



UNIDAD IZTAPLAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Estudio Cinético-Macroscópico de Flujo Vehicular

Tesis que presenta:
Fis. Alma Rosa Méndez Rodríguez

Para obtener el grado de:
Doctora en Ciencias(Física)

Asesor:

Dra. Rosa María Velasco Belmont
Departamento de Física
Mexico, D. F., 4 de agosto 2008.

*A mi madre, a mi padre, in memoriam,
a mi esposo, a mi hijo, con amor.*

Agradecimientos

Deseo expresar mi muy sincero agradecimiento a mi asesora, la Dra. Rosa María Velasco Belmont, por sus enseñanzas, su paciencia, su dedicación y el gran apoyo al dirigir tan acertadamente este trabajo.

Agradezco a los profesores: Dra. Patricia Saavedra Barrera, Dr. Wilson Marques Junior, Dr. Enrique Díaz Herrera y Dr. Jesús Antonio del Río Portilla, por sus cuidadosas revisiones y las valiosas observaciones que contribuyeron al mejoramiento de este trabajo.

Agradezco muy sinceramente, a todos los profesores que han contribuido en mi formación académica.

A mis compañeros y amigos del área de Mecánica Estadística, agradezco todo el apoyo y la ayuda que me brindaron.

Al Departamento de Física de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, la hospitalidad y las facilidades que me brindó durante mi estancia en la UAM-I.

Al CONACyT, por el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Motivación	9
1.2. Antecedentes	10
2. Aspectos básicos de Teoría Cinética	13
2.1. El espacio fase y la función de distribución	13
2.2. Momentos de la función de distribución	14
2.3. La ecuación de Boltzmann	16
2.4. El Método de Grad	24
2.5. Método de Chapman-Enskog	25
2.6. Aproximación BGK	27
3. Relaciones Empíricas del flujo vehicular	29
3.1. Diagrama Fundamental y correlaciones	29
3.2. Fases del Tráfico	32
4. Modelos de Tráfico Vehicular	35
4.1. Modelos Microscópicos	35
4.1.1. Modelos Follow-the-leader	35
4.1.2. Modelos Autómata Celular	38
4.2. Modelos Macroscópicos	40
4.2.1. Modelo de Lighthill y Whitham	41
4.2.2. Modelo de Payne	44
4.2.3. Modelo de Phillips	45
4.2.4. Modelo de Kerner y Konhäuser	46
4.2.5. Modelo de Helbing	46
5. Modelos Cinéticos de Tráfico Vehicular	49
5.1. Modelo de Prigogine-Herman	50
5.1.1. Término de relajación	51
5.1.2. Término de Interacción	51
5.2. Modelo de Pavari-Fontana	54
5.3. Solución de equilibrio de la ecuación de Pavari-Fontana	56
5.4. Derivación de Modelos Macroscópicos	59

5.5. Modelos Cinético-Macroscópicos	61
5.5.1. Modelo de Helbing y Treiber	61
5.5.2. Modelo de Wagner	63
6. Modelo Cinético I	67
6.1. El Método de Grad I	67
6.1.1. Análisis de estabilidad lineal	72
6.1.2. Simulación Numérica	73
7. Modelo Cinético II	79
7.1. Comparación con una función de distribución Gaussiana	81
7.2. El Método de Grad II	82
7.2.1. Simulación Numérica	86
8. Conclusiones y Perspectivas	91
8.1. Análisis de Resultados del Modelo I	91
8.2. Análisis de Resultados del Modelo II	92
8.3. Conclusiones Generales	92
8.4. Perspectivas	94
Apéndices	105

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

En la Ciudad de México, una gran parte de los contaminantes vertidos a la atmósfera proviene de los vehículos automotores. Actualmente, los vehículos particulares representan cerca del 93% del total de la flota vehicular y las combis y microbuses representan solamente el 2% de la misma. Desafortunadamente, el parque vehicular se encuentra en aumento debido a la falta de un transporte público eficiente, este aumento se refleja en un incremento en la formación de congestionamientos viales que a su vez, agrava enormemente el problema de la contaminación, ya que la emisión de contaminantes está directamente relacionada con la velocidad media de los vehículos y con el tiempo que pierden los mismos debido a la circulación a bajas velocidades y altas densidades. Por todo esto, resulta sumamente importante entender los fenómenos de tráfico. No solamente la Ciudad de México, sino también la gran mayoría de las grandes ciudades del mundo, tienen este y otros de los enormes problemas generados por la formación de congestionamientos vehiculares [1].

La mayoría de nosotros hemos experimentado la frustración que provoca encontrarse dentro de un caos vial, aunque éste no es uno de los aspectos más relevantes del problema. Los problemas de tráfico vehicular en las grandes ciudades de nuestro país generan pérdidas anuales por cerca de \$120,000 millones en productividad. En los Estados Unidos los congestionamientos tienen un costo de 100 billones de dólares anuales, considerando gasto de tiempo y combustible, dejando de lado la enorme emisión de contaminantes, los problemas de salud que acarrea, así como los accidentes [2]. En los Estados Unidos, se gasta cerca del veinte por ciento del producto interno bruto en transportación. El 56 por ciento de la población estadounidense posee un vehículo [3] y circulan 150 millones de automóviles y 50 millones de vehículos de carga. Estos vehículos recorren en promedio 10,000 millas al año, en el caso de pasajeros, y 50,000 millas en el caso de transporte de carga. Las cifras en el caso de México, son un tanto diferentes, ya que aunque el porcentaje de propiedad de vehículos es menor, el sistema de carreteras disponibles también lo es, y esto conduce a problemas de tráfico igual de severos o aún mayores. Es claro que la mayoría de las veces es imposible incrementar o ampliar los caminos, esto hace imperativo entender mejor el tráfico y desarrollar modelos para usar de manera más eficiente los caminos ya existentes.

Las teorías de flujo vehicular describen de manera matemática las interacciones entre los

vehículos, sus operadores y la infraestructura. Esta última consiste en el sistema de carreteras y sus elementos operacionales: señalamientos, semáforos, intersecciones, etc. De modo que estas teorías son indispensables para diseñar y operar calles y carreteras. Los estudios científicos de flujo vehicular comenzaron en los años treinta, con el estudio de modelos que relacionan el volumen de vehículos y la velocidad. Después de la segunda guerra mundial, con el incremento en el uso de automóvil y la extensión del sistema de carreteras, hubo un surgimiento en el estudio de las características del tráfico y un desarrollo en las teorías de flujo vehicular. Hacia los años cincuenta, surgen las primeras teorías de tráfico, por un lado aparecen las contribuciones de Reuschel y Pipes, conocidas como modelos *follow-the-leader* y por otro lado Lighthill y Whitham proponen las teorías macroscópicas. Los modelos cinéticos, basados en la evolución de la función de distribución de velocidades de los vehículos, aparecen en los años sesentas dando un sustento cinético a los modelos macroscópicos. El interés entre los físicos aumentó cuando, a finales de los años ochenta, tuvieron lugar algunos avances que permitieron la obtención de datos experimentales usando carreteras instrumentadas, principalmente en Europa. Al mismo tiempo, los avances en computación dieron lugar a la aplicación de los modelos de autómata celular al problema de tráfico. Hoy en día, las teorías fundamentales de tráfico siguen siendo tan importantes como lo fueron en sus inicios, y son el fundamento de todas las técnicas y procedimientos que están siendo aplicadas al diseño, operación y optimización de los sistemas de transportación más avanzados.

1.2. Antecedentes

El tráfico vehicular puede verse como un sistema de muchos cuerpos (vehículos) que interactúan fuertemente entre sí. Los embotellamientos y la autoorganización son una muestra del comportamiento complejo del tráfico vehicular. Los estudios científicos acerca de los problemas de tráfico vehicular comenzaron en 1935 con Greenshields. En 1955, Lighthill y Whitham presentaron el modelo macroscópico de flujo vehicular, más antiguo y popular, basado en la teoría de dinámica de fluidos [4, 5]. Ellos estudiaron los congestionamientos vehiculares como ondas de choque tratando al tráfico como un flujo compresible unidimensional.

Esencialmente se observan tres tipos de acercamientos para modelar los fenómenos de tráfico vehicular. En primer lugar tenemos los modelos microscópicos, basados en el modelo *follow-the-leader*, en estos se pone especial atención a los vehículos individuales, donde cada uno de ellos se representa como una partícula. La naturaleza de la interacción entre las partículas, se determina suponiendo que el movimiento de un vehículo tiene una influencia directa sobre el siguiente, y así sucesivamente [6, 7]. En otras palabras, las teorías microscópicas, ven al sistema como partículas interactuantes que están en un estado fuera de equilibrio. Entre los modelos microscópicos, podemos considerar a los modelos de *autómata celular*, estos hacen su aparición a finales de los ochentas y son interesantes por su rapidez. Su aplicación al tráfico dinámico ha estimulado una gran cantidad de investigación, encaminada a entender y controlar las inestabilidades del tráfico.

Los modelos macroscópicos, basados en ecuaciones de dinámica de fluidos, ven el tráfico vehicular como un fluido formado por vehículos, pero estos no aparecen de manera explícita en la teoría [5, 8, 9, 10]. Lo relevante de estos modelos son las variables macroscópicas, como

la densidad vehicular $\rho(x, t)$ o la velocidad promedio $V(x, t)$. Estos modelos son los que nos interesa estudiar, sin embargo llegaremos a ellos partiendo de una formulación cinética.

Los modelos cinéticos o tipo Boltzmann [11, 12, 13] ofrecen un puente entre los dos tipos de formulaciones anteriores. Por un lado, pueden ser derivados de consideraciones microscópicas, y por el otro, a partir de los mismos pueden derivarse ecuaciones dinámicas para las variables macroscópicas. El primer modelo cinético lo sugieren Prigogine y Andrews en 1960 [11], en 1971 Prigogine y Herman [14] y posteriormente Pavari-Fontana (1975) [15]. A estos modelos se les han hecho modificaciones para considerar el tamaño finito de los vehículos y los gradientes de velocidad como causantes de la presión de tráfico [12, 16]. Klar y Wegener (1997) [17] desarrollan modelos cinéticos tipo Enskog para modelar tráfico multilínea, y más recientemente, Illner, Klar y Materne (2003) [18] proponen un modelo de ecuaciones acopladas tipo Vlasov-Fokker-Planck para tráfico del mismo tipo.

En el presente trabajo se aplicaron algunos de los conceptos de la Teoría Cinética de los Gases al problema del tráfico vehicular. En los modelos cinéticos de tráfico vehicular, siempre se ha considerado que la distribución que describe el estado de equilibrio del flujo, es una distribución gaussiana, esto se asume con base en las observaciones experimentales, sin embargo esta distribución no es solución de los modelos cinéticos propuestos. Nosotros hemos observado que puede resolverse la ecuación de Pavari-Fontana reducida de manera exacta, para el caso estacionario y homogéneo, considerando un modelo sencillo que llamamos de conductores agresivos [19, 20, 21]. Es importante recalcar, que la solución obtenida, aunque no es una gaussiana se ajusta perfectamente bien a las observaciones experimentales. Partiendo de esta solución y desarrollando algunos de los conceptos usuales en la Teoría Cinética de los gases hemos construido modelos macroscópicos de tráfico para diferentes escalas de descripción. Uno puede considerar a la densidad y la velocidad como variables relevantes y trabajar con dos ecuaciones diferenciales, quizá también sea interesante incluir a la varianza de la velocidad, pero ¿será necesario? En [8], Helbing concluye que no, ya que la dinámica de la varianza puede reconstruirse de la dinámica de la densidad ρ y la velocidad media V . Si esto fuese posible, también es interesante preguntarse si es necesario que la varianza sea una variable independiente para observar el fenómeno de anticipación reportado por Kühne en [22, 23]. Este efecto consiste en un aumento de la varianza de la velocidad espacialmente antes de la formación de un congestionamiento, es decir antes de un incremento en la densidad. Así pues, exploraremos la necesidad de un modelo de tres ecuaciones.

Este trabajo está distribuido de la siguiente manera, en el capítulo 2, se presentan los aspectos básicos de la teoría cinética de los gases, para facilitar la comprensión de este trabajo. El capítulo 3, está dedicado a la presentación de las relaciones experimentales entre las variables que describen el tráfico de vehículos, así como las fases que se presentan en el mismo. En el capítulo 4, presentamos los principales modelos microscópicos y macroscópicos de tráfico vehicular, sus aspectos más interesantes, sus ventajas y sus desventajas. Los modelos cinéticos de tráfico se presentan en el capítulo 5, de manera independiente, ya que son la fuente de este trabajo. En este capítulo también se muestra como obtener el modelo macroscópico a partir del modelo cinético e introducimos nuestro modelo para conductores agresivos. En el capítulo 6, presentamos el modelo I para conductores agresivos que obtenemos mediante el método de Grad, con $N = 2$, y la solución de equilibrio. Este modelo consiste de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas para las variables densidad y

velocidad media. El modelo II se presenta en el capítulo 7, este es un modelo igualmente basado en el método de Grad, con $N = 3$, para las variables dinámicas densidad, velocidad media y varianza de la velocidad. Finalmente en el capítulo 8, presentamos las conclusiones de los modelos presentados y hablamos de las perspectivas de este trabajo.

Capítulo 2

Aspectos básicos de la Teoría Cinética de los gases

En este capítulo introduzco algunos de los conceptos básicos de la Teoría Cinética de los gases a fin de hacer más comprensibles los conceptos desarrollados en esta tesis, a lo largo de la cual se aplicarán los conceptos aquí mostrados, al problema de flujo vehicular.

2.1. El espacio fase y la función de distribución

Un gas consiste de un gran número de partículas interactuantes α cuyo estado queda determinado por sus posiciones $\mathbf{x}^\alpha = \{x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha\}$ y sus velocidades $\mathbf{v}^\alpha = \{v_1^\alpha, v_2^\alpha, v_3^\alpha\}$ en un instante dado t . El micro estado del gas está dado por el conjunto completo de $\{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha\}$ y cada partícula puede describirse a través de su trayectoria en el espacio de dimensión seis que comprende \mathbf{x} y \mathbf{v} , llamado *espacio fase*. De manera que para describir a un gas, uno tiene que

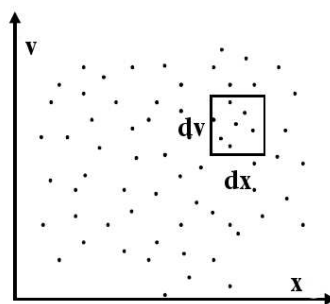


Figura 2.1: Espacio fase 6-dimensional y una celda en el espacio [24].

establecer una ecuación de movimiento para cada partícula y después resolver un conjunto de $\approx 10^{23}$ ecuaciones acopladas. Pero, queda claro que ésta, no es una tarea sencilla, por lo que la Teoría Cinética de los gases prefiere describir el estado de un gas a nivel microscópico

a través del espacio fase y la función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que se definen de modo que

$$N_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

es el número de partículas que ocupan una celda del espacio fase $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ al tiempo t , véase figura 2.1. En otras palabras, $N_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}$ es el número de partículas con velocidad en el intervalo $\{\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}\}$ y posición en el intervalo $\{\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}\}$ al tiempo t . Con esta definición, ciertamente se ha perdido un tanto de exactitud, ya que es posible conocer el estado de cada partícula solamente hasta cierta cantidad $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$. La función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es una cantidad muy importante en Teoría Cinética ya que el estado de un gas está casi completamente determinado cuando se conoce f .

2.2. Momentos de la función de distribución

La función de distribución del espacio fase nos brinda una visión detallada del estado de un gas, con frecuencia esos detalles son innecesarios y existen cantidades que pueden derivarse a partir de ella y que están mucho más conectados con nuestra experiencia cotidiana, a estas cantidades se les llama *momentos de la distribución*, los cuales describiremos a continuación. De la definición (2.1), se sigue que el número de partículas en un volumen del espacio fase está dado por

$$N = \iiint f d\mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

donde los valores posibles de la posición \mathbf{x} están restringidos al volumen V , y los valores de las tres componentes de la velocidad caen en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Cuando integramos solamente sobre la velocidad, y dividimos por el volumen de la celda $d\mathbf{x}$ se obtiene la densidad numérica

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f d\mathbf{v}. \quad (2.3)$$

Vemos que la cantidad $F d\mathbf{v} = f/n d\mathbf{v}$ puede interpretarse como la probabilidad de encontrar una partícula con velocidad \mathbf{v} en el intervalo $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, y está propiamente normalizada de acuerdo con

$$\int F d\mathbf{v} = 1. \quad (2.4)$$

Dado que las partículas en un gas tienen masa m , se define la densidad de masa $\rho = m n$ de la siguiente manera

$$\rho = m \int f d\mathbf{v}. \quad (2.5)$$

La velocidad media de las partículas dentro del volumen $d\mathbf{x}$ queda definida

$$\mathbf{V} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad \text{o} \quad V_i = \frac{1}{n} \int v_i f d\mathbf{v}, \quad (2.6)$$

la segunda ecuación usando notación de índices, \mathbf{V} o V_i es la velocidad macroscópica del gas, también conocida como velocidad baricéntrica. La densidad de momento se define

$$\rho V_i = m \int v_i f d\mathbf{v}. \quad (2.7)$$

La velocidad peculiar C_i de las partículas, da la velocidad de las partículas como la mediría un observador que se mueve con el gas a la velocidad local V_i , $C_i = v_i - V_i$. Dada la definición (2.7), el primer momento de f sobre C_i es cero,

$$0 = m \int C_i f d\mathbf{v}, \quad (2.8)$$

notemos que $d\mathbf{v} = d\mathbf{C}$. La energía cinética de una partícula está dada por $(mv^2)/2$ de modo que la densidad de energía en un gas monoatómico diluido es

$$\rho e = \frac{m}{2} \int v^2 f d\mathbf{v}, \quad (2.9)$$

Usando la definición de la velocidad peculiar y (2.8) se sigue que

$$\rho e = \frac{m}{2} \int (C^2 + 2V_k C_k + V^2) f d\mathbf{v} = \rho u + \frac{\rho}{2} V^2, \quad (2.10)$$

donde

$$\rho u = \frac{m}{2} \int C^2 f d\mathbf{v}, \quad (2.11)$$

es la energía interna o térmica del gas y $\rho V^2/2$ es la energía cinética del movimiento macroscópico. De manera que la energía interna de un gas monoatómico, es la energía cinética de sus partículas medida desde un sistema de referencia que se mueve con el gas. Para gases isótropos, la presión se define

$$p = \frac{1}{3} m \int C^2 f d\mathbf{v} = \frac{2}{3} \rho u, \quad (2.12)$$

donde $C^2 = C_k C_k$. La ecuación del gas ideal $p = (k/m)\rho T$ nos permite relacionar la energía y la temperatura,

$$u = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T \quad \text{o} \quad T = \frac{1}{3} \frac{m^2}{\rho k} \int C^2 f d\mathbf{v}. \quad (2.13)$$

La temperatura en teoría cinética se define en general por medio de la relación anterior (2.13). Por simplicidad en la notación podemos escribir a la temperatura en unidades de energía por medio de la relación

$$\theta = \frac{k}{m} T. \quad (2.14)$$

Existen otros momentos de importancia, por ejemplo el tensor de presiones

$$p_{ij} = m \int C_i C_j f d\mathbf{v}, \quad (2.15)$$

y el flujo de calor que se define

$$q_i = \frac{m}{2} \int C^2 C_i f d\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Los momentos de orden superior pueden definirse de manera general

$$m_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^\alpha = m \int C^{2\alpha} C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_n} f d\mathbf{v}, \quad (2.17)$$

éstos se conocen como *momentos centrales*, ya que están definidos con respecto a la velocidad peculiar, aunque ya no tienen una interpretación física directa. Usando la notación (2.17), es fácil verificar que

$$\begin{aligned} m^0 &= \rho, & m_i^0 &= 0, & m_{ij}^0 &= p_{ij}, \\ m^1 &= 2\rho e = \rho\theta = 3p, & m_i^1 &= 2q_i, & \dots & \end{aligned}$$

Los momentos definidos con respecto a la velocidad microscópica v_i , se conocen como *momentos convectivos*

$$M_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^\alpha = m \int v^{2\alpha} v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_n} f d\mathbf{v}, \quad (2.18)$$

y los primeros están dados de acuerdo con (2.18)

$$\begin{aligned} M^0 &= \rho, & M_i^0 &= \rho V_i, & M^{0ij} &= p_{ij} + \rho V_i V_j, \\ M^1 &= 2\rho e = 2\rho u + \rho V^2, & \frac{1}{2}M_k^1 &= \left(\rho u + \frac{1}{2}\rho V^2\right) V_k + p_{kj} V_j + q_k, & \dots & \end{aligned}$$

M_{ij}^0 es el flujo de momento total, y $(1/2)M_k^1$ es el flujo de energía total. La primera razón para definir los momentos es que algunos de ellos tienen una interpretación física interesante, digamos la densidad de masa (2.5), la densidad de momento (2.7), la densidad de energía (2.9), la energía interna (2.11), el tensor de presión (2.15), y el flujo de calor (2.16) y por lo tanto es posible medirlos. Pero quizá la razón más importante es que bajo ciertas condiciones, por ejemplo para números de Knudsen pequeños, es posible conocer el estado del gas con muy buena exactitud, conociendo sólo algunos de los momentos. Si conocemos la función de distribución completa, podemos calcular todos los momentos de la distribución, pero también el procedimiento inverso es cierto. Para ciertos casos, cuando el flujo del gas queda bien descrito por un conjunto finito y pequeño de los momentos, ya no se requiere conocer la función de distribución completa, de manera que resulta muy conveniente la descripción del gas a través de los momentos. Esto nos permite una descripción solamente a través de los momentos relevantes y el resto de ellos puede ignorarse.

2.3. La ecuación de Boltzmann

Para encontrar la ecuación de evolución de f , consideremos un volumen arbitrario Ω en el espacio fase que contenga

$$N_\Omega = \iiint_\Omega f dx dv \quad (2.19)$$

partículas y nos preguntaremos por los cambios de N_Ω en el tiempo. Vamos a introducir dA_Ω como un elemento de área en el espacio fase (5-dimensional) con vector normal \mathbf{n} , siendo el vector del espacio fase $\xi_A = \{x_k, v_k\}_A$ ($A = 1, \dots, 6, k = 1, 2, 3$) y la velocidad en el espacio fase $\dot{\xi}_A = \{\dot{x}_k, \dot{v}_k\}$. Todas las partículas que cruzan dA_Ω durante dt contribuyen al cambio

de N_Ω , e integrando sobre la superficie $d\Omega$ en Ω se encuentra

$$\frac{dN_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_\Omega f d\mathbf{x}d\mathbf{v} = - \oint_\Omega \dot{\xi}_A n_A f dA_\Omega. \quad (2.20)$$

El teorema de Gauss nos permite convertir la integral de superficie en una integral de volumen y la derivada temporal puede introducirse en la integral ya que Ω es constante en el tiempo, de modo que

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{x}d\mathbf{v} = - \iint_\Omega \frac{\dot{\xi}_A f}{dx_A} d\mathbf{x}d\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \iint_\Omega \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\dot{\xi}_A f}{dx_A} \right] d\mathbf{x}d\mathbf{v} = 0. \quad (2.21)$$

Esta expresión puede escribirse directamente en términos de las posiciones y velocidades, de forma que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial(\dot{v}_k f)}{\partial v_k} = 0, \quad (2.22)$$

donde se ha considerado $\partial v_k / \partial x_k = 0$ ya que x_k y v_k son variables independientes en el espacio fase. La aceleración $\dot{v}_k = G_k + W_k$ de las partículas se debe a fuerzas externas G_k , por ejemplo la gravedad, y a las fuerzas de interacción entre las partículas W_k . Las fuerzas externas consideradas aquí son independientes de la velocidad de las partículas, por lo que podemos escribir

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + G_k \frac{\partial f}{\partial v_k} = Q, \quad (2.23)$$

donde $Q = -\partial W_k f / \partial v_k$ describe los cambios de f debidos a las interacciones entre las partículas. Boltzmann utiliza el hecho de que el tiempo que tarda una colisión es muy pequeño y considera una escala de tiempo donde las colisiones aparecen como cambios instantáneos de las velocidades, esta idea determina Q .

Colisiones Binarias

También se requiere información acerca de las interacciones entre las partículas, en particular considera solamente interacciones binarias. Para dos partículas de masa m con velocidades antes de la colisión \mathbf{v} y \mathbf{v}^1 respectivamente, $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^1$ es la velocidad relativa. Después de la colisión las partículas tendrán las velocidades

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}^{1'} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}^{1'},$$

quedando indeterminados \mathbf{a} y \mathbf{b} . Es importante recalcar que estas velocidades pre y post colisión, son precisamente antes y después de que las partículas noten la presencia de la otra, esto quiere decir que la distancia relativa entre ellas, r , es demasiado grande y el potencial de interacción $\phi(r)$ es cero. La conservación del momento y la energía cinética (para el caso de colisiones elásticas) requieren que

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}' + \mathbf{v}^{1'} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{b} = -\mathbf{a},$$

y

$$(\mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}^1)^2 = (\mathbf{v}')^2 + (\mathbf{v}^{1'})^2,$$

que implica

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}^1) \cdot \mathbf{a} + a^2 = 0.$$

Esta ecuación nos permite calcular $a = \sqrt{\mathbf{a}^2}$, como $a = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}$ donde $\mathbf{k} = \mathbf{a}/a$ es el vector de colisión, ahora podemos expresar las velocidades post-colisión de la siguiente manera

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g})\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}^{1'} = \mathbf{v}^1 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g})\mathbf{k}, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{g} - 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g})\mathbf{k}. \quad (2.24)$$

Jugando un poco con las expresiones (2.24) se puede obtener fácilmente que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}' = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{g} - \mathbf{g}'}{|\mathbf{g} - \mathbf{g}'|} \quad \text{y} \quad g' = g, \quad (2.25)$$

que nos dice que la magnitud la velocidad relativa permanece constante y además el vector \mathbf{k} parte a la mitad el ángulo entre \mathbf{g} y \mathbf{g}' (véase figura 2.2)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{g} = g \cos \theta. \quad (2.26)$$

Por medio de (2.24) y (2.25) es posible obtener una relación entre las velocidades pre y post

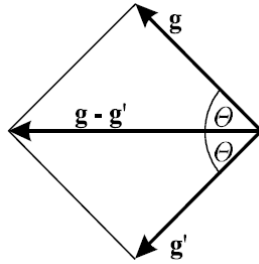


Figura 2.2: Velocidades relativas y ángulo de colisión θ [24].

colisión

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}')\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^{1'} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}')\mathbf{k}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}' - 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}')\mathbf{k}. \quad (2.27)$$

La conservación del momento en una colisión de un par de partículas requiere que la colisión tenga lugar en un plano conocido como plano de colisión, esta afirmación se describe de la siguiente manera

$$\mathbf{g} \times \mathbf{r} = \mathbf{g}' \times \mathbf{r}' \quad \text{o} \quad gb = g'b' \quad \text{de manera que} \quad b' = b, \quad (2.28)$$

donde \mathbf{r} denota la distancia relativa entre las partículas, y b es el parámetro de impacto y nos da la componente perpendicular de la distancia relativa entre las partículas, en la dirección de \mathbf{g} (ver figura 2.3). En la figura 2.3 puede visualizarse el parámetro b , el ángulo de colisión

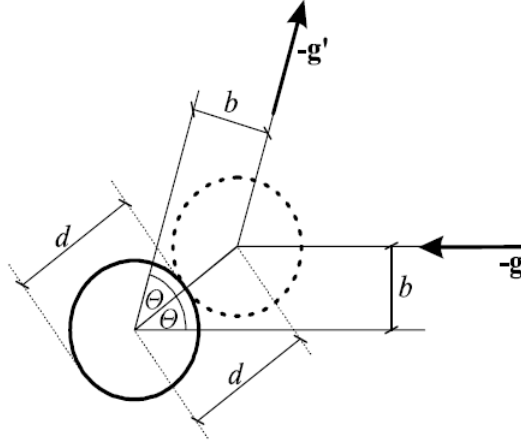


Figura 2.3: Colisión entre dos esferas duras de diámetro d [24].

θ , y las velocidades relativas \mathbf{g} , \mathbf{g}' en una colisión de esferas duras de diámetro d , tal como lo ve un observador en reposo con una partícula. A partir de la figura 2.3 puede extraerse que, para esferas duras

$$\theta = \arcsin \frac{b}{d}, \quad (2.29)$$

de manera general, la relación entre θ , b y d depende del potencial de interacción $\phi(r)$.

El argumento Stosszahlansatz

Conocer los detalles de las interacciones nos permite obtener Q . En el argumento conocido como *Stosszahlansatz* se asume lo siguiente,

- Solamente se permiten colisiones binarias.
- Se necesitan muchas colisiones para cambiar f de manera significativa. En particular f no puede verse alterada durante una colisión.
- Mientras f varía en el espacio, puede considerarse que es constante sobre el alcance d de las fuerzas interatómicas.
- En cada punto del espacio-tiempo (\mathbf{x}, t) , los valores de f para diferentes velocidades son independientes (hipótesis de caos molecular)

$$f_2(\mathbf{x}', \mathbf{v}'; \mathbf{x}, \mathbf{v}; t) = f_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}'; t) f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (2.30)$$

donde $f_2(\mathbf{x}', \mathbf{v}'; \mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ es la función de distribución que mide la probabilidad de que las partículas en $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ y (\mathbf{x}, \mathbf{v}) se encuentren en el tiempo t . Así, la ecuación (2.30) nos dice que la función de distribución $f_2(\mathbf{x}', \mathbf{v}'; \mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ se escribe como producto de funciones de distribución de una partícula. El hecho que sea un producto de éstas

significa que se trata de eventos estadísticamente independientes. O bien que la función $f_2(\mathbf{x}', \mathbf{v}'; \mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ representa dos eventos independientes.

