Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana
Ciencias Básicas e Ingeniería
Unidad Iztapalapa

Fundamentos algebraicos lineales del cálculo operacional

Tesis que presenta

Gabriel Bengochea Villegas

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Luis Verde-Star**

31 de Enero de 2013

Agradezco el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La introducción está dividida en cuatro secciones. La primera trata de los antecedentes históricos del cálculo operacional y responde preguntas tales como ¿quién lo inventó?, ¿para qué? y ¿cómo? La segunda sección introduce al lector a la transformada de Laplace e intenta brindar un enfoque de lo que es, cómo se utiliza y algunas de las dificultades que aparecen al utilizarla. La tercera sección introduce al lector a la transformada de Mellin e intenta hacer lo mismo que la sección de la transformada de Laplace. La última sección habla acerca de los contenidos y la estructura de los capítulos posteriores, los cuales contienen nuestro trabajo.

1.1 Antecedentes históricos del cálculo operacional

En el siglo XIX algunos matemáticos desarrollaron un cálculo simbólico, esto es, un sistema de reglas para ser utilizadas con el operador diferencial $D := d/dt$.

Esto es muy importante ya que en las matemáticas aplicadas es común encontrarse con ecuaciones diferenciales lineales de varios tipos y se requiere resolverlas de una forma sencilla. Entre los años 1892 y 1899 Oliver Heaviside fue uno de los primeros en impulsar los métodos del cálculo operacional. El aplicó su teoría en la solución de ecuaciones diferenciales, especialmente en la teoría de la electricidad. Heaviside no se preocupaba por dar demostraciones rigurosas de sus resultados, lo que lo llevó a ser muy criticado por los científicos de la época, que encontraron varios errores en sus métodos operacionales. Heaviside realizó cálculos algebraicos con el operador D_t, definiendo

$$D_t^0 := I, \qquad D_t^k := \frac{d^k}{dt^k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Esta definición es conveniente, ya que se cumplen las siguientes reglas del cálculo.

$$\begin{aligned} D_t^k(cf)(t) &= cD_t^k f(t), \\ D_t^k(f+g)(t) &= D_t^k f(t) + D_t^k g(t), \\ D_t^l(D_t^k f)(t) &= D_t^{l+k} f(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

para l y k enteros no negativos. También definió $D_t^{-1} := 1/D$ como

$$D_t^{-1} f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \tag{1.3}$$

Mostramos en seguida un ejemplo de la manera en que se utiliza lo anterior en la resolución de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.1 Queremos encontrar la solución de la ecuación

$$y'(t) + y(t) = t^2. \tag{1.4}$$

Utilizando el símbolo D_t, la ecuación (1.4) se reescribe como

$$(1 + D_t)y(t) = t^2, \tag{1.5}$$

y entonces formalmente se obtiene que

$$y(t) = \frac{1}{(1 + D_t)} t^2. \tag{1.6}$$

Aquí aparece el problema de darle significado al operador $1/(1+D_t)$ de manera que podamos calcular su acción sobre una función de t. Por ejemplo, usando la serie geométrica obtenemos formalmente que

$$\frac{1}{(1+D_t)} = 1 - D_t + D_t^2 - D_t^3 + \cdots , \tag{1.7}$$

y aplicando el lado derecho a t^2 obtenemos

$$y(t) = t^2 - 2t + 2, \tag{1.8}$$

la cual es solución de (1.4) y satisface $y(0) = 2$. Otra posible interpretación formal es

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+D_t)} &= \frac{1}{D_t}\frac{1}{(1+D_t^{-1})} \\ &= \frac{1}{D_t}\left(1 - \frac{1}{D_t} + \frac{1}{D_t^2} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{D_t} - \frac{1}{D_t^2} + \frac{1}{D_t^3} - \cdots \end{aligned} \tag{1.9}$$

Utilizando (1.3) varias veces vemos que la acción de D_t^{-k}, con $k > 0$, sobre una función dada consiste en integrar k veces la función en el intervalo de 0 a t. Así obtenemos de (1.6) que

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{3\cdot 4} + \frac{t^5}{3\cdot 4\cdot 5} - \cdots \\ &= -2\left[\frac{t^0}{0!} - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right] + t^2 - 2t + 2 \\ &= -2e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

la cual es solución de (1.4) con $y(0) = 0$. Entonces vemos que al usar diferentes interpretaciones del operador $(1+D_t)^{-1}$ obtenemos distintas soluciones de la ecuación diferencial.

Los problemas empiezan cuando queremos dar alguna interpretación a operadores como $D^{1/2}$. Heaviside dio una regla de translación para tales situaciones mediante el teorema de expansión. El problema es que algunas veces aparecen resultados equivocados, debido a que en el teorema faltan condiciones de validez.

Hubo varios intentos de justificar el método operacional de Heaviside. A principios del siglo veinte algunos matemáticos tales como Wagner (1916), Bromwich (1916), Carson (1922), y Doetsch intentaron dar justificaciones rigurosas utilizando ideas relacionadas con la transformada de Laplace, definida para funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ por

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \tag{1.10}$$

en todos aquellos puntos $p \in \mathbb{C}$ donde la integral exista. Integrando por partes uno obtiene

$$\mathcal{L}[f'](p) = pF(p) - f(0). \tag{1.11}$$

Así el misterio de aplicar el operador D era reemplazado por la multiplicación de la imagen F por la variable compleja p. Una desventaja de este método es que su justificación requiere de herramientas tanto de álgebra como de análisis. Otra desventaja es que por las condiciones necesarias para la existencia de la integral (1.10), transformadas como $\mathcal{L}[e^{t^2}]$ no existen. Sin embargo, por la fuerza de la tradición, este método sigue siendo utilizado en áreas como la física y la ingeniería, y frecuentemente se considera que es el único método práctico para resolver ecuaciones diferenciales.

Un cambio radical se dio en 1950 con el método algebraico de Mikusiński [9]. Su teoría no está limitada por restricciones de convergencia de integrales. La idea de la construcción es semejante al resultado de que cualquier anillo conmutativo sin divisores de cero puede ser extendido al campo de cocientes. Esto es similar a pasar del anillo $\mathbb{Z}$ al campo cociente $\mathbb{Q}$. Otros enfoques para la construcción del cálculo operacional y modelos generales han sido propuestos por Berg [1], Dimovski [3], Fuhrmann [5], Mieloszyk [8], Péraire [10] y Rubel [13].

1.2 Transformada de Laplace

No entraremos en mucho detalle explicando la transformada de Laplace (TL). Mostraremos un ejemplo en el que explicaremos el funcionamiento de la transformada, la cual se define para funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ por

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \tag{1.12}$$

en todos aquellos puntos $p \in \mathbb{C}$ donde la integral exista. Diversas condiciones suficientes para la convergencia de la integral se presentan en [6]. Aquí solo hablaremos de funciones cuya transformada de Laplace converja uniformemente. Hay muchas propiedades asociadas a la transformada de Laplace, pero nosotros solo enunciaremos las mas utilizadas.

1. La transformada de Laplace es lineal, esto es, para $\alpha \in \mathbb{C}$
$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)].$$
2. Sea $t \geq 0$. Entonces tenemos que
$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = e^{-t_0 p} F(p). \tag{1.13}$$
3. Sea $c > 0$. Entonces es cierto que
$$\mathcal{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right). \tag{1.14}$$
4. Sea $\mu \in \mathbb{C}$. Entonces
$$\mathcal{L}[e^{-\mu t} f(t)](p) = F(p+\mu). \tag{1.15}$$
5. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces tenemos
$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p) = D_p^n F(p). \tag{1.16}$$
6. Sea $f(t)/t$ una función con TL convergente. Entonces
$$\mathcal{L}[t^{-1} f(t)](p) = \int_p^\infty F(u)du. \tag{1.17}$$
7. Si f tiene TL convergente, entonces
$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty f(x)dx\right] = p^{-1}F(p). \tag{1.18}$$
8. Si f es diferenciable en $[0, \infty]$, entonces
$$\mathcal{L}[D_t f(t)](p) = pF(p) - F(0). \tag{1.19}$$

Uno de los inconvenientes de la TL es que no se lleva bien con la multiplicación usual entre funciones. La TL se lleva bien con la operación de convolución, denotada por "$*$", y definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(x)g(t-x)dx. \tag{1.20}$$

El significado de "se lleva bien" es que

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](p) = F(p)G(p), \tag{1.21}$$

donde $\mathcal{L}[f(t)](p) = F(p)$ y $\mathcal{L}[g(t)](p) = G(p)$. Otro inconveniente es que al querer resolver ecuaciones diferenciales primero transformamos nuestra ecuación en un problema algebraico, lo resolvemos y por último debemos encontrar la transformada inversa de nuestro resultado.

Ejemplo 1.2 Resolveremos la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Lo primero que debemos hacer es transformar toda la ecuación usando la TL.

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(4y') + \mathcal{L}(6y) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(e^{-t}).$$

Utilizando las propiedades de la TL y resolviendo algunas integrales, obtenemos:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

Simplificando y despejando a $Y(s)$ se tiene

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}.$$

Utilizando la descomposición en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{s/2 + 5/3}{s^2+4s+6}.$$

Hasta aquí hemos resuelto el problema en el espacio alterno. Ahora debemos regresar a nuestro espacio original por medio de la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de $\mathcal{L}$. Entonces

$$y(t) = \tfrac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s}\right) + \tfrac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+1}\right) - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{s+2}{(s+2)^2+2}\right) - \tfrac{2}{3\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right).$$

Utilizando tablas que existen en todos los libros de ecuaciones diferenciales concluimos que:

$$y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right).$$

Este ejercicio fue tomado de [20], donde se utilizan aproximadamente 11 páginas de explicación previa a resolverlo.

