2} (t^2 + [\lambda(\gamma_j - \alpha_{N_1+j}) + \alpha_{N_1+j}]t + \lambda(\eta_j - \beta_{N_1+j}) + \beta_{N_1+j}),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

para $\lambda \in [0, 1]$. Análogamente, para el caso cuando $m_1 < m_2$, denifimos $N_2 = n_1 - n_2$, y escribimos a $p_0(t)$ y $p_1(t)$ como

$$p_0(t) = \prod_{j=1}^{m_1} (t + \delta_j) \prod_{j=m_1+1}^{m_1+N_2} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j) \prod_{j=m_1+N_2+1}^{m_1+n_1} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j)$$

y

$$p_1(t) = \prod_{j=1}^{m_1} (t + \rho_j) \prod_{j=m_1+1}^{m_1+N_2} (t^2 + c_j t + d_j) \prod_{j=m_1+N_2+1}^{m_1+n_1} (t^2 + \gamma_{N_2+j} t + \eta_{N_2+j}),$$

donde $c_j = \rho_j + \rho_{N_2+j}$ y $d_j = \rho_j \rho_{N_2+j}$, $j = m_1 + 1, \dots, m_1 + N_2$, y la familia polinomial

$P(t, \lambda)$ se escribe como

$$\begin{aligned}
P(t, \lambda) &= \prod_{j=1}^{m_1} (t + \lambda(\rho_j - \delta_j) + \delta_j) \\
&\quad \prod_{j=m_1+1}^{m_1+N_2} (t^2 + [\lambda(c_j - \alpha_j) + \alpha_j]t + \lambda(d_j - \beta_j) + \beta_j) \\
&\quad \prod_{j=m_1+N_2+1}^{m_1+n_1} (t^2 + [\lambda(\gamma_{N_2+j} - \alpha_j) + \alpha_j]t + \lambda(\eta_{N_2+j} - \beta_j) + \beta_j).
\end{aligned}$$

para $\lambda \in [0, 1]$. Obsérvese que en ambos casos se tiene que $P(t, 0) = p_0(t)$ and $P(t, 1) = p_1(t)$. Además, en cada uno de los factores, las combinaciones lineales son positivas y entonces tenemos raíces con parte real negativa. En consecuencia, $P(t, \lambda)$ es Hurwitz para toda $\lambda \in [0, 1]$. □

Observación 3.2.1. *En la construcción de $P(t, \lambda)$, la parte en la cual colapsamos raíces reales en raíces complejas, lo hacemos por medio de factores cuadráticos con raíces reales $t^2 + a_j t + b_j$ a factores cuadráticos con raíces complejas $t^2 + \gamma_j t + \eta_j$. Esta es una forma de asegurar que sigamos teniendo una familia de polinomios real, pues si $t^2 + a_j t + b_j = (t + \delta_{\bar{j}})(t + \delta_{\bar{j}+1})$ y $t^2 + \gamma_j t + \eta_j = (t + z_{\bar{j}})(t + z_{\bar{j}+1})$, y consideramos $[t + \lambda(z_{\bar{j}} - \delta_{\bar{j}}) + \delta_{\bar{j}}][t + \lambda(z_{\bar{j}+1} - \delta_{\bar{j}+1}) + \delta_{\bar{j}+1}]$ como factor de la curva $P(t, \lambda)$, no tendría coeficientes reales si $\delta_{\bar{j}} \neq \delta_{\bar{j}+1}$. Esto es, podríamos colapsar una raíz real en una compleja y perdemos coeficientes reales en la familia $P(t, \lambda)$.*

La curva $P(t, \lambda)$ conecta a $p_0(t)$ y $p_1(t)$ con un arreglo particular de sus raíces. La cuestión sería, si cambiamos el orden de los factores de las raíces, seguiremos teniendo una curva Hurwitz-conectora o al menos una curva equivalente? La respuesta es si, las curvas Hurwitz-conectoras resultantes de diferentes arreglos en los factores de los polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$ son homotópicamente equivalentes.

Teorema 3.2.2. *Cualesquiera par de curvas Hurwitz-conectoras que unan a $p_0(t)$ y $p_1(t)$ son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Supóngase que $m_1 > m_2$ (el caso $m_1 < m_2$ es análogo). Para los polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$ dados en las ecuaciones (4.1) y (4.2), respectivamente, para $s \in [0, 1]$ definamos las funciones lineales

$$\begin{aligned}
R_j(s) &= s(\rho_j - \delta_j) + \delta_j, j = 1, \dots, m_2, \\
B_j(s) &= \begin{cases} s(\gamma_j - a_j) + a_j & \text{si } j = m_2 + 1, \dots, m_2 + N_1 \\ s(\gamma_j - \alpha_{N_1+j}) + \alpha_{N_1+j} & \text{si } j = m_2 + N_1 + 1, \dots, m_2 + n_2, \end{cases} \\
C_j(s) &= \begin{cases} s(\eta_j - b_j) + b_j & \text{si } j = m_2 + 1, \dots, m_2 + N_1 \\ s(\eta_j - \beta_{N_1+j}) + \beta_{N_1+j} & \text{si } j = m_2 + N_1 + 1, \dots, m_2 + n_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Podemos reescribir la curva Hurwitz-conectora $P(t, s)$ dada en (4.3) como

$$P(t, s) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + R_j(s)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + B_j(s)t + C_j(s)] \quad (3.9)$$

De igual manera, con la forma en que se construyó $P(t, s)$, si cambiamos el orden de los factores de $p_0(t)$ y/o $p_1(t)$, podemos obtener otra distinta curva Hurwitz-conectora

$$\tilde{P}(t, s) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + \tilde{R}_j(s)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + \tilde{B}_j(s)t + \tilde{C}_j(s)], \quad s \in [0, 1]$$

tal que $\tilde{P}(t, 0) = p_0(t)$ y $\tilde{P}(t, 1) = p_1(t)$. Definamos la función

$$H(r, s) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + W_j(r)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + X_j(r)t + Y_j(r)], \quad r \in [0, 1] \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} W_j(r) &= r[\tilde{R}_j(s) - R_j(s)] + R_j(s) \\ X_j(r) &= r[\tilde{B}_j(s) - B_j(s)] + B_j(s) \\ Y_j(r) &= r[\tilde{C}_j(s) - C_j(s)] + C_j(s) \end{aligned}$$

No es difícil ver que

$$\begin{aligned} H(0, s) &= P(t, s) & \text{and} & & H(1, s) &= \tilde{P}(t, s) \\ H(r, 0) &= P(t, 0) & \text{and} & & H(r, 1) &= \tilde{P}(t, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto $H(r, s)$ es la homotopía requerida. \square

Observación 3.2.2. *Podría suceder que $P(t, s)$ y $\tilde{P}(t, s)$ tengan diferente configuración en sus coeficientes continuos, es decir,*

$$P(t, s) = \prod_{j=1}^{m_1} [t + R_j(s)] \prod_{j=m_1+1}^{m_1+n_1} [t^2 + B_j(s)t + C_j(s)]$$

y

$$\tilde{P}(t, s) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + \tilde{R}_j(s)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + \tilde{B}_j(s)t + \tilde{C}_j(s)].$$

con $m_1 \neq m_2$. Si es este el caso, se puede utilizar el método de la demostración del teorema 3.2.1 para conectar continuamente a $P(t, s)$ con $\tilde{P}(t, s)$ sin salirnos de \mathcal{MH}_n y así probar que son homotópicas.

Ahora, debido a que siempre podemos unir a cualesquier dos polinomios Hurwitz mediante un camino completamente estable, es posible obtener una trayectoria densa en \mathcal{MH}_n^+ . En adición a la herramienta presentada en la subsección 3.1.1 presentaremos el siguiente lema cuya prueba puede ser vista en [42].

Lema 3.2.1. *El conjunto de polinomios de grado fijo n con coeficientes racionales, $\mathbb{Q}_n[t]$, es un conjunto numerable.*

Del homeomorfismo φ dado por la correspondencia (3.2) tenemos que \mathbb{Q}^{n+1} es homeomorfo a $\mathbb{Q}_n[t]$ y por la numerabilidad y densidad de \mathbb{Q} tenemos que $\mathbb{Q}_n[t]$ es numerable y denso en $\mathbb{R}_n[t]$. Así que, el subconjunto $\mathcal{MH}_n^{+\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_n[t] \cap \mathcal{MH}_n^+$, el cual es el conjunto de polinomios Hurwitz con coeficientes racionales positivos, es numerable y denso en \mathcal{MH}_n^+ . Más aún, por la numerabilidad podemos etiquetar a cada elemento de $\mathcal{MH}_n^{+\mathbb{Q}}$ con un número natural y hacer un listado de estos, digamos, $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_k(t), \dots\}$. Del teorema 3.2.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Existe una trayectoria densa en \mathcal{MH}_n^+ .*

Demostración. Sea $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_j(t), \dots\}$ una enumeración de los elementos de $\mathcal{MH}_n^{+\mathbb{Q}}$. Tomemos $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ y definamos la sucesión $r_j = 1 - r^j$. Luego, $\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $[0, 1]$ tal que $r_0 = 0$ y $r_j \rightarrow 1$ cuando $j \rightarrow \infty$. De aquí que, los elementos de la sucesión $r_0 < r_1 < \dots < r_j < \dots$ definen una partición de $[0, 1]$. Definamos ahora las reparametrizaciones

$$\phi_j(\lambda) = \frac{\lambda - r_{j-1}}{r_j - r_{j-1}}, \quad \lambda \in [r_{j-1}, r_j], \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

donde $\phi_j(r_{j-1}) = 0$ y $\phi_j(r_j) = 1$. Ahora, por el teorema 3.2.1, existe un camino estable $P_j(t, \phi_j(\lambda))$ que une a cada pareja de polinomios Hurwitz $p_{j-1}(t)$ y $p_j(t)$, tal que $P_j(t, \phi_j(r_{j-1})) = p_{j-1}(t)$ y $P_j(t, \phi_j(r_j)) = p_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$. De donde se observa que

$$P_j(t, \phi_j(\lambda)) * P_{j+1}(t, \phi_{j+1}(\lambda)), \quad \lambda \in [r_{j-1}, r_{j+1}],$$

es un camino Hurwitz que va desde $p_{j-1}(t)$ a $p_{j+1}(t)$, donde $*$ es el producto de caminos definido en (3.1). Finalmente, como se hizo en el lema 3.1.1, definimos la trayectoria

$$F(t, \lambda) = P_1(t, \phi_1(\lambda)) * P_2(t, \phi_2(\lambda)) * \dots * P_j(t, \phi_j(\lambda)) * \dots,$$

$\lambda \in [0, 1]$. Esto es, $P_j(t, \phi_j(\lambda)) = F(t, \lambda)|_{[r_{j-1}, r_j]}$, $j = 1, 2, \dots$. Tenemos que la trayectoria $F(t, \lambda)$ pasa por cada elemento de $\mathcal{MH}_n^{+\mathbb{Q}}$, y por tanto, es densa en \mathcal{MH}_n^+ . □

Observación 3.2.3. *Observemos que $F(t, \lambda)$ alcanza y une a todo polinomio de $\mathcal{MH}_n^{+\mathbb{Q}}$ pero no está contenido, dado que tomamos λ real en $I = [0, 1]$ y por tanto $F(t, \lambda)$ no siempre tiene*

(por combinaciones lineales convexas) coeficientes variables racionales. Sin embargo por el contrario, si consideramos a la familia de polinomios

$$F_\lambda := \{F(t, \lambda) : \lambda \in I\}$$

entonces tenemos $\mathcal{MHV}_n^{+\mathbb{Q}} \subset F_\lambda \subset \mathcal{MHV}_n^+$.

3.3. La curva Schur-conectora

Sea $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$ un plinomio real Schur (o Hurwitz). De acuerdo al homeomorfismo φ de correspondencia entre $p(t)$ y su vector de coeficientes (a_0, \dots, a_{n-1}) , diremos que el vector $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ en un *vector Schur* (*vector Hurwitz* resp.) si su polinomio correspondiente es un polinomio Schur (Hurwitz resp.). Denotemos por $\mathcal{MSV}_n \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{MHV}_n^+ \subset \mathbb{R}_+^n$ para el caso Hurwitz) al conjunto de vectores o puntos Schur. Esto nos arroja un homeomorfismo natural h de \mathcal{MHV}_n^+ en \mathcal{MSV}_n dado por $h(p) = \tilde{p}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MHV}_n^+ & \xrightarrow{h} & \mathcal{MSV}_n \\ \varphi^{-1} \downarrow & & \uparrow \varphi \\ \mathcal{MHV}_n^+ & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{MS}_n \end{array}$$

donde, mediante el homeomorfismo φ , $p \in \mathbb{R}^n$ es el vector asociado al polinomio Hurwitz $p(t)$ y $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ es el vector asociado al polinomio Schur $\tilde{p}(t)$; mientras que mediante el homeomorfismo \sim , $\tilde{p}(t)$ es el polinomio Schur asociado al polinomio Hurwitz $p(t)$. Por lo que $(h \circ \varphi)(p(t)) = h(p) = \tilde{p} = \varphi(\tilde{p}(t)) = (\varphi \circ \sim)(p(t))$.