Cada colisión $\mathbf{v}, \mathbf{v}^1 \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{v}^{1'}$ disminuye el valor de f mientras que la colisión inversa $\mathbf{v}', \mathbf{v}^{1'} \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{v}^1$ lo incrementa. Para tomar en cuenta las pérdidas y ganancias, escribimos

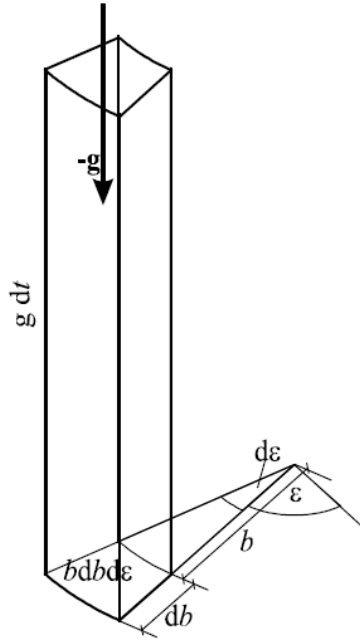


Figura 2.4: Contando las colisiones [24].

$$Q = Q_+ - Q_-, \quad (2.31)$$

donde $Q_+(Q_-)$ es la densidad numérica de colisiones por unidad de tiempo que produce (destruye) un punto en el espacio fase con velocidad \mathbf{v} . Todas las partículas con velocidad \mathbf{v}^1 en el volumen $g dt b db dε$, descrito a través de la figura 2.4, colisionan con una partícula en el centro (velocidad \mathbf{v}) durante dt , de manera que una partícula experimenta

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^1) d\mathbf{v}^1 g dt b db dε \quad (2.32)$$

de estas colisiones durante dt (donde las velocidades post-colisión son $\mathbf{v}', \mathbf{v}^{1'}$). La densidad numérica de partículas con velocidad \mathbf{v} es $f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$ de manera que la densidad numérica de colisiones $\mathbf{v}, \mathbf{v}^1 \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{v}^{1'}$ por unidad de tiempo es

$$Q_- d\mathbf{v} = \int \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1 d\mathbf{v}. \quad (2.33)$$

Donde se define a la sección transversal de colisión $\sigma \sin \theta d\theta = b db$ de manera que $\sigma = b/(\sin \theta \partial \theta / \partial b)$ (para esferas duras a partir de (2.29) puede verse que $\sigma = d^2 \cos \theta$) y se ha integrado sobre todas las posibles parejas de colisión, ésto es, sobre todas las velocidades \mathbf{v}^1 , todos los ángulos θ , y todos los ángulos ϵ que describen la orientación del plano de colisión, ver figura 2.4. Para la colisión $\mathbf{v}', \mathbf{v}^{1'} \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{v}^1$, por el mismo argumento que para el caso anterior, la densidad numérica por unidad de tiempo es

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}') d\mathbf{v}^{1'} g' \sigma' \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1 d\mathbf{v}', \quad (2.34)$$

donde las velocidades se relacionan por medio de (2.27). En la sección anterior mostramos que $g = g'$, $b = b'$ lo que implica $\theta' = \theta(b', g') = \theta(b, g)$, y por tanto $\sigma' = \sigma$. El resultado final es

$$Q_+ d\mathbf{v} = \int \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}') f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1 d\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

si para simplificar la notación escribimos

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}) = f, \quad f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^1) = f^1, \quad f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}') = f', \quad f(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^{1'}) = f'^1,$$

y juntamos los resultados anteriores, obtenemos finalmente la ecuación de Boltzmann

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + G_k \frac{\partial f}{\partial v_k}}_{\text{término de deriva}} = \underbrace{\int \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1}_{\text{término de colisión}}. \quad (2.36)$$

Ésta es una ecuación integro-diferencial no-lineal para la densidad del espacio fase f que describe la evolución en el espacio fase de un gas ideal monoatómico, debida al vuelo libre de las partículas, a la aceleración a través de fuerzas externas G_k y a las colisiones. Dada la gran complejidad de la ecuación de Boltzmann, ésta no puede resolverse fácilmente y en la mayoría de los casos uno tiene que conformarse con soluciones numéricas. La ecuación de Boltzmann (2.36) puede escribirse de manera general de la forma $\xi(f) = 0$ donde $\xi(f)$ es el resultado de ciertas operaciones realizadas a la función desconocida f

$$\xi(f) = \mathcal{D}f - Q(f, f^1), \quad (2.37)$$

donde

$$Q(f, f^1) = \int \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1, \quad (2.38)$$

es el término de colisión en la ecuación (2.36) y

$$\mathcal{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + G_k \frac{\partial f}{\partial v_k}, \quad (2.39)$$

es el término de deriva.

Ecuación de Transferencia

Como ya se ha mencionado, a menudo podemos estar interesados en los momentos de f más que en f misma. Si $\phi^{(i)}$ son un conjunto de funciones cualesquiera de $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ y

$$\langle \phi^{(i)} \rangle = \int \phi^{(i)} f d\mathbf{v}, \quad (2.40)$$

entonces las ecuaciones de evolución para las cantidades $\langle \phi^{(i)} \rangle$, conocidas como ecuaciones de transferencia, se obtienen al multiplicar la ecuación de Boltzmann por $\phi^{(i)}$ e integrar en todo el intervalo de velocidades

$$\frac{\partial \langle \phi^{(i)} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \phi^{(i)} v_k \rangle}{\partial x_k} = \left\langle \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle v_k \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle G_k \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial v_k} \right\rangle + Q_{\phi^{(i)}}. \quad (2.41)$$

donde el término de producción $Q_{\phi^{(i)}}$ se define

$$Q_{\phi^{(i)}} = \int \phi^{(i)} Q d\mathbf{v} = \iiint \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^{(i)} (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1 d\mathbf{v}. \quad (2.42)$$

De la ecuación de transferencia (2.41) es sencillo obtener las ecuaciones diferenciales para las cantidades macroscópicas, definidas en la sección 2.2. Si en la ecuación de transferencia usamos $\phi^{(i)} \rightarrow \psi^{(i)}$ para las cinco cantidades $\psi^{(1)} = m$, $\psi^{(2)} = mv_1$, $\psi^{(3)} = mv_2$, $\psi^{(4)} = mv_3$, $\psi^{(5)} = 1/2mv^2$, que son las cantidades conservadas y que en adelante llamaremos *invariantes de colisión*, se puede verificar que

$$\int \psi^{(i)} Q(f, f^1) d\mathbf{v} = 0 \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (2.43)$$

Solución de equilibrio de la ecuación de Boltzmann

Boltzmann resuelve la ecuación (2.36) para el estado de equilibrio f_e , considerando que no intervienen fuerzas externas ($G_k = 0$). Si el estado es uniforme, la ecuación de Boltzmann se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1. \quad (2.44)$$

Si se define una funcional H de la siguiente manera

$$H = \int f \ln f d\mathbf{v}, \quad (2.45)$$

obsérvese que H es una función de t por lo que podemos calcular

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}^1 d\mathbf{v}, \quad (2.46)$$

usando (2.44). Puede demostrarse que si ϕ y f son cualesquiera funciones de la velocidad, la posición y el tiempo (véase el capítulo 3 de [25]), entonces

$$\begin{aligned} & \int \phi_1(f f^1 - f' f'^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}' d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{4} (\phi + \phi^1 - \phi' - \phi'^1) (f f^1 - f' f'^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}' d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

haciendo uso de esta expresión considerando que $\phi = 1 + \ln f$ es posible escribir

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{4} \int \ln \left(\frac{f f^1}{f' f'^1} \right) (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}' d\mathbf{v}, \quad (2.48)$$

de manera que la cantidad $\ln (f f^1 / f' f'^1)$ es positiva o negativa dependiendo si $f f^1$ es mayor o menor que $f' f'^1$, y siempre tiene signo contrario a $f' f'^1 - f f^1$. Con lo que el lado derecho de (2.48) es negativo o cero, de manera que H nunca se incrementa. Este es el conocido teorema H . Teniendo ésto en cuenta, es posible darse cuenta que H esta acotada por abajo, es decir que el caso $H = -\infty$ solo sucedería si $\int f \ln f d\mathbf{v}$ diverge. Tomando en cuenta que H no decrece indefinidamente, entonces debe tender a un límite que sucede cuando $\partial H / \partial t = 0$. De modo que debe cumplirse que para cualquier valor de \mathbf{v}' y \mathbf{v}

$$\begin{aligned} f' f'^1 &= f f^1 \quad \text{ó} \\ \ln f' + \ln f'^1 &= \ln f + \ln f^1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si comparamos (2.44) y (2.49) puede inferirse que si $\partial H / \partial t = 0$ entonces $\partial f / \partial t = 0$, de manera que el gas es estacionario además de uniforme. Esto implica que si el gas está en un estado estacionario y homogéneo, no solamente debe cumplirse que $\partial f / \partial t = 0$ sino que también, dado que H depende solamente de f , $\partial H / \partial t = 0$, para lo cual debe cumplirse (2.49). Es decir que la solución de

$$\int (f' f'^1 - f f^1) g \sigma \sin \theta d\theta d\epsilon d\mathbf{v}' d\mathbf{v} = 0, \quad (2.50)$$

es (2.49). Para colisiones binarias puede demostrarse que durante una colisión se conservan solamente la masa, el momento y la energía cinética, entonces, si de acuerdo con (2.49) $\ln f$ se conserva, esta cantidad debe ser una combinación lineal de los invariantes conocidos, es decir

$$\ln f = a^{(1)} + a_i^{(2,i)} v_i + a^{(3)} v^2 \quad \text{o} \quad f = A \exp[-a^{(3)}(v_i - \Lambda_i)^2]. \quad (2.51)$$

Donde los coeficientes $a^{(1)}, a^{(2,i)}, a^{(3)}$ pueden ser determinados con la condición de que la función de distribución arroje los valores adecuados para la densidad de masa, la densidad de momento y la densidad de energía

$$\rho = m \int f d\mathbf{v}, \quad \rho V_i = m \int v_i f d\mathbf{v}, \quad \rho u = \frac{3}{2} \rho \theta = \frac{m}{2} \int (v_i - V_i)^2 f d\mathbf{v}, \quad (2.52)$$

esto permite obtener,

$$a^{(3)} = \frac{1}{2\theta}, \quad A = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^3}}, \quad \Lambda_i = V_i, \quad (2.53)$$

que da como resultado una distribución Maxwelliana para las velocidades v_i centradas en V_i y con varianza determinada por la temperatura:

$$f = f_M = \frac{\rho}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^3}} \exp \left[-\frac{(v_i - V_i)}{2\theta} \right]. \quad (2.54)$$

Aún cuando en el estado de equilibrio, ρ , V y θ son constantes, es inmediato mostrar que estas cantidades pueden ser funciones de (\mathbf{x}, t) de manera que la distribución Maxwelliana también describe un estado de equilibrio local en términos de las variables macroscópicas $\rho(\mathbf{x}, t)$, $V_i(\mathbf{x}, t)$ y $\theta(\mathbf{x}, t)$

$$f_{ML}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta(\mathbf{x}, t)^3}} \exp \left[-\frac{(v_i - V_i(\mathbf{x}, t))}{2\theta(\mathbf{x}, t)} \right], \quad (2.55)$$

en este sentido podemos decir que el efecto de las colisiones es lograr que una función de distribución, que describe un estado fuera de equilibrio, tienda a la Maxwelliana local.

2.4. El Método de Grad

Dada la gran complejidad de la ecuación de Boltzmann, existen diferentes métodos para obtener una solución aproximada a esta ecuación tan compleja. En esta sección revisaremos el método de momentos de Grad, que se basa en la simple idea de que basta un número finito de momentos de la función de distribución para describir con muy buena aproximación el estado de un gas.

Consideremos un conjunto completo de funciones $\phi^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N, \dots$), multipliquemos la ecuación de Boltzmann (2.36) por estas funciones e integremos sobre todas las velocidades moleculares, como ya sabemos vamos a obtener la ecuación de transferencia que vamos a expresar de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \phi^{(i)} f dv_k + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \int \phi^{(i)} f dv_k + G_j \frac{\partial}{\partial v_j} \int f dv_k = \int \phi^{(i)} Q(f, f^1) dv_k \quad (2.56)$$

Este conjunto infinito de relaciones es equivalente a la ecuación de Boltzmann dada la completez del conjunto $\{\phi^{(i)}\}$. La idea detrás del método de Grad o método de momentos, es satisfacer un número finito de ecuaciones de transferencia o ecuaciones de momentos. Esto deja claramente indeterminada la función de distribución, ya que solamente el conjunto completo (2.56) podría determinar f . Lo que podemos notar es que, hasta cierto punto, podemos escoger f de manera arbitraria y dejar que las ecuaciones de los momentos determinen los detalles que no hemos especificado. La función de distribución f debe ser pues una función de \mathbf{v} y contener N parámetros indeterminados dependientes de (\mathbf{x}, t) , M^k ($k = 1, \dots, N$); esto

significa que si consideramos N momentos, obtenemos N ecuaciones diferenciales parciales para las variables desconocidas $M^k(\mathbf{x}, t)$. En vista de la gran arbitrariedad de este método, uno puede pensar que para N lo suficientemente grande, el resultado sea independiente de la arbitrariedad del procedimiento y aún más queremos esperar que para una N pequeña y una elección juiciosa de los elementos arbitrarios, se puedan obtener buenos resultados. Entre los métodos de momentos, el más simple y popular es el método de Grad [26, 27, 28, 29] donde se asume que la función de distribución puede escribirse como la Maxwelliana local por un conjunto completo de polinomios ortonormales:

$$f = f_{ML} \sum_{k=0}^{N-1} Q_k(\mathbf{x}, t) H_k(\mathbf{v}), \quad (2.57)$$

donde por conveniencia los polinomios se expresan en términos de los polinomios de Hermite $H_k(\mathbf{v})$ ortogonales con la función de distribución de peso f_{ML} . También cabe mencionar la conveniencia de escoger a la Maxwelliana local como la función de peso ya que de esta manera tenemos que el término de colisión es cero para los invariantes de colisión. Existen N cantidades arbitrarias que pueden identificarse con los momentos básicos ($\rho, v_i, T, p_{ij}, q_i$ y momentos de orden superior) y pueden determinarse considerando $\phi^{(i)} = H_i$ en la ecuación (2.56). Una elección razonable para el caso de un gas monoatómico, es $N = 13$; en cuyo caso las incógnitas son $\rho, v_i, T, p_{ij} - p\delta_{ij}, q_i$, y las ecuaciones correspondientes son las conocidas ecuaciones de los 13 momentos de Grad.

2.5. Método de Chapman-Enskog

En el intento de resolver la ecuación de Boltzmann, Hilbert así como Champan y Enskog, de manera independiente, desarrollaron el hoy en día conocido método de Chapman-Enskog [25]. La ecuación de Boltzmann (2.36) puede escribirse en su forma adimensional de la siguiente manera

$$\mathcal{D}f = \frac{1}{\epsilon} Q(f, f^1) \quad (2.58)$$

donde $Q(f, f^1)$ es el término adimensional del lado derecho en la ecuación (2.36), $\mathcal{D}f$ es el término adimensional del lado izquierdo, mientras ϵ es un parámetro adimensional regularmente relacionado con el número de Knudsen. Supóngase que es posible expresar la solución de (2.58) de la forma

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots, \quad (2.59)$$

Enskog separa el término de colisión de la siguiente manera

$$Q(f, f^1) = \sum_{r=0}^{\infty} Q^{(r)} \quad (2.60)$$

donde $Q^{(r)}$ se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Q^{(r)} &\equiv Q^{(r)}(f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r)}), \\ &= \epsilon^r \left(Q(f^{(0)} f_1^{(r)}) + (Q(f^{(1)} f_1^{(r-1)}) + \dots + Q(f^{(r-1)} f_1^{(1)}) + Q(f^{(r)} f_1^{(0)}) \right), \end{aligned} \quad (2.61)$$

De manera que, a orden ϵ^{-1} , $Q(f^{(0)} f_1^{(0)}) = 0$ es idéntica a la ecuación (2.44), que determina la función de distribución para el estado estacionario y homogéneo. La solución general, como ya lo vimos, es una combinación lineal de los invariantes de colisión $\psi^{(i)}$, es decir

$$\ln f^{(0)} = a^{(1)} + \mathbf{a}^{(2)} \cdot m\mathbf{v} + a^{(3)} \frac{1}{2} m v^2, \quad (2.71)$$

donde $a^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ y $a^{(3)}$ son cantidades arbitrarias independientes de \mathbf{v} pero que pueden depender de (\mathbf{x}, t) . De manera que la aproximación de orden cero

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{m} \frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{m(v_i - V_i)^2}{2\theta} \right], \quad (2.72)$$

es la Maxwelliana local.

Si observamos las ecuaciones (2.68, 2.69, ..., 2.70), podemos escribir de forma general

$$Q(f^{(0)} f_1^{(r)}) + Q(f^{(r)} f_1^{(0)}) = \mathcal{D}^{(r-1)} - Q(f^{(1)} f_1^{(r-1)}) - \dots - Q(f^{(r-1)} f_1^{(1)}). \quad (2.73)$$

Notemos que en el lado derecho aparecen solamente $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(r-1)}$, y éstas son conocidas de las ecuaciones previas, de modo que la función desconocida $f^{(r)}$ aparece solamente del lado izquierdo y por lo tanto de forma lineal. Por último hay que señalar que esta aproximación requiere que se satisfaga la condición de ortogonalidad

$$\int \mathcal{D}^{(r)} \psi^{(i)} d\mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (2.74)$$

donde $\psi^{(i)}$ puede ser cualquiera de los invariantes de colisión.

2.6. Aproximación BGK

Uno de los principales problemas al tratar con la ecuación de Boltzmann es la naturaleza tan complicada del término de colisión, tanto en su versión no lineal como en su forma linealizada [29]. Por lo que no es de sorprender, que se hayan hecho propuestas para obtener expresiones más simples, conocidas como *modelos de colisión*. En este sentido a las ecuaciones tipo Boltzmann donde se haya reemplazado el término de colisión por un *modelo de colisión* se les llama modelos cinéticos. En 1954 Bhatnager, Gross y Krook, y de manera independiente, Welander, introducen una versión simplificada de la ecuación de Boltzmann, éste es un modelo de tiempo de relajación, que hoy es conocida como aproximación BGK. En realidad, el modelo conduce a resultados cualitativos correctos para una gran variedad de situaciones de flujo.

Veamos como se obtiene esta aproximación a partir de la ecuación de Boltzmann. La idea detrás de este modelo es que la gran cantidad de detalle contenido en el término de colisión no influye significativamente en el valor de muchas de las cantidades que podemos medir, a menos que llevemos a cabo experimentos muy refinados, la idea es borrar parte de esta información y escribir el operador $Q(f, f^1)$ como un operador más simple $Q(f)$ que contenga la información cualitativa y de forma promediada. En el modelo BGK vamos a asumir que las principales características del término de colisión son:

1. El operador de colisión $Q(f, f^1)$ satisface la relación (2.43) para los invariantes de colisión por lo que $Q(f)$ debe satisfacer

$$\int \psi^{(i)} Q(f) d\mathbf{v} = 0. \quad (2.75)$$

2. El término de colisión expresa la tendencia hacia una distribución Maxwelliana.

La manera más sencilla de tener esto en cuenta, es pensar que las colisiones cambian la función de distribución en una cantidad proporcional a una Maxwelliana f_{ML} , es decir que si ν es una constante, puede introducirse el siguiente modelo de colisión

$$Q(f) = \nu(f_{ML} - f). \quad (2.76)$$

Donde la Maxwelliana f_{ML} conlleva cinco parámetros ρ, V, T , determinados de acuerdo con (2.75), que implica

$$\int \psi^{(i)} f_{ML} d\mathbf{v} = \int \psi^{(i)} f d\mathbf{v}, \quad (2.77)$$

lo cual quiere decir que en cada punto del espacio fase y a cada instante, f_{ML} debe tener exactamente la misma densidad, velocidad y temperatura para el gas dado por la función de distribución f . La frecuencia de colisión ν , recíproco del tiempo de relajación $\nu = 1/\tau_0$, es un parámetro a ajustar. Esta es la forma más sencilla de derivar la aproximación BGK que es una versión linealizada de la ecuación de Boltzmann.

Hasta este punto nos quedamos, aunque quedan una gran variedad de aspectos interesantes a tratar en la Teoría Cinética de los gases, ya que este capítulo solamente tiene la finalidad de exponer los conceptos que se aplicarán al problema de tráfico vehicular aquí presentado. Para una revisión detallada de los conceptos antes expuestos puede consultarse [26, 27, 28, 25, 30, 29].

Capítulo 3

Relaciones Empíricas del flujo vehicular

Como es evidente, todos los modelos de tráfico vehicular deben estar basados en observaciones del tráfico real, es por eso que, antes de abordar las diversas formas que existen para modelar el flujo vehicular es importante mostrar algunas definiciones y relaciones empíricas.

3.1. Diagrama Fundamental y correlaciones

El estado del flujo vehicular se describe por medio de una serie de variables, que llamaremos *variables del tráfico*. El flujo vehicular J es el número de vehículos que cruzan un detector por unidad de tiempo, la densidad vehicular ρ será el número de vehículos por unidad de longitud y V será la velocidad media de los vehículos. A pesar de que el tráfico vehicular es un fenómeno muy complejo, éste presenta ciertas características generales. Uno de los métodos más importantes para estudiar el tráfico es analizando las relaciones empíricas flujo-densidad y velocidad-densidad, que están relacionadas con mediciones de las cantidades ya mencionadas, promediadas en algún punto de la carretera. En particular, la relación empírica velocidad-densidad está ligada a una observación muy obvia del tráfico real: a mayor densidad vehicular ρ o porcentaje de ocupación P (%), menor velocidad media (ver figura 3.1(b) que muestra datos tomados por la Japan Public Highway Corporation [31]). La función $V(\rho)$ se determina considerando un balance entre los requerimientos de seguridad de los conductores y las regulaciones y condiciones del camino. Para entender la razón por la cual V decrece cuando ρ se incrementa, notemos que los vehículos deben reducir su velocidad promedio si se reduce la distancia al vehículo de enfrente. En el límite en que ρ alcanza su valor máximo ρ_0 , los vehículos ya no se pueden mover y entonces $V(\rho)_{\rho \rightarrow \rho_0} \rightarrow 0$. Por otra parte, para valores pequeños de ρ , casi no hay interacción entre los vehículos y estos pueden moverse a la velocidad máxima $V(\rho)_{\rho \rightarrow 0} \rightarrow V_0$. Particularmente en 1935, Greenshields propone una relación lineal para describir esta situación $V(\rho) = V_0(1 - \rho/\rho_0)$, donde V_0 es la velocidad máxima permitida en la carretera y ρ_0 es la densidad máxima. Posteriormente Kerner *et al.* [32] ajustan una relación exponencial entre las variables velocidad y densidad

de la siguiente forma:

$$V(\rho) = V_0 \left[\left(1 + \exp \left[\frac{\rho/\rho_0 - 0,25}{0,06} \right] \right)^{-1} - 3,72 \times 10^{-6} \right]. \quad (3.1)$$

En el presente trabajo hemos adoptado esta última forma.

El flujo vehicular se define como el producto de la densidad vehicular ρ , con la velocidad media V

$$J = \rho V, \quad (3.2)$$

cuando se grafica el flujo vehicular J como función de la densidad ρ , o de la ocupación P (%), se obtiene lo que en la literatura de tráfico se conoce como *diagrama fundamental*. Resulta natural que esta curva parta del origen, ya que cuando la densidad vehicular es cero el flujo también debe serlo. El diagrama fundamental consiste de dos curvas distintas (ver figura 3.1 (a)), una con pendiente positiva y constante que parte del origen y correspondiente al tráfico libre y la otra con pendiente negativa para el tráfico congestionado.

En las observaciones del tráfico se han advertido una serie de correlaciones interesantes entre

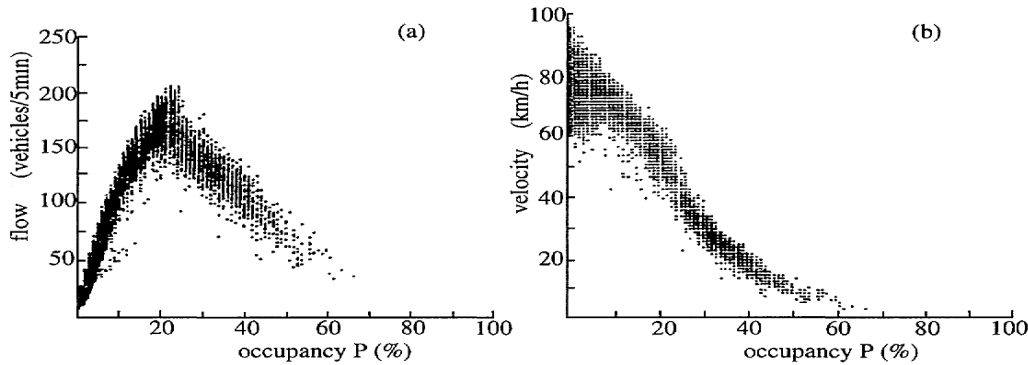


Figura 3.1: Ejemplos de las relaciones flujo-ocupación (a) y velocidad-ocupación (b) obtenidas de datos tomados por la Japan Highway Public Corporation [31].

las variables de tráfico. Vemos que para bajas densidades existe una fuerte correlación positiva con el flujo, que se refleja en la forma casi lineal del diagrama fundamental. En contraste, para altas densidades, la velocidad y la densidad están altamente anticorrelacionadas (véase la figura 3.2), debido a la forma monótona decreciente de la relación velocidad-densidad (figura 3.1 (b)).

También la velocidad media y la varianza de la velocidad están correlacionadas positivamente, figura 3.3, vía un factor positivo dependiente de la densidad conocido como *prefactor de la varianza* $\mathcal{A}(\rho)$ (ver figura 3.4):

$$\mathcal{A}(\rho) = \frac{\theta(\rho)}{[V(\rho)]^2}. \quad (3.3)$$

Puede observarse que el *prefactor de la varianza* (ver figura 3.4) es una función aproximadamente constante de la densidad para valores pequeños de la misma. Éste es un resultado

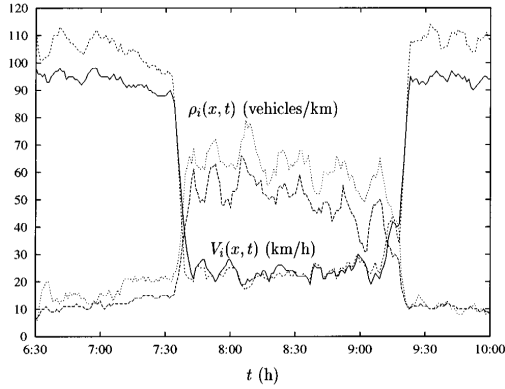


Figura 3.2: Comparación de la evolución temporal en carriles vecinos $i = 1, 2$ de las velocidades medias $V_i(t)$ y las densidades $\rho_i(t)$ [8, 16].

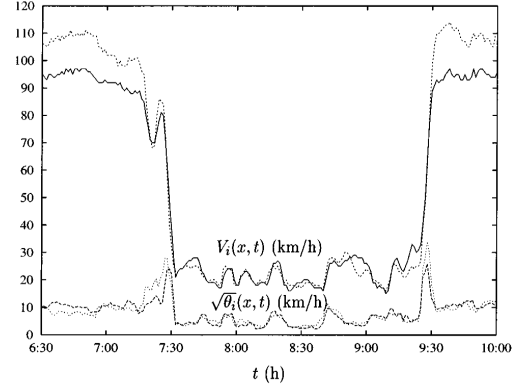


Figura 3.3: Comparación de la evolución temporal en carriles vecinos $i = 1, 2$ de la raíz cuadrada de las varianzas $\sqrt{\theta_i(t)}$ y las velocidades V_i [8, 16].

experimental que vamos a aprovechar posteriormente. Para la región congestionada se observa un incremento en el valor de este prefactor. A los resultados empíricos puede ajustarse una función de la forma

$$\mathcal{A}(\rho) = \mathcal{A}_0 + \Delta\mathcal{A} \left[1 + \exp\left(-\frac{\rho - \rho_c}{\Delta\rho}\right) \right]^{-1}, \quad (3.4)$$

donde \mathcal{A}_0 y $\Delta\mathcal{A}$ son los prefactores para tráfico libre y congestionado respectivamente, ρ_c es del orden de la densidad crítica a la cual se da la transición de tráfico libre a congestionado y $\Delta\rho$ denota la anchura de la transición.

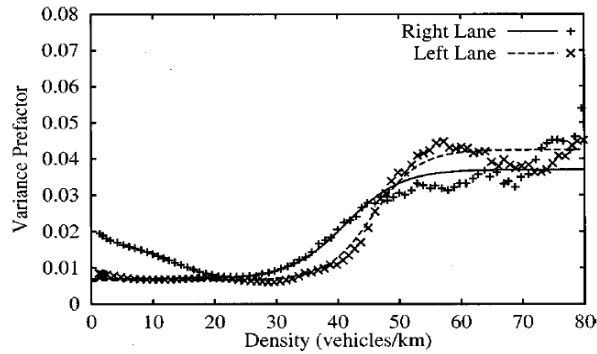


Figura 3.4: El prefactor de la varianza $\mathcal{A}(\rho)$ [8, 33].

Finalmente es importante mencionar a la probabilidad de poder rebasar p . Ésta es una variable que puede depender fuertemente de las condiciones del tráfico, es decir de la densidad y la velocidad media. Dentro de la literatura de tráfico existen diferentes maneras de modelar

esta dependencia. Prigogine y Herman [14] lo hacen considerando una relación lineal entre las variables

$$p(\rho) = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.5)$$

Helbing en [34] obtiene una relación entre la probabilidad de poder rebasar y la densidad a partir de datos experimentales. En la figura 3.5 vemos la relación $1 - p(\rho)$ vs. ρ que propone Helbing a partir de datos experimentales. Es posible observar que, cuando la densidad es muy pequeña la probabilidad de no poder rebasar, $1 - p(\rho) \rightarrow 0$, lo que significa que es posible rebasar ya que esta el camino libre. Conforme crece la densidad es cada vez mas difícil rebasar hasta que cerca de la densidad máxima, ρ_0 , rebasar es prácticamente imposible, $1 - p(\rho_0) \rightarrow 1$, $p(\rho_0) \rightarrow 0$. De la gráfica de Helbing 3.5 nosotros extraemos la siguiente relación haciendo un ajuste

$$p(\rho) = \exp\left[-\beta \frac{\rho}{\rho_0}\right], \quad (3.6)$$

con $\beta = 10$ y considerando que para Helbing $\rho_0 = 160 \text{ veh/km}$ (ver figura 3.6).

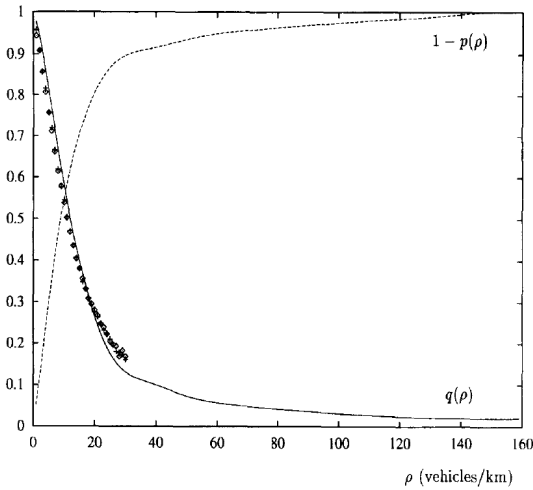


Figura 3.5: Relación $1 - p(\rho)$ vs. ρ obtenida por Helbing en [34].

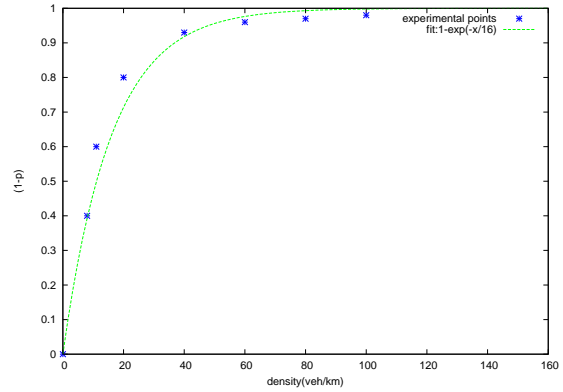


Figura 3.6: Los puntos azules son los datos extraídos de [34], la línea verde es un ajuste considerando que para Helbing $\rho_0 = 160 \text{ veh/km}$.

3.2. Fases del Tráfico

De acuerdo con el diagrama fundamental ya estudiado, se ha separado al tráfico en dos fases: tráfico libre y tráfico congestionado. El tráfico libre corresponde al primer tramo del diagrama donde la relación entre el flujo y la densidad es prácticamente lineal. Y como ya se ha mencionado, el tráfico congestionado corresponde al siguiente tramo que tiene pendiente negativa y en donde existe una mayor dispersión entre los datos.