1.3 Transformada de Mellin

Igual que en la sección previa, solo daremos algunas propiedades básicas de dicha transformada y mostraremos un ejemplo. La transformada de Mellin (TM) está muy conectada con las transformadas de Fourier y de Laplace. La TM de una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ es definida por

$$F^*(s) = \mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)dx, \tag{1.22}$$

en todos aquellos puntos $s \in \mathbb{C}$ donde la integral exista. Aquí solo hablaremos de funciones cuya transformada exista. Para mayores detalles sobre las condiciones de existencia ver [6]. Al igual que la TL, la TM es lineal. A continuación mostramos las propiedades mas importantes de la transformada de Mellin en algún subconjunto especial de $\mathbb{C}$, para mas detalle ver [6], estas son:

$$\mathcal{M}[x^\alpha f(x)](s) = F^*(s + s_0), \tag{1.23}$$

$$\mathcal{M}[f(x^\alpha)](s) = |\alpha|^{-1}F^*(s/\alpha), \tag{1.24}$$

$$\mathcal{M}[f(\beta x)](s) = \beta^{-s}F^*(s), \tag{1.25}$$

$$\mathcal{M}[\log^k x f(x)](s) = D_s^k F^*(s), \tag{1.26}$$

$$\mathcal{M}[(-xD)^n f(x)] = s^n F^*(s), \tag{1.27}$$

$$\mathcal{M}[e^{-\alpha x}](s) = \alpha^{-s}\Gamma(s), \tag{1.28}$$

donde $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ es la función Gamma. Esta transformada se lleva bien con la operación de convolución

$$(f \vee g)(x) = \int_0^\infty f(t)g(x/t)t^{-1}dt. \tag{1.29}$$

Esto es

$$\mathcal{M}\left[f \vee g\right] = F^*G^*. \tag{1.30}$$

De igual forma que en la TL esto es una desventaja, ya que estas operaciones llamadas convoluciones están definidas por integrales y siempre se deberá tener cuidado que la integral sea finita. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.3 Resolveremos la ecuación diferencial de orden dos

$$x^2D_x^2y(x) + 3xD_xy(x) + 2y(x) = e^{-x}. \tag{1.31}$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma

$$P[xD]y(x) = f(x), \tag{1.32}$$

donde $P(x) = x^2 + 3x + 2$. Ya que la TM es lineal y por la propiedad (1.27) tenemos

$$P(-s)Y^*(s) = F^*(s). \tag{1.33}$$

Por la definición tenemos

$$F^*(s) = \Gamma(s), \tag{1.34}$$

donde $\Gamma(s)$ es la función Gamma. Así

$$(s^2 - 3s + 2)Y^*(s) = \Gamma(s). \tag{1.35}$$

Despejando a $Y^*(s)$ obtenemos

$$Y^*(s) = \frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)} = \Gamma(s-2), \tag{1.36}$$

la segunda igualdad se debe a que $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. Por (1.23) y (1.28) con $\alpha = 1$ obtenemos

$$y(s) = x^{-2}e^{-x}. \tag{1.37}$$

Este ejercicio fue tomado de [6], donde se utilizan aproximadamente 11 páginas de explicación previa a resolverlo.

1.4 Fundamentos algebraicos lineales del cálculo operacional

Actualmente existen tres tipos principales de métodos para resolver ecuaciones funcionales lineales: los que están basados en transformaciones que involucran integrales, tales como las transformadas de Laplace y Mellin, los métodos del cálculo operacional, los cuales están basados en el cálculo de Mikusiński y sus generalizaciones, y el más reciente, que usa algoritmos computacionales simbólicos basados en la teoría de Galois diferencial.

Los métodos basados en transformaciones integrales y el cálculo operacional usualmente requieren una extensa maquinaria analítica y la construcción de una teoría especialmente adaptada a cada familia restringida de operadores lineales. Nuestro objetivo principal es introducir un espacio algebraico lineal en el cual podamos resolver varias ecuaciones funcionales lineales usando solamente ideas básicas de álgebra lineal.

En el capítulo 2 presentamos un cálculo operacional para el operador retrasador modificado en un espacio abstracto de series formales de Laurent y demostramos que éste es un modelo que generaliza a la mayoría de los cálculos operacionales para operadores lineales en espacios de funciones de una variable.

A continuación presentamos una breve descripción de nuestra construcción. Sea $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ un grupo (cíclico) bajo la operación $p_k p_m = p_{k+m}$, y sea $\mathcal{F}$ el álgebra de series formales de Laurent generada por los elementos p_k sobre los números complejos. Los elementos de $\mathcal{F}$ son de la forma $\sum a_k p_k$, donde los coeficientes a_k son números complejos y solamente un número finito de ellos con $k < 0$ son diferentes de cero. El retrasador en $\mathcal{F}$ es el operador S^{-1} que corresponde a la multiplicación por p_{-1}. El retrasador modificado L está definido por $Lp_k = p_{k-1}$ si $k \neq 0$, y $Lp_0 = 0$. Note que L casi coincide con S^{-1}, pero L no es invertible. Estudiaremos el retrasador modificado L y operadores de la forma $w(L)$, donde w es un polinomio, y encontraremos soluciones a la ecuación $w(L)f = g$, donde g es un elemento dado de $\mathcal{F}$ y f es desconocido. Encontraremos una base del kernel de $w(L)$ y un elemento d_w en $\mathcal{F}$ que satisface $w(L)d_w = p_0$ y entonces $w(L)d_w g = g$, para toda g en la imagen de $w(L)$. Esto significa que $d_w g$ es una solución particular de $w(L)f = g$.

En el capítulo 3 presentamos distintas realizaciones concretas y mostramos que el cálculo operacional para L es un modelo general en el siguiente sentido. Cada significado concreto dado a los generadores p_k conlleva a una realización concreta de $\mathcal{F}$ en la cual L se convierte en un operador que puede ser, por ejemplo, un operador diferencial o en diferencias. Si definimos $p_k = t^k/k!$, donde t es una variable compleja y extendemos la definición de $k!$ para $k < 0$ por medio de

$$k! = \frac{(-1)^{-k-1}}{(-k-1)!}, \tag{1.38}$$

entonces L se convierte en diferenciación con respecto a t, y el cálculo operacional en $\mathcal{F}$ puede ser usado directamente para resolver ecuaciones $w(D)f = g$, donde g es una serie formal de Laurent en t. Note que la multiplicación de los generadores p_k induce una multiplicación en las funciones de t definida por $(t^k/k!)*(t^m/m!) = t^{k+m}/(k+m)!$, la cual es diferente a la multiplicación de funciones de t.

En cualquier realización concreta, una vez que tengamos al elemento dado g expresado como un elemento de $\mathcal{F}$, podemos resolver una ecuación $w(L)f = g$ en el espacio abstracto $\mathcal{F}$, y solamente al final traducir la solución en términos del significado concreto de los p_k. Esto se detalla en el capítulo 3.

Presentamos ejemplos de realizaciones concretas donde el operador L se convierte en: el operador en diferencias Δ que actúa sobre sucesiones, el operador diferencial $a(t)D + b(t)$, y el operador diferencial fraccionario D^α, donde α es un número real o complejo.

La elección natural de $p_k = z^k$, donde z es un variable compleja, produce una realización concreta isomorfa al espacio de las series formales de Laurent sobre los números complejos, el cual es un campo que contiene al campo de funciones racionales. Entonces, todas las realizaciones concretas de $\mathcal{F}$ son campos que contienen un subcampo isomorfo a las funciones racionales. Los isomorfismos de las diferentes realizaciones concretas hacia el campo de series formales de Laurent sobre los números complejos pueden ser considerados como una versión algebraica de las transformadas integrales.

Varios enfoques en la construcción del cálculo operacional y modelos generales han sido propuestos por Berg [1], Dimovski [3], Fuhrmann [5], Mieloszyk [8], Péraire [10] y Rubel [13]. Nuestro enfoque usa una idea similar al modelo del adelantador para operadores introducido por Rota [12] y generaliza el trabajo en [17]. Unos de los libros mas recientes sobre cálculo operacional es el de Glaeske y coautores [6].

Al final del capítulo 3 damos algunos resultados adicionales y comentarios finales.

Capítulo 2

Fundamentos algebraicos lineales del cálculo operacional

Este capitulo está dividido en dos secciones, en la primera desarrollamos la teoría y en la segunda encontramos un método para resolver la ecuación lineal $w(L)f = g$, donde w es un polinomio, L es un operador lineal, g es una función dada y f es una función desconocida.

2.1 Series formales de Laurent

Sea $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ un grupo con multiplicación definida por $p_k p_n = p_{k+n}$ para $k, n \in \mathbb{Z}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las series formales de la forma

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p_k,$$

donde a_k es un número complejo para cada $k \in \mathbb{Z}$ y alguna de la siguientes condiciones son ciertas, todas las a_k son iguales a cero o existe un entero $v(a)$ tal que $a_k = 0$ siempre que $k < v(a)$ y $a_{v(a)} \neq 0$. En el primer caso escribimos $a = 0$ y definimos $v(0) = \infty$. La suma y la multiplicación por escalares en $\mathcal{F}$ son las usuales para las series formales.

Definamos una multiplicación en $\mathcal{F}$ extendiendo la multiplicación del grupo $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ como sigue. Si $a = \sum a_k p_k$ y $b = \sum b_k p_k$ son elementos de $\mathcal{F}$, entonces $ab = \sum c_n p_n$, donde

$$c_n = \sum_{v(a) \leq k \leq n - v(b)} a_k b_{n-k}. \tag{2.1}$$

Notemos que $v(ab) = v(a) + v(b)$ y p_{-n} es el inverso multiplicativo de p_n para $n \in \mathbb{Z}$. Esta multiplicación en $\mathcal{F}$ es asociativa y conmutativa y p_0 es el elemento unidad. Decimos que los elementos p_n son los generadores de $\mathcal{F}$. Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{F}_n = \{a \in \mathcal{F} : v(a) \geq n\}$. Note que $\mathcal{F}_0$ es un subanillo de $\mathcal{F}$.

Sea x un número complejo. Usando la definición de la multiplicación en $\mathcal{F}$ es fácil verificar que

$$(p_0 - x p_1) \sum_{k \geq 0} x^k p_k = p_0.$$

Denotamos la serie $\sum_{k \geq 0} x^k p_k$ por $e_{x,0}$ y llamamos a ésta la *serie geométrica* asociada a x. De esto deducimos que $e_{x,0}$ es el inverso multiplicativo de $(p_0 - x p_1)$. Generalizando la construcción de las series geométricas obtendremos inversos multiplicativos de los elementos no cero de $\mathcal{F}$.

Sea h un elemento distinto de cero en $\mathcal{F}_1$. Entonces $v(h) \geq 1$ y $v(h^n) = n v(h) \geq n$, para $n \geq 1$, y tenemos

$$h^n = \sum_{k \geq n} (h^n)_k p_k.$$

Por lo tanto

$$p_0 + \sum_{n \geq 1} h^n = p_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} (h^n)_k \, p_k = p_0 + \sum_{k \geq 1} \sum_{1 \leq n \leq k} (h^n)_k \, p_k$$

es un elemento bien definido de $\mathcal{F}$. Un cálculo simple demuestra que tal elemento es el inverso multiplicativo de $p_0 - h$. Esto significa que cualquier serie $a \in \mathcal{F}_0$ con $v(a) = 0$ es invertible. Esto se debe a que a debe tener la forma $a_0(p_0 - h)$, donde $h \in \mathcal{F}_1$ y $a_0 \neq 0$.