Dado que el mapeo de Möbius $m : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathcal{D}$ es un homeomorfismo, podemos extenderlo a los simétricos correspondientes, a saber,

$$\begin{aligned} m_n : \text{Sym}^n(\mathbb{C}^-) &\rightarrow \text{Sym}^n(\mathcal{D}) \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (m(z_1), \dots, m(z_n)). \end{aligned}$$

Claramente m_n es también un homeomorfismo. Observe que $\overline{m(z)} = m(\bar{z})$ para toda $z \in \mathbb{C}^-$. Esto nos lleva a establecer otro homeomorfismo $h' : \mathcal{MHV}_n^+ \rightarrow \mathcal{MSV}_n$ dado por la correspondencia

$$((-1)^n \sigma_n, \dots, \sigma_2, -\sigma_1) \mapsto ((-1)^n \sigma_n(m_n), \dots, \sigma_2(m_n), -\sigma_1(m_n)),$$

donde

$$\sigma_k = \sigma_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_k},$$

y

$$\sigma_k(m_n) = \sigma_k(m(z_1), \dots, m(z_n)) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} m(z_{i_1}) \cdots m(z_{i_k}),$$

y tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MHV}_n^+ & \xrightarrow{h'} & \mathcal{MSV}_n \\ v_p^{-1} \downarrow & & \uparrow v_p \\ \mathcal{HR} & \xrightarrow{m_n} & \mathcal{SR} \end{array}$$

donde $\mathcal{HR} \subset \text{Sym}^n(\mathbb{C}^-)$ ($\mathcal{SR} \subset \text{Sym}^n(\mathcal{D})$ para el caso Schur) es el conjunto de n -uplas con entradas de \mathbb{C}^- (\mathcal{D} , respectivamente) tal que si z_j es una entrada de (z_1, \dots, z_n) , entonces \bar{z}_j es también una entrada de (z_1, \dots, z_n) . En efecto,

$$\begin{aligned} (h' \circ v_p)(z_1, \dots, z_n) &= h'((-1)^n \sigma_n, \dots, \sigma_2, -\sigma_1) \\ &= ((-1)^n \sigma_n(m_n), \dots, \sigma_2(m_n), \sigma_1(m_n)) \\ &= v_p(m(z_1), \dots, m(z_n)) \\ &= (v_p \circ m_n)(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Observación 3.3.1. *El hecho que $\overline{m(z)} = m(\bar{z})$ para toda $z \in \mathbb{C}^-$, si z_i y z_j entradas de $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{HR}$, $i \neq j$, con $\bar{z}_i = z_j$ implica que $m(z_i)$ y $\overline{m(z_i)} = m(\bar{z}_i)$ son entradas de $(m(z_1), \dots, m(z_n)) \in \mathcal{SR}$ y, por tanto, si las proyecciones σ_k son reales para toda $k = 1, \dots, n$, entonces $\sigma_k(m_n)$ son también reales para toda $k = 1, \dots, n$.*

En adición, de la transformación de Möbius $\tilde{\cdot}: \mathcal{MH}_n^+ \rightarrow \mathcal{MS}_n$ dada por la correspondencia $p(t) \mapsto \tilde{p}(t) = (t-1)^n p(m(t))$, hemos logrado establecer su relación correspondiente $p \mapsto \tilde{p}$, donde $p \in \mathcal{MHV}_n^+$ y $\tilde{p} \in \mathcal{MSV}_n$ son los vectores coeficientes de $p(t)$ y $\tilde{p}(t)$, respectivamente. Alternativamente, la transformación de Möbius $h': \mathcal{MHV}_n^+ \rightarrow \mathcal{MSV}_n$ nos permite establecer el mapeo $\hat{\cdot}: \mathcal{MH}_n^+ \rightarrow \mathcal{MS}_n$, inducido por los mapeos proyectivos $\sigma_k \mapsto \sigma_k(m_n)$, como la correspondencia $p(t) \mapsto \hat{p}(t)$, donde

$$p(t) = \prod_{i=1}^n (t + z_i) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} t + (-1)^n \sigma_n$$

y

$$\hat{p}(t) = \prod_{i=1}^n (t + m(z_i)) = t^n - \sigma_1(m_n) t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(m_n) t + (-1)^n \sigma_n(m_n)$$

Claramente, $\hat{\cdot}$ es también un homeomorfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MH}_n^+ & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{MS}_n \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ \mathcal{MHV}_n^+ & \xrightarrow{h'} & \mathcal{MSV}_n \end{array}$$

pues

$$\begin{aligned}
(h' \circ \varphi)(p(t)) &= h'((-1)^n \sigma_n, \dots, \sigma_2, -\sigma_1) \\
&= ((-1)^n \sigma_n(m_n), \dots, \sigma_2(m_n), -\sigma_1(m_n)) \\
&= \varphi(\hat{p}(t)) \\
&= (\varphi \circ \wedge)(p(t))
\end{aligned}$$

En este sentido tenemos que $p(t)$ es Hurwitz estable si y sólo si $\hat{p}(t)$ es Schur estable. Los homeomorfismos h y h' ($\tilde{\cdot}$ y $\hat{\cdot}$, resp.) vienen a ser transformaciones de Möbius entre los espacios \mathcal{MHV}_n^+ y \mathcal{MSV}_n (\mathcal{MH}_n^+ y \mathcal{MS}_n , resp.); el primero en términos de los coeficientes y la segunda en términos de las raíces.

Ahora, consideremos la curva Hurwitz-conectora **real** (3.9)

$$P(t, \lambda) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + R_j(\lambda)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + B_j(\lambda)t + C_j(\lambda)]$$

dada en la demostración del teorema 3.2.2, para $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, si $z_{m_1+1}, \dots, z_{m_1+2n_1}$ y $w_{m_2+1}, \dots, w_{m_2+2n_2}$ son las raíces complejas (incluyendo multiplicidades) de $p_0(t)$ y $p_1(t)$, respectivamente, podemos suponer que $z_{m_1+j} = \bar{z}_{m_1+n_1+j}$, $j = 1, 2, \dots, n_1$ y $w_{m_2+j} = \bar{w}_{m_2+n_2+j}$, $j = 1, 2, \dots, n_2$. Entonces, por el teorema de dependencia continua de raíces y el principio de exclusión del cero presentados en el capítulo 2, existen n funciones-raíces continuas de $P(t, s)$ contenidas en \mathbb{C}^- para toda $\lambda \in [0, 1]$, las cuales identificaremos con función n -vectorial \mathcal{HR} ,

$$V(\lambda) = (Z_1(\lambda), \dots, Z_n(\lambda)), \quad (3.12)$$

tal que para $\lambda = 0$ tenemos el vector de raíces $V(0) = (\delta_1, \dots, \delta_{m_1}, z_{m_1+1}, \dots, z_n)$ y para $\lambda = 1$, el vector de raíces es $V(1) = (\rho_1, \dots, \rho_{m_2}, w_{m_2+1}, \dots, w_n)$. La transformación m_n aplicada a $V(\lambda)$ nos da la n -ada

$$(m_n \circ V)(\lambda) = (m(Z_1(\lambda)), \dots, m(Z_n(\lambda))), \quad (3.13)$$

donde

$$(m_n \circ V)(0) = (m(\delta_1), \dots, m(\delta_{m_1}), m(z_{m_1+1}), \dots, m(z_n))$$

y

$$(m_n \circ V)(1) = (m(\rho_1), \dots, m(\rho_{m_2}), m(w_{m_2+1}), \dots, m(w_n))$$

El mapeo de Viète nos provee de las funciones continuas

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} Z_{j_1}(\lambda) \cdots Z_{j_k}(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (3.14)$$

y

$$\sigma_k(m_n)(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} m(Z_{j_1}(\lambda)) \cdots m(Z_{j_k}(\lambda)), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (3.15)$$

y así obtenemos el siguiente teorema análogo al teorema 3.2.1.

Teorema 3.3.1. *Dados dos polinomios arbitrarios $\hat{p}_0(t)$ y $\hat{p}_1(t)$ en \mathcal{MS}_n , existe un camino $\hat{P}(t, \lambda)$ en \mathcal{MS}_n que une a $\hat{p}_0(t)$ y $\hat{p}_1(t)$.*

Demostración. Supóngase que $\hat{p}_0(t) = \prod_{j=1}^n (t + \hat{z}_j)$ y $\hat{p}_1(t) = \prod_{j=1}^n (t + \hat{w}_j)$. Si $m^{-1}(\hat{z}_j) = z_j$ y $m^{-1}(\hat{w}_j) = w_j$, entonces del teorema 3.2.1 aplicado a los polinomios correspondientes (vía la inversa de $\hat{\cdot}$) $p_0(t) = \prod_{j=1}^n (t + z_j)$ y $p_1(t) = \prod_{j=1}^n (t + w_j)$, más las proyecciones (3.14), obtenemos una curva Hurwitz de la forma

$$P(t, \lambda) = t^n - \sigma_1(\lambda)t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(\lambda)t + (-1)^n\sigma_n(\lambda),$$

donde $\sigma_k(0) = \sigma_k(z_1, \dots, z_n)$ y $\sigma_k(1) = \sigma_k(w_1, \dots, w_n)$, para $k = 1, \dots, n$. Aplicamos directamente la transformación de Möbius $\hat{\cdot}$ a la curva Hurwitz $P(t, \lambda)$ y obtenemos la curva Schur

$$\hat{P}(t, \lambda) = t^n - \sigma_1(m_n)(\lambda)t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(m_n)(\lambda)t + (-1)^n\sigma_n(m_n)(\lambda),$$

donde $\sigma_k(m_n)(\lambda)$ son las proyecciones (3.15) tales que

$$\begin{aligned} \sigma_k(m_n)(0) &= \sigma_k(m(z_1), \dots, m(z_n)) \\ &= \sigma_k(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_k(m_n)(1) &= \sigma_k(m(w_1), \dots, m(w_n)) \\ &= \sigma_k(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n). \end{aligned}$$

Pot lo tanto, $\hat{P}(t, \lambda)$ es un camino Schur que va desde $\hat{p}_0(t)$ a $\hat{p}_1(t)$, como deseabamos. \square

Tomando las ideas de conexión dadas en el teorema anterior e invocando el teorema 3.2.2, tenemos que el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 3.3.1. *Cualesquier par de curvas Schur-conectoras que unan a $\hat{p}_0(t)$ y $\hat{p}_1(t)$ son homotópicamente equivalentes.*

Análogo a lo hecho para el teorema 3.2.3, tenemos que la numerabilidad del conjunto $\mathcal{MS}_n^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_n[t] \cap \mathcal{MS}_n$ nos lleva a la enumeración $\{\hat{p}_0(t), \hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t), \dots\}$, y como un resultado inmediato de los teoremas 3.2.3 y 3.3.1 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. *Existe una trayectoria densa $\hat{F}(t, \lambda)$ en \mathcal{MS}_n .*

Demostración. Sea $\{\hat{p}_0(t), \hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t), \dots\}$ una enumeración de $\mathcal{MS}_n^{\mathbb{Q}}$. Considere las reparametrizaciones $\phi_j(\lambda)$ dadas por (3.11). Por los teoremas 3.2.3 y 3.3.1 obtenemos los caminos $\hat{P}_j(t, \phi_j(\lambda))$, $\lambda \in [r_{j-1}, r_j]$, con $\hat{P}_j(t, \phi_j(r_{j-1})) = \hat{p}_{j-1}(t)$ y $\hat{P}_j(t, \phi_j(r_j)) = \hat{p}_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$. Finalmente, definamos la trayectoria

$$\hat{F}(t, \lambda) = \hat{P}_1(t, \phi_1(\lambda)) * \hat{P}_2(t, \phi_2(\lambda)) * \dots * \hat{P}_j(t, \phi_j(\lambda)) * \dots, \quad \lambda \in [0, 1]$$

la cual es densa en \mathcal{MS}_n . □

La observación correspondiente al teorema 3.3.1 es análoga a la observación 3.2.1 hecha para el teorema 3.2.1. Así como la observación 3.2.3 hecha para el teorema 3.2.3, puede ser hecha análogamente para el teorema 3.3.2 si definimos el conjunto

$$\hat{F}_\lambda := \left\{ \hat{F}(t, \lambda) : \lambda \in I \right\},$$

y entonces obtenemos $\mathcal{MS}_n^{\mathbb{Q}} \subset \hat{F}_\lambda \subset \mathcal{MS}_n$.

Finalmente, con las proyecciones (3.14) y (3.15) definimos las funciones n -vectoriales

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= ((-1)^n \sigma_n(\lambda), \dots, \sigma_2(\lambda), -\sigma_1(\lambda)) \\ h'(P)(\lambda) &= ((-1)^n \sigma_n(m_n)(\lambda), \dots, \sigma_2(m_n)(\lambda), -\sigma_1(m_n)(\lambda)) \end{aligned}$$

y obtenemos el siguiente resultado inmediato.

