



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00051

Matrícula: 2151800790

DETECCIÓN DE SEÑALES DÉBILES  
EN UN BAÑO TÉRMICO CON  
MEMORIA EN PRESENCIA DE UN  
CAMPO MAGNÉTICO

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 30 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. EMILIO CORTES REYNA  
DR. JOSE MIGUEL MENDEZ ALCARAZ  
DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

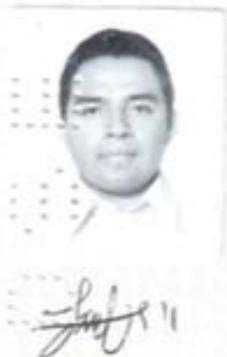
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: FERNANDO GARCIA APOLONIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

A P R O B A R

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



FERNANDO GARCIA APOLONIO  
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. EMILIO CORTES REYNA

VOCAL

DR. JOSE MIGUEL MENDEZ ALCARAZ

SECRETARIO

DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO

UNIDAD IZTAPALAPA ·  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**Detección de señales débiles en un baño  
térmico con memoria en presencia de  
un campo magnético**

Tesis que presenta:

**Fernando García Apolonio**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Física)**

Asesor: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Presidente: Dr. Emilio Cortés Reyna

Secretario: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Vocal: Dr. José Miguel Méndez Alcaraz



Emilio Cortés Reyna  
José Inés Jiménez Aquino  
J. Méndez

Ciudad de México, Mayo 2017

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**Detección de señales débiles en un baño  
térmico con memoria en presencia de  
un campo magnético**

Tesis que presenta:

**Fernando García Apolonio**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Física)**

Asesor: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Presidente: Dr. Emilio Cortés Reyna

Secretario: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Vocal: Dr. José Miguel Méndez Alcaraz

Ciudad de México, Mayo 2017

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	III
Resumen . . . . .	V
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Estadística de los tiempos de paso y el sistema láser</b>	<b>13</b>
2.1. Análisis Cualitativo de la QDT . . . . .	13
2.2. El sistema láser . . . . .	15
2.2.1. Estadística de los tiempos de paso . . . . .	15
2.2.2. Un criterio de detección de señales ópticas débiles . . . . .	20
2.3. Detección de señales ópticas débiles y los NLRT . . . . .	21
2.3.1. El Receptor de Salida . . . . .	25
<b>3. Detección de señales débiles en un campo magnético</b>	<b>27</b>
3.1. Estadística de los tiempos de paso . . . . .	29
3.1.1. Un criterio de detección de señales débiles . . . . .	31
3.2. Detección de señales débiles y los NLRT . . . . .	32
3.2.1. El Receptor de Salida . . . . .	34
<b>4. Detección de señales débiles en un baño térmico con memoria</b>	<b>37</b>
4.1. Ecuación Generalizada de Langevin . . . . .	37
4.1.1. Un criterio de detección de señales débiles . . . . .	39
4.1.2. El receptor de salida . . . . .	42

5. Conclusiones y perspectivas

47

# Agradecimientos

La presente tesis no pudo haber sido realizada sin el apoyo de las personas a mi alrededor que contribuyeron directa o indirectamente en la realización de la misma.

En primer lugar quiero agradecer a mis padres el Sr. Victor Manuel García Quintero y la Sra. Andrea Apolonio Cenil, quienes desde niño siempre me alentaron, apoyaron y animaron a continuar con mis estudios, además de siempre contar con su apoyo en todos los aspectos de mi vida. Agradezco a mi hermano Gustavo Adolfo García Apolonio, quien ha estado conmigo apoyándome cuando más lo he necesitado. Gracias a todos y cada uno de ustedes, siempre serán mi apoyo, mi sustento, mi ejemplo a seguir. Los amo y siempre los tendré presentes.