Sea b un elemento distinto de cero en $\mathcal{F}$. Entonces

$$b = \sum_{k \geq v(b)} b_k\, p_k = p_{v(b)} \sum_{k \geq v(b)} b_k\, p_{k-v(b)} = p_{v(b)} \sum_{j \geq 0} b_{j+v(b)}\, p_j.$$

Dado que $b_{v(b)} \neq 0$, la última suma es de la forma $b_{v(b)}(p_0 - h)$, con $h \in \mathcal{F}_1$, y ésta es invertible por resultados anteriores. Por lo tanto b es invertible y hemos probado que $\mathcal{F}$ es un campo.

A cada serie b distinta de cero le corresponde el mapeo multiplicación que envía a a ab. Este mapeo es claramente lineal e invertible. El mapeo multiplicación que le corresponde al elemento p_1 es llamado el adelantador y es denotado por S. Su inverso S^{-1} es llamado el atrasador. Note que $\{S^k : k \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo isomorfo a $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Denotamos por P_n la proyección en $\langle p_n \rangle$, el subespacio generado por p_n. Si $a \in \mathcal{F}$ entonces $P_n a = a_n p_n$. Es fácil ver que

$$S^k P_n S^{-k} = P_{n+k}, \qquad k, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Definimos un operador lineal L en $\mathcal{F}$ como sigue. $Lp_k = S^{-1} p_k = p_{k-1}$ para $k \neq 0$, y $Lp_0 = 0$. Entonces, para a en $\mathcal{F}$ tenemos

$$La = L \sum_{k \geq v(a)} a_k p_k = S^{-1}(a - a_0 p_0) = S^{-1}(I - P_0)a, \tag{2.3}$$

donde I es el operador identidad y P_0 es la proyección en el subespacio $\langle p_0 \rangle$. Llamamos a L el *atrasador modificado*. L no es invertible ya que su kernel es el subespacio $\langle p_0 \rangle$.

Sea $\mathcal{F}_-$ el conjunto de todas las a en $\mathcal{F}$ tal que $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \oplus \mathcal{F}_0$. A partir de la definición de L se observa que los subespacios $\mathcal{F}_-$ y $\mathcal{F}_0$ son invariantes bajo L. Notemos que la restricción de L a $\mathcal{F}_-$ coincide con la restricción de S^{-1} a $\mathcal{F}_-$. Es claro que la imagen de L es el conjunto de todas la series a in $\mathcal{F}$ tal que $a_{-1} = 0$, las cuales están en el kernel de la proyección P_{-1}.

De (2.3) obtenemos $L = S^{-1}(I - P_0)$. Entonces, usando (2.2) se obtiene

$$LS = S^{-1}(I - P_0)S = I - S^{-1} P_0 S = I - P_{-1},$$

y por inducción obtenemos inmediatamente

$$L^k S^k = I - (P_{-1} + P_{-2} + \cdots + P_{-k}), \qquad k \geq 1. \tag{2.4}$$

Usando de nuevo (2.2) obtenemos

$$L^k = S^{-k}(I - S^k \sum_{j=1}^{k} P_{-j} S^{-k}) = S^{-k}(I - \sum_{j=1}^{k} P_{k-j}) = S^{-k}(I - \sum_{j=0}^{k-1} P_j), \qquad k \geq 1. \tag{2.5}$$

De esta identidad observamos que el kernel de L^k es igual a la imagen de $P_0 + P_1 + \cdots + P_{k-1}$, el cual es el subespacio $\langle p_0, p_1, \ldots, p_{k-1} \rangle$, y la imagen de L^k es igual al kernel de $P_{-1} + P_{-2} + \cdots + P_{-k}$.

Sea g un elemento en la imagen de L^k. Por (2.4) tenemos $L^k S^k g = (I - (P_{-1} + P_{-2} + \cdots + P_{-k}))g = g$, ya que g está en la imagen de L^k, la cual es igual al kernel de $P_{-1} + P_{-2} + \cdots + P_{-k}$. Por lo tanto $S^k g$ es una solución particular de $L^k f = g$ y tenemos que

$$\{f \in \mathcal{F} : L^k f = g\} = \{p_k g + h : h \in \langle p_0, p_1, \ldots, p_{k-1} \rangle\}.$$

Ahora determinaremos cómo el operador L actúa con la multiplicación de $\mathcal{F}$. Sean a y b elementos de $\mathcal{F}$. Ya que $La = S^{-1}(a - P_0 a)$, tenemos que

$$\begin{aligned} bLa &= S^{-1}(ab - a_0 b) \\ &= S^{-1}(ab - P_0(ab) + P_0(ab) - a_0 b) \\ &= L(ab) - S^{-1}(a_0 b - P_0(ab)) \\ &= L(ab) - S^{-1}(a_0 b - a_0 b_0 p_0 + a_0 b_0 p_0 - P_0(ab)) \\ &= L(ab) - a_0 Lb + S^{-1}(P_0(ab) - a_0 b_0 p_0). \end{aligned}$$

Por lo que

$$L(ab) = bLa + a_0 Lb - S^{-1}(P_0(ab) - a_0 b_0 p_0). \tag{2.6}$$

Note que

$$S^{-1}(P_0(ab) - a_0 b_0 p_0) = p_{-1} \sum_{k \neq 0} a_k b_{-k}.$$

De (2.6) y el hecho de que $L(ab) = L(ba)$ obtenemos

$$(a - a_0 p_0) Lb = (b - b_0 p_0) La.$$

Si $P_0(ab) = P_0(a)P_0(b)$, entonces (2.6) se convierte en $L(ab) = bLa + a_0Lb$. En particular, este es el caso cuando a y b están en $\mathcal{F}_0$. Si a lo anterior le agregamos que a esté en el kernel de P_0 entonces $L(ab) = (La)b$.

Ahora consideraremos algunos polinomios simples en L. Sea x un número complejo distinto de cero. Entonces

$$L - xI = S^{-1}(I - P_0) - xI = S^{-1}(I - xS - P_0). \tag{2.7}$$

Por lo que $a \in \mathcal{F}$ está en el kernel de $L - xI$ si y sólo si $(I - xS)a = P_0a = a_0p_0$. Entonces $(p_0 - xp_1)a = a_0p_0$, despejando a se tiene

$$a = a_0(p_0 - xp_1)^{-1} = a_0e_{x,0} = a_0 \sum_{k\geq 0} x^k p_k.$$

Por lo tanto el kernel de $L - xI$ es el subespacio generado por la serie geométrica $e_{x,0}$, el cual denotamos por $\langle e_{x,0}\rangle$.

A continuación encontraremos una caracterización de la imagen de $L-xI$. Sea $f \in \mathcal{F}$ y $g = (L - xI)f$. Entonces

$$g = S^{-1}((I - xS)f - P_0f) = p_{-1}((p_0 - xp_1)f - f_0p_0),$$

y así

$$p_1e_{x,0}g = f - f_0e_{x,0}.$$

Entonces $P_0(p_1e_{x,0}g) = 0$, ya que $P_0e_{x,0} = p_0$.

Denotemos el kernel de la proyección P_0 por $\mathcal{F}_{[0]}$. Hasta aquí hemos probado que la imagen de $L - xI$ está contenida en el conjunto $\{g \in \mathcal{F} : p_1e_{x,0}g \in \mathcal{F}_{[0]}\}$.

De (2.7) observamos que la restricción de $L - xI$ a $\mathcal{F}_{[0]}$ coincide con la restricción de $S^{-1}(I - xS)$ a $\mathcal{F}_{[0]}$. Sea $g \in \mathcal{F}$ tal que $p_1e_{x,0}g \in \mathcal{F}_{[0]}$. Entonces

$$(L - xI)(p_1e_{x,0}g) = S^{-1}(I - xS)(p_1e_{x,0}g) = g.$$

Por lo que g está en la imagen de $L - xI$ y así

$$\mathrm{Im}(L - xI) = \{g \in \mathcal{F} : p_1e_{x,0}g \in \mathcal{F}_{[0]}\}. \tag{2.8}$$

Si $g = \sum_{k \geq v(g)} g_k p_k$, donde $v(g) < 0$, entonces la condición $p_1 e_{x,0} g \in \mathcal{F}_{[0]}$ es equivalente a $P_{-1}(e_{x,0} g) = 0$, y esto es

$$g_{-1} + g_{-2}x + g_{-3}x^2 + \cdots + g_{v(g)} x^{-v(g)-1} = 0. \tag{2.9}$$

Note que el subespacio $\mathcal{F}_0$ está contenido en la imagen de $L - xI$.

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea x un número complejo distinto de cero. Entonces si g está en la imagen de $L - xI$ se tiene que $(L - xI)(p_1 e_{x,0} g) = g$ y por lo tanto*

$$\{f \in \mathcal{F} : (L - xI)f = g\} = \{p_1 e_{x,0} g + \alpha e_{x,0} : \alpha \in \mathbb{C}\}. \tag{2.10}$$

Sea x un número complejo no cero y sea f un elemento de $\mathrm{Ker}((L - xI)^2)$. Entonces $(L - xI)f$ está en el kernel de $L - xI$ y por lo tanto $(L - xI)f = \alpha e_{x,0}$ para algún número complejo α. Esto significa que $p_{-1}((p_0 - xp_1)f - f_0 p_0) = \alpha e_{x,0}$. Resolviendo para f obtenemos $f = \alpha p_1 (e_{x,0})^2 + f_0 e_{x,0}$. Entonces f está en el subespacio $\langle e_{x,0}, p_1(e_{x,0})^2 \rangle$. Procediendo inductivamente es fácil demostrar que

$$\mathrm{Ker}((L - xI)^{m+1}) = \langle e_{x,0}, p_1(e_{x,0})^2, p_2(e_{x,0})^3, \ldots, p_m(e_{x,0})^{m+1} \rangle, \qquad m \geq 0. \tag{2.11}$$

Para $k \geq 0$ definimos $e_{x,k} = p_k (e_{x,0})^{k+1}$. Usando inducción sobre k y la recurrencia básica de los coeficientes binomiales es sencillo obtener

$$e_{x,k} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} p_n, \qquad k \geq 0. \tag{2.12}$$

Note que $v(e_{x,k}) = k$ y así $e_{x,k} \in \mathcal{F}_k$. Note también que $e_{0,k} = p_k$ para $k \geq 0$.