Corolario 3.3.2. *Dados dos puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{MHV}_n^+$ (resp. $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \mathcal{MSV}_n$) existe un camino $P(\lambda) \subset \mathcal{MHV}_n^+$ (resp. $h'(P)(\lambda) \subset \mathcal{MSV}_n$) que une a p_1 y p_2 (resp. \hat{p}_1 and \hat{p}_2).*

De la misma forma, con producto de caminos obtenemos las respectivas curvas densas para los subespacios de estabilidad en \mathbb{R}^n .

Corolario 3.3.3. *Existe una curva densa $F(\lambda)$ (resp. $\hat{F}(\lambda)$) en \mathcal{MHV}_n^+ (resp. \mathcal{MSV}_n).*

En resumen, hemos obtenido explícitamente, mediante combinaciones lineales convexas, una curva conectora $P(t, \lambda)$ en \mathcal{MH}_n^+ . Utilizando tal curva y el producto de caminos, fué posible construir una curva densa $F(t, \lambda)$ totalmente (estable) contenida en \mathcal{MH}_n^+ . Después, con el mapeo de Viète, se estableció la relación entre las raíces de un polinomio y su vector de coeficientes. Además, con la ayuda del mapeo de Möbius, pudimos encontrar otra caracterización de la transformación de Möbius, y la utilizamos para encontrar la correspondiente curva conectora y trayectoria densa en \mathcal{MS}_n . Finalmente, si $P(t, \lambda)$ (resp. $\hat{P}(t, \lambda)$) es una curva conectora en \mathcal{MH}_n^+ (resp. \mathcal{MS}_n), entonces $P(\lambda)$ (resp. $h'(P)(\lambda)$) es una curva conectora en \mathcal{MHV}_n^+ (resp. \mathcal{MSV}_n). De la misma manera $F(\lambda) = P_1(\lambda) * P_2(\lambda) * \dots$ (resp. $\hat{F}(\lambda) = \hat{P}_1(\lambda) * \hat{P}_2(\lambda) * \dots$) es una curva densa en \mathcal{MHV}_n^+ (resp. \mathcal{MSV}_n).

Capítulo 4

Aplicación: control de la bifurcación de Hopf

El objetivo en este capítulo, es presentar el diseño de un control de retroalimentación lineal utilizando la curva Hurwitz-conectora para sistemas no lineales con el cual se provoca y se controla la bifurcación de Hopf.

Como se vió en el capítulo anterior, teorema 3.2.1, dados los polinomios Hurwitz $p_0(t)$ y $p_1(t)$ escritos en la forma

$$p_0(t) = \prod_{j=1}^{m_1} (t + \delta_j) \prod_{j=m_1+1}^{m_1+n_1} (t^2 + \alpha_j t + \beta_j), \quad (4.1)$$

y

$$p_1(t) = \prod_{j=1}^{m_2} (t + \rho_j) \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} (t^2 + \gamma_j t + \eta_j), \quad (4.2)$$

donde $\delta_j, \alpha_j, \beta_j, \rho_j, \gamma_j, \eta_j$ son positivos para toda j , y $p_0(t)$ tiene m_1 raíces reales y $2n_1$ complejas (incluyendo multiplicidades), y $p_1(t)$ tiene m_2 raíces reales y $2n_2$ complejas (incluyendo multiplicidades). Si $m_1 > m_2$ (el caso $m_1 < m_2$ es análogo), definamos para $s \in [0, 1]$ las funciones lineales

$$\begin{aligned} R_j(s) &= s(\rho_j - \delta_j) + \delta_j, j = 1, \dots, m_2, \\ B_j(s) &= \begin{cases} s(\gamma_j - a_j) + a_j & \text{para } j = m_2 + 1, \dots, m_2 + N_1 \\ s(\gamma_j - \alpha_{N_1+j}) + \alpha_{N_1+j} & \text{para } j = m_2 + N_1 + 1, \dots, m_2 + n_2, \end{cases} \\ C_j(s) &= \begin{cases} s(\eta_j - b_j) + b_j & \text{para } j = m_2 + 1, \dots, m_2 + N_1 \\ s(\eta_j - \beta_{N_1+j}) + \beta_{N_1+j} & \text{para } j = m_2 + N_1 + 1, \dots, m_2 + n_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, la curva real Hurwitz-conectora entre $p_0(t)$ y $p_1(t)$ está dada por

$$P(t, s) = \prod_{j=1}^{m_2} [t + R_j(s)] \prod_{j=m_2+1}^{m_2+n_2} [t^2 + B_j(s)t + C_j(s)] \quad (4.3)$$

4.1. Formas multilineales y tensores

Debido a cálculos naturales que aparecerán durante el desarrollo de este trabajo, debemos definir una operación entre un vector o una matriz y un tensor, para obtener una notación más corta y adecuada [25]. Primero, sea $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$. A continuación se presentan algunas nociones básicas acerca de formas multilineales en \mathbb{R} , así como tensores, los cuales generalizan el concepto de matriz (ver [29, 73, 56]). Consideremos a \mathbb{R}^n como espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Para un entero positivo k , una k -forma *multilineal* es una función

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : (\mathbb{R}^n)^{\times k} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto \mathcal{T}(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

tal que \mathcal{T} es lineal en todos sus argumentos, esto es

$$\mathcal{T}(x_1, \dots, ax_i + by, \dots, x_k) = a\mathcal{T}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) + b\mathcal{T}(x_1, \dots, y, \dots, x_k)$$

para toda $i = 1, \dots, k$, donde $x_i, y \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}^n)^{\times k}$ es el producto cartesiano de \mathbb{R}^n consigo mismo k -veces. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica para \mathbb{R}^n , entonces cada $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T$ es la combinación lineal $x_i = x_{i1}e_1 + \dots + x_{in}e_n$ y por la multilinealidad se puede expresar a $\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k)$ como

$$\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{1_j, \dots, k_j=1}^n x_{1_j} \cdots x_{k_j} \mathcal{T}(e_{1_j}, \dots, e_{k_j}),$$

donde $x_{1_j} \cdots x_{k_j}$ son llamadas las coordenadas de $\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k)$ con respecto a la base $\{e_i\}$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}(e_{1_j}, \dots, e_{k_j})$ son las entradas de un arreglo que consta de n^{k-2} matrices de tamaño $n \times n$, $k \geq 2$. Así, a cada k -forma multilineal $\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k)$ podemos asignarle biunívocamente el arreglo \mathcal{T} , el cual está determinado de manera única por la base \mathcal{B} . A estos arreglos se les conoce como *tensores contravariantes* ó $(0, k)$ -tensores. En este trabajo les estaremos llamando k -tensores y lo denotemos por $\mathbb{T}^k(\mathbb{R}^n)$. Las 1-formas son simplemente funcionales lineales y su tensor asociado es un vector en \mathbb{R}^n , mientras que las 2-formas son llamadas formas bilineales y su tensor asociado es una matriz de tamaño $n \times n$. En este sentido podemos identificar a $\mathbb{T}^1(\mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R}^n y a $\mathbb{T}^2(\mathbb{R}^n)$ con $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Para $k = 0$, identificamos a $\mathbb{T}^0(\mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R} . Una k -forma $\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k)$ se dice ser *simétrica* si

$$\begin{aligned} (\pi \circ \mathcal{T})(x_1, \dots, x_k) &= \mathcal{T}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}), \\ &= \mathcal{T}(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

para cualquier permutación $\pi \in \mathcal{S}_k$, y diremos que es *antisimétrica* si $(\pi \circ \mathcal{T})(x_1, \dots, x_k) = -\mathcal{T}(x_1, \dots, x_k)$. Por tanto, a su tensor asociado también le diremos que es simétrico o antisimétrico, según sea el caso. Para una forma bilineal simétrica del tipo $Q(x, x)$ se define la función $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x) = Q(x, x)$ llamada *forma cuadrática* tal que $Q(x) = x^T Q x$, donde Q es el tensor asociado a la forma bilineal $Q(x, x)$. Similarmente, dada la forma trilineal $\mathcal{T}(x, x, x)$, su forma cúbica asociada es la función $T(x) = \mathcal{T}(x, x, x) = x^T (x^T \mathcal{T} x)$, con \mathcal{T} su 3-tensor asociado.

Definición 4.1.1. Sean

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \quad y \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{T}_k \end{pmatrix}$$

un vector en \mathbb{R}^k y un tensor en $\mathbb{T}^{k+2}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Definimos el producto de v con \mathcal{T} como el mapeo

$$\bullet : \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{k+2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$(v, \mathcal{T}) \mapsto v \bullet \mathcal{T} = \sum_{j=1}^k v_j \mathcal{T}_j$$

Podemos extender aún más este mapeo para una matriz en lugar de un vector, es decir, si $A = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_k]$ es una matriz de tamaño $k \times k$, donde $A_j^T = (a_{1j}, \dots, a_{kj})$ son los vectores columna de A , el producto está definido como

$$\bullet : \text{GL}_k(\mathbb{R}) \times \mathbb{T}^{k+2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{T}^{k+2}(\mathbb{R}^n)$$

$$(A, \mathcal{T}) \mapsto A \bullet \mathcal{T} = \begin{pmatrix} A_1 \bullet \mathcal{T} \\ A_2 \bullet \mathcal{T} \\ \vdots \\ A_k \bullet \mathcal{T} \end{pmatrix},$$

con $A_i \bullet \mathcal{T} = \sum_{j=1}^k a_{ij} \mathcal{T}_j$, para $i = 1, \dots, k$.

4.2. La bifurcación de Hopf en el plano

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{4.4}$$

donde $x = (x_1, x_2)$, son las coordenadas locales de una variedad M (variedad de espacio de estados) y F es un campo vectorial suave en M , representado en coordenadas locales y $\mu \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$. Tomaremos a \mathbb{R}^2 como coordenadas locales. Suponga que x_0 es un punto de equilibrio tal que $F_x(x_0) = A(\mu)$ tiene valores propios $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm \beta(\mu)$. El siguiente teorema de la bifurcación de Hopf, en su versión de dos dimensiones, fué probado por Andronov alrededor de 1930 [12] y Poincaré trabajó en el alrededor de 1890 [71]. Hopf probó el teorema para una dimensión arbitraria (finita) en 1942 (ver [46] y para una versión en inglés, ver la sección 5 en [65]).

Teorema 4.2.1 (Bifurcación de Hopf). *Considere el sistema no lineal (4.4) y suponga que para algún valor μ_0 se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $d = \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} \neq 0$ (condición de transversalidad),

2. $l_1 \neq 0$ (condición de generacidad),

donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov. Entonces un único ciclo límite bifurca del equilibrio x_0 para $\mu > 0$ si $l_1 d < 0$ ó $\mu < 0$ si $l_1 d > 0$.

Así que, el punto de equilibrio x_0 es estable para $\mu < 0$ (resp. $\mu > 0$) y es inestable para $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) si $d > 0$ (resp. $d < 0$), mientras que las soluciones periódicas son inestables (resp. estables) si el punto de equilibrio es estable (resp. inestable) del lado de μ_0 en donde las soluciones periódicas existen. Respecto al primer coeficiente de Lyapunov, si $l_1 < 0$, entonces las soluciones periódicas son estables, y si $l_1 > 0$, entonces las soluciones periódicas son inestables. Existe una expresión para calcular el primer coeficiente de Lyapunov en el cual, para el preciso valor μ_0 , el sistema posee un par de valores propios complejos puros $\lambda_{1,2}(\mu_0) = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. El siguiente teorema nos muestra tal fórmula y podemos ver una prueba de este en [53].

Teorema 4.2.2 (Primer coeficiente de Lyapunov). *Considere el sistema*

$$\dot{x} = Jx + F(x) \quad (4.5)$$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$, $F(x_0) = 0$ y $DF(x_0) = 0$. Entonces

$$l_1 = \frac{1}{16\omega_0}(R_1 + \omega_0 R_2), \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) \\ &\quad - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2}, \\ R_2 &= F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2}. \end{aligned}$$

4.3. Formulación del Problema

Consideremos el sistema no lineal afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.7)$$

donde $x^T = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, f y g son campos vectoriales lo suficientemente suaves en x , y $u(\cdot)^T$ el control escalar de retroalimentación de estados, el cual toma valores en un conjunto $I \subset \mathbb{R}$.