En años más recientes, Kerner *et al.* [35, 36, 37, 38] han separado al tráfico congestionado en dos fases diferenciadas. De manera que desde su punto de vista, el tráfico vehicular presenta tres fases distintas: tráfico libre, tráfico sincronizado y *wide jams*.

El tráfico libre, es aquel en que los vehículos pueden rebasar y cambiar de línea libremente. En el tráfico libre un aumento en el flujo está acompañado de un incremento en la densidad y un correspondiente decremento en la velocidad media.

En el tráfico sincronizado los vehículos de diferentes carriles se mueven de manera sincronizada, es decir que la velocidad media en diferentes carriles varía de manera similar. Además, en el tráfico sincronizado la velocidad media es notablemente menor y la densidad notablemente mayor que en el tráfico libre para el mismo flujo de vehículos, compare las figuras 3.7 (a) y (b) que contienen datos medidos en Alemania entre los años 1991-1995 y reportados en [37]. Puede decirse incluso que en el tráfico sincronizado los vehículos prácticamente no pueden rebasar. Se ha observado que de manera contraria a lo observado en el

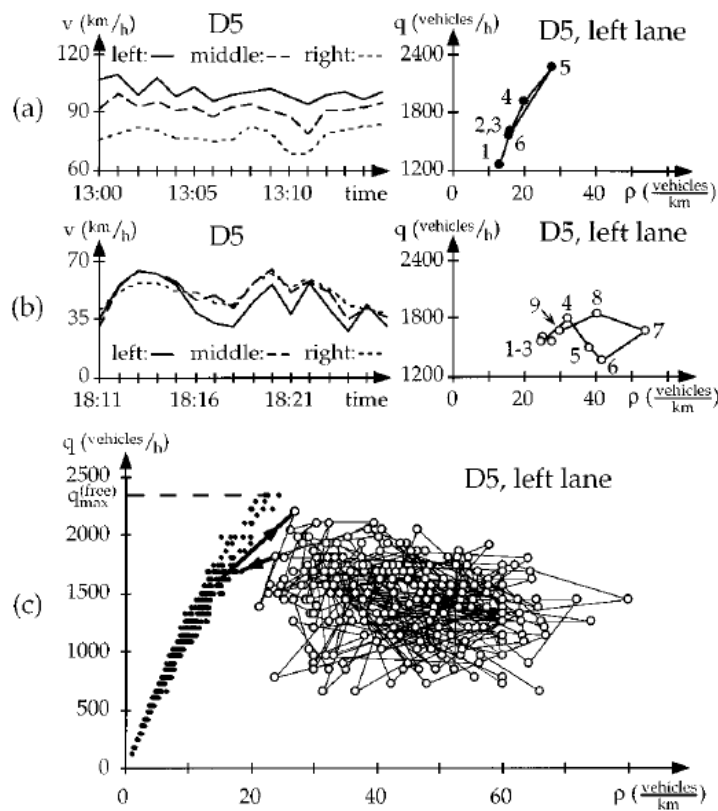


Figura 3.7: Tráfico libre (a) y tráfico sincronizado (b). Fragmentos de la velocidad media (izquierda) contra el tiempo para tres líneas de la carretera: (—) carril izquierdo, (- - -) carril central, (...) carril derecho. Transferencias entre puntos experimentales en el plano flujo-densidad (derecha) para la línea izquierda. En (c) puntos experimentales correspondientes al tráfico libre (puntos negros) y al tráfico sincronizado (círculos: las líneas sólidas muestran las transferencias). Dato reportados por Kerner *et al.* en [37].

tráfico libre, en el tráfico sincronizado un incremento en el flujo puede estar acompañado de un incremento o un decremento en la densidad. Correspondientemente, la velocidad media puede aumentar o disminuir cuando el flujo aumenta. Es decir, que los puntos medidos en

el diagrama flujo-densidad realizan transferencias aleatorias en todas direcciones cubriendo así un área bidimensional, lo anterior puede verse claramente en la figura 3.7 (c).

Los *wide jams* tienen la característica de ser congestionamientos que mantienen la velocidad media del frente del mismo, digamos V_g , conforme el congestionamiento se propaga. Otra característica de esta fase del tráfico es que el flujo dentro del *wide jam* es mucho menor que el flujo que se presenta en el tráfico libre. Las investigaciones empíricas del tráfico vehicular muestran [36] que los *wide jams* no emergen espontáneamente en el tráfico libre. Éstos sólo pueden aparecer de manera espontánea en el tráfico sincronizado, lo cual indica que antes de la formación de un *wide jam* a partir del tráfico libre existe una transición de fase del tráfico libre (L) al tráfico sincronizado (S), $L \rightarrow S$.

Dado que este capítulo está dedicado a las características empíricas mas relevantes observadas en el tráfico real, me pareció interesante hablar de las distintas fases del tráfico, sin embargo no ahondaré en el análisis de las transiciones de fase debido a que, a pesar de ser un tema muy interesante se sale de los objetivos del trabajo. El lector interesado puede consultar la referencia [38] para una revisión profunda del tema.

Capítulo 4

Modelos de Tráfico Vehicular

En este capítulo se presentan los modelos más relevantes en el estudio del tráfico vehicular. Habitualmente estos modelos se clasifican por su nivel de descripción. Los modelos que ponen énfasis en el comportamiento espacio-temporal de los vehículos individuales se conocen como modelos *microscópicos*; dentro de esta categoría incluimos a los modelos follow-the-leader y los modelos de autómata celular. En un nivel intermedio de descripción están los modelos *cinéticos*, estos modelos estudian el comportamiento de los vehículos sin interesarse particularmente en el comportamiento espacio-temporal de los mismos, pero teniendo en cuenta sus interacciones. Finalmente, los modelos *macroscópicos* observan el comportamiento colectivo de los vehículos.

En este capítulo comenzaré por los modelos microscópicos y seguiré con una revisión de los modelos macroscópicos más conocidos. Los modelos cinéticos los presentaré de manera independiente, en el capítulo 5, ya que el objetivo de este trabajo es obtener un modelo macroscópico consistente con un modelo cinético.

4.1. Modelos Microscópicos

En este tipo de modelos, se pone especial atención en los vehículos individuales, a cada vehículo le es asignada una ecuación de movimiento, que es análoga a la ecuación de Newton para cada partícula en un sistema clásico de partículas interactuantes. Los modelos microscópicos parten de la hipótesis de que la aceleración de un vehículo unitario α está determinada por los vehículos circundantes. La influencia principal en el comportamiento del conductor viene del vehículo frente a él, es decir del *vehículo líder*. Comencemos con los modelos *follow-the-leader*.

4.1.1. Modelos Follow-the-leader

En los modelos follow-the-leader, el vehículo n -ésimo solamente se ve afectado por el vehículo de enfrente $(n + 1)$ -ésimo. En los primeros modelos de este tipo, la diferencia de velocidades del n -ésimo y $(n + 1)$ -ésimo es el estímulo del vehículo n -ésimo. En otras palabras,

cada conductor tiende a moverse con la misma velocidad del vehículo líder. De manera que:

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right]. \quad (4.1)$$

Notemos que $(1/\tau)$ es un parámetro que establece la medida del tiempo en el modelo y se le conoce como *sensibilidad* de los conductores, ya que indica que tan rápidamente responden los conductores a un estímulo unitario.

Modelo de Pipes

Pipes [39] obtiene (4.1) diferenciando de ambos lados la ecuación:

$$\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t) = (\Delta x)_{safe} + \tau \frac{dx_n(t)}{dt}, \quad (4.2)$$

este modelo parte de la idea esencial de que, mientras mayor sea la velocidad del conductor, mayor distancia recorrerá en un cierto tiempo, y para evitar colisiones cada vehículo debe mantener una distancia de seguridad $(\Delta x)_{safe}$.

Modelos generalizados

Chandler et al. sugieren en [40] considerar un tiempo de retardo T , arguyendo que la respuesta de un conductor al tiempo t debe depender de un estímulo recibido al tiempo $t - T$ por los otros vehículos. De manera que, generaliza la ecuación (4.2) para obtener

$$\frac{d^2x_n(t+T)}{dt^2} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right], \quad (4.3)$$

donde $(1/\tau)$ sigue siendo la sensibilidad y es una constante independiente de n . De acuerdo con (4.2) y (4.3), un vehículo acelera o frena hasta adquirir la velocidad del vehículo líder. En este tipo de modelos, la respuesta de aceleración es independiente de la distancia al vehículo líder y precisamente ésta se considera una de las fallas del modelo, ya que no describe adecuadamente el proceso de formación de *clusters* observado en el tráfico real. Para ir un poco más allá, Gazis [41] considera que mientras más cerca esté el n -ésimo vehículo del $(n+1)$ -ésimo, mayor será la sensibilidad del n -ésimo carro, de manera que generaliza la ecuación (4.3) de la siguiente manera

$$\frac{d^2x_n(t+T)}{dt^2} = \frac{\kappa}{x_{n+1}(t) - x_n(t)} \left[\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right], \quad (4.4)$$

donde κ es una constante con las dimensiones correspondientes. Aún más general es el modelo derivado en [6, 42] expresando la sensibilidad para el n -ésimo conductor como

$$s_n = \frac{\kappa [v_n(t+T)]^m}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^l}, \quad (4.5)$$

donde m y l son parámetros fenomenológicos a ajustar de datos experimentales. Ésta es una de las principales desventajas que tienen este tipo de modelos, mientras más realista quieran ser, más parámetros por ajustar aparecerán.

Modelo de velocidad óptima

En 1961 Newell propuso el modelo de *velocidad óptima* [43]. Expresa la estrategia de manejo de la siguiente manera

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = (1/\tau) [V_n^{desired}(t) - v_n(t)], \quad (4.6)$$

donde $V_n^{desired}$ es la velocidad deseada del conductor n al tiempo t . En los modelos antes tratados, la velocidad deseada del n -ésimo vehículo es la del vehículo delante de él, en el modelo de Newell los vehículos se adaptan a una velocidad deseada, dependiente de la distancia al vehículo de enfrente $V^{desired} \rightarrow V(\Delta x_n(t))$, la cual debe reflejar los requerimientos de espacio y es conocida como *velocidad óptima*. De acuerdo con lo anterior, la ecuación para el n -ésimo vehículo es:

$$\frac{dx_n(t + \tau)}{dt} = V(\Delta x_n(t)), \quad (4.7)$$

donde $x_n(t)$ es la posición del vehículo n al tiempo t , τ es el tiempo de retraso o el inverso de la sensibilidad, $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ es la distancia del líder al vehículo n al tiempo t . La idea es que el conductor ajusta su velocidad, ya no respecto a la velocidad relativa, sino de acuerdo con la distancia relativa al líder $\Delta x_n(t)$. El tiempo de retraso τ permite ajustar la velocidad del vehículo a la velocidad óptima, cuando el flujo de tráfico está variando.

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor en la ecuación (4.7), se obtiene la siguiente ecuación diferencial [44]

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau} \left(V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n(t)}{dt} \right), \quad (4.8)$$

donde el inverso del tiempo de retraso $(1/\tau) = a$, es la sensibilidad. La ecuación diferencial (4.8) es análoga a la ecuación de movimiento de una partícula de masa m en presencia de fricción:

$$m \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx_n}{dt} = F(\Delta x_n(t)), \quad (4.9)$$

donde γ es el coeficiente de fricción y $F(\Delta x_n(t))$ es la fuerza para acelerar o desacelerar. El tiempo de retardo está dado por m/γ y la velocidad óptima $V(\Delta x_n(t))$ está relacionada con $F(\Delta x_n(t))/\gamma$.

Para el caso de tráfico vehicular, la función $V(\Delta x_j(t))$ debe tener las propiedades generales siguientes: debe ser monótona creciente y tener un límite superior (máxima velocidad, v_{max}). Existen varias opciones a elegir, la más sencilla propuesta por Sugiyama [45, 46] es:

$$V(\Delta x_j(t)) = v_{max} \Theta(\Delta x - d), \quad (4.10)$$

donde d es una constante y Θ es la función escalón de Heavyside. De acuerdo con esta propuesta, un vehículo se detendrá si la distancia al vehículo de enfrente es menor que d , en caso contrario puede acelerar hasta la velocidad máxima permitida v_{max} . Otra opción más realista propuesta por Bando et al. [44, 47] es la siguiente,

$$V(\Delta x_j(t)) = \frac{v_{max}}{2} [\tanh(\Delta x_j(t) - x_c) + \tanh(x_c)], \quad (4.11)$$

donde x_c es la distancia de seguridad. La desventaja es que la elección de esta función dificulta enormemente la solución analítica. Debido a que el modelo de velocidad óptima no toma en cuenta la respuesta de los conductores a la velocidad relativa con el vehículo de enfrente, puede suceder una colisión cuando un vehículo rápido se acerca a uno con menor velocidad.

Modelo de conductor inteligente

El modelo de conductor inteligente propuesto por Treiber y Helbing en [48, 49] es un modelo que trata de aproximarse a la manera real de manejar de los conductores. Este modelo es una función continua de la velocidad del vehículo n -ésimo, v_n , la distancia neta $s_n = (d_n - l_{n+1})$ (siendo $d_n = x_{n+1} - x_n$ y l_n es el tamaño del vehículo n), y la velocidad relativa del vehículo n -ésimo y el de enfrente Δv_n , de manera que:

$$\frac{dv_n}{dt} = a_n \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_n^0} \right)^\delta - \left(\frac{s_n^0(v_n, \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right]. \quad (4.12)$$

En la expresión anterior (4.12), se tiene una superposición de la tendencia a acelerar en un camino libre $a_n[1 - (v_n/v_n^0)^\delta]$ y la tendencia a desacelerar debido a la interacción con otros vehículos $-a_n[(s_n^0(v_n, \Delta v_n)/s_n)^2]$. El parámetro δ permite ajustar el término de aceleración, $\delta = 1$ corresponde a un ajuste exponencial, tal como se asume en los otros modelos. En el caso límite de $\delta \rightarrow \infty$ tenemos una aceleración constante a_n hasta que se alcanza la velocidad deseada v_n^0 . El término de desaceleración depende de la razón entre el valor deseado s_n^0 y su valor instantáneo. s_n^0 es una cantidad dinámica que depende de v_n y Δv_n de la siguiente manera

$$s_n^0(v_n, \Delta v_n) = s'_n + s_n^m \sqrt{\frac{v_n}{v_n^0}} + T_n v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{a_n b_n}}, \quad (4.13)$$

los parámetros de esta relación pueden escogerse de manera independiente para cada conductor n . El parámetro b_n es la desaceleración de confort, s'_n y s_n^m tienen unidades de longitud. Para simplificar el modelo se puede escoger $\delta = 0$, $s_n^m = 0$ y $l_n = 0$ lo que da buenos resultados.

4.1.2. Modelos Autómata Celular

Los modelos de autómata celular describen la dinámica vehicular de manera menos detallada, en comparación con los modelos follow-the-leader, pero su simplicidad favorece enormemente la velocidad de simulación para un gran número de vehículos interactuantes. De manera general, los modelos de autómata celular son idealizaciones de sistemas físicos en los que el espacio y el tiempo son discretos y las unidades interactuantes tiene un número finito de estados discretos. Para el caso de tráfico de vehículos se representa la carretera como una malla unidimensional. Cada sitio en la malla representa una celda, que puede estar ocupada o vacía por sólo un vehículo en un instante dado de tiempo. A cada paso discreto de tiempo $t \rightarrow t + 1$, el estado del sistema se actualiza siguiendo una serie de reglas prescritas.

Los primeros modelos de autómata celular para describir tráfico en carreteras, aparecen alrededor de los años ochenta y los debemos a Cremer y Ludwig [50] y Nagel y Schreckenberg

[51]. En el modelo de Nagel y Schreckenberg, la velocidad v de cada vehículo puede tomar un valor entero del intervalo $\{0, 1, \dots, v_{max}\}$. Las variables x_i y v_i denotan la posición y velocidad del vehículo i -ésimo, de modo que, $d_i = x_{n+1} - x_n$ es la distancia entre el i -ésimo vehículo y el de enfrente al tiempo t , véase figura 4.1. A cada paso de tiempo $t \rightarrow t + 1$,



Figura 4.1: Configuración típica del modelo de Nagel y Schreckenberg. El número en la parte superior es la velocidad del vehículo.

el arreglo de N vehículos en una malla finita de longitud L , se actualiza de acuerdo a las siguientes reglas ilustradas a partir de la configuración mostrada en 4.1, para $v_{max} = 2$:

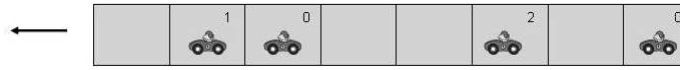
1. *Aceleración*: Si un vehículo no ha alcanzado su velocidad máxima $v_i < v_{max}$, incrementará su velocidad en uno, pero permanecerá constante en el caso de que $v_i = v_{max}$, es decir $v_i \rightarrow \min(v_i + 1, v_{max})$,



2. *Desaceleración*: Ésta se debe a la interacción con el vehículo de enfrente. Si la distancia al vehículo de enfrente es menor o igual a v_n , es decir $d_i \leq v_n$, la velocidad del i -ésimo vehículo se reduce a $d_i - 1$, $v_i \rightarrow \min(v_i, d_i - 1)$.



3. *Comportamiento aleatorio*: Si $v_i > 0$ la velocidad del i -ésimo vehículo decrece aleatoriamente en uno con probabilidad p ($p = 1/3$ en este ejemplo), pero v_i permanece sin cambio si $v_i = 0$, es decir $v_i \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$. Este parámetro toma en cuenta el comportamiento individual de los conductores, esencialmente es una aceleración no determinista, también



puede interpretarse como una sobre reacción al momento de frenar; este parámetro es esencial para la formación espontánea de congestionamientos.

4. *Movimiento*: Mueve los vehículos hacia adelante de acuerdo con la velocidad dictada por los pasos 1-3, es decir,

$$x_i \rightarrow x_i + v_i.$$



Para tráfico libre se tiene el tamaño de la celda $\Delta x = 7,5 \text{ m}$, esta longitud concuerda con la distancia mínima requerida l , es decir con el inverso de la densidad de aglomeración ρ_0 . El parámetro p , es la probabilidad de frenado, describe las fluctuaciones individuales de la velocidad debidas al retraso en la aceleración. Véase la figura 4.2 donde se muestran algunos resultados del modelo de Nagel y Schreckenberg.

Recientemente han aparecido modelos del tipo autómeta celular donde se toma en consideración la *anticipación* de los conductores [52, 53]. En este tipo de modelos, anticipación tiene que ver con que los conductores pueden estimar de alguna manera la velocidad del vehículo líder y tenerla en cuenta. Se ha observado, que al incorporar un nuevo parámetro, conocido como parámetro de anticipación, en el proceso de desaceleración, se observa un fenómeno en que todos los vehículos se mueven con velocidad v y la distancia de separación entre los vehículos tiende a cero (platoons). Se observa también, que al variar el parámetro de anticipación se pueden encontrar diferentes regímenes caracterizados por diferentes pendientes en el diagrama fundamental. Para una revisión más detallada de los modelos de autómeta celular sugerimos [54].

4.2. Modelos Macroscópicos

Los modelos macroscópicos se restringen a la descripción colectiva de la dinámica del tráfico vehicular. Esta descripción se lleva a cabo en términos de la densidad vehicular $\rho(x, t)$, la velocidad media $V(x, t)$ y quizá otras variables que representen las características colectivas

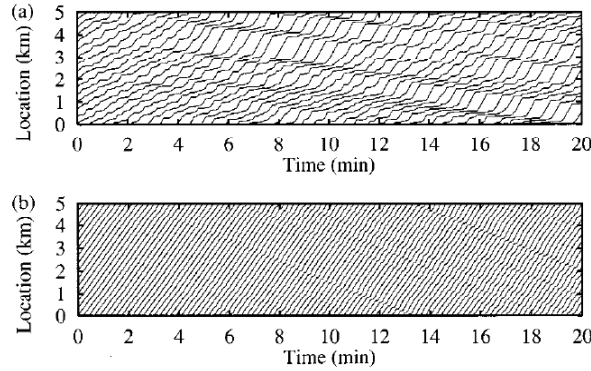


Figura 4.2: Diagrama espacio-tiempo para tráfico inestable en el modelo de Nagel y Schreckenberg. En este tipo de esquemas la pendiente de las trayectorias reflejan las velocidades individuales de los conductores, mientras que la densidad de las mismas refleja la densidad vehicular. En (a) $p = 0,5$, mientras que en (b) $p = 0,001$, vemos que en el límite $p \rightarrow 0$ la anchura de los congestionamientos tiende a cero debido a la naturaleza estocástica de este parámetro.

del tráfico como funciones de la posición y del tiempo. Los modelos macroscópicos de tráfico vehicular son interesantes por su conexión directa con datos empíricos [34, 16]. Estos modelos son mucho más eficientes numéricamente hablando que los modelos follow-the-leader aunque menos eficientes que los modelos de autómata celular. Otra ventaja interesante de este tipo de modelación es que pueden estudiarse fácilmente las inestabilidades del tráfico así como sus fases dinámicas [35, 38], de las que se habló en el capítulo 3. La mayoría de los modelos macroscópicos que existen a la fecha han sido derivados a partir de observaciones fenomenológicas, es por eso que muchos de ellos presentan características que no se observan en el tráfico real: esto comprende la aparición de regiones donde la densidad excede la densidad máxima ρ_0 (que es aquella en que los vehículos están defensa con defensa), la aparición de velocidades negativas, creación de ondas de choque que implican discontinuidades en el tráfico, etc. Dadas las desventajas que implican los modelos fenomenológicos, han surgido modelos macroscópicos basados en ecuaciones cinéticas [12, 13, 55], veremos cómo obtener este tipo de modelos en el capítulo 5, así como ejemplos de algunos de ellos.

4.2.1. Modelo de Lighthill y Whitham

El primer modelo macroscópico para describir tráfico vehicular aparece en 1955 y es conocido como modelo de Lighthill y Whitham [4, 5], aunque Richards lo desarrolla también de manera independiente en 1956. Éste es un modelo unidimensional, donde se considera que ningún vehículo entra o sale de la carretera, de manera que podemos pensar que se conserva el número de vehículos. Lo que conduce a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

donde $\rho(x, t)$ es la densidad vehicular y $J(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$ es el flujo vehicular. Si aplicamos la derivada sustancial, $d/dt = \partial/\partial t + V \partial/\partial x$, que describe los cambios temporales en un sistema coordenado que se mueve con velocidad $V(x, t)$, la ecuación (4.14) puede verse de la siguiente forma:

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = -\rho(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}, \quad (4.15)$$

de donde concluimos que la densidad vehicular se incrementa en el curso del tiempo conforme la velocidad decrece a lo largo del camino, y viceversa. Ahora, el problema de este modelo radica en especificar $J(x, t)$. Lo que hacen Lighthill y Whitham es tomar en cuenta las características del diagrama fundamental, y entonces es razonable suponer que

$$J(x, t) = J(\rho(x, t)), \quad (4.16)$$

y dado que $J(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$, la dependencia de $V(x, t)$ con (x, t) ocurre solamente a través de $\rho(x, t)$ es decir:

$$V(x, t) = V_e[\rho(x, t)]. \quad (4.17)$$

En este modelo (4.17) constituye la hipótesis de cerradura, la cual está sustentada en resultados experimentales. Es importante señalar que esta hipótesis permite que el tratamiento de este modelo se haga solamente en términos de la ecuación de continuidad. Ahora bien, el análisis de esta ecuación arroja características interesantes que discutiremos a continuación. Si se sustituye (4.17) en (4.14), esta se transforma en:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + v_g(\rho(x, t)) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (4.18)$$

donde

$$v_g(\rho) = V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} = \frac{\partial J_e(\rho)}{\partial \rho}. \quad (4.19)$$

La ecuación (4.18) es una ecuación de onda no lineal que describe la propagación de ondas cinemáticas con velocidad $v_g(\rho)$. Y dado que, $dV_e(\rho)/d\rho \leq 0$, de acuerdo con el diagrama fundamental, tenemos que $v_g \leq V_e(\rho)$. Ésto predice que las ondas cinemáticas se propagan hacia atrás con respecto al flujo de vehículos, y lo hacen con una velocidad relativa $c(\rho) = v_g(\rho) - V_e(\rho) \leq 0$. Notemos que $v_g(\rho)$, es la velocidad de las líneas características, es decir la velocidad de propagación local de información, y ésta depende de la densidad. Cuando $J(\rho)$ es convexa, es decir $d^2J/d\rho^2 < 0$, entonces $dv_g/d\rho < 0$; en consecuencia, valores grandes de la densidad se propagan más lento que los valores pequeños de la misma, distorsionando de esta manera el perfil de densidad. De forma contraria, cuando $dv_g/d\rho > 0$ los valores grandes de la densidad se propagan más rápido causando una distorsión en la dirección contraria. Resulta natural darse cuenta que esta distorsión del perfil inicial es causada por la dependencia en la densidad de $v_g(\rho)$, es decir por la no linealidad de (4.18). Ver figura 4.3, donde se muestra la distorsión en el perfil de densidad para el caso en que $dv_g/d\rho > 0$. Este modelo tiene el mérito de ser el primero en su tipo, sin embargo, excepto por la forma específica de $J_e(\rho)$ que se obtiene del diagrama fundamental, este modelo es idéntico a los modelos hidrodinámicos de primer orden. Además presenta discontinuidades que son poco realistas y es estable, es decir que no da lugar a la formación de ondas stop-and-go o tráfico

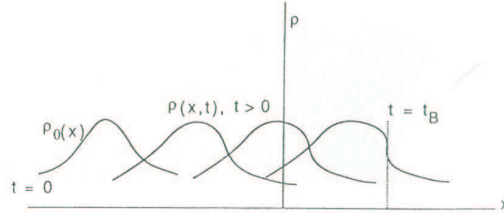


Figura 4.3: Distorsión del perfil de densidad cuando $dv_g/d\rho > 0$.

fantasma. El fenómeno de ondas stop-and-go ha sido estudiado empíricamente. Se ha observado que el tráfico stop-and-go no tiene una frecuencia característica, lo que nos indica que estamos tratando con ondas no lineales. Este estado se caracteriza por el hecho de que cada vehículo dentro de un congestionamiento de este tipo se detiene completamente por un cierto periodo de tiempo.

Las observaciones basadas en fotografías aéreas muestran la existencia de tráfico fantasma, es decir la formación de congestionamientos sin una razón aparente, como podría ser un accidente o un cuello de botella, entonces se concluye que la razón puede ser una pequeña perturbación.

Término de Difusión en el modelo de Lighthill-Witham

El desarrollo de ondas de choque, como las que se presentan en el modelo de Lighthill y Whitham (LW) [5], ocasiona serias dificultades al tratar de resolver el modelo numéricamente. Para evadir el problema de las ondas de choque Whitham en 1974 agrega un término difusivo al modelo LW de la siguiente manera:

$$J(\rho) = J_e(\rho) - D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.20)$$

donde $D > 0$ y es constante. Notemos que para una ρ fija, un gradiente positivo (negativo) conduce a una disminución (aumento) del flujo, tal como los vehículos reducen (aumentan) su velocidad dependiendo si se acercan a una región más (menos) congestionada. Usando esta relación en la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x; t) + v_g \frac{\partial \rho}{\partial x}(x; t) = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x; t), \quad (4.21)$$

donde

$$v_g(\rho) = \frac{dJ_e(\rho)}{d\rho}, \quad (4.22)$$

en esta ecuación diferencial no lineal, la no-linealidad y el término difusivo tienen efectos opuestos; el término $v_g \partial \rho / \partial x$, como ya vimos, tiende a escalar y finalmente romper la onda, mientras que el término $D \partial^2 \rho / \partial x^2$ suaviza el perfil. Este último término, $D \partial^2 \rho / \partial x^2$, trata de capturar de alguna manera la anticipación de los conductores a las condiciones del tráfico delante de ellos, desafortunadamente también implica que los conductores están pendientes de las condiciones detrás de ellos, lo cual no es razonable considerando que el flujo de tráfico es anisótropo [56].

Modelo de Greenshields y Ecuación de Burgers

Hasta ahora no se ha considerado ninguna forma específica de $V_e(\rho)$, consideremos la forma empírica simple que propone Greenshields:

$$V_e(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (4.23)$$

donde ρ_0 y V_0 son parámetros fenomenológicos que se interpretan respectivamente como la concentración a la cual el flujo se detiene y la velocidad máxima permitida en la carretera. Sustituyendo (4.23) en (4.21) obtenemos la siguiente ecuación para la velocidad de propagación $v_g(x, t) = V_0(1 - \rho(x, t)/\rho_0)$:

$$\frac{\partial v_g(x, t)}{\partial t} + v_g(x, t) \frac{\partial v_g(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 v_g(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.24)$$

ésta es la ecuación de Burgers, la más simple que contiene propagación no-lineal y difusión. Sorprendentemente, esta ecuación puede resolverse analíticamente, porque está relacionada con la ecuación de calor por medio de la transformación de Cole-Hopf

$$v_g(x, t) = - \left[\frac{2D}{\psi(x, t)} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t). \quad (4.25)$$

La ecuación de Burgers resuelve el problema de la formación de ondas de choque, pero no puede explicar la aparición de ondas stop-and-go o tráfico fantasma, esto se debe al uso de la relación de equilibrio (4.17).

4.2.2. Modelo de Payne

El modelo de Lighthill y Whitham asume que el flujo de tráfico obedece la relación de equilibrio (4.17), lo cual es una limitante de este modelo. En 1971, Payne [57] sugiere reemplazar la relación (4.17) por una ecuación dinámica para la velocidad media $V(x, t)$, que deriva a partir del modelo microscópico de Newell [43], por medio de un desarrollo en serie de Taylor. Él identifica las velocidades microscópicas y macroscópicas de la siguiente manera:

$$v_\alpha(t + \Delta t) = V(x + V\Delta t, t + \Delta t) \approx \left[V(x, t) + V\Delta t \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \right], \quad (4.26)$$

y reemplaza el inverso de la distancia al carro de enfrente d_α , por la densidad en el punto $x + d_\alpha(t)/2$, es decir en el medio del vehículo líder y el que lo sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\alpha(t)} &= \rho(x + d_\alpha(t)/2, t) \\ &= \rho(x + 1/(2\rho), t) \\ &\approx \left[\rho(x, t) + 1/(2\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Lo que conduce a:

$$v_e(d_\alpha(t)) = V_e(1/d_\alpha(t)) \approx \left[V_e(\rho(x, t)) + \frac{1}{2\rho(x, t)} \right] \left[\frac{dV_e(\rho)}{d\rho(x, t)} \right] \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}. \quad (4.28)$$

Y de lo anterior, finalmente obtiene la siguiente ecuación para la velocidad

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\Delta t} [V_e(\rho) - V], \quad (4.29)$$

donde

$$D(\rho) = -\frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial V_e}{\partial \rho} = \frac{1}{2\Delta t} \left| \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right| > 0. \quad (4.30)$$

Al término $V \partial V / \partial x$, se le llama término de convección y describe los cambios de la velocidad en la posición x producidos por el movimiento promedio de los vehículos. El término de anticipación $-D(\rho) \partial \rho / \partial x$, toma en cuenta la anticipación de los vehículos a las condiciones de tráfico a su alrededor. Finalmente el término de relajación $(1/\Delta t)[V_e(\rho) - V]$, delinea una adaptación exponencial de la velocidad promedio V a la velocidad $V_e(\rho)$ con un tiempo de relajación Δt . El modelo de Payne coincide perfectamente con el modelo de Newell si se considera $\tau = \Delta t$. Cuando $\Delta t \rightarrow 0$ en este modelo recuperamos el modelo (4.20) de Light-hill y Whitham con un coeficiente de difusión dependiente de la densidad. Numéricamente hablando, el modelo de Payne no es muy robusto y la solución del mismo requiere modificar el modelo original con un término de viscosidad numérica.

