



✓ **COSMOLOGÍA CUÁNTICA Y CLÁSICA  
EN TEORÍAS ESCALARES-TENSORIALES  
DE LA GRAVITACIÓN**

✓ **TESIS QUE PRESENTA  
✓ CÉSAR EDUARDO MORA LEY  
PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
✓ DOCTOR EN CIENCIAS**

**ASESOR**

✓ **DR. LUIS OCTAVIO FIMENTEL RICO**

**JULIO DEL 2001 ✓**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA**

✓ **DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**In memoriam**

**A mis queridos suegros:**

**María Cristina Jiménez Morales**

**y**

**Don Alfonso Porfirio Martínez Reyes**

Agradezco encarecidamente

al Dr. Luis Octavio Pimentel Rico por la dirección de esta tesis,

al CONACyT por el apoyo económico,

a la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa

y a laUPIBI del Instituto Politécnico Nacional

por todas las facilidades y el apoyo recibido,

a mi gran amigo Rubén Sánchez Sánchez por su valiosa ayuda,

a mis familiares, amigos, compañeros de trabajo y alumnos  
que siempre me animaron.

a mi amada Nelly y a nuestros gatos cuánticos:

Ninfa, †Samed, Brisa, Masmú, Musette, Sazuke, †Sísifo, Kiwi, †Feliz y Koyi.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>5</b>
2.1	Cosmología cuántica	5
2.2	Geometrodinámica y el formalismo ADM	8
2.3	Formulación Hamiltoniana	15
2.4	El superespacio	18
2.5	Cuantización canónica	19
2.6	Cuantización por integrales de trayectoria	20
2.7	El minisuperespacio	22
2.8	Condiciones a la frontera	23
2.8.1	La propuesta de no-frontera	24
2.8.2	La propuesta de tunelamiento	27
2.9	Agujeros de gusano	29
2.9.1	Antecedentes históricos	29
2.9.2	El puente neutral	29
2.9.3	El puente cuasicargado	30
2.9.4	El puente generalizado	31
2.9.5	La espuma del espacio tiempo	32
2.10	Clasificación de los agujeros de gusano	34
2.10.1	Agujeros de gusano permanentes y cuasipermanentes	34
2.10.2	Agujeros de gusano transitorios	35
2.10.3	Agujeros de gusano macroscópicos y microscópicos	36
2.10.4	Agujeros de gusano de Wheeler	36
2.10.5	Agujeros de gusano transitables	36
2.10.6	Agujeros de gusano Euclidianos	37
2.10.7	Agujeros de gusano cuánticos	38
2.10.8	La interpretación de muchos mundos	43
2.11	Aproximación WKB	47
2.12	Tercera cuantización	50

<b>3</b>	<b>Cosmología cuántica y clásica en la teoría de Bergmann-Wagoner</b>	<b>53</b>
3.1	El modelo del minisuperespacio de Bergmann-Wagoner	54
3.2	Norma $N=1$	56
3.2.1	Caso $\Lambda(y) = 0$	56
3.2.2	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0$	57
3.2.3	Aproximación WKB	58
3.3	Norma $N=1/x$	59
3.3.1	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y)$	60
3.3.2	Aproximación WKB	61
3.4	Soluciones clásicas	62
3.4.1	Teoría de Jordan-Brans-Dicke	62
3.4.2	Teoría de Barker	64
3.4.3	Teoría 1	64
3.4.4	Teoría 2	65
3.4.5	Teoría 3	66
3.5	Soluciones de agujero de gusano cuánticos	66
3.5.1	Caso $\Lambda(y) = 0, N = 1$	66
3.5.2	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0, N = 1$	67
3.5.3	Caso $\Lambda(\eta/\xi) = 0, N = 1/x$	67
3.5.4	Paquetes de onda	68
3.6	Configuración Euclídeana de agujeros de gusano	72
3.7	Tercera cuantización	78
3.8	La relación de incertidumbre	82
<b>4</b>	<b>Cosmología cuántica y clásica en la teoría de Jordan-Brans-Dicke</b>	<b>91</b>
	y $\lambda(\phi) = 3q\phi$	
4.1	El modelo del minisuperespacio de Jordan-Brans-Dicke	92
4.2	Soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt	94
4.2.1	Caso $\lambda(y) = 0$	94
4.2.2	Aproximación WKB	95
4.2.3	Soluciones de Hamilton-Jacobi	97
4.2.4	Caso $\lambda(y) = 3qe^{-2y}$	98
4.2.5	Aproximación WKB	99
4.2.6	Soluciones de Hamilton-Jacobi	100
4.3	Condiciones a la frontera	104
4.3.1	Condición a la frontera de Vilenkin	105
4.3.2	Condición a la frontera de Hartle-Hawking	106
4.3.3	Probabilidad de tunelamiento	107
4.4	Soluciones de agujero de gusano	108
4.4.1	Configuración de agujeros de gusano cuánticos	108
4.4.2	Configuración semiclásica de agujeros de gusano	109
4.4.3	Configuración Euclídeana de agujeros de gusano	110
4.5	Tercera cuantización	112

4.5.1	Creación de universos de la nada	114
4.5.2	La relación de incertidumbre	116
<b>5</b>	<b>Cosmología cuántica en BW para Bianchi I y II</b>	<b>121</b>
5.1	Soluciones exactas para Bianchi I	123
5.1.1	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0/144$	123
5.1.2	Solución de agujero de gusano cuántico	124
5.1.3	Solución WKB	125
5.1.4	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y)$	125
5.1.5	Solución WKB	127
5.2	Soluciones exactas para Bianchi II	128
5.2.1	Caso $\Lambda(y) = 0$	128
5.2.2	Solución WKB	129
5.2.3	Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0/144$	130
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Encajamiento de una hipersuperficie en una variedad</b>	<b>136</b>
<b>B</b>	<b>Derivadas covariantes inducidas</b>	<b>140</b>
<b>C</b>	<b>La curvatura extrínseca</b>	<b>142</b>
<b>D</b>	<b>Agujeros de gusano transitables</b>	<b>144</b>
<b>E</b>	<b>Cálculo de integrales de funciones Gaussianas</b>	<b>154</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La cosmología cuántica es una consecuencia de la teoría cuántica del universo como un todo, y tuvo sus orígenes en la década de los 60's con los trabajos pioneros de Everett[1], DeWitt[2], Wheeler[4] y Misner[6]. En los 70's disminuyó la atención a esta teoría y debido a la imposibilidad de la cosmología clásica para explicar la historia muy temprana del universo, en los 80's tuvo un renacimiento con los trabajos de Hartle y Hawking[7, 8, 9], Vilenkin[10] y Linde[11].

En la interpretación estándar de Copenhague de la mecánica cuántica siempre tenemos un mundo clásico que está inmerso en el mundo cuántico. Se tienen observadores que hacen mediciones, y los observadores mismos son descritos por la física clásica. Si el universo entero se trata como un sistema cuántico, entonces cambia la situación, y podría pensarse que las ideas convencionales de la física cuántica dejan de tener significado. Aún cuando la mecánica cuántica se considere como una teoría universal entonces es inevitable el que la cosmología cuántica fuera importante en tiempos muy tempranos, es decir, al tiempo de Planck,  $t_{\text{Planck}} = (G\hbar)^{1/2}/c^{5/2} = 5.4 \times 10^{-44}\text{s}$ , (equivalente a  $10^{19}$  GeV como una energía, o  $1.6 \times 10^{-35}\text{m}$  como una longitud). A tales escalas, en donde la longitud de onda de Compton de una partícula es aproximadamente igual a su radio gravitacional (Schwarzschild), las fluctuaciones cuánticas irreducibles dejan sin sentido al concepto clásico del espacio-tiempo.

Las principales motivaciones de la cosmología cuántica[12] están relacionadas con el hecho de que los modelos cosmológicos son ejemplos simples en los cuales se pueden aplicar las ideas de la gravedad cuántica, ya que el universo muy temprano es quizá el único laboratorio en donde se puede probar la gravedad cuántica. Otra motivación se refiere a las condiciones iniciales en el escenario del universo inflacionario[10, 13, 14]. Cuando seguimos la evolución del universo hacia atrás en el tiempo, las curvaturas y densidades se aproximan a la escala de Planck, en donde esperaríamos que los efectos gravitacionales cuánticos lleguen a ser importantes. Por lo tanto, la cosmología cuántica es un marco de referencia natural en el cual se debe contestar la pregunta

sobre las condiciones iniciales del universo.

En cosmología cuántica el universo es descrito por una función de onda  $\psi$ , la cual está definida en el superespacio (el espacio de todas las tres-métricas y configuraciones de campos de materia). La función de onda  $\psi$  es una solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt (WDW) (segunda cuantización de la gravedad),  $\mathcal{H}\psi = 0$ . Esta ecuación es el análogo de la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica ordinaria. Como el superespacio es de dimensión infinita, el formalismo completo de la cosmología cuántica es muy difícil de tratar en la práctica, entonces generalmente se considera un modelo del minisuperespacio, es decir, tratamos con una configuración de dimensión finita.

La ecuación de WDW tiene un serio problema en la interpretación de que  $|\psi|^2$  es una probabilidad, debido a que la ecuación de WDW es una ecuación diferencial hiperbólica de segundo orden, no hay una densidad de probabilidad definida positiva como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon en física de partículas. Una alternativa a este problema es realizar una tercera cuantización de la función de onda del universo[15] en analogía con la segunda cuantización de teoría de campos. Así se puede construir en gravedad cuántica una medida de probabilidad consistente al promover a  $\psi$  a un operador cuántico de campo que actúa en un espacio de Hilbert de estados. El estado vacío en este espacio es identificado como un estado en donde el universo no existe. Los procesos del cambio de topología pueden entonces ser descritos al incluir autointeracción del campo de universos. En la teoría cuántica de campos, las partículas son creadas desde el vacío mediante un potencial externo que varía en el tiempo y esto sugiere que el universo puede ser creado mediante un proceso similar (los así llamados universos bebés). En la tercera cuantización el campo de universos es expandido en funciones de modo-entrante y -saliente de frecuencia positiva y sus conjugados hermiticos. Los modos entrantes y salientes están relacionados uno con otro por los coeficientes de Bogoliubov y estos determinan el número de universos en un modo dado. Por lo tanto, la teoría de la tercera cuantización del universo describe un sistema de varios universos. Mucha de la excitación a finales de los años 80's, estuvo asociada con la idea de que tales procesos podrían fijar constantes fundamentales de la naturaleza, en particular conduciendo a la constante cosmológica a cero.

Otro tema de estudio en cosmología cuántica, es el estudio de los efectos cuánticos en la evolución del universo[16]. El universo que observamos en la actualidad es descrito por las leyes clásicas con un alto grado de precisión. En la perspectiva de la cosmología cuántica el universo se considera fundamentalmente mecánico cuántico en su naturaleza, y una predicción de esta teoría sobre las condiciones iniciales del universo, es que a gran escala el universo es aproximadamente clásico. En la presente investigación estudiamos la relación de incertidumbre de Heisenberg para algunos modelos, con el fin de estudiar el comportamiento de algunas cosmologías cerradas



a muy tempranas y lejanas épocas.

Por otro lado, en gravedad cuántica la topología del espacio-tiempo se espera que fluctúe en la escala de Planck[4]. El espacio-tiempo debe estar múltiplemente conectado, estas conexiones son agujeros de gusano microscópicos. Hawking y Page[17] han sugerido que son soluciones de la ecuación de WDW, que satisfacen ciertas condiciones iniciales, las cuales son que: (i) la función de onda del universo es amortiguada exponencialmente cuando la geometría espacial es grande, y (ii) la función de onda del universo debe ser bien comportada (regular) en el origen. Algunas de las soluciones de la ecuación de WDW que obtuvimos, son de este tipo.

En los modelos del minisuperespacio que estudiamos, utilizamos la aproximación WKB con el fin de conocer obtener información sobre su comportamiento clásico. Esto lo realizamos resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi. Algunas soluciones clásicas fueron calculadas por esta vía.

El estudio de la cosmología cuántica que presentamos, es realizado en el marco de las teorías escalares tensoriales de la gravitación, esto debido al gran interés que en los últimos años se ha dado a estas teorías. Dos de las principales razones son las siguientes: Las teorías de unificación, y la inflación caótica. La mayoría de las teorías unificadas[18], incluyendo la teoría de supercuerdas naturalmente predice una teoría de dilatón de la gravedad, y en la actualidad es la única teoría que trata la gravedad en un camino consistente con la física cuántica. Además, el nuevo escenario de la inflación extendida[19], que resuelve el problema de "fine tuning" de la inflación antigua, nueva y caótica, tiene un campo escalar que retarda el ritmo de expansión desde exponencial a polinomial, permitiendo completar la fase de transición desde una fase de de Sitter a un universo dominado por radiación, esto significa que las teorías escalares tensoriales de la gravitación proveen una posible solución para el problema de "graceful exit".

En los capítulos 3 al 5 estudiaremos cosmología cuántica para el caso de modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos, esto es, utilizaremos el modelo de Friedmann-Robertson-Walker, en el marco de la teoría escalar tensorial más general, la teoría de la gravitación de Bergmann-Wagoner[20], y algunos casos particulares de la misma.

La tesis está organizada de la siguiente manera, en el capítulo 2 se da una introducción a los fundamentos teóricos para el estudio de la cosmología cuántica, tales como el formalismo ADM, la cuantización canónica y por integrales de trayectoria, las condiciones a la frontera para la función de onda del universo, los agujeros de gusano cuánticos y la tercera cuantización. En el capítulo 3 tratamos la cosmología cuántica de la teoría de Bergmann-Wagoner así. El capítulo 4 es dedicado al estudio de la cosmología cuántica y clásica de la teoría de Jordan-Brans-Dicke así como una modificación de la misma, y en el capítulo 5 mostramos algunas soluciones cuánticas

y semiclásicas en la teoría de BW para los modelos del Bianchi I y II. Finalmente en el capítulo 6 damos nuestras conclusiones.

## Capítulo 2

# Fundamentos teóricos

### 2.1 Cosmología cuántica

La visión actual que tenemos del universo, es la de un universo mecánico cuántico, y en esta perspectiva el universo debe ser descrito como un todo y cada cosa en él debe ser descrita en términos de la mecánica cuántica. La naturaleza de esta descripción y sus consecuencias son el tema de la cosmología cuántica.

Las observaciones del presente universo a grandes escalas pueden ser descritas adecuadamente mediante las leyes de la física clásica. La descripción cuántica de las observaciones actuales del universo no tiene mucho sentido, debido a lo preciso de las predicciones clásicas. El objetivo en la cosmología cuántica es más ambicioso, ya que se pretende construir una teoría de la condición inicial del universo la cual prediga correlaciones comprobables entre las observaciones actuales, tales como la homogeneidad a gran escala y la isotropía del universo, su aproximada monotonía espacial, el espectro de fluctuaciones de densidad que producen las galaxias, la homogeneidad de la flecha del tiempo termodinámico, y la existencia del espacio-tiempo clásico. Además, otro de los tópicos de la cosmología cuántica es la cuestión de si las constantes de acoplamiento de las interacciones efectivas de las partículas elementales a escalas de energía accesibles dependen, en parte, de la condición inicial del universo.

La física de un universo temprano es esencialmente mecánico cuántica. Los teoremas de singularidad clásicos de la relatividad general sugieren una era temprana que precedió la nuestra en la cual aún la geometría del espacio-tiempo presentaba fluctuaciones cuánticas significativas, y para describir esa era es necesaria la cosmología cuántica.

La concepción de "Copenhague" de la mecánica cuántica, tal como fue formulada en los años 30's y 40's, es inadecuada para la cosmología cuántica por las siguientes razones. Primero, estas formulaciones característicamente suponen una posible di-

visión del mundo en "observador" y "observado", suponiendo que las "mediciones" son el centro primario de las declaraciones científicas, y se tiene un "dominio clásico" externo. Sin embargo, en una teoría de un "todo" como en cosmología cuántica no hay división fundamental entre observador y observado. Las mediciones y los observadores no pueden ser nociones fundamentales en una teoría que busca describir el universo temprano cuando de entrada ni existían. En una formulación básica de la mecánica cuántica no hay razón en general para tener cualesquiera variables que exhiban comportamiento clásico en toda circunstancia. Por consiguiente, la cosmología cuántica de Copenhagen necesita generalizarse para dar un marco de referencia cuántico adecuado para la cosmología.

El segundo punto que es inadecuado en las formulaciones familiares de la mecánica cuántica para la cosmología concierne al uso central de un tiempo preferido. El tiempo es un observable especial en la mecánica cuántica Hamiltoniana. Las probabilidades son predichas de observaciones "en un sólo momento de tiempo". El tiempo es el único observable no representado por un operador en el formalismo de la mecánica cuántica familiar, en vez de ello entra en la teoría como un parámetro que describe evolución.

En donde hay una geometría fija del espacio tiempo, esa geometría de fondo podría dar significado físico al tiempo preferido de la mecánica cuántica Hamiltoniana. Así, el tiempo Newtoniano del espacio-tiempo no relativista es tomado como el tiempo preferido de la mecánica cuántica no relativista. El espacio-tiempo de la relatividad tiene muchas direcciones tipo temporal. Cualquiera de ellas podrían proveer el tiempo preferido de una teoría cuántica de campos relativistas. Sin embargo, el espacio-tiempo no está fijado fundamentalmente. En una teoría cuántica de la gravedad, en el dominio de un universo muy temprano, fluctuaría y no tendría un valor definido. El espacio-tiempo es mecánica cuánticamente variable, no hay un espacio-tiempo fijado para proveer una noción única de "tipo temporal", "tipo espacial" o "superficie tipo espacial". En una teoría cuántica del espacio-tiempo no hay una geometría de fondo para dar significado al tiempo preferido en la mecánica cuántica Hamiltoniana. Así hay un conflicto entre la covarianza general de la física de la gravitación y el tiempo preferido de la mecánica cuántica Hamiltoniana. Este es el "problema del tiempo" en gravedad cuántica. Por consiguiente, de nuevo el sistema de referencia familiar de la mecánica cuántica necesita ser generalizado.

El bosquejo de la cosmología cuántica que presentamos aquí, es la estrategia presentada por Hartle[103] y por Wiltshire[104]. Se empezará suponiendo un espacio-tiempo de fondo fijo que provea una familia preferida de direcciones tipo temporal para la mecánica cuántica. Esto de seguro, es una aproximación excelente de escalas accesibles para tiempos posteriores a  $10^{-43}$  segundos después del big bang. El aparato familiar del espacio de Hilbert, estados, Hamiltoniano y otros operadores se deben aplicar al proceso de predicción. Realmente, en este contexto la mecánica

cuántica de la cosmología es indistinguible de una gran caja aislada conteniendo a observadores y observado.

El marco de referencia cuántico para la cosmología tiene sus orígenes en el trabajo de Everett[1] y ha sido desarrollado por otros[4, 32]. También se le conoce como la interpretación post-Everett de la mecánica cuántica.

La idea de Everett fue tomar la mecánica cuántica seriamente y aplicarla al universo como un todo. Mostró cómo un observador podría ser considerado parte de este sistema y cómo sus actividades (mediciones, registros, cálculos de probabilidades, etc.) podrían ser descritos dentro de la mecánica cuántica. No obstante, el análisis de Everett no fue completo, pues no describe adecuadamente desde la perspectiva de la mecánica cuántica el origen del "dominio clásico" de la experiencia familiar o, en una perspectiva de observador independiente, el significado de "bifurcación" que reemplaza la noción de medición. Tampoco distingue entre el vasto número de elecciones de observables mecánica cuánticas que en principio están disponibles para un observador, las elecciones particulares que, en efecto, describen el dominio clásico (a veces esto es llamado el "problema base"). Por otro lado, Everett no dirigió suficientemente su atención a la construcción de historias, tan importante en cosmología, independientemente de la memoria de un observador. Tal como se mencionó en el capítulo anterior, el trabajo iniciado por Everett fue continuado por DeWitt[2], Wheeler[4] y Misner[6], y tuvo un renacimiento en la década pasada de los 80's con los trabajos de Hawking[7, 8, 9], Vilenkin[10] y Linde[11].

La cosmología cuántica es considerada quizás más propiamente como un intento entre muchos en la cuestión de hallar una teoría cuántica de la gravedad. Como una teoría de campo la relatividad general no es renormalizable perturbativamente, y los intentos que se han hecho para reconciliar la relatividad general con la física cuántica no han tenido éxito a pesar de los grandes esfuerzos realizados. El problema con la relatividad general es que es una teoría sobre la estructura a gran escala del espacio-tiempo, y para cuantizarla tenemos que cuantizar el espacio-tiempo mismo en vez de simplemente cuantizar los campos que viven en el espacio-tiempo.

Se han considerado muchas ideas relativas al problema de construir una teoría cuántica de la gravitación, algunas de las áreas de investigación han incluido: La supergravedad, la teoría de supercuerdas, la gravedad cuántica canónica no perturbativa, cuantización topológica, etc.

En el desarrollo de la cosmología cuántica se pueden identificar las siguientes fases:

1) *La definición del problema.* El formalismo canónico, incluyendo la definición de la función de onda del universo  $\psi$ , su espacio de configuración (el superespacio) y su evolución de acuerdo a la ecuación de Wheeler-DeWitt, que fue establecido a finales

de 1960[2, 4, 6].

2) *Condiciones a la frontera.* La investigación en cosmología cuántica tuvo un abandono en la década de 1970, y volvió retomarse a principios de 1980 con la cuestión de hallar las condiciones a la frontera apropiadas para la función de onda del universo. La idea es que tales condiciones a la frontera deberían describir la "creación del universo de la nada" [10], en donde la *nada* significa la ausencia de espacio y tiempo. Entre las propuestas que surgieron dos de las más populares son la propuesta de no frontera de Hartle y Hawking[44], y la propuesta de tunelamiento de Vilenkin[10].

3) *La decoherencia cuántica.* El mecanismo de la transición de la física cuántica a la física clásica ("decoherencia cuántica") llegó a ser vitalmente importante cuando la física cuántica se aplicó al universo como un todo. Aún a principios de 1990 fue materia de mucha investigación[25].

4) *Agujeros de gusano cuánticos y universos bebés.* Los agujeros cuánticos estuvieron muy de moda en la comunidad de físicos de partículas en los años de 1988 a 1990. Tales estados surgen cuando se consideran cambios topológicos en la formulación de integrales de trayectoria de la gravedad cuántica: los agujeros de gusano cuánticos son soluciones de instantón que juegan un papel importante en la integral de trayectoria Euclideana. También son considerados como soluciones de la ecuación de WDW que satisfacen ciertas condiciones a la frontera, conocidas como condiciones de regularidad de Hawking-Page[72]. En este campo de estudio se trata con un "formalismo tercero cuantizado", esto es, la teoría cuántica de campos sobre el superespacio, lo cual incluye operadores que crean y destruyen universos (los llamados *universos bebés*). El interés en este tema a finales de la década de 1980 estuvo relacionado con la idea de que tales procesos podrían fijar constantes fundamentales de la naturaleza[26, 27].

5) *Cosmología cuántica supersimétrica.* Este campo de estudio ha surgido recientemente como una de las áreas de investigación más activas[51, 52, 53]. Al considerar la creación cuántica del universo se está tratando con épocas muy tempranas de la existencia del universo, a ese tiempo se cree que la supersimetría aún no había sido rota. Por consiguiente la inclusión de la supersimetría podría ser vital desde el punto de vista de consistencia física.

## 2.2 Geometrodinámica y el formalismo ADM

El formalismo ADM fue desarrollado por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner[24] a principios de los 60's, con el fin de obtener la dinámica de la relatividad general, considerándola como un problema de Cauchy, esto es, analizar la dinámica como la evolución de una hipersuperficie tridimensional donde estén confinados los cam-

pos, esta forma de desentrañar la dinámica de la relatividad general es conocida como geometrodinámica[28]. En esta formulación, las variables ADM muestran explícitamente el contenido dinámico de las ecuaciones de Einstein, y mediante ellas se puede construir un Hamiltoniano para luego proceder a la cuantización de la teoría, una vez que se han aislado los grados de libertad verdaderos. Las ecuaciones de Einstein son obtenidas mediante el principio variacional, se procede a obtener los extremales de una acción gravitacional. Esta acción es expresada como la integral sobre el espacio-tiempo de una función escalar. Partimos del principio variacional de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g}[\mathcal{R}(g) + \Lambda] dx^4, \quad (2.1)$$

en donde  $\mathcal{R}(g)$  es el escalar de Ricci, el cual es una función de  $g_{\mu\nu}$  y sus primeras y segundas derivadas, y  $\Lambda$  es una constante cosmológica, conocida también como energía de vacío. La integral (2.1) se toma sobre la totalidad de la 4-variedad (espacio-tiempo), y como la acción es una funcional del tensor métrico  $S = S[g_{\mu\nu}]$ , por consiguiente el tensor métrico adecuado debe ser aquel para el cual la acción sea un extremal. Esto es, debemos variar la acción respecto a las componentes del tensor  $g_{\mu\nu}$  para obtener las ecuaciones del movimiento e igualar a cero, así se llega a las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2)$$

La aplicación de la teoría Hamiltoniana clásica implicaría calcular los momentos canónicos conjugados a las variables dinámicas, es decir, a las diez componentes del tensor métrico, tomando la derivada parcial de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$  respecto de las velocidades. Aquí tenemos el problema de definir estas velocidades, y debido a que el tiempo no aparece en forma explícita, es necesario fijar alguna de las coordenadas como el tiempo, para poder calcular dichas velocidades. Esto rompe la covariancia, y se está cortando el espacio-tiempo en rebanadas de  $x_0 = c$ . Por consiguiente la formulación Hamiltoniana de la relatividad general requiere una 3+1 partición de la métrica, y los grados de libertad dinámicos son las componentes espaciales de la métrica. La descomposición de la métrica espacio-temporal  $g_{\mu\nu}$  se hace en términos de una función lapso  $N$ , un vector de cambio  $N_i$ , y una métrica espacial inducida  $h_{ij}$ . La manera que se diseñó para hacer esto, fue el considerar rebanadas del espacio-tiempo, de tal forma que cada rebanada sea una hipersuperficie de tres dimensiones  $\Sigma_t$  con una métrica positiva definida en ella, cada hipersuperficie está parametrizada mediante alguna variable global  $t$  tipo temporal. Después se considera el espacio-tiempo como formado por una colección de hipersuperficies de tal forma que ninguna de ellas se intersecte, entonces se puede pensar en la evolución como el cambio de estas hipersuperficies  $\Sigma_t \rightarrow \Sigma_{t+\delta t}$  en la variable  $t$  y así cubrir completamente el espacio-tiempo.

Las componentes espaciales de  $g_{\mu\nu}$  sobre las hipersuperficies  $\Sigma_t$  inducen una métrica espacial, dada por  $h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j$ , en donde  $n_\mu$  es el campo de vectores normal a  $\Sigma_t$ . La métrica  $h_{ij}(t)$  que evoluciona con  $t$  se considera como variable dinámica. Además de las seis componentes de  $h_{ij}$ , debemos definir otras cuatro variables para tener un total de diez, que es el número de componentes de la antigua variable  $g_{\mu\nu}$ . Estas cuatro variables se definen de manera natural al hacer la foliación del espacio-tiempo. Estas nuevas variables son las ya mencionadas; función lapso  $N$  y función cambio  $N^i$ . En la Figura 1 se ilustra la construcción de estas funciones.

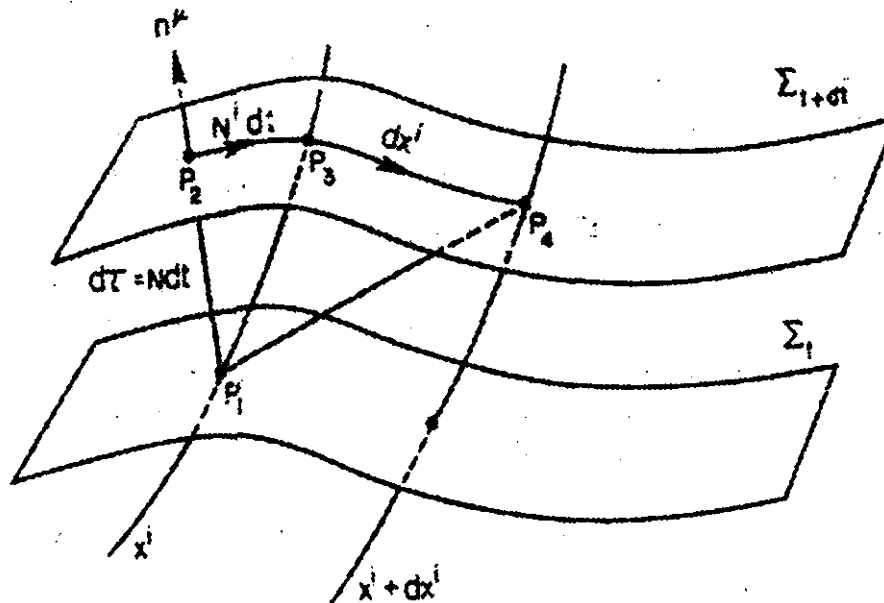


Figura 1. La función lapso  $N$  y el vector de cambio  $N^i$ .

Tomemos un punto  $P_1$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$  y construyamos la normal en ese punto. La normal intersectará a la hipersuperficie  $\Sigma_{t+dt}$  en el punto  $P_2$ , por consiguiente la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  define la función lapso  $N$ ,  $dt = N dt$ . Luego sea el punto  $P_3$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma_{t+dt}$  de tal forma que tenga las mismas coordenadas espaciales que el punto  $P_1$  sobre  $\Sigma_t$ . El vector de  $P_2$  a  $P_3$  define el vector cambio  $N^i$ , y este describe la distorsión de la hipersuperficie  $\Sigma_t$  cuando evoluciona en el tiempo.

También podemos construir la métrica del espacio-tiempo a partir de  $N$ ,  $N^i$  y  $h_{ij}$ , para ello tomemos un punto  $P_4$  sobre  $\Sigma_{t+dt}$  con coordenada espacial  $x^i + dx^i$ . La longitud propia de  $P_1$  a  $P_4$  está determinada por la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  como



$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

y también en términos de la función lapso y cambio, tenemos que se puede descomponer en dos partes: el cuadrado de la distancia sobre la hipersuperficie que contiene a  $P_1$  menos el cuadrado del tiempo propio entre hipersuperficies

$$ds^2 = h_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j) - (N dt)^2, \quad (2.4)$$

en donde  $(N^i dt + dx^i)$  es el desplazamiento sobre la hipersuperficie base y  $N dt$  es el tiempo propio sobre ellas. Igualando las ecuaciones (2.3) y (2.4) podemos expresar la métrica del espacio-tiempo en términos de  $N^i$ ,  $N$  y  $h_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -(N dt)^2 + h_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j), \\ &= (h_{ij}N^iN^j - N^2) dt^2 + (h_{ij}N^j) dx^i dt \\ &\quad + (h_{ij}N^i) dt dx^j + (h_{ij}) dx^i dx^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

y comparando componentes tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{ij}N^iN^j - N^2 & h_{ij}N^j \\ h_{ij}N^i & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$= \begin{pmatrix} h_{ij}N^iN^j - N^2 & h_{ij}N^j \\ h_{ij}N^i & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$= \begin{pmatrix} h_{ij}N^iN^j - N^2 & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

en donde  $h_{ij}h^{ij} = 1$ , y  $N_i = h_{ij}N^j$ . El determinante de  $g_{\mu\nu}$  es,

$$\begin{aligned} |g_{\mu\nu}| &= (h_{ij}N^iN^j - N^2)h_{ij} + N_iN_j \\ &= N^2 h_{ij} - N N^i h_{ij} + N_i N_j \\ &= N^2 h_{ij} - N N^i + N_i N_j \\ &= N^2 h_{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

por otro lado, la matriz adjunta de  $g_{\mu\nu}$  es

$$adj(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} h_{ij} & -N_i \\ -N_j & h_{ij}N^iN^j - N^2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Así, puesto que  $g^{\mu\nu} = \frac{1}{|g_{\mu\nu}|} \text{adj}(g_{\mu\nu})$  y  $h_{ij}h^{ij} = 1$ , obtenemos

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_i h^{ij}}{N^2} \\ \frac{N_j h^{ij}}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

El elemento de volumen está dado por

$$\sqrt{-g} d^4 x = N \sqrt{h} d^3 x dt. \quad (2.13)$$

El siguiente paso es reescribir la acción gravitacional en términos de las nuevas variables, esto es, necesitamos expresar el escalar de curvatura del espacio-tiempo,  ${}^4R$ , y el invariante de volumen  $\sqrt{-g} d^4 x$ , como función de objetos geométricos en la hipersuperficie y de las nuevas variables  $N, N^i$ . Para esto es necesario considerar el encajamiento (ver el Apéndice A) de las hipersuperficies, i.e., la manera en que la hipersuperficie hereda la estructura geométrica, tanto del espacio-tiempo como del encajamiento particular realizado (como se efectuó el corte). También, es necesario estudiar la forma en que los tensores del espacio-tiempo se proyectan sobre la hipersuperficie y sobre la dirección ortogonal a ella. Para ello necesitamos la curvatura extrínseca de  $\Sigma_t$ , la cual está dada por (ver el Apéndice C)

$$K_{ij} = \eta_{i;j}, \quad (2.14)$$

en donde el punto y coma significa derivada covariante (Apéndice B) con respecto a la métrica cuatro-espacial  ${}^4g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). La ecuación (2.14) también se conoce como segunda forma fundamental, y describe la curvatura de la hipersuperficie  $x^0 = \text{constante}$  como vista desde el espacio-tiempo cuatro-dimensional en el cual está encajada. También es conocida como tensor de curvatura extrínseca y se transforma como un tensor simétrico bajo transformaciones de coordenadas espaciales (ver el Apéndice C). La ecuación (2.14) se puede escribir como

$$K_{i,j} = -\eta_{i,j} + {}^4\Gamma^{\mu}_{ij} \eta_{\mu}, \quad (2.15)$$

en donde la conexión afin es

$${}^4\Gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2} (h_{i,j,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}). \quad (2.16)$$

En coordenadas adaptadas  $\eta_{\mu} = -N(1, 0, 0, 0)$  y de (2.12) tenemos

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= -N^4 \Gamma_{ij}^0, \\
&= -N(g^{00} {}^4 \Gamma_{0ij} + g^{0k} \Gamma_{kji}), \\
&= -N \left[ -\frac{1}{2N^2} (N_{i,j} + N_{j,i} - \dot{h}_{ij}) + \frac{1}{N^2} N^k \Gamma_{kji} \right], \\
&= \frac{1}{2N} (N_{ij} + N_{ji} - \dot{h}_{ij}), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

en donde el punto denota derivada con respecto a  $t$ , y "[ ]" denota derivada covariante con respecto a la métrica espacial  $h_{ij}$ , es decir

$$\begin{aligned}
N_{ij} &\equiv e_i \cdot \nabla_j N, \\
&\equiv N_{i,j} - {}^4 \Gamma_{kij} N^k. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Ahora reescribiremos el tensor de Riemann restringido a la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , i.e., escribiremos las componentes  ${}^4 R^i_{jkl}$  en términos de la curvatura extrínseca y del tensor de Riemann intrínseco a la hipersuperficie  ${}^3 R^i_{jkl}$ , el cual se construye mediante la derivada covariante intrínseca a la hipersuperficie. Así, en vez de tomar el vector  $e_0 = \partial t$ , se toma el vector normal  $\mathbf{n}$ . El tensor de Riemann se define como

$$[\nabla_\alpha \cdot \nabla_\beta] A^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\nu, \tag{2.19}$$

el vector  $\mathbf{A}$  se toma sobre la hipersuperficie y las derivadas en la dirección de los vectores  $e_i$ , y usando la ecuación de Gauss

$${}^4 \nabla_i e_j = -K_{ij} \mathbf{n} + {}^3 \Gamma^k_{ji} e_k. \tag{2.20}$$

La segunda derivada covariante es

$$\begin{aligned}
{}^4 \nabla_e {}^4 \nabla_e e_k &= {}^4 \nabla_e [-K_{kj} \mathbf{n} + {}^3 \Gamma^l_{kj} e_l] \\
&= -K_{kj,i} \mathbf{n} - K_{kj} {}^4 \nabla_e \mathbf{n} + {}^3 \Gamma^l_{kj,i} e_l + {}^3 \Gamma^l_{kj} \nabla_e e_l \\
&= -K_{kj,i} \mathbf{n} + K_{kj} K^l_i e_l + {}^3 \Gamma^l_{kj,i} e_l \\
&\quad + {}^3 \Gamma^l_{kj} [-K_{li} \mathbf{n} + {}^3 \Gamma^m_{li} e_m]. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

luego restando  ${}^4 \nabla_e {}^4 \nabla_e e_k$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
{}^4 [\nabla_i \cdot \nabla_j] e_k &= -\mathbf{n} [K_{kj,i} - K_{ij} {}^3 \Gamma^l_{ki} - K_{lk} {}^3 \Gamma^l_{ji} - K_{ki,j} + K_{li} {}^3 \Gamma^l_{kj} \\
&\quad + K_{lk} {}^3 \Gamma^l_{ij}] + [K_{kj} K^l_i - K_{ki} K^l_j + {}^3 R^l_{kij}] e_l \\
&= \mathbf{n} [K_{kij} - K_{kji}] + [{}^3 R^l_{kij} + K_{kj} K^l_i - K_{ki} K^l_j] e_l, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

de esta ecuación se tienen las proyecciones sobre la hipersuperficie y la normal, entonces tenemos que la ecuación de Gauss-Codazzi es

$${}^4R^l_{kij} = {}^3R^l_{kij} + K_{kj}K^l_i - K_{ki}K^l_j, \quad (2.23)$$

y la ecuación de Codazzi-Mainardi es

$${}^4R^\perp_{kij} = K_{kij} - K_{kji}. \quad (2.24)$$

De esta forma conocemos el primer término del escalar de curvatura

$${}^4R \equiv {}^4R^{\mu\nu}_{\mu\nu} = {}^4R^{ij}_{ij} + 2{}^4R^{\mu\perp}_{\mu\perp}. \quad (2.25)$$

Para calcular el segundo término, debemos recordar que el conmutador de las derivadas covariantes del vector normal está dado en términos del tensor de Riemann por

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\eta^\nu = {}^4R^\nu_{\rho\alpha\beta}\eta^\rho \equiv R^\nu_{\perp\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

y en componentes

$$R^\perp_{\nu\alpha\beta} = \eta_{\nu;\alpha\beta} - \eta_{\nu;\beta\alpha}, \quad (2.27)$$

luego, proyectando el tercer índice del tensor sobre la normal y contrayendo los índices segundo y cuarto, tenemos

$$\begin{aligned} R^{\perp\mu}_{\perp\mu} &\equiv \eta^\nu R^{\perp\mu}_{\nu\mu} \\ &= \eta^\nu (\eta^\lambda_{;\lambda\nu} - \eta^\lambda_{;\nu\lambda}), \\ &= (\eta^\nu \eta^\lambda_{;\lambda})_{;\nu} - (\eta^\nu \eta^\lambda_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu_{;\nu} \eta^\lambda_{;\lambda} + \eta^\nu_{;\mu} \eta^\mu_{;\nu}, \\ &= (\eta^\lambda \eta^\nu_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu_{;\nu} \eta^\mu_{;\mu} + \eta^\nu_{;\mu} \eta^\mu_{;\nu}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

pero como

$$\eta^\mu_{;\mu} = -K^i_i \equiv -K, \quad (2.29)$$

y

$$\eta^\nu_{;\mu} \eta^\mu_{;\nu} = K_{ij} K^{ij}, \quad (2.30)$$

así el término buscado es

$$R^{\perp\mu}_{\perp\mu} = K_{ij} K^{ij} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}, \quad (2.31)$$

en donde hemos definido

$$\Delta^\lambda = \eta^\lambda \eta^\nu_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda_{;\nu}. \quad (2.32)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.31) y (2.23) en (2.25), obtenemos que el escalar de curvatura es

$$\begin{aligned} {}^4R &= {}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} + 2[K_{ij}K^{ij} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}], \\ &= {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 + 2(\Delta^\lambda)_{;\lambda}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2.3 Formulación Hamiltoniana

Consideremos la acción del campo gravitacional dada por

$$S = \int \sqrt{-g} R dx^4, \quad (2.34)$$

y expresándola en términos de las variables ADM mediante (2.13) y (2.33), toma la siguiente forma

$$S[N, N^i, h_{ij}] = \int dt \int \sqrt{h} N [{}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}] d^3x. \quad (2.35)$$

La densidad Lagrangiana no depende de las derivadas temporales de las variables  $N^\mu$ , por consiguiente estas no formarán parte de la dinámica del campo. Por consiguiente, los momentos conjugados a  $N$  y  $N_i$  son cero

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} = 0, \quad (2.36)$$

$$\pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_i} = 0, \quad (2.37)$$

en donde el punto denota derivada con respecto al tiempo  $t$ . Las ecuaciones (2.36) y (2.37) son conocidas en la terminología de Dirac como constricciones "primarias". Los momentos conjugados a las seis  $h_{ij}$  son

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{ij}}. \quad (2.38)$$

Para calcular estos momentos, se introduce la supermétrica

$$G^{ijkl} \equiv \sqrt{h} \left[ \frac{1}{2} (h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl} \right], \quad (2.39)$$

y en términos de (2.39) se puede reescribir la Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = N(G^{ijkl} K_{ij}K_{kl} + \sqrt{h} {}^3R), \quad (2.40)$$

por consiguiente

$$\pi^{ij} = N \left( 2G^{mnkl} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \right), \quad (2.41)$$

y de (2.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{h}_{mn}} &= -\frac{1}{2N} \left[ \frac{1}{2} (\delta_i^m \delta_j^n + \delta_j^m \delta_i^n) \right], \\ &\equiv -\frac{1}{2N} \delta^{mn}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

por consiguiente (2.41), se transforma en

$$\pi^{ij} = -G^{ijkl} K_{kl}. \quad (2.43)$$

Ahora necesitamos despejar las velocidades como funciones de los momentos para poder realizar la transformada de Legendre de la Lagrangiana. Las velocidades  $N^\mu$  son funciones arbitrarias y no se pueden expresar en términos de las coordenadas y los momentos. Las velocidades de la métrica  $h_{ij}$  se obtendrán al invertir (2.43), para ello necesitamos conocer a  $G_{ijkl}$ , que cumple con

$$G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_i^m \delta_j^n. \quad (2.44)$$

La forma más general para la inversa, es la conocida métrica de DeWitt[2]

$$G_{ijkl} = \frac{1}{h} \left[ A \frac{1}{2} (h_{ik} h_{jl} + h_{im} h_{jk}) + B h_{ij} h_{kl} \right], \quad (2.45)$$

y sustituyendo (2.45) en (2.44) obtenemos que  $A = 1$  y  $B = -\frac{1}{2}$ , por consiguiente la curvatura extrínseca se puede escribir como

$$K_{ij} = -G_{ijkl} \Pi^{kl}, \quad (2.46)$$

entonces de (2.17) y (2.46) las velocidades se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ij} &= N_{i|j} + N_{j|i} - 2N K_{ij}, \\ &= N_{i|j} + N_{j|i} + 2N G_{ijkl} \pi^{kl}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Por consiguiente, el Hamiltoniano será

$$H = \int (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}) d^3x, \quad (2.48)$$

y la densidad Hamiltoniana es

$$\begin{aligned}
H &= \pi^{ij} \dot{H}_{ij} - \mathcal{L}, \\
&= -G^{ijkl} K_{kl} (N_{ij} + N_{ji} - 2NK_{ij}) - N(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{h}^3 R), \\
&= N\sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R) - 2\pi^{ij} N_{ij},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

integrando por partes el segundo término, tenemos

$$\begin{aligned}
H &= \int [N\sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R) + N^i(2\pi_{ij}^j)] d^3x, \\
&= \int [N\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i] d^3x,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

en donde

$$\mathcal{H}_0 = \sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R), \tag{2.51}$$

y

$$\mathcal{H}_i = 2\pi_{ij}^j. \tag{2.52}$$

Por otro lado, ya que las constricciones primarias  $\pi = \pi^i = 0$  son válidas en todo tiempo, se cumple también que  $\dot{\pi} = \dot{\pi}^i = 0$ . Los paréntesis de Poisson de  $\dot{\pi}$  y  $\dot{\pi}^i$  son

$$\dot{\pi} = -\{H, \pi\} = \frac{\partial H}{\partial N} = 0, \tag{2.53}$$

y

$$\dot{\pi}^i = -\{H, \pi^i\} = \frac{\partial H}{\partial N_i} = 0. \tag{2.54}$$

esto nos lleva a una restricción secundaria

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = 0. \tag{2.55}$$

De (2.48) y (2.49), la densidad Lagrangiana se puede escribir como

$$\mathcal{L}[N, N^i, h_{ij}, \dot{h}_{ij}, \pi^{ij}] = \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - H\mathcal{H}_0 + N^i\mathcal{H}_i. \tag{2.56}$$

Las funciones  $N^\mu$  en la acción (2.56) juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y se dice que está en forma paramétrica, ya que no está en forma canónica, esto es, además de ser función de  $\pi^{ij}$  y  $\dot{h}_{ij}$ , también lo es de  $h_{ij}$ ,  $N$  y  $N^i$ .

Por lo antes expuesto, tenemos que para una foliación dada de la variedad cuatro-dimensional del espacio-tiempo, mediante hipersuperficies espaciales  $\Sigma_t$ , siempre es posible escoger coordenadas Gaussianas normales, en las cuales

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.57)$$

Estas coordenadas ( $N^i = 0$ ) que se mueven con la propiedad adicional de que  $t$  es un parámetro de tiempo propio ( $N = 1$ ). Esta es la elección de norma "estándar" que se hace en cosmología clásica, y en tales coordenadas  $K_{ij} = -\dot{h}_{ij}$ , en donde el punto denota diferenciación con respecto a  $t$ . Al hacer la descomposición 3+1, sin embargo, tenemos libertad únicamente para hacer una elección específica de coordenadas tales como (2.57), después variar la acción si queremos asegurar el obtener las ecuaciones de Einstein, y así debemos retener las funciones lapso y cambio para el tiempo.

## 2.4 El superespacio

Como preludeo a la cuantización canónica primero introduciremos el espacio de configuración relevante en el cual la dinámica cuántica será definida. Hemos mencionado que en la geometrodinámica el espacio-tiempo es la evolución de las tres-geometrías. El objeto que evoluciona es la geometría de una tres-variedad  $m$  y esta es la variable dinámica de la relatividad general. El espacio en que evolucionan todas las tres-geometrías es precisamente el espacio de las tres-geometrías. Este espacio es el conjunto en el que cada punto es una tres-geometría y en él están todas las tres-geometrías posibles para la variedad  $m$ . Este espacio es conocido como *superespacio*[4] y se denota por  $\mathcal{G}$ .

Consideremos el espacio de de todas las tres-métricas Riemannianas y las configuraciones de materia sobre las hipersuperficies espaciales  $\Sigma$ ,

$$\text{Riem}(\Sigma) \equiv \{h_{ij}(x), \Phi(x) \mid x \in \Sigma\}. \quad (2.58)$$

Este es un espacio infinito-dimensional, a causa de la etiqueta  $x = \{x^i\}$ , la cual especifica el punto sobre la hipersuperficie, pero hay un número infinito de grados de libertad en cada punto,  $x \in \Sigma$ . Estamos interesados por la geometría aquí y configuraciones que puedan relacionarse una con otra por medio de un difeomorfismo, i.e., una transformación de coordenadas, y debería ser considerada equivalente ya que su geometría intrínseca es la misma. Así factorizamos con difeomorfismos en las hipersuperficies e identificamos el superespacio como

$$\frac{\text{Riem} \Sigma}{\text{Dif}_0(\Sigma)}, \quad (2.59)$$

en donde el subíndice cero denota el hecho de que consideramos solamente difeomorfismos que están conectados a la identidad. El espacio infinito-dimensional será el espacio de configuración básico de la cosmología cuántica.