Escribiremos los campos vectoriales como

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix},$$

con derivadas

$$\begin{aligned} Df(x) &= \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ Df_2(x) \end{pmatrix}, \\ Dg(x) &= \begin{pmatrix} Dg_1(x) \\ Dg_2(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y consideremos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 2. Para el sistema 4.7, supóngase que

$$H1) \ x = x_0 \text{ es un punto tal que } f(x_0) = 0 \text{ y } g(x_0) = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

H2) La jacobiana $A = Df(x)|_{x=x_0}$ tiene valores propios $\lambda, \bar{\lambda} = \rho \pm i\sigma$, $\sigma > 0$, y está expresada en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

y cuyo polinomio característico es $p_A(t) = t^2 + a_2t + a_1$, donde $a_1 = |\lambda|^2$ y $a_2 = -2\text{Re}(\lambda)$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que el origen es un punto de equilibrio, esto es $x_0 = 0$. Ahora, calculando la serie de Taylor alrededor del origen del sistema (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + F_2(x) + F_3(x) + \dots \\ &+ (b + Mx + G_2(x) + \dots)u, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $M = Dg(0)$ es una matriz, $F_2(x) = \begin{pmatrix} F_{21}(x) \\ F_{22}(x) \end{pmatrix}$ y $G_2(x) = \begin{pmatrix} G_{21}(x) \\ G_{22}(x) \end{pmatrix}$ son los términos cuadráticos con $F_{2j}(x) = \frac{1}{2}x^T(D^2f_j(0))x$ y $G_{2j}(x) = \frac{1}{2}x^T(D^2g_j(0))x$ formas cuadráticas las cuales tienen a $D^2f_j(0)$ y $D^2g_j(0)$ como sus 2-tensores asociados, respectivamente. Además, $F_3(x) = \begin{pmatrix} F_{31}(x) \\ F_{32}(x) \end{pmatrix}$ es la función vectorial de términos cúbicos en la cual las funciones escalares $F_{3j}(x) = \frac{1}{6}x^T[x^T(D^3f_j(0))x]$ son formas cúbicas, con $D^3f_j(0)$ sus 3-tensores asociados de las terceras derivadas parciales del campo.

Note que para una notación más corta se está escribiendo $D^2f_j(0)$ en lugar de $D^2f_j(x)|_{x=0}$; así como $D^2g_j(0) = D^2g_j(x)|_{x=0}$ y $D^3f_j(0) = D^3f_j(x)|_{x=0}$.

Para el sistema (4.7) con las hipótesis H1) y H2) abordaremos el problema de diseñar un control de retroalimentación **lineal** de la forma $u(x, \mu) = -c(\mu)^T x$, para provocar y controlar la bifurcación de Hopf, donde μ es el parámetro de bifurcación.

Sean $p(t) = t^2 + p_2t + p_1$ y $q(t) = t^2 + q_2t + q_1$ polinomios reales con raíces $\zeta, \bar{\zeta} = \alpha \pm i\beta$ y $z, \bar{z} = \gamma \pm i\eta$, respectivamente, tales que $\alpha\gamma < 0$ y $\beta, \eta > 0$. Entonces obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *El control de retroalimentación $u(x, \mu) = -c(\mu)^T x$, donde*

$$c(\mu)^T = (\Delta_1(\mu) - a_1, \Delta_2 - a_2),$$

con $\Delta_1(\mu) = |(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta|^2$, $\Delta_2(\mu) = -2\text{Re}[(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta]$ y $s^* = -\frac{\alpha}{\gamma - \alpha}$, provoca la bifurcación de Hopf en el sistema (4.7) con las hipótesis H1) y H2), donde μ es el parámetro de bifurcación.

Demostración. Consideremos los polinomios $p(t)$ y $q(t)$ mencionados anteriormente (los cuales nos ayudarán en el diseño). Entonces la curva

$$\begin{aligned} p(t, s) &= (t - [s(z - \zeta) + \zeta])(t - [s(\bar{z} - \bar{\zeta}) + \bar{\zeta}]) \\ &= t^2 - 2\text{Re}[s(z - \zeta) + \zeta]t + |s(z - \zeta) + \zeta|^2 \\ &= t^2 + \delta_2(s)t + \delta_1(s) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\delta_2(s) = -2\text{Re}[s(z - \zeta) + \zeta]$ y $\delta_1(s) = |s(z - \zeta) + \zeta|^2$, es una curva **real** tal que $p(t, 0) = p(t)$ y $p(t, 1) = q(t)$. Se requiere que la recta $s(z - \zeta) + \zeta$ contenga al número complejo λ , el cual es un valor propio de A , en algún instante $s_0 \in [0, 1]$. La forma de incluir a λ es haciendo

$$s_0[(\gamma - \alpha) + \alpha] + i[s_0(\eta - \beta) + \beta] = \rho + i\sigma,$$

el cual tiene que seguir la relación

$$s_0 = \frac{\rho - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\sigma - \beta}{\eta - \beta}, \quad (4.10)$$

con $\gamma < 0 \leq \rho \leq \alpha$ ó $\alpha < 0 \leq \rho \leq \gamma$ para $\rho \geq 0$; o en el caso $\rho \leq 0$, la relación a seguir sería $\gamma \leq \rho \leq 0 < \alpha$ ó $\alpha \leq \rho \leq 0 < \gamma$; además $\beta \leq \sigma \leq \eta$ ó $\eta \leq \sigma \leq \beta$ para asegurar que $0 \leq s_0 \leq 1$. Por otro lado, dado que la función $s(z - \zeta) + \zeta$ es una combinación lineal convexa entre números complejos con parte imaginaria distinta de cero, entonces la curva completa (4.9) siempre tiene raíces con parte imaginaria distinta de cero. Así que, las raíces de $p(t, s)$ cruzan el eje imaginario en algún momento, digamos s^* , y para este valor del parámetro el polinomio $p(t, s^*)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros $\pm i\omega_0$. Para conocer el momento s^* , debemos hacer $\delta_2(s^*) = -2\text{Re}[s^*(z - \zeta) + \zeta] = 0$. Por tanto, el valor s^* está dado explícitamente por

$$\begin{aligned} s^* &= -\frac{\text{Re}(\zeta)}{\text{Re}(z - \zeta)} \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma - \alpha}. \end{aligned}$$

Observe que $0 < s^* < 1$. De aquí que

$$\begin{aligned}
 p(t, s^*) &= t^2 + \delta_2(s^*)t + \delta_1(s^*) \\
 &= t^2 + |s^*(z - \zeta) + \zeta|^2 \\
 &= t^2 + \left| -\frac{\alpha}{(\gamma - \alpha)} [(\gamma - \alpha) + i(\eta - \beta)] + \alpha + i\beta \right|^2 \\
 &= t^2 + \left| \frac{\beta\gamma - \alpha\eta}{\gamma - \alpha} \right|^2,
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos el valor $\omega_0 = \frac{\beta\gamma - \alpha\eta}{\gamma - \alpha} > 0$ en terminos de los parámetros a diseñar. Ahora, definamos el cambio de variable $\mu = s - s^*$. Entonces

$$\begin{aligned}
 P(t, \mu) &= p(t, \mu + s^*) \\
 &= t^2 - 2\text{Re}[(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta]t + |(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta|^2 \\
 &= t^2 + \Delta_2(\mu)t + \Delta_1(\mu)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $\Delta_1(\mu) = |(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta|^2$ y $\Delta_2(\mu) = -2\text{Re}[(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta]$. Así, $P(t, -s^*) = p(t)$, $P(t, s_0 - s^*) = p_A(t)$, $P(t, 0) = p(t, s^*)$ y $P(t, 1 - s^*) = q(t)$.

Definamos el control escalar lineal de retroalimentación de estados $u(x, \mu) = -c(\mu)^T x$, donde

$$c(\mu)^T = (\Delta_1(\mu) - a_1, \Delta_2(\mu) - a_2), \tag{4.12}$$

con $c(0)^T = (\omega_0^2 - a_1, -a_2)$, y cerramos el lazo en el sistema (4.8) a lo que obtendremos

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + F_2(x) + F_3(x) + \dots \\
 &\quad + [b + Mx + G_2(x) + \dots](-c(\mu)^T x) \\
 &= (A - bc(\mu)^T)x + (F_2(x) - Mxc(\mu)^T x) \\
 &\quad + (F_3(x) - G_2(x)c(\mu)^T x) + \dots \\
 &= A_c(\mu)x + \tilde{F}_2(x, \mu) + \tilde{F}_3(x, \mu) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_c(\mu) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta_1(\mu) & -\Delta_2(\mu) \end{pmatrix}, \\
 \tilde{F}_2(x, \mu) &= F_2(x) - Mxc(\mu)^T x, \\
 \tilde{F}_3(x, \mu) &= F_3(x) - G_2(x)c(\mu)^T x,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

con

$$A_c(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Así que, el control $u(x, \mu)$ es un control de retroalimentación que provoca la bifurcación de Hopf en el sistema (4.7) en una vecindad de $\mu = 0$. \square

Observación 4.3.1. En la ecuación de s_0 (4.10) tenemos que si $\beta = \sigma$ (resp. $\eta = \sigma$) entonces $\eta = \sigma$ (resp. $\beta = \sigma$) y $s_0 = \frac{\rho - \alpha}{\gamma - \alpha}$.

Observación 4.3.2. Recordemos que α, β, γ y η son de diseño y, dado que la curva $p(t, s)$ inicia en $p(t)$ y termina en $q(t)$, podemos decidir el signo de α y γ tal que $\alpha\gamma < 0$ y la familia de polinomios $p(t, s)$ pasa de tener raíces en \mathbb{C}^- a tener raíces en \mathbb{C}^+ ó viceversa. Por ejemplo, si deseamos que las raíces viajen de \mathbb{C}^- a \mathbb{C}^+ , entonces diseñaremos α y γ tal que, dependiendo del signo de ρ , $\alpha < 0 \leq \rho \leq \gamma$ ó $\alpha \leq \rho \leq 0 < \gamma$. Ya tomados los valores de α y γ , el diseño de β y η es justamente para asignarle la pendiente adecuada a la recta que une a ζ y z ; tales valores los diseñamos siguiendo la relación (4.10) con la restricción $\beta \leq \sigma \leq \eta$ o $\eta \leq \sigma \leq \beta$ y el hecho de que $\omega_0 = \frac{\beta\gamma - \alpha\eta}{\gamma - \alpha} > 0$, para el cual debemos resolver, en las variables β y η , el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta\gamma - \eta\alpha &= \omega_0(\gamma - \alpha) \\ \beta(\gamma - \rho) + \eta(\rho - \alpha) &= \sigma(\gamma - \alpha). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora estamos en posición de establecer el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.3.1. Consideremos el sistema (4.7) con las hipótesis H1) y H2). Entonces el control lineal $u(x, \mu) = -c(\mu)^T x$ del lema 4.3.1 es un control de retroalimentación que controla la bifurcación de Hopf si el polinomio $\tilde{l}(y) = k_1 y^3 + k_2 y^2 + k_3 y + k_4$ tiene al menos una raíz positiva, donde

$$\begin{aligned} k_1 &= g_{1x_2}(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) - 3g_{1x_1x_1} \\ k_2 &= 4g_{1x_1}g_{2x_1} - (f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2})(f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2}) \\ &\quad + g_{2x_2}(2g_{2x_1} - 2a_1g_{2x_2} - f_{2x_2x_2}) + g_{1x_2}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\ &\quad - (f_{1x_1x_2} + 2a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2})(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) \\ &\quad + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_2x_2x_2} + a_2(2g_{1x_1x_2} + 3g_{2x_2x_2}) - 2g_{2x_1x_2} + a_1g_{1x_2x_2} \\ k_3 &= -(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{1x_1x_2} + a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2}) - g_{2x_2}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\ &\quad + (f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2} - 2g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}) \\ &\quad - 2g_{1x_1}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) - 2g_{2x_1}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\ &\quad + f_{1x_1x_1x_1} + f_{2x_1x_1x_2} + a_2g_{2x_1x_1} + a_1(3a_1g_{1x_1x_1} + 2g_{2x_1x_2}) \\ k_4 &= (f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\ &\quad + (f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}). \end{aligned}$$

Para demostrar este teorema utilizaremos las ideas del teorema 4.2.1 y la formula del primer coeficiente de Lyapunov del teorema 4.2.2.

4.4. Maquinaria para la prueba del teorema 4.3.1

En esta sección, dirigiremos el análisis hacia el control de signo de la velocidad de cruce y del primer coeficiente de Lyapunov utilizando las expresiones mencionadas en los teoremas 4.2.1 y 4.2.2.

4.4.1. La velocidad de cruce

Para lograr el control de la velocidad de cruce aprovecharemos los cálculos hechos en la sección anterior del diseño del control $u(x, \mu)$ para obtener el siguiente lema.