4.2.3. Modelo de Phillips

A finales de los setentas Phillips propone un modelo que deriva de una versión modificada del modelo de Prigogine, este modelo se estudiará en el capítulo 5. En este modelo Phillips considera la ecuación de continuidad (4.14) y la siguiente ecuación para la velocidad

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\tau(\rho)} [V_e(\rho) - V], \quad (4.31)$$

la cantidad $\mathcal{P}(x, t) = \rho(x, t)\Theta(x, t)$ es conocida como presión de tráfico y $\Theta(x, t)$ es la varianza de la velocidad. Para poder tener un modelo cerrado y resolver necesitamos tener una relación entre la varianza $\Theta(x, t)$ y las cantidades $\rho(x, t)$ y $V(x, t)$ que son las variables dinámicas de este modelo. Phillips propone la relación $\Theta(x, t) = \Theta_0 [1 - \rho(x, t)/\rho_0]$. De acuerdo con esta propuesta, la varianza decrece conforme se incrementa la densidad y se hacen cero junto con $V_e(\rho)$ cuando $\rho = \rho_0$. En cierto intervalo de densidad este modelo produce tráfico inestable, pero al igual que el modelo de Payne tampoco es muy robusto. Otra cosa importante de recalcar, con respecto a este modelo, es que la derivada de la presión con respecto a la densidad puede tomar valores negativos para el intervalo $\rho_0/2 < \rho < \rho_0$, indicando que los vehículos aceleran hacia el embotellamiento, lo cual no es realista.

4.2.4. Modelo de Kerner y Konhäuser

Kerner y Konhäuser [58, 32] sugieren un modelo similar al de Phillips, solamente que, en analogía con la ecuación de Navier-Stokes para flujos compresibles sugieren a la presión de tráfico de la siguiente forma

$$\mathcal{P}(x, t) = \rho(x, t)\Theta(x, t) - \eta_0 \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}, \quad (4.32)$$

asumen $\Theta(x, t) = \Theta_0$ y toman $V_e(\rho) = V_0 ([1 + \exp[(\rho/\rho_0 - 0,25)/0,06]]^{-1} - 3,72 \times 10^{-6})$ del diagrama fundamental. Los resultados numéricos de este modelo parecen muy alentadores, sin embargo, para ciertos valores de los parámetros involucrados V_0 , Θ_0 , τ y η_0 la densidad excede su valor máximo permitido [23]. Este modelo se ilustra en la figura 4.4 donde podemos observar que el modelo predice la formación de un congestionamiento y que éste tiene la estructura de una onda de choque ya que su pendiente es casi vertical.

4.2.5. Modelo de Helbing

Helbing [23] sugiere mejorar el modelo de Kerner y Konhäuser introduciendo una ecuación más para la descripción del tráfico, es decir una ecuación para la varianza de la velocidad $\Theta(x, t)$, en analogía con la ecuación para la conducción térmica, propone

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{2\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{2}{\tau} [\Theta_e(\rho) - \Theta], \quad (4.33)$$

donde siguiendo la misma analogía,

$$\Gamma(x, t) = -\kappa_0 \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}, \quad (4.34)$$

y propone, dado que no dispone de datos experimentales

$$\Theta_e(\rho) = \Theta_0 \left\{ \left[1 + \exp \left(\frac{\rho/\rho_0 - 0,25}{0,06} \right) \right]^{-1} - 3,72 \times 10^{-6} \right\}. \quad (4.35)$$

Para completar el modelo introduce algunas correcciones para considerar el tamaño finito de los vehículos. Los vehículos ocuparán un espacio de longitud $s(\rho, V) = l + V\Delta T$, donde l es la longitud del vehículo y ΔT es el tiempo de reacción. Lo que conduce a las siguientes correcciones para $\mathcal{P}(x, t)$ y $\Gamma(x, t)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, t) &= \frac{\rho(x, t)\Theta(x, t)}{1 - \rho(x, t)s(V(x, t))} - \eta \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}, \\ \eta(\rho, V) &= \frac{\eta_0}{1 - \rho s(V)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= -\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \kappa(\rho, V) &= \frac{\kappa_0}{1 - \rho s(V)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

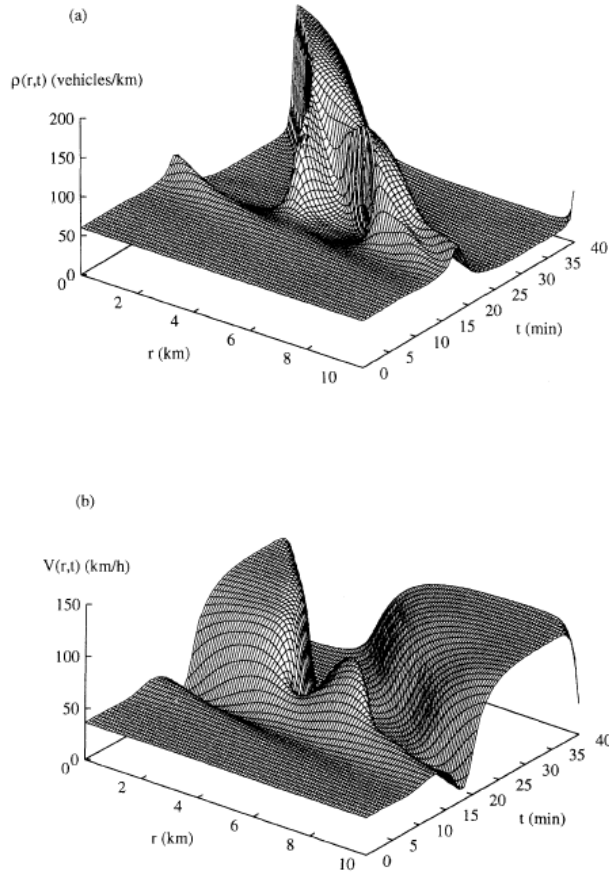


Figura 4.4: Comportamiento espacio-temporal de (a) la densidad $\rho(x,t)$ y (b) la velocidad media $V(x,t)$ para el modelo de Kerner-Kouhaüser [58].

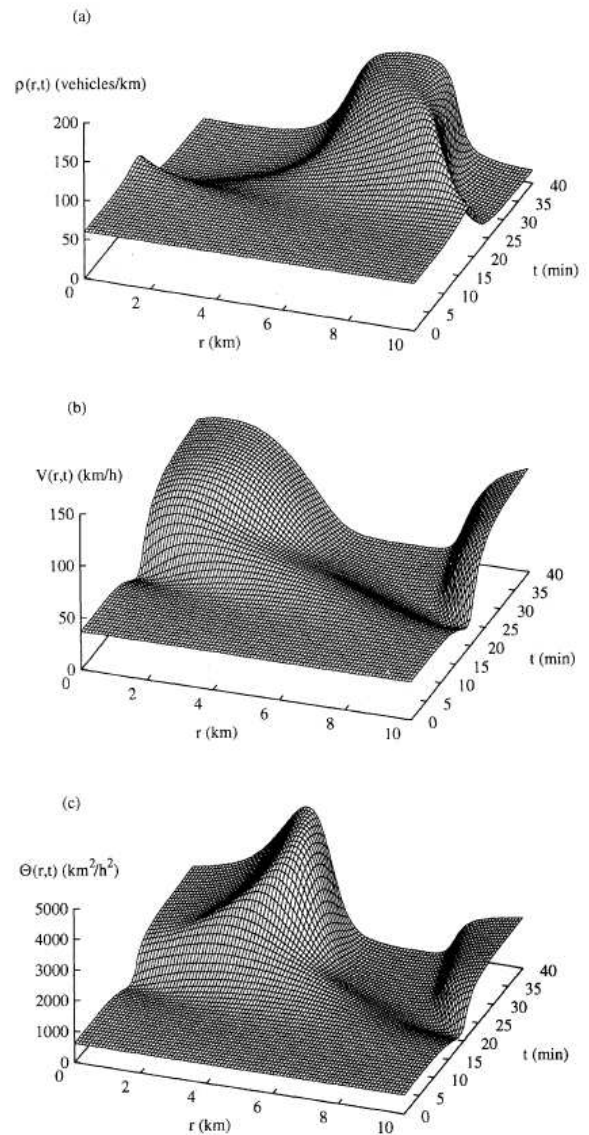


Figura 4.5: Comportamiento espacio-temporal de (a) la densidad $\rho(x,t)$, (b) la velocidad media $V(x,t)$ y (c) la varianza de la velocidad para el modelo de Helbing [23].

Con estas consideraciones Helbing obtiene los perfiles mostrados en la figura 4.5. Este modelo también conduce a la formación de una onda de densidad, pero con una forma mucho más suave. También vemos que inmediatamente antes de la formación del cluster, se incrementa la varianza de la velocidad. Este es el observado efecto de anticipación reportado por Kühne [22, 23].

Capítulo 5

Modelos Cinéticos de Tráfico Vehicular

Para estudiar el comportamiento del tráfico vehicular desde el punto de vista de la Teoría Cinética estudiaremos los modelos de Prigogine y Paveri-Fontana que son los pioneros en este tipo de modelación. En 1960, Prigogine [14, 11] propone un modelo para describir tráfico vehicular enfocando su atención en los cambios temporales de una función de distribución $f(x, v, t)$, este modelo es importante ya que es el primero en su tipo. Posteriormente, Paveri-Fontana propone un modelo similar al de Prigogine, que corrige algunos de los aspectos más criticados del modelo de Prigogine [15]. Este capítulo estará dedicado a la presentación de ambos modelos.

El problema de tráfico vehicular que nosotros vamos a estudiar es un problema en una dimensión, por lo tanto, si queremos aplicar los conceptos estudiados en el capítulo anterior tendremos que hacer algunas modificaciones. Supondremos que podemos describir el movimiento de un vehículo α por medio de diversas variables como pueden ser, su posición x_α , su velocidad v_α y quizá alguna otra variable que caracterice el tipo de vehículo o el estilo de manejo del conductor. Estas cantidades podemos combinarlas en un vector

$$\mathbf{x} = (x_\alpha, v_\alpha, \dots), \quad (5.1)$$

que de cuenta del estado del vehículo α a un cierto tiempo t . De manera que la densidad del espacio fase, $g(\mathbf{x}, t) = g(x, v, \dots, t)$, está definida por medio del número de vehículos que están en un intervalo de la carretera entre x y $x + dx$, su velocidad cae en el intervalo v y $v + dv, \dots$, al tiempo t

$$g(x, v, \dots, t) dx dv \dots \quad (5.2)$$

Una buena elección de la ecuación de evolución de esta cantidad, permite derivar las ecuaciones de evolución de las cantidades macroscópicas tales como la densidad vehicular $\rho(x, t)$, la velocidad media $V(x, t)$, la varianza de la velocidad $\Theta(x, t)$, etcétera. La obtención de esta ecuación de evolución se basa en el hecho de que la evolución temporal de g está dada por una ecuación de balance del tipo

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \left(g \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{int}, \quad (5.3)$$

que describe los cambios de la función de distribución g en el espacio fase $\Omega = \{\text{todos los estados posibles de } \mathbf{x}\}$. El término $\nabla_{\mathbf{x}}(g \, d\mathbf{x}/dt)$, refleja los cambios de la densidad del espacio fase g , debidos al movimiento en el espacio fase Ω , con velocidad $d\mathbf{x}/dt$, el término $(\partial g/\partial t)_{int}$ da cuenta de los cambios debidos a las interacciones entre los vehículos. Veamos continuación los modelos de Prigogine y Paveri-Fontana.

5.1. Modelo de Prigogine-Herman

Prigogine [11, 14] considera una carretera en la cual, los vehículos pueden rebasar. En este caso, el estado \mathbf{x} está dado por la posición x y la velocidad v de un vehículo y define una función de distribución de velocidades $f(x, v, t)$ para un tiempo y un punto dado de la carretera (x, t) . En términos de esta función de distribución podemos decir que $f(x, v, t)dx dv$ representa el número de vehículos que a un cierto tiempo t se encuentran en el intervalo de la carretera entre x y $x + dx$ y su velocidad está en el intervalo v y $v + dv$ (ver figura 5.1). En analogía con la Teoría Cinética de gases llamaremos ecuación cinética a la ecuación de evolución de la función de distribución de velocidades $f(x, v, t)$. Prigogine postula la exis-

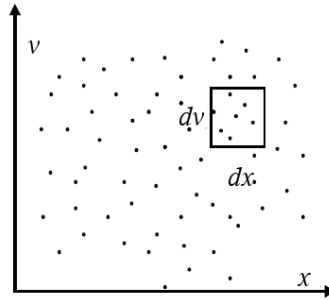


Figura 5.1: Representación esquemática del espacio (x, v) .

tencia de una función de distribución de velocidades $f^0(x, v, t)$, de manera que la cantidad $f^0(x, v, t)dx dv$ es el número de vehículos cuyos conductores al tiempo t , están en el intervalo del camino entre x y $x + dx$ y llevan *velocidad deseada* entre v y $v + dv$. En este sentido, puede pensarse que $f^0(x, v, t)$, es la función de distribución que se alcanzaría si los vehículos no interactúan entre si, por ejemplo cuando el sistema estuviese muy diluido. Esta función de distribución, se supone que contiene información tal como límites de velocidad, características del comportamiento de los vehículos y las velocidades deseadas de los conductores. Claramente la introducción de la función $f^0(x, v, t)$ es lo que diferencia a la teoría estadística del tráfico de la teoría estadística usual, y representa una idealización del comportamiento colectivo de los conductores.

Regresando a la función de distribución de velocidades $f(x, v, t)$, su derivada temporal está dada por dos términos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Se establece que $f(x, v, t)$ puede cambiar en el tiempo debido a dos procesos:

- Si $f(x, v, t)$ difiere en algún momento de $f^0(x, v, t)$ para la misma x y v , entonces existirá el deseo de regresar a la distribución ideal. Se etiqueta a este proceso como *relajación*.
- Un vehículo que viaja con una cierta velocidad v frenará o simplemente rebasará debido a una *interacción*, si se encuentra con un vehículo que viaja más despacio que él. A este término lo llamaremos de *interacción*. Se usa la palabra interacción, en lugar de colisión, ya que se espera que el sentido común de los conductores evite las colisiones en toda la extensión de la palabra.

Si igualamos la derivada temporal de $f(x, v, t)$ con las tasas de cambio debidas a los dos procesos antes descritos, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int}. \quad (5.5)$$

Ahora veamos como expresa explícitamente Prigogine cada uno de estos términos.

5.1.1. Término de relajación

Se asume que el término de relajación tiene la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel} = \frac{(f - f^0)}{\tau}, \quad (5.6)$$

ésto corresponde a una relajación exponencial con un tiempo característico τ , llamado *tiempo de relajación*. Cabe esperar que el tiempo de relajación τ sea una función complicada de la densidad, así como de la probabilidad de poder rebasar. Diversos mecanismos pueden contribuir a τ . Por ejemplo, dada la definición de f^0 , un vehículo moviéndose de un sitio donde f^0 tiene un valor a otro donde f^0 tiene un valor diferente, alcanzará la nueva distribución ideal en un tiempo τ_1 . Otro mecanismo de relajación puede darse al rebasar, y este corresponderá a otro tiempo de relajación τ_2 de la forma $\tau_2 = T(1-p)/p$. De modo que el tiempo de relajación τ pueda ser el mayor de los tiempos de relajación involucrados τ_1 y τ_2 y la probabilidad de poder rebasar p es de la forma (3.5).

5.1.2. Término de Interacción

Cuando un vehículo con velocidad $v > v'$ se aproxima a un vehículo con velocidad v' , el vehículo con velocidad v tiene dos opciones, puede reducir su velocidad a la velocidad v' o puede rebasar al vehículo lento. Para calcular el término de interacción en la ecuación de Prigogine se asumen las siguientes restricciones:

- (a) El proceso de frenado tiene probabilidad $(1 - p)$ y el de rebasado tiene probabilidad p , con $0 \leq p \leq 1$. Si un vehículo rebasa a otro, su velocidad no se ve afectada.

- (b) Tampoco se ve afectada la velocidad del vehículo que es rebasado o que causa que otro vehículo frene.
- (c) Los vehículos son considerados como objetos puntuales.
- (d) El proceso de frenado es instantáneo.
- (e) Sólo se consideran interacciones binarias.

Si aplicamos estas ideas al problema de interacciones vehiculares, siguiendo en analogía la derivación heurística de la ecuación de Boltzmann, es posible obtener:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = \int_0^\infty dv'(1-p)(v'-v)f_2(x, v', x, v, t), \quad (5.7)$$

si además suponemos que

- (f) Es válida la hipótesis de caos vehicular

$$f_2(x', v', x, v, t) \approx f(x, v, t)f(x, v', t), \quad (5.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} &= f(x, v, t) \int_0^\infty dv'(1-p)(v'-v)f(x, v', t) \\ &= f(x, v, t)\rho(x, t)[V(x, t) - v](1-p), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int f(x, v, t)dv, \\ \rho(x, t)V(x, t) &= \int vf(x, v, t)dv. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La deducción heurística de la expresión (5.9) se obtiene considerando que el término de colisión puede escribirse de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} = \sum_j (\Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)})(1-p), \quad (5.11)$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es el término de ganancia y el segundo es el término de pérdida en el espacio fase. Temporalmente, vamos a distinguir entre un tipo de vehículo i , el cual estamos siguiendo y el resto de los vehículos j , sobre los cuales vamos a sumar. La cantidad $\Gamma_{ij}^{(-)} dx dv dt$ es el número de vehículos sustraídos del elemento $dx dv$ debido a interacciones con vehículos del tipo j en un tiempo dt . Y $\Gamma_{ij}^{(+)} dx dv dt$ es el número de vehículos que se añaden al elemento $dx dv$ por interacciones con vehículos del tipo j en el tiempo dt . En este caso p representa la probabilidad de poder rebasar, por lo que es natural, multiplicar el

término de colisión por $(1 - p)$, que representa la probabilidad de no poder rebasar. En general p puede ser una función de la densidad.

Consideremos un vehículo del tipo i en la posición x y con velocidad v_i . Se pretende calcular la probabilidad de que, durante dt , el vehículo i interactúe con un vehículo del tipo j que lleva velocidad $v_j < v_i$. Solamente este tipo de colisiones contribuyen a $\Gamma_{ij}^{(-)}$. Si nos fijamos en el vehículo i , entonces el vehículo j se aproxima con velocidad relativa $v_i - v_j > 0$, el flujo de vehículos de tipo j tal como lo observa un vehículo tipo i en la posición x es $f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j)$, y el número probable de vehículos tipo j en el elemento $dt dv_j$ se obtiene integrando sobre todo $(v_i - v_j) > 0$:

$$\int_0^{v_i} f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j) dt dv_j, \quad (5.12)$$

estos deben interactuar con el vehículo tipo i en la posición x con probabilidad

$$f_i(x, v_i, t) dx dv_i. \quad (5.13)$$

De manera que

$$\Gamma_{ij}^{(-)} dx dv_i dt = dx dv_i dt f_i(x, v_i, t) \int_0^{v_i} f_j(x, v_j, t)(v_i - v_j) dv_j. \quad (5.14)$$

Para obtener $\Gamma_{ij}^{(+)}$ de nuevo fijamos el vehículo i con velocidad v_i en x y buscamos la probabilidad de que este vehículo interactúe durante dt con un vehículo del tipo j con velocidad $v_j > v_i$. De manera que el vehículo j se aproxima con una velocidad relativa $(v_j - v_i) > 0$. El flujo de vehículos del tipo j como los observa el vehículo de tipo i en x será $f_j(x, v_j, t)(v_j - v_i)$, y el número probable de vehículos de tipo j en $dt dv_j$ será, integrando sobre todo $(v_j - v_i) > 0$:

$$\int_{v_i}^{\infty} f_j(x, v_j, t)(v_j - v_i) dt dv_j, \quad (5.15)$$

los cuales deben interactuar con el vehículo i en la posición x con una probabilidad

$$f_i(x, v_i, t) dx dv_i. \quad (5.16)$$

Entonces

$$\Gamma_{ij}^{(+)} dx dv_i dt = dx dv_i dt f_i(x, v_i, t) \int_{v_i}^{\infty} f_j(x, v_j, t)(v_j - v_i) dv_j. \quad (5.17)$$

Juntando las ecuaciones (5.14) y (5.17) se puede obtener:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)} &= f_i \int_{v_i}^{\infty} f_j(v_j - v_i) dv_j - f_i \int_0^{v_i} f_j(v_i - v_j) dv_j \\ &= f_i V_j \rho_j - f_i v_i \rho_j. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Si ahora nos damos cuenta de que los subíndices i y j se refieren ambos al conjunto entero de vehículos, podemos escribir la ecuación (5.11) usando (5.18), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col} &= \sum_j (\Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)})(1-p) \\ &= f(x, v, t)\rho(x, t)[V(x, t) - v](1-p), \end{aligned} \quad (5.19)$$

que es idéntica a la ecuación (5.9).

Entonces, con las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.11) se puede escribir una ecuación tipo Boltzmann para la función de distribución de la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{(f - f^0)}{\tau} + (1-p)\rho(V - v)f. \quad (5.20)$$

Ésta es una ecuación integro-diferencial para la función de distribución. Hay que notar que tanto $V(x, t)$ como $\rho(x, t)$ son funciones implícitas de $f(x, v, t)$ y por lo tanto la ecuación es no-lineal.

5.2. Modelo de Paveri-Fontana

El modelo que propone Paveri-Fontana [15] es un modelo que incorpora una nueva variable en espacio fase conocida como *velocidad deseada* w . En consecuencia, el estado asociado \mathbf{x} está dado por la posición x , la velocidad v y la velocidad deseada w , por lo que la densidad del espacio fase es $g(x, v, w, t)$. Paveri-Fontana considera que cada conductor tiene una velocidad deseada individual, que es la velocidad con la que los conductores querrían conducir, de manera que toma en cuenta el carácter pasivo o agresivo de los conductores. En general, esta variable puede contener información sobre la personalidad del conductor, su estilo de manejo o quizá alguna especificación del camino. Paveri-Fontana comienza definiendo la función de distribución de un vehículo $g(x, v, w, t)$ que tiene velocidad deseada w . De manera que $g(x, v, w, t)dxv dw$ representa el número de vehículos que al tiempo t , se encuentran en la posición entre x y $x + dx$, su velocidad está entre v y $v + dv$ y tienen velocidad deseada entre w y $w + dw$, de manera que puede verse fácilmente que

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= \int_0^\infty dw g(x, v, w, t), \\ f^0(x, w, t) &= \int_0^\infty dv g(x, v, w, t), \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde $f(x, v, t)$ y $f^0(x, w, t)$ son la función de distribución de velocidades y la función de distribución de velocidades deseadas respectivamente. Ahora Paveri-Fontana considera una ecuación tipo Boltzmann de la forma (5.3)

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial(gv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(g \frac{dv}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(g \frac{dw}{dt} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{col}, \quad (5.22)$$

donde el término $\partial/\partial w (g dw/dt)$ puede despreciarse ya que se considera que durante un viaje la velocidad deseada individual es independiente del tiempo, es decir

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad (5.23)$$

y siendo $dv/dt = a(v, w)$ la aceleración de los vehículos que se mueven con velocidad v y velocidad deseada w , podemos reescribir

$$\frac{\partial g}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial(a(v, w)g)}{\partial v} = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{col}. \quad (5.24)$$

En este modelo el proceso de relajación está implícito en el término de aceleración de modo que para poder escribir la ecuación cinética se asume que todos los vehículos que tienen velocidad v y velocidad deseada w aceleran de la misma manera, lo cual es una simplificación. Si también se supone que la velocidad de los vehículos, entre colisiones, se aproxima a la velocidad deseada de manera exponencial en el tiempo, y considerando que lo hacen en un tiempo característico τ

$$a(v, w) = \frac{dv}{dt} = \frac{w - v}{\tau}. \quad (5.25)$$

Queda claro que la relación (5.25) puede reemplazarse por alguna otra ley de aceleración.

Ahora, para el término de colisión se lleva a cabo un tratamiento similar al que hace Prigogine y teniendo en mente las mismas restricciones se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{col} &= f(x, v, t) \int_v^\infty dv' (1 - p)(v' - v)g(x, v', w, t) \\ &\quad - g(x, v, w, t) \int_0^v dv' (1 - p)(v' - v)f(x, v', t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Incorporando (5.26) y (5.25) a la relación (5.24) se obtiene la ecuación tipo Boltzmann de Pavéri-Fontana (EPF) para el tráfico vehicular

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + v \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(w - v)}{\tau} g \right) &= f(x, v, t) \int_v^\infty dv' (1 - p)(v' - v)g(x, v', w, t) \\ &\quad - g(x, v, w, t) \int_0^v dv' (1 - p)(v - v')f(x, v', t). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Comparemos ahora las ecuaciones de Prigogine y Pavéri-Fontana. La principal diferencia entre los modelos se centra en la introducción, por parte de Pavéri-Fontana, de una función de distribución mas general $g(x, v, w, t)$ que ahora toma en cuenta la velocidad deseada individual de los conductores. El término de colisión se escribe de la misma manera en ambos modelos. También en ambos modelos vemos la introducción de un tiempo de relajación τ y una relajación exponencial, sólo que Pavéri-Fontana propone una relajación individual (5.25) en lugar de la relajación colectiva (5.6) del modelo de Prigogine. Esta propuesta colectiva es una de las principales críticas al modelo de Prigogine ya que implica que el proceso de relajación y colisión no son totalmente independientes y sus críticos [15, 56] argumentan que

este *efecto colectivo* es incompatible con la idea de colisiones binarias. Finalmente, el tratamiento de Pavari-Fontana evade el problema de asignar *a priori* la función de distribución $f^0(x, v, t)$ que aparece en el modelo de Prigogine. De cualquier manera, el gran problema de la ecuación (5.27) estriba en la dificultad de obtener una solución analítica para cualquier caso en que el término de relajación no pueda ser despreciado.

Observemos que si integramos las ecuación (5.27) con respecto a w , encontramos la conocida ecuación reducida de Pavari-Fontana (ERPF):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[f \frac{(W(x, v, t) - v)}{\tau} \right] = f \int_0^\infty (1 - p)(v' - v) f(x, v', t) dv', \quad (5.28)$$

donde

$$W(x, v, t) f(x, v, t) = \int_0^\infty dw w g(x, v, w, t), \quad (5.29)$$

es la velocidad deseada promedio dependiente de la velocidad instantánea, la posición y el tiempo. Esta velocidad deseada ya contiene el efecto promediado del comportamiento de los conductores. Finalmente hay que mencionar que la ecuación reducida (5.28) tiene la ventaja de tener una solución analítica para el caso estacionario y homogéneo [20] y esta es una característica que vamos a aprovechar.

5.3. Solución de equilibrio de la ecuación de Pavari-Fontana

En la mayoría de los modelos de tráfico derivados a partir de consideraciones cinéticas [12, 13, 55] se asume que la solución de equilibrio, es decir la solución estacionaria y homogénea, de la ecuación de Pavari-Fontana es una gaussiana, esto se supone con base en datos experimentales. Nosotros hemos observado que puede obtenerse una solución analítica de la ERPF haciendo una hipótesis sobre el comportamiento promedio de los conductores [20, 59]. Para el caso estacionario y homogéneo la ecuación (5.28) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(f_e(v) \frac{W(v) - v}{\tau} \right) = \rho_e (1 - p) (V_e - v) f_e(v), \quad (5.30)$$

donde las cantidades

$$\rho_e = \int_0^\infty f_e(v) dv \quad \text{y} \quad \rho_e V_e = \int_0^\infty v f_e(v) dv, \quad (5.31)$$

son la densidad y la velocidad correspondientes al estado estacionario y homogéneo. Para obtener la solución de (5.30) necesitamos una expresión para la velocidad deseada promedio $W(v)$. En este trabajo proponemos que

$$W(v) = \omega v \quad (\omega > 1), \quad (5.32)$$

donde $\omega > 1$ pero cercano a 1. En general ω podría ser una función de la densidad y la velocidad media, aunque de momento, y para tener el modelo más simple, consideraremos ω constante. La propuesta (5.32) implica que los conductores desean conducir a una velocidad mayor de la que llevan en ese momento, pero no mucho mayor, por lo que el modelo es para conductores agresivos [19, 20, 21, 60]. Es importante mencionar en este punto, que esta propuesta difiere de la idea original de Paveri-Fontana, ya que en (5.27), él parte de la idea de que cada conductor tiene una velocidad deseada que no cambia con el escenario de tráfico. La hipótesis que nosotros estamos considerando, es decir la ecuación (5.32), ya no contiene información sobre la disposición individual de los conductores, sino que es un promedio, algo de información se ha perdido, sin embargo esto permite resolver (5.30) de forma analítica. En el apéndice A puede verse a detalle la solución de (5.30), que presentamos a continuación

$$f_e(v) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho_e}{V_e} \left(\frac{\alpha v}{V_e}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V_e}\right), \quad (5.33)$$

donde

$$\alpha = \frac{\rho_e(1-p)V_e\tau}{(\omega-1)}. \quad (5.34)$$

es una constante adimensional característica del estado estacionario y homogéneo y $\Gamma(\alpha)$

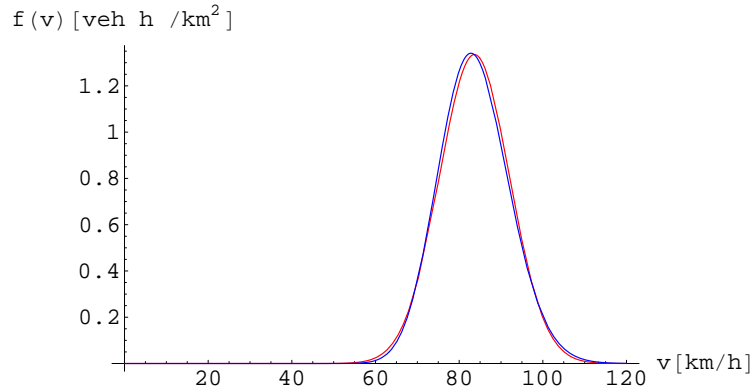


Figura 5.2: Comparación entre la función de distribución obtenida (5.33) para $\alpha = 100$ (distribución azul) y una gaussiana (distribución roja) con los mismos valores de $\rho_e = 28 \text{ veh/km}$ y $V_e = 83,64 \text{ km/h}$ de acuerdo con el diagrama fundamental.

es la función gamma. Hay que notar que la constante α depende de los parámetros que caracterizan el modelo, es decir de p , τ y ω . En los estudios de tráfico, siempre se ha considerado que el equilibrio esta caracterizado por una función de distribución gaussiana, la solución que obtenemos de la ecuación cinética claramente no es una gaussiana, sin embargo es muy parecida, como puede verse en la figura 5.2. La conclusión es que, la solución obtenida de la ERPF para el caso estacionario y homogéneo es tan buena como la gaussiana que se utiliza regularmente, pero tiene la ventaja adicional de satisfacer la ecuación (5.30).