La métrica de DeWitt (2.45) provee entonces una métrica en el superespacio la cual se puede escribir como



$$G_{AB}(x) \equiv G_{(ij)(kl)}(x), \quad (2.60)$$

en donde los índices  $A, B$  corren sobre las componentes independientes de la métrica intrínseca  $h_{ij}$

$$A, B \in \{h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33}\}. \quad (2.61)$$

La métrica de DeWitt tiene una signatura  $(- + + + +)$  en cada punto  $x \in \Sigma$ , prescindiendo de la signatura de la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$ . Para incorporar todos los grados de libertad, se necesita también extender el rango de los índices  $A, B$  para incluir los campos de materia, definiendo  $G_{\phi\phi}(x)$  (y otras componentes si están presentes más de una componente de campos de materia), de ese modo se obtiene la supermétrica completa.

## 2.5 Cuantización canónica

Con la formulación Hamiltoniana de la relatividad general se buscaba la posibilidad de cuantizar la teoría. En otras palabras, asociar a cada variable canónica un operador sobre un espacio vectorial e imponer reglas de conmutación entre pares de variables conjugadas. Así el operador Hamiltoniano se convierte en un generador de traslaciones en el tiempo, es decir, describe la dinámica del sistema. Desafortunadamente, en relatividad general la cuantización del Hamiltoniano no es directa, debido a la presencia de las 4 constricciones (2.51) y (2.52), entre las variables canónicas.

Las aproximaciones básicas para el problema de las constricciones son:

(i) Retener las constricciones, en particular  $\mathcal{H}_i$ , esto es, considerar a todas las variables pero imponer condiciones sobre el vector de estado dadas por las cuatro constricciones, es decir, pedir que las constricciones (ahora como operadores) anulen al vector de estado cuando actúen sobre él. Esta aproximación es conocida como cuantización de Dirac[29]. La idea original de Dirac fue escoger  $N$  y  $N'$ , luego resolver el problema cuántico ignorando las constricciones, para imponer finalmente sobre las funciones de onda las condiciones

$$\mathcal{H}_i \psi = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_i' \psi = 0. \quad (2.62)$$

para restringir la atención a los estados físicos.

(ii) Eliminar las constricciones, principalmente  $\mathcal{H}_i = 0$ . Básicamente, esto es lo realizado en el procedimiento ADM, en donde se eliminan todas las constricciones antes de cuantizar, de forma tal que en vez del super-Hamiltoniano  $H$ , tenemos un "Hamiltoniano reducido" de los grados de libertad. En esta aproximación son

retenidos los grados de libertad infinitos correspondientes a la variable temporal dados por la tres-geometría, junto con la constricción adicional que surge de  $H$ .

Como fue mostrado anteriormente en la teoría parametrizada, cuando se elimina a  $\mathcal{H}_i = 0$ , entonces  $\mathcal{H} = 0$  produce la ecuación de Schrödinger para la función de onda del universo  $\mathcal{H}\psi = 0$ , esta función de onda gobierna los campos de materia y la geometría del espacio-tiempo, y es conocida como la ecuación de Wheeler-DeWitt[2, 3].

Resumiendo, en la aproximación de la cuantización canónica para la teoría del campo cuántico, un campo cuántico se toma como una colección de operadores dependientes de la posición, uno para cada punto en el espacio. Los cálculos que se realizarán en las siguientes secciones están basados en la imagen de Schrödinger, en la cual los operadores son independientes del tiempo, y la evolución temporal del sistema cuántico esta codificada en el vector de estado. Cada campo cuántico  $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$  tiene asociado a él a una densidad de momento conjugada  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ . Las relaciones de conmutación entre el campo y su momento son

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\Phi}(\mathbf{y})] = -i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.63)$$

la cual generaliza las relaciones de conmutación de la mecánica cuántica ordinaria

$$[\hat{p}_i, \hat{q}^j] = -i\hbar\delta^i_j. \quad (2.64)$$

## 2.6 Cuantización por integrales de trayectoria

Otro proceso alternativo de cuantización es la aproximación de integral de trayectoria. Las técnicas de integral de trayectoria en gravedad cuántica empezaron a usarse a finales de la década del 70[34, 31]. El punto de partida es la idea de Feynman de que la amplitud que va de un estado con una métrica intrínseca  $h_{ij}$ , y configuración de materia  $\Phi$ , en una hipersuperficie inicial  $\Sigma$ , a otro estado con métrica  $h'_{ij}$  y configuración de materia  $\Phi'$  en una hipersuperficie final  $\Sigma'$ , está dada por una integral funcional de  $e^{iS}$  sobre todas las cuatro-geometrías  $g_{\mu\nu}$ , y configuraciones de materia  $\Phi$ , las cuales se interpolan entre las configuraciones inicial y final

$$\langle h'_{ij}, \Phi', \Sigma' | h_{ij}, \Phi, \Sigma \rangle = \sum_M \int Dg D\Phi e^{iS[g_{\mu\nu}, \Phi]}. \quad (2.65)$$

En la teoría cuántica de campos ordinaria en el espacio-tiempo plano la integral de trayectoria tiene la dificultad de que ya que la acción  $S[g_{\mu\nu}, \Phi]$  es finita, la integral oscila y por lo tanto diverge. Además, la solución que extrema la acción está dada al resolver una ecuación hiperbólica entre las superficies frontera inicial y final, lo cual no es un problema matemáticamente bien propuesto, y puede ser que no tenga solución o bien que tenga infinitas soluciones. Para tratar con este problema se realiza una "rotación de Wick" a tiempo imaginario  $t \rightarrow -i\tau$ , y se considera una

integral de trayectoria formulada en términos de la acción Euclidea  $I = -iS$ . La acción entonces está definida positiva, de tal forma que la integral de trayectoria es amortiguada exponencialmente y debe converger. También el problema de encontrar los extremos viene a ser el de resolver una ecuación elíptica con condiciones de frontera, y esto está bien definido.

Se debe intentar aplicar una aproximación similar a la gravedad cuántica, reemplazando  $S$  en (2.65) por la acción Euclidea<sup>1</sup>  $I[g_{\mu\nu}, \Phi] = -iS[g_{\mu\nu}, \Phi]$ , y tomando la suma en (2.65) sobre todas las métricas con signatura  $(+++)$ , que inducen las tres-métricas apropiadas  $h_{ij}$  y  $h'_{ij}$  en las hipersuperficies de pasado y futuro. Esta aproximación a la gravedad cuántica ha tenido algunos éxitos importantes, algunos de ellos han sido que: (i) proveen una forma elegante para derivar las propiedades termodinámicas de los hoyos negros[33, 34, 35] y (ii) provee un significado natural para discutir los efectos gravitacionales de los instantones[36, 37, 38]. Se ha encontrado que los instantones gravitacionales proveen la contribución dominante a la integral de trayectoria en procesos tales como como creación de pares de hoyos negros cargados en un campo magnético[39, 40, 41], y por lo tanto proveen un significado al cálculo de los rangos de tales procesos semiclásicos.

Los problemas asociados con la aproximación Euclidea para la gravedad cuántica son considerables. Primeramente, a diferencia de las teorías de campo ordinarias tales como la teoría de Yang-Mills, la acción gravitacional no es definida positiva, y así la integral de trayectoria no converge si se restringe la suma a métricas de signatura Euclidea real. Para hacer que la integral de trayectoria converja es necesario incluir métricas complejas en la suma[42]. Sin embargo, no es único el contorno para integrar a lo largo del superespacio[43] y el resultado que se obtiene para la integral de trayectoria debe depender crucialmente del contorno que se escoja. Además, la medida en (2.65) está mal definida. Solamente en los últimos diez años, es que los matemáticos han tenido éxito al hacer integración de trayectoria en la teoría cuántica de campo ordinaria rigurosamente definida. No obstante, se toma la función de onda del universo  $\Psi$  sobre una hipersuperficie  $\Sigma$ , con una tres-métrica intrínseca  $h_{ij}$ , y configuración de materia  $\Phi$ , para ser definida[44, 45] por la integral funcional

$$\Psi[h_{ij}, \Phi, \Sigma] = \sum_M \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\Phi e^{-iI[g_{\mu\nu}, \Phi]}, \quad (2.66)$$

en donde la suma es sobre una clase de cuatro-métricas  $g_{\mu\nu}$ , y configuraciones de materia  $\Phi$ , que toman valores  $h_{ij}$  y  $\Phi$  en la frontera  $\Sigma$ . Se han propuesto defini-

<sup>1</sup>Estrictamente se debería llamar a esta acción Riemanniana, ya que los espacios "Euclideos" son aquellos que son planos, mientras que las variedades curvadas con signatura  $(+++)$  son conocidas como espacios Riemannianos. Sin embargo, la terminología de acción "Euclidea" se ha tomado de la teoría cuántica de campo y se ha adoptado, a pesar del hecho de que no tratamos con  $\mathbb{R}^4$ .

ciones alternativas de la función de onda. En particular Linde[11] ha supuesto que se debería hacer una rotación de Wick con el signo opuesto, i.e.,  $t \rightarrow +i\tau$  en vez de  $t \rightarrow -i\tau$ , conduciendo a un factor  $e^{+I}$  en vez de  $e^{-I}$  en (2.66). Alternativamente, se podría usar una integral de trayectoria Lorentziana[10], con  $e^{iS}$  en vez de  $e^{-I}$  en (2.66). En cualquier caso, para conseguir la convergencia de la integral de trayectoria es necesario incluir variedades complejas en la suma, las cuales oscurecen un tanto las distinciones entre estas definiciones propuestas de  $\Psi$ . La distinción real entre las definiciones alternativas surge cuando se imponen condiciones a la frontera, al restringir las cuatro-variedades incluidas es la suma en (2.66). Por ejemplo, se podría considerar el sector Euclidean como el sector apropiado de la teoría cuántica en la cual se impondría una condición "inicial" de frontera sobre  $\Psi$ , lo cual haría a (2.66) el punto de partida natural, como en el caso de la propuesta de no-frontera[44, 45]. Condiciones de frontera alternativas favorecerían la integral de trayectoria Lorentziana[10].

La definición de integral de trayectoria de la función de onda (2.66) es consistente con la definición primera basada en la cuantización canónica. En el formalismo de la cuantización canónica cualquier solución particular de la ecuación de WDW dependerá de la especificación de las condiciones de frontera sobre la función de onda. En la formulación de integrales de trayectoria la solución particular de la ecuación de WDW que se obtiene, similarmente depende del contorno de integración escogido en el superespacio, y la clase de cuatro-métricas sobre las que se suma en (2.66). Desafortunadamente no se sabe cómo elegir el contorno y la clase de trayectorias prescriben las condiciones de frontera sobre la función de onda en el caso general. Sin embargo se pueden conocer para modelos específicos.

## 2.7 El minisuperespacio

En la práctica no es posible trabajar con las infinitas dimensiones del superespacio completo. Por lo tanto, una aproximación útil es truncar los grados infinitos de libertad a un número finito, y por medio de ello obtener algún modelo particular del minisuperespacio. Una forma fácil de lograr esto es considerando métricas homogéneas, ya que como se observó anteriormente para cada punto  $x \in \Sigma$  hay un número finito de grados de libertad en el superespacio.

Los resultados que se obtienen por esta aproximación satisfacen más por lo que parecen, que por su poder predictivo. Sin embargo, el truncamiento del minisuperespacio aún no ha sido hecho parte de un riguroso esquema de aproximación para completar la cosmología cuántica del superespacio. Los modelos del minisuperespacio deben ser considerados como modelos de juguete, los cuales no obstante esperamos que capturen algo de la esencia de la cosmología cuántica.

## 2.8 Condiciones a la frontera

La especificación de condiciones a la frontera para la ecuación de WDW debe parecer una desilusión, ya que parece que estamos reemplazando justo una elección arbitraria de parámetros que describen la evolución clásica del universo por una elección arbitraria de parámetros que describen su evolución cuántica. Sin embargo, si la mecánica cuántica es una teoría universal entonces se debe aplicar en las épocas más tempranas de la existencia del universo, en cuyo caso es natural que la dinámica cuántica preceda la dinámica clásica. Esto justifica una condición a la frontera cuántica para el universo como si fuera más fundamental que la clásica. En cualquier caso, la única alternativa para la elección de condiciones a la frontera cuánticas sería que la consistencia matemática debe ser suficiente para garantizar una solución única para la ecuación de WDW, como originalmente esperaba DeWitt[2]. Sin embargo, esto no parecería ser el caso si la experiencia obtenida del estudio de los modelos del minisuperespacio se traslada al superespacio.

La cuestión surge naturalmente como si debería haber alguna condición a la frontera natural, la cual de una vez y por todas determinará la evolución cuántica del universo en los primeros tiempos, o alternativamente como si la naturaleza de la dinámica cuántica debería ser un tanto indiferente a tales elecciones. Cuando se trata de avanzar en esta pregunta surgen profundos problemas conceptuales. A diferencia de otras situaciones de la física cuántica, en donde las condiciones a la frontera son especificadas rápidamente por la simetría de problemas particulares, tales como la simetría esférica en el caso del átomo de hidrógeno, el origen del universo posee una situación en la cual se debe abandonar toda intuición y se puede proceder al menos en una sola base estética.

Habiendo hecho una elección de condición a la frontera, podemos de seguro resolver la ecuación de WDW y estudiar las consecuencias físicas para la evolución del universo. Sin embargo, sin algún principio adicional se debería estudiar varias condiciones a la frontera distintas antes de hacer alguna predicción. Llegar a un principio que evite este problema es un reto inmenso: sería más o menos llegar a una ley adicional de la física que deba ser añadida a las otras que describen la evolución cuántica del universo. La situación debe ser considerada como la misma cuando tratamos de describir la fase de transición de gas a líquido si todos los fenómenos físicos que conocemos están relacionados únicamente con la fase gaseosa. El universo parece tener un fase de transición cuando fue formado, pero la única experiencia que tenemos disponible es la que involucra sólo el estado posterior del universo.

Se pueden conseguir avances al intentar definir condiciones a la frontera naturales para la función de onda del universo, y examinar sus consecuencias. Esto llegó a ser una actividad importante en la década pasada del 80. Sólo se discutirán dos de las más estudiadas condiciones a la frontera, la "propuesta de no-frontera" y

la "propuesta de tunelamiento". Sin embargo, se han propuesto otras condiciones a la frontera, tales como la "propuesta de todas las posibles fronteras" de Suen y Young[46] y la "condición inicial simétrica" de Conradi y Zeh[47].

### 2.8.1 La propuesta de no-frontera

La propuesta de Hartle y Hawking[44, 45] se refiere a que se debería restringir la suma en la definición de la función de onda del universo (2.66), para incluir sólo cuatro-variedades Euclidianas compactas,  $\mathcal{M}$ , para las cuales la hipersuperficie espacial  $\Sigma$  en la cual  $\Psi$  está definida forma la única frontera, y sólo las configuraciones de materia que son regulares en estas geometrías. El universo no tiene entonces una frontera singular para el pasado, como en el caso de la cosmología estándar de FRW. Así la suma (2.66) incluye variedades tales como las mostradas en la Figura 2. Hawking[45] señaló que: *las condiciones a la frontera del universo son que no tiene frontera.*

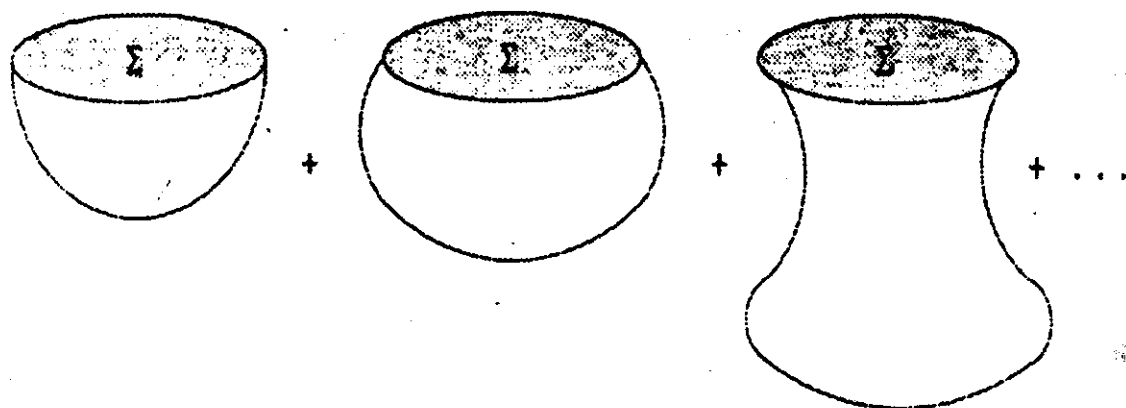


Figura 2. Las geometrías permitidas por la propuesta de no frontera de Hartle-Hawking.

Intuitivamente lo que Hartle y Hawking tenían en mente al formular esta propuesta fue evitar la singularidad inicial mediante "suavizar la geometría del universo en tiempo imaginario". Por ejemplo, mientras que una superficie con  $\sqrt{h} = 0$  debería ser singular en una métrica de signatura Lorentziana, este no necesariamente es el caso si la métrica es de signatura Euclideana, como se puede ver en el ejemplo de  $S^4$  mostrado en la Figura 3.

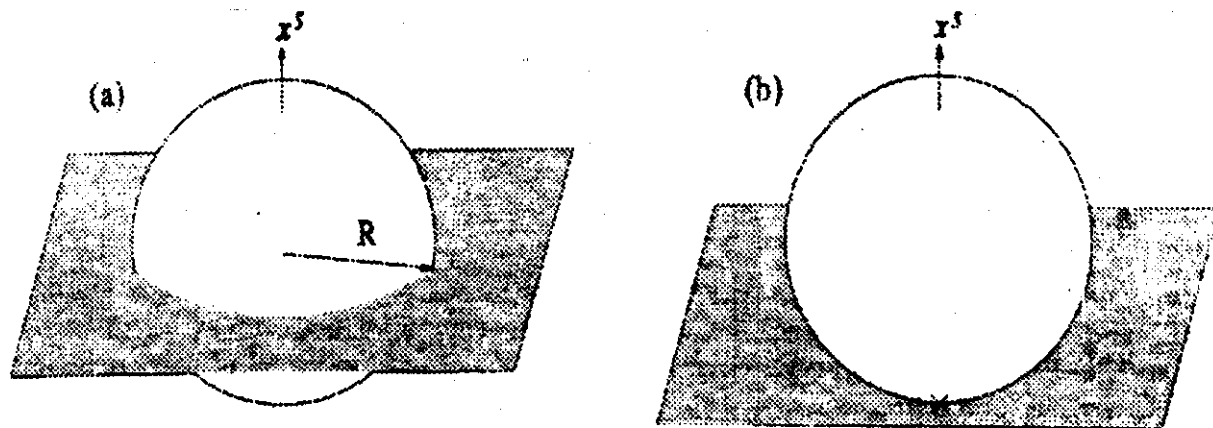


Figura 3. Corte de una cuatro-esfera de radio  $R$  encajada en un espacio plano cinco-dimensional: (a) una superficie  $|x^5| = a < R$  intersecta a la cuatro-esfera en una tres-esfera de radio distinto de cero; (b) cuando  $|x^5| = R$  la tres-esfera se contrae a radio cero pero no hay singularidad de la cuatro-geometría.

Idealmente, la propuesta de no frontera nos debería decir qué condiciones iniciales poner cuando tomamos variedades con  $\sqrt{\hbar} \rightarrow 0$ , o cualquier límite similar consistente con la propuesta. Si se toma el límite en un tiempo inicial  $\tau = 0$ , la propuesta de no frontera conduciría a condiciones sobre  $h_{ij}(x, 0)$ ,  $\phi(x, 0)$  y sus derivadas. En la práctica, la cosmología cuántica raramente es estudiada más allá de la aproximación semiclásica, en la cual  $\Psi \simeq \mathcal{A}e^{-I_{cl}}$ , en donde  $I_{cl}$  es la acción clásica (posiblemente compleja) evaluada por la solución de las ecuaciones de campo Euclidianas. En la aproximación semiclásica por lo tanto se trabaja sólo con condiciones a la frontera en la métrica y campos de materia que corresponden a la propuesta de no-frontera en el nivel clásico. En particular, se pide: (i) que la cuatro-geometría sea cerrada; y (ii) que los puntos de silla de montar de la integral funcional correspondan a soluciones regulares de las ecuaciones clásicas de campo que prescriben los datos iniciales sobre  $\Sigma$ .

Una cuestión que no es explicada por la propuesta de no frontera es la elección de un contorno de integración para la integral de trayectoria. Como se mencionó antes, la integral de trayectoria sobre métricas Euclidianas no converge, y así es necesario incluir métricas complejas para hacer que la integral de trayectoria converja. Tales métricas generalmente incluyen aquellas que ni son verdaderamente Euclidianas ni verdaderamente Lorentzianas, y así se tiene la imagen simple de una geometría Euclidea compacta cocida en una Lorentziana, que es sugerida por la "suavización

de la geometría del universo en tiempo imaginario", no es completamente correcta. En general, se debería esperar una métrica verdaderamente compleja para interpolar la Euclidea con la Lorentziana, y en general la geometría inicial debería ser sólo "aproximadamente Euclidea" y la geometría final sólo "aproximadamente Lorentziana" [48]. Desafortunadamente el criterio para lograr la convergencia de la integral de trayectoria no distingue un contorno de integración único, y la propuesta de no frontera no parece ofrecer ningún indicio adicional de cómo debería ser escogido el contorno [49].

La no unicidad del contorno de integración es ya un problema en el más simple de los modelos no triviales del minisuperespacio concebidos, es decir, el universo de FRW  $k = +1$  con un término cosmológico y sin otra materia el "modelo del minisuperespacio de de Sitter". En el nivel semiclásico se puede calcular  $e^{-I_{cl}}$  mediante el método de paso descendente. Hartle y Hawking discutieron esto en su artículo original de "no frontera" [44], y dedujeron heurísticamente que un punto particular de silla de montar produciría la contribución dominante para la integral de trayectoria, es decir el punto de silla de montar correspondiente a la solución clásica Euclidea que hace la  $\Sigma$  hipersuperficie  $S^3$  a una cuatro-esfera llenada a menos de la mitad, o que hace a  $S^3$  una cuatro-esfera llenada más de la mitad (ver Figura 4).

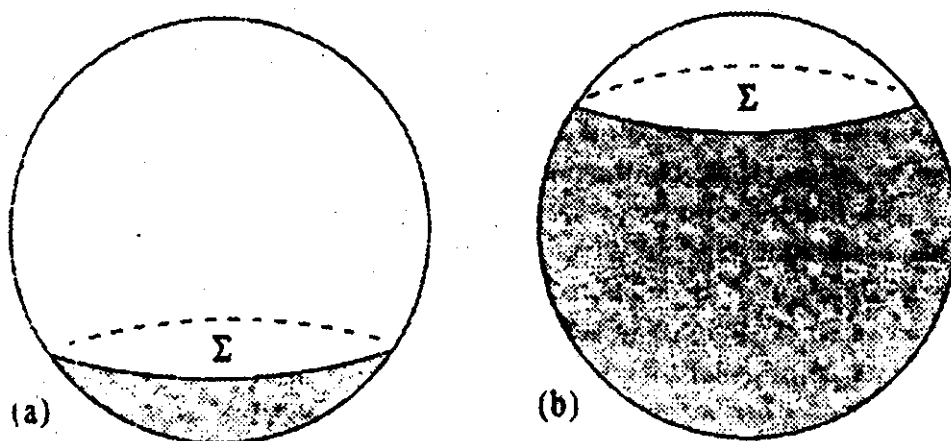


Figura 4. Soluciones Euclideas que corresponden a tomar una hipersuperficie de tres-esfera  $\Sigma$ , a una cuatro-esfera que es: (a) llenada menos de la mitad; (b) llenada más que la mitad.

Sin embargo, su argumento no resiste un análisis más riguroso. Halliwell y Louko [43] encontraron un medio de evaluar exactamente la integral de trayectoria del minisuperespacio, y por medio de ello determinar explícitamente el contorno convergente. Ellos mostraron que este modelo simple posee contornos inequivalentes para los cuales la integral de trayectoria converge. Estos pasan a través de diferentes puntos



a. de silla de montar y conducen a distintas funciones de onda semiclásicas. Así hay  
 o- muchas funciones de onda de no frontera, cada una correspondiendo a una elección  
 er- de diferente contorno. El problema persiste en los modelos más complicados[43].  
 te- Debido a que diferentes funciones de onda de no frontera podrían conducir a predic-  
 la- ciones físicas diferentes, la ambigüedad asociada con la elección del contorno pare-  
 ta- cería ser el problema más significativo con la propuesta de no frontera que aún  
 si- permanece para ser resuelto.

## 2.8.2 La propuesta de tunelamiento

le Una aproximación alternativa debida a Vilenkin se refiere a que la condición a la fron-  
 so- tera para la función de onda  $\Psi$ , debería ser tal como para incorporar la noción de que  
 el- el universo "es tunelado de la nada a existir" sin hacer así restricciones específicas so-  
 la- bre la geometría " inicial" como lo hace la propuesta de Hartle-Hawking. Hay muchos  
 su- caminos posibles en los que una noción así pueda ser trasladada matemáticamente  
 to- a una definición de la función de onda  $\Psi$ , y en verdad se han dado muchas formu-  
 al- laciones alternativas de la propuesta de tunelamiento. En particular la de Linde[11]  
 ón- tiene una filosofía similar. Algunas de las primeras versiones fueron formuladas en  
 a- una manera similar a la propuesta de no frontera, en particular la propuesta de  
 er- Vilenkin[10] se hizo definiendo la función de onda mediante una integral funcional  
 sobre métricas Lorentzianas que interpolan entre una configuración dada de materia  
 $\Phi$ , la tres-geometría  $h_{ij}$  y una tres-geometría  $\emptyset$  igual a cero quedando

$$\Psi[h_{ij}, \Phi, \Sigma] = \sum_M \int_{\emptyset}^{(h, \Phi)} Dg D\Phi e^{iS[g_{\mu\nu}, \Phi]}, \quad (2.67)$$

Vilenkin también dió una formulación alternativa de la propuesta de tunelamiento  
 en términos de una condición de frontera en el superespacio[10], en vez de una res-  
 tricción sobre las variedades incluidas en la integral de trayectoria. Para formular  
 las condiciones a la frontera en el superespacio es necesario considerar su frontera,  
 que se puede pensar como consistente de una tres-métrica y configuraciones de ma-  
 teria para las cuales la tres-curvatura es infinita, o  $|\Phi| \rightarrow \infty$ . Como se vió para  
 el ejemplo de  $S^4$  (Figura 4) no todas la tres-geometrías singulares corresponderán  
 a cuatro-geometrías singulares, pero es posible obtener una tres-geometría singular  
 por medio de una rebanada degenerada de la cuatro-geometría. Por lo tanto, se  
 deberían distinguir los puntos en la frontera del superespacio que corresponden a  
 singularidades genuinas de la cuatro-geometría de aquellos que corresponden a re-  
 banadas degeneradas. La anterior se llamará " frontera singular del superespacio",  
 y la última " frontera no singular".

La propuesta de Vilenkin[10] es que *la función de onda  $\Psi$ , debería ser limitada en  
 cualquier parte, y en fronteras singulares del superespacio  $\Psi$  incluye sólo modos-  
 salientes, i.e., aquellos que llevan un flujo fuera del superespacio. Así los modos  
 entrantes sólo pueden entrar en una frontera no singular. Esta definición es un*

tanto vaga cuando no hay una definición rigurosa de la definición de modos de frecuencia negativa y positiva en el superespacio debido al hecho de que no posee vectores de Killing[50], y así no es clara la noción de cuáles modos son "salientes" y cuáles "entrantes". Además, la estructura del superespacio no está completamente entendida, y no se ha mostrado rigurosamente que su frontera se pueda cortar en partes singulares y no singulares.

La propuesta de tunelamiento se ha formulado con la aproximación WKB del minisuperespacio, en cuyo caso las nociones de frontera del minisuperespacio, de modos entrantes y salientes están definidas más claramente. Ya que cada modo WKB oscilatorio  $\Psi \approx e^{iS_n}$  tiene una corriente  $\mathcal{J} \simeq |A_n|^2 \nabla S_n$ , en donde  $\mathcal{A}$  es una región del superespacio, se pueden clasificar los modos como entrantes y salientes de acuerdo a la dirección de  $\nabla S_n$  en la superficie en cuestión. Heurísticamente, la idea que subyace en la condición de frontera de Vilenkin es que el ensamble de universos descritos por  $\Psi$  no debería incluir ningún universo contrayéndose desde un tamaño infinito[10], sino sólo aquellos que corresponden a "tunelamiento de la nada". La condición del "flujo saliente"[10] concuerda con esta noción al menos en el caso de los modelos simples del minisuperespacio.

La versión del flujo saliente de la propuesta de tunelamiento concuerda con la formulación de integral de trayectoria (2.67) en el caso del modelo del minisuperespacio de de Sitter más simple[10, 51], pero las dos versiones no parecerían ser equivalentes en general[43]. Mientras que la función de onda de no frontera fija los datos iniciales pero deja el contorno de integración ambiguo, la propuesta de tunelamiento fija el contorno de integración pero deja alguna ambigüedad en la especificación de los datos iniciales, aún cuando se imponga la condición de flujo saliente[43, 54].

## 2.9 Agujeros de gusano

### 2.9.1 Antecedentes históricos

Los primeros cálculos formales de agujeros de gusano datan de 1935 por Einstein y Rosen[55]. El término de *wormhole* no fue usado por ellos, sino el de *punte* a lo largo de una hoja doble del espacio-tiempo. En aquellos tiempos no tenían una noción clara de teoría de campo y de partícula. Einstein y Rosen intentaron construir un modelo geométrico de una "partícula" física elemental la cual fuera finita en cualquier lugar y que estuviera libre de singularidades, en la referencia [55] se cita:

*"Estas soluciones involucran la representación matemática del espacio físico por un espacio de dos hojas idénticas, siendo representada una partícula por un puente conectando estas hojas".*

Ellos sentaron ideas generales sobre el concepto de agujero de gusano. En su trabajo mencionaron dos tipos de "puentes", neutral y cuasicargado[56].

### 2.9.2 El puente neutral

El puente de Einstein-Rosen simplemente es la observación de que un cambio de variable adecuado parece hacer que desaparezca la singularidad de Schwarzschild. Esto lo traduciríamos diciendo que hay algunos sistemas de coordenadas que cubren naturalmente sólo las dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo de Schwarzschild extendido máximamente. La región interior que contiene la singularidad de curvatura de Schwarzschild no está cubierta por ninguno de los sistemas Einstein-Rosen o coordenadas isotrópicas.

Consideremos la geometría de Schwarzschild en unidades geometrodinámicas  $c \equiv G \equiv 1$  y  $m_P \equiv \ell_P \equiv T_P \equiv \sqrt{\hbar}$

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.68)$$

Haciendo el cambio de variable  $u^2 = r - 2M$ , entonces (2.68) se puede poner en la forma de Einstein-Rosen

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2, \quad (2.69)$$

en donde  $u \in (-\infty, +\infty)$ . Con este cambio se descarta la región que tiene la singularidad de curvatura  $r \in [0, 2M)$  y cubre doblemente la región asintóticamente plana,  $r \in [2M, +\infty)$ . La región cerca a  $u = 0$  se interpreta como un "puente" conectando dos regiones asintóticamente planas, una cercana a  $u = +\infty$  y la otra a  $u = -\infty$ . Para tratar de entender esto pensemos en una superficie esférica en la

cual consideramos la coordenada  $u$  como constante. El área de esta superficie es  $A(u) = 4\pi(2M + u^2)^2$ . La cual tiene un mínimo en  $u = 0$ , con  $A(0) = 4\pi(2M)^2$ . La parte más angosta de la geometría se define como la "garganta", mientras que la región más cercana es llamada el "puente", o lo que sería lo mismo, el agujero de gusano.

La construcción de Einstein-Rosen no funciona si  $M < 0$ . La construcción requiere la existencia de un horizonte para hacer la transformación de coordenadas. La solución de Schwarzschild de masa negativa tiene una singularidad desnuda, no hay horizonte, y la construcción del "puente" falla. El resultado principal de estas observaciones es que el "puente de Einstein-Rosen" neutral, o también llamado "agujero de gusano de Schwarzschild", es idéntico a una parte de la geometría de Schwarzschild máximamente extendida.

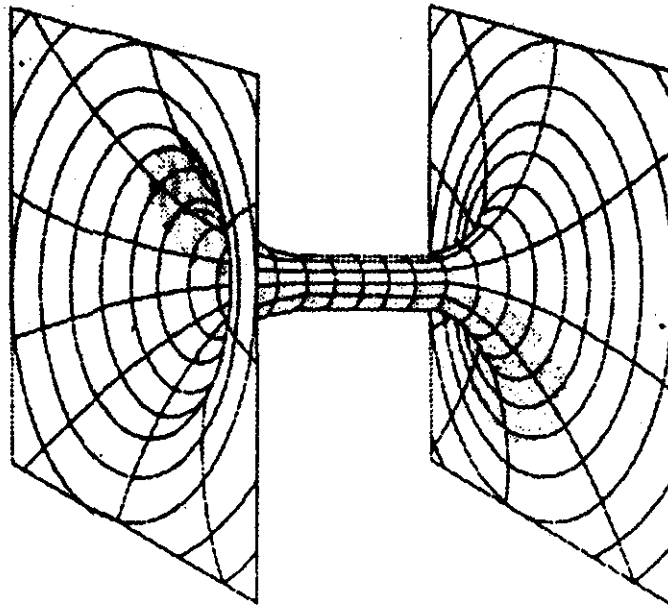


Figura 5. Representación esquemática de un puente de Einstein-Rosen.

### 2.9.3 El puente cuasicargado

Para estudiar el puente de Einstein-Rosen "cuasicargado" empezaremos con la geometría de Reissner-Nordström (un agujero negro cargado eléctricamente de carga  $Q$  y masa  $M$ ). En coordenadas de Schwarzschild tenemos

$$ds^2 = -(1 - 2M/r + Q^2/r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r + Q^2/r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.70)$$

Para hacer la construcción del puente, Einstein y Rosen tuvieron que realizar una mutilación de la teoría, encontraron que tenían que invertir el signo del tensor de energía-esfuerzo, de tal forma que la densidad de energía del campo electromagnético fuera negativa. La geometría resultante es la de Reissner-Nordström. En las coordenadas de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - 2M/r - \epsilon^2/r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r - \epsilon^2/r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.71)$$

Haciendo  $M = 0$ , la métrica anterior se reduce a

$$ds^2 = -(1 - \epsilon^2/r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \epsilon^2/r^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.72)$$

por consiguiente para  $M = 0$ , el cambio de coordenada  $u^2 = r^2 - \epsilon^2/2$  lleva a

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2/2} dt^2 + du^2 + (u^2 + \epsilon^2/2)^2 d\Omega^2. \quad (2.73)$$

Esta geometría representa un objeto cuasicargado, sin masa, cuya densidad de energía es negativa en cualquier parte. Aún hay un horizonte en  $r = \epsilon$ ,  $u = 0$ . Einstein y Rosen interpretaron a este objeto como un "electrón".

La justificación para la mutilación de la teoría es que para  $M = 0$  la solución de Reissner-Nordström es una singularidad desnuda. No tiene horizonte, así que la construcción del puente no es posible. El cambio de  $Q^2 \rightarrow -\epsilon^2$  es realizado meramente para evitar la aparición de una singularidad desnuda.

#### 2.9.4 El puente generalizado

Mediante los dos ejemplos anteriores discutidos por Einstein y Rosen, es fácil generalizar la construcción del puente. Consideremos una geometría simétrica arbitraria que posea un horizonte de eventos que pueda o no tener alguna forma no especificada de materia que rodee el horizonte de eventos. La métrica puede ser escrita en la forma

$$ds^2 = -e^{-\varphi(r)} \left[ 1 - b(r)/r \right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.74)$$

Para esta geometría el horizonte ocurre en  $r = r_H$ , en donde  $r_H$  está definido por la ecuación  $b(r_H) = r_H$ . Luego introducimos una coordenada  $u$  dada por  $u^2 = r - r_H$ , así tenemos que

$$ds^2 = -e^{-\varphi(r_H+u^2)} \left[ 1 - b(r)/r \right] dt^2 + \frac{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)}{r_H + u^2} dr^2 + 4 \frac{r_H + u^2}{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)} u^2 du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2. \quad (2.75)$$

la región cercana a  $u = 0$  es el puente conectando la región asintóticamente plana cercana a  $u = +\infty$  con la región asintóticamente plana cercana a  $u = -\infty$ . Cerca del puente/horizonte tenemos  $r \approx r_H$ , y  $u \approx 0$ , entonces (2.75) se reduce a

$$ds^2 \approx -e^{-\varphi(r_H)} \left[ 1 - b'(r_H)/r_H \right] dt^2 + 4 \frac{r_H + u^2}{1 - b'(r_H)} du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2. \quad (2.76)$$

Esta métrica cualitativamente tiene la misma forma que los puentes neutrales y cargados de Einstein-Rosen, lo cual se puede ver más fácilmente introduciendo las constantes  $A$  y  $B$ , y reescribiendo la métrica como

$$ds^2 \approx -A^2 u^2 dt^2 + 4B^2 (u^2 + r_H) du^2 + (u^2 + r_H)^2 d\Omega^2. \quad (2.77)$$

Esto muestra que la clave de la construcción de puentes en el espacio-tiempo es meramente la existencia de un horizonte.

Por completez, notemos que lejos del puente  $u \rightarrow \pm u$ . La falta de llanura implica que  $\varphi(r) \rightarrow 0$ , y  $b(r) \rightarrow 2m$ , así que se tiene

$$ds^2 \approx -\frac{h_H - 2m + u^2}{r_H + u^2} dt^2 + 4 \frac{(r_H + u^2)u^2}{r_H - 2m + u^2} du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2, \quad (2.78)$$

la cual es similar a la forma canónica de Einstein-Rosen.

### 2.9.5 La espuma del espacio tiempo

Después del trabajo pionero de Einstein-Rosen en 1935, por veinte años no se realizaron más trabajos relacionados con el tema de agujeros de gusano. Pero en 1955 Wheeler revivió el interés en el estudio de agujeros de gusano al estudiar temas de topología en relatividad general.[57]

Los "geones" son inestabilidades hipotéticas y a su vez soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell combinadas (gravedad + electromagnetismo)[4]. Wheeler escribió en su trabajo de 1955[57]:

*" Uno puede considerar una métrica la cual es completamente plana excepto en dos regiones muy separadas, en donde una doble conexión es evidenciada como se*

*simboliza en la Fig. ..."*

la figura a que se refiere es la mostrada a continuación.

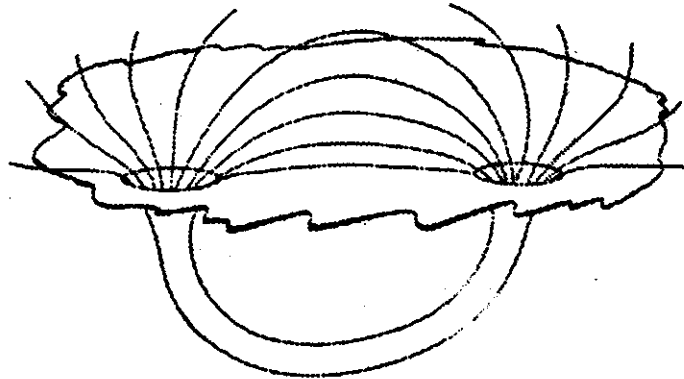


Figura 6. Agujero de gusano de Wheeler: "Representación esquemática de líneas de fuerza en un espacio doblemente conectado. En el continuo superior las líneas de fuerza se comportan como si cargas iguales y opuestas estuvieran localizadas en las bocas del túnel".

Algo interesante que se debe recalcar es que esta es la primera representación gráfica de un agujero de gusano. Tal parece que el término "geon" fue creado por Wheeler para denotar una "entidad gravitacional-electromagnética", pero en el lenguaje moderno el geon debe pensarse como un "cuasisoliton gravitacional-electromagnético inestable".

Por otro lado, la observación de Wheeler se puede usar como la base para construir un modelo clásico de carga distinto de cero con una densidad de carga cero en cualquier parte:

*"La divergencia general de perturbación electromagnética libre que oscila en el espacio alrededor de una de estas 'bocas del túnel' enviará adelante a las líneas de fuerza en el espacio, y parece tener una carga. Sin embargo un número igual de líneas de fuerza debe entrar en la región de perturbación del túnel. Por consiguiente la otra boca del túnel debe manifestar una carga igual y opuesta" [57].*

El trabajo de Wheeler mostraba dos direcciones de investigación, uno era estudiar la dinámica clásica de los agujeros gusano, y la otra era estudiar el proceso gravitacional cuántico que debe dar lugar a tal tipo de configuraciones del espacio-tiempo. Esto condujo al concepto de "espuma del espacio-tiempo", y junto con Misner en 1957[71] incursionó en la física concebida como geometría. En ese artículo por primera vez

se utilizó la palabra "wormhole":

*"Hay un flujo neto de líneas de fuerza a través de lo que los topólogos llamarían una agarradera de un espacio múltiplemente conectado y que los físicos deberían quizás ser excusados por un término más vívido un 'agujero de gusano'".*

Lo interesante del trabajo de Wheeler fue que renovó el interés en el estudio de los agujeros de gusano y fueron sentadas algunas bases para el estudio geométrico de la física.

En la actualidad se han marcado líneas muy claras y precisas sobre el estudio de los agujeros de gusano[56]. Para concluir esta introducción histórica comentaremos la clasificación de los agujeros de gusano.

## 2.10 Clasificación de las agujeros de gusano

La división más grande entre los agujeros de gusano es la conocida como agujeros de gusano Lorentzianos y Euclidianos. Esto se refiere a si la variedad en la cual reside el agujero de gusano es una variedad Lorentziana (pseudo-Riemanniana) o una variedad Riemanniana verdadera (con métrica de signatura Euclideana).

Una definición más formal del concepto de agujero de gusano es la siguiente[56]

**Definición 1** *Un agujero de gusano es cualquier región compacta del espacio tiempo con una frontera topológicamente simple pero con un interior topológicamente no trivial.*

En la clasificación de los agujeros de gusano Lorentzianos nos referimos a variedades "permanentes" ("cuasipermanentes") y "transitorios", cada una de las cuales tiene subespecies "intra-universo" e "inter-universo" dependiendo de si el agujero de gusano conecta o no regiones distantes de un universo a él mismo o conecta universos diferentes en el multiverso. Cada subespecie se divide en variedades "macroscópicas" y "microscópicas" [58].

### 2.10.1 Agujeros de gusano permanentes y cuasipermanentes

Si dividimos una región del espacio-tiempo en hipersuperficies tipo espaciales, y a cada división del espacio, la pensamos como una variedad Riemanniana tres-dimensional, si contienen un agujero de gusano, entonces el agujero de gusano podría pensarse que existe un cierto tiempo. A tal agujero de gusano se le conoce como *agujero de gusano cuasipermanente*. Los agujeros de gusano cuasipermanentes son



esencialmente objetos tres-dimensionales que existen por un tiempo finito distinto de cero.

La existencia de agujeros de gusano verdaderamente permanentes (lo opuesto a los cuasipermanentes) no viola ninguno de los teoremas clásicos de cambio topológico. La creación y destrucción de agujeros de gusano cuasipermanentes violan los teoremas clásicos de cambio topológico y requieren ya sea de alguna mutilación de la relatividad general clásica o recurrir a alguno de los más raros esquemas para introducir la gravedad cuántica (por ejemplo "variedades casi-Lorentzianas en cualquier parte" o violaciones de causalidad).

Una definición más técnica es[56]

**Definición 2** *Si un espacio-tiempo Lorentziano contiene una región compacta  $\Omega$ , y si la topología de  $\Omega$  es de la forma  $\Omega \sim \mathbb{R} \times \Sigma$ , en donde  $\Sigma$  es una tres-variedad de topología no trivial, cuya frontera tiene topología de la forma  $\partial\Sigma \sim S^2$ , y si además las hipersuperficies  $\Sigma$  son todas tipo espacial, entonces la región  $\Omega$  contiene un intra-universo de agujeros de gusano permanentes.*

Los intra-universos de agujeros de gusano cuasipermanentes son más difíciles de caracterizar. No se puede confiar solamente en la información topológica (como contraria a la geométrica) cuando la topología no es suficiente para caracterizar únicamente una conexión de inter-universo.

### 2.10.2 Agujeros de gusano transitorios

Los agujeros de gusano transitorios son intrínsecamente objetos cuatro-dimensionales. Este tipo de agujero de gusano estalla hacia adentro y hacia fuera sin tener una estructura topológica de la forma  $\Omega \sim \mathbb{R} \times \Sigma$ .

Cualquier región compacta  $\Omega$  con frontera  $\partial\Omega \sim S^3$  que contiene una topología no trivial es ciertamente un agujero de gusano transitorio (intra-universo). Por hipótesis la topología de  $\Omega$  no es de la forma  $\mathbb{R} \times \Sigma$ .

Un inter-universo de agujero de gusano típicamente tiene una región "activa" con topología  $\Omega \sim \mathbb{R} \times S^3$ . La frontera es entonces  $\partial\Omega \sim S^3 \cup S^3$ . Los agujeros de gusano transitorios no satisfacen los teoremas clásicos de cambio topológico, y requieren la mutilación de la relatividad general para permitir los procesos clásicos de cambio topológico.

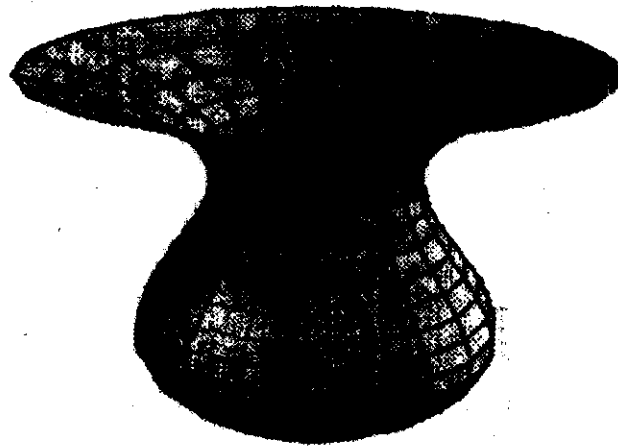


Figura 7. Inter-universo de agujero de gusano con topología trivial  $\Omega \sim \mathfrak{R}^4$ . Un "cuello" o "garganta" conecta el universo "bebé" a su padre.

### 2.10.3 Agujeros de gusano macroscópicos y microscópicos

Otra clasificación un tanto vaga, es la subespecie de agujeros de gusano macroscópicos y microscópicos, dependiendo del tamaño de la región activa relativa a la longitud de Planck.

### 2.10.4 Agujeros de gusano de Wheeler

Como se mencionó en la Subsección 2.9.5, los agujeros de gusano de Wheeler derivan su existencia de la suposición de que hay fluctuaciones del vacío en la espuma del espacio-tiempo. son microscópicos por naturaleza y son típicamente transitorios, aunque con suerte pueden surgir con la topología adecuada para considerarse cuasipermanentes.

### 2.10.5 Agujeros de gusano transitables

Los agujeros de gusano transitables son agujeros de gusano Lorentzianos que son cuasipermanentes y macroscópicos los cuales pueden ser transitados por seres humanos. También existe la versión Euclideana, sólo que en esta variedad el "viaje"

a través del agujero de gusano se realizaría en un " tiempo imaginario". El estudio de los agujeros de gusano, tuvo un renacimiento en los años ochenta debido al estudio del problema relacionado con las " máquinas del tiempo" (ver al apéndice A).