Lema 4.4.1. *Consideremos el sistema (4.7) en lazo cerrado con el control $u(x, \mu)$ del lema 4.3.1. Entonces la velocidad de cruce $d \neq 0$.*

Demostración. Dado que $A_c(\mu)$ está en forma de Brunowsky, entonces su polinomio característico es $P(t, \mu)$, y por tanto, los valores propios son $\lambda_c(\mu)$ y $\bar{\lambda}_c(\mu)$, donde

$$\begin{aligned}\lambda_c(\mu) &= (\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta \\ &= (\mu + s^*)(\gamma - \alpha) + \alpha + i[(\mu + s^*)(\eta - \beta) + \beta] \\ &= \rho_c(\mu) + i\sigma_c(\mu)\end{aligned}$$

con $\rho_c(\mu) = (\mu + s^*)(\gamma - \alpha) + \alpha$ y $\sigma_c(\mu) = (\mu + s^*)(\eta - \beta) + \beta$. En consecuencia, la velocidad de cruce está dada por

$$d = \left. \frac{d\rho_c(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \gamma - \alpha.$$

Dado que $\alpha\gamma < 0$, entonces $d \neq 0$ □

El hecho de que $d \neq 0$, nos permite diseñar α y γ de tal forma que podemos controlar el signo de d . Esto es, si $\alpha < 0$ entonces para $\mu < 0$ en origen es estable y para $\mu > 0$ el origen es inestable y por tanto $d > 0$; si $\alpha > 0$, para $\mu < 0$ el origen es inestable, mientras que para $\mu > 0$ es estable y $d < 0$.

4.4.2. El Primer Coeficiente de Lyapunov

Para calcular el primer coeficiente de Lyapunov debemos llevar la matriz $A_c(\mu)$, para $\mu = 0$ (dado que es el momento para el cual se tienen un par de valores propios imaginarios puros), en la forma que requiere el teorema 4.2.2.

Lema 4.4.2. *Existe un cambio de coordenadas de la forma $z = Q^{-1}x$ tal que el sistema (4.13) en $\mu = 0$ se expresa de la forma*

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} z + \bar{F}_2(z) + \bar{F}_3(z) + \dots \quad (4.17)$$

donde $\bar{F}_2(z) = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1(z, z) \\ \mathcal{M}_2(z, z) \end{pmatrix}$ y $\bar{F}_3(z) = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(z, z, z) \\ \mathcal{T}_2(z, z, z) \end{pmatrix}$, con \mathcal{M}_j 2-tensores y \mathcal{T}_j 3-tensores.

Demostración. De (4.14) y (4.15) tenemos que

$$\begin{aligned} A_c(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Delta_1(0) & -\Delta_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y al calcular los vectores propios de $A_c(0)$, obtenemos la matriz cambio de base Q , donde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

con inversa

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definamos el cambio de coordenadas $z = Q^{-1}x$ para llevar al sistema (4.13) a la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Q^{-1}A_c(0)Qz + Q^{-1}(\tilde{F}_2(Qz, 0) + \tilde{F}_3(Qz, 0) + \dots) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} z + \bar{F}_2(z) + \bar{F}_3(z) + \dots \end{aligned}$$

para el cual $\bar{F}_2(z) = Q^{-1}\tilde{F}_2(Qz, 0)$ y $\bar{F}_3(z) = Q^{-1}\tilde{F}_3(Qz, 0)$. De los términos cuadráticos tenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(z) &= Q^{-1}\tilde{F}_2(Qz, 0) \\ &= Q^{-1}[F_2(Qz) - MQzc(0)^T Qz] \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde la primera parte de la suma del lado derecho puede ser escrita como

$$\begin{aligned} Q^{-1}F_2(Qz) &= \frac{1}{2}Q^{-1}(Qz)^T D^2 f(0)Qz \\ &= \frac{1}{2}Q^{-1}z^T Q^T D^2 f(0)Qz \\ &= \frac{1}{2}Q^{-1}D^2 f(0)(Q, Q)(z, z), \end{aligned}$$

mientras que la segunda parte se puede escribir como

$$\begin{aligned} Q^{-1}MQzc(0)^T Qz &= Q^{-1}Dg(0)Qz(c(0)^T Qz) \\ &= Q^{-1}(c(0)^T Qz)Dg(0)Qz \\ &= Q^{-1}z^T Q^T [c(0)Dg(0)]Qz \\ &= Q^{-1}[c(0)Dg(0)](Q, Q)(z, z) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} c(0)Dg(0) &= c(0) \begin{pmatrix} \nabla g_1(0) \\ \nabla g_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(0)\nabla g_1(0) \\ c(0)\nabla g_2(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde $c(0)\nabla g_j(0)$ son 2-tensores, $j = 1, 2$. Así que, podemos escribir la ecuación (4.20) como

$$\bar{F}_2(z) = Q^{-1} \frac{1}{2} [D^2 f(0) - 2c(0)Dg(0)](Q, Q)(z, z). \quad (4.19)$$

Si hacemos $\mathcal{M}_j = \frac{1}{2}[D^2 f_j(0) - 2c(0)Dg_j(0)](Q, Q)$, entonces $\bar{F}_2(z)$ se expresa como

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(z) &= Q^{-1} \mathcal{M}(z, z) \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1(z, z) \\ \mathcal{M}_2(z, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Similarmente, los términos cúbicos del sistema (4.18) están dados por la ecuación

$$\bar{F}_3(z) = Q^{-1} F_3(Qz) - Q^{-1} G_2(Qz) c(0)^T Qz.$$

podemos reescribir la primer parte de la suma como

$$\begin{aligned} Q^{-1} F_3(Qz) &= \frac{1}{6} Q^{-1} (Qz)^T [(Qz)^T D^3 f(0) Qz] \\ &= \frac{1}{6} Q^{-1} z^T Q^T [z^T Q^T D^3 f(0) Qz] \\ &= \frac{1}{6} Q^{-1} D^3 f(0)(Q, Q, Q)(z, z, z). \end{aligned}$$

La segunda parte de la suma es

$$\begin{aligned} Q^{-1} G_2(Qz) c(0)^T Qz &= Q^{-1} \left[\frac{1}{2} (Qz)^T D^2 g(0) (Qz) \right] c(0)^T Qz \\ &= \frac{1}{2} Q^{-1} [z^T Q^T D^2 g(0) (Qz)] z^T Q^T c(0) \\ &= \frac{1}{2} Q^{-1} z^T Q^T [z^T Q^T c(0) D^2 g(0) Qz] \\ &= \frac{1}{2} Q^{-1} [c(0) D^2 g(0)](Q, Q, Q)(z, z, z) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} c(0) D^2 g(0) &= c(0) \begin{pmatrix} D^2 g_1(0) \\ D^2 g_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(0) D^2 g_1(0) \\ c(0) D^2 g_2(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $c(0)D^2g_j(0)$ es un 3-tensor. Si llamamos $\mathcal{A} = \frac{1}{6}[D^3f(0) - 3c(0)D^2g(0)]$, entonces

$$\begin{aligned}
z^T Q^T (z^T Q^T \mathcal{A} Q z) &= z^T Q^T \begin{pmatrix} z^T Q^T \mathcal{A}_1 Q z \\ z^T Q^T \mathcal{A}_2 Q z \end{pmatrix} \\
&= z^T \begin{pmatrix} Q^T [z^T Q^T \mathcal{A}_1 Q z] \\ Q^T [z^T Q^T \mathcal{A}_2 Q z] \end{pmatrix} \\
&= z^T \begin{pmatrix} z^T Q^T (Q \bullet \mathcal{A}_1) Q z \\ z^T Q^T (Q \bullet \mathcal{A}_2) Q z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z^T [z^T Q^T (Q \bullet \mathcal{A}_1) Q z] \\ z^T [z^T Q^T (Q \bullet \mathcal{A}_2) Q z] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con $\mathcal{A}_j = \frac{1}{6}[D^3f_j(0) - 3c(0)D^2g_j(0)]$. Finalmente, definamos $\mathcal{T}_j = Q^T(Q \bullet \mathcal{A}_j)Q$ para obtener

$$\bar{F}_3(z) = Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(z, z, z) \\ \mathcal{T}_2(z, z, z) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

como se quería. □

Ahora procederemos con el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov.

Lema 4.4.3. *El primer coeficiente de Lyapunov, $l_1(\omega_0)$, del sistema (4.17) está dado por $l_1(\omega_0) = \frac{1}{16} \left(k_1 \omega_0^4 + k_2 \omega_0^2 + k_3 + \frac{k_4}{\omega_0^2} \right)$, para $\omega_0 > 0$, donde*

$$\begin{aligned}
k_1 &= g_{1x_2}(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) - 3g_{1x_1x_1} \\
k_2 &= 4g_{1x_1}g_{2x_1} - (f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2})(f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2}) \\
&\quad + g_{2x_2}(2g_{2x_1} - 2a_1g_{2x_2} - f_{2x_2x_2}) + g_{1x_2}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\
&\quad - (f_{1x_1x_2} + 2a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2})(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) \\
&\quad + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_2x_2x_2} + a_2(2g_{1x_1x_2} + 3g_{2x_2x_2}) - 2g_{2x_1x_2} + a_1g_{1x_2x_2} \\
k_3 &= -(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{1x_1x_2} + a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2}) - g_{2x_2}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\
&\quad + (f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2} - 2g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}) \\
&\quad - 2g_{1x_1}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) - 2g_{2x_1}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\
&\quad + f_{1x_1x_1x_1} + f_{2x_1x_1x_2} + a_2g_{2x_1x_1} + a_1(3a_1g_{1x_1x_1} + 2g_{2x_1x_2}) \\
k_4 &= (f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\
&\quad + (f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}).
\end{aligned}$$

Demostración. Primero, de la ecuación del (4.6) en el teorema 4.2.2, calcularemos R_1 . De la

ecuación (4.20) tenemos que

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2(z) &= Q^{-1}\mathcal{M}(z, z) \\
&= [(Q^{-1})^T \bullet \mathcal{M}](z, z) \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\omega_0} & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \end{pmatrix} \right] (z, z) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0}\mathcal{M}_2(z, z) \\ \mathcal{M}_1(z, z) \end{pmatrix} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}_j = \frac{1}{2}[D^2f_j(0) - 2c(0)Dg_j(0)](Q, Q)$ es la matriz asociada a la forma bilineal $\mathcal{M}_j(z, z)$, $j = 1, 2$. Entonces podemos escribir las matrices \mathcal{M}_j como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_j &= \frac{1}{2}[D^2f_j(0)(Q, Q) - 2(c(0)\nabla g_j(0))(Q, Q)] \\
&= \frac{1}{2}[Q^T D^2f_j(0)Q - 2Q^T(c(0)\nabla g_j(0))Q] \\
&= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D^2f_j(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix} \nabla g_j(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \omega_0^2 f_{jx_2x_2}(0) & \omega_0 f_{jx_1x_2}(0) \\ \omega_0 f_{jx_2x_1}(0) & f_{jx_1x_1}(0) \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \omega_0^2 c_2(0)g_{jx_2}(0) & \omega_0 c_2(0)g_{jx_1}(0) \\ \omega_0 c_1(0)g_{jx_2}(0) & c_1(0)g_{jx_1}(0) \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 [f_{jx_2x_2}(0) - 2c_2(0)g_{jx_2}(0)] & \omega_0 [f_{jx_2x_1}(0) - 2c_2(0)g_{jx_1}(0)] \\ \omega_0 [f_{jx_1x_2}(0) - 2c_1(0)g_{jx_2}(0)] & f_{jx_1x_1}(0) - 2c_1(0)g_{jx_1}(0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0^2 [f_{jx_2x_2}(0) + 2a_2g_{jx_2}(0)] & \omega_0 [f_{jx_1x_2}(0) + 2a_2g_{jx_1}(0)] \\ \omega_0 [f_{jx_2x_1}(0) + 2a_1g_{jx_2}(0)] - 2\omega_0^3 g_{jx_2}(0) & f_{jx_1x_1}(0) + 2a_1g_{jx_1}(0) - 2\omega_0^2 g_{jx_1}(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observemos que las matrices \mathcal{M}_j no son simétricas, $j = 1, 2$. Sin embargo, se pueden obtener las segundas derivadas parciales de las formas cuadráticas $\mathcal{M}_j(z, z)$ a partir de las entradas de sus matrices asociadas \mathcal{M}_j . Debido a la falta de simetría, la matriz de segundas derivadas parciales de $\mathcal{M}_j(z, z)$ está dada por

$$\mathcal{M}_j + \mathcal{M}_j^T = \begin{pmatrix} m_{11}^j & m_{12}^j \\ m_{21}^j & m_{22}^j \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}
m_{11}^j &= \omega_0^2 [f_{jx_2x_2}(0) + 2a_2g_{jx_2}(0)], \\
m_{12}^j &= m_{21}^j = \omega_0 [f_{jx_1x_2}(0) + a_2g_{jx_1}(0) + a_1g_{jx_2}(0)] - \omega_0^3 g_{jx_2}(0), \\
m_{22}^j &= f_{jx_1x_1}(0) + 2a_1g_{jx_1}(0) - 2\omega_0^2 g_{jx_1}(0).
\end{aligned}$$