Usando la notación introducida anteriormente, (2.11) se reescribe quedando de la siguiente manera

$$\mathrm{Ker}((L - xI)^{m+1}) = \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m} \rangle, \qquad m \geq 0.$$

Un cálculo simple produce

$$(L - xI)e_{x,k} = \begin{cases} 0, & \text{if } k = 0, \\ e_{x,k-1}, & \text{if } k \geq 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Para $k \geq 0$ definamos $\mathcal{F}_{[0,k]} = \mathrm{Ker}(P_0 + P_1 + \cdots + P_k)$. Si $k = 0$ escribimos $\mathcal{F}_{[0]}$ en lugar de $\mathcal{F}_{[0,0]}$.

Lema 2.1 *Sean $m \geq 0$ y x un número complejo distinto de cero. Entonces*

$$(L - xI)^{m+1} = S^{-m-1}\left((I - xS)^{m+1}\left(I - \sum_{j=0}^{m} P_j\right) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}P_j\right),$$

y de esto se sigue que, para cada f en el subespacio $\mathcal{F}_{[0,m]}$ se cumple que

$$(L - xI)^{m+1}f = S^{-m-1}(I - xS)^{m+1}f = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1}f.$$

Prueba. Usando la fórmula binomial y (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned}(L - xI)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}L^k \\ &= (-xI)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}S^{-k}\left(I - \sum_{j=0}^{k-1}P_j\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}S^{m+1}(L - xI)^{m+1} &= (-xS)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\left(I - \sum_{j=0}^{k-1}P_j\right) \\ &= (I - xS)^{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\sum_{j=0}^{k-1}P_j \\ &= (I - xS)^{m+1} - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=j+1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}P_j \\ &= (I - xS)^{m+1} - \sum_{j=0}^{m}\left((I - xS)^{m+1} - \sum_{k=0}^{j}\tbinom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\right)P_j.\end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{F}_{[0,m]}$, entonces $P_j f = 0$ para $0 \leq j \leq m$, se sigue que $(L - xI)^{m+1}f = S^{-m-1}(I - xS)^{m+1}f$. ∎

Teorema 2.2 *Sean $m \geq 0$ y x un número complejo distinto de cero. Entonces una serie $g \in \mathcal{F}$ está en la imagen del operador $(L - xI)^{m+1}$ si y sólo si $p_1 e_{x,m} g \in \mathcal{F}_{[0,m]}$. Mas aún, para cualquier g en la imagen de $(L-xI)^{m+1}$ se tiene $(L-xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} g) = g$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sea $g = (L - xI)^{m+1} f$ para algún elemento $f \in \mathcal{F}$. Por el Lema 2.1 tenemos

$$g = p_{-m-1}\left((p_0 - xp_1)^{m+1}\left(f - \sum_{j=0}^{m} f_j p_j\right) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k} p_{m+1-k} f_j p_j\right).$$

Entonces

$$p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1} g = f - \sum_{j=0}^{m} f_j p_j + (e_{x,0})^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k} p_{m+1-k} f_j p_j. \tag{2.14}$$

Note que el último sumando está en $\mathcal{F}_{m+1}$. De esto se sigue que $p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1} g = p_1 e_{x,m} g$ es un elemento de $\mathcal{F}_{[0,m]}$.

$\Leftarrow$) Sea $g \in \mathcal{F}$ de tal forma que $p_1 e_{x,m} g$ esté en $\mathcal{F}_{[0,m]}$. Por el Lema 2.1 tenemos

$$(L - xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} g) = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1} p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1} g = g, \tag{2.15}$$

y con esto demostramos que g está en la imagen de $(L - xI)^{m+1}$. ∎

Teorema 2.3 *Sean $m \geq 0$ y x un número complejo distinto de cero. Sea g un elemento en la imagen de $(L - xI)^{m+1}$. Entonces se tiene que*

$$\{f \in \mathcal{F} : (L - xI)^{m+1} f = g\} = \{p_1 e_{x,m} g + h : h \in \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle\}.$$

Prueba. De (2.15) tenemos que $p_1 e_{x,m} g$ es una solución particular de la ecuación $(L - xI)^{m+1} f = g$. Por lo tanto, cualquier solución es de la forma $p_1 e_{x,m} g + h$, donde h está en el kernel de $(L - xI)^{m+1}$, el cual es igual a $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle$, como ya hemos probado anteriormente. ∎

2.2 La ecuación lineal $w(L)f = g$

En esta sección consideraremos ecuaciones de la forma $w(L)f = g$, donde w es un polinomio, g es un elemento dado en la imagen de $w(L)$, y f es un elemento desconocido de $\mathcal{F}$. El caso cuando $w(L) = (L - xI)^{m+1}$ fue estudiado en la sección anterior, donde encontramos que las series $e_{x,k}$ juegan un papel central en la descripción del kernel y la imagen del operador $w(L)$. A continuación obtendremos algunas propiedades básicas de las series $e_{x,k}$ que serán utilizadas en el estudio de la ecuación $w(L)f = g$.

Recordemos que $e_{x,0} = \sum_{n\geq 0} x^n p_n$ es el recíproco de $p_0 - xp_1$ y

$$e_{x,k} = \frac{p_k}{(p_0 - xp_1)^{k+1}} = p_k(e_{x,0})^{k+1} = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} p_n, \qquad k \geq 0.$$

Denotamos por D_x la diferenciación con respecto de x. Ya que $(D_x^k/k!)x^n = \binom{n}{k}x^{n-k}$, es claro que

$$\frac{D_x^k}{k!} e_{x,0} = e_{x,k}, \qquad k \geq 0. \tag{2.16}$$

Debido a que $e_{x,0} = p_0/(p_0 - xp_1)$, para $x \neq y$ tenemos que

$$e_{x,0} - e_{y,0} = \frac{p_0}{p_0 - xp_1} - \frac{p_0}{p_0 - yp_1} = \frac{(x-y)p_1}{(p_0 - xp_1)(p_0 - yp_1)},$$

y así

$$p_1 e_{x,0} e_{y,0} = \frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y}, \qquad x \neq y. \tag{2.17}$$

Note que $p_1 e_{x,0} e_{x,0} = e_{x,1}$. Si $x \neq y$, m y n son enteros no negativos, usando (2.16) obtenemos

$$p_1 e_{x,m} e_{y,n} = p_1 \frac{D_x^m}{m!} e_{x,0} \frac{D_y^n}{n!} e_{y,0} = \frac{D_x^m}{m!} \frac{D_y^n}{n!} \left(\frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y} \right).$$

Usando la regla de Leibniz para la diferenciación con respecto de los parámetros x y y llegamos a

$$p_1 e_{x,m} e_{y,n} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\binom{n+i}{i}(-1)^i e_{x,m-i}}{(x-y)^{1+n+i}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{m+j}{j}(-1)^j e_{y,n-j}}{(y-x)^{1+m+j}}. \tag{2.18}$$

Note que $p_1 e_{x,m} e_{y,n}$ es un elemento del subespacio generado por $\{e_{x,i} : 0 \leq i \leq m\} \cup \{e_{y,j} : 0 \leq j \leq n\}$. Sea $x \in \mathbb{C}$ y $m \geq 0$. Dado que $v(e_{x,i}) = i$ para $i \geq 0$, es claro que $\{e_{x,i} : 0 \leq i \leq m\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{F}$.

Teorema 2.4 *Sean x, y números complejos distintos y m, n enteros no negativos. Entonces el conjunto $\{e_{x,i} : 0 \leq i \leq m\} \cup \{e_{y,j} : 0 \leq j \leq n\}$ es linealmente independiente.*

Prueba. Supongamos que $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{x,i} + \sum_{j=0}^{n} \beta_j e_{y,j} = 0$. Aplicando el operador $(L - yI)^{n+1}$ a la combinación lineal, y usando (2.13), obtenemos que

$$(L - yI)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{x,i} = 0.$$

Escribiendo $L - yI = (L - xI) + (x - y)I$ tenemos que

$$(L - yI)^{n+1} e_{x,i} = \sum_{j=0}^{r} \binom{n+1}{j} (x - y)^{n+1-j} e_{x,i-j}, \qquad 0 \leq i \leq m, \tag{2.19}$$

donde $r = \text{mín}\{i, n+1\}$. Entonces $(L - yI)^{n+1}$ mapea $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle$ dentro de él mismo y la matriz de representación es triangular superior, con sus entradas en la diagonal iguales a $(x - y)^{n+1}$. Esto significa que la restricción de $(L - yI)^{n+1}$ a $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle$ es un isomorfismo, y entonces todas las α_i deben de ser cero, y así $\{e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\}$ es linealmente independiente. Ahora, por la independencia lineal de las $\{e_{y,0}, e_{y,1}, \ldots, e_{y,n}\}$ concluimos que todas las β_i son cero, y con esto completamos la prueba. ∎

La idea usada en la prueba del teorema anterior puede ser fácilmente extendida para probar el siguiente resultado.

Corolario 2.1 *El conjunto* $\{e_{x,k} \in \mathcal{F} : x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}\}$ *es linealmente independiente.*

Teorema 2.5 *Sean* x, y *números complejos distintos y* m, n *enteros no negativos. Entonces*

$$\text{Ker}((L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1}) = \text{Ker}((L - yI)^{n+1}) \oplus \text{Ker}((L - xI)^{m+1}). \tag{2.20}$$

Prueba. Ya que los operadores $(L - yI)^{n+1}$ y $(L - xI)^{m+1}$ conmutan, es claro que el conjunto del lado derecho de (2.20) está contenido en el conjunto del lado izquierdo. Sean f un elemento en $\text{Ker}((L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1})$ y $g = (L - xI)^{m+1} f$. Entonces g está en $\text{Ker}((L - yI)^{n+1})$ y también en la imagen de $(L - xI)^{m+1}$. Aplicando el Teorema 2.3 observamos que $f = p_1 e_{x,m} g + h$, donde $h \in \text{Ker}((L - xI)^{m+1})$. Pero g es una combinación lineal de los elementos $e_{y,k}$ para $0 \leq k \leq n$, y entonces, por (2.18) tenemos que $p_1 e_{x,m} g$ está en

$$\langle e_{y,0}, e_{y,1}, \ldots, e_{y,n}\rangle \oplus \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle = \text{Ker}((L - yI)^{n+1}) \oplus \text{Ker}((L - xI)^{m+1}),$$

y por lo tanto también lo está f. ∎

Teorema 2.6 *Sean* x, y *números complejos distintos y* m, n *números enteros no negativos. Entonces* g *está en la imagen* $(L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1}$ *si y sólo si*

$$p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g \in \mathcal{F}_{[0,n+m+1]}. \tag{2.21}$$