### 2.10.6 Agujeros de gusano Euclidianos

Los agujeros de gusano Euclidianos son típicamente " transitorios". Aunque algunos pueden ser cuasipermanentes con topología  $\Omega \sim \mathfrak{R} \times \Sigma$  (en donde  $\mathfrak{R}$  es una coordenada de " tiempo imaginario" y  $\Sigma$  una topología espacial no trivial).

Comunmente los agujeros de gusano Euclidianos son considerados como " instantones" en el campo gravitacional. Muchos de los modelos considerados en la literatura tienen simetría  $O(4)$ . En efecto, típicamente  $\mathcal{M} \sim \mathfrak{R} \times S^3$ , con  $\mathfrak{R}$  una variable radial Euclidea. Si se adoptan las técnicas de cuantización canónica, los agujeros de gusano transitorios surgen sólo mutilando el espacio fase clásico de la teoría Lorentziana fundamental.

Los agujeros de gusano Euclidianos han sido de considerable interés para la física de partículas y la relatividad general. Sirvieron de base, por ejemplo, para el intento de Coleman de explicar el problema de la constante cosmológica[61]. Algunos creen que la agudeza y sutileza implicada en esta propuesta deben ser recogidas del siguiente comentario de Coleman[61]:

*" Sin embargo, he encontrado esta teoría muy atractiva en varios aspectos, debo enfatizar su carácter especulativo. Se basa en la dinámica de agujeros de gusano (Euclidianos) y la formulación Euclidea de la gravedad cuántica. Así pues, es una casa doblemente construida en la arena. Los agujeros de gusano (Euclidianos) pueden no existir, ó, si existen, sus efectos deben ser arrollados por aquellos de algunas configuraciones más exóticas. Asimismo, la formulación Euclidea de la gravedad cuántica no es un tema con fundamentos firmes y reglas de procedimiento claras; en verdad, es más como una huella en un pantano. Pienso que me he deslizado con seguridad, pero siempre es posible que desconociendo yo mismo, he elevado mi cuello en arena movediza y me he hundido rápidamente."*

Las ideas de Coleman han sido estudiadas por numerosos autores. Algunos trabajos de interés son por ejemplo, " Una catástrofe de agujeros de gusano" [63], " El escape de la amenaza de los agujeros de gusano gigantes" [64], y " El regreso de los agujeros de gusano gigantes" [65]. Otras referencias sobre este tema son [67].

Fischler *et al.*[66] estimaron que el número de universos en el multiverso debe ser mayor que  $10^{10^{26}}$ , es decir, del orden de gogolplexus. Sólo que en su estudio los universos no son habitables por nosotros, ya que encontraron que la mayoría de estos

universos son fríos, oscuros, y vacíos.

En la comunidad científica ha habido cierta tensión sobre cuestiones de consistencia interna de estas ideas. Ver por ejemplo, Unruh[68]. En ese artículo se presenta una reseña sobre los puntos oscuros de la gravedad cuántica Euclideana con atención particular al tema de los agujeros de gusano[68].

### 2.10.7 Agujeros de gusano cuánticos

En lo expuesto anteriormente, hemos visto que los agujeros de gusano son métricas Euclidianas o Lorentzianas que consisten de dos grandes regiones unidas por un tubo estrecho o garganta. Los agujeros de gusano macroscópicos proveen el mecanismo para la evaporación de hoyos negros[72], mientras que los agujeros de gusano microscópicos parecen tener un efecto importante sobre las constantes físicas, particularmente la constante cosmológica[61, 73]. Los agujeros de gusano se han estudiado principalmente como instantones, soluciones de las ecuaciones de campo clásicas. Pero las soluciones tipo agujero de gusano ocurren sólo para ciertos tipos especiales de materia que permiten al tensor de Ricci tener eigenvalores negativos.

Hawking propuso una aproximación diferente para el estudio de agujeros de gusano, en ella son considerados no como soluciones de las ecuaciones clásicas de campo Euclidianas, sino como soluciones de la ecuación mecánico-cuántica de Wheeler-DeWitt. Estas funciones de onda deben obedecer ciertas condiciones de frontera para que representen agujeros de gusano. Esas condiciones parecen ser que:

i) *la función de onda es amortiguada exponencialmente para tres-geometrías grandes.*

ii) *la función de onda es regular en alguna forma adecuada cuando la tres-geometría se colapsa a cero.*

En la aproximación de dilución de agujero de gusano, uno puede tratar con cada agujero de gusano separadamente, como uniendo dos regiones asintóticamente Euclidianas. Con el fin de fundamentar las condiciones de frontera arriba señaladas, seguiremos la justificación de Hawking[72], considerando métricas Euclidianas de topología  $R^1 \times S^3$ . La idea es estudiar el efecto de los agujeros de gusano sobre la física en las dos regiones asintóticas a bajas energías comparadas a la escala de Planck. Para ello se quiere calcular las funciones de Green

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(y_1)\phi(y_2) \cdots \rangle, \quad (2.79)$$

en donde  $x_1, x_2, \dots$  y  $y_1, y_2, \dots$  son puntos en las dos regiones asintóticas lejanas del agujero de gusano. Estos puntos efectivamente se pueden tomar que estén al infinito

en el espacio plano. Las funciones de Green se pueden factorizar introduciendo un conjunto completo de agujeros de gusano:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots \rangle &= \sum_k \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots | \psi_k \rangle \\ &\times \langle \psi_k | \phi(y_1)\phi(y_2)\cdots | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.80)$$

en donde  $|0\rangle$  es el estado de vacío en la ausencia de agujeros de gusano, y  $|\psi_k\rangle$  son un conjunto completo ortonormal de estados de agujero de gusano[72]. Trátemos ahora de entender qué son estos estados de agujero de gusano. Sea  $S$  una sección recta, una tres-superficie que separa las dos regiones asintóticamente Euclidianas. Entonces los estados de los agujeros de gusano se pueden describir mediante funciones de onda  $\Psi_k(h_{ij}, \phi_0)$  las cuales dependen de las tres-métricas  $h_{ij}$  y los campos de materia  $\phi_0$  sobre  $S$ . Las funciones de onda obedecerán la ecuación de WDW y las ecuaciones de constricción de momento

$$\begin{aligned} H\Psi_k &= \left\{ -\frac{1}{2}m_p^{-2}h^{1/2} \left( h_{ij}h_{jm} + h_{im}h_{jl} - h_{ij}h_{lm} \right) \frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{lm}} \right. \\ &\quad \left. - m_p^2 h^{1/2(3)} R + \frac{1}{2}h^{1/2}T^{mn} \left[ \phi_0, -i\frac{\delta}{\delta\phi_0} \right] \right\} \Psi_k(h_{ij}, \phi_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$H^i\Psi_k = \left\{ -2im_p^2 \left( \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \right)_{ij} + T^{ni} \left[ \phi_0, -i\frac{\delta}{\delta\phi_0} \right] \right\} \Psi_k(h_{ij}, \phi_0) = 0. \quad (2.82)$$

en todas las tres-métricas finitas  $h_{ij}$  distintas de cero. En las ecuaciones arriba mostradas,  $\Psi_k(h_{ij}, \phi_0)$  representa los estados cuánticos del universo,  $h_{ij}$  es la métrica sobre una tres-superficie  $S$  y  $\phi_0$  es el valor de  $\phi$  en  $S$ . Pero si las funciones de onda corresponden a agujeros de gusano en vez de otro espacio-tiempo, deberían de obedecer ciertas condiciones de frontera cuando  $h_{ij}$  degenera, deberían de expresar el hecho de que la cuatro-métrica es no singular. No es claro que estas condiciones se deben de aplicar en el superspacio completo de todas las tres-métricas, pero en los modelos del minisuperspacio, parece ser razonable suponer que la función de onda debe ser regular, o (dependiendo del orden de los factores) debe ir como una potencia del radio de  $a$  cuando  $a$  tiende a cero, y ciertamente no debería oscilar un número infinito de veces.

Las condiciones de frontera cuando la  $h_{ij}$  es grande, deberían de expresar que la cuatro-métrica es asintóticamente Euclideana. Esto se puede interpretar diciendo que no hay excitaciones gravitacionales en el estado asintótico. Si también se impone la condición de frontera de que no haya excitaciones de materia en la región asintótica, se debería obtener un "estado base" o función de onda de vacío  $\Psi_0$ .

Hawking definió el estado base para los agujeros de gusano mediante una integral de trayectoria sobre todas las métricas de la topología  $S^3 \times R^1$  las cuales son asintóticamente Euclidianas en cada final de la  $R^1$ . Los campos de materia en la integral de trayectoria estarán normalizados equivalentemente a cero en cada final de la  $R^1$ . Esto significa que la función de onda para el estado base de agujero de gusano será idéntico al del estado vacío, y estará dado por una integral de trayectoria sobre todas las métricas asintóticamente Euclidianas y todos los campos de materia asintóticamente cero que tengan los valores dados en la superficie  $S$ . Por otro lado, las soluciones de la ecuación de WDW que son regulares para  $a = 0$  y amortiguadas para radios grandes se pueden interpretar como "estados excitados" de agujero de gusano.

Las funciones de onda de estados excitados de agujero de gusano también pueden representarse por integrales de trayectoria. Las métricas en las integrales de trayectoria son asintóticamente Euclidianas, lo cual significa que no hay excitaciones gravitacionales asintóticamente. Pero los campos de materia tienen fuentes en infinito, lo que se puede interpretar diciendo que allí las partículas materiales pasan a través del agujero de gusano. El término "en infinito" significa a distancias muy grandes comparadas con la escala característica del agujero de gusano.

Para tratar de entender esta situación, empecemos con una función de onda que describa *el conjunto de todos los universos posibles*. Esto significa que el punto de partida de la teoría de Hawking debe ser un conjunto infinito de universos paralelos, i.e., la función de onda del universo se supone que es mayor cerca de nuestro propio universo y se extiende sobre todos los universos posibles.

En esta perspectiva se debe tener claro que la definición de la palabra *universo* ya no es "todo lo que existe", sino "todo lo que puede existir". En la Figura 8 se aprecia cómo la función de onda del universo puede extenderse sobre varios universos posibles, siendo nuestro universo el más probable, pero ciertamente no el único. Y puesto que la cosmología cuántica supone que la función de onda del universo permite que estos universos estén conectados, los agujeros de gusano pueden desarrollar y unir estos universos.

Podemos pensar en una colección grande de burbujas de jabón, suspendidas en el aire. Normalmente cada burbuja de jabón es como un universo en sí mismo, excepto que periódicamente choca con otra burbuja, formando una más grande, o se divide en dos burbujas más chicas. La diferencia es que cada burbuja de jabón es ahora un universo entero diez-dimensional. Ya que espacio y tiempo pueden existir sólo en cada burbuja, no hay tal cosa como espacio y tiempo entre las burbujas. Cada universo tiene su propio "tiempo" autocontenido. Así carece de significado decir que el tiempo transcurre al mismo ritmo en todos estos universos. Se cree que la mayoría de estos universos son universos muertos desprovistos de cualquier vida. En

estos universos, las leyes de la física fueron diferentes, y de aquí que las condiciones físicas que hacen posible la vida no fueron satisfechas, ver la Figura 9.

La teoría de los "universos bebés" de Hawking, sin embargo, no es un método práctico de transportación, y ha levantado cuestiones filosóficas y religiosas. Entre los principales debates que han surgido se encuentran, el *principio antrópico* y la *revisión del gato de Schrödinger*[74].

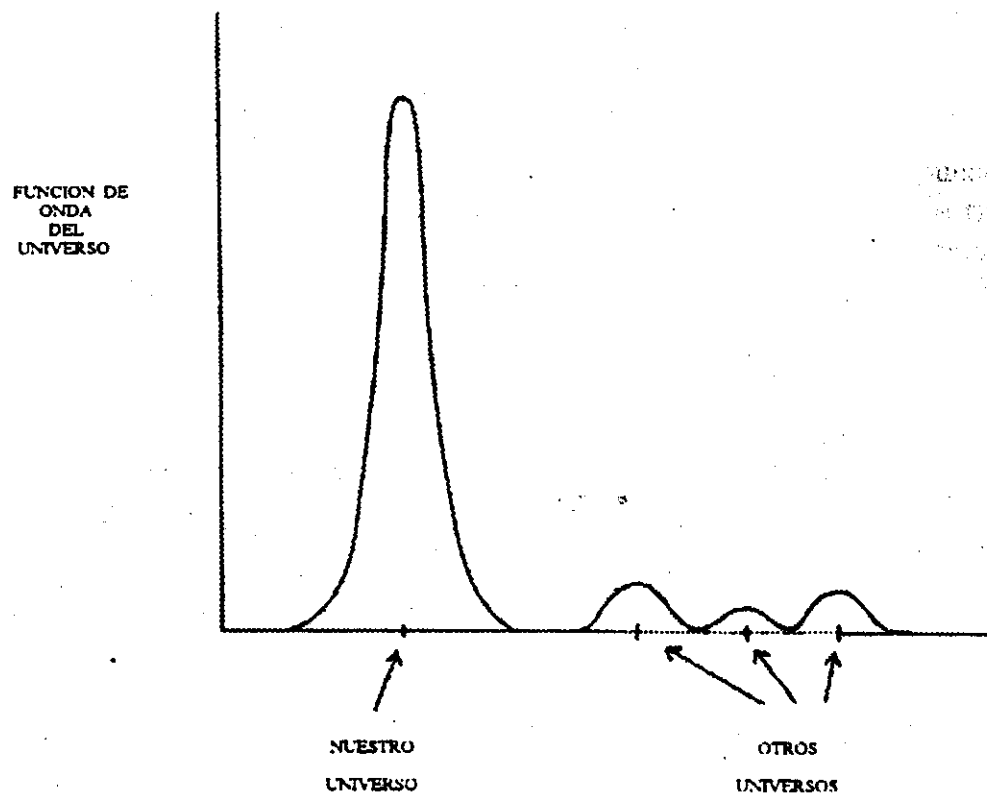


Figura 8. En la representación de la función de onda del universo, la función de onda está más concentrada alrededor de nuestro universo. Vivimos en nuestro universo porque es el más probable, con la probabilidad mayor. Sin embargo, hay una pequeña probabilidad distinta de cero de que la función de onda prefiera universos paralelos vecinos. Así, las transiciones entre universos pueden ser posibles (aunque con una muy baja probabilidad).

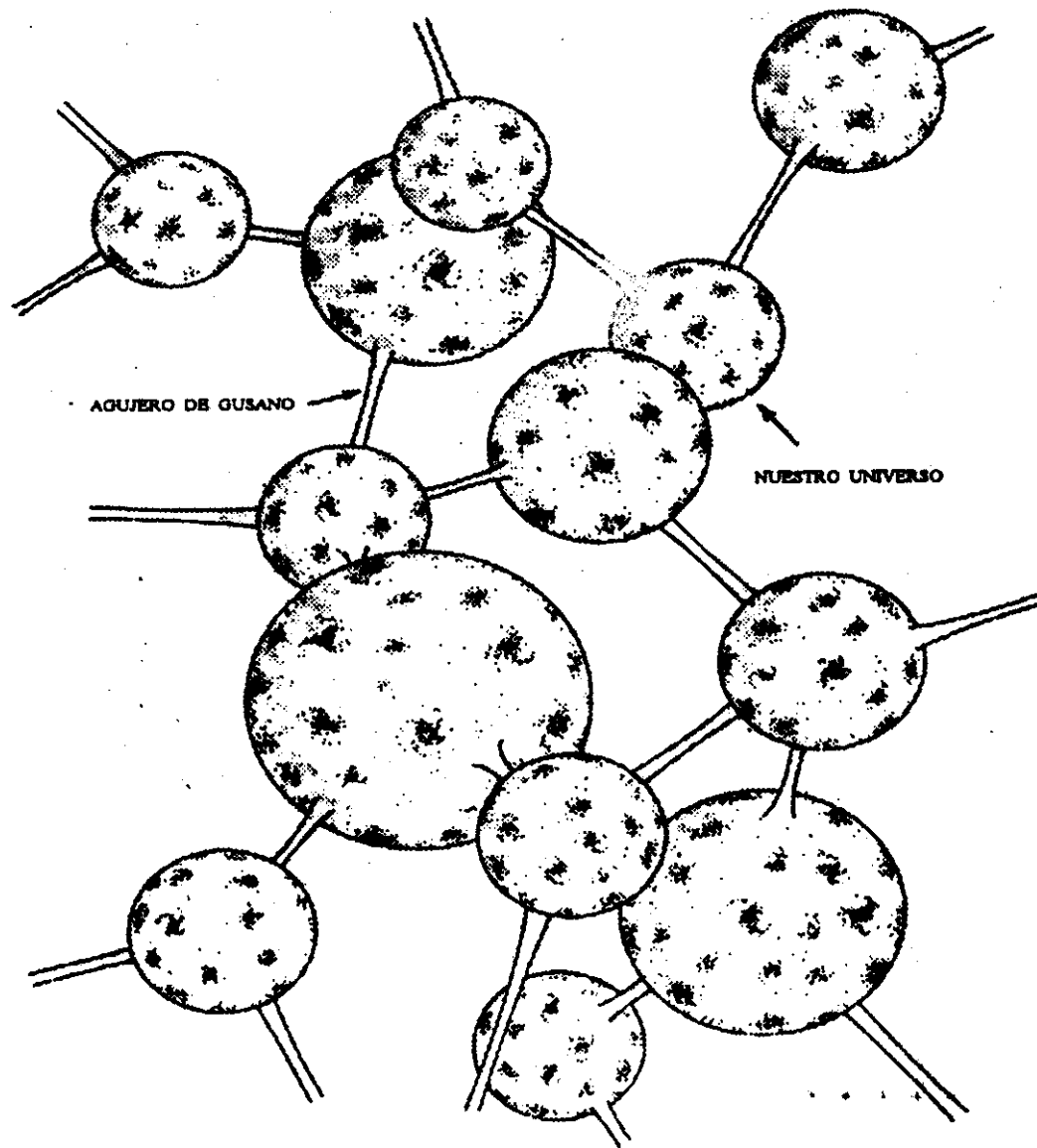


Figura 9. Nuestro universo debe ser uno del número infinito de universos paralelos, cada uno conectado a otros por una serie infinita de agujeros de gusano. Es posible viajar a través de estos pero es extremadamente improbable.



### 2.10.8 La interpretación de muchos mundos

La interpretación de muchos mundos (IMM) de la mecánica cuántica en cosmología cuántica, es una teoría de la medición, y está relacionada con la descripción de cómo se ve el universo para nosotros los seres humanos. En algún estado durante cualquier medición, la información es digitalizada, y esto es verdad aún para la medición de variables continuas, por ejemplo la posición y el momento. Podemos modelar cualquier medición mediante una medición de una variable discreta.

Supongamos que la variable discreta que deseamos medir tiene dos estados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  (los cuales pueden representar un electrón con espín hacia arriba y espín hacia abajo, respectivamente). En la imagen de la IMM una medición consiste en correlacionar los estados del sistema que será medido con los estados del aparato de medición. Ya que se tienen dos posibles estados del sistema, es conveniente permitir que el aparato de medición designado a medirlos, tenga tres estados  $|n\rangle$ ,  $|u\rangle$  y  $|d\rangle$ , en donde  $|n\rangle$  representa un estado neutral en el que estará el aparato de medición previamente a la medición.

El proceso de medición debe ser representado por un operador unitario  $M$  con las propiedades

$$M |\uparrow\rangle |n\rangle = |\uparrow\rangle |u\rangle, \quad (2.83)$$

$$M |\downarrow\rangle |n\rangle = |\downarrow\rangle |d\rangle, \quad (2.84)$$

en donde se ha supuesto que el estado del aparato  $|n\rangle$  es para registrar al sistema en el estado  $|\uparrow\rangle$  si en efecto está en ese estado, y  $|\downarrow\rangle$  para registrar al sistema en el estado  $|d\rangle$  si en efecto está en ese estado. El universo y el aparato de medición son considerados como un sistema cuántico simple. También se supone que el aparato de medición no tiene ningún efecto sobre los eigenestados del sistema cuando se hace una medición. Tal medición se denomina "medición von Neumann" [75]; y constituye la medición de interferencia mínima que se puede hacer en el sistema.

Ya que toda la dinámica en mecánica cuántica ocurre vía operadores unitarios lineales, y ya que en mecánica cuántica se supone que cualquier estado es un rayo en algún espacio de Hilbert, lo que significa que puede ser representado como una combinación lineal de estados que expanden el espacio de Hilbert, y de las ecuaciones (2.83) y (2.84) también definimos el efecto de una medición  $M$  sobre cualquier estado  $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$ , en donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes

$$\begin{aligned} M |\psi\rangle |n\rangle &= M(\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) |n\rangle, \\ &= M(\alpha |\uparrow\rangle |n\rangle + \beta |\downarrow\rangle |n\rangle), \end{aligned}$$

$$= \alpha |\uparrow\rangle |u\rangle + \rho |\downarrow\rangle |d\rangle). \quad (2.85)$$

Si consideramos a los seres humanos y más generalmente a los objetos macroscópicos como objetos mecánico cuánticos (si por ejemplo  $|u\rangle$  y  $|d\rangle$  son considerados como estados mentales de seres humanos) entonces (2.85) conduce a la conclusión de que una observación por un ser humano sobre algún sistema que no es un eigenestado del observable, resultará en el observador humano dividida por la observación: en un "mundo" el sistema estará en el estado  $|\uparrow\rangle$  y el observador lo medirá como estando en el estado  $|\uparrow\rangle$  (esto es, el observador estará en el estado  $|u\rangle$ ), y en el otro "mundo" el sistema estará en el estado  $|\downarrow\rangle$  y el observador lo medirá como estando en el estado  $|\downarrow\rangle$ . La aceptación de esta conclusión intuitiva es la interpretación de muchos mundos.

Por otro lado, la suposición de que el universo entero es dividido por una medición no es cierta. Sólo se divide el sistema observado/observador; sólo la porción restringida del universo sobre la que actúa el operador de medición  $M$  se divide. Si se considera a  $|Cosmos\rangle$  como la parte del universo que no es afectada por  $M$ , entonces el estado del universo entero antes de la medición es

$$\begin{aligned} M |\psi\rangle |n\rangle |Cosmos\rangle &= \alpha |\uparrow\rangle |u\rangle |Cosmos\rangle + \beta |\downarrow\rangle |d\rangle |Cosmos\rangle, \\ &= (\alpha |\uparrow\rangle |u\rangle + \beta |\downarrow\rangle |d\rangle) |Cosmos\rangle, \end{aligned} \quad (2.86)$$

lo cual muestra que  $|Cosmos\rangle$  no es dividido. Si el aparato de medición es un ser humano, Tipler[76] comenta que cualquier interacción con el resto del universo dividirá al ser humano si la interacción es tal que resultaría en estados diferentes del organismo humano que sean distinguibles por un sistema sensorial humano. La división se denota por correlaciones entre el humano y los varios subconjuntos del universo con los cuales interactúa.

Debido a que la información almacenada por los seres humanos es finita, el conjunto de todas las posibles mediciones pueden dividir a un ser humano sólo en un número finito de piezas. En [76] se da una estimación aproximada para el límite del número de piezas que pueden obtenerse suponiendo que cada átomo en un ser humano puede estar en dos estados distinguibles por la consciencia humana. Puesto que el número de átomos en un ser humano es de alrededor de  $10^{26}$ , el límite buscado es 2 elevado a la potencia  $10^{26}$ , el cual es un número muy grande pero finito.

Ya que en una medición de von Neumann en el aparato de medición ocurre un cambio más drástico que en el sistema, es más apropiado considerar al observador como dividido en lugar del universo. Además, el observador se divide porque está destinado a dividirse. Un aparato de medición se define como un sistema físico que experimenta un cambio físico suficientemente grande para ser detectable fácilmente

por los humanos cuando interactúa con el sistema para ser medido. El aparato de medición también debe ser capaz de ir a varios estados macroscópicamente distinguibles como una consecuencia de la interacción de la medición. En el ejemplo antes considerado, si el sistema está en el estado  $|\uparrow\rangle$ , el aparato registra este hecho al experimentar un cambio drástico del estado  $|n\rangle$  al estado  $|u\rangle$ , y si el sistema está en el estado  $|\downarrow\rangle$ , el aparato debe experimentar un cambio drástico de  $|n\rangle$  a  $|d\rangle$ . De estos requerimientos fundamentales, el aparato se debe dividir si  $M$  es un operador lineal.

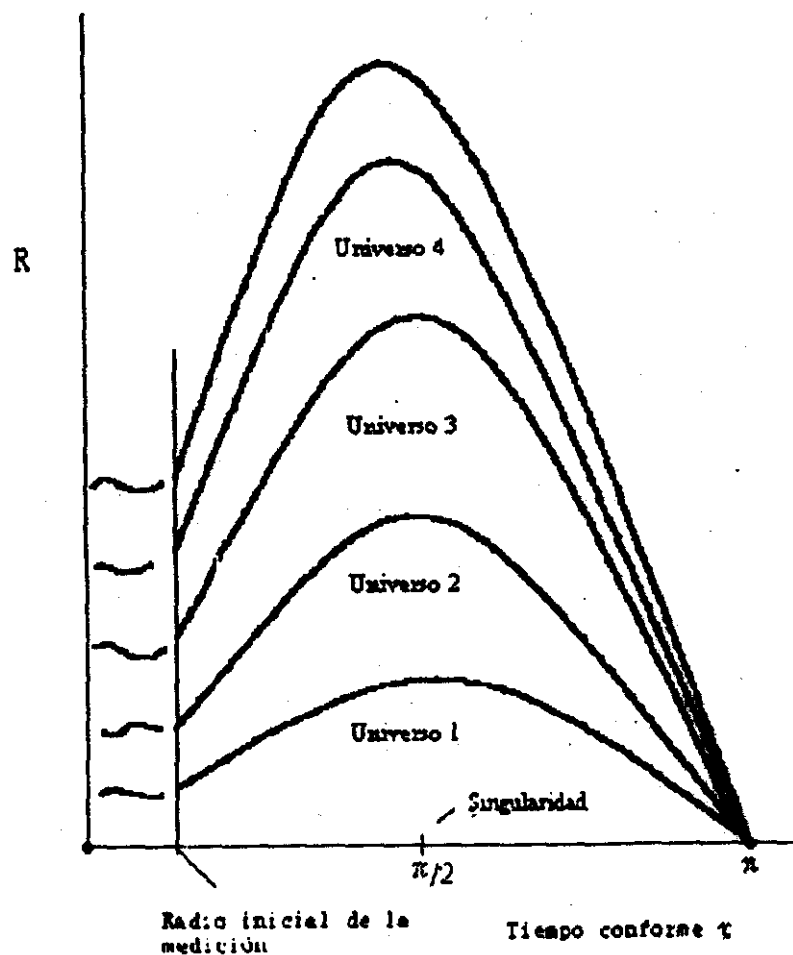


Figura 10. Ramificación de un universo cuántico. Antes de que ocurra la primera interacción que puede codificar una escala de medición, el universo, representado antes de que ocurra esta interacción como una serie de líneas onduladas, que no tienen radio. Después de que ocurre la primera interacción escalada, el universo ha sido dividido por las interacciones en un gran número de ramas, en cada una de las cuales es vista una evolución esencialmente clásica. Estas ramas son representadas por senos, cada uno de los cuales va a través de la singularidad final al tiempo conforme  $t = \pi$ . La colección de todos los senos representa todos los modelos de Friedmann clásicos. Cada curva es representada por  $R_{max}$ , el radio del universo en expansión máxima. En el universo cuántico, todos los universos clásicos están presentes, un universo clásico define una rama simple.

## 2.11 Aproximación WKB

El comportamiento clásico de un sistema está determinado al resolver las ecuaciones del movimiento sujetas a condiciones iniciales apropiadas. Por lo general una ecuación diferencial de segundo orden o dos ecuaciones diferenciales de primer orden para cada grado de libertad. La "primera integral" de estas ecuaciones, es la conocida energía total

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r), \quad (2.87)$$

la cual es una constante de movimiento. Esta es una ecuación diferencial de primer orden, y se puede integrar directamente, para el caso de una dimensión tenemos

$$t(x) - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}. \quad (2.88)$$

Los "puntos de retorno" en los cuales la energía potencial es igual a la energía total,  $E = V(x)$ , da los límites del movimiento; ahí la velocidad se hace cero. Supongamos una partícula de energía total  $E < V_0$  incidiendo desde la izquierda sobre una barrera de potencial de altura  $V_0$ , tal como se muestra en la siguiente figura.

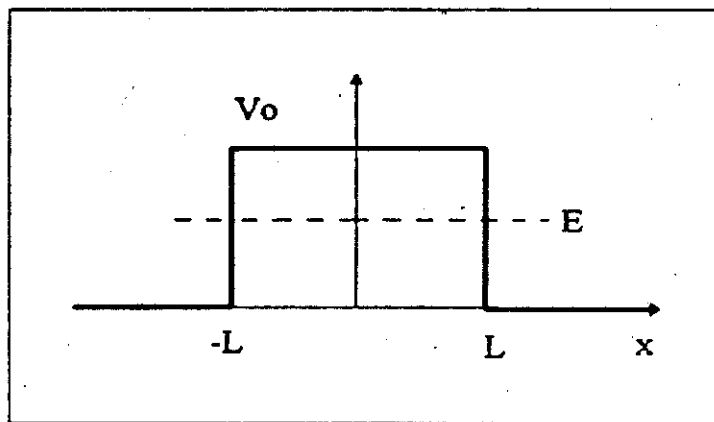


Figura 11. Una barrera de potencial rectangular. Una partícula de energía  $E < V_0$  está incidiendo desde el lado izquierdo.

Podemos observar que el punto de retorno ocurre en la pared del potencial, donde la partícula es reflejada: de esta forma la barrera de potencial determina una "región prohibida" la cual no puede traspasar la partícula. Se tiene que la partícula nunca se encontrará en la región clásicamente permitida a la derecha de la barrera de potencial.

En la mecánica cuántica tenemos un resultado diferente al hacer el mismo análisis. En este enfoque, la partícula es descrita en cada región mediante una función de onda  $\psi(x)$ , la cual satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \right) \psi(x) = 0, \quad (2.89)$$

en donde el potencial está dado por

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq L, \\ 0 & |x| > L. \end{cases} \quad (2.90)$$

En la región del lado izquierdo, la solución  $\psi_I$ , representa una función plana entrante (normalizada a amplitud uno) y una onda reflejada;  $\psi_I = e^{ikx} + Re^{-ikx}$ , mientras que en la región del lado derecho sólo hay una onda transmitida,  $\psi_d = Te^{ikx}$ , en los dos casos el número de onda de de Broglie es  $k \equiv \hbar^{-1} \sqrt{2mE}$ . A partir de estas ondas planas se pueden construir paquetes de ondas localizados que proveen una mejor descripción de una partícula.

En la región clásicamente prohibida, la función de onda consiste en exponenciales crecientes y decrecientes,  $\psi_p = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ , en donde el parámetro  $\kappa$  está dado por  $\kappa \equiv \hbar^{-1} \sqrt{2m(V_0 - E)}$ .

Ya que la probabilidad de encontrar a la partícula entre  $x$  y  $x + dx$  está dada por el valor absoluto cuadrado de la función de onda,  $|\psi(x)|^2$ , la teoría cuántica predice un comportamiento notablemente diferente (hay una probabilidad distinta de cero de encontrar a la partícula lejos del lado de la barrera) de "tunelamiento" a través de la región prohibida. La probabilidad de encontrar a la partícula lejos de la barrera de potencial (la probabilidad de tunelamiento) está dada simplemente por

$$P = \frac{j_{x>L}}{j_{inc}} = |T|^2, \quad (2.91)$$

en donde

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right), \quad (2.92)$$

es la corriente de probabilidad. Evaluaremos la probabilidad de tunelamiento en el límite  $\kappa L \gg 1$ , i.e., cuando  $V_0 \gg E$ . Por consiguiente tenemos que

$$P \propto e^{-4\kappa L}. \quad (2.93)$$

Supongamos ahora que el potencial ya no es de forma constante, sino de forma arbitraria. entonces la ecuación de Schrödinger se debe resolver exactamente sólo para unas pocas elecciones del potencial  $V(x)$ . Para potenciales arbitrarios se debe

cambiar a algún otro esquema. Si el potencial "varía lentamente", tal que su cambio sobre una longitud de onda de Broglie es mucho más pequeña que la energía cinética,

$$\lambda \frac{dV}{dx} \frac{1}{|E - V(x)|} \ll 1, \quad (2.94)$$

la aproximación WKB o semiclásica es válida [77]. En este caso las soluciones aproximadas (de más bajo orden en  $\hbar$ ) son

$$\psi(x) \propto \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i \int_x k(x') dx'}, \quad (2.95)$$

en donde  $k(x) \equiv \hbar^{-1} \sqrt{2m[E - V(x)]}$ . Cerca de los puntos clásicos de retorno  $|E - V(x)|$  es pequeña y las soluciones WKB no se aplican; ahí se usa una aproximación lineal para el potencial con el fin de relacionar las funciones de onda oscilatorias y exponenciales las cuales se obtienen para ambos lados de estos puntos. Estas son las "fórmulas de conexión" WKB. Para el lado derecho de la barrera sólo hay una onda transmitida; las fórmulas de conexión generan la función de onda exponencial de la región prohibida, y aplicandola de nuevo a esa, la onda oscilatoria para la barrera de la izquierda. Habiendo obtenido las ondas incidente y transmitida, es fácil calcular la probabilidad de tunelamiento; en el límite cuando  $V \gg E$  obtenemos

$$P \cong e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[V(x) - E]} dx}, \quad (2.96)$$

aquí  $a$  y  $b$  son los puntos clásicos de retorno. Esta expresión se reduce a la Ec. (2.93) para el caso de una barrera de potencial rectangular, Ec. (2.90). La "probabilidad de tunelamiento del universo" se puede obtener de la expresión (2.96).

## 2.12 Tercera cuantización

Como se mencionó en el Capítulo 1, la ecuación de Wheeler-DeWitt es un resultado de la cuantización de una geometría y materia (llamada segunda cuantización de la gravedad). Por otro lado, en la formulación usual de la mecánica cuántica se requiere una densidad de probabilidad positiva para una interpretación consistente de las propiedades físicas de un sistema dado, y el universo en la perspectiva de la cosmología cuántica no satisface este requerimiento debido a que la ecuación de WDW es una ecuación diferencial hiperbólica de segundo orden, por consiguiente no hay una densidad de probabilidad positiva como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon. Una alternativa para este problema, es considerar a la función de onda como un campo cuántico en el minisuperespacio en vez de una amplitud de estado, y la estrategia es realizar una tercera cuantización en analogía con la segunda cuantización de la ecuación de Klein-Gordon [15][78].

En la teoría cuántica de campos las partículas son creadas del vacío mediante un potencial externo que varía en el tiempo y esto sugiere que los universos se podrían crear mediante un procedimiento similar. El objetivo de esta aproximación es construir una medida probabilística consistente al reemplazar la función de onda por un campo cuántico de operadores que actúan en un espacio de estados de Hilbert, i.e., el campo de universos es expandido en funciones de frecuencia positiva modo-entrante y modo-saliente y sus conjugados hermíticos. El número de universos creados se puede conocer mediante los coeficientes de Bogoliubov los cuales relacionan las funciones modo-entrante y modo-saliente una con la otra. La creación de universos en esta aproximación es posible debido a que dos espacios de Hilbert generados por las funciones modo-entrante y modo-saliente no son equivalentes y esto produce coeficientes de Bogoliubov distintos de cero. Por consiguiente la teoría de universos de tercera cuantización describe un sistema de muchos universos.

A continuación mostraremos con más detalle el formalismo que usaremos para realizar la tercera cuantización de la función de onda del universo.

La idea básica es considerar a la función de onda  $\psi(x, y)$  como un operador actuando sobre los vectores de estado de un sistema de universos y se puede descomponer como

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [C(p)\psi_p(x, y) + C^\dagger(p)\psi_p^*(x, y)] dp, \quad (2.97)$$

en donde  $\psi(x, y)$  y  $\psi^*(x, y)$  forman un conjunto completo ortonormal de soluciones de la ecuación de WDW. Como se mencionó arriba, esto es en analogía con la teoría clásica de campos, en donde  $C(p)$  y  $C^\dagger(p)$  son operadores de creación y aniquilación, y suponemos que estos operadores obedecen las relaciones de conmutación estándar

$$[C(p), C^\dagger(q)] = \delta(p - q), \quad (2.98)$$



$$[C(p), C(q)] = 0, \quad (2.99)$$

$$[C^\dagger(p), C^\dagger(q)] = 0 \quad (2.100)$$

En la imagen de Heisenberg, los estados cuánticos expanden un espacio de Hilbert. Una base conveniente en este espacio de Hilbert es la llamada representación de Fock. La base de vectores  $| \rangle$ , se puede construir del vector  $| 0 \rangle$ , llamado el vacío, o estado de no universo. El espacio de Fock de universos se puede expandir como  $C^\dagger(p_1)C^\dagger(p_2)\dots | 0 \rangle$ , y el estado base  $| 0 \rangle$  se define por

$$C(p) | 0 \rangle = 0 \quad \forall p. \quad (2.101)$$

Definiremos el estado vacío inicial con respecto al conjunto ortonormal de soluciones de modo-entrante y -saliente de frecuencia positiva en el límite cuando el volumen espacial tiende a cero[15]. Por ser la ecuación de WDW una ecuación del tipo de Klein-Gordon, tomaremos la variable  $x$  como el tiempo, y la variable  $y$  como el espacio.

Luego para cuantizar cualquier modelo del minisuperespacio que tratemos, dado en general por el Hamiltoniano  $H_{3Q} = \psi\pi(x, y) - L_{3Q}$ , impondremos las relaciones de conmutación a mismo tiempo  $x$

$$\left[ i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, v(x, y') \right] = \delta(y - y'), \quad (2.102)$$

$$\left[ i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, i \frac{\partial v(x, y')}{\partial x} \right] = 0, \quad (2.103)$$

$$\left[ v(x, y), v(x, y') \right] = 0. \quad (2.104)$$

El conjunto de soluciones ortonormales de la ecuación de WDW se obtendrán en términos del siguiente producto interno

$$\langle v_p | v_q \rangle = \delta(p - q), \quad (2.105)$$

$$\langle v_p^* | v_q^* \rangle = -\delta(p - q), \quad (2.106)$$

$$\langle v_p^* | v_q \rangle = 0. \quad (2.107)$$

en donde el producto escalar de Klein-Gordon está definido como

$$\langle v_p, v_q \rangle = i \int \psi_p \bar{\partial}_x v_q^* dy = \delta(p - q). \quad (2.108)$$

El subíndice  $p$  etiqueta a la función de onda, y en una teoría completa de la gravedad cuántica, presumiblemente,  $p$  puede designar todas las características del universo,

tales como densidad de energía, número de electrones, etc. En base a lo antes mencionado, mediante los modos normales  $\psi_p$ , expandiremos el campo  $\psi(x, y)$  en términos de la ecuación (2.97).

## Capítulo 3

# Cosmología cuántica y clásica en la teoría de Bergmann-Wagoner

En este capítulo estudiaremos la cosmología cuántica en la teoría de Bergmann-Wagoner (BW) para el caso homogéneo e isotópico. Originalmente esta teoría clásica de la gravitación fue construida independientemente por P. G. Bergmann[20] y por R. V. Wagoner[21] para el estudio de ondas gravitacionales. Consideraron al campo gravitacional como consistente de partículas de espín 0 y espín 2. Así, en esta teoría hay lugar para el campo más simple de la naturaleza, un campo escalar[21]. Esta teoría es la más general de las teorías escalares-tensoriales de la gravitación. La acción para esta teoría contiene dos funciones arbitrarias del campo escalar, una "función cosmológica"  $\lambda(\phi)$  y una "función de masa"  $\omega(\phi)$ . Cada elección específica de estas funciones define una teoría escalar-tensorial particular. La función  $\omega(\phi)$  es una función de acoplamiento. La función  $\lambda(\phi)$  juega un doble papel, actúa como una función cosmológica dinámica, la cual puede dar lugar a modelos cosmológicos con una constante cosmológica pequeña a tiempos presentes en concordancia con las observaciones, pero grande a tiempos muy tempranos para producir inflación, y es también una función potencial en la ecuación del campo escalar. Entre los casos particulares de la teoría de Bergmann-Wagoner tenemos: (1) La teoría de Jordan-Brans-Dicke ( $\omega(\phi) = \omega_0 = \text{cte.}, \lambda(\phi) = 0$ )[81], (2) La teoría de cuerdas en el límite de bajas energías ( $\omega(\phi) = -1$ ), la teoría de Barker de  $G$  constante ( $\omega(\phi) = (4 - 3\phi)/(2\phi - 2), \lambda(\phi) = 0$ )[87], la teoría de Kaluza-Klein ( $\omega = (1 - n)/n$ , en donde la dimensión del espacio-tiempo es  $4 + n$ )[88]. En el pasado se han estudiado varios aspectos de la teoría de BW: soluciones exactas, análisis cualitativos de las ecuaciones de movimiento y la implementación de inflación (teorema de "no-pelo").

Muy poca atención se le ha dado a la cosmología cuántica de esta teoría general, sin embargo se han estudiado varios casos particulares. Por consiguiente consideramos de interés estudiar la cosmología cuántica de la teoría de BW. En nuestro estudio trataremos de conservar lo más general posible a las funciones  $\omega(\phi)$  y  $\lambda(\phi)$  en el elemento de línea homogéneo e isotópico, y obtendremos la ecuación de Wheeler-

DeWitt (WDW) para este modelo. Esta ecuación de onda se puede resolver por separación de variables para cualquier  $\omega(\phi)$  arbitraria, pero sólo para algunas formas particulares de  $\lambda(\phi)$ . Resolveremos la ecuación de WDW para algunos potenciales, y encontraremos soluciones generales para las ecuaciones separadas y con ellas se hará superposición de funciones, para obtener funciones de onda de agujero de gusano que obedecen las condiciones de regularidad de Hawking-Page[17].

También se usará la aproximación WKB para resolver la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi de este modelo. Asimismo, consideraremos el problema clásico de movimiento para aquellos casos que parecen de interés. Se darán explícitamente soluciones para la teoría de Jordan-Brans-Dicke, la teoría de Barker y tres familias de otras teorías que han sido estudiadas previamente. En un caso particular obtenemos soluciones clásicas no singulares.

Realizaremos una tercera cuantización y calcularemos el número de universos creados de la nada para uno de los potenciales que producen soluciones exactas de la ecuación de WDW y para el caso de universo cerrado.

Para otro potencial calcularemos la relación de incertidumbre de Heisenberg y encontraremos que las fluctuaciones cuánticas del universo son muy grandes para valores pequeños del factor de escala del universo (tiempos muy tempranos) y para valores grandes del factor de escala las fluctuaciones cuánticas vienen a ser pequeñas.

En la siguiente sección mostraremos los modelos del minisuperespacio que conducen a ecuaciones de WDW que estudiaremos en este capítulo.

### 3.1 El modelo del minisuperespacio de Bergmann-Wagoner

Para construir el modelo del minisuperespacio, nuestro punto de partida es la acción escalar-tensorial de Bergmann-Wagoner.

$$S = \frac{1}{l_p^2} \int_M \sqrt{-g} \left[ \phi R^{(4)} - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 2\phi \lambda(\phi) \right] d^4x + \frac{2}{l_p^2} \int_{\partial M} \sqrt{h} \phi h_{ij} K^{ij} d^3x, \quad (3.1)$$

en donde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , y  $R^{(4)}$  es el escalar de curvatura del modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW),  $\phi(t)$  es el convencional campo escalar gravitacional real,  $l_p$  es la longitud de Planck y  $\lambda(\phi)$  es el término cosmológico. La segunda integral es un término de superficie que involucra la métrica inducida  $h_{ij}$  y la segunda forma fundamental  $K^{ij}$  sobre la frontera, el cual es necesario para cancelar las segundas derivadas de  $R^{(4)}$  cuando la acción es variada con la métrica y el campo escalar, pero

no sus derivadas normales, fijadas sobre la frontera. Puesto que estamos interesados en estudiar modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos, usaremos el elemento de línea de FRW en coordenadas esféricas polares  $(t, r, \theta, \Phi)$ , dado por

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\omega^2, \quad (3.2)$$

en donde  $N$  es la función lapso,  $a$  es el factor de escala del universo, y la métrica del tres-espacio

$$d\omega^2 = d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2), \quad (3.3)$$

aquí tenemos que el "radio"  $f(\chi)$  es expresado como

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{si } k = +1 \quad (0 \leq \chi < 2\pi), \\ \chi & \text{si } k = 0 \quad (0 \leq \chi < \infty), \\ \sinh \chi & \text{si } k = -1 \quad (0 \leq \chi < \infty), \end{cases} \quad (3.4)$$

en donde  $k$  es la signatura de la curvatura espacial. Por otro lado, tenemos que el escalar de Ricci es

$$R^{(4)} = -\frac{6k}{a^2} - 6\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - 6\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + 6\frac{\dot{a}\dot{N}}{N^3 a}, \quad (3.5)$$

sustituyendo (3.5) en la Ec. (3.1) e integrando con respecto a las coordenadas espaciales, después de hacer algunas simplificaciones, obtenemos

$$S = \frac{\mathcal{V}}{4\pi^2} \int \left[ -Nka\dot{\phi} + \frac{a\dot{\phi}}{N}\dot{a}^2 + \frac{a^2}{N}\dot{a}\dot{\phi} - \frac{N\omega(\phi)}{6\phi}a^3\dot{\phi}^2 + \frac{N}{3}a^3\phi\lambda(\phi) \right] dt. \quad (3.6)$$

Hemos introducido el volumen espacial  $\mathcal{V}$  de la región homogénea que consideramos. Este volumen toma el valor de  $2\pi^2$  para  $k = 1$ , pero para  $k = 0$  o  $k = -1$ , debe fijarse en alguna constante finita. Para simplificar los cálculos presentados en este capítulo, consideraremos que esa constante es igual a  $2\pi^2$ . El punto en (3.6) denota derivada temporal con respecto al tiempo  $t$ , e introduciendo las siguientes variables

$$x = a\phi^{\frac{1}{2}}, \quad y = \int \left( \frac{2\omega(\phi) + 3}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad \Lambda(y) = \frac{\lambda(\phi)}{3\phi}, \quad d\tau = \phi^{\frac{1}{2}} dt. \quad (3.7)$$

entonces la acción BW se simplifica a

$$S_{BW} = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{x}{N} \dot{x}^2 - \frac{x^3}{N} \dot{y}^2 - Nkx + Nx^3\Lambda(y) \right] d\tau, \quad (3.8)$$

la prima denota derivada temporal con respecto al nuevo tiempo  $\tau$ . La ecuación de WDW es independiente de la función lapso, sin embargo en las siguientes secciones estudiaremos dos normas particulares  $N = 1$  y  $N = 1/x$ , ya que esto nos permitirá obtener ecuaciones de onda sencillas y separables, respectivamente.