Si $\bar{F}_2(z) = \begin{pmatrix} \bar{F}_{21}(z) \\ \bar{F}_{22}(z) \end{pmatrix}$, entonces $D^2\bar{F}_{21} = \frac{1}{\omega_0}(\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_2^T)$ y $D^2\bar{F}_{22} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1^T$. Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{21z_1z_1}(z) &= \omega_0 [f_{2x_2x_2}(0) + 2a_2g_{2x_2}(0)], \\
\bar{F}_{21z_1z_2}(z) &= \bar{F}_{21z_2z_1}(z) = [f_{2x_1x_2}(0) + a_2g_{2x_1}(0) + a_1g_{2x_2}(0)] - \omega_0^2 g_{2x_2}(0), \\
\bar{F}_{21z_2z_2}(z) &= \frac{1}{\omega_0} [f_{2x_1x_1}(0) + 2a_1g_{2x_1}(0)] - 2\omega_0 g_{2x_1}(0)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{F}_{22 z_1 z_1}(z) &= \omega_0^2[f_{1x_2x_2}(0) + 2a_2g_{1x_2}(0)], \\ \bar{F}_{22 z_1 z_2}(z) &= \bar{F}_{22 z_2 z_1}(z) = \omega_0[f_{1x_1x_2}(0) + a_2g_{1x_1}(0) + a_1g_{1x_2}(0)] - \omega_0^3g_{1x_2}(0), \\ \bar{F}_{22 z_2 z_2}(z) &= f_{1x_1x_1}(0) + 2a_1g_{1x_1}(0) - 2\omega_0^2g_{1x_1}(0),\end{aligned}$$

Ahora, de la fórmula del primer coeficiente de Lyapunov dada por (4.6) y con todas las derivadas parciales evaluadas en $x = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}R_1 &= \omega_0^5[g_{1x_2}(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1})] \\ &+ \omega_0^3[4g_{1x_1}g_{2x_1} - (f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2})(f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2}) \\ &\quad + g_{2x_2}(2g_{2x_1} - 2a_2g_{2x_2} - f_{2x_2x_2}) + g_{1x_2}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\ &\quad - (f_{1x_1x_2} + a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2})(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1})] \\ &+ \omega_0[-(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{1x_1x_2} + a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2}) - g_{2x_2}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\ &\quad + (f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2} - 2g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}) \\ &\quad - 2g_{1x_1}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) - 2g_{2x_1}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})] \\ &+ \frac{1}{\omega_0}[(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\ &\quad + (f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2})].\end{aligned}$$

Calcularemos ahora R_2 . De la ecuación (4.21) se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{F}_3(z) &= Q^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(z, z, z) \\ \mathcal{T}_2(z, z, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0} \mathcal{T}_2(z, z, z) \\ \mathcal{T}_1(z, z, z) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde $\mathcal{T}_j = Q^T(Q \bullet \mathcal{A}_j)Q$. Desarrollando \mathcal{A}_j obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j &= \frac{1}{6}D^3f_j(x_0) - \frac{1}{2}c(0)D^2g_j(x_0) \\ &= \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} (f_{jx_1x_1x_1} & f_{jx_2x_1x_1}) \\ (f_{jx_1x_2x_1} & f_{jx_2x_2x_1}) \\ (f_{jx_1x_1x_2} & f_{jx_2x_1x_2}) \\ (f_{jx_1x_2x_2} & f_{jx_2x_2x_2}) \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} (c_1(0)g_{jx_1x_1} & c_1(0)g_{jx_2x_1}) \\ (c_2(0)g_{jx_1x_1} & c_2(0)g_{jx_2x_1}) \\ (c_1(0)g_{jx_1x_2} & c_1(0)g_{jx_2x_2}) \\ (c_2(0)g_{jx_1x_2} & c_2(0)g_{jx_2x_2}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (f_{jx_1x_1x_1} - 3c_1(0)g_{jx_1x_1} & f_{jx_2x_1x_1} - 3c_1(0)g_{jx_2x_1}) \\ (f_{jx_1x_2x_1} - 3c_2(0)g_{jx_1x_1} & f_{jx_2x_2x_1} - 3c_2(0)g_{jx_2x_1}) \\ (f_{jx_1x_1x_2} - 3c_1(0)g_{jx_1x_2} & f_{jx_2x_1x_2} - 3c_1(0)g_{jx_2x_2}) \\ (f_{jx_1x_2x_2} - 3c_2(0)g_{jx_1x_2} & f_{jx_2x_2x_2} - 3c_2(0)g_{jx_2x_2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (f_{jx_1x_1x_1} + 3a_1g_{jx_1x_1} - 3\omega_0^2g_{jx_1x_1} & f_{jx_2x_1x_1} + 3a_1g_{jx_2x_1} - 3\omega_0^2g_{jx_2x_1}) \\ f_{jx_1x_2x_1} + 3a_2g_{jx_1x_1} & f_{jx_2x_2x_1} + 3a_2g_{jx_2x_1} \\ (f_{jx_1x_1x_2} + 3a_1g_{jx_1x_2} - 3\omega_0^2g_{jx_1x_2} & f_{jx_2x_1x_2} + 3a_1g_{jx_2x_2} - 3\omega_0^2g_{jx_2x_2}) \\ f_{jx_1x_2x_2} + 3a_2g_{jx_1x_2} & f_{jx_2x_2x_2} + 3a_2g_{jx_2x_2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ahora, después de algunos cálculos, podemos expresar $[Q^T(Q^T \bullet \mathcal{A}_j)Q](z, z, z) = \mathcal{T}_j(z, z, z)$ como

$$\mathcal{T}_j(z, z, z) = \frac{1}{6}[\omega_0^3 t_{24}^j z_1^3 + \omega_0^2(t_{14}^j + t_{22}^j + t_{23}^j)z_1^2 z_2 + \omega_0(t_{12}^j + t_{13}^j + t_{21}^j)z_1 z_2^2 + t_{11}^j z_2^3]$$

donde

$$\begin{aligned} t_{11}^j &= f_{jx_1x_1x_1} + 3a_1g_{jx_1x_1} - 3\omega_0^2g_{jx_1x_1} \\ t_{12}^j &= f_{jx_2x_1x_1} + 3a_1g_{jx_2x_1} - 3\omega_0^2g_{jx_2x_1} \\ t_{13}^j &= f_{jx_1x_2x_1} + 3a_2g_{jx_1x_1} \\ t_{14}^j &= f_{jx_2x_2x_1} + 3a_2g_{jx_2x_1} \\ t_{21}^j &= f_{jx_1x_1x_2} + 3a_1g_{jx_1x_2} - 3\omega_0^2g_{jx_1x_2} \\ t_{22}^j &= f_{jx_2x_1x_2} + 3a_1g_{jx_2x_2} - 3\omega_0^2g_{jx_2x_2} \\ t_{23}^j &= f_{jx_1x_2x_2} + 3a_2g_{jx_1x_2} \\ t_{24}^j &= f_{jx_2x_2x_2} + 3a_2g_{jx_2x_2} \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{31}(z) &= \frac{1}{6}[\omega_0^2 t_{24}^2 z_1^3 + \omega_0(t_{14}^2 + t_{22}^2 + t_{23}^2)z_1^2 z_2 + (t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{21}^2)z_1 z_2^2 + \frac{1}{\omega_0} t_{11}^2 z_2^3], \\ \bar{F}_{32}(z) &= \frac{1}{6}[\omega_0^3 t_{24}^1 z_1^3 + \omega_0^2(t_{14}^1 + t_{22}^1 + t_{23}^1)z_1^2 z_2 + \omega_0(t_{12}^1 + t_{13}^1 + t_{21}^1)z_1 z_2^2 + t_{11}^1 z_2^3], \end{aligned}$$

y de aquí que,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{31z_1z_1z_1} &= \omega_0^2 t_{24}^2, \\ \bar{F}_{31z_1z_2z_2} &= \frac{1}{3}(t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{21}^2), \\ \bar{F}_{32z_1z_1z_2} &= \omega_0^2 \frac{1}{3}(t_{14}^1 + t_{22}^1 + t_{23}^1), \\ \bar{F}_{32z_2z_2z_2} &= t_{11}^1. \end{aligned}$$

De la fórmula del primer coeficiente de Lyapunov (4.7), tenemos que

$$\begin{aligned} R_2 = & -3\omega_0^4 g_{1x_1x_1} + \omega_0^2 [f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_2x_2x_2} + a_2(2g_{1x_1x_2} + 3g_{2x_2x_2}) \\ & - 2g_{2x_1x_2} + a_1g_{1x_2x_2}] + [f_{1x_1x_1x_1} + f_{2x_1x_1x_2} + a_2g_{2x_1x_1} \\ & + a_1(3a_1g_{1x_1x_1} + 2g_{2x_1x_2})] \end{aligned}$$

Finalmente, el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$l_1(\omega_0) = \frac{1}{16} \left(k_1 \omega_0^4 + k_2 \omega_0^2 + k_3 + \frac{k_4}{\omega_0^2} \right). \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= g_{1x_2}(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) - 3g_{1x_1x_1} \\
k_2 &= 4g_{1x_1}g_{2x_1} - (f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2})(f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2}) \\
&\quad + g_{2x_2}(2g_{2x_1} - 2a_1g_{2x_2} - f_{2x_2x_2}) + g_{1x_2}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\
&\quad - (f_{1x_1x_2} + 2a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2})(f_{1x_2x_2} + 2a_2g_{1x_2} - 2g_{1x_1}) \\
&\quad + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_2x_2x_2} + a_2(2g_{1x_1x_2} + 3g_{2x_2x_2}) - 2g_{2x_1x_2} + a_1g_{1x_2x_2} \\
k_3 &= -(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{1x_1x_2} + a_2g_{1x_1} + a_1g_{1x_2}) - g_{2x_2}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\
&\quad + (f_{2x_2x_2} + 2a_2g_{2x_2} - 2g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}) \\
&\quad - 2g_{1x_1}(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) - 2g_{2x_1}(f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1}) \\
&\quad + f_{1x_1x_1x_1} + f_{2x_1x_1x_2} + a_2g_{2x_1x_1} + a_1(3a_1g_{1x_1x_1} + 2g_{2x_1x_2}) \\
k_4 &= (f_{1x_1x_1} + 2a_1g_{1x_1})(f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1}) \\
&\quad + (f_{2x_1x_1} + 2a_1g_{2x_1})(f_{2x_1x_2} + a_2g_{2x_1} + a_1g_{2x_2}).
\end{aligned}$$

□

Los lemas 4.4.1 y 4.4.3 nos permiten demostrar el resultado principal de este capítulo.

Demostración del teorema 4.3.1. Es claro que el control lineal $u(x, \mu)$ propuesto para el sistema (4.7) está en términos de los números complejos $\zeta = \alpha + i\beta$ y $z = \gamma + i\eta$ que diseñaremos para decidir de que semiplano (izquierdo o derecho) empezarán a viajar los valores propios del sistema. Es decir, podemos elegir el signo de las partes reales α y γ para controlar la velocidad de cruce dada en el lema 4.4.1.

Ahora, para poder controlar el signo de $l_1(\omega)$ del lema 4.4.3 para el número real $\omega_0 > 0$ (el cual nosotros diseñaremos) definimos el cambio de variable $y = \omega_0^2$. Entonces las raíces reales positivas del polinomio

$$\tilde{l}_1(y) = k_1y^3 + k_2y^2 + k_3y + k_4,$$

nos permite elegir un intervalo de ω_0 en el cual $l_1(\omega_0)$ cambia su signo.

□

Adicionalmente, si $k_1 \neq 0$, podemos utilizar la fórmula de Cardano para el polinomio de grado tres $y^3 + \tilde{k}_1y^2 + \tilde{k}_2y + \tilde{k}_3 = 0$, con $\tilde{k}_j = \frac{k_{j+1}}{k_1}$, $j = 1, 2, 3$. Entonces, las raíces de $\tilde{l}_1(y)$ estás dadas por

$$\begin{aligned}
y_1 &= S_1 + S_2 - \frac{\tilde{k}_1}{3} \\
y_{2,3} &= -\frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{\tilde{k}_1}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2),
\end{aligned}$$

donde $S_{1,2} = R \pm \sqrt{Q^3 + R^2}$, con $Q = \frac{3\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1^2}{9}$ y $R = \frac{9\tilde{k}_1\tilde{k}_2 - 27\tilde{k}_3 - 2\tilde{k}_1^3}{54}$. Por lo que, para el discriminante $D = Q^3 + R^2$, tendremos que: si $D > 0$, entonces existe una raíz real y dos complejas conjugadas. De donde se asegura una raíz real positiva si se cumple que $S_1 + S_2 - \frac{1}{3}\tilde{k}_1 > 0$; si $D \leq 0$, tendremos tres raíces reales de las cuales las tres raíces son distintas ó al menos dos iguales.