Como ya lo mencionamos, y puede observarse de la relación (5.34), α nos ofrece una relación entre parámetros que pueden obtenerse a partir de relaciones experimentales. De hecho, la ecuación (5.34) nos permite estimar el valor del parámetro ω . Primero observemos que, $V_e(\rho_e)$ es un valor que puede tomarse del diagrama fundamental (3.1), la probabilidad de poder rebasar p se escoge de acuerdo con Helbing [34] por medio de la relación (3.6) y el tiempo de relajación usual es de $\tau = 30$ s. Finalmente el valor de α , si calculamos la varianza de la velocidad a partir de la función de distribución (5.33) usando la definición usual

$$\rho_e \Theta_e = \int f_e(v - V_e)^2 dv, \quad (5.35)$$

se obtiene

$$\Theta_e = \frac{V_e^2}{\alpha}, \quad (5.36)$$

que nos permite relacionar a la variable α con el prefactor de la varianza de la siguiente manera

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\Theta_e}{V_e^2}, \quad (5.37)$$

de modo que α es el inverso del prefactor de la varianza (ver figura 3.4) [33], que para el régimen de densidad moderada es constante con un valor aproximado de $\alpha \approx 100$. Entonces puede escribirse

$$\omega(\rho_e) = 1 + \frac{\rho_e(1-p)\tau V_e(\rho_e)}{\alpha}, \quad (5.38)$$

y dada la densidad ρ_e alrededor de la que queremos desarrollar la dinámica del modelo

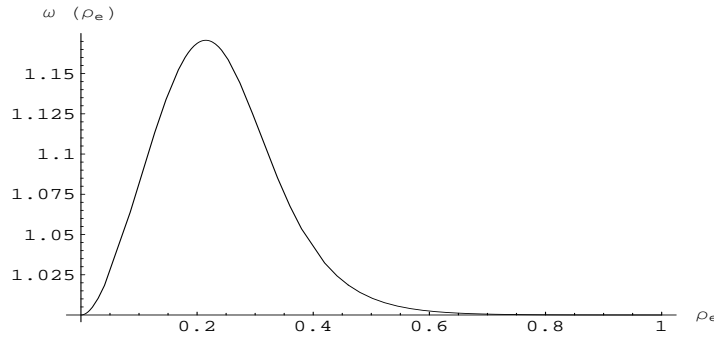


Figura 5.3: La constante del modelo $\omega(\rho_e) = 1 + (\rho_e V_e \tau (1 - p_e)) / \alpha$ como una función de los parámetros característicos del estado estacionario y homogéneo. Como puede verse, $\omega(\rho_e)$ tiene un valor acotado.

$\omega(\rho_e)$ tiene un valor bien definido y este valor es consistente con datos experimentales. La figura 5.3 muestra el comportamiento de ω como función de la densidad ρ_e . En esta figura observamos que:

- i)* $\omega(\rho_e)$ es siempre mayor que uno, como hemos postulado desde un principio,
- ii)* tiene un máximo,

iii) tiende a uno cuando la densidad crece y

iv) su valor se separa de uno en no más del 20 %.

Cuando estamos en una región muy diluida, así como cuando $\rho_e \rightarrow \rho_0$, ω tiende a uno, de manera que la velocidad deseada dada en (5.32) depende de las características generales de la situación de tráfico. Por otro lado, hay que enfatizar que la relación que nos proporciona α , de acuerdo con la figura 3.4, restringe nuestro modelo cinético al régimen de densidad moderada por lo que ir más allá, no tendría sentido y no debería hacerse.

5.4. Derivación de Modelos Macroscópicos a partir de la ecuación de Pavari-Fontana

Para resolver la difícil pregunta de cómo deben verse en realidad los modelos macroscópicos de tráfico, recientemente se ha intentado derivarlos a partir de consideraciones cinéticas [12, 13, 20]. En esta sección se muestran cómo obtener el modelo macroscópico a partir de la ecuación cinética, en este caso lo ilustraremos con la ecuación reducida de Pavari-Fontana (5.28). Recordaremos que una variable local $\Psi(x, t)$ se define de la siguiente manera:

$$\langle \Psi(x, t) \rangle = \frac{1}{\rho(x, t)} \int f(x, v, t) \Psi(x, v, t) dv, \quad (5.39)$$

donde $\Psi(x, v, t)$ es una variable dinámica cualquiera. En particular si $\Psi(x, v, t) \rightarrow 1, v, v^2, v^3, \dots$

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int_0^\infty f(x, v, t)(1)dv, \\ \rho(x, t)V(x, t) &= \int_0^\infty f(x, v, t)(v)dv, \\ \rho(x, t)\bar{v}^2(x, t) &= \int_0^\infty f(x, v, t)(v^2)dv. \\ \rho(x, t)\bar{v}^3(x, t) &= \int_0^\infty f(x, v, t)(v^3)dv, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.40)$$

se obtienen los momentos de la función de distribución $f(x, v, t)$. También podemos definir a los momentos centrales o cumulantes como:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x, v, t)(v - V)dv &= 0, \\ \int_0^\infty f(x, v, t)(v - V)^2dv &= \rho(x, t)\Theta(x, t). \\ \int_0^\infty f(x, v, t)(v - V)^3dv &= \rho(x, t)\mathcal{J}(x, t), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.41)$$

En este caso ρ es el momento de orden cero, V es el momento de orden uno, Θ es el cumulante de orden dos, $\rho\mathcal{J}$ es el cumulante de orden tres y así sucesivamente. De modo que si multiplicamos (5.28) por $\Psi(x, v, t)$ e integramos sobre todo el intervalo $(0, \infty)$, tendremos

$$\int \Psi \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[f \frac{(W(x, v, t) - v)}{\tau} \right] \right\} dv = \int \Psi f \int_0^\infty (v' - v)(1 - p)f' dv' dv, \quad (5.42)$$

para acortar la notación usaremos en adelante, $f' = f(x, v', t)$ y $f = f(x, v, t)$. Esta es la conocida ecuación de transferencia o ecuación de momentos. A nosotros nos interesan algunas cantidades en particular, si por ejemplo $\Psi = 1$ en (5.42) obtenemos la ecuación para la densidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (5.43)$$

que es la ecuación de continuidad. Si ahora tomamos $\Psi = v$ tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \Theta}{\partial x} + \frac{1}{\tau} (W - V) - (1 - p)\rho\Theta, \quad (5.44)$$

es la ecuación de evolución de la velocidad media, donde se ha considerado

$$\rho(x, t)W(x, t) = \int W(x, v, t)f(x, v, t)dv. \quad (5.45)$$

También, si $\Psi = (v - V)^2$ obtendremos la ecuación de evolución de la varianza de la velocidad

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -2\Theta \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho\mathcal{J})}{\partial x} + \frac{2}{\tau} (\mathcal{C} - \Theta) - (1 - p)\rho\mathcal{J}, \quad (5.46)$$

donde

$$\rho(x, t)\mathcal{C}(x, t) = \int_0^\infty f(x, v, t)(v - V)(W(x, v, t) - W)dv, \quad (5.47)$$

es la covarianza. Podríamos seguir con este procedimiento hasta donde desearamos, aunque por lo pronto nos quedaremos hasta aquí, sin embargo hay que observar que la ecuación para la densidad, involucra a la velocidad media, la ecuación para la velocidad media involucra a la varianza de la velocidad, la ecuación para la varianza, involucra al tercer cumulante de la distribución y así sucesivamente, las ecuaciones que se obtienen a partir de (5.40) forman una jerarquía de ecuaciones y es un conjunto no cerrado, así pues hay que decidir cuántas ecuaciones queremos conservar y buscar una cerradura adecuada. Por otra parte, es importante mencionar que para la obtención de las ecuaciones antes mencionadas, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones de frontera, en caso contrario aparecerían términos adicionales

$$f(x, v, t) \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \text{cuando } v \rightarrow 0 \text{ y} \\ \text{cuando } v \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.48)$$

5.5. Modelos Cinético-Macroscópicos

Vemos que la tarea de derivar modelos macroscópicos para describir el fenómeno del tráfico vehicular no es una tarea sencilla. Las derivaciones heurísticas han arrojado algunos resultados interesantes, sin embargo en este tipo de modelación siempre surge el problema de cómo modelar algunos coeficientes. Esta misma dificultad también ha provocado que bajo ciertas condiciones estos modelos conduzcan a dinámicas fuera de la realidad. Una opción interesante es derivar modelos macroscópicos con base en modelos cinéticos, que toman en cuenta la naturaleza de las interacciones entre los vehículos. En esta sección se muestran dos modelos macroscópicos que se obtienen de un modelo cinético siguiendo las ideas mostradas en la sección 5.4.

5.5.1. Modelo de Helbing y Treiber

Helbing y Treiber en [55] comienzan la derivación de su modelo con una ecuación cinética similar a la ERPF (5.28). Esta ecuación delinea los cambios de una función de distribución $f(x, v, t)$ debidos a un término de interacción, el usual, pero consideran un término extra debido a las imperfecciones en el manejo, es decir al comportamiento fluctuante de la aceleración. Esta ecuación cinética es de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{W(v) - v}{\tau} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial v^2}(fD)}_{\text{término de imperfección}}. \quad (5.49)$$

El término de interacción $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int}$ refleja los procesos de aceleración repentinos y en analogía con la teoría de Enskog pero con una interacción típica de vehículos, escribe

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} = (1 - p)\chi(x + l, t)B(v), \quad (5.50)$$

con una función de interacción tipo Boltzmann

$$B(v) = \int_{v' > v} dw(v' - v)f(x, v', t)f(x + s, v, t) - \int_{v > v'} dv'(v - v')f(x, v, t)f(x + s, v', t), \quad (5.51)$$

de acuerdo con esto la densidad del espacio fase se incrementa cuando los vehículos con velocidad $v' > v$ desaceleran dado que no pueden rebasar a los vehículos con velocidad v . Para la probabilidad de poder rebasar se considera $p(\rho) \approx \exp(-\rho/16km^{-1})$. Un decremento en el espacio fase es causado por la interacción de vehículos con velocidad v y vehículos con velocidad $v' < v$. Para $s(V) = 1/\rho_0 + l(V)$ (\approx longitud del vehículo + distancia de seguridad), se está tomando en cuenta que la distancia de interacción esta dada por sus requerimientos de espacio dependientes de la velocidad. Esto provoca una incremento en la tasa de interacción, descrito por $\chi(x) = [1 - \rho(x, t)s]^{-1}$ en el punto de interacción $x + l$, con $l(V) = TV$ siendo $T \approx 0,8s$ el tiempo de reacción.

La primera aproximación que consideran es despreciando los requerimientos de espacio ($s, l \ll 1/\rho(x, t)$) con $\chi = 1$ y la relación

$$B(v) = - \int dv'(v - v')f(x, v, t)f(x, v', t). \quad (5.52)$$

Usando los conceptos recién vistos en la sección 5.4, la ecuación (5.49) conduce al siguiente modelo macroscópico

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{W - V}{\tau} - (1 - p)\mathcal{P}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -\frac{2\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{2}{\tau}(AV^2 - \Theta) - (1 - p)\Gamma,\end{aligned}\tag{5.53}$$

donde $P = \rho\Theta$ es la presión de tráfico y a $\Gamma = \rho\mathcal{J}$ se le conoce como flujo de la varianza de la velocidad, W es la velocidad deseada promedio y A está relacionada con la imperfección en el manejo. Está claro que, para resolver el conjunto de ecuaciones (5.53) para ρ , V y Θ se necesita una hipótesis de cerradura, expresar Γ en términos de las variables anteriores y algo hay que decir acerca de W , p y τ que en principio pueden ser funciones de ρ . W la asumen constante y para τ asumen un tiempo de relajación de la forma

$$\tau(\rho) \approx \frac{8 \text{ s}}{[0,97 \exp(-\rho/16 \text{ km}^{-1}) + 0,03]}.\tag{5.54}$$

Ellos analizan dos casos, el que llaman aproximación de Euler, $\mathcal{J}(x, t) = 0$, asumiendo una gaussiana local. Y la aproximación de Navier-Stokes en que $\mathcal{J}(x, t) \neq 0$, para este caso llevan a cabo una aproximación de tiempo de relajación, tomando como distribución de equilibrio una gaussiana, y obtienen la siguiente cerradura

$$\Gamma = -\frac{3\sqrt{\pi\Theta}}{(1-p)} \frac{\partial \Theta}{\partial x}.\tag{5.55}$$

Un análisis de estabilidad lineal de este modelo muestra que no hay regiones estables, para ninguno de los dos casos que consideran, $\mathcal{J} = 0$ y $\mathcal{J} \neq 0$, y esto causa serias dificultades en la solución numérica.

Dados los resultados del modelo anterior, resulta necesario tomar en consideración el tamaño de los vehículos, esto los lleva a considerar las relaciones (5.50,5.51) que conducen a las siguientes modificaciones del modelo macroscópico:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{W - V}{\tau} - \frac{(1-p)\chi(x+l, t)}{\rho} \int dv v B(v), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= -\frac{2\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{2}{\tau}(AV^2 - \Theta) + \frac{(1-p)\chi(x+l, t)}{\rho} \int dv (v - V)^2 B(v),\end{aligned}\tag{5.56}$$

Este modelo presenta regiones estables. Para el régimen que llaman de Euler $\mathcal{J} = 0$ obtienen dos regiones inestables, para el régimen tipo Navier-Stokes $\mathcal{J} \neq 0$ surge una subdivisión de las regiones de estabilidad. Esta subdivisión de las regiones de estabilidad la atribuyen

a la introducción de la ecuación dinámica para la varianza. Los resultados del análisis de estabilidad de este modelo se muestran en la figura 5.4. Algunos de los resultados de la simulación de este modelo se presentan en la figura 5.5. A pesar de que este es un modelo dinámico de tres variables (ρ, V, Θ) , solamente se muestran los resultados numéricos para la densidad, se analizan los dos modos de propagación (a) y (b) de la figura 5.5, que dependen de las condiciones iniciales, sin embargo sería interesante al menos ver que sucede con la velocidad media. Por otro lado, los resultados de la simulación presentan la propagación del perfil de densidad durante solamente quince minutos, sería importante observar que sucede en tiempo mayor.

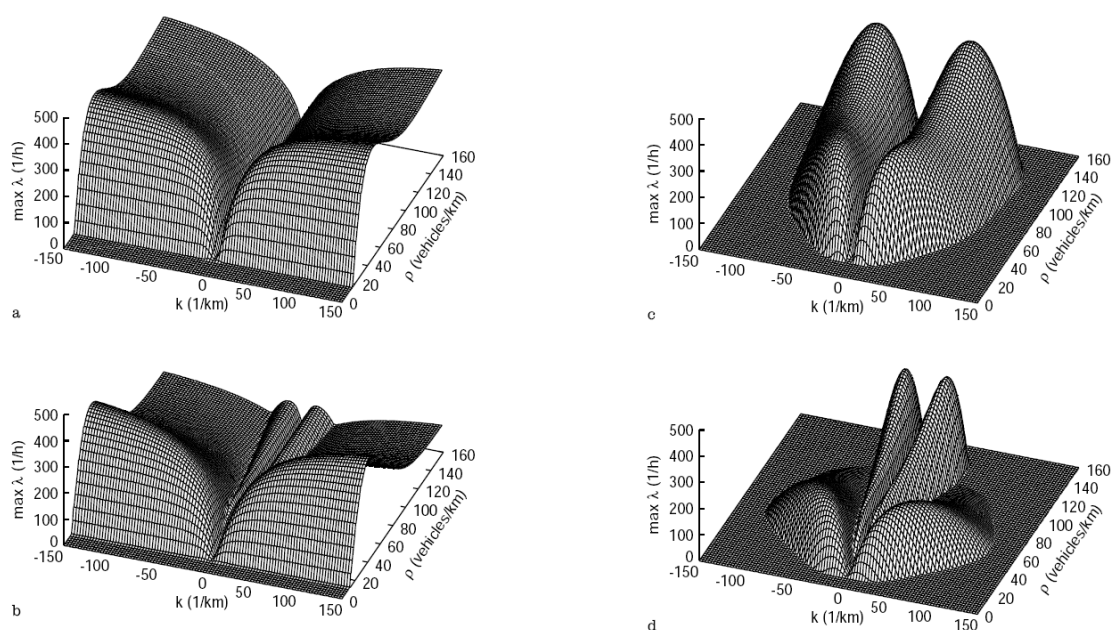


Figura 5.4: Diagramas de inestabilidad de las ecuaciones de tráfico considerando a los vehículos como objetos puntuales (a) y (b) y tomando en cuenta el requerimiento de espacio (c) y (d). En (a) y (c) régimen de Euler y (b) y (d) régimen Navier-Stokes. Para $A = 0,03$. Figura tomada de [55].

5.5.2. Modelo de Wagner

Wagner [12] propone también un modelo macroscópico que obtiene a partir de consideraciones cinéticas. Su propuesta es un modelo para los momentos mezclados de la función de distribución $g(x, v, w, t)$, es decir los momentos de v , la velocidad instantánea y w , la velocidad deseada instantánea. Wagner obtiene el modelo macroscópico a partir de la ecuación

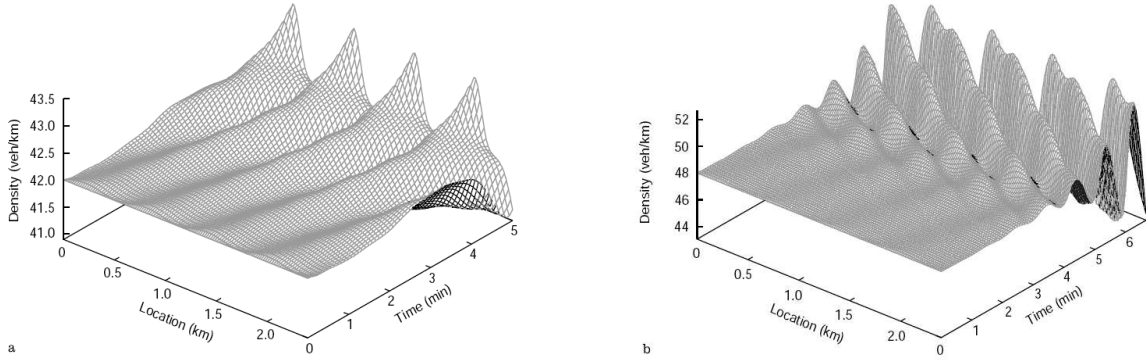


Figura 5.5: Simulación de una perturbación inicial periódica pequeña para diferentes valores de la densidad en el régimen de Navier-Stokes. En estas gráficas se muestran las dos diferentes inestabilidades con diferentes velocidades de propagación. Modelo de Helbing y Treiber [55].

de Paveri-Fontana (5.27) y se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \\
\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{W - V}{\tau} - \frac{\Theta_{vv}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial x} - (1 - p)\rho \Theta_{vv}, \\
\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} &= -\frac{\Theta_{vw}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\Theta_{vw}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial x} &= \frac{2}{\tau}(\Theta_{vw} - \Theta_{vw}) - 2\Theta_{vv} \frac{\partial V}{\partial x}, \\
\frac{\partial \Theta_{ww}}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta_{ww}}{\partial x} &= -2\Theta_{vw} \frac{\partial W}{\partial x}, \\
\frac{\partial \Theta_{vw}}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta_{vw}}{\partial x} &= \frac{(\Theta_{vw} - \Theta_{ww})}{\tau} - \Theta_{vw} \frac{\partial V}{\partial x} - \Theta_{vv} \frac{\partial W}{\partial x} - (1 - p) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \Theta_{vv} \sqrt{\Theta_{vv}},
\end{aligned} \tag{5.57}$$

en estas ecuaciones Θ_{vv} es la varianza de la velocidad que hemos estado denotando solamente Θ , Θ_{vw} es la covarianza de la velocidad y la velocidad deseada, que nosotros denotamos \mathcal{C} , y Θ_{ww} es la varianza de la velocidad deseada que hasta ahora no se había introducido.

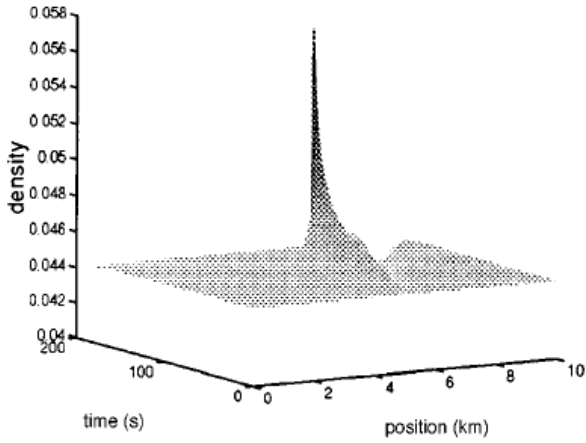
Éste es un conjunto ya cerrado asumiendo que la función de distribución de la velocidad y también la de la velocidad deseada son gaussianas y en consecuencia despreciando los cumulantes de tercer orden o mayores. Al parecer este modelo, que llaman de tipo Euler, ya que no aparecen derivadas de segundo orden, no es estable ya que de nuevo tienen que hacer una corrección considerando el tamaño finito de los vehículos. Esta corrección lleva a modificar las ecuaciones (5.57), las ecuaciones para la densidad ρ , para la velocidad deseada W y para la varianza de la velocidad deseada Θ_{ww} , no se ven modificadas. Sin embargo, las ecuaciones para la velocidad media, la varianza de la velocidad y la covarianza sufren

modificaciones y asumen la siguiente forma después de un álgebra bastante engorrosa

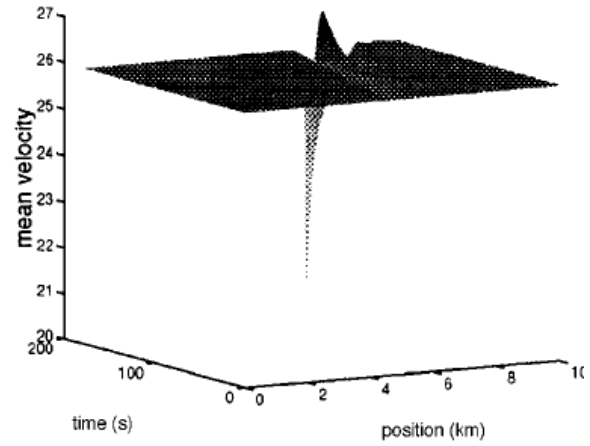
$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{W - V}{\tau} + (\alpha_1 + \eta\alpha_4 - \frac{\Theta_{vv}}{\rho}) \frac{\partial \rho}{\partial x} \\
&\quad + (\alpha_3 - 1) \frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial x} + (\alpha_2 + \xi\alpha_4) \frac{\partial V}{\partial x} - \sigma \rho \Theta_{vv}, \\
\frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial x} &= \frac{2}{\tau} (\Theta_{vv} - \Theta_{vw}) - (\beta_2 + \xi\beta_4 - 2\Theta_{vv}) \frac{\partial V}{\partial x} \\
&\quad + (\beta_1 + \eta\beta_4) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \beta_3 \frac{\Theta_{vv}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \Theta_{vw}}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta_{vw}}{\partial x} &= \frac{(\Theta_{vw} - \Theta_{ww})}{\tau} + (\gamma_2 + \xi\gamma_4 \Theta_{vw}) \frac{\partial V}{\partial x} - \Theta_{vv} \frac{\partial W}{\partial x} \\
&\quad + \gamma_3 \frac{\partial \Theta_{vv}}{\partial x} - \sigma \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \Theta_{vw} \sqrt{\Theta_{vv}} + (\gamma_1 + \eta\gamma_4) \frac{\partial \rho}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Los coeficientes $\alpha's$, $\beta's$, $\gamma's$ pueden consultarse en el apéndice de la referencia [12]. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 5.6, donde se consideran condiciones de frontera periódicas y se inicia con un estado uniforme perturbado por un pequeño pico gaussiano en θ_{ww} al tiempo $t = 0$ en la posición 5 km . Esta condición inicial corresponde a una región donde algunos conductores desean conducir más rápido y otros más lento que en el resto del camino. Esto es una inhomogeneidad en el comportamiento de los conductores.

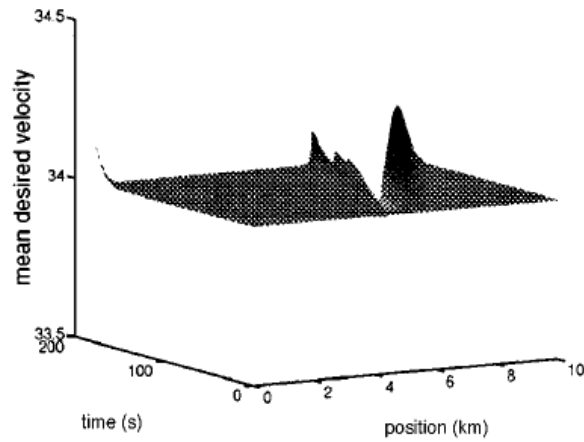
En este modelo aparecen un gran número de parámetros que a final de cuentas son combinaciones de las variables macroscópicas. Los resultados numéricos muestran un perfil de densidad muy puntiagudo que parece conducir a la formación de una onda de choque a solo tres minutos de iniciada la simulación. Sus resultados muestran que una pequeña variación espacial en la varianza de la velocidad deseada conduce a la formación de un congestionamiento. Por otro lado, este modelo no considera los cumulantes de orden mayor o igual a tres que es una hipótesis muy fuerte, ellos mismos proponen que debe intentarse un modelo sin esta restricción, ya que no solamente se supone que lejos del estado estacionario y homogéneo la distribución de velocidades es simétrica, sino que también se extrapola la hipótesis a la distribución de velocidades deseadas que en principio no se conoce. Sin embargo el modelo es sistemático y el intento de considerar las ecuaciones dinámicas para los cumulantes no tan comunes como son W , Θ_{vv} , Θ_{vw} , es interesante.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: Evolución espacio-temporal de (a) la densidad, (b) la velocidad y (c) la velocidad deseada iniciando con un estado homogéneo perturbado en la varianza de la velocidad deseada perteneciente al modelo de Wagner [12].

Capítulo 6

Modelo Cinético I

En este capítulo desarrollamos un modelo macroscópico que obtenemos a partir de la ecuación reducida de Pavari-Fontana (5.28) y usando el método de Grad [26, 27, 28] obtenemos una cerradura. El modelo macroscópico se obtiene como usualmente se hace en Teoría Cinética y se ilustró en el capítulo 5 sección 5.4. Este modelo se restringe a trabajar con dos ecuaciones, es decir con (5.43) y (5.44), las reescribimos de la siguiente manera

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{W - V}{\tau} - (1 - p)\mathcal{P}, \quad (6.2)$$

donde $\mathcal{P} = \rho\Theta$ es la presión de tráfico. Si observamos el sistema (6.1-6.2), estas ecuaciones involucran tres variables $(\rho(x, t), V(x, t), \Theta(x, t))$. Para tener un conjunto completo, si queremos quedarnos solamente con estas dos ecuaciones, necesitamos una relación de la forma $\Theta(\rho(x, t), V(x, t), \partial\rho(x, t)/\partial x, \partial V(x, t)/\partial x)$, esta relación nos proporcionará la cerradura. El modelo propuesto consistirá pues, de un par de ecuaciones acopladas para las variables independientes densidad $\rho(x, t)$ y velocidad media $V(x, t)$, de modo que la cerradura dependerá explícitamente de la forma de la función de distribución a través de la definición:

$$\rho(x, t)\Theta(x, t) = \int_0^\infty f(x, v, t)(v - V)^2 dv, \quad (6.3)$$

en este caso $f(x, v, t)$ depende de (x, t) a través de $\rho(x, t), V(x, t)$. Para llevar a cabo esta tarea vamos a desarrollar el método de Grad. No hay que olvidar que para poder obtener este modelo macroscópico, la función de distribución debe satisfacer las condiciones de frontera (5.48).

6.1. El Método de Grad I

Hemos visto ya que la ERPF tiene una solución analítica para el estado estacionario y homogéneo, sin embargo esta solución sólo caracteriza a ese estado y nosotros buscamos una solución que describa un estado fuera de equilibrio. Para encontrar una solución aproximada

de la función de distribución usaremos el método de Grad [26, 27, 28] y de esta manera vamos a introducir a las variables locales en la función de distribución y a la vez en el modelo macroscópico.