## 3.2 Norma N=1

Con la elección de  $N = 1$ , la acción (3.8) se expresa como

$$\begin{aligned} S_{BW} &= \frac{1}{2} \int [xx'^2 - x^3y'^2 - kx + x^3\Lambda(y)] d\tau, \\ &\equiv \int L d\tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Los momentos canónicos conjugados correspondientes a  $x$  y  $y$  están dados por:

$$\pi_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = xx', \quad \pi_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = -x^3y'. \quad (3.10)$$

El Hamiltoniano  $H$  (la restricción secundaria) del sistema es

$$H = \frac{1}{2} [x^{-1}\pi_x^2 - x^{-3}\pi_y^2 + kx - x^3\Lambda(y)]. \quad (3.11)$$

Ahora obtendremos la ecuación de WDW mediante la cuantización canónica de  $H = 0$ , convirtiendo los momentos canónicos en la Ec. (3.11) en operadores,  $\pi_x^2 \rightarrow -x^{-p} \frac{\partial}{\partial x} (x^p \frac{\partial}{\partial x})$  y  $\pi_y^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , la ambigüedad del ordenamiento de los operadores cuánticos está representada en el parámetro  $p$ , así obtenemos que la ecuación de WDW es

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + px \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - kx^4 + x^3\Lambda(y) \right] \psi(x, y) = 0. \quad (3.12)$$

Esta ecuación se puede resolver mediante separación de variables si  $\Lambda(y) = cte.$ , así en lo siguiente presentaremos tres casos sencillos de términos cosmológicos que permiten obtener soluciones exactas de la ecuación de WDW.

### 3.2.1 Caso $\Lambda(y) = 0$

Primero, consideraremos la ecuación de WDW sin término cosmológico, entonces tenemos

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + px \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - kx^4 \right] \psi(x, y) = 0, \quad (3.13)$$

para resolver esta ecuación se propone  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ , de esta forma obtenemos la solución en términos de funciones de Bessel. Mostraremos las funciones de onda del universo correspondientes a los tres posibles valores de la constante de curvatura  $k = -1, 0, 1$ .

i)  $k = 1$ . Para el modelo cerrado de FRW tenemos

$$\psi_s(x, y) = x^{\frac{1-p}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left[ C_1 I_m \left( \frac{x^2}{2} \right) + C_2 K_m \left( \frac{x^2}{2} \right) \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right], \quad (3.14)$$

en donde  $s$  es una constante de separación,  $I_m$  y  $K_m$  son funciones de Bessel modificadas, y el orden de dichas funciones está dado por  $m = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - s^2}$ .

ii)  $k = -1$ . Para el modelo hiperbólico de FRW, la función de onda es

$$\psi_s(x, y) = x^{\frac{1-p}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left[ C_1 I_m \left( \frac{x^2}{2} \right) + C_2 I_{-m} \left( \frac{x^2}{2} \right) \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right], \quad (3.15)$$

iii)  $k = 0$ . Para el modelo plano de FRW las funciones de onda son

a)  $s = (1-p)/2$

$$\psi_s(x, y) = x^{\frac{1-p}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left[ C_1 + C_2 \ln x \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right], \quad (3.16)$$

b)  $s \neq (1-p)/2$

$$\psi_s(x, y) = x^{\frac{1-p \mp \sqrt{(1-p)^2 - 4s^2}}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left[ C_1 + C_2 x^{\pm \sqrt{(1-p)^2 - 4s^2}} \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right]. \quad (3.17)$$

Las soluciones (3.14)-(3.17) están caracterizadas por los parámetros libres  $p$  y  $s$ . También, como se definió en (3.7), la variable  $y$  depende de una función arbitraria  $\omega(\phi)$ . Por consiguiente podemos construir soluciones generales de la ecuación de WDW mediante superposición de las soluciones obtenidas.

### 3.2.2 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0$

Ahora estudiaremos la ecuación de WDW con  $\Lambda(y) = \Lambda_0$ , en donde  $\Lambda_0$  es una constante, este caso es equivalente a decir que el término cosmológico efectivo es proporcional al campo escalar  $\phi$ , así de la Ec. (3.12) tenemos la siguiente ecuación de onda

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + px \frac{\partial}{\partial x} - kx^4 + \Lambda_0 x^6 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi(x, y) = 0. \quad (3.18)$$

Haciendo  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ , la ecuación diferencial para la variable  $x$  es

$$x^2 X''(x) + px X' + (s^2 + \Lambda_0 x^6 - kx^4) X = 0, \quad (3.19)$$

de nuevo consideraremos diferentes valores de  $k$  en esta ecuación.

i)  $k = \pm 1$

Para el modelo cerrado y para el hiperbólico, la ecuación anterior se puede resolver mediante series de potencias[104], pero la solución es bastante complicada, y se pierde el significado físico, por consiguiente para buscar una solución que se pueda expresar en términos de funciones estándar[80], tomamos  $X(x) = z^A f(z)$  con  $(z = x^2)$ , así la Ec. (3.19) se transforma en

$$4z^2 f''(z) + (2 + p + 8A)f' + [4A^2 + (p - 2)A + s^2 \mp z^2 + \Lambda_0 z^3] f = 0, \quad (3.20)$$

para obtener una solución exacta de esta ecuación, necesitamos satisfacer  $2 + p + 8A = 0$  y  $4A^2 + (p - 2)A + s^2 = 0$  esto implica que  $A = -\frac{2+p}{8}$  y  $p = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2-s^2}}{3}$  entonces, la Ec. (3.20) se reduce a una forma más simple

$$f''(z) + \frac{1}{4}(\Lambda_0 z \mp 1) f = 0, \quad (3.21)$$

después, usamos la sustitución  $f(z) = U(\varphi)$  con  $(2\Lambda_0 \varphi)^{\frac{2}{3}} = \Lambda_0 z \mp 1$ , así la función de onda del universo en términos de funciones de Airy queda expresada como

$$\psi(x, y) = \left\{ C_1 Ai \left[ - (2\Lambda_0)^{-\frac{2}{3}} (\Lambda_0 x^2 \mp 1) \right] + C_2 Bi \left[ - (2\Lambda_0)^{-\frac{2}{3}} (\Lambda_0 x^2 \mp 1) \right] \right\} x^{-2p-1+2\sqrt{p^2-p-s^2+1/4}} \left\{ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right\}. \quad (3.22)$$

ii)  $k = 0$

En un universo de FRW plano, la función de onda es

$$\psi_s(x, y) = x^{\frac{1-p}{2}} y^{\frac{1}{2}} \left[ C_1 I_M \left( \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{3} x^3 \right) + C_2 I_{-M} \left( \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{3} x^3 \right) \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right], \quad (3.23)$$

en donde  $M = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - s^2}$ .

### 3.2.3 Aproximación WKB

En esta parte, nuestro objetivo es obtener soluciones semiclásicas de la ecuación de WDW por medio del método WKB, con el fin de estudiar el régimen clásico de nuestro modelo, así pues buscamos una solución de la forma  $\psi(x, y) = e^{iS(x, y)}$ , en donde  $S(x, y)$  es la función principal de Hamilton. La solución de la ecuación resultante de Hamilton-Jacobi nos dará una solución completa del problema clásico. La solución semiclásica de la ecuación de Einstein (Hamilton-Jacobi) es



$$-x^2 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - kx^4 + x^6 \Lambda(y) = 0. \quad (3.24)$$

Nótese que esta ecuación está libre de la ambigüedad del ordenamiento de factores. Para separar la Ec. (3.24), considerando  $\Lambda(y) = cte. = \Lambda_0$ , entonces obtenemos

$$x^2 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + kx^4 - x^6 \Lambda_0 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (3.25)$$

cuya solución exacta está dada por

$$S(x, y) = p_y y \pm \int \sqrt{p_y^2 x^{-2} + \Lambda_0 x^4 - kx^2} dx, \quad (3.26)$$

en donde  $p_y$  es una constante de separación. Por lo tanto, la función de onda WKB del universo es

$$\psi(x, y)_{WKB} = e^{i p_y y \pm i \int \sqrt{p_y^2 x^{-2} + \Lambda_0 x^4 - kx^2} dx} \quad (3.27)$$

En particular, cuando  $\Lambda_0 = 0$ , tenemos las siguientes funciones de onda WKB

i)  $k = 1$

$$\psi(x, y)_{WKB} = \left[ \frac{p_y - \sqrt{p_y^2 - x^4}}{p_y + \sqrt{p_y^2 - x^4}} \right]^{\pm \frac{p_y i}{4}} e^{i(p_y y \pm \frac{1}{2} \sqrt{p_y^2 - x^4})}, \quad (3.28)$$

ii)  $k = 0$

$$\psi(x, y)_{WKB} = x^{\pm i p_y} e^{i p_y y}. \quad (3.29)$$

iii)  $k = -1$

$$\psi(x, y)_{WKB} = \left( \frac{x^2}{p_y} \right)^{\pm i \frac{p_y}{2}} e^{i(p_y y \pm \frac{1}{2} \sqrt{p_y^2 + x^4})}. \quad (3.30)$$

### 3.3 Norma $N=1/x$

En esta sección nuestro propósito es mostrar otro modelo cuántico soluble con la elección  $N = 1/x$ , así la acción (3.8) se transforma en

$$S = \int \frac{1}{2} [x^2 \dot{\sigma}^2 - x^4 \dot{y}^2 + x^2 \Lambda(y) - k] d\tau, \quad (3.31)$$

en lo siguiente consideraremos el caso de funciones cosmológicas que pueden conducir a soluciones inflacionarias.

### 3.3.1 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y)$

El modelo inflacionario del universo se ha designado para resolver varios enigmas cosmológicos, incluyendo los problemas del horizonte y llanura. Su rasgo distintivo es un breve período finito de expansión exponencial. Desafortunadamente, los potenciales más interesantes desde el punto de vista cosmológico, tales como potenciales caóticos ( $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  o  $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ ) o el potencial de Coleman-Weinberg, generalmente conducen a modelos que no se pueden resolver exactamente en los niveles clásico y cuántico. En esta subsección estudiaremos un modelo cosmológico para el potencial del campo escalar  $\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y)$ , el cual es un potencial de tipo caótico, y conduce a la inflación exponencial estándar[83]. Para nuestro análisis usaremos el siguiente cambio de variables independientes

$$\alpha = x^2 \cosh(2y), \quad \beta = x^2 \sinh(2y), \quad (3.32)$$

el cual transforma la acción (3.31) a la forma simétrica

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{4} (\alpha'^2 - \beta'^2) + \Lambda_1 \alpha + \Lambda_2 \beta - k \right] d\tau, \quad (3.33)$$

en donde hemos escogido el término cosmológico como

$$\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y), \quad (3.34)$$

aquí  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son constantes, y los momentos canónicos conjugados están dados por

$$\pi_\alpha = \frac{\alpha'}{4}, \quad \pi_\beta = -\frac{\beta'}{4}. \quad (3.35)$$

El Hamiltoniano del sistema es

$$H = 2\pi_\alpha^2 - 2\pi_\beta^2 + \frac{1}{2}(k - \Lambda_1\alpha - \Lambda_2\beta), \quad (3.36)$$

y la correspondiente ecuación de WDW es

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + p\alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - q\beta^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4}(\Lambda_1\alpha + \Lambda_2\beta - k) \right] v(\alpha, \beta) = 0. \quad (3.37)$$

En particular, podemos obtener soluciones exactas cuando los parámetros del ordenamiento de factores  $p$  y  $q$  son igual a cero. Haciendo  $v(\alpha, \beta) = A(\alpha)B(\beta)$  e introduciendo las nuevas variables

$$\gamma = (2\Lambda_1)^{-\frac{1}{2}}(k - 4s^2 - \Lambda_1\alpha), \quad \eta = (2\Lambda_2)^{-\frac{1}{2}}(\Lambda_2\beta - 4s^2) \quad (3.38)$$

entonces obtenemos ecuaciones del tipo de Airy  $G''(\gamma) - \gamma G = 0$  y  $H''(\eta) - \eta H = 0$ . Por consiguiente, la función de onda para este modelo es

$$\psi(\alpha, \beta) = \left\{ C_1 A i \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{3}{2}} (k - 4s^2 - \Lambda_1 \alpha) \right] + C_2 B i \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{3}{2}} (k - 4s^2 - \Lambda_1 \alpha) \right] \right\} \\ \left\{ C_3 A i \left[ (2\Lambda_2)^{-\frac{3}{2}} (\Lambda_2 \beta - 4s^2) \right] + C_4 B i \left[ (2\Lambda_2)^{-\frac{3}{2}} (\Lambda_2 \beta - 4s^2) \right] \right\}. \quad (3.39)$$

Con la elección  $\omega(\phi) = \omega_0 = \text{cte.}$ , obtenemos un término cosmológico inflacionario en la teoría de Jordan-Brans-Dicke [81, 82, 83]

$$\lambda(\phi) = \lambda_1 \phi^{\rho+1} + \lambda_2 \phi^{-\rho+1}, \quad (3.40)$$

en donde  $\rho$  está dada por  $\rho = \sqrt{(2\omega_0 + 3)}/3$  entonces, las variables  $\alpha$  y  $\beta$  vienen a ser

$$\alpha = \frac{a}{2} (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} + \phi^{-\rho+\frac{1}{2}}), \quad \beta = \frac{a}{2} (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} - \phi^{-\rho+\frac{1}{2}}), \quad (3.41)$$

en este caso de Jordan-Brans-Dicke, la función de onda del universo es

$$\psi(a, \phi) = \left\{ C_1 A i \left[ (8\Lambda_1)^{-\frac{3}{2}} (2k - 8s^2 - \Lambda_1 a (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} + \phi^{-\rho+\frac{1}{2}})) \right] \right. \\ \left. + C_2 B i \left[ (8\Lambda_1)^{-\frac{3}{2}} (2k - 8s^2 - \Lambda_1 a (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} + \phi^{-\rho+\frac{1}{2}})) \right] \right\} \\ \left\{ C_3 A i \left[ (8\Lambda_2)^{-\frac{3}{2}} (\Lambda_2 a (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} + \phi^{-\rho+\frac{1}{2}}) - 8s^2) \right] \right. \\ \left. + C_4 B i \left[ (8\Lambda_2)^{-\frac{3}{2}} (\Lambda_2 a (\phi^{\rho+\frac{1}{2}} + \phi^{-\rho+\frac{1}{2}}) - 8s^2) \right] \right\}. \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Aproximación WKB

Para obtener soluciones semiclásicas para la ecuación de WDW, de nuevo usamos  $\psi(\alpha, \beta) = e^{iS(\alpha, \beta)}$ , después de sustituir en la Ec. (3.37), obtenemos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{1}{4}(\Lambda_1 \alpha + \Lambda_2 \beta - k) = 0. \quad (3.43)$$

La solución exacta de la ecuación anterior es

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{3\Lambda_1} (4p_n^2 - k + \Lambda_1 \alpha)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\Lambda_2} (4p_n^2 + \Lambda_2 \beta)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.44)$$

en donde  $p_n$  es una constante de separación. Por lo tanto, la función de onda semiclásica del universo es

$$\psi(\alpha, \beta)_{WKB} = e^{\frac{i}{3} \left[ \frac{1}{\Lambda_1} (4p_n^2 - k + \Lambda_1 \alpha)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\Lambda_2} (4p_n^2 + \Lambda_2 \beta)^{\frac{3}{2}} \right]}. \quad (3.45)$$

En la siguiente sección mostraremos algunas soluciones clásicas para este modelo.

### 3.4 Soluciones clásicas

Las ecuaciones clásicas de movimiento para este modelo derivadas de la acción (3.33) son

$$\alpha''(\tau) - 2\Lambda_1 = 0, \quad (3.46)$$

$$\beta''(\tau) + 2\Lambda_2 = 0, \quad (3.47)$$

con la ecuación de restricción Hamiltoniana dada por

$$\alpha'^2 - \beta'^2 - 4\Lambda_1\alpha - 4\Lambda_2\beta + 4k = 0. \quad (3.48)$$

La solución del sistema (3.46)-(3.47) es

$$\alpha(\tau) = \Lambda_1\tau^2 + C_1\tau + C_2, \quad (3.49)$$

$$\beta(\tau) = -\Lambda_2\tau^2 + C_3\tau + C_4, \quad (3.50)$$

en donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración y satisfacen la ecuación de restricción

$$C_1^2 - C_3^2 - 4\Lambda_1C_2 - 4\Lambda_2C_4 + 4k = 0. \quad (3.51)$$

En las siguientes subsecciones estudiaremos dos elecciones simples de la función  $\omega(\phi)$ , esto nos lleva a las teorías de Jordan-Brans-Dicke y Barker, y también consideramos tres teorías generales parametrizadas que han sido estudiadas por otros autores [85, 86].

#### 3.4.1 Teoría de Jordan-Brans-Dicke

Escogiendo  $\omega(\phi) = \omega_0$ , entonces  $y = \frac{\rho}{2} \ln \phi$  y obtenemos la siguiente solución

$$a(\tau) = \frac{[(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4]^m}{[(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4]^{m-n}}, \quad (3.52)$$

$$\phi(\tau) = \frac{[(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4]^n}{[(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4]^n} \quad (3.53)$$

en donde  $m = (1 + \rho)/4\rho$ ,  $n = 1/2\rho$  y  $\rho = \sqrt{(2\omega_0 + 3)/3}$ .

### Solución no singular

Haciendo  $C_1 = C_3 = C_4 = 0$ ,  $C_2 = k/\Lambda_1$  y  $\Lambda_1 = \Lambda_2$  en las ecuaciones (3.52) y (3.53), obtenemos la solución

$$a(\tau) = a_0 \left[ \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right]^m, \quad (3.54)$$

y

$$\phi(\tau) = \left[ \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right]^{-n}, \quad (3.55)$$

en donde  $a_0 = (k^2/\Lambda_1^2)^{1/4}$  y  $\tau_0^2 = k/2\Lambda_1^2$ , la solución de arriba corresponde a un término cosmológico de la forma  $\Lambda(\alpha, \beta) = \Lambda_1 \sqrt{(\alpha + \beta)/(\alpha - \beta)}$ , y es no singular para  $k = 1$ , esto lo podemos verificar mediante sustitución directa en los invariantes de la métrica

$$R = -6 \left[ \frac{k}{a^2} + 2\phi^2 a'^2 + a\phi a' \phi' + a\phi^2 a'' \right], \quad (3.56)$$

$$R_1 = \frac{3}{4a^4} \left[ k - a^3 \phi a' \phi' - a^3 \phi^2 a'' \right]^2, \quad (3.57)$$

$$R_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} R_1^{3/2}, \quad (3.58)$$

$$R_3 = \frac{7}{\sqrt{12}} R_1^2. \quad (3.59)$$

Introduciendo las soluciones (3.54) y (3.55) en el escalar de Ricci (3.56) obtenemos

$$R = \frac{6}{a_0^2 \tau_0^4 \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right)^{2(m+1)}} \left[ k(\tau_0^2 + \tau^4) + 2\tau^2 \left\{ k\tau_0^2 + a_0^4 m(6m - 2n - 1) \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right) \right\} + 2a_0^4 m \tau_0^2 \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right) \right], \quad (3.60)$$

y el invariante  $R_1$  toma la forma

$$R_1 = \frac{3}{4a_0^4 \tau_0^8 \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right)^{4(m+1)}} \left[ k(\tau_0^4 + \tau^4) + 2\tau^2 \left\{ k\tau_0^2 + 2a_0^4 m(2n - 2m + 1) \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right) \right\} - 2a_0^4 m \tau_0^2 \left( \frac{\tau^2}{\tau_0^2} + 1 \right) \right]^2. \quad (3.61)$$

### Solución singular

Podemos obtener otra solución cosmológica escogiendo  $C_1 = C_3 = 0$ ,  $C_2 = C_4 = \kappa/2\Lambda_1$  y  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ , así las soluciones (3.52)-(3.53) son reducidas a

$$a(\tau) = a'_0 \tau^{2m}, \quad (3.62)$$

$$\phi(\tau) = \phi'_0 \tau^{-2n}, \quad (3.63)$$

en donde  $a'_0 = 2^{1/4} \tau_0^{-\frac{3}{2}}$  y  $\phi'_0 = \tau_0^{2n}$ . Estas soluciones en el tiempo cósmico  $t$  toman la forma

$$a(t) = a' t^{\frac{2(1+\rho)}{2-3\rho}}, \quad (3.64)$$

$$\phi(t) = \phi' t^{\frac{4}{3\rho-2}}, \quad (3.65)$$

en donde  $a' = a'_0 \left\{ 2^{1/4} \tau_0^{3/4\rho} \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right) \right\}^{\frac{2(1+\rho)}{2-3\rho}}$  y  $\phi' = \phi'_0 \left\{ 2^{1/4} \tau_0^{3/4\rho} \left( \frac{1+\rho}{2\rho} \right) \right\}^{\frac{4}{3\rho-2}}$ .

### 3.4.2 Teoría de Barker

La elección  $\omega(\phi) = \frac{4-3\phi}{2\phi-2}$  nos conduce a la teoría de Barker[87], entonces obtenemos la solución

$$a(\tau) = \left\{ \tan \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\sqrt{3}} + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left[ (\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4 \right] \left[ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4 \right] \right\}^{\frac{1}{4}}. \quad (3.66)$$

$$\phi(\tau) = \tan \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\sqrt{3}} + 1. \quad (3.67)$$

### 3.4.3 Teoría 1

Haciendo  $2\omega(\phi) + 3 = B_1^2 \phi^{2(l+1)}$ ,  $B_1 > 0$  [85], obtenemos

$$a(\tau) = \left\{ \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{\sqrt{3}(1+\delta)}{2B_1}} \right\}^{-\frac{1}{2(1+\delta)}} \\ \left\{ \left[ (\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4 \right] \right. \\ \left. \left[ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4 \right] \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (3.68)$$

y

$$\phi(\tau) = \left\{ \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{\sqrt{3}(1+\delta)}{2B_1}} \right\}^{\frac{1}{1+\delta}} \quad (3.69)$$

### 3.4.4 Teoría 2

Haciendo  $2\omega(\phi) + 3 = B_2 |\ln(\frac{\phi}{\phi_0})|^{-2\delta}$  [86] obtenemos

i)  $\delta \neq 1$

$$a(\tau) = \phi_0^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{3}{B_2}} (1 - \delta) \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\delta}} \right\} \\ \left\{ \left[ (\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4 \right] \right. \\ \left. \left[ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4 \right] \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (3.70)$$

y

$$\phi(\tau) = \phi_0 \exp \left\{ \sqrt{\frac{3}{B_2}} (1 - \delta) \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\delta}} \quad (3.71)$$

ii)  $\delta = 1$

$$a(\tau) = \phi_0^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{1}{4\sqrt{3}B_2}} \right\}$$

$$\left\{ \left[ (\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4 \right] \left[ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4 \right] \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (3.72)$$

y

$$\phi(\tau) = \phi_0 \exp \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{1}{4\sqrt{3}B_2}}. \quad (3.73)$$

### 3.4.5 Teoría 3

Haciendo  $2\omega(\phi) + 3 = \frac{B_3}{1 - \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^A}$  con  $A > 0$ ,  $B_3 > 0$  [86] obtenemos

$$a(\tau) = \phi_0^{-\frac{1}{A}} \left\{ 1 - \tanh \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{A}{2}} \sqrt{\frac{3}{B_3}} \right\}^{-\frac{1}{2A}} \left\{ \left[ (\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4 \right] \left[ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4 \right] \right\}^{\frac{1}{4}}, \quad (3.74)$$

y

$$\phi(\tau) = \phi_0 \left\{ 1 - \tanh \ln \left[ \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 - C_3)\tau + C_2 - C_4}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\tau^2 + (C_1 + C_3)\tau + C_2 + C_4} \right]^{\frac{A}{2}} \sqrt{\frac{3}{B_3}} \right\}^{\frac{1}{A}}. \quad (3.75)$$

## 3.5 Soluciones de agujero de gusano cuánticos

En las siguientes subsecciones mostraremos algunas soluciones especiales de la ecuación de WDW para  $N = 1$  y  $N = 1/x$ , las cuales son conocidas como agujero de gusanos cuánticos.

### 3.5.1 Caso $\Lambda(y) = 0$ , $N = 1$

En particular para un universo cerrado ( $k = 1$ ), tomando  $p = 1$ , la solución de la ecuación de WDW (3.13) es

$$v(x, y) = \left[ C_1 I_{is} \left( \frac{x^2}{2} \right) + C_2 K_{is} \left( \frac{x^2}{2} \right) \right] \left[ C_3 e^{isy} + C_4 e^{-isy} \right]. \quad (3.76)$$



Si escogemos la familia de soluciones

$$\psi_s(x, y) = C e^{isy} K_{is} \left( \frac{x^2}{2} \right), \quad (3.77)$$

entonces podemos generar una base de agujeros de gusano, es decir, haciendo superposición de funciones con la solución arriba señalada

$$\psi_{WH}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(s) e^{isy} K_{is} \left( \frac{x^2}{2} \right) ds, \quad (3.78)$$

si tomamos  $C(s) = e^{i\mu s}$  ( $\mu = cte.$ ), por medio de una transformada integral de Kontorovich-Lébedev[89] obtenemos

$$\psi_\mu(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2} \cosh[2y+\mu]}. \quad (3.79)$$

Esta solución es una base de soluciones de agujero de gusano, ya que satisface las condiciones de regularidad de Hawking-Page, i.e., la función de onda es amortiguada exponencialmente para geometrías espaciales grandes, y también es regular cuando la geometría espacial degenera[17]. Los agujeros de gusano juegan un papel importante en la solución de problemas asociados con la evaporación completa de hoyos negros, y se cree que producen interacciones efectivas en la física de bajas energías[72] que cambian las constantes de acoplamiento de la naturaleza en variables dinámicas[90]. El conjunto de funciones de onda  $\psi_\mu$  expanden el mismo espacio de estados físicos, y ambos son bases del espacio de Hilbert del modelo en la representación correspondiente, y la Ec. (3.78) es la conexión entre estas bases  $\psi_s$  y  $\psi_\mu$  [91, 92]. Más adelante mostraremos la construcción de agujeros de gusano Euclidianos en la teoría de BW[107].

### 3.5.2 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0$ , $N = 1$

En una forma similar, para el modelo plano ( $k = 0$ ), encontramos para  $\Lambda_0 < 0$  la siguiente base de agujeros de gusano cuánticos

$$\psi(x, y) = e^{-\sqrt{|\Lambda_0|} x^2 \cosh[3y-\mu]}. \quad (3.80)$$

de nuevo esta solución satisface la mencionadas condiciones de regularidad de Hawking-Page, y por sustitución directa podemos verificar que la base (3.80) es una solución particular de la Ec. (3.18).

### 3.5.3 Caso $\Lambda(\eta/\xi) = 0$ , $N = 1/x$

También podemos obtener agujeros de gusano cuánticos de la acción (3.8) con  $N = 1/x$ , si introducimos las siguientes variables independientes

$$\xi = x \cosh y, \quad \eta = x \sinh y, \quad (3.81)$$

entonces la nueva acción es

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \xi^2 \xi'^2 - \xi^2 \eta'^2 - \eta^2 \xi'^2 + \eta^2 \eta'^2 - k + (\xi^2 - \eta^2)^2 \Lambda(\eta/\xi) \right] d\tau, \quad (3.82)$$

de aquí el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} \left[ (\xi^2 - \eta^2) \xi'^2 + (\eta^2 - \xi^2) \eta'^2 - k + (\xi^2 - \eta^2)^2 \Lambda(\eta/\xi) \right], \quad (3.83)$$

y los momentos canónicos conjugados son

$$\Pi_\xi = (\xi^2 - \eta^2) \xi', \quad \Pi_\eta = (\eta^2 - \xi^2) \eta', \quad (3.84)$$

entonces el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{1}{2} \left[ (\xi^2 - \eta^2) \xi'^2 + (\eta^2 - \xi^2) \eta'^2 + k - (\xi^2 - \eta^2)^2 \Lambda(\eta/\xi) \right], \quad (3.85)$$

así cuantizando a  $H$ , tenemos que la correspondiente ecuación de WDW es

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - q \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} - (\xi^2 - \eta^2) k + (\xi^2 - \eta^2)^2 \Lambda(\eta/\xi) \right] \psi(\xi, \eta) = 0. \quad (3.86)$$

Escogiendo  $p = q = \Lambda(\eta/\xi) = 0$  y considerando el modelo cerrado ( $k = 1$ ), la Ec. (3.86) se simplifica a

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta^2 \right] v(\xi, \eta) = 0. \quad (3.87)$$

podemos apreciar que esta es la ecuación para dos osciladores armónicos con los signos de la energía contrarios, cuya solución es

$$v(\xi, \eta)_{WH} = H_n(\xi) H_n(\eta) e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}}. \quad (3.88)$$

Estas soluciones del oscilador armónico son una base de agujeros de gusano cuánticos, ya que satisfacen las condiciones de regularidad de Hawking-Page, (i) las soluciones son regulares en el origen y (ii) son amortiguadas en infinito.

### 3.5.4 Paquetes de onda

En esta parte siguiendo el desarrollo de Gousheh y Sepangi[59], estudiaremos la construcción de paquetes de onda resultantes de la solución de agujero de gusano previamente obtenida, esto es, la Ec. (3.88), que puede ser escrita como

$$v_{n_1, n_2}(\xi, \eta) = \alpha_{n_1}(\xi) \beta_{n_2}(\eta), \quad (3.89)$$

en donde

$$\alpha_{n_1}(\xi) = H_{n_1}(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (3.90)$$

$$\beta_{n_2}(\eta) = H_{n_2}(\eta)e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad (3.91)$$

y puesto que corresponden a la solución de dos osciladores armónicos con los signos de la energía contrarios, la condición de energía cero conduce a

$$\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\omega_1 = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\omega_2, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.92)$$

en nuestro caso  $\omega_1 = \omega_2$ . El conjunto  $\psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta)$  expande el subespacio de sector cero del espacio de Hilbert de funciones medibles de cuadrado integrable en  $\mathfrak{R}^2$  con un producto interno definido por

$$\int \psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta) \psi_{n'_1, n'_2}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2}. \quad (3.93)$$

La ortonormalidad y completez de las funciones base se da debido a las propiedades de los polinomios de Hermite. Podemos construir un paquete de onda general, como

$$\psi(\xi, \eta) = \sum'_{n_1, n_2} A_{n_1, n_2} \alpha_{n_1}(\xi) \beta_{n_2}(\eta), \quad (3.94)$$

en donde la prima de la sumatoria indica suma sobre todos los valores de  $n_1, n_2$  satisfaciendo (3.92). Como indican los signos de los términos cinéticos en la Ec. (3.87), podemos tomar a  $\eta$  como el factor de escala y de aquí la condición inicial sobre  $\psi$  se especifica mediante

$$\psi(\xi, 0) = \sum''_{n_1} C_{n_1} \alpha_{n_1}(\xi), \quad (3.95)$$

en donde los coeficientes  $C_{n_1}$  son arbitrarios y la doble prima en la sumatoria indica que la suma corre sólo sobre aquellos valores de  $n_1$  que satisfacen (3.92) siendo  $n_2$  par. La restricción de la paridad de  $n_2$  se debe al hecho de que  $\beta_{n_2}(0) = 0$  para valores impares de  $n_2$ . Se escogen los coeficientes  $C_n$  como los estados coherentes de un oscilador armónico simple, esto es

$$C_n = e^{-\frac{1}{2}|\lambda_0|^2} \lambda_0^n, \quad (3.96)$$

en donde  $\lambda_0$  es un número complejo arbitrario. Comparando los coeficientes de las ecuaciones (3.94) y (3.96) se encuentra que para valores pares de  $n_2$  que

$$A_{n_1, n_2} = \frac{C_{n_1}}{H_{n_2}(0)}, \quad (3.97)$$

$$= \frac{(n_2/2)! C_{n_1}}{(-1)^{n_2/2} n_2!}, \quad (3.98)$$

y las  $A_{n_1, n_2}$  son arbitrarias para valores impares de  $n_2$ . La ecuación de WDW es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, y para tener una solución única se tiene que especificar la función de onda y su derivada en un punto dado. Kiefer [60] escogió  $A_{n_1, n_2} = 0$  para valores impares de  $n_2$ , que es equivalente a escoger  $\left. \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0$ . Esta parece ser la única elección cuando se considera la Ec. (3.97). Gousheh y Sepangi [59] sugieren que esta no es la mejor elección canónica, así escogen  $A_{n_1, n_2}$  distinto de cero y con la misma forma funcional para ambos valores pares e impares de  $n_2$ , lo cual se puede hacer usando (3.98).

Las trayectorias clásicas correspondientes a estas soluciones son elipses generalizadas de Lissajous las cuales tienen la siguiente representación paramétrica

$$\xi(\tau) = \xi_0 \cos(\omega_1 \tau - \theta_0), \quad \eta(\tau) = \eta_0 \sin(\omega_2 \tau), \quad (3.99)$$

en donde la condición de energía cero demanda que  $\omega_1 \xi_0 = \omega_2 \eta_0$ , y  $\theta_0$  es un factor de fase arbitrario. La correspondencia clásica-cuántica se establece mediante la siguiente ecuación

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \xi_0 e^{i\theta_0}. \quad (3.100)$$

Considerando el caso más simple de las ecuaciones (3.89)-(3.94) cuando  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  se identifica que, puesto que  $n_1 = n_2 = n$  y  $H_n(0) = 0$  para valores impares de  $n$ , las  $A_{n, n}$  no están determinadas para valores impares de  $n$  y que

$$\psi(\xi, 0) = \psi(-\xi, 0), \quad (3.101)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = - \left. \frac{\partial \psi(-\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}. \quad (3.102)$$

Por lo tanto, el estado inicial tiene que ser simétrico y se escoge como dos Gaussianas simétricas. La Figura 12a muestra el cuadrado del paquete de onda  $|\psi(\xi, \eta)|^2$  para  $|\chi_0| = 12$  y  $\theta_0 = 0$ , sumando sobre valores pares e impares de  $n$ , y la Figura 12b muestra la gráfica de contorno del mismo paquete de onda a lo largo de las trayectorias clásicas superpuestas en ella. Para obtener una representación gráfica razonable, el número mínimo de términos incluidos en la suma, denotado por  $n_{max}$ , tiene que ser del orden de  $|\chi_0|^2$ . Como es aparente de estas figuras, la cresta del paquete de onda sigue exactamente la trayectoria clásica.

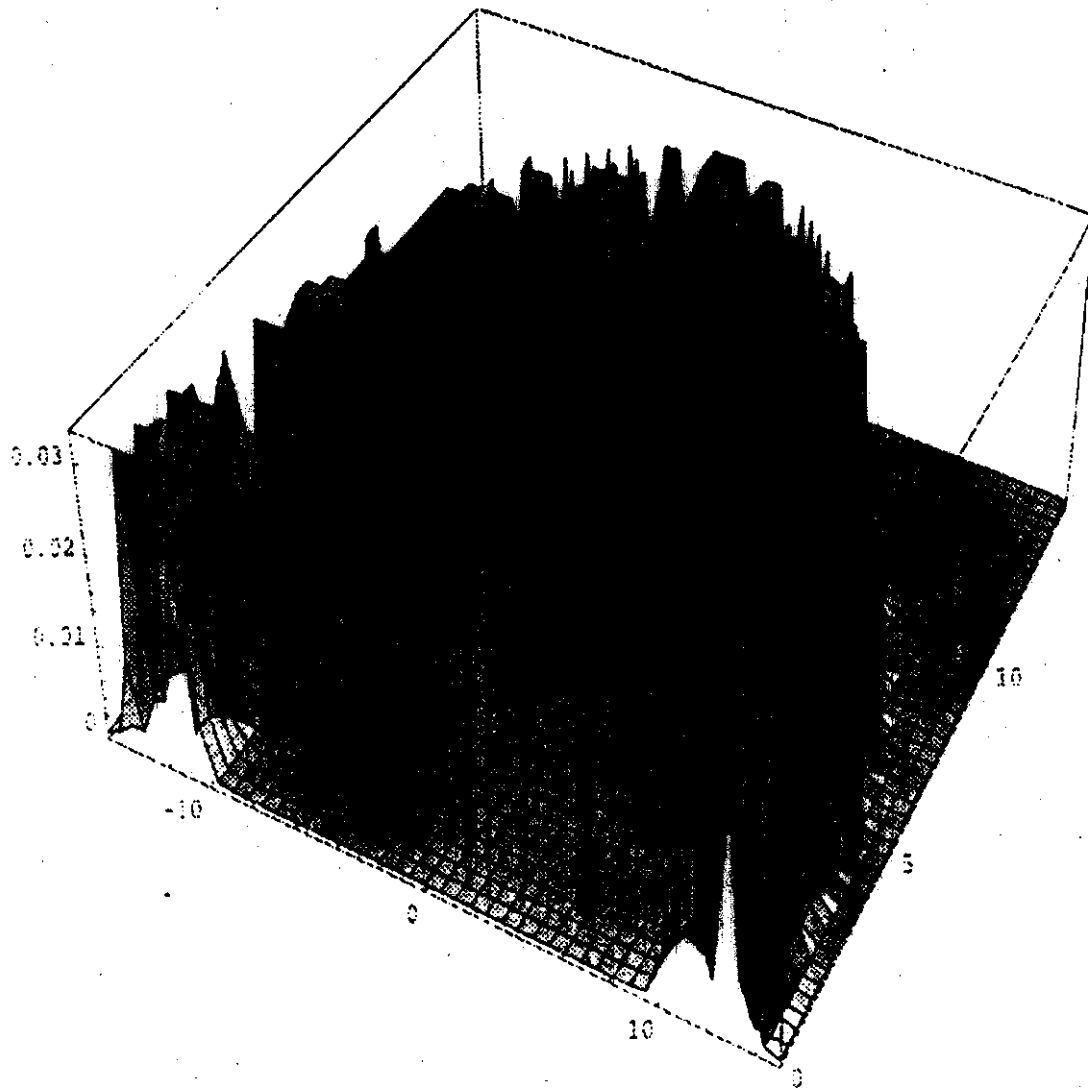


Figura 12a. Cuadrado del paquete de onda  $|\psi(\xi, \eta)|^2$  para  $|\chi_0| = 12$ , con  $n_{max} = 130$  y  $\theta_0 = 0$ , suponiendo sólo valores de  $n$  par.

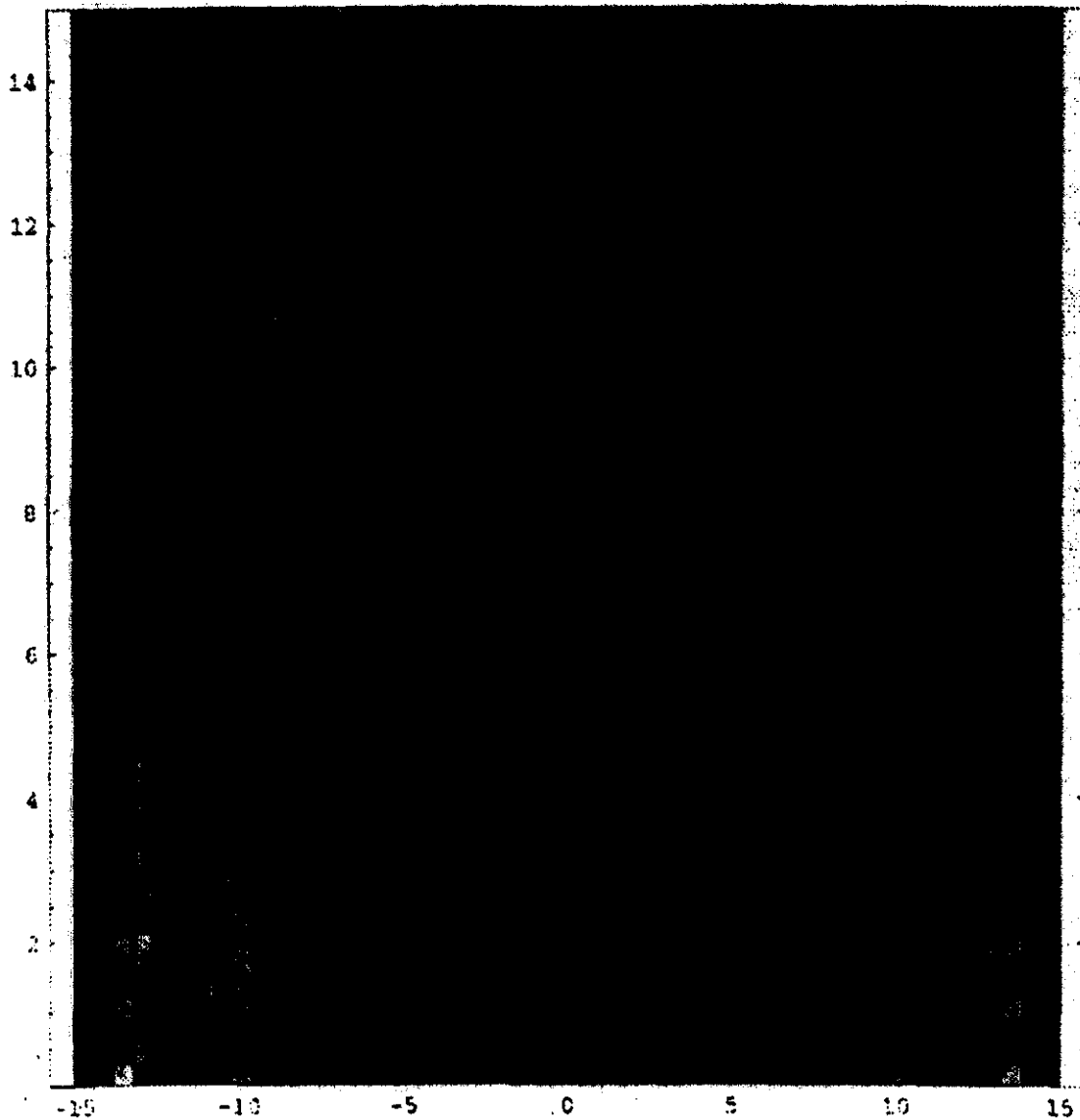


Figura 12b. Gráfica de contorno de la Figura 12a con la trayectoria clásica superpuesta como la línea sólida.

### 3.6 Configuración Euclideana de agujeros de gusano

Desde que Hawking encontró la primera solución de agujero de gusano Euclideana[72], se ha realizado mucho trabajo en este campo[61, 62, 73]. En esta sección presentaremos una solución de agujero de gusano Euclideano en la teoría de BW encontrada por Niao y Liu[93]. Ellos mostraron que su carga conservada es compleja y es

una mitad de agujero de gusano (universo bebé). Para ello se resuelve la ecuación gravitacional Euclidea de BW, la cual se obtiene de la acción Lorentziana (3.8). Utilizaremos el tiempo

$$d\tau = x(b) db, \quad \frac{dx}{d\tau} = x^{-1}(b) \frac{dx}{db}, \quad (3.103)$$

y la transformación conforme

$$ds^2 = x^2(b) \sigma^2 (-db^2 + d\Omega_3^2). \quad (3.104)$$

Así obtenemos la acción

$$S_{BW} = \frac{1}{2} \int \left[ x^2 - x^4 \Lambda(y) - \left( \frac{dx}{db} \right)^2 + x^2 \left( \frac{dy}{db} \right)^2 \right] db. \quad (3.105)$$

Sea luego el tiempo Euclideo

$$d\bar{b} = i db. \quad (3.106)$$

Obtenemos la acción Euclidea

$$\begin{aligned} S_{BWE} &= -i S_{BW}, \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ x^2 - x^4 \Lambda(y) + \left( \frac{dx}{d\bar{b}} \right)^2 - x^2 \left( \frac{dy}{d\bar{b}} \right)^2 \right] d\bar{b}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

El correspondiente Lagrangiano Euclideo de BW es

$$L_{BWE} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \Lambda(y) - \frac{x^2}{2} \dot{y}^2, \quad (3.108)$$

en donde el punto denota derivada temporal con respecto al tiempo conforme Euclideo  $\bar{b}$ . La ecuación clásica gravitacional Euclidea de BW puede ser derivada del principio de acción mínima.

Mediante la variación con respecto a  $x$  y  $y$ , se obtiene la ecuación para  $x$

$$\frac{d}{d\bar{b}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L - \frac{\partial}{\partial x} L = \ddot{x} - x + 2x^3 \Lambda(y) + x \dot{y}^2 = 0, \quad (3.109)$$

y la ecuación para  $y$

$$\frac{d}{d\bar{b}} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} L - \frac{\partial}{\partial y} L = \frac{d}{d\bar{b}} (-x^2 \dot{y}^2) - \frac{1}{2} x^4 \frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y} = 0. \quad (3.110)$$

Ahora supongamos que  $\lambda(\phi)$  es una función de  $\phi$  que varía lentamente, lo cual es equivalente a decir que,  $\Lambda(y)$  varía lentamente con  $y$ . Así se puede hacer

$$\frac{\partial \Lambda(y)}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (3.111)$$

De (3.110) obtenemos la carga conservada del agujero de gusano

$$Q \equiv x^2 \dot{y} \equiv a^3 \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{12} \frac{d\phi}{d\bar{t}}}, \quad (3.112)$$

en donde  $\bar{t} = it$  es el tiempo cósmico Euclideo. Después de sustituir (3.112) en (3.109), obtenemos

$$\ddot{x} - x2x^3\lambda(y) + x^{-3}Q^2 = 0. \quad (3.113)$$

Ahora definimos

$$f(x) = \dot{x}^2 - 1. \quad (3.114)$$

Entonces las derivadas de segundo orden de  $x(\bar{b})$  con respecto a  $\bar{b}$  son reemplazadas por las derivadas de primer orden de  $f(x)$  con respecto a  $x$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2\ddot{x} = 2x - 4x^3\lambda(y) - 2x^{-3}Q^2, \quad (3.115)$$

después de integrar (3.115) con respecto a  $x$ , tenemos

$$f(x) = x^2 - x^4\lambda(y) + x^{-2}Q^2 + A, \quad (3.116)$$

en donde  $A$  es una constante de integración. Los criterios para considerar a  $f(x)$  como una solución de agujero de gusano, son que  $x$  tome su valor máximo  $x_M$  y su valor mínimo  $x_m$  igual a  $-1$  y para  $f(x) (\geq -1)$  que varíe suavemente entre  $x_M$  y  $x_m$  [62].

Cuando  $f(x) = -1$ , (3.116) viene a ser

$$x^6 - \Lambda^{-1}x^4 - \Lambda^{-1}(A + 1)x^2 - \Lambda^{-1}Q^2 = 0. \quad (3.117)$$

Sea

$$x^2 = \eta + (3\Lambda)^{-1}, \quad (3.118)$$

entonces (3.117) se puede reescribir como

$$\eta^3 + R\eta + S = 0, \quad (3.119)$$

en donde

$$R = -\frac{1 + 3\Lambda(A + 1)}{3\Lambda^2}, \quad (3.120)$$



$$S = -\frac{2}{27\Lambda^3} \left[ 1 + \frac{9}{2}\Lambda(A+1) \frac{27}{2}\Lambda^2 Q^2 \right]. \quad (3.121)$$

Del criterio demandado para una solución de agujero de gusano, tenemos  $x_M \gg x_m$  y  $x^2 > 0$ , así las raíces  $\eta_1$  y  $\eta_2$  (correspondiendo a  $x_M$  y  $x_m$ , respectivamente) de la Ec. (3.119) deberían satisfacer

$$\eta_1 \gg \eta_2, \quad \eta_{1,2} > (3\Lambda)^{-1}. \quad (3.122)$$

De acuerdo al criterio para una ecuación cúbica, cuando

$$\Delta = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{3}\right)^3 \geq 0, \quad (3.123)$$

la Ec. (3.117) no tiene una solución de agujero de gusano, debido al hecho de que las raíces de la Ec. (3.119) no satisfacen la condición (3.123). Cuando

$$\Delta < 0, \quad (3.124)$$

la Ec. (3.119) tiene tres raíces reales no equivalentes, así la Ec. (3.117) debe tener una solución de agujero de gusano. Reescribimos (3.119) como

$$\eta - m\eta^3 = l, \quad (3.125)$$

en donde

$$l = -\frac{2}{9\Lambda} [1 + 3\Lambda(A+1)]^{-1} \left[ 1 + \frac{9}{2}\Lambda(A+1) + \frac{27}{2}\Lambda^2 Q^2 \right], \quad (3.126)$$

$$m = \frac{3\Lambda^2}{1 + 3\Lambda(A+1)}. \quad (3.127)$$

Usando un método gráfico se puede evaluar la solución aproximada de la Ec. (3.125). En la Figura 13 se dan dos curvas para indicar

$$y = \eta - m\eta^3. \quad (3.128)$$

$$y = l < 0. \quad (3.129)$$

respectivamente. En la Figura 13 los puntos de intersección  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  dan la solución de la Ec. (3.125).