4.5. Un Ejemplo

Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_2 = \mu_1 + \mu_2 x_1 + \xi x_1 x_2 + x_1^2 u \quad (4.25)$$

donde μ_1, μ_2, ξ son parámetros reales y u , el control de retroalimentación de estados. Reescribiendo el sistema (4.24) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u, \quad (4.26)$$

con $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \mu_1 + \mu_2 x_1 + \xi x_1 x_2 \end{pmatrix}$ y $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$, tenemos que el punto de equilibrio del sistema sin control (para $u = 0$) es $p = (-\frac{\mu_1}{\mu_2}, 0)$, $\mu_2 \neq 0$. Ahora, la Jacobiana

$$A = Df(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_2 & -\xi \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{pmatrix}$$

tiene como polinomio característico $p_A(t) = t^2 + \xi \frac{\mu_1}{\mu_2} t - \mu_2$, con raíces

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} \xi \frac{\mu_1}{\mu_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi^2 \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + 4\mu_2} \\ &= \rho + i\sigma, \end{aligned}$$

con $\rho = -\frac{1}{2} \xi \frac{\mu_1}{\mu_2}$ y $\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\xi^2 \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + 4\mu_2}$, por lo que tendremos valores propios complejos si $\xi^2 \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + 4\mu_2 < 0$. De aquí que $\mu_2 < 0$. También, si $\mu_1, \xi > 0$, tendremos valores propios complejos con parte real distinta de cero en \mathbb{C}^+ , es decir, el punto de equilibrio p es inestable. Por otro lado, la pareja (A, b) , donde

$$b = g(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \end{pmatrix},$$

es controlable si $\mu_1 \neq 0$. La matriz cambio de base, la cual coloca a (A, b) en su forma canónica controlable, está dada por $P = CW = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} I$, donde $C = [b : Ab]$ es la matriz de controlabilidad, I es la matriz identidad de tamaño 2×2 , y

$$W = \begin{pmatrix} \xi \frac{\mu_1}{\mu_2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, si hacemos $x = (x_1, x_2)^T$, el desarrollo en serie de Taylor del sistema alrededor de p queda expresado de la forma

$$\dot{x} = A(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^T D^2 f(p)(x - p) \quad (4.27)$$

$$+ [b + Dg(p)(x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^T D^2 g(p)(x - p)]u, \quad (4.28)$$

donde

$$\begin{aligned} D^2 f(p) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\ Dg(p) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\frac{\mu_1}{\mu_2} & 0 \end{pmatrix}, \\ D^2 g(p) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de coordenadas $y = P^{-1}(x - p)$, $y = (y_1, y_2)$, el sistema (4.27)-(4.28) se transforma en

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \frac{1}{2}y^T \begin{pmatrix} \mu_1^2 \\ \mu_2^2 \end{pmatrix} D^2 f(p) y + [\tilde{b} + Dg(p)y + \frac{1}{2}y^T \begin{pmatrix} \mu_1^2 \\ \mu_2^2 \end{pmatrix} D^2 g(p) y]u, \quad (4.29)$$

con $\tilde{A} = A$ y $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego, el sistema (4.29) cumple con las hipótesis *H1*) y *H2*) de la sección 4.3. Cerramos el lazo con el control de retroalimentación $u(\mu) = -c(\mu)^T y$, con $c(\mu)^T = (\Delta_1(\mu) - a_1, \Delta_2(\mu) - a_2)$, donde $\Delta_1(\mu) = |(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta|^2$ y $\Delta_2(\mu) = -2\text{Re}[(\mu + s^*)(z - \zeta) + \zeta]$, en los cuales diseñaremos $\zeta = \alpha + i\beta$, $z = \gamma + i\eta$. Entonces, el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$l_1(\omega_0) = \frac{1}{16} \left(-2\xi \frac{\mu_1^3}{\mu_2^3} - 4\xi \frac{\mu_1^3}{\mu_2^2} \frac{1}{\omega_0^2} \right).$$

Notemos que $l_1(\bar{\omega}_0) = 0$ para $\bar{\omega}_0 = \pm\sqrt{-2\mu_2}$. Solamente estaremos interesados en $\omega_0 > 0$. Así que, dado que $\mu_2 < 0$ y $\mu_1, \xi > 0$, se tiene que $l_1(\omega_0) < 0$ para $0 < \omega_0 < \sqrt{-2\mu_2}$; y $l_1(\omega_0) > 0$ para $\omega_0 > \sqrt{-2\mu_2}$. En cualquier caso, haremos la velocidad de cruce $d < 0$, por lo que diseñaremos adecuadamente $\gamma < 0 \leq \rho \leq \alpha$.

4.5.1. Órbita Periódica Estable

Para $\mu_1 = \xi = 1$, $\mu_2 = -1$, tenemos que $\bar{\omega}_0 = \sqrt{2}$ y $\lambda = \rho + i\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Elegimos $\omega_0 = \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Diseñaremos también $\alpha = \rho$ y $\gamma = -\rho$. Entonces $\beta = \eta = \sigma$, por lo que el sistema (4.26), con estos valores, en lazo cerrado queda expresado de la forma

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_2 = 1 - x_1 + x_1 x_2 + x_1^2 u(x, \mu), \quad (4.31)$$

donde $u(x, \mu) = -[(\mu^2 - \frac{1}{4})(x_1 - 1) + (2\mu + 1)x_2]$. Dado que $l_1(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{24} < 0$, entonces surgirá una órbita periódica estable del lado $\mu < 0$ (ver figura 4.1).

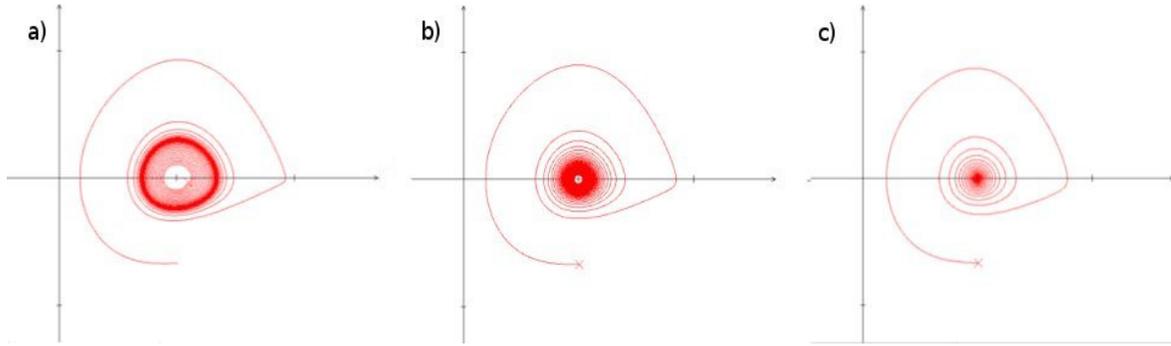


Figura 4.1: Aparición de una órbita periódica estable del sistema (4.30)-(4.31): a) $\mu = -0.02$; b) $\mu = 0$; c) $\mu = 0.02$.

4.5.2. Órbita Periódica Inestable

Consideremos ahora el sistema

$$\dot{x} = -f(x) - g(x)u, \quad (4.32)$$

con $f(x)$ y $g(x)$ los campos vectoriales del sistema (4.26). Para los mismos valores $\mu_1 = \xi = 1$, $\mu_2 = -1$, elegimos ahora $\omega_0 = 2$ y $\alpha = \rho = \frac{1}{2}$. Del sistema de ecuaciones (4.16), obtenemos que $\beta = \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\eta = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego, el sistema (4.32) en lazo cerrado queda expresado de la forma

$$\dot{x}_1 = -x_2 \quad (4.33)$$

$$\dot{x}_2 = -1 + x_1 - x_1x_2 - x_1^2u(x, \mu), \quad (4.34)$$

donde $u(x, \mu) = -[(\mu^2 + (4\mu + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1)(x_1 - 1) + (2\mu + 1)x_2]$. Dado que $l_1(\omega_0) = l_1(2) = \frac{1}{16} > 0$, debe surgir una órbita periódica estable del lado $\mu > 0$ del sistema (4.33)-(4.34). Tal órbita estable representa una órbita inestable del sistema (4.26) (ver figura 4.2).

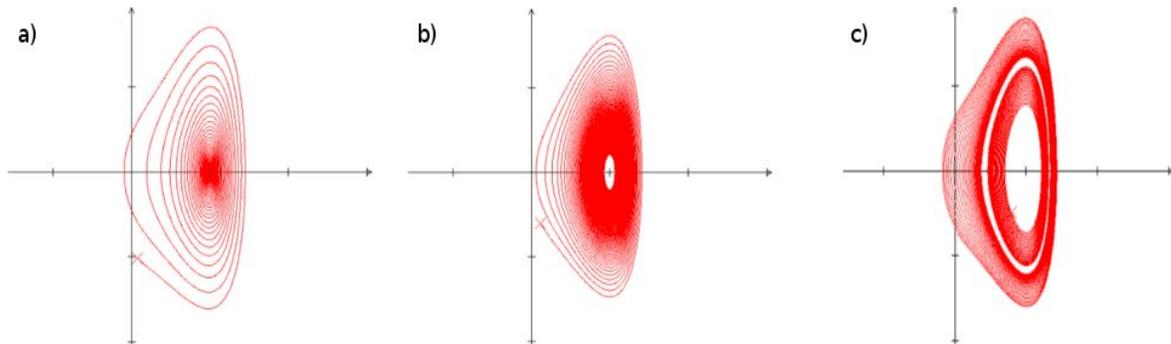


Figura 4.2: Surgimiento de una órbita inestable para el sistema (4.26): a) $\mu = -0.04$; b) $\mu = 0$; c) $\mu = 0.02$.

Conclusiones y Perspectivas

Los teoremas de intersección con la frontera y el principio de exclusión de cero son herramientas muy útiles en la demostración de resultados concernientes a la estabilidad de familias de polinomios. En este trabajo se presentaron generalizaciones de tales resultados para cierto tipo de familias de polinomios y se utilizó tal enfoque para encontrar un método alternativo para calcular el máximo intervalo de estabilidad de un rayo de polinomios en una manera más sencilla que la de Bialas. El caso de polinomios Hurwitz y Schur, ha sido estudiado por muchos autores y es un muy importante tópico en el área de estabilidad robusta para polinomios. Alternativamente, en éste trabajo se abordó el problema de unir a dos polinomios estables y el enfoque es una nueva forma de hacerlo que nos permite conectarlos mediante una curva en lugar de un rayo o segmento, que es la solución en el contexto de direcciones convexas. La curva conectora es utilizada para mostrar una trayectoria densa en el espacio de polinomios Hurwitz. Se mostraron otras versiones de la transformación de Möbius y, basados en estos, se establecieron resultados similares para el espacio de polinomios Schur. Como una aplicación, la curva Hurwitz-conectora nos permitió diseñar y presentar explícitamente un control de retroalimentación de estados lineal para provocar y controlar la bifurcación de Hopf a un sistemas afines en el plano.

En relación con el máximo intervalo de estabilidad, es conocido que hay métodos de desigualdades matriciales para saber si un segmento de polinomios consiste sólo de polinomios Hurwitz, pero estos métodos son condiciones suficientes, por lo que ahora sería interesante ver si es posible obtener condiciones necesarias y suficientes con el enfoque de desigualdades matriciales.

También hace falta explorar otras técnicas, como la del mapeo guardián [75], y tratar de aplicarlas en el estudio de otras familias de polinomios como familias intervalo, polítopos de polinomios, bolas de polinomios, etcétera.

En cuanto a la construcción de una trayectoria densa en el conjunto de polinomios Hurwitz, se torna interesante investigar si es posible encontrar explícitamente una curva que llene totalmente al espacio de polinomios Hurwitz. Además de presentar resultados similares para el caso complejo. Se investigará también, si la curva conectora se puede utilizar para otros problemas en teoría de control, como asignación de polos.

En el caso del control de la bifurcación de Hopf mediante la curva conectora, queda pendiente controlar la bifurcación de Hopf en sistemas en \mathbb{R}^n . Además, un problema de interés relacionado con el problema de control de bifurcaciones, es el analizar lo hecho en el caso continuo para el caso discreto y otro tipo de bifurcaciones.

En el mismo problema de diseño de controles lineales, ya sea para estabilizar o para controlar la bifurcación de Hopf, se buscará utilizar el mapeo guardián y presentar los resultados en términos o condiciones de tal mapeo, tanto en el caso real como en el caso complejo.

Bibliografía

- [1] E. H. ABED, J. H. FU. *Local feedback stabilization and bifurcation control, I. Hopf bifurcation*. Systems & Control Lett., 7 (1986), pp. 11–17.
- [2] E. H. ABED, J. H. FU. *Local feedback stabilization and bifurcation control, II. Stationary bifurcation*. Systems & Control Lett., 8 (1987), pp. 467–473.
- [3] J. ACKERMANN, *Robust control. The parameter space approach*, Springer-Verlag, 2002.
- [4] M. AGUILAR, S. GITLER, AND C. PRIETO, *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] B. AGUIRRE, C. IBARRA, AND R. SUÁREZ, *Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials*, Systems Control Lett., **46**, pp. 255–263 (2002).
- [6] B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, *Soluciones periódicas de primer armónico de sistemas lineales con control saturado*, Tesis doctoral, UAM-I (1998).
- [7] B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, M. FRÍAS-ARMENTA, AND F. VERDUZCO, *Smooth trivial vector bundle structure of the space of Hurwitz polynomials*, Automatica **45** (2009), pp. 2864–2868.
- [8] B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, M.E. FRÍAS-ARMENTA, AND F. VERDUZCO, *On differential structures of polynomial spaces in control theory*, J. on Systems Science and Systems Eng., Vol. 21, Issue 3 (2012), pp. 372–382.
- [9] B. AGUIRRE AND R. SUÁREZ, *Algebraic test for the Hurwitz stability of a given segment of polynomials*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **12** (2006), pp. 261–275.
- [10] B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, J.L. CISNEROS-MOLINA, AND M.E. FRÍAS-ARMENTA, *Polynomials in control theory parametrized by their roots*, Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2012, Article ID:595076, 19 pages, doi:115/2012/595076.
- [11] A. ANDREINI, A. BACCIOTTI, P. BOIERI G. STEFANI, *Stabilization of nonlinear systems by means of linear feedback*, In Journal Descusse, M. Flies, A. Isidori and D. Leborgne (Eds.), New Trends in Nonlinear Control Theory, Springer-Verlag, 1989.