Nuestro modelo de tráfico se basa en la obtención de una solución aproximada de la ERPF. Si multiplicamos la ERPF por un conjunto completo de funciones $\varphi_i(x, v, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N, \dots$), e integramos sobre todas las velocidades, se obtiene un conjunto infinito de relaciones que se satisfacen con la función de distribución y, como ya mencionamos en la sección 5.4, se conoce como ecuación de transferencia

$$\int \varphi_i(v) \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[f \frac{(W(x, v, t) - v)}{\tau} \right] \right\} dv = \int \varphi_i(v) Q(f, f') dv, \quad (6.4)$$

donde $Q(f, f) = f \int_0^\infty (1 - p)(v' - v) f' dv'$ es el término de colisión de la ERPF (5.28). Este conjunto infinito de relaciones (6.4), es equivalente a la ERPF debido a que $\{\varphi_i\}$ es un conjunto completo. La idea detrás del método de Grad es satisfacer un número *finito* de ecuaciones de transferencia. Este método nos permite escoger una f arbitraria y dejar que las ecuaciones de los momentos determinen los detalles que no hallan sido especificados. Se escoge f de manera que sea una función de v y contenga N parámetros indeterminados dependientes de (x, t) , $M_i (i = 0, \dots, N - 1)$; esto significa que si estamos considerando N ecuaciones de los cumulantes, obtendremos N ecuaciones diferenciales parciales para las incógnitas $M_i(x, t)$. Una elección sencilla es asumir, siguiendo el método de Grad, que f es de la forma siguiente:

$$f^{(G)}(x, v, t) = f_e(v) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, t) P_n(x, v, t), \quad (6.5)$$

donde $f_e(v)$ está dada por (5.33) y la escribimos de la forma $f_e dv = \rho_e \Phi(y) dy$, donde $y = \alpha v/V_e$, es una variable adimensional y

$$\Phi(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp(-y), \quad (6.6)$$

de modo que

$$\int_0^\infty \Phi(y) dy = 1. \quad (6.7)$$

Con esta función de peso se construyen los polinomios ortonormales por el método de ortogonalización de Schmidt

$$\int_0^\infty P_i(y) P_j(y) \Phi(y) dy = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

Los polinomios están dados por (ver apéndice B para los detalles):

$$P_n(y) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{n! \Gamma(n + \alpha)}} \frac{1}{f_e} \frac{d^n}{dy^n} (y^n f_e), \quad (6.9)$$

y los coeficientes en términos de las variables macroscópicas o de los momentos de la función de distribución, están dados por:

$$\begin{aligned} C_0(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e}, \\ C_1(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e} \sqrt{\alpha} \left(\frac{V(x, t)}{V_e} - 1 \right), \\ C_2(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e} \sqrt{\frac{\alpha}{2(\alpha + 1)}} \left[\alpha \left(\frac{\Theta + V^2}{V_e^2} \right) + (\alpha + 1) \left(1 - 2 \frac{V}{V_e} \right) \right], \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.10)$$

El desarrollo de la función de distribución, tal como aparece en (6.5), contiene un número infinito de términos y si queremos calcular los momentos a partir de ella necesitamos alguna hipótesis para cortar la serie, en realidad el procedimiento a seguir es un tanto arbitrario ya que uno conserva el número de términos que convenga a la descripción que se esté llevando a cabo. Si consideramos que $C_1(x, t) = C_2(x, t) = \dots = C_n(x, t) = 0$ se obtiene

$$f_0^{(G)}(v, x, t) = f_e \frac{\rho(x, t)}{\rho_e}, \quad (6.11)$$

que también puede escribirse

$$f_0^{(G)}(v, x, t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho(x, t)}{V_e} \left(\frac{\alpha v}{V_e} \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V_e}\right), \quad (6.12)$$

lo cual significa que el sistema macroscópico queda descrito en términos de la densidad local. Haciendo un paréntesis, es interesante mencionar que esta misma aproximación se puede obtener si llevamos a cabo un proceso de maximización de entropía (7.5), con una única restricción $\rho(x, t) = \int_0^\infty f(x, v, t) dv$, ver [19] para mayores detalles. Si calculamos la presión de tráfico usando (6.12) se obtiene

$$\mathcal{P}_0^{(G)}(x, t) = \frac{\rho(x, t) V_e^2}{\alpha}, \quad (6.13)$$

que es la presión de tráfico como función de la densidad local. Yendo un poco más allá, para este problema vamos a considerar $C_2(x, t) = C_3(x, t) = \dots = C_n(x, t) = 0$, con esta hipótesis estamos suponiendo que podemos describir el sistema macroscópico en términos de las variables independientes densidad $\rho(x, t)$ y velocidad media $V(x, t)$. Tomando esto en consideración y utilizando (6.5), (6.9) y (6.10), podemos escribir

$$f^{(G)}(v, x, t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho(x, t)}{V_e} \left(\frac{\alpha v}{V_e} \right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V_e}\right) \left[1 + \alpha \left(\frac{V(x, t)}{V_e} - 1 \right) \left(\frac{v}{V_e} - 1 \right) \right]. \quad (6.14)$$

Si calculamos la presión de tráfico $\mathcal{P}^{(G)}(x, t)$ usando $f^{(G)}(v, x, t)$ y (6.3) se obtiene

$$\mathcal{P}^{(G)} = \rho V_e^2 \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha} \left(\frac{2V}{V_e} - 1 \right) - \left(\frac{V}{V_e} \right)^2 \right]. \quad (6.15)$$

Puede observarse que cuando $V(x, t) \rightarrow V_e$ se recupera la expresión (6.13). La función de distribución obtenida en (6.14), solamente depende de las variables $(\rho(x, t), V(x, t))$ y no contiene la contribución de los gradientes correspondientes. Para tomar en cuenta esta contribución vamos a llevar a cabo un desarrollo de la función de distribución usando un procedimiento similar al método de Champan-Enskog [25, 24]. Al igual que la ecuación de Boltzmann (2.36), la ERPF puede escribirse de la forma (2.37) $\xi(f) = \mathcal{D}f - Q(f, f) = 0$, donde

$$\mathcal{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[f \frac{(W(x, v, t) - v)}{\tau} \right], \quad (6.16)$$

es el término de deriva y

$$Q(f, f') = f \int_0^\infty (1-p)(v' - v)f(x, v', t)dv', \quad (6.17)$$

es el término de colisión. Este procedimiento se basa en la idea de que la función de distribución admite un desarrollo de la forma (2.59), para este problema $f^{(G)}(x, v, t)$ será nuestra aproximación de orden cero $f^{(0)}(v, x, t)$, de manera que

$$f(v, x, t) = f^{(G)}(v, x, t) + f^{(1)}(v, x, t) + f^{(2)}(v, x, t) \dots, \quad (6.18)$$

donde $f^{(1)}(v, x, t) \ll f^{(G)}(v, x, t)$ y en general $f^{(j)}(v, x, t) \ll f^{(i)}(v, x, t)$ para $i < j$. Para obtener la primera aproximación $f^{(1)}(v, x, t)$, como hemos visto a detalle en el capítulo 2, el lado derecho de la ERPF puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathcal{D}^{(0)}(f^{(G)}) = \frac{\partial f^{(G)}}{\partial t} + v \frac{\partial f^{(G)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[f^{(G)} \frac{(W(x, v, t) - v)}{\tau} \right], \quad (6.19)$$

en el término de interacción aparecerán $f^{(G)}$ y $f^{(1)}$ por lo que aproximamos

$$f \int_0^\infty (1-p)(v' - v)f(x, v', t)dv' \approx (1-p)\rho(V - v)f^{(G)} - \int dv' L(v, v', x, t)f^{(1)}(x, v', t), \quad (6.20)$$

y hacemos una aproximación de tiempo de relajación

$$\int dv' L(v, v', x, t)f^{(1)}(x, v', t) \approx \frac{f^{(1)}}{\tau_0}, \quad (6.21)$$

donde τ_0 es un tiempo característico conocido como *tiempo de relajación colectivo*. De manera que la ecuación a resolver queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial f^{(G)}}{\partial t} + v \frac{\partial f^{(G)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{W - v}{\tau} f^{(G)} \right) = \rho(1-p)(V - v)f^{(G)} - \frac{1}{\tau_0} f^{(1)}, \quad (6.22)$$

sustituir $f^{(G)}$ en (6.22) y las ecuaciones (6.1) y (6.27) nos permite obtener

$$\begin{aligned} f^{(1)} = & -\tau_0 f_e \frac{\rho}{\rho_e} \left\{ \left[-\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{(v - V)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \left[1 + \psi \left(\frac{v}{V_e} - 1 \right) \right] + \frac{\alpha}{V_e} \left(\frac{v}{V_e} - 1 \right) \left[(v - V) \frac{\partial V}{\partial x} + A \right] \right. \\ & \left. - \frac{(\omega - 1)}{\tau} \left[\frac{\psi v}{V_e} + \left(\alpha - 1 - \frac{\alpha v}{V_e} \right) \left(1 + \psi \left(\frac{v}{V_e} - 1 \right) \right) \right] \right\} \\ & - \tau_0 f^{(G)} \left[\frac{\omega - 1}{\tau} - \rho(1-p)(V - v) \right], \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde

$$A(x, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}^{(G)}}{\partial x} + \frac{\omega - 1}{\tau} V - (1 - p) \mathcal{P}^{(G)} \quad \text{y} \quad \psi(x, t) = \alpha \left(\frac{V(x, t)}{V_e} - 1 \right).$$

Las correcciones $f^{(i)}$ a la función de distribución deben satisfacer las condiciones de compatibilidad siguientes

$$\int_0^\infty f^{(i)}(v, x, t) dv = 0, \quad \int_0^\infty v f^{(i)}(v, x, t) dv = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.24)$$

Estas condiciones son consistentes con el hecho de que la densidad y la velocidad media deben determinarse completamente por la función de distribución $f^{(G)}(v, x, t)$. La función de distribución obtenida en (6.23) contiene los gradientes espaciales de la densidad y la velocidad que toman en cuenta las inhomogeneidades que son importantes en la descripción hidrodinámica. Esta función de distribución reproduce los valores de las variables macroscópicas densidad y velocidad, pero la varianza de la velocidad y en consecuencia la presión de tráfico se ven afectadas por la aproximación que llevamos a cabo. A partir de la función de distribución corregida podemos calcular la presión de tráfico, obteniendo

$$\mathcal{P}(x, t) = \mathcal{P}_{local} - \rho V_e^2 \tau^* \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V_e}{\alpha \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{V}{V_e} - 1 \right) \right\}, \quad (6.25)$$

donde

$$\mathcal{P}_{local} = \mathcal{P}^{(G)}(x, t) - \rho V_e^2 \tau^* \left(\frac{V}{V_e} - 1 \right) \left(\frac{\rho V_e}{\alpha} (1 - p) - \frac{(\omega - 1)}{\tau} \right), \quad (6.26)$$

y $\tau^* = 2\tau_0(\alpha + 1)/\alpha$ es un tiempo efectivo de relajación. Como puede verse, esta expresión se ve modificada por la presencia de los gradientes de las cantidades macroscópicas. Ciertamente, es posible calcular los cumulantes de orden superior, ya que tenemos a la función de distribución, sin embargo para propósitos de la cerradura que andamos buscando ya no es necesario.

Antes de pasar a otra cosa, es importante hacer algunos comentarios concernientes a la expresión (6.25) y cómo se incorpora a la ecuación para la velocidad (6.2): En primer lugar, el término proporcional al gradiente de velocidad lo podemos ver como un término viscoso, donde el coeficiente de viscosidad puede identificarse con $\eta = \rho V_e^2 \tau^*/\alpha$. En segundo lugar existe un término proporcional al gradiente de densidad que puede ser interpretado como un término de anticipación [56], ya que refleja la reacción de los conductores a la situación de tráfico que los rodea. También, el término $\mathcal{P}_{local}(x, t)$ no contiene gradientes, de modo que puede ser identificado, en analogía con un fluido simple, con un término de presión hidrostática que refleja los efectos de dispersión debidos a la varianza finita. Finalmente

tenemos un término de relajación a la velocidad deseada y un término de colisión

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial x}}_{\text{transporte}} \right) = \frac{\rho V e^2 \tau^*}{\alpha} \left\{ \underbrace{\frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V_e}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \left(\frac{V}{V_e} - 1 \right)}_{\text{anticipación}} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}_{\text{viscoso}} \right\} \quad (6.27)$$

$$- \underbrace{\frac{\partial \mathcal{P}_{local}}{\partial x}}_{\text{presión}} + \rho \underbrace{\frac{W - V}{\tau}}_{\text{relajación}} - \underbrace{\rho(1 - p)\mathcal{P}}_{\text{colisión}},$$

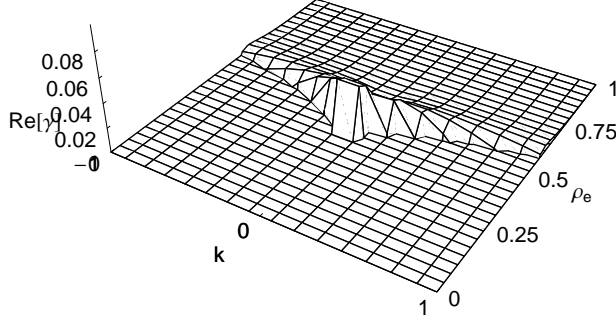
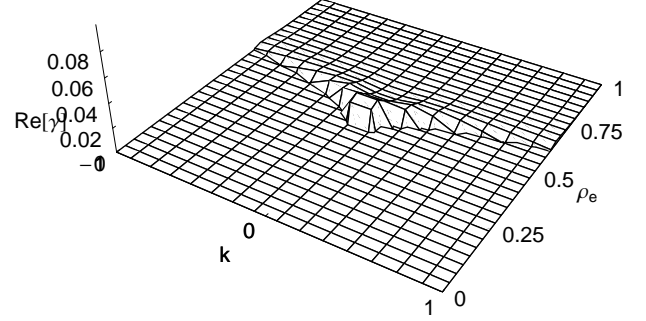
Por otra parte, considerando a la ecuación cerrada para la velocidad (6.27) observamos que contiene el término usual de arrastre y es de segundo orden en las derivadas de la densidad y la velocidad. Como ya mencionamos anteriormente, la presencia de estos términos toma en cuenta las inhomogeneidades y los efectos viscosos en el sistema y a la vez nos permiten clasificar al modelo como tipo Navier-Stokes. Hay que notar que el coeficiente de viscosidad $\mu = \rho V_e^2 \tau^* / \alpha$, no es constante. Finalmente, es fácil notar que el estado estacionario y homogéneo caracterizado por (ρ_e, V_e) es solución del conjunto de ecuaciones. Para este caso la presión de tráfico está dada por $\mathcal{P}_e = \rho_e V_e^2 / \alpha$ como debe ser, de acuerdo con la función de distribución (5.33). Para concluir, cabe mencionar que la función de distribución obtenida en (6.23) satisface las condiciones de compatibilidad (6.24).

6.1.1. Análisis de estabilidad lineal

Un último aspecto a tratar antes de resolver numéricamente, es considerar una pequeña perturbación al estado estacionario y homogéneo con el objetivo de estudiar la estabilidad del modelo ante este tipo de perturbaciones. En primer lugar escribimos a la densidad y la velocidad de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_e + \hat{\rho} \exp(ikx + \gamma t), \\ V(x, t) &= V_e + \hat{V} \exp(ikx + \gamma t), \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $\hat{\rho}$, \hat{V} no dependen de (x, t) y $\hat{\rho} \ll \rho_e$, $\hat{V} \ll V_e$. La cantidad k es el vector de onda correspondiente y γ puede ser una función compleja del vector de onda. La condición de estabilidad esta dada por $\Re[\gamma] < 0$ que implica que la perturbación no se amplifica con el tiempo, de otro modo el estado estacionario y homogéneo es inestable con respecto a pequeñas perturbaciones. Para determinar las regiones de estabilidad linealizamos las ecuaciones (6.1) y (6.27) alrededor de (ρ_e, V_e) tomando en cuenta que la probabilidad de poder rebasar esta dada por $p = \exp(-10 \rho / \rho_0)$ [16]. El sustituir directamente (6.28) en las ecuaciones macroscópicas nos permite construir la relación de dispersión de la cual podemos obtener $\Re[\gamma(k, \rho_e)]$. Los resultados de este procedimiento se muestran en la figura 6.1 para $\tau_0 / \tau = 4$ y en la figura 6.2 para el caso $\tau_0 / \tau = 8$. La región donde $\Re[\gamma(k, \rho_e)] > 0$ corresponde a la región inestable. Al observar las figuras 6.1 y 6.2 podemos notar que la región inestable se reduce cuando el cociente entre el tiempo de relajación colectivo y el tiempo de relajación individual crece, lo cual sugiere que esta relación es un factor de estabilidad [20, 21]. En las figuras 6.1 y

Figura 6.1: Región estable para $\tau_0/\tau = 4$.Figura 6.2: Región estable para $\tau_0/\tau = 8$.

6.2 la densidad de equilibrio y el vector de onda están medidos en unidades de ρ_0 . Aunque este análisis es lineal, sirve como guía para ver por donde pueden andar las regiones de inestabilidad.

6.1.2. Simulación Numérica

Como ya mencionamos el conjunto cerrado de ecuaciones macroscópicas es no lineal, por lo tanto vamos a resolver numéricamente. La solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales como las presentes en nuestro modelo no es una tarea fácil y no existe un método que pueda aplicarse de manera general. Los métodos explícitos de diferencias finitas son frecuentemente inestables aún discretizando el espacio y el tiempo muy finamente. En general, la solución numérica de este tipo de ecuaciones requieren métodos especiales que además solamente funcionan bajo ciertas condiciones. Hemos optado por usar un método explícito para la solución ya que este tipo de métodos son fáciles de implementar y para este problema arroja buenos resultados. En primer lugar, escribimos el modelo (6.1, 6.2, 6.25) en su forma conservativa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (6.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \mathcal{P} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \rho V(\omega - 1) - \eta \rho(1 - p)\mathcal{P} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

siendo $\eta = \rho_0 V_0 \tau$ un parámetro adimensional. En segundo lugar, vamos a discretizar la posición y el tiempo de la siguiente manera, $x_i = i \Delta x$, $t^n = n \Delta t$ y construimos una malla

donde \mathbf{u} tiene un valor en cada punto de la misma, de modo que $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(x_j, t^n)$. Para la solución numérica vamos a usar un método explícito de diferencias finitas conocido como esquema de MacCormack [61, 62], este es un método de dos pasos en que primero se calcula un predictor y con ese se obtiene el valor de las variables en un tiempo posterior

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_j^n &= \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n) + \Delta t \mathbf{S}_j^n, \\ \mathbf{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{u}}_j^n + \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{F}}_{j+1}^n - \tilde{\mathbf{F}}_j^n) + \Delta t \tilde{\mathbf{S}}_j^n \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Los valores de referencia para la densidad y la velocidad serán $\rho_0 = 140 \text{ veh/km}$, $V_0 = 120 \text{ km/h}$, el tiempo de relajación individual $\tau = 30 \text{ s}$ y para el tiempo de relajación colectivo usamos $\tau_0/\tau = 3$, con lo que $\tau_0 = 90 \text{ s}$. La probabilidad de poder rebasar se evalúa de acuerdo con la relación reportada por Helbing [16] y de la cual ya se habló en el capítulo 3, ecuación (3.6). Vamos a considerar condiciones de frontera periódicas, de modo que $\rho(0, t) = \rho(L, t)$ y $V(0, t) = V(L, t)$, donde L es la longitud de la carretera. Como condiciones iniciales tomaremos en cuenta dos conjuntos, la condición inicial I es:

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho_e, \\ V(x, 0) &= V_e(\rho_e) \left\{ 1 + \delta V \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

donde consideramos $L = 12 \text{ km}$, $\rho_e = 32 \text{ veh/km}$, $V_e(\rho_e) \approx 70 \text{ km/h}$ de acuerdo con el diagrama fundamental y $\delta V = 0,01$. Observemos que la densidad es homogénea en la carretera pero algunos vehículos van un poco más rápido que otros. Los resultados para

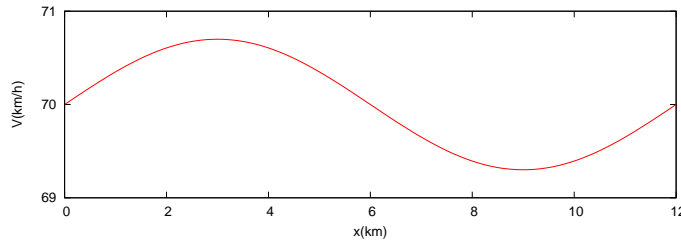


Figura 6.3: Condición inicial I.

la densidad y la velocidad se muestran en las figuras 6.4 y 6.5 donde podemos ver que una pequeña perturbación en la velocidad produce un crecimiento en la densidad que se propaga a lo largo de la carretera en la dirección contraria del flujo, y aparece la correspondiente reducción en la velocidad que sigue el comportamiento de la densidad. La condición inicial II es:

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho_e \left\{ 1 + \delta \rho \left[\cosh^{-2} \left(\frac{x - x_0}{w_+} \right) - \frac{w_+}{w_-} \cosh^{-2} \left(\frac{x - x_0 - \Delta x_0}{w_-} \right) \right] \right\}, \\ \rho(x, 0) V(x, 0) &= \rho_e V_e, \end{aligned} \quad (6.33)$$

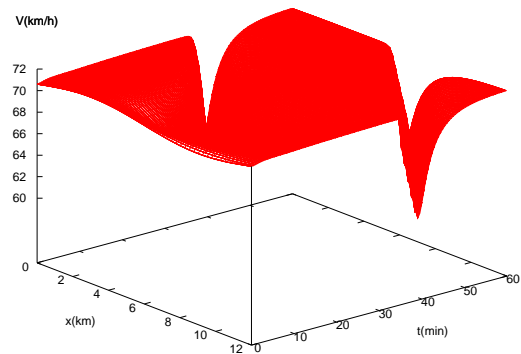
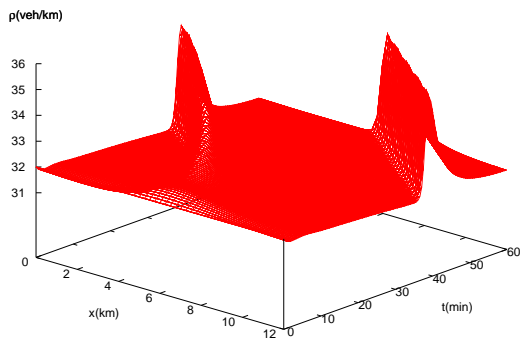


Figura 6.4: Comportamiento espacio-temporal de la densidad para la condición inicial I (6.32). Figura 6.5: Comportamiento espacio-temporal de la velocidad para la condición inicial I (6.32).

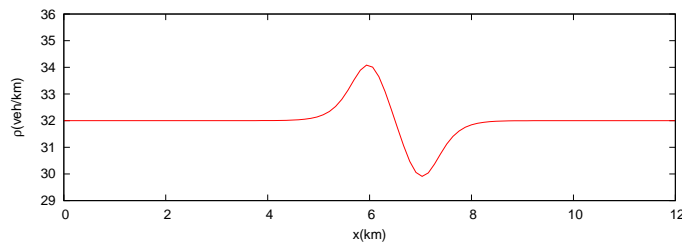


Figura 6.6: Condición inicial II.

considerando $\delta\rho \approx 2 \text{ veh/km}$, $x_0 = 6 \text{ km}$, $\Delta x_0 = 1 \text{ km}$ y $w_+ = w_- = 0,5 \text{ km}$. Esta condición inicial simula una obstrucción parcial de la carretera (ver figura 6.6), de modo que delante del obstáculo la densidad es menor y justo atrás de él hay un incremento en la densidad. Los resultados de la simulación con esta condición inicial se muestran en 6.7 y 6.8. También se produce un crecimiento en la densidad, tal como sucede con la otra condición inicial, que se propaga a lo largo de la carretera con la correspondiente reducción de la velocidad. Para ambas condiciones iniciales se observa que la varianza de la velocidad calculada en (6.25) tiene un máximo en una posición avanzada con respecto a la posición del máximo en la densidad, como puede verse en las figuras 6.9 y 6.10 para las primera y segunda condición inicial respectivamente. Esta característica se ha observado en el tráfico real [22, 23] y se debe a la adaptación que llevan a cabo los vehículos ante la formación de un congestionamiento. Los resultados de la varianza de la velocidad se muestran en la figura 6.11 para la condición inicial I, y en 6.12 para II. En las figuras 6.13 y 6.14 se puede observar que los perfiles de la densidad avanzan prácticamente a la misma velocidad, también observamos que ambos perfiles alcanzan un estado estacionario después de cierto tiempo, con la condición inicial I el perfil tarda un poco más de tiempo en alcanzar este estado.

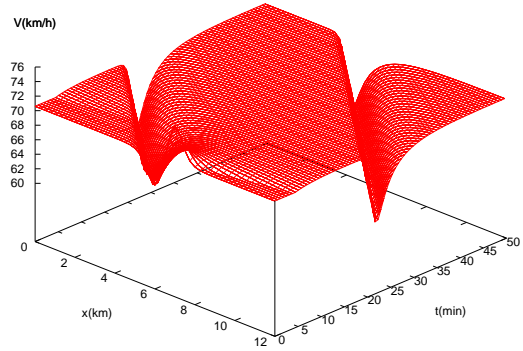
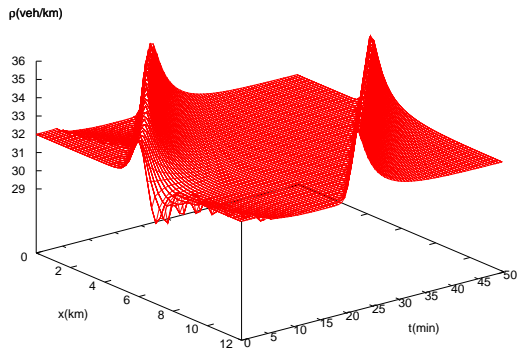


Figura 6.7: Comportamiento espacio-temporal de la densidad para la condición inicial II (6.33).

Figura 6.8: Comportamiento espacio-temporal de la velocidad para la condición inicial II (6.33).

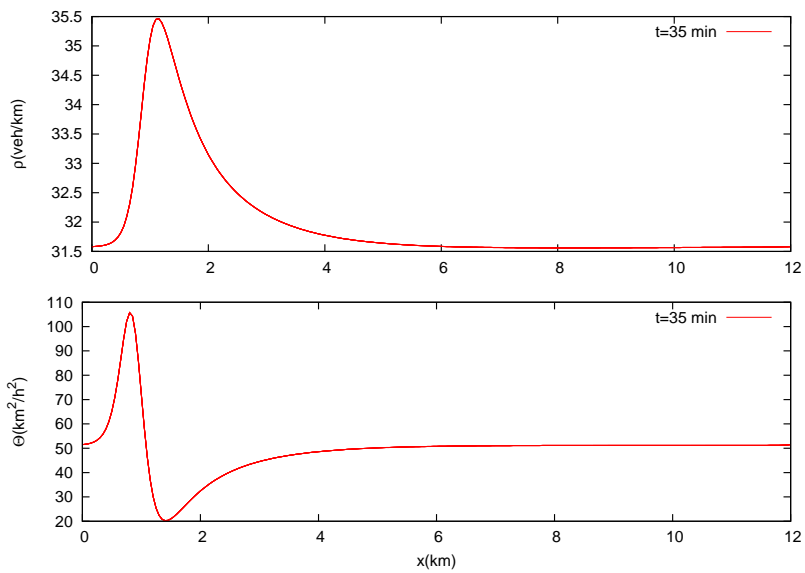


Figura 6.9: Perfiles de la densidad y la varianza al tiempo 35 *min* para la condición inicial I (6.32).

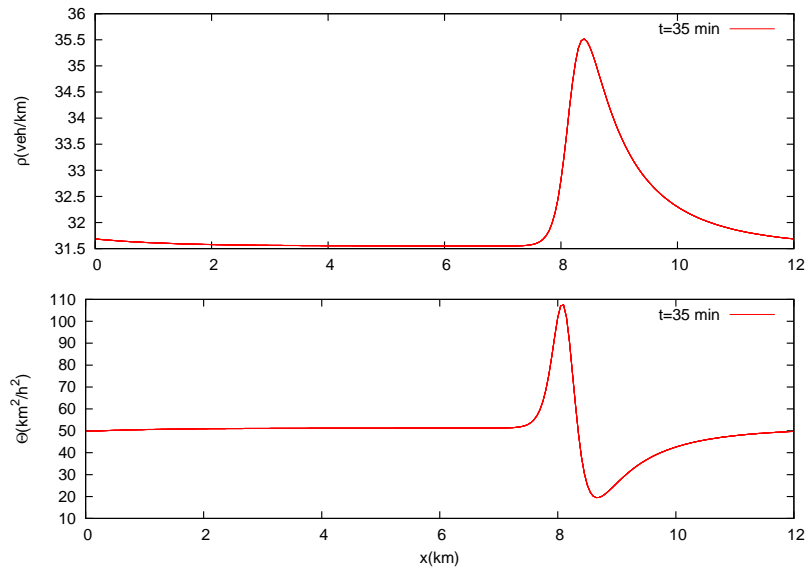


Figura 6.10: Perfiles de la densidad y la varianza al tiempo 35 *min* para la condición inicial II (6.33).

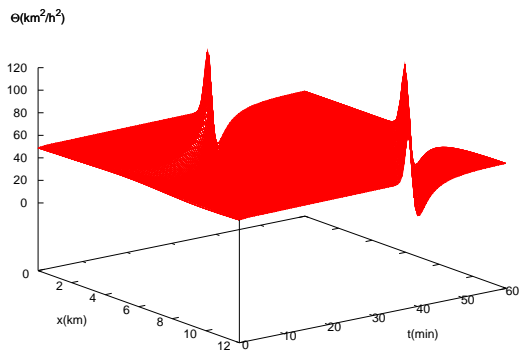


Figura 6.11: Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para la condición inicial I (6.32).

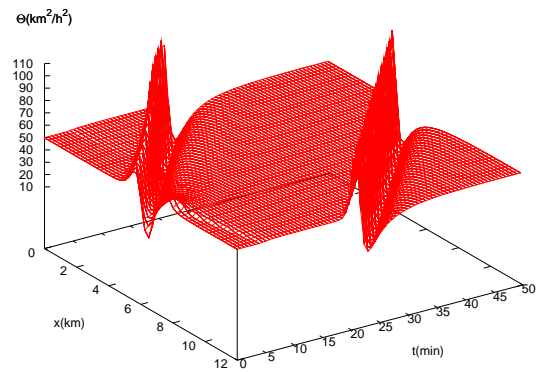


Figura 6.12: Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para la condición inicial II (6.33).

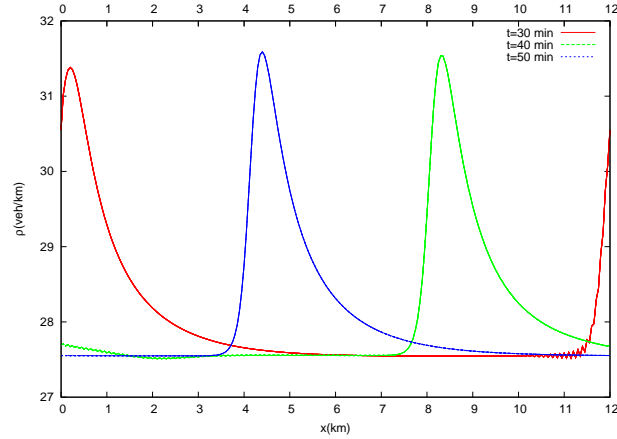


Figura 6.13: Perfiles de la densidad después de alcanzarse un estado estacionario para 30 *min* (rojo), 40 *min* (verde), 50 *min* (azul) iniciando con la condición inicial I.

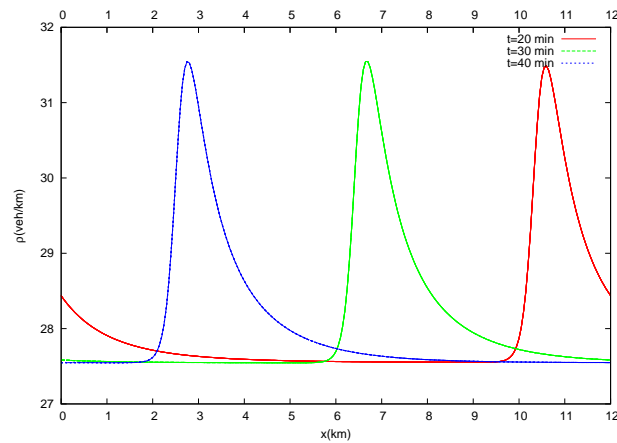


Figura 6.14: Perfiles de la densidad después de alcanzarse un estado estacionario para 20 *min* (rojo), 30 *min* (verde), 40 *min* (azul) iniciando con la condición inicial II.