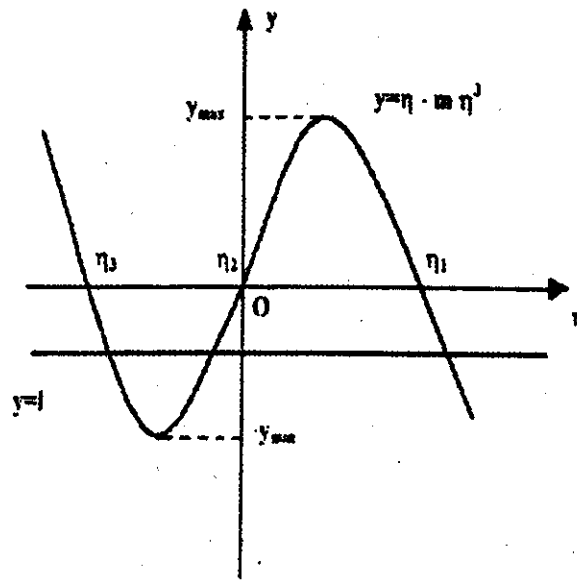


Figura 13. Solución gráfica aproximada.

Cuando

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{1 + 3\Lambda(A + 1)}}{3\Lambda}, \quad (3.130)$$

la Ec. (3.128) tiene los valores extremos

$$y_{max} = \frac{2}{9\Lambda} \sqrt{1 + 3(A + 1)\Lambda}. \quad (3.131)$$

$$y_{min} = -\frac{2}{9\Lambda} \sqrt{1 + 3(A + 1)\Lambda}. \quad (3.132)$$

Suponiendo  $|l| \ll y_{max}$ , entonces sólo si

$$A + 1 \gg (3\Lambda)^{-1}, \quad (3.133)$$

esta condición se puede satisfacer, y resolviendo la Ec. (3.125) es más fácil. Se observa de la Figura 13 que la raíz  $\eta_2$  de (3.125) es muy pequeña, entonces el término  $\eta^3$  se puede despreciar de la Ec. (3.125), y tenemos

$$\begin{aligned} \eta_2 &\approx l, \\ &= -\frac{2}{9\Lambda} [1 + 3\Lambda(A + 1)]^{-1} \left[ 1 + \frac{9}{2}\Lambda(A + 1) + \frac{27}{2}\Lambda^2 Q^2 \right], \\ \eta_2 &\approx -\frac{Q^2}{A + 1} - \frac{1}{3\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Para cumplir la condición (3.122), debemos tener  $-Q^2/(A+1) > 0$ , tal que  $Q$  debería ser imaginaria, es decir

$$Q = i |Q|, \quad (3.135)$$

en donde  $|Q|$  es real. Entonces (3.134) viene a ser

$$\eta_2 = \frac{|Q|^2}{A+1} - \frac{1}{3\Lambda}. \quad (3.136)$$

Obviamente, la raíz de la Ec. (3.125) es grande, así que el término  $l$  puede ser despreciado. Tenemos

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{1+3\Lambda(A+1)}}{\sqrt{3\Lambda}} \approx \frac{\Lambda(A+1)}{\Lambda}. \quad (3.137)$$

Sin embargo, ya que

$$\eta_3 < -\frac{\sqrt{1+3\Lambda(A+1)}}{3\Lambda}, \quad (3.138)$$

no satisface la condición (3.122), la raíz  $\eta_3$  puede ser ignorada. Así de

$$x_b^2 = \eta_2 + \frac{1}{3\Lambda} = \frac{|Q|^2}{A+1}, \quad (3.139)$$

y

$$x_m^2 = \eta_1 + \frac{1}{3\Lambda} \approx \frac{1+3\sqrt{\Lambda(A+1)}}{3\Lambda}, \quad (3.140)$$

obtenemos

$$a_b = \frac{|Q|}{\sqrt{(A+1)\phi}}, \quad (3.141)$$

y

$$a_m = \left( \frac{1+3\sqrt{\Lambda(A+1)}}{3\Lambda\phi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.142)$$

Ya que  $A+1$  ( $\gg 1/3\Lambda$ ) es muy grande y  $\Lambda$  en general es muy pequeña, tenemos

$$a_b \ll a_m. \quad (3.143)$$

Obviamente,  $a_b = l$  es la dimensión mínima de la configuración y de aquí es llamada la garganta del agujero de gusano.

Si pedimos que  $a_b$  no sea más pequeña que la longitud de Planck  $l_P$ , entonces (3.139) y (3.140) dan

$$\frac{1}{3\Lambda} \ll A + 1 \leq \frac{|Q|^2}{l_P^2 \phi}. \quad (3.144)$$

Esta condición ciertamente puede ser satisfecha. Por lo tanto, la solución (3.141) y (3.142) es justo la configuración Euclideana de agujero de gusano conectando un universo bebé (del tamaño de la longitud de Planck  $\sim a_b$ ) y un universo madre grande (de un tamaño de  $a_m$ ).

### 3.7 Tercera cuantización

Como se mencionó en el capítulo 2 sobre fundamentos teóricos, el procedimiento de cuantización de la función de onda  $\psi$  se le llama tercera cuantización [15], y en esta teoría se considera a  $\psi$  como un operador actuando sobre un sistema de vectores de estado de universos que pueden desconponerse como

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} [C(s)\psi_s(\alpha, \beta) + C(s)^\dagger \psi^*(\alpha, \beta)] ds, \quad (3.145)$$

en donde  $\psi_s(\alpha, \beta)$  y  $\psi^*(\alpha, \beta)$  forman conjuntos ortonormales completos orthonormales de soluciones de la ecuación de WDW. Esto es en analogía con las teoría cuántica de campos, en donde  $C(s)$  y  $C^\dagger(s)$  son operadores de creación y aniquilación. Así, esperamos que el estado vacío en una teoría de tercera cuantización sea inestable y tenga lugar la creación de universos del estado vacío inicial. En esta perspectiva, la variable  $\alpha$  juega el papel del tiempo, y la variable  $\beta$  el papel del espacio. Consideremos ahora el modelo cuántico (3.37) para el ordenamiento de factores  $p = 0$ , y el término cosmológico  $\Lambda_2 = 0$ , para universo cerrado  $k = 1$ . Entonces, la ecuación de WDW es

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{4}(\Lambda_1 \alpha - 1) \right] \psi(\alpha, \beta) = 0. \quad (3.146)$$

cuya solución general es:

$$\psi_s(\alpha, \beta) = B_s e^{i s \beta} \left\{ A_i \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{1}{2}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1 \alpha) \right] + b B_i \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{1}{2}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1 \alpha) \right] \right\}. \quad (3.147)$$

en donde  $b$  es un parámetro que se determinará después, y  $B_s$  es una constante de normalización la cual se calculará mediante el producto escalar de Klein-Gordon

$$\langle \psi_s, \psi_{s'} \rangle = i \int \psi_s \bar{\partial}_\beta \psi_{s'}^* d\beta = \delta(s - s'), \quad (3.148)$$

dando como resultado la relación

$$\frac{4\Lambda_1}{(2\Lambda_1)^{2/3}} |B_s|^2 \text{Im } b = 1, \quad (3.149)$$

en donde se ha usado el Wronskiano  $A_i B_i' - A_i' B_i = 1/\pi$ . Como se mencionó en un principio, para hacer la tercera cuantización del universo tomamos a la variable  $\alpha$  como el tiempo y a  $\beta$  como el espacio. Así,  $\psi(\alpha, \beta)$  ahora es considerada como un campo cuántico en el minisuperespacio. La acción tercera cuantizada para producir la ecuación de WDW (3.146) es

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{1}{4} (\Lambda_1 \alpha - 1) \psi^2 \right] d\alpha d\beta. \quad (3.150)$$

Cuantizamos canónicamente el sistema (3.150), e imponemos las relaciones de conmutación (2.102)-(2.104) a mismo tiempo  $\alpha$

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial \psi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \psi(\alpha, \beta') \right] &= \delta(\beta - \beta'), \\ \left[ i \frac{\partial \psi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, i \frac{\partial \psi(\alpha, \beta')}{\partial \alpha} \right] &= 0, \\ [\psi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta')] &= 0. \end{aligned}$$

Luego se expande el campo  $\psi$  en modos normales  $\psi_s$ , tal como expresamos en la Ec. (3.145), y suponemos que los operadores de creación y aniquilación obedecen las relaciones de conmutación estándar dadas por (2.98)-(2.100)

$$[C(s), C^\dagger(s')] = \delta(s - s'), \quad [C(s), C(s')] = [C^\dagger(s), C^\dagger(s')] = 0.$$

El número de onda  $s$  es el momento en unidades de Planck y es muy pequeño. Fijamos el parámetro  $b$  demandando que  $v_s$  corresponda a modos salientes de frecuencia positiva. En las regiones clásicamente permitidas los modos de frecuencia positiva corresponden a universos en expansión [10, 15]. Consideraremos la elección de pequeñas escalas ( $a \simeq 1$ ) y grandes escalas ( $a \rightarrow \infty$ ) y se impondrá allí frecuencias positivas. En el límite  $a \rightarrow \infty$  el argumento de las funciones de Airy tiende a  $-\infty$ . En este límite el comportamiento asintótico de estas funciones es [80]

$$\text{Ai}(-|X|) \sim \pi^{-1/2} |X|^{-1/4} \sin(\zeta + \pi/4), \quad (3.151)$$

$$\text{Ai}(-|X|) \sim \pi^{-1/2} |X|^{-1/4} \cos(\zeta + \pi/4), \quad (3.152)$$

en donde  $\zeta = \frac{2}{3} |X|^{3/2}$  y  $X = (2\Lambda_1)^{-2/3} (1 - 4s^2 - \Lambda_1 \alpha)$ . Así la elección  $b = i$  nos asegurará modos salientes de frecuencia positiva para grandes escalas. Los modos salientes son

$$\psi_s^+(\alpha, \beta) = \frac{e^{is\beta}}{(16\Lambda_1)^{\frac{1}{4}}} \left\{ \text{Ai} \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{2}{3}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1\alpha) \right] + i \text{Bi} \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{2}{3}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1\alpha) \right] \right\}, \quad (3.153)$$

en donde la normalización  $B_s$  fue determinada de (3.149). Similarmente imponemos condiciones de frecuencia positiva a pequeñas escalas. Cuando  $\Lambda_1\alpha \rightarrow 0$ , el argumento  $X$  de las funciones de Airy se aproxima a  $X_0 = \frac{1-4s^2}{(2\Lambda_1)^{2/3}}$ , el cual es muy grande, tomando el valor de la constante cosmológica considerado por Coleman [61],  $\Lambda_1 \leq \frac{1}{8\pi} \times 10^{-120} m_p^4$ , y  $|s| \ll 1$ . De aquí  $X_0 \gg 1$ . La forma asintótica de las funciones de Airy para  $X_0$  positivas grandes [80] es

$$\text{Ai}(X_0) \sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} X_0^{\frac{1}{4}} \exp(-\zeta_0), \quad (3.154)$$

$$\text{Bi}(X_0) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} X_0^{\frac{1}{4}} \exp(\zeta_0), \quad (3.155)$$

en donde  $\zeta_0 = \frac{2}{3} X_0^{3/2}$ . Expandiremos a  $\text{Ai}(X)$  y  $\text{Bi}(X)$  como una serie de potencias en la variable  $\alpha$ , y obtenemos

$$\text{Ai}(X) \sim \text{Ai}(X_0) \exp \left[ \frac{(1-4s^2)^{1/2} \alpha}{2} \right], \quad (3.156)$$

$$\text{Bi}(X) \sim \text{Bi}(X_0) \exp \left[ -\frac{(1-4s^2)^{1/2} \alpha}{2} \right]. \quad (3.157)$$

Entonces la forma asintótica de la función de onda a pequeñas escalas es

$$\psi_s^+(\alpha, \beta) = e^{is\beta} B_s \pi^{-\frac{1}{2}} X_0^{-\frac{1}{4}} \left\{ \frac{1}{2} \exp(-\zeta_0) \exp \left[ (1-4s^2)^{1/2} \frac{\alpha}{2} \right] + b \exp(\zeta_0) \exp \left[ (1-4s^2)^{1/2} \frac{\alpha}{2} \right] \right\}. \quad (3.158)$$

La función de onda de modo entrante de frecuencia positiva es definida como

$$\psi_s^-(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2} e^{is\beta}}{(16\Lambda_1)^{\frac{1}{4}}} \left\{ e^{-\frac{(1-4s^2)^{1/2} \alpha}{2}} \text{Ai} \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{2}{3}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1\alpha) \right] + \frac{i}{2} e^{-\frac{(1-4s^2)^{1/2} \alpha}{2}} \text{Bi} \left[ (2\Lambda_1)^{-\frac{2}{3}} (1 - 4s^2 - \Lambda_1\alpha) \right] \right\}, \quad (3.159)$$

en donde el parámetro  $b$  se escogió como  $b = \frac{i}{2} \exp \left[ \frac{-2}{3\Lambda_1} (1-4s^2)^{3/2} \right]$ , ya que de (3.158) y (3.159), se ve que cuando  $\Lambda_1 \rightarrow 0$ , entonces se reduce a

$$\psi_s^-(\alpha, \beta) \sim \frac{e^{i\alpha\beta}}{\sqrt{4\pi}} \exp \left[ (1 - 4s^2)^{1/2} \frac{\alpha}{2} + i \exp \left( -(1 - 4s^2)^{3/2} \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \quad (3.160)$$

(3.160) es una función modo de frecuencia positiva como un modo entrante y también la solución de (3.146) con  $\Lambda_1 = 0$ . De esta forma se ha obtenido un conjunto completo de soluciones normalizadas de frecuencia positiva para la ecuación de WDW.

Ahora estimaremos el número promedio de universos producidos de la nada. La función de onda  $\psi$  se puede expandir en términos de operadores de creación y aniquilación para cada conjunto de modos como

$$\psi^+(\alpha, \beta) = \int [C_{in}(s)\psi_s^-(\alpha, \beta) + C_{in}^\dagger(s)\psi_s^{-*}(\alpha, \beta)] ds, \quad (3.161)$$

$$\psi^-(\alpha, \beta) = \int [C_{out}(s)\psi_s^+(\alpha, \beta) + C_{out}^\dagger(s)\psi_s^{+*}(\alpha, \beta)] ds. \quad (3.162)$$

Ambos conjuntos, (3.153) y (3.159) son completos, y están relacionados uno con otro por una transformación de Bogoliubov definida por

$$\psi_s^+(\alpha, \beta) = \int [M^+(s, r)\psi_r^-(\alpha, \beta) + M^-(s, r)\psi_r^{-*}(\alpha, \beta)] dr. \quad (3.163)$$

De (3.153) y (3.159) obtenemos que los coeficientes de Bogoliubov  $M^+(s, r) = \delta(s - r)v(s)$  y  $M^-(s, r) = \delta(s + r)w(s)$  son

$$M^+(s, r) = \delta(s - r) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{(1-4s^2)^{3/2}}{3\Lambda_1}} + e^{\frac{(1-4s^2)^{3/2}}{3\Lambda_1}} \right], \quad (3.164)$$

$$M^-(s, r) = \delta(s + r) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{(1-4s^2)^{3/2}}{3\Lambda_1}} + e^{\frac{(1-4s^2)^{3/2}}{3\Lambda_1}} \right]. \quad (3.165)$$

Los coeficientes  $M^\pm(s, r)$  son distintos de cero, y satisfacen respectivamente la condición de conservación de la probabilidad:  $|v(s)|^2 - |w(s)|^2 = 1$ . Así, se pueden construir dos espacios de Fock con la ayuda de los modos (3.153) y (3.159) los cuales no son equivalentes y se tienen dos estados de vacío diferentes tercero cuantizados (vacíos): el modo entrante  $|0, in\rangle$  y el modo saliente  $|0, out\rangle$ , (los cuales son los estados sin universos tipo FRW), definidos por

$$C_{in}(s) |0, in\rangle = 0 \quad \forall s \in \mathfrak{R}, \quad (3.166)$$

$$C_{out}(s) |0, out\rangle = 0 \quad \forall s \in \mathfrak{R}. \quad (3.167)$$

Como los estados vacíos  $|0, in\rangle$  y  $|0, out\rangle$  no son equivalentes, tiene lugar el nacimiento de universos de la nada, en donde "nada" es el estado vacío  $|0, in\rangle$ . El número promedio de universos creados de la nada, en el  $s$ -ésimo modo  $N(s)$  es

$$N(s) = \langle 0, in | C_{out}^\dagger(s) C_{out}(s) | 0, in \rangle, \quad (3.168)$$

de la Ec. (3.165) tenemos que

$$N(s) = |w(s)|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{(1-4s^2)^{\frac{3}{2}}}{3\Lambda_1}} - e^{\frac{(1-4s^2)^{\frac{3}{2}}}{3\Lambda_1}} \right]^2. \quad (3.169)$$

Debido al mecanismo de agujero de gusano de Coleman[61] para la ausencia de constante cosmológica, tomamos la restricción  $\Lambda_1 \leq 1/8\pi \times 10^{-120} m_p^4$ , también suponiendo  $|s| \ll 1$ , entonces notamos que podemos obtener el número de estado  $N(s)$

$$N(s) \approx \frac{1}{2} e^{\frac{2}{3\Lambda_1}(1-4s^2)^{\frac{3}{2}}} > 1. \quad (3.170)$$

Este resultado de la tercera cuantización muestra que el número de universos inflacionarios producidos de la nada es exponencialmente muy grande. Especialmente, para el estado etiquetado por  $s = 0$ , el número promedio de universos debería satisfacer

$$N(0) \geq 10^{10^{120}}. \quad (3.171)$$

### 3.8 La relación de incertidumbre

En esta sección estudiaremos la tercera cuantización para la norma  $N = 1$ , para obtener la relación de incertidumbre de Heisenberg. Primero partimos de la ecuación de WDW (3.12), poniendo  $\Lambda(y) = \Lambda_0$  tenemos

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + px \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - x^4 (k - \Lambda_0 x^2) \right] \psi(x, y) = 0, \quad (3.172)$$

si escogemos  $p = -1$  e introduciendo la nueva variable  $z = x^2$ , la ecuación anterior se transforma en

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{4z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + U(z) \right] \psi(z, y) = 0. \quad (3.173)$$

$$U(z) = -\frac{1}{4} (k - \Lambda_0 z). \quad (3.174)$$

La acción tercera cuantizada para construir la ecuación de WDW (3.173) es

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4z^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - U(z) \psi^2 \right] dz dy. \quad (3.175)$$



Ahora usaremos una descomposición de Fourier para desacopiar los grados de libertad. El campo de universos  $\psi(z, y)$  se expandirá en términos de senos y cosenos. También supondremos que nuestro sistema cuántico está confinado en una caja unidimensional con condiciones de frontera periódicas, con la coordenada de longitud fijada en un valor arbitrario  $M$ , entonces el campo de universos se puede escribir como

$$\psi(z, y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{M} \left\{ \psi(z, 0) + \sum_{q=2\pi n/M} \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(z, q) \cos qy + \psi_-(z, q) \sin qy] \right\}, \quad (3.176)$$

en donde  $\psi_+(z, -q) = \psi_+(z, q)$  y  $\psi_-(z, -q) = \psi_-(z, q)$ . Sustituyendo la expansión (3.176) en la Ec. (3.175), obtenemos que

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial z} \right)^2 - \frac{q^2}{4z^2} \psi_{\sigma}^2 - U(z) \psi_{\sigma}^2 \right], \quad (3.177)$$

en donde para simplificar la notación hemos denotado las variables modales  $\psi(z, 0)$  y  $\psi_{\pm}(z, q)$  por  $\psi_{\sigma}(z)$ , y la Ec. (3.177) está rescalada a  $\psi_{\sigma} \rightarrow \sqrt{M/2\pi} \psi_{\sigma}$ . La suma de arriba incluye el modo cero  $\psi(z, 0)$  para cada par  $(q, -q)$ , de esta forma la variable modal  $\psi_{\sigma}$  está desacoplada completamente una de la otra. Ahora el Hamiltoniano está dado por

$$H_{\sigma} = \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \left[ \pi_{\sigma}^2 + \left( \frac{q^2}{4} + U(z) \right) \psi_{\sigma}^2 \right]. \quad (3.178)$$

Para cuantizar este sistema (3.178), imponemos las relaciones de conmutación

$$[\psi_{\sigma}, \pi_{\sigma'}] = i\delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (3.179)$$

La funcional de onda de cualquier eigenestado se factoriza como

$$\Psi = \prod_{\sigma} \Psi_{\sigma} [z, \psi_{\sigma}]. \quad (3.180)$$

Trabajamos en la imagen de Schrödinger con la sustitución  $\psi \rightarrow \psi_{\sigma}$  y  $\pi_{\sigma} \rightarrow -i \frac{d}{d\psi_{\sigma}}$ , en donde  $\psi_{\sigma}$  es el  $\sigma$  número real independiente del tiempo. Así obtenemos la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \psi_{\sigma}^2} + \left( \frac{q^2}{4z^2} + U(z) \right) \psi_{\sigma}^2 \right] \Psi_{\sigma}. \quad (3.181)$$

Resolveremos la ecuación funcional de arriba utilizando el ansatz Gaussiano dado por [95]

$$\psi_\sigma[z, \psi_\sigma] = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} A_\sigma(z, q) [\psi_\sigma(z, q) - \theta_\sigma(z, q)]^2 + i P_\sigma(z, q) [\psi_\sigma(z, q) - \theta_\sigma(z, q)] \right\}, \quad (3.182)$$

con

$$A_\sigma(z, q) = D_\sigma(z, q) + i F_\sigma(z, q), \quad (3.183)$$

en donde las funciones reales  $D_\sigma(z, q)$ ,  $F_\sigma(z, q)$ ,  $P_\sigma(z, q)$ , y  $\theta_\sigma(z, q)$  se deben determinar de la Ec. (3.181). Aquí  $C$  es una normalización de la función de onda. El producto interno de dos funcionales  $\psi_{1\sigma}(z, \psi_\sigma)$  y  $\psi_{2\sigma}(z, \psi_\sigma)$  se define como

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_z = \int \psi_{1\sigma}[z, \psi_\sigma] \psi_{2\sigma}^*[z, \psi_\sigma] d\psi_\sigma. \quad (3.184)$$

Ahora calcularemos la relación de incertidumbre, para ello necesitamos obtener la dispersión de  $\psi_\sigma$  dada por

$$(\Delta\psi_\sigma)^2 \equiv \langle \psi_\sigma^2 \rangle_z - \langle \psi_\sigma \rangle_z^2, \quad (3.185).$$

de las Ecs. (3.182) y (3.184) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi_\sigma \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi_\sigma \psi d\psi_\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_\sigma} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{D|\psi_\sigma - \theta|^2} \psi_\sigma d\psi_\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{D|\psi_\sigma - \theta|^2} d\psi_\sigma}, \end{aligned} \quad (3.186)$$

y utilizando los resultados de integrales Gaussianas generalizadas  $J_0$ ,  $J_1$  y  $J_2$  (ver el Apéndice E), el cociente de (3.186) se transforma en

$$\begin{aligned} \langle \psi_\sigma \rangle &= \frac{J_1}{J_0} \\ &= \frac{\frac{2D\theta}{2D} J_0}{J_0} \\ \langle \psi_\sigma \rangle &\equiv \theta(z, q). \end{aligned} \quad (3.187)$$

También tenemos que

$$\langle \psi_\sigma^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi_\sigma^2 \psi d\psi_\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_\sigma},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{D|\psi_{\sigma}-\Theta|^2} \psi_{\sigma}^2 d\psi_{\sigma}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{D|\psi_{\sigma}-\Theta|^2} d\psi_{\sigma}}, \\
&= \frac{J_2}{J_0}, \\
&= \frac{\left[ \frac{1}{D} + \left( \frac{-2D\Theta}{2A} \right)^2 \right] J_0}{J_0}, \\
\langle \psi_{\sigma}^2 \rangle &\equiv \frac{1}{D(z, q)} + \Theta^2(z, q). \tag{3.188}
\end{aligned}$$

Por consiguiente de las ecuaciones (3.187) y (3.188) la expresión de la dispersión de  $\psi_{\sigma}$  (3.185) es

$$(\Delta\psi_{\sigma})^2 = \frac{1}{2D_{\sigma}(z, q)}. \tag{3.189}$$

Por otro lado, la dispersión de  $\pi_{\sigma}$  está dada por

$$(\Delta\pi_{\sigma})^2 \equiv \langle \pi_{\sigma}^2 \rangle - \langle \pi_{\sigma} \rangle^2, \tag{3.190}$$

en donde

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\sigma} \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \pi_{\sigma} \psi d\psi_{\sigma}}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_{\sigma}}, \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( -i \frac{d}{d\psi_{\sigma}} \right) \psi d\psi_{\sigma}}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_{\sigma}}, \\
&\equiv P_{\sigma}(z, q). \tag{3.191}
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\sigma}^2 \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \pi_{\sigma}^2 \psi d\psi_{\sigma}}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_{\sigma}}, \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( -i \frac{d}{d\psi_{\sigma}} \right) \left( -i \frac{d}{d\psi_{\sigma}} \right) \psi d\psi_{\sigma}}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi d\psi_{\sigma}}, \\
&\equiv \frac{D_{\sigma}(z, q)}{2} + \frac{F_{\sigma}^2(z, q)}{2D_{\sigma}(z, q)} + P_{\sigma}^2(z, q). \tag{3.192}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la dispersión de  $\pi_{\sigma}$  definida por (3.190) es

$$(\Delta\pi_{\sigma})^2 = \frac{D_{\sigma}(z, q)}{2} + \frac{F_{\sigma}^2(z, q)}{2D_{\sigma}(z, q)}, \tag{3.193}$$

así obtenemos que la relación de incertidumbre de Heisenberg es

$$(\Delta\psi_\sigma)^2 (\Delta\pi_\sigma)^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left[ \frac{F_\sigma(z, q)}{D_\sigma(z, q)} \right]^2 \right\}. \quad (3.194)$$

Para obtener  $F_\sigma(z, q)$  y  $D_\sigma(z, q)$  sustituimos el ansatz (3.182) en la Ec. (3.181), así obtenemos la ecuación de movimiento para  $A_\sigma(z, q)$ :

$$-i \frac{d}{dz} A_\sigma(z, q) = -A_\sigma^2(z, q) + \frac{q^2}{4z^2} + U(z). \quad (3.195)$$

Luego utilizaremos

$$A_\sigma(z, q) = -i \frac{d}{dz} \ln u_\sigma(z, q), \quad (3.196)$$

en donde  $u_\sigma(z, q)$  es la solución de la ecuación de WDW

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{q^2}{4z^2} + U(z) \right] u_\sigma(z, q) = 0. \quad (3.197)$$

Ahora primeramente, analizaremos el comportamiento de  $u_\sigma$  para grandes escalas ( $a \rightarrow \infty$ ), entonces el segundo término  $q^2/4z^2$  en la ecuación de onda (3.197) se puede despreciar, y su solución en términos de funciones de Airy es

$$u_\sigma(z, q) = \text{Ai} \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right] + \rho \text{Bi} \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right], \quad (3.198)$$

en donde  $\rho$  es una constante compleja. Substituyendo (3.198) en (3.196), obtenemos que

$$A_\sigma(z, q) = i\Lambda_0 (4\Lambda_0^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{Ai} \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right] + \rho \text{Bi}' \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right]}{\text{Ai} \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right] + \rho \text{Bi} \left[ (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_0 z - k) \right]}. \quad (3.199)$$

en donde la prima denota diferenciación con respecto a  $z$ . También tenemos que

$$\begin{aligned} D_\sigma(z, q) &= \text{Re} A_\sigma(z, q) \\ &= \Lambda_0 (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{(\text{Im} \rho)(\text{Ai}' + \rho \text{Bi}')}{|\text{Ai} + \rho \text{Bi}|^2}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} F_\sigma(z, q) &= -\text{Im} A_\sigma(z, q) \\ &= \Lambda_0 (4\Lambda_0^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{Ai}' \text{Ai} + |\rho|^2 \text{Bi}' \text{Bi} + (\text{Re} \rho)(\text{Bi}' \text{Ai} + \text{Ai}' \text{Bi})}{|\text{Ai} + \rho \text{Bi}|^2}, \end{aligned} \quad (3.201)$$

por lo tanto, la relación de incertidumbre viene a ser

$$(\Delta\psi_\sigma)^2 (\Delta\pi_\sigma)^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{(\text{Im}\varrho)^2} \left[ \text{Ai}'\text{Ai} + |\varrho|^2 \text{Bi}'\text{Bi} + (\text{Re}\varrho)(\text{Bi}'\text{Ai} + \text{Ai}'\text{Bi}) \right]^2 \right\}, \quad (3.202)$$

en donde hemos usado el Wronskiano

$$\text{AiBi}' - \text{Ai}'\text{Bi} = 1/\pi.$$

Escogemos que  $\text{Im}\varrho < 0$ , entonces  $D_\sigma(z, q) > 0$  (el producto interno (3.184) está bien definido). Las formas asintóticas de las funciones de Airy para grandes valores de  $z$  ( $z \rightarrow +\infty$ ) son[80]

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp(-\zeta), \quad (3.203)$$

$$\text{Bi}(z) \sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp(\zeta), \quad (3.204)$$

$$\text{Ai}(-z) \sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} \sin(\zeta + \pi/4), \quad (3.205)$$

$$\text{Bi}(-z) \sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} \cos(\zeta + \pi/4), \quad (3.206)$$

en donde  $\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}$ . Usando estas formas asintóticas, la relación de incertidumbre para grandes escalas ( $a \rightarrow \infty$ ) se transforma en

$$(\Delta u_\sigma)^2 (\Delta\pi_\sigma)^2 \simeq \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{(\text{Im}\varrho)^2} \left[ (|\varrho|^2 - 1) \sin \left[ \frac{4}{3} (4\Lambda_0^2)^{-3/4} (k - \Lambda_0 z)^{3/2} + \frac{\pi}{2} \right] - 2(\text{Re}\varrho) \cos \left[ \frac{2}{3} (4\Lambda_0^2)^{-3/4} (k - \Lambda_0 z)^{3/2} + \frac{\pi}{2} \right] \right]^2 \right\}, \quad (3.207)$$

para la elección particular  $\varrho = -i$ , obtenemos que

$$(\Delta u_\sigma)^2 (\Delta\pi_\sigma)^2 \simeq \frac{1}{4}. \quad (3.208)$$

y cuando  $\varrho \neq -i$ [16], las fluctuaciones cuánticas del campo de universos tercero cuantizados están confinadas en un valor finito de acuerdo con la Ec. (3.207) en el curso de la expansión del universo ( $a \rightarrow \infty$ ). Ahora estudiaremos el comportamiento de  $u_\sigma$  para pequeñas escalas ( $a \rightarrow 0$ ). Suponiendo  $k = 1$ , la solución a la Ec. (3.197) es

$$u_\sigma(z, q) = \sqrt{z} \left[ I_\nu \left( \frac{z}{2} \right) + \gamma K_\nu \left( \frac{z}{2} \right) \right], \quad (3.209)$$

en donde  $I_\nu$  y  $K_\nu$  son funciones modificadas de Bessel,  $\gamma$  es una constante compleja, y  $\nu = \frac{1}{4}\sqrt{1-q^2}$ . Sustituyendo la solución general (3.209) en la Ec. (3.196), obtenemos

$$\begin{aligned} D_\sigma(z, q) &= \operatorname{Re} A_\sigma(z, q), \\ &= \frac{\operatorname{Im} \gamma (K'_\nu I_\nu - I'_\nu K_\nu)}{2 |I_\nu + \gamma K_\nu|^2}, \end{aligned} \quad (3.210)$$

y

$$\begin{aligned} F_\sigma(z, q) &= \operatorname{Im} A_\sigma, \\ &= \frac{z^{-1} |I_\nu + \gamma K_\nu|^2 + I'_\nu I_\nu + |\gamma|^2 K'_\nu K_\nu + \operatorname{Re} \gamma (K'_\nu I_\nu + I'_\nu K_\nu)}{2 |I_\nu + \gamma K_\nu|^2}, \end{aligned} \quad (3.211)$$

la prima denota diferenciación con respecto a  $z$ . Entonces, la relación de incertidumbre es

$$(\Delta \psi_\sigma)^2 (\Delta \pi_\sigma)^2 = \frac{1}{4} \{1 + G_\sigma^2\}, \quad (3.212)$$

en donde

$$\begin{aligned} G_\sigma &= (\operatorname{Im} \gamma)^{-1} z^2 \left[ z^{-1} (I_\nu^2 + |\gamma|^2 K_\nu^2) \right. \\ &\quad \left. + I'_\nu I_\nu + |\gamma|^2 K'_\nu K_\nu + \operatorname{Re} \gamma (K'_\nu I_\nu + I'_\nu K_\nu) \right], \end{aligned} \quad (3.213)$$

ya que hemos supuesto que nuestro sistema está confinado a una caja uno-dimensional con condiciones a la frontera periódicas, con la coordenada de longitud fijada en un valor arbitrario  $M$ . si tomamos el límite  $M \rightarrow \infty$ , entonces podemos escoger  $\nu^2 > 0$ . también tenemos que para pequeñas escalas ( $a \rightarrow 0$ ) el comportamiento asintótico<sup>[80]</sup> de las funciones de Bessel modificadas es

$$I_\nu \left( \frac{z}{2} \right) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left( \frac{z}{4} \right)^\nu, \quad (3.214)$$

$$K_\nu \left( \frac{z}{2} \right) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left( \frac{z}{4} \right)^{-\nu}. \quad (3.215)$$

Usando estas formas asintóticas la Ec. (3.212) se simplifica a

$$(\Delta \psi_\sigma)^2 (\Delta \pi_\sigma)^2 = \frac{1}{4} \{1 + Q z^{-4|\nu|}\}, \quad (3.216)$$

en donde  $Q$  es alguna constante positiva. Esto significa que las fluctuaciones de un campo de universos tercero cuantizados es muy grande para pequeñas escalas

( $a \rightarrow 0$ ). Para el caso en que  $\nu^2 < 0$ , se tiene que las funciones de Bessel son oscilatorias y por consiguiente el cociente ( $F_\sigma/D_\sigma$ ) es oscilatorio y no se tiene una magnitud definida del valor asintótico de la relación de incertidumbre para escalas pequeñas ( $a \rightarrow 0$ ).

En los capítulos siguientes estudiaremos la cosmología cuántica resultante de algunas teorías particulares de la de Bergmann-Wagoner. Estas serán, la cosmología de Jordan-Brans-Dicke ( $\omega(\phi) = cte.$ ,  $\lambda(\phi) = 0$ ) y su modificación con  $\lambda(\phi) = 3q\phi$ , y finalmente se estudiarán los modelos de Bianchi I y II.

## Capítulo 4

# Cosmología cuántica y clásica en la teoría de Jordan-Brans-Dicke y

$$\lambda(\phi) = 3q\phi$$

Como se ha mencionado anteriormente, hay un interés renovado en el estudio de las teorías escalares tensoriales de la gravitación debido a dos factores: las teorías de unificación, y la inflación caótica. La mayoría de las teorías de unificación[96], incluyendo la teoría de supercuerdas predicen naturalmente una teoría de dilatón de la gravedad, y en la actualidad es la única teoría que trata la gravedad en una forma consistente con la física cuántica. Por otro lado, el nuevo escenario de la inflación extendida[97], la cual resuelve el problema de "fine tuning" de la inflación antigua, nueva y caótica, tiene un campo escalar que retarda el rango de expansión del universo de exponencial a polinomial, permitiendo completar la fase de transición de la fase de Sitter a un universo dominado por radiación. Esto significa que las teorías escalares tensoriales de la gravitación proveen una posible solución para el problema de "graceful exit".

No hay experimentos que contradigan la teoría de Einstein, pero la mayoría de ellos dentro del marco de referencia post-Newtoniano parametrizado (PPN), tienen la limitación de probar objetos en gravedad débil. A escalas de altas energías parece que la teoría de Einstein debería modificarse y las teorías escalares tensoriales son posibles candidatas.

En lo siguiente estudiaremos la cosmología cuántica para universos de FRW correspondiente a dos teorías escalares tensoriales que nos permiten obtener soluciones exactas de la ecuación de WDW. Estas teorías son la teoría de Jordan-Brans-Dicke[81] y su modificación para incluir un campo escalar de autointeracción que es equivalente a una "constante" cosmológica (actualmente una función cosmológica variable, que podría ser importante para conducir a inflación[82]). La teoría de Jordan-Brans-Dicke representa una generalización de la relatividad general y fue inspirada en el



principio de Mach. No es completamente una teoría geométrica de la gravitación, mientras que los efectos gravitacionales son descritos por un campo escalar en la variedad Riemanniana. Así, los efectos gravitacionales son en parte geométricos y en parte debidos a una interacción escalar. En esta teoría se considera que si la constante gravitacional varía, entonces debería ser función de algún campo escalar variable, esto es, se supone que  $G^{-1}$  varía como  $\phi$ .

Un tema fundamental de la cosmología cuántica es el de las condiciones iniciales sobre la función de onda del universo. Entre las soluciones de la ecuación de WDW para el modelo aquí considerado hay algunas que describen tunelamiento de universos, en particular nacimiento de universos de la nada [10, 15].

El capítulo está organizado como sigue. La sección 4.1 mostrará el modelo del minisuperespacio que adoptamos. La sección 4.2 tratará sobre soluciones cuánticas y semiclásicas de la teoría de Jordan-Brans-Dicke ( $\lambda(\phi) = 0$ ) y su modificación con  $\lambda(\phi) = 3q\phi$ . Después, en la sección 4.3 se calcularán las funciones de onda de Vilenkin y Hartle-Hawking para un caso particular estudiado en la sección 4.2, también se calculará la distribución de probabilidad para el estado inicial del universo y la probabilidad de tunelamiento cuántico. En la sección 4.4 se estudiarán las configuraciones cuánticas y semiclásicas de agujeros de gusano. Finalmente, en la sección 4.5 se estudiará la tercera cuantización del modelo cosmológico de Jordan-Brans-Dicke, y se hallará el número promedio de universos creados de la nada y el comportamiento de la relación de incertidumbre de Heisenberg para escalas grandes y pequeñas.

## 4.1 El modelo del minisuperespacio de Jordan-Brans-Dicke

Comenzaremos introduciendo la acción integral para la teoría escalar tensorial con función cosmológica  $\lambda(\phi)$

$$S = \frac{1}{l_p^2} \int \sqrt{-g} \left[ \phi R^{(4)} - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 2\phi \lambda(\phi) \right] d^4x, \quad (4.1)$$

en donde  $l_p$  es la longitud de Planck,  $G$  es la constante de Newton,  $\hbar = c = 1$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $R^{(4)}$  es el escalar de curvatura, usaremos la signatura  $(-, +, +, +)$ . Las funciones arbitrarias  $\omega(\phi)$  y  $\lambda(\phi)$  distinguen las diferentes teorías escalares tensoriales de la gravitación;  $\lambda(\phi)$  es una función potencial y juega el papel de una constante cosmológica,  $\omega(\phi)$  es la función de acoplamiento de la teoría particular. La relatividad general es el límite de esta teoría cuando  $|\omega| \rightarrow \infty$  y  $\lambda(\phi) \rightarrow 0$ ; los experimentos del sistema solar implican que  $|\omega| \geq 500$ . Queremos considerar la cosmología cuántica obtenida de estas teorías con  $\omega(\phi) = \omega_0 = cte.$  en el caso de un

universo homogéneo e isotrópico de curvatura espacial positiva con la métrica dada en la forma siguiente,

$$ds^2 = \sigma^2 [dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2], \quad (4.2)$$

en donde  $\sigma^2 = l_p^2/24\pi^2$  y el elemento de línea para el elemento de la tres-esfera unitaria

$$d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.3)$$

tenemos que el escalar de Ricci es

$$R = -\frac{6}{a^2} - 6 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right), \quad (4.4)$$

sustituyendo (4.4) en (4.1) y simplificando tenemos que

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ -a\dot{\phi} + a\phi\dot{a}^2 + a^2\dot{a}\dot{\phi} - \frac{\omega_0}{6\phi} a^3 \dot{\phi}^2 + \frac{a^3\phi}{3} \lambda(\phi) \right] dt, \quad (4.5)$$

en donde el punto denota derivada temporal con respecto al tiempo cósmico  $t$ , e introduciendo el tiempo conforme  $dt = a(\tau) d\tau$ , la acción (4.5) se transforma en

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ -a^2\dot{\phi} + \phi a'^2 + aa'\dot{\phi}' - \frac{\omega_0}{6\phi} a^2 \dot{\phi}'^2 + \frac{a^4\phi}{3} \lambda(\phi) \right] d\tau, \quad (4.6)$$

ahora la prima denota derivación con respecto al tiempo conforme  $\tau$ , introduciendo nuevas variables

$$x = a^2\phi, \quad y = \rho^{-1} \ln \phi. \quad (4.7)$$

en donde  $\rho^2 = \frac{3}{2\omega_0+3}$ , entonces (4.6) se transforma en

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{1}{4} \frac{x'^2}{x} - \frac{1}{4} xy'^2 - x + x^2 e^{-\rho y} \frac{\lambda(y)}{3} \right] d\tau, \quad (4.8)$$

de aquí tenemos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \frac{x'^2}{x} - \frac{1}{4} xy'^2 - x + x^2 e^{-\rho y} \frac{\lambda(y)}{3} \right], \quad (4.9)$$

y los momentos canónicos conjugados correspondientes a  $x$  y a  $y$  son

$$\pi_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{x'}{4x}, \quad \pi_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{xy'}{4}. \quad (4.10)$$

El Hamiltoniano  $H$  del sistema es

$$\begin{aligned}
 H &= \pi_x x' + \pi_y y' - L, \\
 &= 2x\pi_x^2 - 2x^{-1}\pi_y^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}e^{-\rho y}\lambda(y).
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Después, haciendo cuantización canónica,

$$\pi_x^2 \rightarrow -x^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \pi_y^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

obtenemos la ecuación de WDW  $H\psi(x, y) = 0$  para un ordenamiento arbitrario de factores, representado en el parámetro  $\alpha$ ,

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - U(x, y) \right] \psi(x, y) = 0,
 \tag{4.12}$$

en donde el potencial esta dado por

$$U(x, y) = \frac{1}{4} [x^2 - x^3 G(y)],
 \tag{4.13}$$

con

$$G(y) = e^{-\rho y} \frac{\lambda(y)}{3}.
 \tag{4.14}$$

Es claro que la ecuación de WDW se puede resolver por separación de variables en los siguientes dos casos: i)  $\lambda(y) = 0$ , y ii)  $\lambda(y) = 3qe^{\rho y} = 3q\phi$ . En la siguiente sección consideraremos ambos casos.

## 4.2 Soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt

### 4.2.1 Caso $\lambda(y) = 0$

La ecuación de WDW sin constante cosmológica se puede separar mediante  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ , de esta forma obtenemos

$$x^2 X''(x) + \alpha x X' + \left( \nu^2 - \frac{x^2}{4} \right) X = 0,
 \tag{4.15}$$

$$Y'''(y) + \nu^2 Y = 0,
 \tag{4.16}$$

en donde  $\nu^2$  es una constante de separación. Por lo tanto, la función de onda del universo en términos de funciones de Bessel es

$$\psi(x, y) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{\nu y} \left[ C_1 I_\nu \left( \frac{x}{2} \right) + C_2 K_\nu \left( \frac{x}{2} \right) \right],
 \tag{4.17}$$

en donde el orden  $m$  está dado por

$$m = \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 - \nu^2}. \quad (4.18)$$

Esta solución es muy general ya que cuenta con los parámetros libres  $\alpha$  y  $\nu$ . También, podemos construir soluciones muy generales de la ecuación de WDW mediante superposición de las soluciones dadas y con ellas se pueden implementar diferentes condiciones iniciales como las de no frontera de Hartle-Hawking[7] o las de tunelamiento de Vilenkin[10].

#### 4.2.2 Aproximación WKB

En esta parte buscamos una solución de la ecuación de WDW de la forma

$$\psi(x, y) = e^{iS(x, y)}. \quad (4.19)$$

Mediante resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi obtendremos la solución completa del problema clásico y de esa forma estudiaremos el régimen clásico de la cosmología en cuestión. Después de sustituir (4.19) en la Ec. (4.12), obtenemos

$$-x^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = 0, \quad (4.20)$$

la cual tiene como solución exacta

$$S(x, y) = p_y \left[ y \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2} \mp \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2} \right], \quad (4.21)$$

en donde  $p_y$  es una constante de separación. Por consiguiente la función de onda WKB es

$$\psi(x, y)_{WKB} = \exp \left[ ip_y \left\{ y \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2} \mp \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2}} \right] \right\} \right], \quad (4.22)$$

nótese que el radical en la Ec. (4.22) es real si  $x^2 \leq |4p_y^2|$ , definiendo la región clásica. Ya que cualquier generalización del marco de referencia de la teoría cuántica tiene la obligación de recobrar ese marco de referencia con un dominio clásico de límites adecuados, la función de onda WKB (4.22) se puede recobrar de la solución exacta cuántica (4.17), en las regiones del minisuperespacio en donde  $x \ll 1$  y  $y \gg 1$ . Primeramente expresaremos a (4.22) como

$$\psi(x, y)_{WKB} = \exp \left\{ ip_y \left( y \pm \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2} \mp \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. \pm \frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2} \right] \right) \right\}, \quad (4.23)$$

luego para  $x$  pequeñas ( $x \ll 1$ ), desarrollamos los radicales como

$$\psi(x, y)_{WKB} \approx \exp \left\{ ip_y \left( y + 1 - \frac{x^2}{8p_y^2} - \frac{x^4}{128p_y^4} - \frac{x^6}{1024p_y^6} - \dots \right. \right. \\ \left. \mp \frac{1}{2} \ln \left[ 2 - \frac{x^2}{8p_y^2} - \frac{x^4}{128p_y^4} - \frac{x^6}{1024p_y^6} - \dots \right] \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{x^2}{8p_y^2} + \frac{x^4}{128p_y^4} + \frac{x^6}{1024p_y^6} \dots \right] \right) \right\}, \quad (4.24)$$

luego

$$u(x, y)_{WKB} \approx \exp \left\{ ip_y \left( y + 1 - \frac{x^2}{8p_y^2} - \frac{x^4}{128p_y^4} - \frac{x^6}{1024p_y^6} - \dots \right. \right. \\ \left. \mp \frac{1}{2} \ln \left[ 2 - \frac{x^2}{8p_y^2} - \frac{x^4}{128p_y^4} - \frac{x^6}{1024p_y^6} - \dots \right] \pm \ln \left( \frac{x}{2\sqrt{2}p_y} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{x^2}{8p_y^2} + \frac{x^4}{128p_y^4} + \frac{x^6}{1024p_y^6} \dots \right] \right) \right\}. \quad (4.25)$$

y despreciando términos de orden  $\geq \mathcal{O}(x^2)$ , tenemos

$$u(x, y)_{WKB} \approx e^{ip_y} \left[ y + 1 \mp \frac{1}{2} \ln 2 \pm \ln \left( \frac{x}{2\sqrt{2}p_y} \right) \pm \frac{1}{2} \ln(1) \right], \\ \approx e^{ip_y} \left[ y + 1 \pm \ln x \mp \frac{1}{2} \ln 2 \mp \ln(2\sqrt{2}p_y) \right], \\ \approx e^{ip_y} [y \pm \ln x]. \quad (4.26)$$

Ahora, tomando el límite asintótico de la función de onda cuántica (4.17) cuando  $x \rightarrow 0$  y  $y \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$u_\nu(x, y) \sim x^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu y} [C_1 x^m + C_2 x^{-m}], \quad (4.27)$$

así para obtener el límite asintótico semiclásico (4.26), para valores grandes de la constante de separación  $\nu$ , entonces

$$\psi_\nu(x, y) \sim e^{i\nu(y \pm \ln|x|)} \quad (4.28)$$

en donde hemos omitido los términos relacionados con el factor de ordenamiento los cuales no afectan los cálculos semiclásicos, por lo tanto hemos recuperado la función de onda WKB de la solución exacta, también comparando (4.26) con (4.28) identificamos que  $\nu = p_y$ .