Mas aún, si g *satisface (2.21) entonces*

$$(L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g) = g. \tag{2.22}$$

Prueba. Sea $f \in \mathcal{F}$ y escribimos $f = f_- + f_+$, con $f_- \in \mathcal{F}_-$ y $f_+ \in \mathcal{F}_0$. Definamos $h = (L - xI)^{m+1} f$. Ya que $\mathcal{F}_-$ y $\mathcal{F}_0$ son invariantes bajo $L - xI$ tenemos que $h = h_- + h_+$ donde $h_- = (L - xI)^{m+1} f_- \in \mathcal{F}_-$ y $h_+ = (L - xI)^{m+1} f_+ \in \mathcal{F}_0$. Ya que $f_- \in \mathcal{F}_{[0,m]}$, por el Lema 2.1 tenemos que $h_- = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1} f_-$ y por lo tanto $p_1 e_{x,m} h_- = f_-$. Entonces $p_1 e_{x,m} h = f_- + p_1 e_{x,m} h_+$ y $p_1 e_{x,m} h_+$ está en $\mathcal{F}_{m+1}$ ya que $h_+ \in \mathcal{F}_0$.
Ahora, sea $g = (L - yI)^{n+1} h$. Por el mismo argumento utilizado anteriormente tenemos que

$$p_1 e_{y,n} g = p_1 e_{y,n} g_- + p_1 e_{y,n} g_+ = h_- + p_1 e_{y,n} g_+.$$

Entonces

$$p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g = p_1 e_{x,m} h_- + p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g_+ = f_- + p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g_+.$$

Dado que el último término está claramente en $\mathcal{F}_{m+n+2}$ se debe tener que

$$p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g \in \mathcal{F}_{[0,m+n+1]}.$$

Supongamos ahora que g es una serie que satisface (2.21). Ya que $\mathcal{F}_{[0,m]} \subset \mathcal{F}_{[0,m+n+1]}$, por el Teorema 2.2 tenemos que $(L - xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g) = p_1 e_{y,n} g$.
Note que

$$p_1 e_{y,n} g = (p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1})(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g),$$

y que el primer factor en el lado derecho tiene la forma $\sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j p_{-j}$. Ya que el segundo factor está en $\mathcal{F}_{[0,m+n+1]}$, el producto debe estar en $\mathcal{F}_{[0,n]}$, y por el Teorema 2.2 tenemos que

$$g = (L - yI)^{n+1}(p_1 e_{y,n} g) = (L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g).$$

Esto demuestra que (2.22) se cumple y también que g está en la imagen de $(L - yI)^{n+1}(L - xI)^{m+1}$. ■

Sea

$$w(t) = \prod_{j=0}^{r} (t - x_j)^{m_j+1}, \tag{2.23}$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_r$ son números complejos distintos, $m_0, m_1, \ldots, m_r$ son enteros no negativos, y escribimos $n + 1 = \sum_j (m_j + 1)$. Definamos

$$w(L) = (L - x_0 I)^{m_0+1}(L - x_1 I)^{m_1+1} \cdots (L - x_r I)^{m_r+1}. \tag{2.24}$$

Teorema 2.7 *Sea $w(L)$ como se definió en (2.24). Definimos*

$$d_w = p_{r+1} e_{x_0,m_0} e_{x_1,m_1} \cdots e_{x_r,m_r},$$

y

$$K_w = \langle e_{x_j,i} : 0 \leq j \leq r,\ 0 \leq i \leq m_j \rangle.$$

Entonces g está en la imagen de $w(L)$ si y sólo si

$$d_w g \in \mathcal{F}_{[0,n]}, \tag{2.25}$$

$K_w = \mathrm{Ker}(w(L))$ y para cualquier $g \in \mathrm{Im}(w(L))$ se tiene que $w(L)(d_w g) = g$, por lo tanto tenemos

$$\{f \in \mathcal{F} : w(L)f = g\} = \{d_w g + h : h \in K_w\}. \tag{2.26}$$

Prueba. Note que la prueba del Teorema 2.5 puede ser extendida sin ninguna dificultad al caso de operadores que son un producto finito de factores $(L - x_i I)^{m_i+1}$ y así tenemos que $K_w = \mathrm{Ker}(w(L))$. Note que la dimensión de $\mathrm{Ker}(w(L))$ es igual a $n + 1$.

Usando inducción sobre r y la idea usada en la prueba del Teorema 2.6 podemos demostrar que (2.25) es válida. Entonces, aplicando el Teorema 2.2 repetidamente obtenemos $w(L)(d_w g) = g$ para toda g en la imagen de $w(L)$. Esto significa que $d_w g$ es una solución particular de $w(L)f = g$ y por lo tanto se cumple (2.26). ∎

Note que $d_w \in \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_{[0,n]}$. Entonces $\mathcal{F}_0$ está contenido en la imagen de $w(L)$. En particular, $p_0 \in \mathrm{Im}(w(L))$ y por lo tanto $w(L)d_w = p_0$. Usando (2.18) repetidamente es fácil escribir d_w como el producto de p_1 por una combinación lineal de los $e_{x_j,i}$ y entonces $p_{-1} d_w \in K_w$.

Definamos el operador $M_w : \mathrm{Im}(w(L)) \to \mathcal{F}$ por $M_w g = d_w g$, para $g \in \mathrm{Im}(w(L))$. Del Teorema previo inmediato es claro que $w(L)M_w$ es el mapeo identidad en $\mathrm{Im}(w(L))$, esto es, M_w es la inversa derecha de $w(L)$.

Corolario 2.2 *Dados* $g \in \mathrm{Im}(w(L))$ *y números complejos* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *existe un único* $f \in \mathcal{F}$ *tal que* $w(L)f = g$ *y*

$$P_k f = \beta_k p_k, \qquad 0 \le k \le n. \tag{2.27}$$

Prueba. Por el Teorema 2.7 la solución particular $d_w g$ está en $\mathcal{F}_{[0,n]} = \mathrm{Ker}(P_0 + P_1 + \cdots + P_n)$. Entonces, a fin de encontrar una solución f que satisfaga (2.27) es suficiente encontrar una $h \in K_w$ tal que

$$P_k h = \beta_k p_k, \qquad 0 \le k \le n. \tag{2.28}$$

Es claro que h debe ser de la forma

$$h = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} e_{x_j,i},$$

donde los $\alpha_{j,i}$ son números complejos, y entonces

$$P_k h = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} P_k e_{x_j,i} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} \binom{k}{i} x_j^{k-i} p_k.$$

Por lo que (2.28) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} \binom{k}{i} x_j^{k-i}, \qquad 0 \le k \le n. \tag{2.29}$$

Para cada j tal que $0 \le j \le r$ sea B_j la matriz de tamaño $(n+1) \times (m_j + 1)$ cuya entrada en la posición (k, i) es $\binom{k}{i} x_j^{k-i}$, para $0 \le k \le n$ y $0 \le i \le m_j$.
Definamos la matriz por bloques $V_w = [B_0 \ B_1 \ \cdots B_r]$. Entonces (2.29) es equivalente a

$$(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)^{\mathsf{T}} = V_w(\alpha_{0,0}, \ldots, \alpha_{0,m_0}, \ldots, \alpha_{r,0}, \ldots, \alpha_{r,m_r})^{\mathsf{T}}. \tag{2.30}$$

La matriz V_w es la matriz de Vandermonde confluente asociada con las raíces del polinomio w. Es bien conocido que V_w es invertible. Ver [16]. Se sigue que (2.30) tiene una única solución y consecuentemente, hay una única $h \in K_w$ que satisface (2.28). Entonces $f = d_w g + h$ es la única solución que satisface (2.27). ■

Observemos que d_w es la única solución de $w(L)f = p_0$ con condiciones iniciales $P_k f = 0$ para $0 \le k \le n$. Llamamos a d_w la *solución fundamental* asociada con el operador $w(L)$.

Presentamos a continuación una construcción alterna para d_w en términos de los coeficientes de w. Escribimos

$$w(t) = t^{n+1} + b_1 t^n + b_2 t^{n-1} + \cdots + b_{n+1},$$

y definimos el polinomio invertido w^* por

$$w^*(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{n+1} t^{n+1}. \tag{2.31}$$

Sea $h(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots$ el reciproco de $w^*(t)$, esto es, $h(t)w^*(t) = 1$. Entonces tenemos

$$\sum_{j=0}^{m} b_j h_{m-j} = \delta_{m,0}, \qquad m \geq 0. \tag{2.32}$$

Ya que $b_0 = 1$, se tiene que $h_0 = 1$ y así podemos resolver para h_m en (2.32) para obtener la relación de recurrencia

$$h_m = -\sum_{j=1}^{m} b_j h_{m-j}, \qquad m \geq 1. \tag{2.33}$$

Definimos

$$f = \sum_{k \geq 0} h_k p_{k+n+1}. \tag{2.34}$$

Entonces

$$w(L)f = \sum_{k \geq 0} h_k \sum_{j=0}^{n+1} b_j p_{k+j} = \sum_{m \geq 0} \sum_{j \geq 0} h_{m-j} b_j p_m = p_0.$$

La última igualdad se sigue de (2.32). Por lo tanto f satisface $w(L)f = p_0$, y ya que $P_j f = 0$ para $0 \leq j \leq n$, concluimos que $f = d_w$, la solución fundamental asociada con el operador $w(L)$.

Usando la fórmula binomial es fácil obtener la siguiente expresión "explícita"

$$h_m = \sum \binom{|\mathbf{j}|}{j_1, j_2, \ldots, j_{n+1}} (-1)^{|\mathbf{j}|} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \cdots b_{n+1}^{j_{n+1}}, \tag{2.35}$$

donde la suma corre sobre los índices $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_{n+1})$ con coordenadas no negativas tales que $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \cdots + (n+1)j_{n+1} = m$. Note que $|\mathbf{j}|$ está definida por $|\mathbf{j}| = j_1 + j_2 + j_3 + \cdots + j_{n+1}$. Véase [18, eq. (2.7)].

En el siguiente capítulo presentaremos algunas realizaciones concretas del espacio $\mathcal{F}$ que se obtienen dando algún significado concreto a los generadores p_k.