Capítulo 7

Modelo Cinético II

En este capítulo buscamos un modelo considerando como variables independientes a la densidad $\rho(x, t)$, la velocidad $V(x, t)$ y la varianza de la velocidad $\Theta(x, t)$ por lo que conservaremos tres ecuaciones y tendremos que llevar a cabo la cerradura a través del tercer cumulante de la función de distribución $\Gamma(x, t) = \rho(x, t)\mathcal{J}(x, t)$. Las ecuaciones a considerar son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{W - V}{\tau} - (1 - p)\mathcal{P}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -2\Theta \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{2}{\tau}(\mathcal{C} - \Theta) - (1 - p)\Gamma. \quad (7.3)$$

Ya hemos visto en el capítulo 5 que si consideramos un modelo para conductores agresivos (5.32), podemos obtener una solución analítica para el caso estacionario y homogéneo de la ecuación (5.28), en lugar de proponerla, usualmente se asume una distribución gaussiana para este caso [12, 13]. En el capítulo 5 se obtuvo

$$f_e(v) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho_e}{V_e} \left(\frac{\alpha v}{V_e}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V_e}\right), \quad (7.4)$$

esta función de distribución $f_e(v)$ describe el estado estacionario y homogéneo. Pero nosotros necesitamos una función de distribución que represente el comportamiento del sistema fuera de este estado de referencia. Para obtener esta función de distribución, utilizaremos la entropía de información introducida por Shannon [63], que se define

$$s(x, t) = - \int_0^\infty f^{(0)}(x, v, t) \ln \left(\frac{f^{(0)}(x, v, t)}{f_e(v)} \right) dv, \quad (7.5)$$

esta entropía de información es en realidad un cambio de entropía con respecto a la entropía del estado estacionario y homogéneo. En la expresión anterior, $f^{(0)}(x, v, t)$ será la función de distribución correspondiente a un estado no homogéneo y no estacionario, que quedará de-

terminado por el proceso de maximización de entropía bajo las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \int_0^\infty f^{(0)}(x, v, t) dv, \\ \rho(x, t)V(x, t) &= \int_0^\infty v f^{(0)}(x, v, t) dv.\end{aligned}\quad (7.6)$$

Construimos una funcional de la función de distribución de la siguiente manera

$$\mathcal{F}(f^{(0)}(x, v, t)) = - \int_0^\infty (\ln f^{(0)}(x, v, t) - \ln f_e(v) + \beta + \lambda v) f^{(0)}(x, v, t) dv, \quad (7.7)$$

esta funcional envuelve dos multiplicadores de Lagrange, (β, λ) que son funciones de (x, t) , asociados a cada una de las restricciones. El proceso de maximización nos permite obtener una función de distribución que satisface la condición $\delta\mathcal{F}/\delta f^{(0)} = 0$, se obtiene

$$f^{(0)}(x, v, t) = f_e(v) \exp(-1 - \beta - \lambda v). \quad (7.8)$$

Para determinar los multiplicadores de Lagrange sustituimos directamente la función de distribución (7.8) en las definiciones (7.6). Este proceso nos proporciona las relaciones entre los multiplicadores (β, λ) y las variables (ρ, V)

$$\exp(1 + \beta) = \frac{\rho_e}{\rho} \left(\frac{V}{V_e}\right)^\alpha \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{\alpha}{V} \left(1 - \frac{V}{V_e}\right), \quad (7.9)$$

de modo que la función de distribución $f^{(0)}$ puede reescribirse de la siguiente manera

$$f^{(0)}(x, v, t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho(x, t)}{V(x, t)} \left(\frac{\alpha v}{V(x, t)}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V(x, t)}\right). \quad (7.10)$$

Es importante notar, que esta función de distribución tiene exactamente la misma estructura que la función de distribución de equilibrio (5.33), pero los valores locales de $\rho(x, t)$ y $V(x, t)$ ocupan el lugar de los valores de equilibrio ρ_e y V_e . También, esta función de distribución cumple con las condiciones de frontera necesarias para obtener el modelo macroscópico

$$\lim_{v \rightarrow 0} f^{(0)}(x, v, t) = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} f^{(0)}(x, v, t) = 0. \quad (7.11)$$

Para observar claramente cómo $f^{(0)}(x, v, t)$ describe el estado de equilibrio local, calculemos la varianza de la velocidad definida de la siguiente manera

$$\rho(x, t)\Theta(x, t) = \int_0^\infty (v - V(x, t))^2 f^{(0)}(x, v, t) dv, \quad (7.12)$$

recordando que la cantidad $\rho(x, t)\Theta(x, t) = \mathcal{P}(x, t)$ es la presión de tráfico. La sustitución directa de (7.10) en la definición (7.12) nos permite obtener

$$\mathcal{P}(x, t) = \rho(x, t)\Theta(x, t) = \rho(x, t) \frac{V(x, t)^2}{\alpha}. \quad (7.13)$$

La varianza obtenida en la ecuación (7.13) nos ayuda a interpretar la cantidad α . De acuerdo con los datos reportados por Shvetsov [33], podemos ver que la cantidad $1/\alpha$ es el llamado prefactor de la varianza \mathcal{A} , véase la relación (3.3) y la figura 3.4. Es importante mencionar que se puede hacer esta identificación porque la varianza depende cuadráticamente de la velocidad media. Los datos experimentales reportados para esta cantidad demuestran que, véase figura 3.4, en la región de tráfico diluido el prefactor de la varianza es prácticamente constante. Para una descripción más completa podría ser una función de la densidad, pero por el momento para nuestro modelo, vamos a considerar que el prefactor de la varianza es una constante por lo que de alguna manera nuestra descripción queda restringida a la región de tráfico moderadamente denso.

7.1. Comparación con una función de distribución Gaussiana

La función de distribución local obtenida (7.10) representa un estado de equilibrio local. En la literatura de tráfico es natural asumir una gaussiana para representar este tipo de estados [12, 13, 55], por lo que usualmente la función de distribución se escribe de la siguiente manera:

$$f(x, v, t) = \frac{\rho(x, t)}{\sqrt{2\pi\Theta(x, t)}} \exp \left[-\frac{(v - V(x, t))^2}{2\Theta(x, t)} \right], \quad (7.14)$$

donde $V(x, t)$ es la velocidad media y $\Theta(x, t)$ es la varianza de la velocidad. De manera que nos hemos preguntado bajo que condiciones nuestra función de distribución (7.10) puede representarse como una Gaussiana (7.14).

Primeramente, calculemos la velocidad a la cual la función de distribución (7.10) tiene un máximo, digamos

$$\left. \frac{\partial f^{(0)}(x, v, t)}{\partial v} \right|_{\bar{v}} = 0, \quad (7.15)$$

y obtenemos

$$\bar{v} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) V(x, t). \quad (7.16)$$

Como paso siguiente, hacemos una expansión en serie de Taylor de (7.10) alrededor de \bar{v} , de modo que la ecuación (7.10) puede escribirse

$$f^{(0)}(x, v, t) \simeq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho(x, t)}{V(x, t)} A(\alpha) \exp \left[-\frac{\alpha(v - \bar{v})^2}{2(\alpha - 1)\Theta(x, t)} \right], \quad (7.17)$$

donde $A(\alpha) = \exp[(\alpha - 1)[\ln(\alpha - 1) - 1]]$. Analicemos el significado de la aproximación (7.17) en contraste con nuestra función de distribución. Si tomamos el valor del parámetro α de los datos reportados por Shvetsov [33], correspondiente a $\alpha = 100$ para la región de densidad moderada, la velocidad \bar{v} dada en (7.16) coincide prácticamente con la velocidad media $V(x, t)$. También la varianza en la aproximación gaussiana $\sigma(x, t) = \Theta(x, t)(\alpha - 1)/\alpha$

es muy cercana a $\Theta(x, t)$. Con respecto al factor multiplicativo $\alpha\rho(x, t)A(\alpha)/\Gamma(\alpha)V(x, t)$, notemos que en la aproximación de Stirling para $\alpha \gg 1$ podemos escribir

$$\Gamma(\alpha) \simeq \sqrt{2\pi(\alpha-1)} \exp [(\alpha-1)[\ln(\alpha-1) - 1]] = \sqrt{2\pi(\alpha-1)}A(\alpha), \quad (7.18)$$

de manera que la aproximación (7.17) puede escribirse

$$f(x, v, t) = \rho(x, t) \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(\alpha-1)\Theta(x, t)}} \exp \left[-\frac{\alpha}{2(\alpha-1)\Theta} \left[v - \frac{(\alpha-1)}{\alpha}V(x, t) \right]^2 \right], \quad (7.19)$$

que es sumamente parecida a (7.14) para el caso $\alpha \gg 1$. De modo que, si al comparar con datos experimentales, la función de distribución (7.14) arroja buenos resultados, y por eso ha sido adoptada para representar al tráfico vehicular, nuestra función de distribución (7.10) es igual de buena. Sin embargo, es importante recalcar que aquí se ha construido la función de distribución (7.10) a partir de una solución exacta de la ecuación de Pavri-Fontana suponiendo un modelo para la velocidad deseada promedio. También notemos que el modelo (5.32) es consistente con los datos experimentales y es por eso que de aquí en adelante usaremos (7.10) como base para desarrollar el método de Grad.

7.2. El Método de Grad II

Para desarrollar el método de Grad [26, 27, 28], usaremos la función de distribución $f^{(0)}(x, v, t)$ como base para el desarrollo. De modo que, ésta será la función de peso que nos permitirá construir los polinomios orto-normales. Estos polinomios serán usados para desarrollar una función de distribución arbitraria que escribiremos de la forma

$$f(x, v, t) = f^{(0)}(x, v, t) \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x, t) P_n^\alpha \left(\frac{\alpha v}{V} \right), \quad (7.20)$$

los polinomios orto-normales $P_n^\alpha(\alpha v/V)$ pueden expresarse de la siguiente manera

$$P_n^\alpha \left(\frac{\alpha v}{V} \right) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{n!\Gamma(n+\alpha)}} \frac{1}{f^{(0)}} \frac{d^n}{dy^n} (y^n f^{(0)}), \quad (7.21)$$

donde $y = \alpha v/V$ es una variable adimensional. Los polinomios antes escritos son proporcionales a los polinomios asociados de Laguerre [64]. Los coeficientes de la expansión (7.20) están dados por

$$\rho(x, t) C_m^\alpha(x, t) = \int_0^\infty P_m^\alpha \left(\frac{\alpha v}{V} \right) f(x, v, t) dv, \quad (7.22)$$

y como puede verse estos polinomios están relacionados directamente con las variables macroscópicas, por ejemplo

$$\begin{aligned}
C_0^\alpha(x, t) &= 1, \\
C_1^\alpha(x, t) &= 0, \\
C_2^\alpha(x, t) &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} \left[\frac{\Theta(x, t)}{[V(x, t)]^2} - \frac{1}{\alpha} \right], \\
C_3^\alpha(x, t) &= \frac{\alpha^3}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}} \left[\frac{\mathcal{J}(x, t)}{[V(x, t)]^3} - \frac{2}{\alpha} \left(\frac{3\Theta(x, t)}{[V(x, t)]^2} - \frac{2}{\alpha} \right) \right], \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{7.23}$$

donde el cumulante de tercer orden de la función de distribución se escribe de la siguiente manera

$$\Gamma(x, t) = \rho(x, t) \mathcal{J}(x, t) = \int_0^\infty (v - V(x, t))^3 f(x, v, t) dv, \tag{7.24}$$

y asume el rol del flujo de calor en la hidrodinámica usual.

Si sustituimos directamente las expresiones (7.23) en la expansión de la función de distribución (7.20) podemos escribir ésta en términos de los polinomios y las variables relevantes. Vale la pena comentar, que cada coeficiente de la expansión introduce una nueva variable macroscópica, de manera que podemos elegir hasta donde cortar la serie de acuerdo con la descripción en la que estemos interesados. Por ejemplo si consideramos $C_2(x, t) = C_3(x, t) = \dots = 0$ se recupera $f^{(0)}$, lo cual implica

$$\Theta(x, t) = \frac{[V(x, t)]^2}{\alpha}, \tag{7.25}$$

como corresponde a $f^{(0)}$. Para este modelo, como ya mencionamos, estamos interesados en tres variables independientes: la densidad, la velocidad media y la varianza de la velocidad. Entonces, en la expansión de la función de distribución (7.20) vamos a considerar $C_3(x, t) = C_4(x, t) = \dots = 0$, y con esto la función de distribución se puede escribir de la siguiente forma

$$f^{(G)}(x, v, t) = f^{(0)}(x, v, t) \left[1 + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \chi(x, v, t) \left(\frac{\Theta(x, t)}{[V(x, t)]^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right], \tag{7.26}$$

donde para acortar la notación hemos definido la función

$$\chi(x, v, t) = \alpha \left[\alpha \left(\frac{v}{V(x, t)} - 1 \right)^2 - 2 \left(\frac{v}{V(x, t)} - 1 \right) - 1 \right]. \tag{7.27}$$

Esta cerradura implica

$$\Gamma(x, t) = \frac{2\rho(x, t)}{\alpha} [V(x, t)]^3 \left(\frac{3\Theta(x, t)}{[V(x, t)]^2} - \frac{2}{\alpha} \right). \tag{7.28}$$

Ya tenemos al tercer cumulante en términos de las variables relevantes $\rho(x, t)$, $V(x, t)$, $\Theta(x, t)$ pero no aparecen explícitamente los gradientes de estas cantidades. En un sentido matemático los gradientes son importantes porque aparecen en las ecuaciones macroscópicas como términos disipativos y en general tienden a suavizar los perfiles. De manera que para ir un poco más allá, vamos a aplicar un método perturbativo con el fin de construir un modelo donde estamos considerando explícitamente las inhomogeneidades espaciales a través de los gradientes de las variables macroscópicas. Vamos a considerar una aproximación similar al método de Chapman-Enskog [25], tal como se hizo en el capítulo 6, para buscar una aproximación de primer orden de la solución de la ecuación de Pavleri-Fontana. Para llevar a cabo este procedimiento, considerademos la distribución local (7.26) como estado de referencia, de modo que

$$f(x, v, t) = f^{(G)}(x, v, t) + f^{(1)}(x, v, t) + \dots, \quad (7.29)$$

asumiendo que $f^{(1)}(x, v, t) \ll f^{(G)}(x, v, t)$ e imponiendo que la función de distribución $f^{(G)}(x, v, t)$ debe determinar completamente los valores de las tres variables que hemos escogido para describir el sistema, es decir; la densidad, la velocidad media y la varianza de la velocidad. Esta condición la podemos escribir de la siguiente manera

$$\rho = \int_0^\infty f(x, v, t) dv, \longrightarrow \int_0^\infty f^{(1)}(x, v, t) dv = 0, \quad (7.30)$$

$$\rho V = \int_0^\infty v f(x, v, t) dv, \longrightarrow \int_0^\infty v f^{(1)}(x, v, t) dv = 0, \quad (7.31)$$

$$\rho \Theta = \int_0^\infty (v - V)^2 f(x, v, t) dv, \longrightarrow \int_0^\infty (v - V)^2 f^{(1)}(x, v, t) dv = 0, \quad (7.32)$$

y podemos interpretar $f^{(1)}(x, v, t)$ como una medida de cuánto se desvía el estado del sistema de la función de distribución considerada como referencia (7.26). Como ya se mencionó $f^{(G)}$ contiene únicamente a las variables macroscópicas y no a sus gradientes, de manera que la perturbación $f^{(1)}$ es la que dará cuenta de las inhomogeneidades espaciales. Para determinar $f^{(1)}(x, v, t)$ vamos a introducir (7.29) en la ecuación de Pavleri-Fontana y vamos a asumir que el término de interacción de esta ecuación lo podemos aproximar con un término de relajación [13, 20, 65, 66], de manera similar a lo que se hizo en el capítulo 6,

$$\frac{\partial f^{(G)}}{\partial t} + v \frac{\partial f^{(G)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(f^{(G)} \frac{W(v) - v}{\tau} \right) = \rho(1 - p)(V - v) f^{(G)} - \frac{1}{\tau_0} f^{(1)}, \quad (7.33)$$

τ_0 es un tiempo de relajación que toma en cuenta el efecto colectivo de los vehículos, este parámetro será mayor que el tiempo de relajación individual τ . La hipótesis hecha en (7.33) es consistente con la idea de que una corrección en la función de distribución es mucho menor que la función de referencia. Si sustituimos $f^{(G)}$ directamente en (7.33) podemos derivar la siguiente expresión:

$$f^{(1)} = -\tau_0 f^{(G)} \frac{\chi}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} - f^{(0)} \frac{\tau_0 \alpha}{2(\alpha + 1)} \left[\Omega_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \Omega_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho(1 - p) \right) \Omega_2 \right], \quad (7.34)$$

donde los coeficientes Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 se muestran en el apéndice (A.1) y son funciones de (x, v, t) . Notemos que la función de distribución obtenida en (7.34) contiene los gradientes de las tres cantidades relevantes, pero si consideramos las restricciones (7.30-7.32) obtenemos la siguiente relación entre los gradientes

$$\left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho V(1-p)\right) = \frac{2}{\alpha V} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (7.35)$$

que nos permite escribir la primera aproximación de la función de distribución de la siguiente manera:

$$f^{(1)}(x, v, t) = -\tau_0 f^{(G)} \frac{\chi}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} - \tau_0 f^{(0)} \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \left(\Omega_V \frac{\partial V}{\partial x} + \Omega_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right), \quad (7.36)$$

donde los coeficientes Ω_V, Ω_Θ se muestran en el apéndice (A.2). Hay que mencionar que la función de distribución $f(x, v, t)$ depende de las cantidades macroscópicas elegidas y de sus gradientes. Ya que tenemos la función de distribución, regresemos a las ecuaciones macroscópicas (7.1–7.3) obtenidas a partir de la ERPF donde

$$\rho(x, t)W(x, t) = \int_0^\infty W(x, v, t)f(x, v, t) dv, \quad (7.37)$$

y

$$\rho(x, t)\mathcal{C}(x, t) = \int_0^\infty (v - V(x, t))(W(v) - W(x, t))f(x, v, t) dv, \quad (7.38)$$

es la covarianza entre la velocidad instantánea y la velocidad deseada. Si observamos detenidamente el conjunto de ecuaciones (7.1-7.3) podemos observar que no están cerradas. En realidad, la ecuación (7.3) contiene al tercer cumulante $\rho\mathcal{J}$ y a la covarianza $\rho\mathcal{C}$, y estás aún no las escribimos en términos de las variables $\rho(x, t)$, $V(x, t)$ y $\Theta(x, t)$. Para lograr lo anterior usaremos la función de distribución (7.36) para calcular $\Gamma(x, t) = \rho(x, t)\mathcal{J}(x, t)$, obtenemos

$$\Gamma(x, t) = \frac{2\rho V^3}{\alpha} \left(\frac{3\Theta}{V^2} - \frac{2}{\alpha}\right) - \tau^* \rho V^3 \left[2 \left(\frac{2\Theta}{V^2} - \frac{3}{\alpha}\right) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right], \quad (7.39)$$

y también de acuerdo con (5.32)

$$\rho(x, t)\mathcal{C}(x, t) = \omega \rho(x, t)\Theta(x, t), \quad (7.40)$$

donde hemos definido un tiempo de relajación efectivo $\tau^* = 3(\alpha + 2)\tau_0/\alpha^2$ que contiene los parámetros del modelo a través de α y al tiempo de relajación colectivo τ_0 . Esta expresión para el tercer cumulante merece algunos comentarios. En primer lugar, notamos que si el tiempo de relajación efectivo es cero, recuperamos su valor de equilibrio (7.28), que esta dado en términos de las variables relevantes pero no de sus gradientes y que se obtiene cuando se evalúa el tercer cumulante con la función de distribución de referencia $f^{(G)}(x, v, t)$. También hay que notar que la expresión (7.39) contiene dos términos adicionales proporcionales a los gradientes de velocidad y de la varianza. Es importante mencionar también la analogía con la Teoría Cinética de los gases y observar que el tercer cumulante es el análogo del flujo de calor.

Esta analogía la usa Helbing en [23] como cerradura para su modelo macroscópico, él propone al tercer cumulante proporcional al gradiente de la varianza de la velocidad en analogía con la Ley de Fourier en Teoría Cinética [25]. La propuesta de este modelo es útil en el sentido de que permite ilustrar algunas características importantes del tráfico, aunque hasta donde nosotros sabemos, esta analogía no está sustentada en ningún tratamiento cinético. En Teoría Cinética, la constante de proporcionalidad es la conductividad térmica, que algunas veces se considera constante o una función de la densidad y la velocidad del flujo. Siguiendo con esta analogía, hay que enfatizar que en el modelo que proponemos, el coeficiente que acompaña al gradiente de la varianza es una función de las variables relevantes, en vez de una constante. También aparece un efecto en este cumulante causado por el gradiente de velocidad, este es un efecto que no está presente en la Teoría Cinética usual sino que aparece en la hidrodinámica generalizada o en el régimen alrededor de las ecuaciones de Navier-Stokes-Fourier [25, 24, 67]. Ahora sí, cerramos el conjunto de ecuaciones al introducir (7.39) en (7.3). Hay que enfatizar que esta cerradura está soportada por los métodos cinéticos usuales y algunas características tomadas de datos experimentales [33].

7.2.1. Simulación Numérica

Ya se mencionó en el capítulo 6 que la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales es una tarea difícil, para resolver numéricamente este modelo optamos por un método explícito de diferencias finitas [61]. El esquema utilizado es de primer orden y es muy sencillo, en general este tipo de esquemas tienden a suavizar la solución. Por otro lado, los esquemas de segundo orden como MacCormack o Lax Wendroff producen oscilaciones que pueden dar lugar a congestionamientos que no corresponden a la realidad. Algunas veces, sobre todo cuando se está interesado en el comportamiento cualitativo, resulta conveniente implementar esquemas de primer orden ya que no se observan este tipo de inestabilidades, además de que tienen una velocidad de integración mayor.

Para resolver el conjunto de ecuaciones que hemos presentado, primero vamos a adimensionalizar. En términos de variables adimensionales el tiempo estará medido en unidades de $\tau = 30 s$, la velocidad en términos de la velocidad máxima $V_0 = 120 km/h$. Las longitudes serán medidas en unidades de $V_0\tau$, la densidad en términos de la densidad máxima $\rho_0 = 140 veh/km$ y vamos a definir una cantidad adimensional $\eta = \rho_0 V_0 \tau$.

El conjunto de ecuaciones anterior puede escribirse en su forma conservativa (6.29), donde las variables se agrupan de la siguiente manera

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \\ \rho \Theta \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

Los flujos de la ecuación conservativa quedan de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \rho \Theta \\ \rho V \Theta + \Gamma \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

y las fuentes correspondientes son

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega - 1)\rho V - \eta(1 - p)\rho\mathcal{P} \\ 2(\omega - 1)\mathcal{P} - 2\mathcal{P}\frac{\partial V}{\partial x} - \eta(1 - p)\rho\Gamma \end{pmatrix}, \quad (7.43)$$

donde \mathcal{J} viene dado por (7.39) y también puede escribirse en términos de variables adimensionales. Primeramente discretizamos x y t con valores constantes Δx y Δt de manera que $x_i = i\Delta x$, ($i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$) y $t_n = n\Delta t$, ($n \in \{0, 1, 2, \dots, t_{max}\}$). Ahora se puede calcular \mathbf{u} en los puntos discretos $(i\Delta x, n\Delta t)$ usando la siguiente notación $u(x, t) = u(x_i, t_n) = u_i^n$. Usaremos el siguiente esquema numérico de diferencias finitas de primer orden [61]

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n \right) + (\Delta t)\mathbf{s}_j^n. \quad (7.44)$$

Los flujos \mathbf{F} contienen términos que incluyen derivadas de la velocidad media y de la varianza de la velocidad en la dirección x , estos términos son diferenciados de la siguiente manera

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x}, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\Theta_{i+1}^n - \Theta_i^n}{\Delta x}. \quad (7.46)$$

Para llevar a cabo la solución numérica necesitamos los siguientes parámetros: por un lado ω tomará su valor de datos experimentales como ya se explicó en el capítulo 5, para τ tomaremos en valor típico de 30 s, el valor de la velocidad de equilibrio $V_e(\rho_e)$ la extraemos del diagrama fundamental, el valor de la probabilidad de poder rebasar $p(\rho)$ de (3.6) de acuerdo con Helbing [34] (ver capítulo 3) y finalmente α correspondiente al inverso del prefactor de la varianza, tal como lo hemos planteado en el modelo tomará un valor constante de los datos reportados por [33], $\alpha = 100$. Es importante recalcar lo siguiente; vamos a dividir la carretera en N pedazos de longitud Δx , en este caso, para la convergencia del modelo, es importante considerar N lo suficientemente grande. En la figura 7.1 se muestra que para $N > 320$ la solución numérica ya no cambia lo que nos indica que el método numérico converge. Vamos a considerar condiciones de frontera periódicas: $\rho(0, t) = \rho(L, t)$, $V(0, t) = V(L, t)$ y $\Theta(0, t) = \Theta(L, t)$ en un camino de longitud $L = 12 \text{ km}$. Por otra parte, vamos a considerar una condición inicial que permite que algunos vehículos conduzcan un poco mas rápido que otros, esto lo hacemos permitiendo que la velocidad inicial sea una perturbación sinusoidal, ver también figura 6.3, de la forma

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho_e, \\ V(x, 0) &= V_e \left(1 + \delta V \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right), \\ \Theta(x, 0) &= \Theta_e = \frac{\rho_e V_e^2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 7.2-7.4 donde hemos considerado $\delta V = 0,01$. Éstos muestran el comportamiento esperado; en una simulación de 60 min

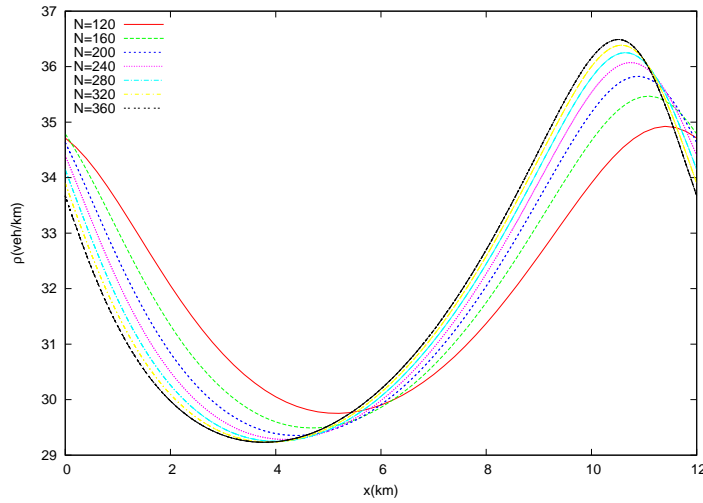


Figura 7.1: Perfiles de la densidad al tiempo $t = 35 \text{ min}$ y para diferentes valores de N comenzando con $N = 120$ que implica $\Delta x = 100 \text{ m}$ hasta $N = 360$ que equivale a $\Delta x \approx 30 \text{ m}$, puede verse que una discretización más fina arroja prácticamente los mismos resultados.

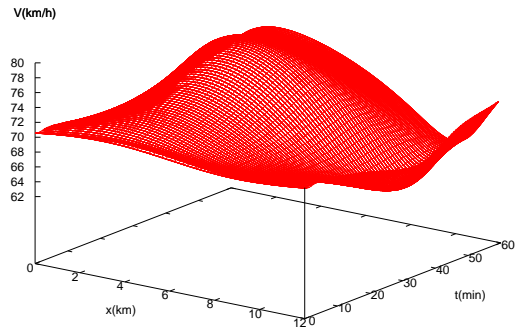
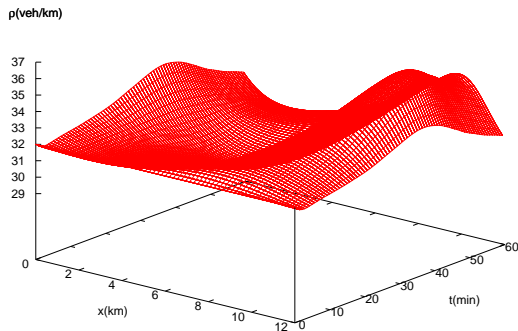


Figura 7.2: Comportamiento espacio-temporal de la densidad vehicular para en caso en que $\alpha = 100$, $\rho_e = 32 \text{ veh/km}$ y $\tau_0 = 2\tau$.

Figura 7.3: Comportamiento espacio-temporal de la velocidad media para los mismos valores de la figura 7.2.

podemos observar la formación de una onda de densidad, puede observarse que el máximo en la densidad concuerda con el mínimo en la velocidad media. También observamos que el máximo de la varianza de la velocidad precede espacialmente al máximo en la densidad (véase las figuras 7.5 y 7.6). Notemos que los valores de la densidad se encuentran en la región de tráfico moderado y los valores de la varianza no son dados *a priori* sino que están determinados por la solución de su ecuación de movimiento. Hemos observado que los valores que obtenemos son bastante menores de los que obtiene Helbing en [23] donde él considera que $\Theta_0 = (45 \text{ km/h})^2$. Aunque es importante decir que estas diferencias podrían ser menores debido al esquema numérico que se utilizó. Solo para ilustrar hemos calculado el tercer

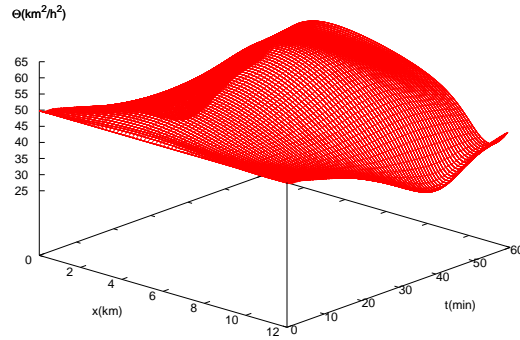


Figura 7.4: Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para los mismos valores de las figuras 7.2 y 7.3.

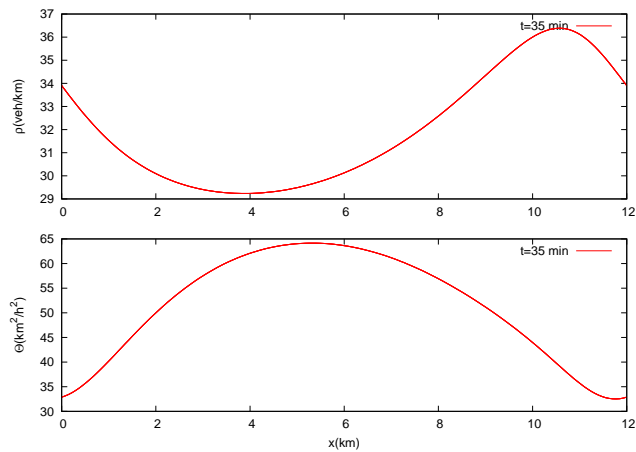


Figura 7.5: Perfiles de la densidad y la varianza para $t = 35$ min.

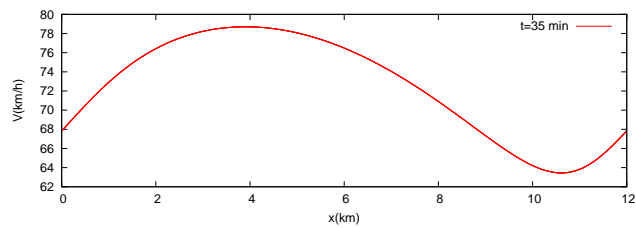


Figura 7.6: Perfil de la velocidad media para $t = 35$ min.

cumulante de la distribución, que es nuestra hipótesis de cerradura y se muestra en la figura 7.7. Su comportamiento se basa en la expresión (7.39) y está determinado completamente por la dinámica del modelo. El hecho de que el tercer cumulante no sea cero sugiere que la función de distribución no es simétrica conforme evoluciona en el tiempo.

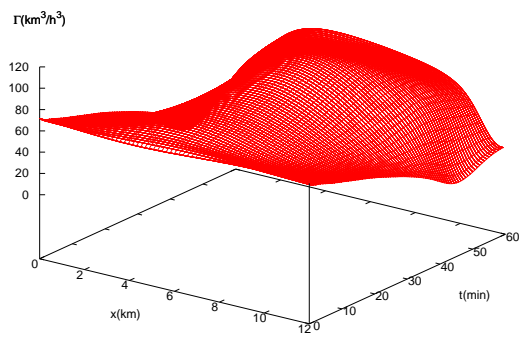


Figura 7.7: Tercer cumulante de la distribución a partir de la expresión (7.39).