### 4.2.3 Soluciones de Hamilton-Jacobi

Podemos obtener soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento, de la función principal de Hamilton (4.21) identificamos  $p_y$  con la nueva coordenada de momento  $P$ , entonces para la nueva coordenada de posición  $X$ , tenemos que

$$X = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y \mp \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2p_y}\right)^2} = \gamma_1, \quad (4.29)$$

ya que la nueva coordenada  $X$  es una constante  $\gamma_1$ , entonces obtenemos que

$$x^2 = 4p_y \operatorname{sech}^2(y - \gamma_1). \quad (4.30)$$

También, sustituyendo (4.30) en el momento clásico para  $y$  (4.10) e igualando con  $\pi_x = \frac{\partial S}{\partial x}$ , obtenemos la expresión correspondiente para  $y$

$$y = \ln \left[ \tan \left( \tau + \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \gamma_1, \quad (4.31)$$

en donde  $C$  es una constante de integración, entonces  $x$  como una función del tiempo conforme  $\tau$  es

$$x^2 = 4p_y \cos(2\tau + C). \quad (4.32)$$

De esta forma, hemos obtenido una solución cerrada de las ecuaciones de movimiento dadas por [98].

$$x'' + 4x = 0. \quad (4.33)$$

$$x'y' + xy'' = 0, \quad (4.34)$$

$$x'^2 - x^2 y'^2 + 4x^2 = 0. \quad (4.35)$$

#### 4.2.4 Caso $\lambda(y) = 3qe^{\nu y}$

Ahora, estudiaremos la ecuación de WDW con  $\lambda(y) = 3qe^{\nu y}$ , en donde  $q$  es una constante, así de (4.12) tenemos la siguiente función de onda

$$\left\{ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - U(x, y) \right\} \psi(x, y) = 0, \quad (4.36)$$

en donde el potencial está dado por

$$U(x, y) = -\frac{1}{4}x^2[qx - 1], \quad (4.37)$$

y haciendo  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ , obtenemos las ecuaciones separadas

$$x^2 X''(x) + \alpha x X' + \left( \nu^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}qx^3 \right) X = 0, \quad (4.38)$$

$$Y''(y) + \nu^2 Y = 0. \quad (4.39)$$

La ecuación para  $x$  se puede resolver por series, pero no es muy práctico, entonces, para hallar una solución con más sentido físico escribimos a  $X(x)$  de la siguiente manera

$$X(x) = x^n W(x), \quad (4.40)$$

en donde  $n = (1 - \alpha \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\nu^2})/2$ , así obtenemos que

$$x^2 W''(x) + \left( 1 \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\nu^2} \right) x W' + \left( \frac{1}{4}qx^3 - \frac{1}{4}x^2 \right) W = 0. \quad (4.41)$$

Este es un caso particular de la Ec. (4.38) que se puede resolver mediante soluciones conocidas, i.e., cuando el término de primera derivada se hace cero; lo cual sucede si

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{1 - 4\nu^2}. \quad (4.42)$$

nótese aquí que el satisfacer la ecuación de arriba significa que tenemos una elección específica del parámetro  $\alpha$ , y podemos tener a lo más dos valores de la constante de separación, para los cuales la ecuación diferencial se reduce a una ecuación del tipo de Airy

$$W'''(x) + \frac{1}{4}(qx - 1)W = 0, \quad (4.43)$$

entonces la función de onda del universo está dada por

$$\psi(x, y) = x^{\frac{\sqrt{1-4\nu^2}-1}{2}} e^{\nu y} \left\{ C_1 Ai \left[ (2q)^{-\frac{2}{3}}(1 - qx) \right] + C_2 Bi \left[ (2q)^{-\frac{2}{3}}(1 - qx) \right] \right\}. \quad (4.44)$$

En este caso no tenemos un conjunto completo de soluciones, sino sólo soluciones particulares para una elección específica del parámetro del factor de ordenamiento  $\alpha$ , y no se puede hacer superposición de funciones pues la constante de separación queda fijada tal como se expresa en (4.42).

#### 4.2.5 Aproximación WKB

Ahora buscamos una solución de la ecuación de WDW de la forma  $\psi(x, y) = e^{iS(x, y)}$ . Después de sustituir esta forma de la función de onda en la Ec. (4.36), obtendremos

$$-x^2 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}qx^3 = 0, \quad (4.45)$$

cuya la solución en cuadratura está dada por

$$S = p_y y \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{qx^3 - x^2 + 4p_y^2} \frac{dx}{x}. \quad (4.46)$$

Por lo tanto la función de onda en la aproximación WKB es

$$\psi(x, y)_{WKB} = e^{i \left[ p_y y \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{qx^3 - x^2 + 4p_y^2} \frac{dx}{x} \right]}. \quad (4.47)$$

En este caso la región clásica depende del signo de  $q$ ; el análisis de las ecuaciones clásicas del movimiento muestra que sólo para  $q > 0$  las soluciones de la relatividad general son soluciones de la teoría tensorial escalar con  $\phi = cte$ .

De la misma forma que se hizo en la subsección 4.2.2, recobramos la aproximación semiclásica de la función de onda cuántica (4.44). Primero, expresemos a (4.47) como

$$\Psi(x, y)_{WKB} = e^{i \left[ p_y y \pm \int \sqrt{\frac{qx^2}{4p_y^2} + \frac{1}{x^2}} dx \right]}. \quad (4.48)$$

para obtener la función de onda WKB en el límite de  $x$  grandes, despreciamos el término  $1/x^2$ , e integrando tenemos

$$\psi(x, y)_{WKB} \sim e^{i \left[ p_y y \mp \frac{1}{3q} (qx^3 - 1)^{3/2} \right]}. \quad (4.49)$$

Ahora, tomando los límites  $x \rightarrow \infty$  y  $y \rightarrow \infty$  en la Ec. (4.44), y despreciando el término relacionado con el parámetro del factor de ordenamiento  $\alpha$ , la función de onda cuántica se aproxima a

$$\psi \sim \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{i \left[ \alpha y - \frac{2}{3} \left( \frac{x}{2} - 1 \right)^{3/2} \right]}. \quad (4.50)$$



las expresiones (4.50) y (4.49) son equivalentes excepto por la función  $(1 - \frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}}$ , debido a la forma simple de la propuesta de la función de onda WKB. De nuevo identificamos  $\nu$  con  $p_y$ .

#### 4.2.6 Soluciones de Hamilton-Jacobi

Las ecuaciones clásicas del movimiento correspondientes al término cosmológico  $\lambda(\phi) = 3q\phi$  son

$$x'' + 4x - 6qx^2 = 0, \quad (4.51)$$

$$x'y' + xy'' = 0, \quad (4.52)$$

$$x'^2 - x^2y'^2 + 4x^2 - 4qx^3 = 0. \quad (4.53)$$

De la misma forma que se hizo en la subsección 4.2.3, tenemos de la función principal de Hamilton (4.46) que

$$\frac{\partial S}{\partial p_y} = y \pm \int \frac{dx}{x} \frac{2p_y}{\sqrt{qx^3 - x^2 + 4p_y^2}} = \gamma_2, \quad (4.54)$$

en donde  $\gamma_2$  es una constante, entonces las variables  $x$  y  $y$  están relacionadas por

$$y = \gamma_2 \mp 2p_y \int \frac{dx}{x\sqrt{qx^3 - x^2 + 4p_y^2}}. \quad (4.55)$$

La integral en (4.55) se puede resolver en términos de la función elíptica de primera clase  $F$ . También, del momento canónico conjugado asociado a  $x$  (4.10) y de la definición  $\pi_x = \frac{\partial S}{\partial x}$ , obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{qx^3 - x^2 + 4p_y^2}} = \pm 2\tau + \delta, \quad (4.56)$$

en donde  $\delta$  es una constante de integración. De nuevo cuando realizamos la integración, obtenemos  $x$  en términos de funciones elípticas de primera y segunda clase  $E$ ,  $F$  y  $H$ . Esto nos indica que es más ilustrativo analizar el comportamiento del sistema dinámico. Por medio de  $X = a'/a$ ,  $Y = \phi'/\phi$  y  $Z = a^2\phi$ , las Ecs. (4.51)-(4.53) se pueden escribir como

$$X' = -X^2 - \frac{\omega_0}{6}Y^2 + 2qZ - 1, \quad (4.57)$$

$$Y' = -2XY - Y^2, \quad (4.58)$$

$$Z' = 2XZ + YZ. \quad (4.59)$$

$$X^2 - \frac{\omega_0}{6}Y^2 + XY + 1 - qZ = 0. \quad (4.60)$$

Ahora, tenemos un sistema dinámico tres-dimensional, podemos expresar (4.57) en términos de (4.60), de esta forma tenemos el siguiente sistema dos-dimensional

$$\begin{aligned} X' &= X^2 + 2XY - \frac{\omega_0}{2}Y^2 + 1, \\ Y' &= -2XY - Y^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

En la siguiente figura, mostramos las curvas solución del sistema de ecuaciones clásicas (4.61) en el plano fase dos-dimensional  $XY$ .

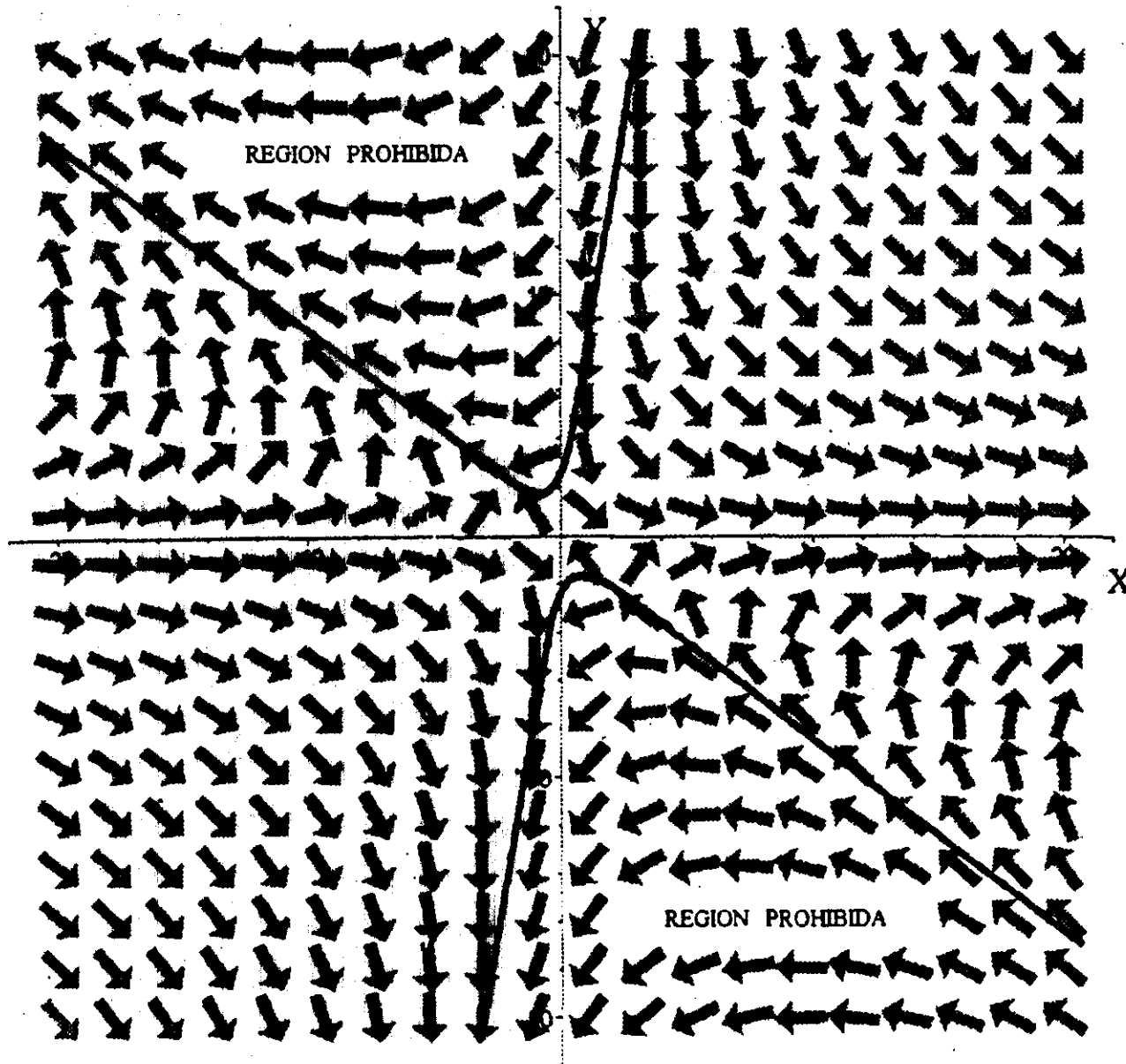


Figura 11. Diagrama del espacio fase XY para el caso  $\lambda(\phi) = 3q\phi$  (cosmologías no vacías), se ha considerado  $\omega_0 = 1$ .

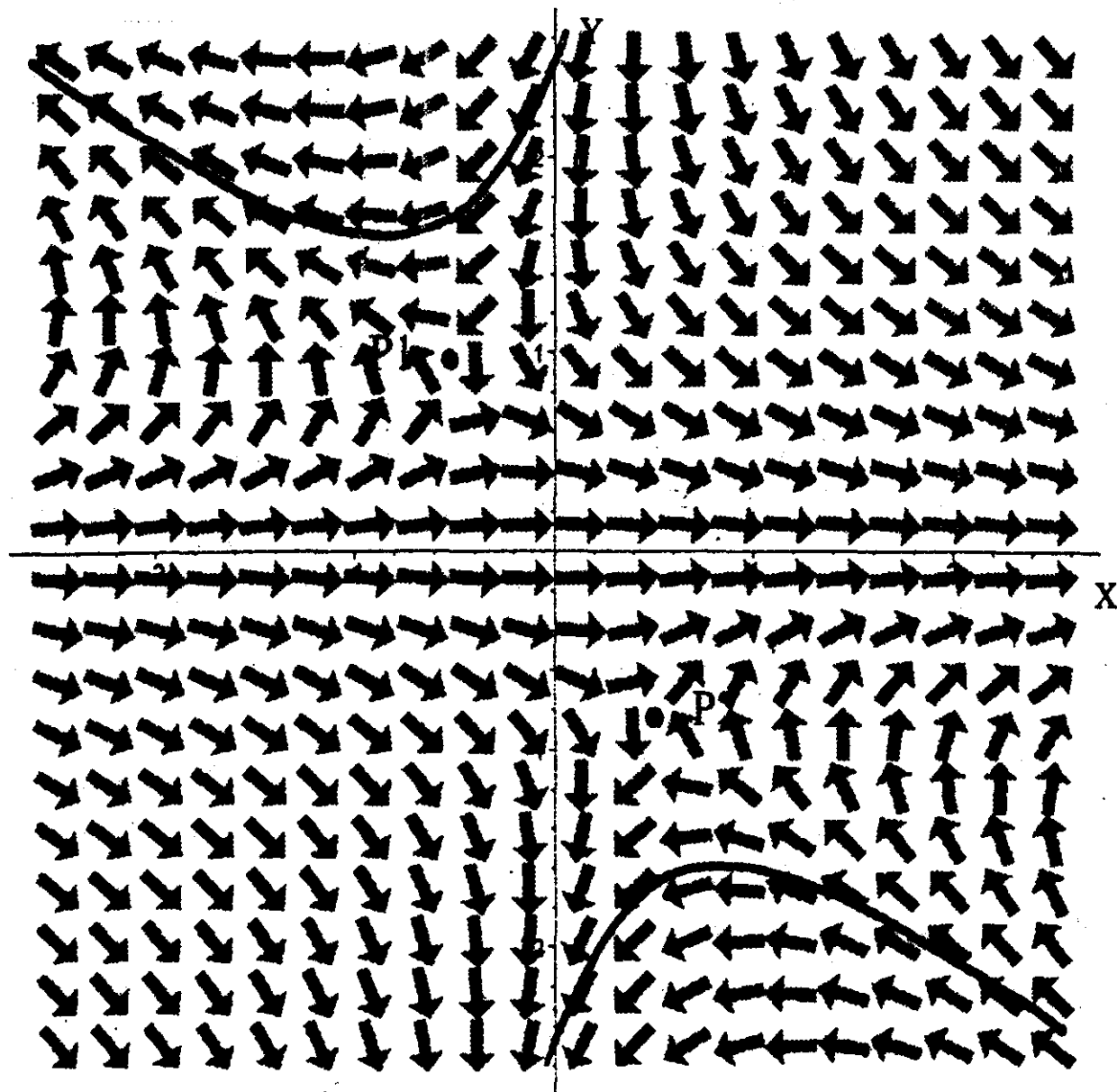


Figura 15. Diagrama del espacio fase  $XY$ , se muestra un acercamiento del comportamiento de las trayectorias cercanas a los puntos críticos  $P1$  y  $P2$ , los cuales son indicados por el punto, se ha considerado  $\omega_0 = 1$ .

Podemos ver de este diagrama cualitativo que las líneas sólidas definen las regiones físicas y las posibles trayectorias, cerca del eje  $X$  las trayectorias son paralelas al eje entero más nunca lo cruzan, entonces de (4.61) vemos que el eje  $X$  representa una solución. Haciendo  $Y = 0$  en el sistema (4.57)-(4.60), encontramos

$$X = \tan(\tau + C) \quad y \quad Z = \frac{1}{q} \sec^2(\tau + C), \quad (4.62)$$

entonces obtenemos la siguiente solución exacta

$$a(\tau) = a_0 \sec(\tau + C). \quad (4.63)$$

Los puntos críticos del sistema (4.61), i.e., los puntos en los que  $X' = Y' = 0$ , representan una solución de equilibrio de este sistema dinámico, son  $(\pm \frac{\rho}{\sqrt{3}}, \mp \frac{2\rho}{\sqrt{3}})$ , y estos son puntos de silla de montar ya que  $X = \frac{\rho'}{\rho}$ ,  $Y = \frac{\phi'}{\phi}$ . Esto nos lleva a

$$a(\tau) = e^{\pm \frac{\rho}{\sqrt{3}}\tau}, \quad y \quad \phi(\tau) = e^{\mp \frac{2\rho}{\sqrt{3}}\tau}, \quad (4.64)$$

la primera ecuación describe universos en expansión o contracción[99]. Estas soluciones en el tiempo cósmico  $t$  toman la forma[100]

$$a(t) = a'_0 t \quad y \quad \phi(t) = \phi'_0 t^{-2}. \quad (4.65)$$

### 4.3 Condiciones a la frontera

En esta sección seleccionaremos algunas condiciones a la frontera que pueden imponerse en la función de onda que satisface la ecuación de WDW (4.36). La cual en las variables originales  $a$  y  $\phi$  toma la forma

$$\left\{ a^{2-\alpha} \frac{\partial}{\partial a} \left( a^\alpha \frac{\partial}{\partial a} \right) + a\phi \frac{\partial^2}{\partial a \partial \phi} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - V(a, \phi) \right\} \psi(a, \phi) = 0, \quad (4.66)$$

en donde el potencial está dado por

$$V(a, \phi) = \frac{\rho^2 \phi^2}{4\omega_0} \left[ a^4 - \frac{a^6 \lambda(\phi)}{3} \right]. \quad (4.67)$$

Este modelo es adecuado para estudiar las soluciones de tunelamiento cuántico, y cuando depreciamos el término de la curvatura espacial  $-a^4$  el modelo resultante es conveniente para estudiar soluciones inflacionarias[101]. Debido a como fueron escogidas las variables  $x$  y  $y$  en (4.7), nuestro modelo cuántico del minisuperespacio está definido por una variedad dos-dimensional,  $0 \leq a < \infty$ ,  $0 \leq \phi < \infty$ . Consideraremos las condiciones de frontera de Vilenkin y de Hartle-Hawking. La propuesta de Vilenkin para determinar el estado cuántico inicial del universo se basa en la imagen de que el universo nace espontáneamente en un espacio de Sitter y entonces evoluciona a lo largo de líneas de un escenario inflacionario, esta aproximación es muy análoga a la del tunelamiento a través de una barrera de potencial y también se le refiere como "creación del universo de la nada" [10], en donde el término "nada" corresponde al estado inicial  $a = 0$ . Esta propuesta supone que la condición de frontera correcta es la de una solución puramente de expansión ( $i\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial a} > 0$ ),

correspondiendo a una onda puramente saliente en la región clásicamente permitida. En la aproximación de [7], el estado cuántico del universo corresponde a una función de onda real dada por mezclas iguales de soluciones en expansión y contracción en la región clásicamente permitida (i.e., debería ser una función exponencialmente creciente de  $a$ ), y se le conoce como la condición de frontera de "no frontera". Supondremos que el potencial es una función que varía lentamente con el campo escalar  $\phi$

$$\left| \frac{1}{V(a, \phi)} \frac{\partial V(a, \phi)}{\partial \phi} \right| \ll 1, \quad (4.68)$$

entonces la aproximación WKB es válida, y esto sugiere que, para  $a$  suficientemente pequeña, la función de onda  $\psi$  también es una función que varía lentamente en  $\phi$ . Entonces podemos despreciar las derivadas con respecto a  $\phi$ , y la Ec. (4.68) se transforma en

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\alpha}{a} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\rho^2 \phi^2}{4\omega_0} \left( a^2 - \frac{a^4 \lambda(\phi)}{3} \right) \right] \psi = 0, \quad (4.69)$$

ahora el problema viene a ser un modelo del minisuperespacio uno-dimensional y el campo escalar  $\phi$  se considera como un parámetro. La ecuación de arriba es idéntica a una ecuación de Schrödinger uno-dimensional para una partícula descrita por una coordenada  $a(\tau)$  de energía cero y sujeta al potencial

$$V(a, \phi) = \frac{\rho^2 \phi^2}{4\omega_0} (a^2 - q\phi a^4), \quad (4.70)$$

en donde se ha sustituido  $\lambda(\phi) = 3q\phi$ . La región clásicamente permitida es  $V(a, \phi) \leq 0$  cuando  $a \geq \frac{1}{\sqrt{q\phi}}$ , y la región entre la barrera  $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{q\phi}}$  es clásicamente prohibida. Primero, estudiaremos la condición de Vilenkin.

### 4.3.1 Condición a la frontera de Vilenkin

En particular, cuando  $\alpha = -1$ ,  $q > 0$  y  $z = (\rho^2/16\omega_0 q^2)^{1/2} (q\phi a^2 - 1)$  la Ec. (4.69) se transforma en

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \right] \psi = 0, \quad (4.71)$$

por lo tanto, la función de onda de Vilenkin de tunelamiento cuántico  $\psi_V$  es

$$\psi_V = \frac{\text{Ai}(-z) + i\text{Bi}(-z)}{\text{Ai}(z_0) + i\text{Bi}(z_0)}, \quad (4.72)$$

en donde  $z_0 = z(a=0) = \left( \frac{\rho^2}{16\omega_0 q^2} \right)^{1/2}$ . En el rango clásicamente permitido  $q\phi a^2 \gg 1$ , pero no muy cercano a la barrera  $a^2 = \frac{1}{q\phi}$ ,  $z$  es grande y positivo, por lo tanto,

mediante las formas asintóticas de las funciones de Airy o usando las fórmulas de conexión WKB encontramos que

$$\psi_V \left( a > \frac{1}{\sqrt{q\phi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n(a)}} \exp \left[ -i \frac{\rho\phi}{3\sqrt{\omega_0}} (q\phi a^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.73)$$

en donde

$$n(x) = \frac{\rho\phi}{2\sqrt{\omega_0}} a (q\phi a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.74)$$

el signo menos en (4.73) describe un universo de FRW en expansión. De la misma manera, para el rango clásicamente prohibido, tenemos

$$\begin{aligned} \psi_V \left( 0 < a < \frac{1}{\sqrt{q\phi}} \right) = & \frac{1}{\sqrt{m(a)}} \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{\rho\phi}{3\sqrt{\omega_0}} (1 - q\phi a^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\ & + \frac{i}{\sqrt{m(a)}} \exp \left[ \frac{\rho\phi}{3\sqrt{\omega_0}} (1 - q\phi a^2)^{\frac{3}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.75)$$

en donde

$$m_i(a) = \frac{\rho\phi}{2\sqrt{\omega_0}} a (1 - q\phi a^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.76)$$

### 4.3.2 Condición a la frontera de Hartle-Hawking

La función de onda de Hartle-Hawking  $\psi_H$  consiste de la combinación de funciones de onda reales entrantes y salientes. en este caso la función de onda adecuada es

$$\psi_H = \frac{\text{Ai}(-z)}{\text{Ai}(z_0)}. \quad (4.77)$$

Aplicando las fórmulas de conexión WKB obtenemos las aproximaciones

$$\psi_{HH} \left( a > \frac{1}{\sqrt{q\phi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n(a)}} \cos \left[ \frac{\rho\phi}{3\sqrt{\omega_0}} (q\phi a^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.78)$$

$$\psi_{HH} \left( 0 < a < \frac{1}{\sqrt{q\phi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{m_i(a)}} \exp \left[ -\frac{\rho\phi}{3\sqrt{\omega_0}} (1 - q\phi a^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.79)$$

la función de onda en la región clásicamente permitida es oscilatoria y no predice universo en el cual haya tenido lugar suficiente inflación[7]. Las funciones de onda de Vilenkin y Hartle-Hawking se representan en la siguiente figura.

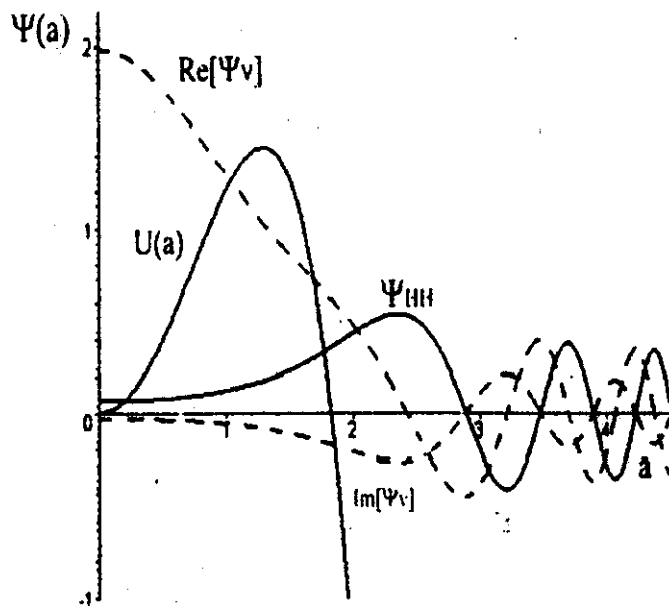


Figura 16. Funciones de onda para las condiciones de frontera de Hartle-Hawking (línea continua) y de Vilenkin (línea punteada).

### 4.3.3 Probabilidad de tunelamiento

Como podemos observar en la Figura 16, la función de onda de tunelamiento de Vilenkin (representada con la línea punteada) la cual es compleja, contiene sólo una componente saliente y representa un universo de FRW en expansión, i.e., el universo presenta tunelamiento mecánico cuántico a través de la barrera de potencial, para aparecer en  $a = 1/\sqrt{q\phi}$  de esta forma el universo se crea espontánea y no singularmente de la nada, y después de la nucleación, la evolución del universo es clásica, y la función de onda (4.73) describe campos de universos clásicos. La función de onda de Hartle-Hawking la cual es real (representada por la línea sólida) consiste de dos partes entrantes y salientes, de esta forma se asigna una probabilidad distinta de cero a un universo colapsándose. Con la función de onda de tunelamiento calcularemos la probabilidad de que ocurra el tunelamiento. Sea entonces  $\langle FRW(1/\sqrt{q\phi}) | nada \rangle$  la amplitud para la creación cuántica de tal universo de FRW, entonces

$$\begin{aligned}
 P &\equiv \left| \left\langle FRW \left( a_0 = \frac{1}{\sqrt{q\phi}} \right) \middle| nada \right\rangle \right|^2 \approx e^{\int_0^{a_0} \sqrt{V(a,\phi)} da} \\
 &\approx e^{\frac{2\phi}{3\sqrt{q_0}} \int_0^{a_0} a \sqrt{1 - q\phi a^2} da} \\
 &\approx e^{-\frac{2}{3q_0} \phi^2}, \quad (4.80)
 \end{aligned}$$



es la probabilidad de que un universo cuántico de FRW de tamaño  $a_0$  sea creado al emerger de la barrera de potencial en  $a_0 = 1/\sqrt{q\phi}$ , en otras palabras, un universo cerrado de FRW de tamaño  $a_0 = 1/\sqrt{q\phi}$  nucleado del "eterno estado de la nada". La expresión (4.80) se debe interpretar a la luz de las historias decoherentes[103], en las que la mecánica cuántica asigna probabilidades a las posibles historias del universo.

## 4.4 Soluciones de agujero de gusano

En lo siguiente mostraremos para el caso de la cosmologías del tipo de Jordan-Brans-Dicke con un factor de ordenamiento específico, la forma explícita de la función de onda que satisface las condiciones de regularidad de Hawking-Page. Para el caso  $\lambda(y) = 3qe^{-\rho y}$  no hemos encontrado soluciones del tipo agujero de gusano cuánticos, debido al comportamiento oscilatorio de las funciones de Airy.

### 4.4.1 Configuración de agujeros de gusano cuánticos

Para la elección particular del factor de ordenamiento  $\alpha = 1$ , vemos que de la Ec. (4.17) una familia particular de soluciones está dada por

$$\psi(x, y) = C e^{i\nu y} K_{i\nu} \left( \frac{x}{2} \right), \quad (4.81)$$

y su comportamiento asintótico cuando  $a \rightarrow \infty$  es

$$\psi \approx e^{i\nu y} e^{-\frac{x}{2} - \ln x}, \quad (4.82)$$

aquí la función de onda es amortiguada cuando el volumen aumenta al infinito, y para cuando  $a \rightarrow 0$  tenemos

$$\psi \approx e^{i\nu y - i\nu \ln x}, \quad (4.83)$$

podemos observar en este límite asintótico que cuando  $a \rightarrow 0$  entonces  $\ln x \rightarrow \infty$  produce infinitas oscilaciones, por consiguiente (4.81) no puede ser considerada como un agujero de gusano cuántico.

Existen dos formas de evitar este problema. Una de ellas es hacer superposición con estas soluciones, y entonces aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue[105] a la integral resultante para eliminar la singularidad en el origen. La otra es, tomando superposición de funciones

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\nu) e^{i\nu y} K_{i\nu} \left( \frac{x}{2} \right) d\nu. \quad (4.84)$$

Si sustituimos  $C(\nu) = e^{i\nu\mu}$  con  $(\mu = ct_e.)$  en (4.84), tenemos que por medio de una transformada integral de Kontorovich-Lebedev[89], obtenemos que la integración conduce a

$$\psi_{wh} = e^{-\frac{\pi}{2} \cosh[2y+\mu]}, \quad (4.85)$$

la cual satisface las condiciones de regularidad de Hawking-Page y se puede ver como una solución de agujero de gusano cuántico [106]. Mediante sustitución directa podemos verificar que la solución (4.85) es una solución particular de la ecuación de WDW. Una solución de tal tipo se le llama espectro discreto de agujeros de gusano cuánticos. Los conjuntos de funciones de onda  $\psi_\nu$  y  $\psi_{wh}$ , están expandiendo el mismo espacio de estados físicos y ambas son bases del espacio de Hilbert de la representación correspondiente, y la expresión (4.84) es la conexión entre estas bases  $\psi_\nu$  y  $\psi_{wh}$ .

#### 4.4.2 Configuración semiclásica de agujeros de gusano

Ahora, nuestra meta es recobrar la solución de agujero de gusano cuántico, partiendo de la función de onda semiclásica (4.22)

$$v(x, y)_{WKB} = \exp \left\{ ip_y \left( y \pm \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2} \mp \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x}{2p_y} \right)^2}} \right] \right) \right\}$$

cuando tomamos el límite cuando  $x \rightarrow \infty$ , obtenemos que la función de onda semiclásica tiende a

$$v(x, y)_{WKB} \approx e^{ip_y(y+\pi)} e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad (4.86)$$

como esperábamos, la función de onda es amortiguada exponencialmente, pero cuando analizamos el límite cuando  $x \rightarrow 0$ , tenemos que

$$v(x, y)_{WKB} \approx e^{ip_y(y+\ln x)}, \quad (4.87)$$

aquí, el problema surge cuando  $x \rightarrow 0$ , pues el  $\ln x \rightarrow -\infty$  causa infinitas oscilaciones tal como se mencionó antes para el caso cuántico, y estas oscilaciones representan una singularidad. Como una alternativa podemos construir una solución de paquete de onda integrando sobre la constante de separación  $p_y$ , i.e., realizando una transformada de Fourier

$$v(x, y)_{WKB} \approx \int e^{ip_y(y+\ln x)} dp_y, \quad (4.88)$$

mediante el lema de Riemann-Lebesgue, la integral (4.88) tiende a cero cuando  $x \rightarrow 0$  o cuando  $y \rightarrow \infty$ , entonces la función de onda es regular y satisface la segunda condición de frontera de agujero de gusano de Hawking-Page. En el caso clásico

de las soluciones (4.31)-(4.32) no encontramos agujeros de gusano clásicos, pero hay un resultado reportado por Xiang, Carl y Liu[107], sin embargo, sus resultados corresponden a un agujero de gusano Euclídeano con el requerimiento de un parámetro de Jordan-Brans-Dicke  $\omega_0$  negativo.

#### 4.4.3 Configuración Euclídeana de agujeros de gusano

En esta sección presentaremos una solución Euclídeana de agujero de gusano en la teoría de Jordan-Brans-Dicke, la cual fue encontrada por Xiao, Carl y Liu[107]. Este agujero de gusano parece tener la característica de que el radio de su garganta aumenta linealmente con el tiempo cósmico Euclídeano, sin embargo este aumento no es medible. También requiere un parámetro de Jordan-Brans-Dicke  $\omega_0(\phi)$  negativo. Aceta et al.[94] encontraron una solución de agujero de gusano Euclídeano en una versión generalizada de la teoría de Jordan-Brans-Dicke que es compleja y tiene carga. Esta solución desaparece en la teoría de Jordan-Brans-Dicke real (sin carga). Para obtener la solución de agujero de gusano se introduce el tiempo conforme  $b$  en el minisuperespacio, definido por

$$dt = a(b)db, \quad \dot{a} = a^{-1}a', \quad (4.89)$$

entonces la acción (4.5) con  $\lambda(\phi) = 0$ , toma la forma

$$S = \frac{1}{2} \int \left( a'^2 \phi + a' \phi' a - a^2 \phi - \frac{1}{6} \omega_0 \phi^{-1} a^2 \phi'^2 \right) db, \quad (4.90)$$

en donde la prima denota diferenciación con respecto a  $b$ . En términos del tiempo conforme Euclídeano  $\bar{b} = ib$ , la acción de Jordan-Brans-Dicke Euclídeana es

$$\begin{aligned} S_{BDE} &= -i S_{BD} \\ &= \frac{1}{2} \int \left( a'^2 \phi + a' \phi' + a^2 \phi - \frac{1}{6} \omega_0 \phi^{-1} a^2 \phi'^2 \right) d\bar{b}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

y el correspondiente Lagrangiano Euclídeano de Jordan-Brans-Dicke es

$$L_{BDE} = \frac{1}{2} a'^2 \phi + \frac{1}{2} a' \phi' a + \frac{1}{2} a^2 \phi - \frac{1}{12} \omega_0 \phi^{-1} a^2 \phi'^2. \quad (4.92)$$

La variación con respecto a  $a$  y  $\phi$  produce

$$-a'' \phi - \frac{1}{2} a \phi'' + a \phi - \frac{1}{6} \omega_0 \phi^{-1} a \phi'^2 = 0. \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} a'' a + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{12} \omega_0 \phi^{-2} \phi'^2 a^2 \\ + \frac{1}{3} \omega_0 \phi^{-1} a \phi' a' + \frac{1}{6} \omega_0 \phi^{-1} a^2 \phi'' = 0. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Si restamos  $2\phi/a$  veces la Ec. (4.94) de la Ec. (4.93), obtenemos

$$a\phi'' + 2a'\phi' = 0, \quad (4.95)$$

y sustituyendo esto en la Ec. (4.93) nos da

$$a''\phi - a\phi + \frac{1}{6}\omega_0\phi^{-1}a\phi'^2 = 0. \quad (4.96)$$

Ya que (4.95) se puede escribir como  $d(a^2\phi') = 0$ , hay una carga conservada

$$a^2\phi' = Q = a^3\dot{\phi}. \quad (4.97)$$

Usando la Ec. (4.92), la restricción Hamiltoniana clásica nos da

$$\begin{aligned} H &= a'\Pi_a + \phi'\Pi_\phi - L, \\ &= -\frac{1}{2}a'^2\phi - \frac{1}{2}aa'\phi' + \frac{1}{2}a^2\phi + \frac{1}{12}\omega_0a^2\phi^{-1}\phi'^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.98)$$

la cual se puede escribir como

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) = 1 + \frac{1}{6}\omega_0\phi^{-2}\phi'^2 = 0. \quad (4.99)$$

Si suponemos que  $\tau$  es el tiempo Euclideo cósmico (i.e.  $\tau = it$  o  $d\tau = ad\bar{b}$ ), entonces, después de sustituir (4.97) en (4.99), obtenemos

$$\dot{a} = -\frac{Q}{2a^2\phi} \pm \left[ 1 + \left(\frac{\omega_0}{6} + \frac{1}{4}\right) \frac{Q^2}{\phi^2 a^4} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.100)$$

en donde ahora el punto denota diferenciación con respecto a  $\tau$ . Cuando  $a \rightarrow \infty$ ,  $\dot{a} \rightarrow \pm 1$  o  $a^2 \rightarrow \tau^2$ , así el factor de escala se aproxima al universo Euclideo de Milne. También  $\dot{a} = 0$  para

$$a = L = \left[ \left(-\frac{\omega_0}{6}\right) \left(\frac{Q^2}{\phi^2}\right) \right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\bar{Q}}{\phi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.101)$$

en donde  $\bar{Q} = (-\omega_0/6)^{\frac{1}{2}}Q$  así esto da la dimensión mínima de la configuración. Esto corresponde a un agujero de gusano Euclideo conectando a dos universos de Milne con una garganta de radio  $L$ . Nótese que  $L$  es una función de  $\phi$  y la forma de esta en la garganta ( $a = L$ ) es

$$\phi(\tau) = [c - \frac{1}{2}a\tau]^{-2}. \quad (4.102)$$

en donde  $a = (-\omega_0/6)^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}$  y  $c$  es una constante de integración. Para  $\tau$  grandes (4.101) sugiere que el radio de la garganta aumenta linealmente con  $\tau$ .

## 4.5 Tercera cuantización

En esta sección realizaremos la tercera cuantización del modelo cosmológico de FRW en Jordan-Brans-Dicke, para ello introduciremos en la acción (4.1) con  $\lambda(\phi) = 0$  las variables y el tiempo conforme

$$x = \ln(a^2\phi) \quad , \quad y = \ln \phi^{\frac{1}{2}} \quad , \quad dt = a d\tau, \quad (4.103)$$

esto con el fin de obtener una acción más simple que nos facilite la obtención de los modos -entrantes y -salientes de frecuencia positiva, de esta forma obtendremos la acción

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} - 1 \right] e^x d\tau, \quad (4.104)$$

los momentos canónicos conjugados son

$$\pi_x = \frac{x'}{4} e^x, \quad \pi_y = -\frac{y'}{4} e^x, \quad (4.105)$$

y el Hamiltoniano  $H$

$$H = 2e^{-x}\pi_x^2 - 2e^{-x}\pi_y^2 + \frac{e^x}{2}, \quad (4.106)$$

luego realizando cuantización canónica tenemos que la ecuación de WDW  $H\psi(x, y) = 0$  toma la forma

$$\left[ x^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{e^{2x}}{4} \right] \psi(x, y) = 0. \quad (4.107)$$

cuya solución se puede expresar como

$$\psi_p(x, y) = Q_p Z_{\pm\delta}(w) e^{ip'y}, \quad (4.108)$$

en donde  $w = e^x/2$ ,  $Q_p$  es un factor de normalización,  $Z_\delta$  es una función de Bessel,  $\delta = \pm i/p$ ,  $p$  es una constante de separación arbitraria y puede considerarse como un momento canónico de  $y$ .

Debido a que la Ec.(4.107) es una ecuación del tipo de Klein-Gordon, tomamos la variable  $x$  como el tiempo, y la variable  $y$  como el espacio. La acción tercera cuantizada para producir la ecuación de WDW (4.107) es

$$S_{3Q} = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{e^{2x}}{4} \psi^2 \right] dx dy. \quad (4.109)$$

y el momento canónico está dado por

$$\pi(x, y) = \frac{\partial L_{3Q}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.110)$$

el Hamiltoniano tercero cuantizado es

$$H_{3Q} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{e^{2x}}{4} \psi^2 \right]. \quad (4.111)$$

Para cuantizar este modelo, se imponen las relaciones de conmutación a mismo tiempo  $x$  dadas por (2.102)-(2.102)

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}, \psi(x, y') \right] &= \delta(y - y'), \\ \left[ i \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}, i \frac{\partial \psi(x, y')}{\partial x} \right] &= 0, \\ \left[ \psi(x, y), \psi(x, y') \right] &= 0. \end{aligned}$$

Podemos encontrar un conjunto completo ortonormal de soluciones de frecuencia positiva de la ecuación de WDW (4.107) en términos del siguiente producto interno definido por (2.105)-(2.107)

$$\begin{aligned} \langle v_p | v_q \rangle &= \delta(p - q), \\ \langle v_p^* | v_q \rangle &= 0, \\ \langle v_p^* | v_q^* \rangle &= -\delta(p - q), \end{aligned}$$

en donde el producto escalar de Klein-Gordon está definido como

$$\langle v_p, v_q \rangle = i \int v_p \overline{\partial_x v_q^*} dy = \delta(p - q), \quad (4.112)$$

el subíndice  $p$  etiqueta a la función modo. Por medio de los modos normales  $v_p$ , expandiremos la función de onda  $v(x, y)$  (considerada como un campo en el minisuperespacio) en términos de (2.97)

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [C(p)v_p(x, y) + C^*(p)v_p^*(x, y)] dp.$$

En lo que sigue, mostraremos explícitamente los modos entrantes y salientes, y obtendremos los coeficientes de Bogoliubov para calcular el porcentaje de universos creados desde el estado vacío entrante.

### 4.5.1 Creación de universos de la nada

Las funciones modo  $\psi_p^{in}(x, y)$  y  $\psi_p^{out}(x, y)$  serán obtenidas de (4.108). Escogeremos la función modo-entrante como una solución normalizada que satisface (4.112)

$$\psi_p^{in}(x, y) = Q_p^{in} J_\delta(w) e^{ipy}, \quad (4.113)$$

en donde  $J_\delta$  es una función de Bessel de primera clase,  $\delta = -i |p|$  y el factor de normalización es

$$Q_p^{in} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}|p|}}{2 \sinh^{\frac{1}{2}}(\pi |p|)}, \quad (4.114)$$

como mencionamos antes, en esta solución la constante de separación  $p$  puede considerarse como un momento canónico de  $y$ . Por otro lado, el comportamiento asintótico de (4.113) cuando  $x \rightarrow -\infty$ , es

$$\psi_p^{in}(x, y) \approx e^{-i(|p|x - py)}, \quad (4.115)$$

así (4.113) es una función modo de frecuencia positiva. En las regiones clásicamente permitidas los modos de frecuencia positiva corresponden a universos en expansión [108]. La función modo-saliente está definida por

$$\psi_p^{out}(x, y) = Q_p^{out} H_{-\delta}^{(2)}(w) e^{ipy}, \quad (4.116)$$

en donde  $H_{-\delta}^{(2)}$  es una función de Hankel, y

$$Q_p^{out} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|p|}, \quad (4.117)$$

luego cuando tomamos el límite  $x \rightarrow \infty$ , la Ec. (4.116) tiende a

$$\psi_p^{out}(x, y) \approx e^{-\frac{i}{2}(|p|x - py)}, \quad (4.118)$$

la ecuación de arriba es una función modo-saliente de frecuencia positiva para grandes escalas. La expansión de  $\psi(x, y)$  en términos de operadores de creación y aniquilación para la función modo-entrante, es

$$\psi(x, y) = \int [C_m(p) \psi_p^{in}(x, y) + C_m^\dagger(p) \psi_p^{in*}(x, y)] dp. \quad (4.119)$$

Requerimos que a tiempos muy tempranos el vacío sea aniquilado por  $C_m(p)$ , entonces el vacío-entrante  $|0, in\rangle$ , que es considerado como "nada" está definido por

$$C_m(p)|0, in\rangle = 0 \quad \forall p \in \mathcal{R}. \quad (4.120)$$

también la expansión de  $\psi(x, y)$  para la función modo-saliente es

$$\psi(x, y) = \int [C_{out}(p) \psi_p^{out}(x, y) + C_{out}^\dagger(p) \psi_p^{out*}(x, y)] dp, \quad (4.121)$$

y el vacío saliente  $|0, out\rangle$  está definido como

$$C_{out}(p)|0, out\rangle = 0 \quad \forall p \in \mathfrak{R}. \quad (4.122)$$

Calcularemos el número promedio de universos producidos de la nada mediante el cálculo de los coeficientes de la transformación de Bogoliubov entre los campos entrantes y salientes. Puesto que ambos conjuntos (4.113) y (4.116) son completos, están relacionados uno con otro por una transformación de Bogoliubov

$$\psi_p^{out}(x, y) = \int [C_1(p, q)\psi_q^{in}(x, y) + C_2(p, q)\psi_q^{in*}(x, y)] dq. \quad (4.123)$$

Obtenemos que los coeficientes de Bogoliubov  $C_\eta(p, q) = \delta(p \mp q)C_\eta$ , ( $\eta = 1, 2$ ) son

$$C_1(p, q) = \delta(p - q) \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\pi|p|}}}, \quad (4.124)$$

y

$$C_2(p, q) = \delta(p + q) \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi|p|} - 1}}. \quad (4.125)$$

Los coeficientes  $C_1(p)$  y  $C_2(p)$  no son iguales a cero y satisfacen la condición de conservación de probabilidad  $|C_1(p)|^2 - |C_2(p)|^2 = 1$ . Así, se pueden construir dos espacios de Fock con la ayuda de los modos (4.113) y (4.116), los cuales no son equivalentes y tenemos dos estados de vacíos tercero cuantizados: El vacío-entrante  $|0, in\rangle$  y el vacío-saliente  $|0, out\rangle$ , definidos por

$$C_{in}(p)|0, in\rangle = 0 \quad \text{y} \quad C_{out}(p)|0, out\rangle = 0. \quad (4.126)$$

en donde  $p \in \mathfrak{R}$ . El número promedio de universos producidos de la nada, i.e., el vacío-in, en el  $p$ -ésimo modo  $N(p)$  es

$$\begin{aligned} N(p) &= \langle 0, in | C_{out}^\dagger(p) C_{out}(p) | 0, in \rangle, \\ &= |C_2(p)|^2, \\ &= \frac{1}{e^{2\pi|p|} - 1}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Esta expresión corresponde a una distribución Planckiana de temperaturas con respecto a  $|p|$  para un gas relativista con energía  $E = |p|c$ , en donde ( $c = 1$ ), i.e., el estado inicial  $|0, in\rangle$  cuando uno lo ve desde el vacío externo  $|0, out\rangle$ , está caracterizado por una distribución termal de universos con energía  $p$  a una temperatura fija  $T = 1/2\pi k$ , en donde  $k$  es la constante de Boltzmann.