- [12] A.A. ANDRONOV, A.A. VITT, AND S.E. KHAIKIN. *Theory of Oscillators. Translated from the Russian by F. Immirzi, edited and abridged by W. Fishwick.* Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [13] B.A. ASNER JR., *On the total nonnegativity of the Hurwitz matrix*, SIAM J. Appl. Math. 18 (2) (1970) 407–414.
- [14] A. BACCIOTTI P. BOIERI, *Linear stabilizability of planar nonlienar systems*, Math. of Control, Signals, and Systems, **3**, pp.183–193.
- [15] B. R. BARMISH, *New tools for robustness of linear systems.*, New York, NY: Macmillan. xvi, 394. , 1994.
- [16] S. BARNETT. R.G. CAMERON, *Introduction to mathematical control theory*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [17] A. C. BARTLETT, C. V. HOLLOT, AND HUANG LIN, *Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges*, Math. Control Signals Systems, **1** (1988), pp. 61–71.
- [18] S. P. BHATTACHARYYA, H. CHAPELLAT, AND L. H. KEEL, *Robust control: the parametric approach*, Prentice Hall, 1995.
- [19] S. BIALAS, *A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices*, Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci., **33** (1985), pp. 473–480.
- [20] B. S. BOLLEPALLI AND L. R. PUJARA, *On the stability of a segment of polynomials*, IEEE Trans. on Circuits & systems I, 41, No. 12 (1994) 898–901.
- [21] N. K. BOSE, *Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of polynomials*, IEEE Trans. On Circuits & Systems, 36, 9(1989) 1245–1247.
- [22] N. K. BOSE, *Argument conditions for Hurwitz and Schur polynomials from network theory*, IEEE Trans. on Automatic Control, 39, (1994) 345–346.
- [23] W. M. BOOTHBY R. MARINO, *Feedback stabilization of planar nonlinear systems*, Systems and Control Letters, **12**, pp. 87–92.
- [24] H. BOUGUERRA, B. C. CHANG, H. H. YEH AND S. S. BANDA, *Fast stability checking for the convex combination of stable polynomials*, IEEE Trans. on Automatic Control, 35, No. 5 (1990) 586–588.
- [25] F. A. CARRILLO, FERNANDO VERDUZCO AND JOAQUÍN DELGADO, *Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m-parameterized vector fields* Int. J. Bifurcation Chaos **20**, 995 (2010). DOI: 10.1142/S0218127410026277.
- [26] H. CHAPELLAT AND S. P. BHATTACHARYYA, *An alternative proof of Kharitonov’s theorem*, IEEE Trans. Automat. Control, **34** (1989), pp. 448–450.

- [27] H. CHAPPELLAT, M. MANSOUR, S. P. BHATTACHARYYA, *Elementary proofs of some classical stability criteria*, IEEE Transactions on Education, **33(3)** (1990), pp. 232–239.
- [28] L. COLLATZ, *Functional analysis and numerical mathematics*, Academic Press New York, 1966.
- [29] G. DÁVILA, R. FLORES, YU. M. VOROBIEV, *Álgebra lineal, teoría y problemas*, ISBN: 970-689-289-3, Editorial Unison, 2006.
- [30] E.C. DÍAZ, *El teorema de Hermite-Biehler*, Tesis de maestría, UAM-I (2010).
- [31] A. DOLD AND R. THOM, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte*, Ann. of Math. (2), **67**, pp. 239–281 (1958).
- [32] P. DORATO, R. TEMPO AND G. MUSCATO, *Bibliography on robust control*, Automatica, **29(1)** (1993), pp. 201–213.
- [33] A. T. FAM, AND J. MEDITCH, *A canonical parameter space for linear systems design*, IEEE Trans. on Aut. Control, vol. AC-23, **23**, pp. 454–458 (1978).
- [34] J. H. FU., E. H. ABED *Linear feedback stabilization of nonlinear systems with an uncontrollable critical mode*. Automatica, vol. 29, no. 4, pp. 999–1010, 1993.
- [35] M. FU AND B. R. BARMISH. *Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices*. Systems and control letters, 11, (1988) 173–179.
- [36] F. R. GANTMAKHER, *The theory of matrices. Vols. 1, 2*, Translated by K. A. Hirsch, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [37] R. GARCÍA, B. AGUIRRE, AND R. SUÁREZ, *Stabilization of linear sampled-data systems by a time-delay feedback control*, Mathematical Problems in Engineering, **Vol. 2008**, Article ID 270518, doi: 10.1155/2008/290518, 15 pages (2008).
- [38] R. GARCÍA, *Estabilización de sistemas de datos muestreados lineales por un control con retardo*, Tesis doctoral, UAM-I (2010).
- [39] J. C. GILLE, M.J. PELEGRIN, P. DECAULNE, *Feedback control systems: analysis, synthesis and design*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [40] B. HAMZI, W. KANG, J-P BARBOT. *Analysis and control of Hopf bifurcations*. SIAM J. Control Optim. Vol. 42, No. 6, pp. 2200–2220.
- [41] B. HAMZI, W. KANG, J-P BARBOT. *On the control of Hopf bifurcations*. Proc. 39th IEEE CDC (Volume 2), Sydney, Australia. 2000, pp. 1631–1636.
- [42] I. N. HERSTEIN, AND I. KAPLANSKY, *Matters mathematical*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1978.
- [43] D. HINRICHSSEN, AND V.L. KHARITONOV, *Stability of polynomials with conic uncertainty*, Math. Control, Signals, and Systems, **8(2)** (1995), pp. 97–117.

- [44] D. HINRICHSSEN AND J. PRITCHARD, *Mathematical systems theory I. modeling, state space analysis, stability and robustness*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, **48** (2005).
- [45] M.-T. HO, A. DATTA, S.P. BHATTACHARYYA, *An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Automat. Control **43** (3) (1998) 405–409.
- [46] E. HOPF. *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems*. Berichten der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig **XCIC**, **1–22** 1942.
- [47] CH. HWANG AND S.-F. YANG, *The use of Routh array for testing the Hurwitz property of a segment of polynomials*, Automatica, **37**, (2001) 291–296.
- [48] IOOSS G., *Bifurcations of Maps and Applications*, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [49] K. JOHAN ASTRÖM AND RICHARD M. MURRAY, *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*, Princeton University Press, 2008.
- [50] J.H.B. KEMPERMAN, *A Hurwitz matrix is totally positive*, SIAM J. Math. Anal. **13** (2) (1982) 331–341.
- [51] V. L. KHARITONOV, *The asymptotic stability of the equilibrium state of a family of systems of linear differential equations*, Differentsialnye Uravneniya, **14** (1978), pp. 2086–2088.
- [52] C. KOSNIOWSKI, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [53] KUZNETSOV, YURI A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, New York, N.Y., Springer-Verlag, 2004.
- [54] H. W. KUHN, *Solvability and consistency for linear equations and inequalities*, Am. Math. Monthly, **63** (1956) 217–232.
- [55] P. LANCASTER AND M. TISMENETSKY, *The theory of matrices*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL, Second Ed., (1985).
- [56] S. LANG, *Linear Algebra*, Springer, New York, Third Ed., (1987).
- [57] J. A. LÓPEZ-RENTERÍA, B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, F. VERDUZCO, *The boundary crossing theorem and the maximal stability interval*, Mathematical Problems in Engineering, **Vol. 2011**, Article ID 123403, doi: 10.1155/2011/123403, 13 pages (2011).
- [58] J. A. LÓPEZ-RENTERÍA, B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, F. VERDUZCO, *On Hurwitz and Schur connecting-curves and dense trajectories*, AIP Conf. Proc. **1368**, 271 (2011); doi: 10.1063/1.3663511.

- [59] J. A. LÓPEZ-RENTERÍA, B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, F. VERDUZCO, *Robust stability of families of homotopic connecting-curves in Hurwitz and Schur polynomial spaces*, Sometido en Indian Journal of Pure and Applied Mathematics.
- [60] C. A. LOREDO-VILLALOBOS, *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz*, Reporte de los seminarios de investigación I y II, UAM-I (2005).
- [61] C. A. LOREDO-VILLALOBOS, *Factorización de Hadamard para polinomios Hurwitz*, Tesis doctoral, UAM-I (2012).
- [62] C. A. LOREDO-VILLALOBOS, AND B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, *Necessary conditions for Hadamard factorization of Hurwitz polynomials*, AUTOMATICA, **47(7)**, pp. 1409–1413 (2011).
- [63] C. A. LOREDO-VILLALOBOS, AND B. AGUIRRE-HERNÁNDEZ, *Hadamard factorizations of stable polynomials*, Sometido a Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems A: Mathematical Analysis (2013).
- [64] O.L. MANGASARIAN, *Characterizations of real matrices of monotone kind*, SIAM Rev. 10 (4) (1968) 439–441.
- [65] J. E. MARSDEN AND M. MCCrackEN. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [66] T. C. MAXWELL, *On governors*, Proceedings of the Royal Society, **16** (1868), pp. 270–283.
- [67] M. MORARI, E. ZAFIRIOU, *Robust process control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [68] T. S. MROWKA AND P. S. OZSVÁTH, *Low dimensional topology*, American Mathematical Society, Institute of Advanced Study, PCMS 15, 2009.
- [69] J. R. MUNKRES, *Topology*, Prentice-Hall, Massachusetts, 2000.
- [70] NEIMARK Y., *On Some Cases of Periodic Motions Depending on Parameters*, Acad. Nauk SSSR, **129**, pp.736–739 (1959).
- [71] H. POINCARÉ. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 1* Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [72] A. RANTZER, *Stability conditions for polytopes of polynomials*, IEEE Trans. Automatic Control, **37**, (1992) 79–89.
- [73] S. ROMAN, *Advanced Linear Algebra*, Third Edition, Springer, 2008.
- [74] R. SACKER, *A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces*, Pure Appl. Math., **18**, pp.717–732 (1965).

- [75] L. SAYDY, A. TITS H. ABED, *Guardians maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials*, Mathematics of Control Signals and Systems, Volume 3, Issue 4, pp 345-371 (1990).
- [76] J.M. SCHUMACHER, *Almost stability subspaces and high-gain feedback*, IEEE Trans. Automat. Control AC-29 (1984) 620–628.
- [77] V. SHAKED, B. KOUVARITAKIS, *Asymptotic behavior of root loci of linear multivariable systems*, Int. J. Control 23 (1976) 297–340.
- [78] V. SHAKED, B. KOUVARITAKIS, *The zeroes of linear optimal control systems and their role in high feedback gain stability design*, IEEE Trans. Automat. Control AC-22 (1977) 597–599.
- [79] S. SHANKAR. *Non Linear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, New York, NY, 1995.
- [80] E. D. SONTAG, *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, Sec. Ed., Springer, New York, 1998.
- [81] J. STOER, CH. WITZGALL, *Convexity and optimization in finite dimensions I*, Springer, New York, 1970.
- [82] VERDUZCO, F., J. ALVAREZ. textHopf Bifurcation Control for affine systems. Proc. American Control Conference 2004. Boston, MA, USA.
- [83] WAN Y.-H., *Computations of the Stability Condition For the Hopf Bifurcation of Diffeomorfisma on \mathbb{R}^2* , SAIM J. Appl. Math., **34**, pp.167–175 (1978).
- [84] S. WIGGINS. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Texts Appl. Math. 2* Springer-Verlag, New York, 1990.
- [85] J.L. WILLEMS, *Almost invariant subspaces: an approach to high-gain feedback design- Part I and Part II*, IEEE Trans. Automat. Control AC-26, (1981) 235–252, and (AC-27 1071–1085).
- [86] J.L. WILLEMS, *Disturbance isolation in linear feedback systems*, Int. J. Syst. Sci. 6 (3) (1975) 233–238.
- [87] K.D. YOUNG, P. V. KOKOTOVIC, V.I. UTKIN, *A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems*, IEEE Trans. AC-22 (1977) 931–939.
- [88] E. ZEHEB, *Necessary and sufficient conditions for robust stability of a continuous system—the continuous dependency case illustrated via multilinear dependency*, IEEE Trans. Circuits and Systems, **37**, pp. 47–53 (1990).