Capítulo 8

Conclusiones y Perspectivas

8.1. Análisis de Resultados del Modelo I

El modelo macroscópico presentado en el capítulo 6 está basado en la ecuación cinética de Pavari-Fontana. El método de Grad nos proporciona una cerradura para este modelo de dos ecuaciones diferenciales, densidad y velocidad media, si nos basamos en el modelo que presentamos para conductores agresivos (5.32). Hemos podido calcular la varianza de la velocidad, como una medida de la presión de tráfico y su comportamiento se ilustra en las figuras 6.11 y 6.12, para las condiciones iniciales propuestas. En general podemos decir que este modelo tiene las principales características de los modelos usuales de tráfico. Por un lado la densidad y la velocidad media tienen acoplados sus máximos y mínimos, ésta es una característica usual del tráfico de vehículos. También podemos observar en las figuras 6.9 y 6.10 que el máximo en la varianza de la velocidad ocurre en una posición anticipada correspondiente al máximo en la densidad, este fenómeno de anticipación se ha observado en el tráfico real [22, 23] y se debe al acomodo de las velocidades de los vehículos cuando estos se acercan a un congestionamiento. En este modelo hemos podido observar también que existen regiones de estabilidad lineal para ciertos valores de la densidad y del vector de onda. La primera condición inicial que estamos considerando 6.32 corresponde a una densidad constante en la carretera y una perturbación sinusoidal en la velocidad a lo largo de la misma, lo que significa que unos vehículos conducen ligeramente más rápido que otros, en este caso la perturbación inicial es del 1%. La segunda condición inicial en este modelo puede verse como una cerradura parcial de la carretera en una posición específica, en este sentido, alrededor de este punto se observa un aumento en la densidad en alguna localidad y un decremento en la densidad inmediatamente después por causa del cierre parcial. En ambos casos observamos la propagación de la perturbación. La perturbación se amplifica pero al final se observa un perfil con forma prácticamente constante. El sistema llega a un estado estacionario y lo hace en un tiempo más corto para la condición inicial 6.32, como puede observarse en las figuras 6.13 y 6.14. Por otro lado también se puede observar que la densidad nunca sobrepasa los límites del modelo.

Es importante mencionar que en este modelo únicamente tenemos tres parámetros a ajustar libremente: el parámetro de agresividad de los conductores ω , la probabilidad de poder rebasar p y el cociente de tiempos de relajación τ_0/τ . Hay que comentar que el parámetro ω

ha sido calculado a partir de datos experimentales. En realidad, se calcula tomando el valor de α del prefactor de la varianza, la densidad y la velocidad del diagrama fundamental y la probabilidad p de los datos de Helbing [16]. Los cálculos demuestran que ω es mayor que uno en una pequeña proporción ($< 20\%$), ésta es una característica que puede interpretarse como un comportamiento promedio de los conductores.

8.2. Análisis de Resultados del Modelo II

En el capítulo 7 se desarrolla un modelo de tres ecuaciones donde usamos un proceso de maximización y el método de Grad para generar una función de distribución que nos dará la cerradura del modelo. Es claro que se pueden construir otros modelos utilizando cerraduras diferentes en las ecuaciones de movimiento. En realidad, hemos considerado a la densidad, la velocidad y la varianza de la velocidad como variables relevantes para así poder comparar con el modelo mejorado de Helbing [23], donde intervienen las mismas variables (véase sección 4.2). Hemos notado algunas diferencias importantes entre ambos modelos. Nuestro modelo se construye sistemáticamente usando el método de Grad. Hemos encontrado una relación constitutiva para el cumulante de tercer orden (análogo al flujo de calor en Teoría Cinética), que da un sustento cinético a esta analogía de Helbing, pero aparece un término extra que no se ve en la Teoría Cinética usual ni en el trabajo de Helbing. Este efecto es una especie de contribución cruzada proporcional al gradiente de la velocidad, que no puede despreciarse ya que es del orden de magnitud de los otros términos. Los resultados de la simulación, que se muestran en la figuras (7.2-7.4) son diferentes a los resultados de Helbing ya que nuestros valores de la densidad están muy lejos de la densidad máxima, un hecho que es consistente con el rango de validez de modelo, que no nos permite extendernos a densidades altas. También es importante mencionar que nosotros hemos considerado a los vehículos como objetos puntuales, en cambio Helbing hace una aproximación para considerar el tamaño promedio de los vehículos y la distancia de seguridad. Ambos parámetros tiene que modelarlos lo que conduce a introducir parámetros adicionales, lo mismo sucede en el modelo de Wagner *et al.* [12] que también se analiza en la sección 5.5. Nuestro modelo y la simulación correspondiente permanece en el rango de validez del modelo por un buen tiempo aún sin introducir la hipótesis adicional sobre el tamaño de los vehículos. Notablemente las ecuaciones de movimiento no son lineales y el equivalente de la conductividad térmica no es constante sino una función de la velocidad media.

8.3. Conclusiones Generales

Ya que hemos estudiado de manera independiente las características de los modelos que desarrollamos, es importante comparar ambos modelos, que consideran un nivel de descripción diferente. Los modelos de tráfico que hemos construido se obtienen a partir de la ERPF. Cabe destacar que puede obtenerse una solución exacta de esta ecuación para el caso estacionario y homogéneo si se modela a la velocidad deseada promedio (5.32) y no es necesario suponer que la solución de equilibrio es una gaussiana [19, 20, 21]. Por un lado en el Modelo I, capítulo 6, se consideran dos ecuaciones dinámicas para describir al sistema, una ecuación

para la densidad y otra para la velocidad media, la cerradura se lleva cabo a nivel de la varianza de la velocidad. Este modelo ha dado resultados muy alentadores, ya que el análisis de estabilidad muestra regiones estables y la simulación numérica no presentó grandes dificultades, en este modelo usamos un método explícito para la solución numérica conocido como esquema MacCormak. Tampoco se presentó ningún problema de convergencia, la única dificultad fue la elección de la probabilidad de poder rebasar, inicialmente queríamos usar la relación $p = (1 - \rho/\rho_0)$, que parece la opción más simple, sin embargo la elección de esta probabilidad nos arrojaba varianzas negativas después de un tiempo largo de simulación, esto no puede ser dada la definición de la varianza de la velocidad, que siempre debe ser positiva. Notamos que el problema podía ser p ya que el hecho de no poder rebasar puede causar ajustes en la velocidad de los vehículos, cuando cambiamos la propuesta original por la propuesta de Helbing [34] el problema desapareció. En cambio el Modelo II, capítulo 7, de tres ecuaciones: densidad, velocidad y varianza de la velocidad, nos presentó grandes dificultades, por un lado el análisis de estabilidad no mostró regiones estables, como fue un análisis lineal decidimos buscar una solución numérica a pesar de esto. Intentamos diversos esquemas de métodos explícitos (véase [61]) y decidimos usar un esquema de primer orden, sin embargo apareció un problema de convergencia, este problema se resuelve discretizando la carretera en elementos muy finos. En su artículo [23], Helbing sugiere que la introducción de la ecuación dinámica de la varianza y el hecho de considerar el tamaño de los vehículos mejora el modelo de Kerner y Konhäuser [58]. El modelo mejorado de Helbing presenta la formación de un congestionamiento, tal como el de Kerner y Konhäuser pero la forma de éste es mucho más suave. En ambos de nuestros modelos se obtienen perfiles sin problemas de generación de ondas de choque, aunque el modelo II parece mucho más suave. Sin embargo, la introducción de una ecuación más (la de la varianza) genera enormes dificultades para la solución y además el modelo II está mucho más limitado, es difícil encontrar un conjunto de parámetros que generen una solución aceptable ya que las regiones de estabilidad no se pueden visualizar, al menos no con un análisis lineal.

Por otro lado, el explorar modelos de tres ecuaciones como el modelo II es interesante, ya que puede observarse el fenómeno de anticipación sin que éste sea una consecuencia de que la varianza sea una función de la densidad o la velocidad media. Sino que se observa el fenómeno de anticipación de los vehículos en un modelo donde la varianza de la velocidad es una variable dinámica independiente.

Como es común en el flujo de tráfico pueden aparecer repentinamente congestionamientos sin una causa justificada. Al parecer, es la capacidad de tomar decisiones por parte de los conductores lo que da lugar a este fenómeno. En el modelo de Pavari-Fontana, se considera este aspecto a través de la probabilidad de no poder rebasar $(1 - p)$ y la velocidad deseada W , en nuestros modelos ambos efectos son tomados en cuenta y se representan explícitamente en el parámetro adimensional ω , considerado una constante en el régimen de densidad moderada. Hay que recalcar también que nuestros modelos consideran la velocidad deseada de los conductores de manera promediada y este aspecto es un tanto diferente a la idea original de Pavari-Fontana donde se toma en consideración la velocidad deseada individual. Por otra parte, el comportamiento cualitativo de ambos modelos concuerda muy bien con las propiedades generales del tráfico. Por ejemplo, el valor máximo en la varianza de la velocidad precede espacialmente el máximo en la densidad, en ambos modelos y particularmente

interesante en el modelo II. También vemos que el mínimo en la velocidad está sincronizado con el máximo en la densidad. De manera que podemos decir que es posible construir modelos hidrodinámicos basados en métodos cinéticos, con una perspectiva un tanto diferente de la usual, es decir comenzando con una solución de equilibrio de la ecuación de Pavri-Fontana que se genera a partir de un modelo simple y realista que considera la agresividad de los conductores (5.32). Finalmente es importante mencionar que hemos obtenido buenos resultados aún sin considerar el tamaño de los vehículos.

8.4. Perspectivas

Cómo ya hemos mencionado reiteradamente, no hemos considerado el tamaño de los vehículos en ninguno de nuestros modelos, ésta es una opción interesante a considerar introduciendo una cantidad $\chi(x+s)$ que tome en cuenta el espacio que requieren los vehículos y cause un incremento en la frecuencia de colisión como lo propone Enskog para gases moderadamente densos compuestos por esferas rígidas [25]. Los modelos estudiados en la sección 5.5, donde siempre se ha supuesto a la función de distribución de equilibrio como una gaussiana, muestran un mejoramiento notable en sus resultados al introducir este tipo de hipótesis, así que creemos puede ser una buena opción intentar este tipo de análisis con nuestro modelo de conductores agresivos.

Otra opción interesante a estudiar, es el tráfico multicarril basándonos en una ecuación cinética parecida a la de Pavri-Fontana [68] donde se permitan transiciones entre líneas, también considerando el modelo (5.32) como base para la cerradura del modelo. Creo que sería interesante poder observar el fenómeno de sincronización del que se habla en el capítulo 3. Con nuestro modelo de un carril no es muy clara la aparición de este fenómeno. Hay que recordar que antes de la formación de tráfico congestionado aparece la fase de tráfico sincronizado.

Puede estudiarse también el hecho de introducir dos tipos de vehículos, carros y camiones, ya que en el tráfico real se observa que es precisamente esta combinación lo que causa graves problemas de embotellamientos [69].

Hemos pensado también en tratar de resolver la ecuación completa que propone Pavri-Fontana (5.24).

Finalmente queda también como perspectiva la posibilidad de mejorar la solución numérica de este tipo de modelos utilizando esquemas implícitos o esquemas de orden superior.

Índice de figuras

2.1.	Espacio fase 6-dimensional y una celda en el espacio [24].	13
2.2.	Velocidades relativas y ángulo de colisión θ [24].	18
2.3.	Colisión entre dos esferas duras de diámetro d [24].	19
2.4.	Contando las colisiones [24].	20
3.1.	Ejemplos de las relaciones flujo-ocupación (a) y velocidad-ocupación (b) obtenidas de datos tomados por la Japan Highway Public Corporation [31]. . .	30
3.2.	Comparación de la evolución temporal en carriles vecinos $i = 1, 2$ de las velocidades medias $V_i(t)$ y las densidades $\rho_i(t)$ [8, 16].	31
3.3.	Comparación de la evolución temporal en carriles vecinos $i = 1, 2$ de la raíz cuadrada de las varianzas $\sqrt{\theta_i(t)}$ y las velocidades V_i [8, 16].	31
3.4.	El prefactor de la varianza $\mathcal{A}(\rho)$ [8, 33].	31
3.5.	Relación $1 - p(\rho)$ vs. ρ obtenida por Helbing en [34].	32
3.6.	Los puntos azules son los datos extraídos de [34], la línea verde es un ajuste considerando que para Helbing $\rho_0 = 160veh/km$	32
3.7.	Tráfico libre (a) y tráfico sincronizado (b). Fragmentos de la velocidad media (izquierda) contra el tiempo para tres líneas de la carretera:(—) carril izquierdo, (- - -) carril central, (...) carril derecho. Transferencias entre puntos experimentales en el plano flujo-densidad (derecha) para la línea izquierda. En (c) puntos experimentales correspondientes al tráfico libre (puntos negros) y al tráfico sincronizado (círculos: las líneas sólidas muestran las transferencias). Dato reportados por Kerner <i>et al.</i> en [37].	33
4.1.	Configuración típica del modelo de Nagel y Schreckenberg. El número en la parte superior es la velocidad del vehículo.	39
4.2.	Diagrama espacio-tiempo para tráfico inestable en el modelo de Nagel y Schreckenberg. En este tipo de esquemas la pendiente de las trayectorias reflejan las velocidades individuales de los conductores, mientras que la densidad de las mismas refleja la densidad vehicular. En (a) $p = 0,5$, mientras que en (b) $p = 0,001$, vemos que en el límite $p \rightarrow 0$ la anchura de los congestionamientos tiende a cero debido a la naturaleza estocástica de este parámetro.	41
4.3.	Distorsión del perfil de densidad cuando $dv_g/d\rho > 0$	43
4.4.	Comportamiento espacio-temporal de (a) la densidad $\rho(x, t)$ y (b) la velocidad media $V(x, t)$ para el modelo de Kerner-Kouhaüser [58].	47

4.5.	Comportamiento espacio-temporal de (a) la densidad $\rho(x, t)$, (b) la velocidad media $V(x, t)$ y (c) la varianza de la velocidad para el modelo de Helbing [23].	47
5.1.	Representación esquemática del espacio (x, v)	50
5.2.	Comparación entre la función de distribución obtenida (5.33) para $\alpha = 100$ (distribución azul) y una gaussiana (distribución roja) con los mismos valores de $\rho_e = 28 \text{ veh/km}$ y $V_e = 83,64 \text{ km/h}$ de acuerdo con el diagrama fundamental.	57
5.3.	La constante del modelo $\omega(\rho_e) = 1 + (\rho_e V_e \tau (1 - p_e)) / \alpha$ como una función de los parámetros característicos del estado estacionario y homogéneo. Como puede verse, $\omega(\rho_e)$ tiene un valor acotado.	58
5.4.	Diagramas de inestabilidad de las ecuaciones de tráfico considerando a los vehículos como objetos puntuales (a) y (b) y tomando en cuenta el requerimiento de espacio (c) y (d). En (a) y (c) régimen de Euler y (b) y (d) régimen Navier-Stokes. Para $A = 0,03$. Figura tomada de [55].	63
5.5.	Simulación de una perturbación inicial periódica pequeña para diferentes valores de la densidad en el régimen de Navier-Stokes. En estas gráficas se muestran las dos diferentes inestabilidades con diferentes velocidades de propagación. Modelo de Helbing y Treiber [55].	64
5.6.	Evolución espacio-temporal de (a) la densidad, (b) la velocidad y (c) la velocidad deseada iniciando con un estado homogéneo perturbado en la varianza de la velocidad deseada perteneciente al modelo de Wagner [12].	66
6.1.	Región estable para $\tau_0/\tau = 4$	73
6.2.	Región estable para $\tau_0/\tau = 8$	73
6.3.	Condición inicial I.	74
6.4.	Comportamiento espacio-temporal de la densidad para la condición inicial I (6.32).	75
6.5.	Comportamiento espacio-temporal de la velocidad para la condición inicial I (6.32).	75
6.6.	Condición inicial II.	75
6.7.	Comportamiento espacio-temporal de la densidad para la condición inicial II (6.33).	76
6.8.	Comportamiento espacio-temporal de la velocidad para la condición inicial II (6.33).	76
6.9.	Perfiles de la densidad y la varianza al tiempo 35 min para la condición inicial I (6.32).	76
6.10.	Perfiles de la densidad y la varianza al tiempo 35 min para la condición inicial II (6.33).	77
6.11.	Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para la condición inicial I (6.32).	77
6.12.	Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para la condición inicial II (6.33).	77
6.13.	Perfiles de la densidad después de alcanzarse un estado estacionario para 30 min (rojo), 40 min (verde), 50 min (azul) iniciando con la condición inicial I.	78
6.14.	Perfiles de la densidad después de alcanzarse un estado estacionario para 20 min (rojo), 30 min (verde), 40 min (azul) iniciando con la condición inicial II.	78

7.1. Perfiles de la densidad al tiempo $t = 35 \text{ min}$ y para diferentes valores de N comenzando con $N = 120$ que implica $\Delta x = 100 \text{ m}$ hasta $N = 360$ que equivale a $\Delta x \approx 30 \text{ m}$, puede verse que una discretización más fina arroja prácticamente los mismos resultados.	88
7.2. Comportamiento espacio-temporal de la densidad vehicular para en caso en que $\alpha = 100$, $\rho_e = 32 \text{ veh/km}$ y $\tau_0 = 2\tau$	88
7.3. Comportamiento espacio-temporal de la velocidad media para los mismos valores de la figura 7.2.	88
7.4. Comportamiento espacio-temporal de la varianza de la velocidad para los mismos valores de las figuras 7.2 y 7.3.	89
7.5. Perfiles de la densidad y la varianza para $t = 35 \text{ min}$	89
7.6. Perfil de la velocidad media para $t = 35 \text{ min}$	89
7.7. Tercer cumulante de la distribución a partir de la expresión (7.39).	90

Bibliografía

- [1] A. R. Méndez, R. M. Velasco, El tráfico vehicular y la emisión de contaminantes, in: L. G.-C. Sherer, J. V. Ham (Eds.), Contaminación Atmosférica VI, El Colegio Nacional, 2007.
- [2] D. Craig, Physicists and traffic flow, APS news 13 (4).
- [3] H. Lieu, Traffic-flow theory, Public Roads 66 (4), this publication is an update and expansion of the Transportation Research Board (TRB) Special Report 165.
- [4] M. J. Lighthill, G. B. Whitham, A Theory of traffic flow on long crowded roads, in: Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 229 of A Mathematical and Physical Sciences, pp. 317–345.
- [5] G. B. Whitham, Linear and nonlinear waves, New York, 1974.
- [6] D. Gazis, R. Herman, R. Rothery, Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow, Opns. Res. 9 (1961) 545.
- [7] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, Simulation of vehicular traffic: a Statistical Physics perspective, Comput. Sci. Eng. 2 (5) (2000) 80–87.
- [8] D. Helbing, Traffic and related self-driven many-particle systems, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 1067–1141.
- [9] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, Statistical Physics of vehicular traffic and some related systems, Phys. Rep. 329 (2000) 199–329.
- [10] S. Shen, A Course on Nonlinear Waves, Academic Publishers, 1993.
- [11] I. Prigogine, F. C. Andrews, A Boltzmann like approach for traffic flow, Opns. Res. 8 (1960) 789.
- [12] C. Wagner, C. Hoffmann, R. Sollacher, J. Wagenhuber, B. Schürmann, Second-order continuum traffic flow model, Phys. Rev. E 54 (5) (1996) 5073–5085.
- [13] D. Helbing, Gas-Kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations, Phys. Rev. E 53 (3) (1996) 2366–2381.
- [14] I. Prigogine, R. Herman, Kinetic Theory of vehicular traffic, New York, 1971.

- [15] S. Paveri-Fontana, On Boltzmann like treatments for traffic flow: a critical review of the basic model and an alternative proposal for dilete traffic analysis, *Transp. Res.* 9 (1975) 225–235.
- [16] D. Helbing, Empirical traffic data and their implications for traffic modeling, *Phys. Rev. E* 55 (1) (1997) R25–R28.
- [17] A. Klar, R. Wegene, A hierarchy of models for multilane vehicular traffic I: Modeling, *J. Stat. Phys.* 87 (1997) 91.
- [18] R. Illner, A. Klar, T. Materne, On Vlasov-Fokker-Planck kinetic models for multilane traffic flow, in: P. Muntz, A. Ketsdever (Eds.), *Proceedings of the 23rd International Symposium of Rarefied Gas Dynamics*, 2003.
- [19] R. M. Velasco, P. Saavedra, A first order model in traffic flow, *Physica D* 228 (2007) 153–158.
- [20] R. M. Velasco, W. Marques Jr., Navier-Stokes-like equations for traffic flow, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 046102.
- [21] A. R. Méndez, R. M. Velasco, An alternative model in traffic flow equations, *Transp. Res. Part B* E-print: <http://dx.doi.org/10.1016/j.trb.2008.01.003>.
- [22] R. D. Kühne, Freeway control using a dynamic traffic flow model and vehicle reidentification techniques, *Transp. Res. Rec.* 1320 (1991) 251.
- [23] D. Helbing, Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic, *Phys. Rev. E* 51 (4) (1995) 3164–3170.
- [24] H. Struchtrup, *Macroscopic Transport Equations for rarefied Flows*, Springer, 2005.
- [25] S. Chapman, T. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Third Edition, Cambridge University Press, 1970.
- [26] H. Grad, Note on N-Dimensional Hermite polynomials, *Commun. Pure and Appl. Math.* 2 (1949) 325–330.
- [27] H. Grad, On the Kinetic Theory of rarefied gases, *Commun. Pure and Appl. Math.* 2 (1949) 331–407.
- [28] H. Grad, *Encyclopedia of Physics XII*, ed. S. Flügge, Springer, 1958.
- [29] C. Cercignani, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum Press, 1969.
- [30] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Vol. 67, Springer-Verlag, 1988.
- [31] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, Phenomenological study of dynamical model of traffic flow, *J. Phys. I* 5 (1995) 1389–1399.

- [32] B. S. Kerner, P. Konhäuser, Structure and parameters of clusters in traffic flow, *Phys. Rev. E* 50 (1) (1994) 54–86.
- [33] V. Shvetsov, D. Helbing, Macroscopic dynamics of multilane traffic, *Phys. Rev. E* 59 (6) (1999) 6328–6339.
- [34] D. Helbing, Derivation and empirical validation of a refined traffic flow model, *Physica A* 233 (1996) 253–282.
- [35] B. S. Kerner, H. Rehborn, Experimental properties of phase transitions in traffic flow, *Phys. Rev. E* 79 (20) (1997) 4030–4033.
- [36] B. S. Kerner, Experimental features of self-organization in traffic flow, *Phys. Rev. Lett.* 81 (17) (1998) 3797–3800.
- [37] B. S. Kerner, H. Rehborn, Experimental properties of complexity in traffic flow, *Phys. Rev. E* 53 (5) (1996) R4275–R4278.
- [38] B. S. Kerner, *The Physics of Traffic*, Springer, 2004.
- [39] L. A. Pipes, An operational analysis of traffic dynamics, *J. Appl. Phys.* 24 (1953) 275.
- [40] R. E. Chandler, R. Herman, E. Montroll, Traffic dynamics: studies in car following, *Opns. Res.* 6 (1958) 165.
- [41] D. Gazis, R. Herman, R. B. Potts, Car-following theory of steady state traffic flow, *Opns. Res.* 7 (4) (1959) 499.
- [42] P. Gipps, A behavioral car-following model for computer simulation, *Transp. Res.* 15 B (1981) 105.
- [43] G. F. Newell, Nonlinear effects in the dynamics of car following, *Opns. Res.* 9 (2) (1961) 209–229.
- [44] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Phys. Rev. E* 51 (1995) 1035.
- [45] Y. Sugiyama, H. Yamada, Simple and exactly solvable model for queue dynamics, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 7749.
- [46] Y. Sugiyama, H. Yamada, in: M. Schreckenberg, D. E. Wolf (Eds.), *Traffic and Granular flow '97*, Springer, Singapore, 1998, p. 301.
- [47] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, Structure Stability of congestion in traffic dynamics, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* 11 (1994) 203.
- [48] M. Treiber, D. Helbing, Explanation of observed features of self-organization in traffic flow E-print cond-mat/9901239v1.

- [49] M. Treiber, A. Hennecke, D. Helbing, Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 1805.
- [50] M. Cremer, J. Ludwig, A fast simulation model for traffic flow on the basis of boolean operations, *Math. Comput. Simul.* 28 (4) (1986) 297.
- [51] K. Nagel, M. Schreckenberg, A cellular automata model for freeway traffic, *J. Physique I* 2 (12) (1992) 2221–2229.
- [52] M. E. Larraga, J. A. del Río, Schadschneider, New kind of phase separation in a CA traffic model with anticipation, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 (2004) 3769–3781.
- [53] J. A. del Río, M. E. Larraga, Transient situations in traffic flow: Modelling the Mexico City Cuernavaca highway, in: F. J. Uribe, L. S. García-Colín, E. Díaz-Herrera (Eds.), *Statistical Physics and beyond*, Vol. 757, American Institute of Physics, Melville, New York, 2005, pp. 190–199.
- [54] S. Maerivoet, B. De Moor, Cellular automata models of road traffic, *Phys. Rep.* 419 (2005) 1–64.
- [55] D. Helbing, M. Treiber, Enskog equations for traffic flow evaluated up to Navier-Stokes order, *Granular Matter* 1 (1998) 21–31.
- [56] C. F. Daganzo, Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transp. Res. Part B* 29 (1995) 227.
- [57] H. J. Payne, in: G. A. Bekey (Ed.), *Mathematical Models of Public Systems*, Vol. 1, 1971, p. 51.
- [58] B. S. Kerner, P. Konhaser, Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, *Phys. Rev. E* 48 (4) (1993) 2335–2338.
- [59] R. M. Velasco, A. R. Méndez, The informational entropy in traffic flow, in: F. J. Uribe, L. S. García-Colín, E. Díaz-Herrera (Eds.), *Statistical Physics and beyond*, Vol. 757, American Institute of Physics, Melville, New York, 2005, pp. 200–206.
- [60] A. R. Méndez, R. M. Velasco, Kinetic Derivation for a Traffic Flow Model, in: *Proceedings of the Traffic and Granular Flow 07*, Springer, 2008.
- [61] D. Helbing, M. Treiber, Numerical Simulation of macroscopic traffic equations, *Comput. Sci. Eng.* 1 (1999) 89–99.
- [62] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.
- [63] C. E. Shannon, A Mathematical Theory of communication, *Bell System Tech. J.* 27 (1948) 379–623.
- [64] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 1966.

- [65] D. Helbing, Theoretical foundation of macroscopic traffic models, *Physica A* 219 (1995) 375.
- [66] D. Helbing, High-fidelity macroscopic traffic equations, *Physica A* 219 (1995) 391.
- [67] J. P. Boon, S. Yip, *Molecular Hydrodynamics*, Dover, 1991.
- [68] D. Helbing, A. Greiner, Modeling and simulation of multilane traffic flow, *Phys. Rev. E* 55 (5) (1997) 5498–5508.
- [69] S. P. Hoogendoorn, P. Bovy, Continuum modeling of multiclass traffic flow, *Transp. Res. Part B* 34 (2000) 123–146.

Apéndices

Apéndice A

Usando el modelo (5.32) podemos reescribir la ecuación (5.30) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{f_e(v)} \frac{\partial(f_e(v))}{\partial v} = \frac{(\alpha - 1)}{v} - \frac{\alpha}{V_e}, \quad (\text{A.1})$$

e integrando sobre v de ambos lados se obtiene:

$$\ln[f_e(v)] + cte = (\alpha - 1) \ln[v] - \frac{\alpha v}{V_e}, \quad (\text{A.2})$$

despejando podemos escribir

$$f_e(v) = cte v^{(\alpha-1)} \exp\left[-\frac{\alpha v}{V_e}\right]. \quad (\text{A.3})$$

Usando la condición (5.31) se obtiene:

$$A = \frac{\rho_e}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{V_e}\right)^\alpha, \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{\tau \rho_e V_e (1-p)}{(\omega - 1)}, \quad (\text{A.4})$$

y $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma con argumento α . De modo que finalmente es posible escribir:

$$f_e(v) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\rho_e}{V_e} \left(\frac{\alpha v}{V_e}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha v}{V_e}\right). \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B

Se proponen los polinomios $P_n(x, v, t) = P_n(y)$ de la siguiente manera,

$$P_n(y) = a_{0n} + a_{1n}y + a_{2n}y^2 + \dots + a_{nn}y^n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{B.1})$$

para determinar las constantes $a_{0n}, a_{1n}, a_{2n}, \dots$, se usa la condición de ortonormalidad

$$\int_0^\infty P_i(y) P_j(y) \Phi(y) dy = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.2})$$

Usando (B.2) se obtienen los primeros coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= 1, \\
a_{01} &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \\
a_{02} &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \\
a_{03} &= -\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \\
a_{11} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \\
a_{12} &= -\frac{2(\alpha+1)}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \\
a_{13} &= \frac{3(\alpha+1)(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \\
a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}}, \\
a_{23} &= -\frac{3(\alpha+2)}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \\
a_{33} &= \frac{1}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Lo que nos permite escribir los primeros polinomios:

$$\begin{aligned}
P_0(y) &= 1, \\
P_1(y) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[y - \alpha], \\
P_2(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}} [y^2 - 2(\alpha+1)y + \alpha(\alpha+1)], \\
P_3(y) &= \frac{1}{\sqrt{6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}} [y^3 - 3(\alpha+2)y^2 + 3(\alpha+1)(\alpha+2)y - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)], \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Y finalmente generalizando se obtiene (6.9)

$$P_n(y) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{n!\Gamma(n+\alpha)}} \frac{1}{f_e} \frac{d^n}{dy^n} (y^n f_e). \tag{B.5}$$

Por otra parte con coeficientes C_n se pueden escribir en términos de (ρ, V, Θ) usando las definiciones de los cumulantes de la distribución (5.40) y los polinomios obtenidos

$$\begin{aligned} C_0(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e}, \\ C_1(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e} \sqrt{\alpha} \left(\frac{V(x, t)}{V_e} - 1 \right), \\ C_2(x, t) &= \frac{\rho(x, t)}{\rho_e} \sqrt{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} \left[\alpha \left(\frac{\Theta + V^2}{V_e^2} \right) + (\alpha+1) \left(1 - 2 \frac{V}{V_e} \right) \right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Apéndice C

Los coeficientes calculados en la ecuación (7.34) son:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -2 \left(\frac{v}{V} - 1 \right)^2 \left[\alpha(\alpha+1) \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] - 2\chi \left[\left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(\frac{2\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{\Theta}{V^2} + \frac{3}{\alpha} \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{2}{\alpha} \right) \right], \\ \Omega_2 &= 2 \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \left[2\chi V \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) + \alpha(\alpha+1) \frac{\Theta}{V} \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \right], \\ \Omega_3 &= \frac{4\chi}{V} \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{2}{\alpha} \right) + \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \frac{1}{V} \left[\chi + 2\alpha(\alpha+1) \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Por otra parte, los coeficientes reducidos son:

$$\begin{aligned} \Omega_v &= 2\chi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) - \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{3}{\alpha^2} \right) - \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(\frac{2\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \\ &\quad - 2\alpha(\alpha+1) \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left[\left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(\frac{\Theta}{V^2} - \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{2}{\alpha} \frac{\Theta}{V^2} \right], \\ \Omega_\Theta &= -4 \frac{\chi}{\alpha V} + \frac{1}{V} \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(\chi - 2(\alpha+1) \right), \end{aligned} \tag{C.2}$$

donde todos ellos son funciones de (v, x, t) .



UNIDAD IZTAPLAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Estudio Cinético-Macroscópico de Flujo Vehicular

Tesis que presenta:

Fis. Alma Rosa Méndez Rodríguez

Para obtener el grado de:

Doctora en Ciencias(Física)

Asesor:

Dra. Rosa María Velasco Belmont
Departamento de Física
México, D. F., 4 de agosto 2008.