Capítulo 3

Realizaciones concretas

Este capítulo trata de las diferentes realizaciones concretas del espacio $\mathcal{F}$. Cada realización concreta está determinada por la definición que adquieran los p_k. Como por ejemplo, para obtener la realización concreta de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes se define $p_k = t^k/k!$, donde t es una variable compleja y $k \in \mathbb{Z}$. Para obtener la realización concreta de las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables se define $p_k = (\log t)^k/k!$, donde t es una variable compleja y $k \in \mathbb{Z}$. Al final del capítulo presentamos algunos resultados adicionales y comentarios finales.

3.1 Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

La siguiente realización concreta de $\mathcal{F}$ nos da un método directo para la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes. Sea t una variable compleja y definimos $p_k = t^k/k!$ para $k \in \mathbb{Z}$, donde $k!$ está definido para k negativa por

$$k! = \frac{(-1)^{-k-1}}{(-k-1)!}, \qquad k < 0. \tag{3.1}$$

Con esta elección de los generadores p_k el retrasador modificado L se convierte en diferenciación con respecto a t, la cual denotamos por D_t. La serie geométrica $e_{x,0}$ se convierte en la función exponencial e^{xt} y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!}\mathrm{e}^{xt} = \sum_{j\geq m} \binom{j}{m} x^{j-m}\frac{t^j}{j!} = \frac{t^m}{m!}\mathrm{e}^{xt}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \geq 0. \tag{3.2}$$

Estas funciones generan el espacio vectorial $\mathcal{E}$ de casi-polinomios, o polinomios exponenciales.

Denotaremos con $*$ la multiplicación en esta realización concreta del campo $\mathcal{F}$. De esta forma evitamos confusiones con la multiplicación "natural"de series consideradas como funciones de t. Llamamos a $*$ el producto de *convolución.*

Entonces tenemos

$$\frac{t^n}{n!} * \frac{t^k}{k!} = \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}, \qquad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

De (2.17) obtenemos que

$$\mathrm{e}^{xt} * \mathrm{e}^{yt} = t^{-1} * \left(\frac{\mathrm{e}^{xt} - \mathrm{e}^{yt}}{x-y}\right), \qquad x \neq y. \tag{3.4}$$

A continuación presentamos un sencillo ejemplo que ilustra como el Teorema 2.7 puede ser usado para resolver ecuaciones diferenciales. Sea $w(z) = (z-x)(z-y) = z^2 + b_1 z + b_2$, donde x y y son números complejos distintos. Entonces $w(L) = w(D) = D^2 + b_1 D + b_2 I$, su kernel es $\langle e_{x,0}, e_{y,0}\rangle = \langle \mathrm{e}^{xt}, \mathrm{e}^{yt}\rangle$, y $d_w = p_2 e_{x,0} e_{y,0} = (t^2/2!) * \mathrm{e}^{xt} * \mathrm{e}^{yt}$. Sea

$$g = \frac{2!}{t^3} + b_1\frac{-1}{t^2} + b_2\frac{1}{t} + \mathrm{e}^{ut},$$

y supongamos que $u \neq x$ y $u \neq y$. Entonces

$$g = p_{-3} + b_1 p_{-2} + b_2 p_{-1} + e_{u,0} = p_{-3}(p_0 - x p_1)(p_0 - y p_1) + e_{u,0}.$$

Un cómputo simple nos da

$$d_w g = p_{-1} + p_2 e_{x,0} e_{y,0} e_{u,0} = t^{-1} + (t^2/2!) * \mathrm{e}^{xt} * \mathrm{e}^{yt} * \mathrm{e}^{ut}.$$

Ya que $d_w g$ está en $\mathcal{F}_{[0,1]}$ se tiene que g está en la imagen de $w(D)$, y por el Teorema 2.7 la solución general de $w(D)g = f$ es de la forma $d_w g + h$, donde $h \in K_w = \langle \mathrm{e}^{xt}, \mathrm{e}^{yt} \rangle$. Usando (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} p_2 e_{x,0} e_{y,0} e_{u,0} &= p_1 e_{u,0} \left(\frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y} \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{e_{u,0} - e_{x,0}}{u - x} - \frac{e_{u,0} - e_{y,0}}{u - y} \right) \\ &= \frac{e_{x,0}}{(x-y)(x-u)} + \frac{e_{y,0}}{(y-x)(y-u)} + \frac{e_{u,0}}{(u-x)(u-y)}. \end{aligned}$$

y así

$$d_w g = t^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{xt}}{(x-y)(x-u)} + \frac{\mathrm{e}^{yt}}{(y-x)(y-u)} + \frac{\mathrm{e}^{ut}}{(u-x)(u-y)}.$$

Note que no hay producto de convolución en el lado derecho de la igualdad.
En el caso en el que $u = x$ usaríamos $p_1 e_{x,0} e_{x,0} = e_{x,1}$, lo cual da $t * \mathrm{e}^{xt} * \mathrm{e}^{xt} = t\mathrm{e}^{xt}$.

Notemos que, una vez que escribimos a g como $g = p_{-3} + b_1 p_{-2} + b_2 p_{-1} + e_{u,0}$, podemos resolver la ecuación $w(L)f = g$ usando solo la notación asociada con $\mathcal{F}$, esto es, usando elementos tales como p_k y $e_{x,0}$, y la multiplicación en $\mathcal{F}$, y solo al final escribimos el resultado en términos de funciones de t.

Podemos encontrar una solución que satisface alguna condición inicial dada. Usando el Corolario 2.2 se encuentra un elemento de K_w con las condiciones iniciales dadas. Ésto es lo mismo que resolver el sistema (2.29), el cual depende solo de las raíces de w y la condición inicial dada, pero no de la naturaleza de los generadores p_k.

Si g es una función de t que pueda ser expresada como una serie de Laurent y w es un polinomio entonces podemos determinar si g está en $\mathrm{Im}(w(D))$ o no, y si está, entonces podemos resolver la ecuación $w(D)f = g$, con cualquier condición inicial dada.

3.2 Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

Sea t una variable compleja y consideremos el operador tD, donde D denota diferenciación con respecto a t. Sea $\log t$ la función logaritmo en la rama principal, con parte imaginaria en $[0, 2\pi)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$tD\frac{(\log t)^k}{k!} = \frac{(\log t)^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad k \neq 0, \tag{3.5}$$

y ésta es válida para todo entero diferente de cero si usamos la definición (3.1) para el factorial de enteros negativos. Entonces, tomando $p_k = (\log t)^k/k!$ el retrasador modificado de $\mathcal{F}$ se convierte en $L = tD$. La serie geométrica $e_{x,0}$ se convierte en $\mathrm{e}^{x\log t} = t^x$, y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!}t^x = \frac{(\log t)^m}{m!}\mathrm{e}^{x\log t}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \geq 0. \tag{3.6}$$

Estas funciones generan un espacio vectorial que denotamos por $\mathcal{M}$.

En este caso los operadores $w(L)$ son ciertos operadores diferenciales con coeficientes variables. Por ejemplo, la ecuación de Euler $(t^2D^2+4tD+2I)f = \mathrm{e}^{-t}$ puede ser escrita como $w(L)f = g$, donde $g = \mathrm{e}^{-t}$, $L = tD$, y $w(L) = (L+I)(L+2I)$. Entonces tenemos que $K_w = \langle e_{-1,0}, e_{-2,0}\rangle = \langle t^{-1}, t^{-2}\rangle$ y $d_w = p_2e_{-1,0}e_{-2,0} = p_1(e_{-1,0} - e_{-2,0})$. Ya que $t^k = e_{k,0}$, podemos escribir

$$g = \mathrm{e}^{-t} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}e_{k,0},$$

y entonces

$$d_wg = p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})g = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})e_{k,0} = t^{-2}\mathrm{e}^{-t}-t^{-2}+(\mathrm{e}^{-1}-1)t^{-1}.$$

Este ejemplo aparece en [6, p 64], donde es resuelto por el método de transformada de Mellin. En la introducción se habló de dicha resolución, en la cual se utiliza la función Gamma.

Podemos generalizar la construcción anterior como sigue. Consideremos el operador diferencial $\alpha(t)D + \beta(t)I$, donde α y β son funciones definidas en algún dominio abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, y tal que existen funciones u y v tal que $\alpha Du = \beta$ y $\alpha Dv = 1$ en el dominio $\mathcal{U}$.

Definamos

$$p_k = \mathrm{e}^{-u(t)}\frac{v^k(t)}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Es fácil verificar que el operador $\alpha(t)D + \beta(t)I$ es el retrasador modificado en esta realización concreta de $\mathcal{F}$. En este caso $e_{x,0} = \mathrm{e}^{xv(t)-u(t)}$ y

$$e_{x,m} = \frac{v^m(t)}{m!}\mathrm{e}^{xv(t)-u(t)}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \geq 0. \tag{3.8}$$

Esta construcción es bastante general y nos permite resolver un número grande de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Incluso cuando $\beta = 0$ los operadores $L = \alpha(t)D$, para una adecuada $\alpha(t)$, producen una gran familia de ecuaciones $w(L)f = g$ que son importantes en numerosas aplicaciones. Podemos resolver ecuaciones como las que siguen

$$y'' + (2\alpha + \beta)y' + \alpha t(\alpha t + \beta)y = 0,$$

$$ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3 y = 0,$$

$$y'' + \frac{t^2 - 1}{t}y' + t^2 y = t^2,$$

$$y'' + (\cos t)y - (1/4)(\sin t)(\sin t + 2)y = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k} y = 0.$$

3.3 Ecuaciones en diferencias

Consideremos ahora el caso discreto análogo a la construcción presentada en la sección 3.1, donde el retrasador modificado era diferenciación con respecto a la variable compleja t. Sea Δ el operador de diferencia hacia adelante que actúa en funciones de valores complejos en la variable entera k y es definida como $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Para $n \geq 0$ el coeficiente binomial $\binom{k}{n}$ es un polinomio en k de grado n. La relación de recurrencia básica para los coeficientes binomiales nos da

$$\Delta \binom{k}{n} = \binom{k}{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{3.9}$$

Notemos que $\Delta\binom{k}{0} = 0$. Definamos el coeficiente binomial para valores negativos de n por

$$\binom{k}{n} = \frac{(-1)^{-n-1}(-n-1)!}{(k+1)(k+2)\cdots(k-n)}, \qquad n < 0,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Notemos que éste es el polinomio recíproco de un polinomio en k de grado $-n$, que tiene sus raíces en $-1, -2, \ldots, n$. Usando la definición (3.10) es fácil verificar que

(3.9) es válido también para n negativa. Entonces, si los generadores de $\mathcal{F}$ están definidos por

$$p_n = \binom{k}{n}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

el operador diferencia Δ se convierte en el retrasador modificado L. El producto de convolución es

$$\binom{k}{n} * \binom{k}{m} = \binom{k}{n+m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Las series geométricas son las sucesiones

$$e_{x,0} = \sum_{n \geq 0} x^n \binom{k}{n} = (1+x)^k, \qquad x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}, \tag{3.13}$$

y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!} e_{x,0} = \binom{k}{m} (1+x)^{k-m}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.14}$$

Estas sucesiones generan al espacio vectorial $\mathcal{S}$ de sucesiones linealmente recurrentes.