## 4.5.2 La relación de incertidumbre

En esta sección se usará de nuevo una descomposición de Fourier para obtener grados de libertad desacoplados, tal como se realizó en el capítulo anterior en la sección 3.8, de esta forma el campo de universos  $\psi(x, y)$  será expandido en términos de senos y cosenos. Supondremos que nuestro sistema cuántico está confinado en una caja uno-dimensional con condiciones a la frontera periódicas, con la coordenada de longitud fijada en un valor arbitrario  $M$ , entonces

$$\psi(x, y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{M} \left\{ \psi(x, 0) + \sum_{q=2\pi n/M} \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(x, q) \cos qy + \psi_-(x, q) \sin qy] \right\}, \quad (4.128)$$

en donde  $\psi_+(x, -q) = \psi_+(x, q)$  y  $\psi_-(x, -q) = \psi_-(x, q)$ . Para simplificar la notación denotaremos las variables modales  $\psi(z, 0)$  y  $\psi_{\pm}(z, q)$  por  $\psi_{\alpha}(z)$ . Sustituyendo la expansión de arriba en el Lagrangiano derivado de (4.109), con la variable  $z = a^2\phi$ , obtenemos

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{M} \right) \sum_{\alpha} \left[ \left( \frac{\partial \psi_{\alpha}(z)}{\partial z} \right)^2 - q^2 \psi_{\alpha}^2(z) + \frac{z^2}{4} \psi_{\alpha}^2(z) \right], \quad (4.129)$$

ahora la suma incluye el modo cero  $\psi(z, 0)$  y una entrada de  $\psi(z, q)$  para cada par  $(q, -q)$ . De esta forma las variables modales  $\psi_{\alpha}$  están desacopladas completamente una de la otra, para el siguiente cálculo rescalamos  $\psi_{\alpha}$  a  $\sqrt{M/2\pi} \psi_{\alpha}$ . Entonces, el Hamiltoniano está dado por

$$H_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \left[ \pi_{\alpha}^2 + \left( q^2 - \frac{z^2}{4} \right) \psi_{\alpha}^2(z) \right]. \quad (4.130)$$

Para cuantizar el sistema (4.130), imponemos las relaciones de conmutación (3.179)

$$[\psi_{\alpha}(z), \pi'_{\alpha}] = i\delta_{\alpha, \alpha'}$$

y considerando el hecho de que la funcional de onda de cualquier eigenestado se factoriza como  $\Psi = \prod_{\alpha} \Psi_{\alpha}[z, \psi_{\alpha}(z)]$ , mediante la sustitución  $\psi(z) \rightarrow \psi_{\alpha}(z)$  y  $\pi_{\alpha} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}(z)}$  obtenemos la ecuación de Schrödinger para cada variable modal

$$i \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \psi_{\alpha}^2} + \left( q^2 - \frac{z^2}{4} \right) \psi_{\alpha}^2 \right] \Psi_{\alpha}. \quad (4.131)$$

Resolveremos la ecuación de onda anterior usando el ansatz Gaussiano dado por (3.182) y puesto que la relación de incertidumbre de Heisenberg está dada por (3.194)

$$(\Delta \psi_{\alpha})^2 (\Delta \pi_{\alpha})^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left[ \frac{F_{\alpha}(z, q)}{D_{\alpha}(z, q)} \right]^2 \right\},$$

para obtener  $F_\alpha(z, q)$  y  $D_\alpha(z, q)$  sustituimos el ansatz (3.182) en la ecuación (4.131), así obtenemos la ecuación de movimiento para  $A_\alpha(z, q)$ :

$$-i \frac{d}{dz} A_\alpha(z, q) = -A_\alpha^2(z, q) + q^2 - \frac{z^2}{4}. \quad (4.132)$$

Ahora sustituimos

$$A_\alpha(z, q) = -i \frac{d}{dz} \ln u_\alpha(z, q), \quad (4.133)$$

en donde  $u_\alpha(z, q)$  es la solución de la ecuación de WDW

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{q^2}{z^2} - \frac{1}{4} \right] u_\alpha(z, q) = 0. \quad (4.134)$$

Primero, analizaremos el comportamiento de  $u_\alpha$  para grandes escalas ( $a \rightarrow \infty$ ), entonces el segundo término  $q^2/z^2$  en la ecuación de onda (4.134) se puede despreciar. Así, la solución es

$$u_\alpha(z, q) = \cos \frac{z}{2} + \beta \sin \frac{z}{2}, \quad (4.135)$$

en donde  $\beta$  es una constante compleja. Sustituyendo (4.135) en (4.133), obtenemos que

$$A_\alpha(z, q) = \frac{i}{2} \frac{\sin \frac{z}{2} - \beta \cos \frac{z}{2}}{\left( \cos \frac{z}{2} + \beta \sin \frac{z}{2} \right)}. \quad (4.136)$$

entonces

$$\begin{aligned} D_\alpha(z, q) &= \operatorname{Re} A_\alpha(z, q) \\ &= \frac{\operatorname{Im} \beta}{2 \left| \cos \frac{z}{2} + \beta \sin \frac{z}{2} \right|^2}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} F_\alpha(z, q) &= -\operatorname{Im} A_\alpha(z, q) \\ &= \frac{\operatorname{Re} \beta \cos z - \frac{1}{2} (|\beta|^2 - 1) \sin z}{2 \left| \cos \frac{z}{2} + \beta \sin \frac{z}{2} \right|^2}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

por lo tanto la relación de incertidumbre es

$$(\Delta \epsilon_\alpha)^2 (\Delta \pi_\alpha)^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + (\operatorname{Im} \beta)^{-2} \left[ \operatorname{Re} \beta \cos z - \frac{1}{2} (|\beta|^2 - 1) \sin z \right]^2 \right\}. \quad (4.139)$$

Si escogemos  $\beta = -i$ , entonces para grandes escalas ( $a \rightarrow \infty$ ) la relación de incertidumbre de arriba se convierte en

$$(\Delta\psi_\alpha)^2 (\Delta\pi_\alpha)^2 = \frac{1}{4}, \quad (4.140)$$

para  $\beta \neq -i$ , podemos notar que la expresión entre corchetes en (4.139) es una función periódica finita (aún para valores grandes de  $z$ ). Esto significa que las fluctuaciones cuánticas del campo de universos cerrados tercero-cuantizados no son dominantes para valores grandes del factor de escala, i.e., en el curso de la expansión del universo ( $a \rightarrow \infty$ ) se espera que el espacio-tiempo sea clásico.

Ahora estudiaremos el comportamiento de  $u_\alpha$  para escalas pequeñas ( $a \rightarrow 0$ ). Entonces la solución de la ecuación (4.134) es

$$u_\alpha(z, q) = \sqrt{z} \left[ I_\nu \left( \frac{z}{2} \right) + \gamma K_\nu \left( \frac{z}{2} \right) \right], \quad (4.141)$$

en donde  $I_\nu$  y  $K_\nu$  son funciones de Bessel modificadas,  $\gamma$  es una constante compleja, y  $\nu = \sqrt{1/4 - q^2}$ . Sustituyendo la solución general (4.141) en (4.133), obtenemos

$$\begin{aligned} D_\alpha(z, q) &= \text{Re} A_\alpha(z, q), \\ &= \frac{\text{Im} \gamma (K'_\nu I_\nu - I'_\nu K_\nu)}{2 |I_\nu + \gamma K_\nu|^2}, \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} F_\alpha(z, q) &= \text{Im} A_\alpha(z, q) \\ &= \frac{z^{-1} |I_\nu + \gamma K_\nu|^2 + I'_\nu I_\nu + |\gamma|^2 K'_\nu K_\nu + \text{Re} \gamma (K'_\nu I_\nu + I'_\nu K_\nu)}{2 |I_\nu + \gamma K_\nu|^2}, \end{aligned} \quad (4.143)$$

la prima denota diferenciación con respecto a  $z$ . Entonces, la relación de incertidumbre es

$$(\Delta u_\alpha)^2 (\Delta \pi_\alpha)^2 = \frac{1}{4} \{1 + G_\alpha^2\}, \quad (4.144)$$

en donde

$$\begin{aligned} G_\alpha &= (\text{Im} \gamma)^{-1} z \left[ z^{-1} (I_\nu^2 + |\gamma|^2 K_\nu^2) \right. \\ &\quad \left. + I'_\nu I_\nu + |\gamma|^2 K'_\nu K_\nu + \text{Re} \gamma (K'_\nu I_\nu + I'_\nu K_\nu) \right]. \end{aligned} \quad (4.145)$$

ya que hemos supuesto que nuestro sistema está confinado en una caja uno-dimensional con condiciones de frontera periódicas, con la coordenada de longitud fijada en un valor arbitrario  $M$ , si tomamos el límite  $M \rightarrow \infty$ , entonces podemos escoger  $\nu^2 > 0$ , y para pequeñas escalas ( $a \rightarrow 0$ ) el comportamiento asintótico[80] de la ecuación (4.144) es

$$(\Delta\psi_\alpha)^2(\Delta\pi_\alpha)^2 = \frac{1}{4} \{1 + Nz^{-4|\nu|}\}, \quad (4.146)$$

en donde  $N$  es alguna constante positiva. Esto significa que la fluctuación del campo de universos tercero-cuantizados es grande para pequeñas escalas ( $a \rightarrow 0$ ). Para el caso en que  $\nu^2 < 0$ , tal que  $\nu$  es imaginario puro, obtenemos un comportamiento oscilatorio de  $G_\alpha$  y no tiene una magnitud definida[16] cuando  $a \rightarrow 0$ .

## Capítulo 5

# Cosmología cuántica en BW para Bianchi I y II

Los modelos de Bianchi son las cosmologías homogéneas más generales con un grupo de isometrías tres-dimensional. Estos grupos están en correspondencia uno a uno con las álgebras de Lie tres-dimensional, los cuales fueron clasificados en 1897 por Bianchi[109, 110]. Estos son nueve álgebras de Lie tres-dimensional distintas, y consecuentemente nueve tipos de cosmología de Bianchi. En este capítulo consideraremos la cosmología cuántica para modelos cosmológicos de Bianchi tipo I y II en la teoría de la gravitación de Bergmann-Wagoner, cuya importancia previamente ha sido discutida por su conexión con la inflación y las teorías de cuerdas. Trataremos sólo estos dos modelos debido a la complicada forma del potencial resultante en la ecuación de WDW.

El elemento de línea para la clase de espacio-tiempos homogéneos está dado por

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ab} \omega^a \omega^b, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

en donde  $h_{ab}(t)$  es una función del tiempo cósmico  $t$  y representa la métrica sobre las superficies de homogeneidad y  $\omega^a$  son las uno-formas invariantes asociadas con el grupo de isometrías. Estos modelos tienen una topología  $R \times G_3$ , en donde  $G_3$  representa un grupo de isometrías de Lie que actúa transitivamente sobre órbitas tres-dimensionales tipo espaciales[109]. El álgebra de Lie de  $G_3$  admite las constantes de estructura  $C_{bc}^a = m^{ad} \epsilon_{abc} + \delta_b^a a_c$  en donde  $m^{ab}$  es una matriz simétrica,  $a_c \equiv C_{ac}^a$  y  $\epsilon_{abc} = \epsilon_{[abc]}$ . La identidad de Jacobi  $C_{bc}^a C_{de}^b C_{af}^c$  sólo se satisface si  $m^{ab} a_b = 0$ , así que  $m^{ab}$  debe ser transversa a  $a_b$ [113]. El modelo pertenece al Bianchi clase A si  $a_b = 0$  y a la clase B si  $a_b \neq 0$ . Se debe encontrar una base tal que  $a_b = (a, 0, 0)$  y  $m^{ab} = \text{diag}[m_{11}, m_{22}, m_{33}]$  en donde  $m_{ii}$  toma los valores  $\pm 1$  o 0. En el Bianchi clase A, el álgebra de Lie está determinada únicamente hasta isomorfismos por el rango y signatura de  $m^{ab}$ . Las seis posibilidades son  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0; 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, -1, -1)$  y  $(1, 1, 1)$  y estos corresponden respectivamente, a los Bianchi tipos I, II, VI<sub>0</sub>, VII<sub>0</sub>, VIII y IX. Finalmente, la tres-métrica se debe parametrizar

por  $h_{ab}(t) = e^{2\alpha(t)}(e^{2\beta(t)})_{ab}$ , en donde  $e^{3\alpha}$  representa el volumen espacial efectivo del universo y

$$\beta_{ab} \equiv \text{diag}[\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+], \quad (5.2)$$

es una matriz de traza cero que determina la anisotropía de los modelos, los cuales se pueden obtener a partir de la acción escalar-tensorial de Bergmann-Wagoner[20]

$$S = \int \sqrt{-g} e^{-\Phi} [R - \omega(\Phi)(\nabla\Phi)^2 - 2\lambda(\phi)] d^4x, \quad (5.3)$$

en donde  $R$  es el escalar de curvatura del espacio-tiempo y  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . El campo de dilatón  $\Phi$  juega el papel de una constante gravitacional que varía en el tiempo y puede autointeractuar a través de un potencial  $\lambda(\Phi)$  (el usual campo escalar de Jordan-Brans-Dicke es  $\phi = e^{-\Phi}$ ). La función  $\omega(\Phi)$  es adimensional y determina la forma precisa del acoplamiento entre el dilatón y el gravitón.

El espacio de configuración  $Q$  para los modelos derivados de la acción (5.3) es por lo tanto cuatro-dimensional y es expandido por  $q_n \equiv \alpha, \Phi, \beta_{\pm}$ . La densidad Lagrangiana  $L(q_n, \dot{q}_n)$  está definida por  $S = \int L(q_n, \dot{q}_n) dt$ , en donde el punto indica diferenciación con respecto al tiempo cósmico, y debe ser derivada sustituyendo el anzats (5.1) en la acción (5.3) e integrar sobre las variables espaciales. Aplicaremos este procedimiento para las cosmologías clase A, obteniéndose para estos modelos la siguiente acción

$$S = \int e^{4\alpha - \Phi} [6\dot{\alpha}^2 - 6\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\beta}_+^2 + 6\dot{\beta}_-^2 + \omega(\Phi)\dot{\Phi}^2 - 2\lambda(\Phi) + e^{-2\alpha}U(\beta_{\pm})] dt, \quad (5.4)$$

en donde

$$U(\beta_{\pm}) = -e^{-4\alpha} \left( m_{ab}m^{ab} - \frac{1}{2}m^2 \right), \quad (5.5)$$

es el potencial de curvatura,  $m \equiv m_a^a$  y los índices se pueden subir y bajar mediante  $h^{ab}$  y  $h_{ab}$ , respectivamente[22]. En el caso de los modelos tipo B, surge una divergencia debido a que la tres-curvatura contiene un término proporcional a  $a_b a^b$ [23]. En vista de esta dificultad, en adelante no consideraremos estos modelos.

Para construir el Hamiltoniano que nos lleve a la ecuación de WDW, utilizaremos las siguientes variables

$$x = \alpha - \frac{\Phi}{2}, \quad y = \int \sqrt{\frac{3 + 2\omega(\Phi)}{12}} d\Phi, \quad dt = e^{\Phi/2} d\tau, \quad (5.6)$$

entonces la acción (5.4) se transforma en

$$S = \int \left[ 6e^{3x} \{y'^2 - x'^2 + \beta_+'^2 + \beta_-'^2\} - 2e^{3x} \Lambda(y) + V(x, \beta_{\pm}) \right] dt, \quad (5.7)$$

en donde

$$\Lambda(y) = e^{\phi} \lambda(\phi), \quad (5.8)$$

y

$$V(x, \beta_{\pm}) = e^{2x} U(\beta_{\pm}). \quad (5.9)$$

De la acción (5.7) tenemos que el Lagrangiano es

$$L = \left[ 6e^{3x} \{y'^2 - x'^2 + \beta_+'^2 + \beta_-'^2\} - 2e^{3x} \Lambda(y) + V(x, \beta_{\pm}) \right], \quad (5.10)$$

de aquí podemos calcular los momentos canónicos

$$\pi_x = -12e^{3x} x', \quad \pi_y = 12e^{3x} y', \quad \pi_+ = 12e^{3x} \beta_+', \quad \pi_- = 12e^{3x} \beta_-', \quad (5.11)$$

y el Hamiltoniano correspondiente es

$$H = \frac{e^{-3x}}{24} \left[ -\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_+^2 + \pi_-^2 + 48e^{6x} \Lambda(y) - V(x, \beta_{\pm}) \right]. \quad (5.12)$$

Por tanto, la ecuación de WDW  $H\psi = 0$  toma la forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + B \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_-^2} + 48e^{6x} \Lambda(y) - 24e^{3x} U(\beta_{\pm}) \right] \psi(x, y, \beta_{\pm}) = 0. \quad (5.13)$$

en donde  $B$  es un parámetro de la ambigüedad de ordenamiento de operadores. En las siguientes secciones resolveremos la ecuación de WDW por separación de variables en los casos del Bianchi I y II. En [53] se da una amplia exposición de la cosmología cuántica para el Bianchi IX.

## 5.1 Soluciones exactas para Bianchi I

### 5.1.1 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0/144$

Consideraremos ahora el caso del modelo cosmológico de Bianchi tipo I reportado por Pimentel[111] en el cual el potencial  $U(\beta_{\pm})$  es igual a cero. Este caso se restringe a  $\Lambda(y) = \Lambda_0/144 = \text{cte}$ , esto significa que  $\lambda(\phi) \propto \phi$ ; esta forma del potencial se ha utilizado para generar soluciones exactas en la cosmología de vacío del Bianchi tipo

I[112]. Esto simplifica la ecuación de WDW y permite obtener soluciones exactas por medio de separación de variables

$$\Psi(x, y, \beta_{\pm}) = X(x)Y(y)F(\beta_{+})G(\beta_{-}). \quad (5.14)$$

Así obtenemos las ecuaciones separadas

$$X''(x) - BX' + (k_0^2 + \Lambda_0 e^{6x})X = 0, \quad (5.15)$$

$$Y''(y) + k^2 Y = 0, \quad (5.16)$$

$$F''(\beta_{+}) + k_+^2 F = 0, \quad (5.17)$$

$$G''(\beta_{-}) + k_-^2 G = 0, \quad (5.18)$$

en donde

$$k_0^2 = k_+^2 + k_-^2 + k^2, \quad (5.19)$$

por lo tanto la función de onda del universo es

$$\begin{aligned} \psi(x, y, \beta_{\pm}) = e^{Bx/2} & \left[ C_1 J_{\nu} \left( \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{3} e^{3x} \right) + C_2 Y_{\nu} \left( \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{3} e^{3x} \right) \right] \\ & [C_3 e^{iky} + C_4 e^{-iky}] [C_5 e^{k_+ \beta_+} + C_6 e^{-k_+ \beta_+}] \\ & [C_7 e^{ik_- \beta_-} + C_8 e^{-ik_- \beta_-}]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

en donde

$$\nu = \frac{1}{6} \sqrt{-B - 4k_0^2}. \quad (5.21)$$

y las  $C_i$  son constantes. Mediante superposición de soluciones podemos obtener funciones de onda que satisfagan diferentes condiciones a la frontera. En la siguiente sección se considerará el caso de soluciones del tipo de agujero de gusano.

### 5.1.2 Solución de agujero de gusano cuántico

De la función de onda (5.20) se puede generar una solución del tipo de agujero de gusano, i.e., que satisface las condiciones de regularidad de Hawking-Page[17], la solución particular de la ecuación de WDW es

$$\psi(x, y, \beta_{\pm}) = e^{m \cosh|ny + p\beta_+ + q\beta_- + r|e^{3x}}, \quad (5.22)$$



en donde  $r$  es un parámetro real arbitrario,  $m, n, p, q$  son constantes que junto con el factor de ordenamiento  $B$ , deben satisfacer

$$3 + \Lambda_0/3 = B, \quad (5.23)$$

$$n^2 + p^2 + q^2 = 9, \quad (5.24)$$

$$(n^2 + p^2 + q^2)m^2 = -\Lambda_0. \quad (5.25)$$

De estas relaciones se deduce el requerimiento de  $\Lambda_0 < 0$  para tener un agujero de gusano.

### 5.1.3 Solución WKB

Para obtener la solución WKB se usa una función de onda de la forma

$$\psi(x, y, \beta_{\pm}) = e^{iS(x, y, \beta_{+}, \beta_{-})}, \quad (5.26)$$

y después de sustituirla en la ecuación de WDW, se obtiene la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi.

$$-S_r^2 + S_y^2 + S_{\beta_+}^2 + S_{\beta_-}^2 + \Lambda_0 e^{6x} = 0, \quad (5.27)$$

luego separando variables se obtiene

$$S = p_y y + p_+ \beta_+ + p_- \beta_- \pm \left[ \frac{1}{3} \sqrt{k^2 + \Lambda_0 e^{6x}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{k^2 + \Lambda_0 e^{6x}}}{k} \right) - kx \right], \quad (5.28)$$

en donde  $k^2 = p_y^2 + p_+^2 + p_-^2$ . Las soluciones clásicas para este modelo están reportadas en [112].

### 5.1.4 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_1 \sinh(2y)$

En esta parte se considera otro potencial [111] para el cual es posible obtener soluciones exactas de la ecuación de WDW. Para ello se utiliza otro tiempo  $\tau$  definido por  $d\tau = e^{-2x} d\sigma$ , así la acción (5.7) toma la forma

$$S = 6 \int \left[ e^{4x} \{ y'^2 - x'^2 + \beta_+'^2 + \beta_-'^2 - e^{2x} \Lambda(y) \} \right] d\sigma, \quad (5.29)$$

ahora la prima denota derivada con respecto a  $\sigma$ . Utilizando las nuevas variables

$$\eta = e^{2x} \cosh(2y), \quad \xi = e^{2x} \sinh(2y), \quad (5.30)$$

y el potencial de la forma

$$\Lambda(y) = \Lambda_1 \cosh(2y) + \Lambda_2 \sinh(2y), \quad (5.31)$$

la acción (5.29) se transforma en

$$S = 6 \int \left[ \frac{1}{4} (\xi'^2 - \eta'^2) + (\eta^2 - \xi^2) (\beta_+'^2 + \beta_-'^2) - \Lambda_1 \eta - \Lambda_2 \xi \right] d\sigma \quad (5.32)$$

de aquí se tiene el Lagrangeano

$$L = 6 \left[ \frac{1}{4} (\xi'^2 - \eta'^2) + (\eta^2 - \xi^2) (\beta_+'^2 + \beta_-'^2) - \Lambda_1 \eta - \Lambda_2 \xi \right], \quad (5.33)$$

y el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{24} \left[ \pi_\xi^2 - \pi_\eta^2 + (\eta^2 - \xi^2) (\pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2) + 24\Lambda_1 \eta + 24\Lambda_2 \xi \right]. \quad (5.34)$$

La ecuación de WDW en este caso es

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (\eta^2 - \xi^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_-^2} \right) - 24\Lambda_1 \eta + 24\Lambda_2 \xi \right] \psi(\eta, \xi, \beta_\pm) = 0. \quad (5.35)$$

Separando variables mediante

$$\psi(\eta, \xi, \beta_\pm) = E(\eta) X(\xi) P(\beta_+) M(\beta_-), \quad (5.36)$$

se obtienen las ecuaciones

$$E''(\eta) + (k_\perp^2 \eta^2 + 24\Lambda_1 \eta + k^2) E = 0. \quad (5.37)$$

$$X''(\xi) + (k_\perp^2 \xi^2 - 24\Lambda_2 \xi + k^2) X = 0. \quad (5.38)$$

$$P''(\beta_+) + k_+^2 P = 0. \quad (5.39)$$

$$M''(\beta_-) + k_-^2 M = 0. \quad (5.40)$$

en donde  $k_+$ ,  $k_-$  y  $k$  son constantes de separación y  $k_\perp^2 = k_+^2 + k_-^2$ . Las soluciones de estas ecuaciones son

$$E(\eta) = C_1 {}_1F_1\left(a_1, \frac{1}{2}, z_1\right) + C_2 \sqrt{z_1} {}_1F_1\left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z_1\right), \quad (5.41)$$

en donde  ${}_1F_1$  es la función hipergeométrica confluyente, y

$$a_1 = \frac{1}{4} \left[ -k^2 + \left( \frac{12\Lambda_1}{k_1} \right)^2 \sqrt{-k_1^2 + 1} \right], \quad z_1 = \sqrt{-k_1^2} \left( \eta + \frac{12\Lambda_1}{k_1^2} \right)^2, \quad (5.42)$$

$$X(\xi) = C_3 {}_1F_1\left(a_2, \frac{1}{2}, z_2\right) + C_4 \sqrt{z_2} {}_1F_1\left(a_2 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z_2\right), \quad (5.43)$$

con

$$a_2 = \frac{1}{4} \left[ -k^2 + \left( \frac{12\Lambda_2}{k_1} \right)^2 \sqrt{-k_1^2 + 1} \right], \quad z_2 = \sqrt{-k_1^2} \left( \xi + \frac{12\Lambda_2}{k_1^2} \right)^2, \quad (5.44)$$

$$P(\beta_+) = C_5 e^{ik_+ \beta_+} + C_6 e^{-ik_+ \beta_+}, \quad (5.45)$$

y

$$M(\beta_-) = C_6 e^{ik_+ \beta_-} + C_8 e^{-ik_+ \beta_-}. \quad (5.46)$$

### 5.1.5 Solución WKB

La función de onda WKB para el nuevo potencial es de la forma

$$\psi(\eta, \xi, \beta_{\pm}) = e^{i[V(\eta) + W(\xi) + (P_+ \beta_+) + (P_- \beta_-)]}, \quad (5.47)$$

después de sustituir en la ecuación de WDW, se obtiene

$$V''(\eta) - p_1^2 \eta^2 - 24\Lambda_1 \eta - p^2 = 0, \quad (5.48)$$

y

$$W''(\xi) - p_1^2 \xi^2 + 24\Lambda_2 \xi - p^2 = 0. \quad (5.49)$$

en donde  $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ . Las soluciones de estas ecuaciones son[111]

$$V(\eta) = \left( \frac{6\Lambda_1}{p_1^2} + \frac{\eta}{2} \right) \sqrt{p^2 + 24\Lambda_1 \eta + p_1^2 \eta^2} + \frac{p^2 p_1^2 - 144\Lambda_1^2}{2p_1^3} \log \left[ \frac{2}{p_1} (p_1^2 \eta - 12\Lambda_1) + 2\sqrt{p^2 + 24\Lambda_1 \eta + p_1^2 \eta^2} \right] \quad (5.50)$$

y

$$W(\xi) = \left( \frac{6\Lambda_2}{p_1^2} + \frac{\eta}{2} \right) \sqrt{p^2 - 24\Lambda_2 \eta + p_1^2 \eta^2} + \frac{p^2 p_1^2 - 144\Lambda_2^2}{2p_1^3} \log \left[ \frac{2}{p_1} (p_1^2 \eta - 12\Lambda_2) + 2\sqrt{p^2 - 24\Lambda_2 \eta + p_1^2 \eta^2} \right] \quad (5.51)$$

## 5.2 Soluciones exactas para Bianchi II

El potencial para el modelo de Bianchi de II es:

$$U(\beta_{\pm}) = -\frac{1}{2}e^{4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}, \quad (5.52)$$

y la ecuación de WDW es

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial \beta_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_-^2} + 12e^{4(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} + 144e^{6x}\Lambda(y) \right] \psi(x, y, \beta_{\pm}) = 0, \quad (5.53)$$

de esta ecuación se considerarán los casos de término cosmológico  $\Lambda(y) = 0$  y  $\Lambda(y) = \Lambda_0/144$ .

### 5.2.1 Caso $\Lambda(y) = 0$

Cuando  $\Lambda(y) = 0$  tenemos que la Ec. (5.53) se reduce a

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_-^2} + 12e^{4(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} \right] \psi(x, y, \beta_{\pm}) = 0. \quad (5.54)$$

y mediante las variables

$$\begin{aligned} \xi &= x + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \eta &= \sqrt{3}x + \beta_-, \\ \zeta &= -x + 2\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-. \end{aligned} \quad (5.55)$$

la Ec. (5.54) se transforma en

$$\left[ -3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - B \frac{\partial}{\partial \xi} + 12e^{4\xi} - 6 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + B \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \sqrt{3}B \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi(\xi, y, \eta, \zeta) = 0, \quad (5.56)$$

luego para separar variables proponemos,

$$\psi(\xi, y, \beta_{\pm}) = F(\xi)G(\eta)H(\zeta)Y(y), \quad (5.57)$$

y la Ec. (5.68) se separa en las ecuaciones

$$Y''(y) + k^2 Y = 0, \quad (5.58)$$

$$6G''(\eta) - BG' + l^2 G = 0, \quad (5.59)$$

$$2H''(\zeta) - \sqrt{3}BH' + m^2 H = 0, \quad (5.60)$$

$$3F''(\xi) + BF' + (n^2 - 12e^{4\xi})F = 0, \quad (5.61)$$

en donde

$$n^2 = k^2 + l^2 + m^2. \quad (5.62)$$

Por consiguiente la función de onda es

$$\begin{aligned} \psi(\xi, y, \eta, \zeta) = e^{-\frac{B}{6}\xi} & \left[ c_1 K_p(e^{2\xi}) + c_2 I_p(e^{2\xi}) \right] \\ & \left[ c_3 e^{\frac{1}{12}(B-q)\eta} + c_4 e^{\frac{1}{12}(B+q)\eta} \right] \\ & \left[ c_5 e^{\frac{1}{4}(\sqrt{3}B+r)\zeta} + c_6 e^{\frac{1}{4}(\sqrt{3}B-r)\zeta} \right] \\ & \left[ c_7 \sin ky + c_8 \cos ky \right], \quad (5.63) \end{aligned}$$

en donde  $p = \frac{1}{12}\sqrt{B^2 - 12n^2}$ ,  $q = \sqrt{B^2 - 24l^2}$  y  $r = \sqrt{3B^2 - 8m^2}$ , luego regresando a las variables  $x, \beta_+$  y  $\beta_-$ , toma la forma final

$$\begin{aligned} \psi(x, y, \beta_{\pm}) = e^{-\frac{B}{6}(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} & \left[ c_1 K_p(e^{2(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}) + c_2 I_p(e^{2(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}) \right] \\ & \left[ c_3 e^{\frac{1}{4}(\sqrt{3}B+r)(-x+2\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} + c_6 e^{\frac{1}{4}(\sqrt{3}B-r)(-x+2\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)} \right] \\ & \left[ c_3 e^{\frac{1}{12}(B-q)(\sqrt{3}x+\beta_-)} + c_4 e^{\frac{1}{12}(B+q)(\sqrt{3}x+\beta_-)} \right] \\ & \left[ c_7 \sin ky + c_8 \cos ky \right]. \quad (5.64) \end{aligned}$$

### 5.2.2 Solución WKB

Para hallar una solución WKB de la ecuación de WDW (5.53) con  $\Lambda(y) = 0$  se propone

$$\psi(\xi, y, \eta, \zeta) = e^{iS(\xi, y, \eta, \zeta)}, \quad (5.65)$$

después de sustituir en la ecuación de onda (5.53), obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$3S_{\xi}^2 + S_{\zeta}^2 - 2S_{\eta}^2 + S_y^2 + 12e^{4\xi} = 0, \quad (5.66)$$

cuya solución es

$$S(\xi, y, \eta, \zeta) = p_y y - \frac{p_{\eta}}{\sqrt{2}} \eta + \frac{p_{\zeta}}{\sqrt{6}} \mp \frac{1}{6} \sqrt{3p_{\xi}^2 - 36e^{4\xi}} \pm \frac{p_{\xi}}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}p_{\xi}} \sqrt{3p_{\xi}^2 - 36e^{4\xi}} \right], \quad (5.67)$$

en donde  $p_{\xi}^2 = p_y^2 + p_{\zeta}^2 - p_{\eta}^2$ .

### 5.2.3 Caso $\Lambda(y) = \Lambda_0/144$

Para este caso la ecuación de onda (5.53) se transforma en

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_-^2} + 12e^{4(x+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} + \Lambda_0 e^{6x} \lambda(y) \right] \psi(x, y, \beta_{\pm}) = 0, \quad (5.68)$$

e introduciendo ahora las variables

$$\begin{aligned} \xi &= x + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \eta &= ax + b\beta_+ + c\beta_-, \\ \zeta &= x. \end{aligned} \quad (5.69)$$

entonces la Ec. (5.68) se transforma en

$$\begin{aligned} &\left[ -3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (a^2 - b^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} + 2a \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} + 2(a - b - \sqrt{3}c) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ &\left. - B \frac{\partial}{\partial \xi} - B \frac{\partial}{\partial \zeta} + aB \frac{\partial}{\partial \eta} + 12e^{4\xi} + \Lambda_0 e^{6\xi} \right] \psi(\xi, y, \eta, \zeta) = 0. \quad (5.70) \end{aligned}$$

en donde si escogemos  $a = 0$ ,  $b = 1$  y  $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , se reduce a

$$\begin{aligned} &\left[ -3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} - B \frac{\partial}{\partial \xi} \right. \\ &\left. - B \frac{\partial}{\partial \zeta} + 12e^{4\xi} + \Lambda_0 e^{6\xi} \right] \psi(\xi, y, \eta, \zeta) = 0. \quad (5.71) \end{aligned}$$

Haciendo

$$\psi(\xi, y, \eta, \zeta) = F(\xi)G(\eta)H(\zeta)Y(y), \quad (5.72)$$

y considerando  $H'(\zeta) = m^2H$ , entonces la ecuación de onda se separa en las ecuaciones

$$Y''(y) + k^2Y = 0, \quad (5.73)$$

$$G''(\eta) + \frac{3}{4}l^2G = 0, \quad (5.74)$$

$$H'(\zeta) - m^2H = 0, \quad (5.75)$$

$$F''(\xi) + \frac{1}{3}(B - 2m^2)F' + \frac{1}{3}(Bm^2 - m^4 - n^2 - 12e^{4\xi})F = 0, \quad (5.76)$$

en donde las constantes de separación están relacionadas por  $n^2 = k^2 + l^2 + m^2$ . Así pues, la función de onda es

$$\begin{aligned} \psi(\xi, y, \eta, \zeta) = e^{r\xi + m^2\zeta} & \left[ c_1 K_s(e^{2\xi}) + c_2 I_s(e^{2\xi}) \right] \\ & \left[ c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} l \eta + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \right] \\ & \left[ c_5 \sin ky + c_6 \cos ky \right], \end{aligned} \quad (5.77)$$

en donde  $r = \frac{1}{6}(2m^2 - B)$ ,  $s = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{9}(B - 2m^2)^2 - \frac{1}{3}(m^4 + n^2 - Bm^2)}$ . Luego regresando a las variables originales, tenemos

$$\begin{aligned} \psi(x, y, \beta_{\pm}) = e^{r(x + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-) + m^2x} & \left[ c_1 K_s(e^{2(x + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}) + c_2 I_s(e^{2(x + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}) \right] \\ & \left[ c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} l(\beta_+ - \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_-) + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} l(\beta_+ - \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_-) \right] \\ & \left[ c_5 \sin ky + c_6 \cos ky \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

# Capítulo 6

## Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos estudiado varios aspectos de la cosmología cuántica y clásica para el modelo de Friedmann-Robertson-Walker en el marco de las teorías escalares-tensoriales (Bergmann-Wagoner y Jordan-Brans-Dicke), así como los modelos de Bianchi I y II.

La aproximación cuántica usada fue resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt (obtenida vía cuantización canónica) para ciertos términos cosmológicos de interés, los cuales nos permitieron obtener ecuaciones de onda separables. De esta forma obtuvimos soluciones del tipo de agujero de gusano, las cuales como se mencionó anteriormente son funciones de onda que satisfacen las condiciones a la frontera de Hawking-Page[17] (son amortiguadas exponencialmente para tres-geometrías grandes, y son regulares cuando la tres-geometría se colapsa a cero). Este tipo especial de soluciones fueron generadas para el término cosmológico de la forma  $\lambda(\phi) = 0$  mediante superposición de funciones. Los agujeros de gusano están asociados con la evaporación completa de hoyos negros, y se cree que producen interacciones efectivas en la física de bajas energías que cambian las constantes de acoplamiento de la naturaleza en variables dinámicas. Para otro tipo de términos cosmológicos no hallamos agujeros de gusano.

En la teoría clásica los agujeros de gusano son instantones, no existen soluciones de este tipo en gravedad pura, y parece que sólo ciertos tipos particulares de materia y campos de norma acoplados a la gravedad generan soluciones de agujero de gusano. En nuestra investigación no hallamos agujeros de gusano clásicos Lorentzianos, sólo el caso de un agujero de gusano semiclásico en correspondencia al caso cuántico. No obstante, presentamos los resultados obtenidos por Xiao, Carl y Liu para agujeros de gusano Euclidianos en las teorías de Bergmann-Wagoner y Jordan-Brans-Dicke[107, 93]. Para la primer teoría se tiene una carga conservada compleja y en la segunda se requiere un parámetro de Jordan-Brans-Dicke  $\omega_0$  negativo.

El estudio de los agujeros de gusano y universos bebés a dado lugar a cuestiones



religiosas y filosóficas, tales como el principio antrópico, la revisión del gato de Schrödinger, la interpretación de muchos mundos y la posibilidad de viajes interuniversos[74].

También, para una base de agujeros de gusano cuánticos expresada en términos de polinomios de Hermite, construimos un paquete de onda y presentamos gráficas del cuadrado del paquete de onda  $|\psi|^2$ , y del contorno con la superposición de la trayectoria clásica, en este caso se tiene una correspondencia exacta. La cuestión de la construcción de paquetes de onda y su relación con las condiciones iniciales de la función de onda es un campo de estudio que abordaremos en lo futuro.

También aplicamos a la función de onda del universo del modelo de Jordan-Brans-Dicke las condiciones a la frontera de Hartle-Hawking y la de tunelamiento de Vilenkin. Así obtuvimos para la propuesta de no frontera, una función de onda real consistente de dos partes, una entrante y otra saliente, y para la propuesta de tunelamiento se obtuvo una función de onda compleja, con sólo una componente saliente representando un universo en expansión.

Asimismo, reportamos diversas soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt obtenidas mediante la aproximación WKB. En algunos casos se obtuvieron soluciones clásicas vía la solución semiclásica o resolviendo directamente las ecuaciones clásicas de campo. Algunas de estas soluciones tienen un comportamiento no singular.

Otro tema de la cosmología cuántica que hemos estudiado es el de la tercera cuantización, esto es, la función de onda del universo es expandida en términos de funciones de modo-entrante y -saliente de frecuencia positiva y sus conjugados hermíticos. Estos modos están relacionados unos con otros mediante los coeficientes de Bogoliubov, los cuales determinan el número de universos en un modo dado. En los casos que estudiamos encontramos que el número promedio de universos creados de la nada, es decir, del estado vacío  $|0, in\rangle$  cuando es visto desde el vacío saliente  $|0, out\rangle$  está caracterizado por una distribución Planckiana de universos con energía definida a una temperatura fija. Dicho promedio de universos producidos de la nada es muy grande, del orden del gogolplexus[56, 83, 84].

Otro de los resultados obtenidos en el formalismo de la tercera cuantización fue que en los modelos del minisuperespacio que estudiamos por medio de la relación de incertidumbre de Heisenberg, encontramos que las fluctuaciones cuánticas del campo de universos tercero cuantizados decrecen rápidamente en el curso de la expansión del universo y son grandes cuando el factor de escala cósmico se aproxima a cero[16, 81]. Esto coincide con nuestra experiencia de que el espacio-tiempo en el que vivimos ahora es esencialmente clásico. Estos resultados significan que la descripción basada en la teoría de universos tercero cuantizados es de importancia en los primeros tiempos de la evolución del universo.

Por otro lado, es necesario mencionar algunos temas de investigación que pueden considerarse como una continuación del trabajo iniciado en esta tesis. Entre ellos tenemos por ejemplo:

1) El estudio realizado en el capítulo 3 sobre soluciones clásicas, en donde reportamos algunas familias de soluciones singulares y no singulares, el caso de estas últimas debe ser investigado también a partir del estudio de las geodésicas y no sólo por los invariantes polinomiales.

2) Las consideraciones anteriores pueden ser extendidas a la teoría de cuerdas en el límite de bajas energías, con potencial de dilatón, o con potenciales inspirados en la condensación de norma, o con términos de masa. Además, la cuestión de singularidades requiere un análisis más detallado en lo que concierne a los efectos cuánticos. Otro tema relevante es la llamada dualidad T para variedades planas homogéneas e isotrópicas. Ya que esta es una simetría de la teoría de cuerdas, y puesto que en nuestras soluciones reportadas hay variedades planas, es necesario discutir la dualidad del factor de escala en el contexto de nuestras soluciones.

3) Como una continuación del trabajo de la tesis, para el caso de la teoría de cuerdas en el límite de bajas energías con potencial de dilatón, encontramos una solución con aceleración, ahora la idea es introducir modelos más elaborados con polvo o radiación y comparar con las observaciones, sólo que en este caso la integración de las ecuaciones de campo se debe realizar numéricamente.

4) Estudiar la construcción de paquetes de onda resultantes de soluciones de la ecuación de WDW en cosmologías del tipo de FRW.

5) El estudio realizado en el capítulo 4 fue considerado sólo para el modelo de FRW cerrado, para ser más acordes con la realidad el estudio debe ser extendido a los casos abierto y plano.

6) Proseguir el estudio de soluciones cuánticas que comenzamos para el modelo de Bianchi, esto es, considerar los distintos potenciales para las ecuaciones de WDW correspondientes a los tipos  $VI_0$ ,  $VII_0$ ,  $VIII$  y  $IX$ , así como buscar el significado físico de las soluciones obtenidas.

7) Aplicar el formalismo canónico al estudio de hoyos negros para estudiar su entropía. Así como incursionar en la cosmología cuántica supersimétrica.

## Apéndice A

### Encajamiento de una hipersuperficie en una variedad

Consideremos el espacio-tiempo dado por una variedad cuatro-dimensional  $M$  con una métrica  $g_{\mu\nu}$  definida en ella con signatura  $(-, +, +, +)$ . Denotemos las coordenadas de esta variedad por  $x^\lambda$ . Definimos ahora el encajamiento de una hipersuperficie tres-dimensional  $m$  de la siguiente forma

$$x^\mu = X^\mu(\xi^i), \quad (\text{A.1})$$

en donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y  $i = 1, 2, 3$ . Estas cuatro funciones son las que determinan el encajamiento. Para que se trate de un encajamiento se debe pedir que la hipersuperficie, con coordenadas intrínsecas  $\xi^i$ , no se interseque a sí misma, es decir, el mapeo  $X : m \rightarrow M$  debe ser uno a uno [114].

La métrica de  $M$  induce una métrica sobre  $m$  si consideramos el elemento de línea restringido a la variedad  $m$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu \Big|_m \\ &= g_{\mu\nu}(X^\lambda) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} d\xi^i \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} d\xi^j, \\ &= \left[ g_{\mu\nu}(X^\lambda) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} \right] d\xi^i d\xi^j, \\ &= h_{ij} d\xi^i d\xi^j. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en donde la métrica inducida es

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora definamos

$$X_i^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i}, \quad (\text{A.4})$$

notemos que  $X_i^\mu$  es la  $\mu$ -ésima componente en las coordenadas  $x^\mu$  del  $i$ -ésimo vector de la base coordenada natural sobre  $m$  dada por

$$e_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \quad (\text{A.5})$$

ya que el vector debe escribirse formalmente como

$$\begin{aligned} X_i^\mu \partial_\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial X^\mu}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^i}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Entonces, la definición de las componentes de la métrica  $h_{ij}$  sobre  $m$  es la definición natural dada por

$$\begin{aligned} h_{ij} &= g_{\mu\nu} X_i^\mu X_j^\nu, \\ &= (e_i \cdot e_j). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para el estudio de la dinámica del espacio-tiempo en el marco que nos interesa, la hipersuperficie encajada debe ser tipo espacial, por lo que pedimos que la métrica en ella  $h_{ij}$  sea positiva definida (+ + +).

Los tres vectores  $e_i$  forman una base para el espacio tangente a la variedad  $m$  en el punto  $p$  denotado por  $T_p m$ . Este espacio es a su vez un subespacio del espacio tangente a  $M$ ,  $T_p M$ . Para completar la base de este espacio construimos el complemento ortogonal al  $T_p m$  definido por la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Este subespacio será generado por el vector ortogonal a los  $e_i$ , que denotaremos por  $n$ . Este vector de componentes  $\eta^\mu$  en la base  $\partial_\mu$  satisface

$$g_{\mu\nu} X_i^\mu \eta^\nu = 0. \quad (\text{A.8})$$

pedimos además que esté normalizado

$$g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = -1. \quad (\text{A.9})$$

Estas dos condiciones determinan completamente al vector  $n$ .

Se tiene entonces que el conjunto de vectores  $(e_i, n)$  forman una base de  $T_p M$  para cada punto  $p$ . Con ellos se puede expresar a cualquier vector del  $T_p M$  como la combinación lineal de la base de la hipersuperficie  $m$  y el vector normal de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (\mathbf{A})^\mu &= (A^i \mathbf{e}_i + A^\perp \mathbf{n})^\mu, \\ &= A^i X_i^\mu + A^\perp \eta^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

en donde

$$A^\perp = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}). \quad (\text{A.11})$$

Si el vector  $\mathbf{A}$  está sobre la hipersuperficie será entonces de la forma  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ . Los escalares  $A^i$  se comportan como escalares bajo una transformación de coordenadas del espacio-tiempo  $X^\mu \mapsto X'^\mu$ , ya que ante tales cambios de coordenadas, tanto los vectores  $\mathbf{e}_i$  como el vector  $\mathbf{A}$  se mantienen fijos, por lo que los  $A^i$  no cambian. Sin embargo, los podemos ver como componentes contravariantes de vectores sobre  $T_p M$ , dado que se transforman como tales ante cambios de coordenadas  $\xi^i \mapsto \xi'^i$  en la hipersuperficie

$$\begin{aligned} A^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} &= A^i \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi'^j}, \\ &= A'^i \mathbf{e}'_i, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

por lo que las nuevas componentes serán

$$A'^i = \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^j} A^j. \quad (\text{A.13})$$

Definimos la métrica contravariante en  $\mathfrak{m}$  como la matriz inversa a  $h_{ij}$ , es decir,  $h^{ij} \equiv (h_{ij})^{-1}$ , de manera que podamos usar la métrica para bajar y subir índices de las componentes

$$A_i = h_{ij} A^j, \quad (\text{A.14})$$

$$A^i = h^{ij} A_j. \quad (\text{A.15})$$

Las componentes contravariantes del vector se pueden reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A^i &= h^{ij} A_j, \\ &= h^{ij} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j), \\ &= h^{ij} g_{\mu\nu} X_j^\mu A^\nu, \\ &= X_{\nu}^i A^\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

en donde hemos definido

$$X_{\nu}^i \equiv h^{ij} g_{\mu\nu} X_j^\mu. \quad (\text{A.17})$$

que nos permite encontrar la  $i$ -ésima componente contravariante del vector  $A$ .