3.4 Ecuaciones diferenciales fraccionarias

La ecuación $D_t^n \mathrm{e}^{r^{1/n} t} = r \mathrm{e}^{r^{1/n} t}$ motiva la siguiente definición de diferenciación fraccional. Sea α un número complejo distinto de cero y sea $\beta = 1/\alpha$. Definimos el operador D_t^α de orden α con respecto a t por

$$D_t^\alpha \mathrm{e}^{t(1+x)^\beta} = (1+x) \mathrm{e}^{t(1+x)^\beta}, \tag{3.15}$$

donde $(1+x)^\beta = \mathrm{e}^{\beta \log(1+x)}$, y log denota la rama principal de la función logaritmo. Entonces tenemos

$$(D_t^\alpha - I) \mathrm{e}^{t(1+x)^\beta} = x \mathrm{e}^{t(1+x)^\beta}. \tag{3.16}$$

Ahora construiremos una realización concreta de $\mathcal{F}$ en la cual $L = D_t^\alpha - I$. La ecuación (3.16) puede ser interpretada como $(L - xI) e_{x,0} = 0$, si definimos

$$e_{x,0} = \mathrm{e}^{t(1+x)^\beta} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k (1+x)^{k\beta}}{k!}.$$

La expansión binomial en series de $(1+x)^{k\beta}$ y un cambio en el orden de las sumas nos lleva a obtener

$$e_{x,0} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \binom{k\beta}{n} \frac{t^k}{k!} x^n. \tag{3.17}$$

Ya que $e_{x,0} = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$, debemos tener

$$p_n = \sum_{k\geq 0} \binom{k\beta}{n} \frac{t^k}{k!}, \qquad n \geq 0. \tag{3.18}$$

Es fácil verificar que

$$p_n = \frac{u_n(t)}{n!} \mathrm{e}^t, \qquad n \geq 0, \tag{3.19}$$

donde $u_n(t)$ es un polinomio en t de grado n, y entonces obtenemos

$$e_{x,0} = \mathrm{e}^t \sum_{n\geq 0} \frac{u_n(t) x^n}{n!}. \tag{3.20}$$

Para $n < 0$ definimos

$$\binom{k\beta}{n} = \frac{(-1)^{-n-1}(-n-1)!}{(k\beta+1)(k\beta+2)\cdots(k\beta-n)}. \tag{3.21}$$

Usando ésta definición en la ecuación (3.18) se definen los p_n para valores negativos de n.
De (3.20) obtenemos

$$e_{x,m} = \frac{\mathrm{e}^t}{m!} \sum_{n\geq m} u_n(t) \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{\mathrm{e}^t}{m!} \sum_{k\geq 0} u_{m+k}(t) \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Ya que $L = D_t^\alpha - I$, si w es un polinomio de grado $n+1$ entonces podemos escribir

$$w(L) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k (D_t^\alpha)^k, \tag{3.23}$$

donde los c_k son coeficientes complejos. Por lo tanto, en esta realización concreta del campo $\mathcal{F}$ podemos resolver la ecuación diferencial fraccionaria de la forma $w(L)f = g$ usando las funciones $e_{x,m}$ definidas en (3.22).

3.5 Funciones racionales

La más natural realización concreta de $\mathcal{F}$ se obtiene cuando definimos $p_k = z^k$ para $k \in \mathbb{Z}$, donde z es una variable compleja. En este caso $\mathcal{F}$ es el campo de las series formales de Laurent sobre los números complejos. El retrasador modificado L esta dado por $Lz^k = z^{k-1}$ para $k \neq 0$, y $Lz^0 = 0$. Las series geométricas son

$$e_{x,0} = \sum_{k \geq 0} x^k z^k = \frac{1}{1 - xz}, \qquad x \in \mathbb{C}, \tag{3.24}$$

y

$$e_{x,m} = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{m} x^{k-m} z^k = \frac{z^m}{(1 - xz)^{m+1}}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Es fácil ver que el conjunto $\{e_{x,m} : x \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}\}$ es una base para el espacio $\mathcal{R}_0$ de funciones racionales que están bien definidas en $z = 0$. Los polinomios en z están incluidos en $\mathcal{R}_0$, ya que son generados por los elementos $e_{0,m} = z^m$, para $m \geq 0$.
El subespacio $\mathcal{F}_-$ es generado por $\{z^k : k < 0\}$. Cada elemento de $\mathcal{F}_-$ puede ser escrito en la forma $p(z)/z^m$, donde $m \geq 1$ y $p(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que m. Entonces $\mathcal{Q} = \mathcal{F}_- \oplus \mathcal{R}_0$ es el espacio de todas las funciones racionales. Es claro que $\mathcal{Q}$ es un subcampo de $\mathcal{F}$. El operador L restringido a $\mathcal{R}_0$ puede ser considerado como la multiplicación por z^{-1} seguido de reducción módulo $\mathcal{F}_-$. Entonces $\mathcal{R}_0$ es invariante bajo L. En el espacio $\mathcal{F}_-$ el operador L coincide con la multiplicación por z^{-1}. La ecuación (2.18) se convierte en este caso en una fórmula básica de descomposición en fracciones parciales.
Ya que la multiplicación natural de las funciones racionales coincide con la multiplicación inducida en $\mathcal{Q}$ por la multiplicación de $\mathcal{F}$, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *En el campo abstracto $\mathcal{F}$ generado por los $\{p_k : k \in \mathbb{Z}\}$ el espacio vectorial $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_- \oplus \langle e_{x,m} : (x, m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}\rangle$ es un subcampo de $\mathcal{F}$, y éste es isomorfo al campo $\mathcal{Q}$ de las funciones racionales sobre $\mathbb{C}$.*

Ahora presentaremos otra forma de obtener las funciones racionales en otra realización concreta de $\mathcal{F}$. Sea z una variable compleja y definamos $p_k = z^{-k-1}$, para $k \in \mathbb{Z}$. En este caso la multiplicación en la realización concreta de $\mathcal{F}$ está dada por

$$z^k * z^m = z^{k+m+1}, \qquad k, m \in \mathbb{Z}, \tag{3.26}$$

la cual es diferente de la multiplicación natural de las potencias de z, dada por $z^k z^m = z^{k+m}$. El elemento unidad para la multiplicación $*$ es z^{-1}.
Las series geométricas son

$$e_{x,0} = \sum_{k \geq 0} x^k z^{-k-1} = \frac{1}{z - x}, \qquad x \in \mathbb{C}, \tag{3.27}$$

y

$$e_{x,m} = \sum_{k\geq 0} \binom{k}{m} x^{k-m} z^{-k-1} = \frac{1}{(z-x)^{m+1}}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

El conjunto de funciones $e_{x,m}$, para $(x,m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, es una base para el espacio $\mathcal{R}$ de funciones racionales propias. Ver [19], donde varias propiedades de las funciones racionales son estudiadas usando métodos algebraicos lineales.
En este caso el espacio $\mathcal{F}_-$ es el espacio de polinomios en z, que denotamos por $\mathcal{P}$. Por el algoritmo de la división para polinomios (con respecto a la multiplicación natural) es claro que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$. El operador L restringido a $\mathcal{R}$ es la multiplicación natural por z seguida por reducción módulo los polinomios. En $\mathcal{P}$ el operador L es exactamente la multiplicación natural por z.

Tenemos dos diferentes multiplicaciones en el espacio vectorial $\mathcal{Q}$, la multiplicación natural de funciones en la variable compleja z, y el producto de convolución definido en (3.26). Definamos el operador lineal $R : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ por $Rf(z) = (1/z)f(1/z)$. Es fácil observar que R es un isomorfismo de $\mathcal{Q}$ con la multiplicación natural de funciones racionales sobre $\mathcal{Q}$ equipado con la convolución $*$ definida por (3.26). El mapeo R es usado frecuentemente en la teoría de funciones de una variable compleja. Note que $R^2 = I$.

3.6 Resultados adicionales y comentarios finales

3.6.1 Funciones de una matriz

A continuación presentamos un resultado simple en $\mathcal{F}$ que tiene aplicaciones en el cómputo de funciones de una matriz .

Sea $g = p_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 + \cdots + b_{n+1} p_{n+1} \in \mathcal{F}$, donde los b_j son números complejos y $b_{n+1} \neq 0$. Sea $x \in \mathbb{C}$. Si escribimos

$$\frac{g}{p_0 - x p_1} = \sum_{m\geq 0} w_m(x) p_m, \tag{3.29}$$

entonces, multiplicando ambos lados por $p_0 - x p_1$ e igualando los coeficientes correspondientes a p_m, obtenemos que $w_0(x) = 1$,

$$w_m(x) = x w_{m-1}(x) + b_m, \qquad 0 \leq m \leq n+1,$$

y

$$w_{n+1+j}(x) = x^j w_{n+1}(x), \qquad j \geq 0.$$

Notemos que $w_{n+1}(x) = x^{n+1} + b_1 x^n + \cdots + b_{n+1}$.
Los polinomios w_m son los *polinomios de Horner* asociados con w_{n+1}. Ellos forman una base del espacio vectorial de polinomios.
De (3.29) obtenemos que

$$e_{x,0} = (p_0 - xp_1)^{-1} = \frac{p_0}{g} \sum_{m \geq 0} w_m(x) p_m, \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{3.30}$$

Si a es una raíz del polinomio w_{n+1} entonces (3.30) produce

$$e_{a,0} = \sum_{m=0}^{n} \frac{p_m}{g} w_m(a). \tag{3.31}$$

Recordemos que $e_{a,0}$ es una solución de $(L - aI)f = 0$.
Sea $w = w_{n+1}$. Entonces, usando los coeficientes h_j definidos en (2.33) y la expresión para d_w obtenida en (2.34), escribimos

$$\frac{p_m}{g} = \sum_{j \geq 0} h_j p_{m+j} = p_{m-n-1} d_w.$$

Entonces obtenemos

$$e_{a,0} = \sum_{m=0}^{n} p_{m-n-1} d_w w_m(a). \tag{3.32}$$

Un cómputo directo de $(L - aI)e_{a,0}$, con $e_{a,0}$ dado por (3.32), demuestra que las propiedades de $w_m(a)$ que producen $(L - aI)e_{a,0} = 0$ son $w_{m+1}(a) - a w_m(a) = b_{m+1}$, para $0 \leq m \leq n$, y $w_{n+1}(a) = 0$. Estas propiedades también son válidas cuando a es remplazado por una matriz cuadrada A tal que $w_{n+1}(A) = 0$. Por lo tanto

$$e_{A,0} = \sum_{m=0}^{n} p_{m-n-1} d_w w_m(A), \tag{3.33}$$

es solución de $(L - AI)f = 0$.
Si L es diferenciación con respecto a t y $p_j = t^j/j!$, entonces $e_{A,0} = \mathrm{e}^{tA}$, ya que $e_{A,0}$ evaluada en $t = 0$ es la matriz identidad.
Si L es el operador diferencia Δ y $p_j = \binom{k}{j}$, entonces $e_{A,0} = (I + A)^k$ es la solución de $(\Delta - AI)f = 0$ que es igual a I cuando $k = 0$. Ver [18], donde éstas y otras funciones de matrices cuadradas son estudiadas usando diferentes enfoques.