Dado un vector del espacio-tiempo arbitrario  $A$  con componentes  $A^\mu$ , sabemos la manera de encontrar sus proyecciones en la hipersuperficie  $A_i = (\cdot e_i)$  en la base natural de  $T_p m$ . Ahora queremos encontrar una relación que nos exprese a esta misma proyección en componentes de la base  $\partial\mu$ . Para ello, vemos que de la igualdad

$$(A)^\mu = A^i X_i^\mu - (A \cdot n)\eta^\mu, \quad (\text{A.18})$$

se tiene que la componente  $\mu$ -ésima del vector proyectado sobre la hipersuperficie es

$$\begin{aligned} A^i X_i^\mu &= A^\mu + A^\nu \eta_\nu \eta^\mu, \\ &= A^\nu (\delta^\mu_\nu + \eta_\nu \eta^\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Por lo tanto, se ha encontrado el operador de proyección que manda a un vector del espacio-tiempo a uno sobre la hipersuperficie. A este operador se le denotará por

$$h^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + \eta^\mu \eta_\nu. \quad (\text{A.20})$$

El operador (A.20) satisface las siguientes relaciones

$$\eta^\nu h^\mu_\nu = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$h^\mu_\nu h^\nu_\rho = h^\mu_\rho. \quad (\text{A.22})$$

$$h^\mu_\mu = 3. \quad (\text{A.23})$$

## Apéndice B

### Derivadas covariantes inducidas

La derivada covariante, definida por la métrica  $g_{\mu\nu}$ , de un vector sobre  $m$ , en la dirección de otro vector que también esté en  $m$  no será en general un vector tangente a la hipersuperficie. La forma natural de definir una derivada covariante en  $m$  sería pedir que esta sea también un vector de  $T_p m$ [28]. En este punto es conveniente considerar el caso en que las primeras tres coordenadas  $x^\mu$  coinciden con las  $\xi^i$ , es decir, tenemos que  $x^i = \xi^i$ . A estas coordenadas de las denomina "coordenadas adaptadas". Nótese que en este caso, los vectores  $e_i$  coinciden con tres vectores de la base coordenada de  $T_p M$ , por lo que sus componentes son triviales:  $X_i^\mu = \delta_i^\mu$ . El tomar este sistema de coordenadas para  $m$  simplifica en general el análisis, ya que las expresiones obtenidas son más simples, sin perderse generalidad. Esto se debe a que siempre es posible tomar a las tres coordenadas intrínsecas de  $m$  como tres de las coordenadas del espacio-tiempo. En adelante todo el análisis que realicemos se hará con coordenadas adaptadas. Podemos considerar entonces la derivada covariante (de espacio-tiempo) de un vector sobre la hipersuperficie  $A = A^i e_i$ , en la dirección de los vectores base de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} {}^4\nabla_a A &\equiv {}^4\nabla_i A, \\ &= {}^4\nabla_i (e_j A^j), \\ &= e_j \frac{\partial A^j}{\partial X^i} + ({}^4\Gamma^k_{ji} e_\mu) A^j, \\ &= e_j \frac{\partial A^j}{\partial X^i} + ({}^4\Gamma^k_{ji} e_k + {}^4\Gamma^0_{ji} e_0) A^j. \end{aligned} \quad (B.1)$$

Como un caso particular, la derivada covariante de los vectores base está dada por

$$\begin{aligned} {}^4\nabla_i e_j &= {}^4\Gamma^\mu_{ji} e_\mu, \\ &= {}^4\Gamma^k_{ba} e_k + {}^4\Gamma^0_{ji} e_0. \end{aligned} \quad (B.2)$$

Tanto en la Ec. (B.1) como en la (B.2), existe un término fuera de la hipersuperficie, el cual es

$$({}^4\Gamma^0_{ji}A^j)(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n}), \quad (\text{B.3})$$

que, en general, no se anula. Podemos deshacernos de ese término proyectando el vector sobre la hipersuperficie, a manera de tener un vector en  $T_p m$ . De este modo obtenemos la derivada covariante intrínseca a la tres-geometría de la hipersuperficie. En adelante denotaremos al operador asociado a esta derivada por  ${}^3\nabla \equiv \nabla$ .

Consideremos nuevamente un vector sobre la hipersuperficie  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ . En términos de componentes  $A^i$  en  $T_p m$  la componente contravariante de la derivada covariante se expresa como

$$A^k_{|i} \equiv {}^3\nabla_i A^k = A^k_{,i} + {}^3\Gamma^k_{ji} A^j, \quad {}^3\Gamma^k_{ji} = {}^4\Gamma^k_{ji}. \quad (\text{B.4})$$

Si ahora consideramos a la  $k$ -ésima componente covariante de la derivada del vector  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $\mathbf{e}_i$ , esta será

$$({}^3\nabla_i \mathbf{A})_k = \mathbf{e}_k \cdot {}^3\nabla_i \mathbf{A}, \quad (\text{B.5})$$

que también se puede expresar como

$$\begin{aligned} A_{k|i} &\equiv \mathbf{e}_c \cdot \nabla_i \mathbf{A}, \\ &= A_{k,i} - {}^3\Gamma_{jki} A^j. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nótese que la forma que toman las expresiones de la derivada tanto en sus componentes covariantes como contravariantes es la misma que las derivadas en el espacio-tiempo. Esto se debe a que la derivada covariante en la hipersuperficie está dada por la conexión afín en la variedad  $m$ , definida a partir de la métrica en la forma usual [2].

$${}^3\Gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{ij,k} + \gamma_{ik,j} - \gamma_{jk,i}), \quad (\text{B.7})$$

y con la siguiente interpretación

$${}^3\Gamma_{ijk} \equiv \Gamma_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla_k \mathbf{e}_j. \quad (\text{B.8})$$

Para facilitar los cálculos nótemos que la derivada covariante puede igualmente expresarse (para  $A^\mu = A^j X_j^\mu$ ) en términos de componentes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A^j_{|k} &= (A^\mu_{,\nu} X_k^\nu)^j, \\ &= X_k^j (A^\mu_{,\nu} X_k^\nu), \\ &= X_k^j X_k^\nu A^\mu_{,\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

la cual puede ser de mayor utilidad práctica.



# Apéndice C

## La curvatura extrínseca

Definimos la curvatura extrínseca a la hipersuperficie como

$$K_{ij} \equiv -e_j \cdot {}^4\nabla_i n, \quad (C.1)$$

es decir, la componente "ij" de la curvatura extrínseca es igual a la proyección en la dirección  $j$  de la derivada covariante del vector normal en la dirección  $i$  (a excepción de un signo). Nótese que la curvatura extrínseca está bien definida sobre la hipersuperficie, ya que el vector  ${}^4\nabla_i n$  es un vector en  $T_p m$

$$0 = {}^4\nabla_i (n \cdot n), \quad (C.2)$$

de donde

$$0 = {}^4\nabla_i n \cdot n. \quad (C.3)$$

por lo que  $K_{ij}$  es un objeto geométrico de la variedad  $m$ . La noción de curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad en sí misma, sólo tiene significado cuando dicha variedad se encuentra encajada en una de dimensión mayor, ya que de la misma definición, la curvatura  $K_{ij}$  depende de la geometría de la variedad grande (a través de la derivada covariante de espacio-tiempo y del vector normal a la hipersuperficie).

Una interpretación geométrica de la curvatura extrínseca es que da una medida de qué tanto se "curva" la hipersuperficie respecto de la variedad  $m$ , o en otras palabras, nos dice qué tanto los vectores normales para dos puntos cercanos en  $m$  se alejan de ser paralelos (ver la Figura A1). Existe una forma de reescribir la curvatura que se sigue de la ortogonalidad de  $n$  respecto de la hipersuperficie, es decir,  $(e_a \cdot n) = 0$ . Se tiene entonces que

$$K_{ij} = n \cdot {}^4\nabla_i e_j. \quad (C.4)$$

La expresión (C.4) y (B.8) nos dicen cómo escribir el vector  ${}^4\nabla_i e_j$  en términos de sus componentes sobre la hipersuperficie y la dirección ortogonal

$${}^4\nabla_i e_j = -K_{ij}n + {}^3\Gamma_{ji}^c e_k. \quad (C.5)$$

Esta ecuación es conocida como "ecuación de Gauss".

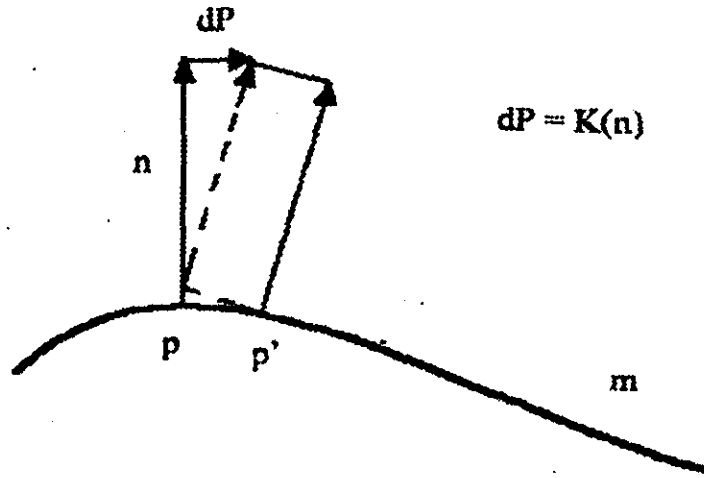


Figura A1. Representación esquemática de la curvatura extrínseca. La curvatura extrínseca nos da la medida de la diferencia entre los vectores normales en puntos cercanos sobre la variedad  $m$ .

El conocimiento de la derivada covariante de espacio-tiempo de los vectores base  $e_i$  nos permite escribir la derivada de un vector arbitrario sobre  $T_p m$

$${}^4\nabla_i A = A^j_{;i} e_j - K_{ij} A^j n. \quad (C.6)$$

La curvatura extrínseca en componentes toma la forma

$$K_{ij} = -X_i^\mu X_j^\nu \eta_{\mu,\nu}. \quad (C.7)$$

y en coordenadas adaptadas se escribe como

$$K_{ij} = -\eta_{ij}. \quad (C.8)$$

## Apéndice D

### Agujeros de gusano transitables

Las razones por las que los agujeros de gusano no eran considerados en serio para el problema de las "máquinas del tiempo" son las siguientes:

- 1) Einstein mismo reconoció que las fuerzas gravitacionales en el centro de un hoyo negro serían tan enormes que cualquier nave espacial sería destruida.
- 2) Los agujeros de gusano deben ser inestables. Pequeñas perturbaciones en los agujeros de gusano causarían que el puente de Einstein-Rosen se colapsara.
- 3) Se tendría que viajar más rápido que la luz a fin de penetrar el agujero de gusano y pasar al otro lado.
- 4) Los efectos cuánticos deberían ser tan grandes que los agujeros de gusano deberían cerrarse por ellos mismos.
- 5) El tiempo transcurre más lentamente en un agujero de gusano y llega a detenerse completamente en el centro.

Por todas estas razones las soluciones de agujeros de gusano no fueron tomadas en serio.

En el verano de 1985, Carl Sagan envió a Kip Thorne el manuscrito (antes de publicarlo) de su siguiente libro, una novela llamada *Contacto*, la cual explora seriamente las cuestiones científicas y políticas relacionadas con el posible contacto con civilizaciones extraterrestres. La pregunta de Sagan motivó la curiosidad intelectual de Thorne. De esta forma, Thorne y sus colegas (Morris y Yurtsever) abordaron el problema en una forma poco usual: Trabajaron al revés, i.e., empezaron con una idea general de lo que querían encontrar. Querían una solución a las ecuaciones de Einstein en las cuales un viajero del espacio no fuera destruido por los efectos intensos del campo gravitacional. Esto es, querían encontrar un agujero de gusano

estable, y que no se cerrara rápidamente a la mitad del viaje, y además que este se realizara en un tiempo medido en días y no en miles de millones de años. Una vez que decidieron lo que debería ser su agujero de gusano, entonces procedieron a calcular la cantidad de energía necesaria para crear tal agujero de gusano.

El problema de la energía se refiere a la gran cantidad de energía necesaria para crear un agujero de gusano transitible, la civilización actual no es capaz de generar tal energía del orden de  $10^{28}$  eV. Se espera que civilizaciones futuras con tecnologías avanzadas puedan crear una máquina del tiempo[69]. A continuación presentaremos con más detalle la descripción de las propiedades buscadas en la solución que representa un agujero de gusano transitible, tal como fue planteada por Morris y Thorne[70].

- 1) La métrica debería ser de simetría esférica y estacionaria. Esto con el fin de simplificar los cálculos.
- 2) La solución debe obedecer las ecuaciones de campo de Einstein en todas partes.
- 3) La solución de agujero de gusano debe tener una garganta que conecte asintóticamente regiones planas del espacio-tiempo, i.e., un diagrama ecuatorial de inmersión debe tener cualitativamente la forma de la Figura A2.

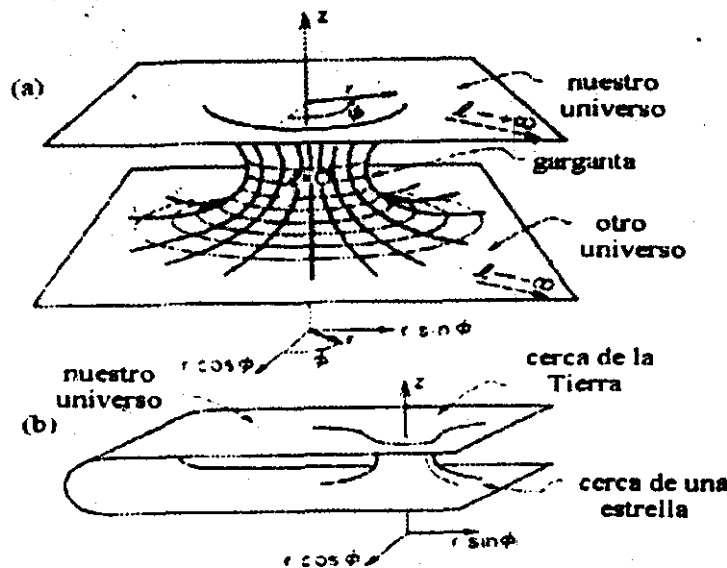


Figura A2. Representación esquemática de un agujero de gusano transitible.

- 4) No debe haber horizonte, ya que si estuviera presente un horizonte, no permitiría

el viaje de ida y vuelta a través del agujero de gusano.

5) Las fuerzas de marea gravitacional experimentadas por un viajero deben ser pequeñas.

6) El viajero debe ser capaz de cruzar el agujero de gusano en un tiempo propio finito y razonablemente pequeño, que fuera medido no solamente por él mismo, sino por otros observadores que lo esperaran del otro lado de agujero de gusano.

7) La materia y los campos que generan la curvatura del espacio tiempo del agujero de gusano deben tener un tensor de energía esfuerzo físicamente razonable.

8) La solución debe ser perturbativamente estable.

9) Debe ser posible la unión de agujeros de gusano.

La forma de la métrica del espacio-tiempo que satisface los requerimientos arriba señalados, y que fue propuesta por Morris y Thorne[70] es

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \quad (D.1)$$

en donde  $l$  denota la distancia propia radial. Puesto que la Ec. (D.1) representa un agujero de gusano transitable, independiente del tiempo, no rotante y de simetría esférica, i.e., la variedad de interés es un espacio-tiempo esféricamente simétrico estático que posee dos regiones asintóticamente planas, y se tienen las siguientes observaciones:

◇ La coordenada  $l$  cubre el rango entero  $(-\infty, +\infty)$ .

◇ La suposición de que no hay horizontes de eventos implica que  $\phi(l)$  debe ser finita en cualquier parte.

◇ Se supone que las dos regiones asintóticamente planas ocurren en  $l \approx \pm\infty$ .

◇ Para que la geometría espacial tienda a un límite asintóticamente plano apropiado, se debe imponer

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{r(l)}{l} = 1. \quad (D.2)$$

Esto es,  $r(l) = |l| + O(1)$ .

◇ Para que la geometría del espacio-tiempo tienda a un límite asintóticamente plano apropiado, los siguientes límites

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \phi(l) = \phi_{\pm}, \quad (\text{D.3})$$

deben ser finitos.

◇ El radio de la garganta del agujero de gusano está definido por

$$r_0 = \min\{r(l)\}. \quad (\text{D.4})$$

Por simplicidad se debe suponer que sólo hay un mínimo y que es un mínimo aislado.

◇ Sin pérdida de generalidad, se puede tomar que esta garganta ocurre en  $l = 0$ .

◇ Las componentes de la métrica deberían ser al menos dos veces diferenciables como funciones de  $l$ .

◇ Por simplicidad se supone simetría bajo intercambio de las dos regiones asintóticamente planas,  $l \rightarrow -l$ , esto es,  $r(l) = r(-l)$  y  $\phi(l) = \phi(-l)$ .

Reparametrizando la dependencia funcional de la métrica (D.1) en las coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \varphi)$ , entonces toma la forma

$$ds^2 = -e^{2\phi_{\pm}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (\text{D.5})$$

◇ Ahora se requieren dos parches de coordenadas, cada uno cubriendo el rango  $[r_0, +\infty)$ . Cada parche cubre un universo, y los dos parches se unen en  $r_0$ , la garganta del agujero de gusano.

◇ Por conveniencia, se pide que la coordenada  $t$  sea continua a través de la garganta, tal que  $\phi_+(r_0) = \phi_-(r_0)$ .

◇ las dos funciones arbitrarias  $\phi(l)$  y  $r(l)$  han sido cambiadas por las funciones arbitrarias  $\phi_{\pm}(r)$  y  $b_{\pm}(r)$ .

◇ A  $\phi(r)$  se le llama función de corrimiento al rojo, mientras que  $b(r)$  se la llama función de forma.

◇ La distancia radial propia esta relacionada con la coordenada  $r$  por

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - b_{\pm}(r')/r'}}. \quad (\text{D.6})$$

◇ Para que la geometría espacial tienda a un límite apropiado asintóticamente plano de debe requerir que los límites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b_{\pm}(r) = b_{\pm}, \quad (\text{D.7})$$

deben ser finitos. Por comparación con la métrica de Schwarzschild esto implica que la masa del agujero de gusano, como vista desde el infinito espacial, está dada por  $b_{\pm} = 2GM_{\pm}$ . La masa del agujero de gusano es distinta dependiendo en qué universo resida el observador. Dicho de otra manera, las dos bocas del mismo agujero de gusano en general pueden tener masas distintas.

◇ Para que la geometría del espacio-tiempo tienda al límite plano apropiado los límites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \phi_{\pm}, \quad (\text{D.8})$$

deben existir y ser finitos. Esto no es un requerimiento *a priori* de que  $\phi_+(\infty) = \phi_-(\infty)$ . Esto implica que el tiempo puede correr a diferentes ritmos en los dos universos.

◇ Puesto que  $dr/dl = 0$  en la garganta del agujero de gusano ( la garganta fue definida por la localización del mínimo de  $r(i)$  ), en la garganta debemos tener  $dl/dr \rightarrow \infty$ . Esto implica  $b_{\pm}(r_0) = r_0$ . Lejos de la garganta del agujero de gusano debemos tener  $b_{\pm}(r) < r$ .

◇ Lejos de la garganta del agujero de gusano, las componentes de la métrica deberían ser al menos dos veces diferenciables como función de  $r$ .

◇ Por simplicidad algunas veces se desea suponer simetría bajo intercambio de regiones asintóticamente planas.  $\pm \leftrightarrow \mp$ . Esto es,  $b_+(r) = b_-(r)$  y  $\phi_+(r) = \phi_-(r)$ . Este requerimiento no es esencial para la definición de un agujero de gusano transitable.

El comportamiento de las funciones de corrimiento al rojo y de forma en la garganta misma es particularmente informativa. Nótese que

$$\frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}}. \quad (\text{D.9})$$

Ahora

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{d}{dl} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{dr}{dl} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{dr}{dl} \right)^2 \right]. \quad (\text{D.10})$$

Esto produce

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{1}{2r} \left( \frac{b}{r} - b' \right). \quad (\text{D.11})$$

Puesto que  $r(l)$  es un mínimo en la garganta y crece cuando uno se mueve lejos de la garganta, entonces se deduce

$$\exists r_* \mid \forall r \in (r_0, r_*), \quad \frac{d^2 r}{dl^2} > 0. \quad (\text{D.12})$$

En principio  $r_*$  será tan grande como  $+\infty$ . Sin embargo, típicamente el punto  $r_*$  estará "cerca" de la garganta  $r_0$ . Se deduce que

$$\exists r_* \mid \forall r \in (r_0, r_*), \quad b'(r) < \frac{b(r)}{r}. \quad (\text{D.13})$$

En la garganta misma,  $b(r_0) = r_0$ , así que la Ec. (D.10) se simplifica a

$$\left. \frac{d^2 r}{dl^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_+(r_0)] = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_-(r_0)]. \quad (\text{D.14})$$

Esto implica que en la garganta

$$b'_+(r_0) = b'_-(r_0), \quad (\text{D.15})$$

y puesto que  $r(l)$  es un mínimo en la garganta, también se sabe que

$$\left. \frac{d^2 r}{dl^2} \right|_{r_0} \geq 0, \quad (\text{D.16})$$

de donde se obtiene la desigualdad

$$b'_\pm(r_0) \leq 1. \quad (\text{D.17})$$

Para la función de corrimiento al rojo, se tiene que

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{dr}{dl} \left( \frac{d\phi}{dr} \right) = \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \phi', \quad (\text{D.18})$$

también

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dl^2} &= \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \frac{d}{dr} \left( \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \phi' \right) \\ &= \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \phi'' + \frac{1}{2r} \left( \frac{b}{r} - b' \right) \phi', \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

y evaluando esto en la garganta

$$\left. \frac{d^2 \phi}{dl^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_+(r_0)] \phi'_+(r_0) = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_-(r_0)] \phi', \quad (\text{D.20})$$

lo que implica



$$\phi'_+(\tau_0) = \phi'_-(\tau_0). \quad (\text{D.21})$$

• Curvatura

A continuación se mostrará el cálculo de los tensores de Riemann, Ricci y Einstein asociados a la métrica de agujero de gusano (D.5), sólo que a diferencia de los resultados presentados en el trabajo de Morris y Thorne[70], no se incluye el subíndice  $\pm$  que se usa para especificar en qué lado del agujero de gusano se reside. Para el tensor de Riemann tenemos

$$R^i{}_{rir} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\phi'' - (\phi')^2\right] + \frac{1}{2r^2}(b'r - b)\phi', \quad (\text{D.22})$$

$$R^i{}_{\theta i \theta} = R^i{}_{\varphi i \varphi} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \quad (\text{D.23})$$

$$R^r{}_{\theta r \theta} = R^r{}_{\varphi r \varphi} = \frac{1}{2r^3}(b'r - b), \quad (\text{D.24})$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi \theta \varphi} = \frac{b}{r^3}. \quad (\text{D.25})$$

Todas las otras componentes del tensor de Riemann son cero. Las componentes del tensor de Einstein distintas de cero son

$$G_{ii} = \frac{b'}{r^2}, \quad (\text{D.26})$$

$$G_{rr} = -\frac{b'}{r^3} + 2\left[1 - \frac{b}{r}\right] \frac{\phi'}{r}, \quad (\text{D.27})$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \left[1 - \frac{b}{r}\right] \left[\phi'' + \phi' \left(\phi' + \frac{1}{r}\right)\right] - \frac{1}{2r^2} [b'r - b] \left(\phi' + \frac{1}{r}\right). \quad (\text{D.28})$$

Evaluando el tensor de Riemann en la garganta misma, se tiene

$$R^i{}_{rir}|_{r_0} = -\frac{1}{2r_0} \left[1 - b'(r_0)\right] \phi'(r_0), \quad (\text{D.29})$$

$$R^r{}_{\theta r \theta}|_{r_0} = R^r{}_{\varphi r \varphi}|_{r_0} = -\frac{1}{2r_0^2} \left[1 - b'(r_0)\right], \quad (\text{D.30})$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi \theta \varphi}|_{r_0} = \frac{1}{r_0^3}. \quad (\text{D.31})$$

Todas las otras componentes del tensor de Riemann, además de aquellas relacionadas con las de arriba por simetría, son cero. Nótese que al aplicar las condiciones de

continuidad a  $b_{\pm}(r)$  y  $\phi_{\pm}(r)$  en la garganta, no se han distinguido las  $b_{\pm}$  y  $\phi_{\pm}$  en las fórmulas de arriba. Las componentes del tensor de Riemann son vistas como continuas a través de la garganta. El resultado análogo para el tensor de Einstein es

$$G_{ii}|_{r_0} = \frac{b'(r_0)}{r_0^2}, \quad (D.32)$$

$$G_{rr}|_{r_0} = -\frac{1}{r_0^2}, \quad (D.33)$$

$$G_{\theta\theta}|_{r_0} = G_{\phi\phi}|_{r_0} = \frac{1 - b'(r_0)}{2r_0} \left( \phi' + \frac{1}{r_0} \right). \quad (D.34)$$

#### • Ecuaciones de Einstein

Las componentes del tensor de energía distintas de cero son

$$T_{ii} = \rho, \quad (D.35)$$

$$T_{rr} = -\tau, \quad (D.36)$$

$$T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p, \quad (D.37)$$

en donde  $\rho$  denota densidad de energía,  $\tau$  es la tensión radial (menos la presión radial), y  $p$  denota la presión transversal. Todas las otras componentes del tensor de energía esfuerzo son igual a cero por la simetría esférica supuesta. Las ecuaciones de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , conducen a

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G r^2}, \quad (D.38)$$

$$\tau = \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r} \right], \quad (D.39)$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left\{ \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left[ \phi'' + \phi' \left( \phi' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{1}{2r^2} (b'r - b) \left( \phi' + \frac{1}{r} \right) \right\}. \quad (D.40)$$

Un arreglo más conveniente es [70]

$$b' = 8\pi G \rho r^2, \quad (D.41)$$

$$\phi' = \frac{b - 8\pi G \tau r^3}{2r^2(1 - b/r)}, \quad (D.42)$$

$$\tau' = (\rho - \tau)\phi' - 2(p + \tau)/r. \quad (D.43)$$

La primera ecuación de Einstein se puede integrar fácilmente, así tenemos

$$b(r) = b(r_0) + \int_{r_0}^r 8\pi G \rho(r') r'^2 dr' = 2G m(r), \quad (D.44)$$

en donde hemos definido

$$m(r) \equiv (r_0/2G) + \int_{r_0}^r 4\pi \rho r^2 dr, \quad (D.45)$$

como la masa efectiva interior de radio  $r$ . La función de forma tiene así una interpretación directa en términos de la distribución de masas dentro del agujero de gusano. Cuando nos movemos al infinito espacial tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \frac{r_0}{2G} + \int_{r_0}^{\infty} 4\pi \rho(r) r^2 dr = M. \quad (D.46)$$

En la garganta misma

$$\rho|_{r_0} = \frac{b'(r_0)}{8\pi G r_0^2}, \quad (D.47)$$

$$\tau|_{r_0} = \frac{1}{8\pi G r_0^2}, \quad (D.48)$$

$$p|_{r_0} = \frac{1 - b'(r_0)}{16\pi G r_0} \left( \phi' + \frac{1}{r_0} \right). \quad (D.49)$$

En vista de la desigualdad (D.13), la función de masa satisface

$$\exists r_* \mid \forall r \in (r_0, r_*), \quad \rho(r) < \frac{m(r)}{4\pi r^3}. \quad (D.50)$$

y en la garganta misma

$$\rho(r_0) \leq \frac{1}{8\pi G r_0^2}. \quad (D.51)$$

Las primeras dos ecuaciones de Einstein se pueden combinar para dar

$$8\pi G(\rho - \tau) = \frac{1}{r^2} \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r}. \quad (D.52)$$

$$= -\frac{1}{r} \left[ \left( 1 - \frac{b}{r} \right)' - \frac{2\phi'}{r} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \right], \quad (D.53)$$

$$= -\frac{e^{2\phi}}{r} \left[ e^{-2\phi} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \right]'. \quad (D.54)$$

Pero sabemos que

$$e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Big|_{r_0} = 0, \quad (\text{D.55})$$

mientras que

$$\forall r > r_0, \quad e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) > 0. \quad (\text{D.56})$$

Por lo tanto

$$\exists \bar{r}_* \mid \forall r \in (r_0, \bar{r}_*), \quad \left[ e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right]' > 0. \quad (\text{D.57})$$

En principio  $\bar{r}_*$  podría ser tan grande como  $+\infty$ . Sin embargo, típicamente el punto  $\bar{r}_*$  estará "cerca" a la garganta  $r_0$ . Se deduce que

$$\exists \bar{r}_* \mid \forall r \in (r_0, \bar{r}_*), \quad (\rho - \tau) < 0. \quad (\text{D.58})$$

Trabajanado en la garganta misma resulta en una desigualdad débil. De

$$\left[ e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right]' \Big|_{r_0} \geq 0, \quad (\text{D.59})$$

se deduce que

$$[\rho(r_0) - \tau(r_0)] \leq 0. \quad (\text{D.60})$$

Estas desigualdades son el punto central para la discusión de las condiciones de la energía.

Por simplicidad, lo anterior se ha expresado en términos de un inter-universo de agujeros de gusano. Sin embargo, ya que ambas bocas del agujero de gusano residen en regiones asintóticamente planas del espacio tiempo, se puede (con una distorsión mínima de las bocas) rearrreglar las dos bocas para residir en una región asintóticamente plana. Esto podría entonces producir un intra-universo de agujeros de gusano transitables. Los intra-universos de agujeros de gusano conducen a niveles adicionales de complicación:

- 1) Si el tiempo corre a ritmos distintos en las dos regiones asintóticamente planas del inter-universo de agujeros de gusano, el intra-universo de agujeros de gusano asociado entonces tiene un campo gravitacional no conservativo.
- 2) Cuando se unen las dos regiones asintóticamente planas, siempre se podría añadir una torcedura, y por medio de ella generar un espacio-tiempo no orientable. Los espacio-tiempos no orientables son perfectamente aceptables en el nivel clásico, pero son problemáticos en el nivel cuántico[56].

## Apéndice E

# Cálculo de integrales de funciones Gaussianas

Empezaremos por calcular la integral básica

$$I_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)x^2} dx. \quad (\text{E.1})$$

Para realizar este cálculo, se toma el cuadrado de esta expresión escribiéndola en la forma del producto

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)y^2} dy, \quad (\text{E.2})$$

que es equivalente a la integral doble

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)(x^2+y^2)} dx dy. \quad (\text{E.3})$$

Si se consideran  $x$  y  $y$  como coordenadas rectangulares en un plano, la integral doble se calcula fácilmente transformando a coordenadas polares  $r$  y  $\phi$ . Se obtiene inmediatamente que,

$$I_0^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r e^{-(a+ib)r^2} dr = \frac{\pi}{a+ib}, \quad (\text{E.4})$$

y por lo tanto,

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{a+ib}}. \quad (\text{E.5})$$

En el límite de  $a \rightarrow 0$ ,

$$I_0 = \sqrt{\pi/ib} = \sqrt{\pi/b} e^{-i\pi/4}. \quad (\text{E.6})$$

Este resultado se puede generalizar considerando la integral

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-(a+ib)x^2} dx, \quad (\text{E.7})$$

para  $n$  entero. Debido a que la integral es impar se tiene

$$I_{2m+1} = 0, \quad (\text{E.8})$$

y además

$$I_{2m} = (-1)^m \left( \frac{d}{da} \right)^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+ib)x^2} dx. \quad (\text{E.9})$$

$$= (-1)^m \frac{d^m I_0}{da^m}. \quad (\text{E.10})$$

Entonces,

$$I_{2m} = (-1)^m \left( \frac{d}{da} \right)^m \sqrt{\frac{\pi}{a+ib}}. \quad (\text{E.11})$$

Consideremos ahora la integral Gaussiana generalizada de la forma

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx, \quad (\text{E.12})$$

en donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser complejas, pero donde la parte real de  $\alpha$  tiene que ser mayor que cero. Para calcular la integral se completa el trinomio cuadrado perfecto en el exponente,

$$\alpha x^2 + \beta x = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \beta^2/4\alpha. \quad (\text{E.13})$$

Sustituyendo  $x + \beta/2\alpha$  por una nueva variable, por ejemplo  $y$ , la integral se reduce a la forma considerada al principio, y se obtiene inmediatamente que,

$$J_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/4\alpha}. \quad (\text{E.14})$$

Este resultado también es válido para  $\alpha$  imaginaria pura, si se considera como un límite. Si  $\alpha = a + ib$ ,  $a > 0$ , el límite se obtiene cuando  $a \rightarrow 0$ .

Para las integrales del tipo

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx, \quad (\text{E.15})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} J_{2m+1} &= (-1)^{2m+1} \frac{\partial^{2m+1} J_0}{\partial \beta^{2m+1}} \\ &= (-1)^{2m+1} \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{2m+1} \left( \sqrt{\pi/\alpha} e^{\beta^2/4\alpha} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

y

$$\begin{aligned} J_{2m} &= (-1)^m \frac{\partial^m J_0}{\partial \alpha^m}, \\ &= (-1)^m \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^m (\sqrt{\pi/\alpha} e^{\beta^2/4\alpha}). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Por ejemplo, tenemos los siguientes resultados útiles

$$J_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} J_0 \quad \text{y} \quad J_2 = \left[ \frac{1}{2\alpha} + \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right] J_0. \quad (\text{E.18})$$

# Bibliografía

- [1] H. Everett, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454 (1957).
- [2] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [3] M. P. Ryan, *Hamiltonian cosmology* (Springer, Berlin, 1972).
- [4] J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 463 (1957); *Geometrodynamics*, (Academic, New York, 1962), in *Batelles Rencontres*, eds. C. De Witt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968); *Superspace en Analytic Methods in Mathematical Physics*, ed. Gilbert, Newton (1970).
- [5] S. Nojiri and O. Obregón, *Phys. Lett. B* **449**, 173 (1999); S. Nojiri, O. Obregón and S. D. Odintsov, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 1309 (1999); S. Nojiri, O. Obregón, S. D. Odintsov and K. E. Osentrin, *Phys. Lett. B* **458**, 19 (1999).
- [6] C. W. Misner, *Phys. Rev.* **186**, 1319 (1969); *idem* **186**, 1328 (1969); *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1071 (1969).
- [7] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983); *idem* **D 29**, 2730 (1984).
- [8] S. W. Hawking, "The boundary conditions of the universe", in *Astrophysical Cosmology*, eds. H. A. Brück, G. V. Coyne and M. S. Longair (Pontificia Academia Scientiarum, Vatican City, 1982).
- [9] S. W. Hawking, *Nucl. Phys. B* **239**, 257 (1984).
- [10] A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* **117**, 25 (1982); *Phys. Rev. D* **27**, 2848 (1983); *idem* **D 27**, 2848 (1983); *idem* **D 30**, 509 (1984); *idem* **D 32**, 2511 (1985); *idem* **D 33**, 3560 (1986); *idem* **D 37**, 888 (1988); *idem* **D 39**, 1116 (1989).
- [11] A. D. Linde, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**, 369 (1984); *Nuovo Cimento* **39**, 401 (1984).
- [12] J.J. Halliwell, "Introductory lectures on quantum cosmology", in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, Proceedings of the Jerusalem Winter School on Theoretical Physics, Jerusalem, Israel, 1990, edited by S. Coleman, J. Hartle, T. Piran and S. Weinberg (World Scientific, Singapore, 1991).



- [13] S. W. Hawking and D. N. Page, Nucl. Phys. B 264, 185 (1988), *idem* B 298, 789 (1988).
- [14] L. P. Grishchuk and L. V. Rozhansky, Phys. Lett. B 208, 369 (1988); *idem* B 234, 9 (1990).
- [15] V. A. Rubakov, Phys. Lett. B 214, 503 (1988); A. Hosoya and M. Morikawa, Phys. Rev. D 39, 1123 (1989); M. McGuigan, Phys. Rev. D 38, 3031 (1988) D 39, 2229 (1989); D 41, 418 (1990).
- [16] T. Horiguchi, Phys. Rev. D 48, 5764 (1993); S. Abe, *idem* D 47, 718 (1993).
- [17] S. W. Hawking and D. N. Page, Phys. Rev. D 42, 2655 (1990).
- [18] J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [19] C. Mathiazhagan and V. B. Johri, Class. Quantum Grav. 1, L29 (1984); D. La and P. J. Steinhardt Phys. Rev. Lett. 62, 376 (1989).
- [20] P. G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. 1, 25 (1968).
- [21] R. V. Wagoner, Phys. Rev. D 1, 3209 (1970).
- [22] R. M. Wald, Phys. Rev. D 28, 2118 (1983).
- [23] M. A. H. MacCallum in *General Relativity: an Einstein Centenary Survey* ed. S. W. Hawking and W. Israel. (Cambridge: Cambridge University Press, 1969).
- [24] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner. *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten. (Wiley, New York, 1962).
- [25] J. B. Hartle, in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, eds. S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piram and S. Weinberg. (World Scientific, Singapore, 1991) pág. 65.
- [26] A. Strominger, in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, eds. S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piram and S. Weinberg. (World Scientific, Singapore, 1991) pág. 269.
- [27] Mielke E. W., Gen. Rel. Grav. 8, 175 (1977) [reprinted in *Knots and Applications*, L. H. Kauffman, ed. (World Scientific, Singapore 1995), p. 229-250].
- [28] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler. *Gravitation*. (W. H. Freeman and Co., New York, 1973).
- [29] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 246, 326 (1958); *idem* 333 (1959); Phys. Rev. 114, 924 (1959).

- [30] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [31] S. W. Hawking in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey* (Cambridge University Press, 1979).
- [32] B. DeWitt *Physics Today* **23**, No. 9, (1970); in *Gravitation an Introduction to Current Reseach*, ed. by L. Witten, (John Wiley, New York, 1962); H. D. Zeh, *Found. Phys.* **1**, 69 1971; *Phys. Lett. A* **116**, 9 1986; *idem* **126**, 311 (1988); W. Zurek, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981); *idem* **26**, 1862 (1982).
- [33] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13**, 2188 (1976).
- [34] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977).
- [35] G. W. Gibbons and M. J. Perry, *Proc. R. Soc. Lond.* **A358**, 467 (1978).
- [36] T. Eguchi and A. J. Hanson, *Phys. Lett. B* **74**, 249 (1978).
- [37] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* **78**, 430 (1978); *Commun. Math. Phys.* **66**, 291 (1979).
- [38] G. W. Gibbons and C. N. Pope, *Commun. Math. Phys.* **66**, 267 (1979).
- [39] G. W. Gibbons in *Fields and Geometry*, ed. A. Jadczyk, (World Scientific, Singapore, 1986).
- [40] D. Garfinkle and A. Strominger, *Phys. Lett. B* **256**, 146 (1991).
- [41] H. F. Dowker, J. P. Gauntlett, S. B. Giddings and G. T. Horowitz, *Phys. Rev. D* **50**, 2662 (1994).
- [42] G. W. Gibbons, S. W. Hawking and M. J. Perry, *Nucl. Phys. B* **138**, 141 (1978).
- [43] J. J. Halliwell and J. Louko, *Phys. Rev. D* **39**, 2206 (1989); *idem* **40**, 1868 (1989); *idem* **42**, 3997 (1990).
- [44] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **28**, 2960 (1983).
- [45] S. W. Hawking, *Nucl. Phys. B* **239**, 257 (1984).
- [46] W. M. Suen and K. Young, *Phys. Rev. D* **39**, 2201 (1989).
- [47] H. D. Conradi and H. D. Zeh, *Phys. Lett. A* **154**, 321 (1991); H. D. Conradi, *Phys. Rev. D* **46**, 612 (1992); *Clas. Quantum Grav.* **12**, 2423 (1995).
- [48] G. W. Lyons, *Phys. Rev. D* **46**, 1546 (1992).
- [49] J. J. Halliwell and J. B. Hartle, *Phys. Rev. D* **41**, 1815 (1990).
- [50] K. V. Kuchař, *J. Math. Phys.* **22**, 2640 (1981).

- [51] A. Csordas and R. Graham, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4129 (1995).
- [52] A. Macías, E. W. Mielke and J. Socorro, *Int. J. Mod. Phys. D* **7**, 701 (1998); A. Macías, O. Obregón and M. P. Ryan Jr., *Class. Quantum Grav.* **4**, 1477 (1987); V. I. Tkach, J. J. Rosales and O. Obregón, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2349 (1996); J. Socorro and V. I. Tkach, *Class. Quantum Grav.*, **14**, 339 (1997); O. Obregón and J. Socorro, *Int. J. Theo. Phys.* **35**, 1381 (1996); P. D. D'Eath, S. W. Hawking and O. Obregón, *Phys. Lett. B* **300**, 44 (1993).
- [53] A. Macías, *Gen. Rel. Grav.* **31**, 653 (1999); A. Macías, E. W. Mielke and J. Socorro, *Phys. Rev. D* **57**, 1027 (1998).
- [54] J. Louko and T. Vapaschati, *Phys. Lett. B* **223** 21 (1989).
- [55] A. Einstein and N. Rosen, *The particle problem in the general theory of relativity*, *Phys. Rev.* **48**, 73 (1935).
- [56] M. Visser, *Lorentzian Wormholes*, (American Institute of Physics, AIP Press, New York, 1995).
- [57] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **97**, 511 (1955).
- [58] M. Visser, *Phys. Rev. D* **41**, 1116 (1990).
- [59] S. S. Gousheh and H. R. Sepangi. *Wave packets and initial conditions in quantum cosmology*, gr-qc/0006094.
- [60] C. Kiefer, *Nucl. Phys.* **B341**, 273 (1990); *Phys. Rev. D* **38**, 1761 (1988); *Phys. Lett. B* **225**, 227 (1989).
- [61] S. Coleman, *Nucl. Phys.* **B310**, 643 (1988).
- [62] K. Ghoroka and M. Tanaka, *Phys. Rev. D* **43**, 410 (1991).
- [63] W. Fischler and L. Susskind, *Phys. Lett. B* **217**, 48 (1989).
- [64] S. Coleman and K. Lee, *Phys. Lett. B* **221**, 242 (1989).
- [65] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **325**, 619 (1989).
- [66] W. Fischler, I. Klebanov, J. Polchinski, and L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **327**, 157 (1989).
- [67] M. Cline, *Phys. Lett. B* **224**, 53 (1989); S. Coleman and S. Hughes, *idem* **309**, D. Garfinkle and A. Strominger, *idem* **256**, 146 (1991); 246 (1993); S. Coleman and K. Lee, *Nucl. Phys. B*, **329**, 387 (1990); I. Klebanov, L. Susskind, and T. Banks, *idem* **317**, 665 (1989).
- [68] W. D. Unruh, *Phys. Rev. D* **40**, 1053 (1989).

- [69] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yutsever, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446 (1988).
- [70] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Am. J. Phys.* **56**, 395 (1988).
- [71] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Classical physics as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space*, *Ann. Phys.* **2**, 525 (1957).
- [72] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **37**, 904 (1988).
- [73] S. Giddings and A. Strominger, *Nucl. Phys.* **B307**, 854 (1988); *idem* **B321**, 481 (1988); J. Preskill, *Nucl. Phys.* **B323**, 141 (1989); I. Klebanov, L. Susskind and T. Banks, *Nucl. Phys.* **B317**, 665, (1989).
- [74] M. Kaku, *Hiperspace*, Oxford University Press, Great Britain (1995).
- [75] B. S. DeWitt, *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*, ed. B.S. DeWitt and N. Graham (Princeton University Press, Princeton, 1973).
- [76] F. J. Tipler, *Phys. Lett. A* **103**, 188 (1984).
- [77] L. De La Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*, 2da edición UNAM - Fondo de Cultura Económica, México (1991).
- [78] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [79] D. A. Wiltshire, *Gen. Rel. Grav.* **32**, 515 (2000); gr-qc/9905090.
- [80] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55 (Washington, DC ,US Govt. Printing Office, 1995).
- [81] C. Brans and R. H. Dicke. *Phys. Rev.* **124**. No. 3. 925 (1961).
- [82] L. O. Pimentel and J. Stein-Schabes. *Phys. Lett. B* **216** No. 12, 27 (1989).
- [83] T. Horiguchi. *Mod. Phys. Lett. A*. **8**. No. 9 777 (1993).
- [84] L. O. Pimentel and C. Mora. *Phys. Lett. A* **280**. 191 (2001).
- [85] J. D. Barrow. *Phys. Rev. D* **47**. 5329 (1993).
- [86] J. D. Barrow and P. Parsons, *Phys. Rev. D* **55**, 1906 (1997).
- [87] B. M. Barker. *Astrophys. J.*, **219**. 5 (1978); C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. (Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1980).
- [88] Y. M. Cho. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3133 (1992).

- [89] Bateman Manuscript Project, A. Erdélyi *Editor Tables of integral Transforms*, (McGraw Hill Book company, Inc., 1954).
- [90] S. Coleman, Nucl. Phys. B 307, 864 (1988).
- [91] L. O. Pimentel and C. Mora, Mod. Phys. Lett. A, 15, 333 (2000).
- [92] L. J. Garay, Phys. Rev. D 48, No. 4, 48 (1993).
- [93] X. G. Xiao and L. Liu, Int. J. Theor. Phys. 35, No. 7, 1503 (1996).
- [94] F. S. Accetta, A. Chodos And B. Shao, Nucl. Phys. B 333, 221 (1990).
- [95] H.-J. Pohle, Phys. Lett. B 261, 257 (1991).
- [96] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge University Press) 1988.
- [97] C. Mathiazhagan and V. B. Johri, Class. Quantum Grav. 1, L29 (1984).
- [98] J. D. Barrow, Phys. Rev. D47, 5329 (1993), D Lorenz-Petzold *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [99] C. Santos and R. Gregory. *Cosmology in Brans-Dicke theory with a scalar potential*. gr-qc/9611065.
- [100] L. O. Pimentel and L. M. Díaz-Rivera, Int. J. of Mod. Phys. A, 14, 1523 (1999).
- [101] G. W. Gibbons and L. P. Grinshchuk. Nucl. Phys. B 313, 736 (1989).
- [102] S. W. Hawking and D. P. Page. Nucl. Phys. B298, 789 (1988).
- [103] J. B. Hartle. "The quantum mechanics of cosmology" in *Quantum Cosmology and Baby Universes*. Proceedings of the Jerusalem Winter School on Theoretical Physics, Jerusalem, Israel, 1990, edited by Coleman S, Hartle J B, Piram T and Weinberg S (World Scientific, Singapore, 1991).
- [104] D. L. Wiltshire. *An Introduction to Quantum Cosmology*. gr-qc/0101003.
- [105] C. M. Bender and S.A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. (McGraw-Hill Book company, Inc., 1978).
- [106] G. A. Mena Marugán. Class. Quantum Grav. 11, 2205 (1994).
- [107] X.-G. Xiao, B. J. Carr and L. Liu. Gen. Rel. Grav. 28, 1377 (1996).
- [108] S. Abe, Phys. Rev. D 47, 718 (1993).

- [109] M. P. Ryan and L. C. Shipley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton: Princeton University Press, 1975).
- [110] L. Bianchi, *Mem. de Mat. Soc. Ital. Sci.*, **11**, 267 (1897).
- [111] L. O. Pimentel *Bianchi I Quantum cosmology in the Bergmann-Wagoner theory*, gr-qc/0009046.
- [112] A. Banerjee, S. B. Duttachoudhury and N. Banerjee, *Phys. Rev. D* **32**, 3096 (1985).
- [113] G. F. R. Ellis and M. A. H. MacCallum, *Commun. Math. Phys.* **12**, 108 (1969).
- [114] M. Spivak *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Perish Inc. Boston, 1970).