3.6.2 Funciones de L

En la sección 3.4 construimos una realización concreta de $\mathcal{F}$ en la cual el retrasador modificado es D^α. Ésta fue hecha modificando la realización concreta asociada con el operador D. Aquí presentaremos otro método para la construcción de una nueva realización concreta asociada con un operador $f(L)$, para funciones adecuadas f, empezando de la realización concreta asociada con L.
La idea de la construcción es la que sigue. Ya que

$$Le_{x,0} = xe_{x,0}, \qquad x \in \mathbb{C},$$

si fijamos una función f deberíamos tener que

$$f(L)e_{x,0} = f(x)e_{x,0}, \qquad x \in \mathbb{C},$$

y entonces

$$f(L)e_{g(x),0} = f(g(x))e_{g(x),0}, \qquad x \in \mathbb{C}.$$

Por lo que, si $f(g(x)) = x$, entonces debemos construir una realización concreta de $\mathcal{F}$ en la cual las series geométricas $\hat{e}_{x,0}$ asociadas con x coincidan con las series geométricas $e_{g(x),0}$ en la realización concreta original (asociada con L). Una vez que se tiene la nueva serie geométrica, obtenemos los nuevos generadores $\hat{p}_m = \hat{e}(0, m)$, para $m \geq 0$.
Para definir los generadores $\hat{p}_m$ para m negativa, elegimos una adecuada $\hat{p}_{-1}$ y aplicamos ésta al operador $\hat{L} = f(L)$ repetidamente.
Consideremos el siguiente ejemplo. Sea r un número complejo distinto de cero $f(D) = \mathrm{e}^{rD} - I$. Entonces $f(x) = \mathrm{e}^{rx} - 1$ y su inversa bajo la operación composición es $g(x) = r^{-1}\log(1 + x)$. Ya que en la realización concreta asociada con D las series geométricas son e^{xt}, en la nueva realización concreta las series geométricas son $\hat{e}_{x,0} = \mathrm{e}^{r^{-1}t\log(1+x)}$. Con un cómputo simple obtenemos $\hat{p}_m = \binom{t/r}{m}$, para $m \geq 0$. Los generadores $\hat{p}_m$ para m negativa son definidos por una simple modificación a (3.10). Observamos que ésta realización concreta es una generalización de la construcción en la sección 3.3, donde el atrasador modificado es el operador diferencia Δ. Es fácil comprobar que $\mathrm{e}^{rD} - I$ es el operador diferencia con avance r; esto es, $(\mathrm{e}^{rD} - I)u(t) = u(t + r) - u(t)$.

3.6.3 Espacios isomorfos

Del teorema 3.1 podemos observar que cada realización concreta de $\mathcal{F}$ produce un campo que corresponde al subcampo $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ y es isomorfo al campo $\mathcal{Q}$ de funciones

racionales sobre los números complejos, con su multiplicación natural.
Sea $\tilde{\mathcal{E}}$ una realización concreta de $\tilde{\mathcal{F}}$ de la sección 3.1. El producto de convolución en $\tilde{\mathcal{E}}$ está dado por (2.38). Note que $\tilde{\mathcal{E}}$ contiene el espacio $\mathcal{E}$ de los casi-polinomios.
Sea $\tilde{\mathcal{S}}$ la realización concreta de $\tilde{\mathcal{F}}$ de la sección 3.3. El producto de convolución en $\tilde{\mathcal{S}}$ está dado por (3.12). Note que $\tilde{\mathcal{S}}$ contiene el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones linealmente recurrentes. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{E}}$ y $\tilde{\mathcal{S}}$ son isomorfos a $\mathcal{Q}$.
El isomorfismo de una realización concreta de $\tilde{\mathcal{F}}$ a $\mathcal{Q}$ es una versión algebraica de una transformada "integral". Por ejemplo, el isomorfismo de $\tilde{\mathcal{E}}$ a $\mathcal{Q}$ corresponde a la transformada de Laplace, y el isomorfismo de $\tilde{\mathcal{S}}$ a $\mathcal{Q}$ corresponde a la Z-transformada.
Observemos que cada versión concreta de $\tilde{\mathcal{F}}$ esta contenida en un campo isomorfo a $\mathcal{F}$ y también al campo de series formales de Laurent sobre $\mathbb{C}$, el cual contiene a $\mathcal{Q}$. Note que, en general, las versiones concretas de $\tilde{\mathcal{F}}$ tienen otra multiplicación, ésta es la recibida de $\mathcal{F}$. Por ejemplo, las sucesiones linealmente recurrentes tienen la multiplicación término a término, también llamada multiplicación de Hadamard. Es claro que podemos transferir cualquier multiplicación a cualquier otro espacio vectorial isomorfo.

3.6.4 Comentarios finales

De la ecuación (2.18) se observa que $p_1 e_{x,m} e_{y,n}$ es la *diferencia dividida* de $e_{z,0}$, considerada como función de z, con respecto a las raíces del polinomio $(z-x)^{m+1}(z-y)^{n+1}$.
La solución fundamental d_w asociada con $w(L)$ es la diferencia dividida de $e_{z,0}$, considerada como una función de z, con respecto a las raíces de w. Esto es cierto en $\mathcal{F}$ y en cualquier realización concreta, aún a pesar de la naturaleza de los elementos $e_{z,0}$, los cuales también son funciones de alguna otra variable.
Es fácil verificar que el producto de convolución definido por la ecuación (2.38) tiene una representación integral

$$f(t) * g(t) = D_t \int_0^t f(z) g(t-z)\, dz, \qquad f, g \in \mathcal{F}_0.$$

Esta es llamada la convolución integral de Duhamel. La convolución de potencias negativas de t tiene una representación integral diferente.
El subespacio $\langle e_{x,k} : (x,k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} \rangle$ de $\mathcal{F}$ tiene estructura de álgebra de Hopf la cual es la dual de la estructura usual de álgebra de Hopf de los polinomios en una variable compleja. Ver [17].
Hay varias formas de extender este trabajo. Por ejemplo,

- Considerando series formales de Laurent en varias indeterminadas.

- Estudiando operadores más generales, por ejemplo, polinomios en L con coeficientes en $\mathcal{F}$, o series formales en L.
- Considerando generadores matriciales p_k.
- Dando al espacio $\mathcal{F}$ estructura de espacio de Hilbert o de Banach.
- Desarrollando extensiones motivadas por aplicaciones de realizaciones concretas, por ejemplo, el caso de derivadas fraccionarias.
- Usando la teoría presentada en este trabajo para explicar y justificar los métodos de Heaviside y para encontrar una presentación de la teoría de Mikusiñski que sea más accesible para los estudiantes de ingeniería.
- Desarrollando algoritmos de cálculo simbólico para resolver ecuaciones funcionales lineales de varios tipos.

Bibliografía

[1] L. Berg, General operational calculus, *Linear Algebra Appl.* **84** (1986), 79–97.

[2] M. A. B. Deakin, The ascendancy of the Laplace transform and how it came about, *Arch. Hist. Exact Sci.* **44** (1992), 265–286.

[3] I. H. Dimovski, "Convolutional Calculus", 2nd Edition, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1990.

[4] H. G. Flegg, A survey of the development of Operational Calculus, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **2** (1971), 329–335.

[5] P. A. Fuhrmann, Functional models in Linear Algebra, *Linear Algebra Appl.* **162-164** (1992), 107–151.

[6] H.-J. Glaeske, A. P. Prudnikov, K. A. Skòrnik, "Operational calculus and related topics", Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[7] J. Lützen, Heaviside's operational calculus and the attempts to rigorise it, *Arch. Hist. Ex. Sci.* **21** (1979), 161-200.

[8] E. Mieloszyk, Application of non-classical operational calculus to solving some boundary value problem, *Integral Transforms Spec. Funct.* **9** (2000), 287–292.

[9] J. Mikusiński, "Operational Calculus", Pergamon Press, New York, 1959.

[10] Y. Péraire, Heaviside calculus with no Laplace transform, *Integral Transforms Spec. Funct.* **17** (2006), 221–230.

[11] A. D. Poularikas, Ed., "The transforms and applications handbook", Second Ed., CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, 2000.

[12] G.-C. Rota, On models for linear operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 469–472.

[13] L. A. Rubel, An operational calculus in miniature, *Applicable Analysis* **6** (1977), 299–304.

[14] M. van der Put, M. F. Singer, “Galois Theory of Linear Differential Equations”, Grundlehren Math. Wiss., vol 328, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[15] M. van der Put, M. F. Singer, “Galois Theory of Difference Equations”, Lecture Notes in Math., vol 1666, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] L. Verde-Star, Inverses of generalized Vandermonde matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **131** (1988), 341–353.

[17] L. Verde-Star, An algebraic approach to convolutions and transform methods, *Adv. in Appl. Math.* **19** (1997), 117–143.

[18] L. Verde-Star, Functions of matrices, *Linear Algebra Appl.* **406** (2005), 285–300.

[19] L. Verde-Star, Rational functions, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 804–827.

[20] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”, Thomson Learning, México, 2004.

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana
Ciencias Básicas e Ingeniería
Unidad Iztapalapa

Fundamentos algebraicos lineales del cálculo operacional

Tesis que presenta
Gabriel Bengochea Villegas
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Luis Verde-Star**

Luis Verde Star

31 de Enero de 2013