Mi más profundo agradecimiento a mi asesor el Dr. José Inés Jiménez Aquino no sólo por su paciencia y apoyo en la realización de este trabajo, sino también por la infinidad de consejos y ánimos que me ha brindado durante mi carrera académica. Agradezco de manera especial a la Dr. Rosa María Velasco Belmont por sus comentarios con respecto a los cálculos realizados en dicha tesis los cuales permitieron mejorar el contenido de la misma, así como a los sinodales el Dr. José Miguel Méndez Alcaraz y al Dr. Emilio Cortés Reyna por sus observaciones y comentarios con respecto a dicho trabajo.

Agradezco a mi amiga y compañera de maestría la Lic. Aurora Denisse González Martínez y al Dr. Mauricio Romero Bastida del ESIME Culhuacán, quienes me proporcionaron los medios y ayudaron en los cálculos numéricos para el presente trabajo.

A mis amigos y compañeros de la Licenciatura y Maestría en Física de quienes, además de compartir momentos divertidos, también he aprendido de todos y cada uno de ellos.

Finalmente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me otorgó durante la realización de esta tesis.



# Resumen

El proceso de detección de señales ópticas débiles en el proceso de encendido de un sistema láser, fue propuesto por primera vez a los finales de los años 80 del siglo pasado. La propuesta consiste en que el sistema láser puede actuar como un receptor super-regenerativo similar a los sistemas de radar. Cuatro décadas después, y de forma similar se propuso que el decaimiento de estado inestable de una partícula Browniana inmersa en un baño térmico y en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados, puede servir como un mecanismo físico alternativo para la detección de amplitudes débiles del campo eléctrico aplicado. En esta tesis extendemos el estudio de la detección de amplitudes débiles del campo eléctrico aplicado al caso de la partícula Browniana inmersa en un baño térmico con memoria. En este caso la ecuación que gobierna el comportamiento dinámico de dicha partícula es la ecuación generalizada de Langevin caracterizada por un kernel de fricción con memoria. En particular nuestro estudio se centra en el caso de un kernel de fricción con memoria de tipo exponencial también conocido como memoria tipo Ornstein-Uhlenbeck. Para el proceso de detección se propusieron dos criterios, ambos relacionados con la escala de tiempo que caracteriza la relajación dinámica del estado inestable: Un criterio está dado en términos de la estadística de los tiempos de primer paso y el otro, es conocido como receptor de salida que se puede obtener como función de los tiempos de relajación no lineales.



# Capítulo 1

## Introducción

La Resonancia Estocástica (RE) introducida por Benzi et al. en 1981 [1, 2], ha sido reconocida como un paradigma en el estudio de la relajación dinámica de sistemas fuera de equilibrio inducidos por fluctuaciones estocásticas también conocidas como ruido. El fenómeno de la RE ha sido estudiado desde el punto de vista teórico y experimental en una gran variedad de sistemas físicos, químicos, biológicos y aplicado también a la medicina [3] [4], [5, 6]. Para cualquiera de estos sistemas que operan en un entorno ruidoso o fuente de ruido (como por ejemplo un baño térmico) y sometidos a la influencia de señales periódicas muy débiles que resultan difíciles de poder detectar, el mecanismo de la RE surge cuando ambos, la señal externa débil y el entorno ruidoso, entran en resonancia incrementando la eficiencia de la detección y como consecuencia el mejoramiento de la información. Por lo tanto, la RE es un fenómeno capaz de detectar y transmitir de manera eficiente la información de señales débiles en los sistemas antes mencionados debido a la presencia de las fluctuaciones estocásticas. Pongamos como ejemplo el estudio de la relajación dinámica de una partícula Browniana (PB) en un potencial biestable (véase la Fig. 1.1), el cual muestra el papel que juega el ruido interno conforme éste contribuye a incrementar la respuesta del sistema a las señales débiles. En esencia la RE requiere en este caso de tres ingredientes:

- Una fuente interna de ruido o baño térmico de temperatura  $T$ .
- La entrada de una señal débil, por ejemplo una señal periódica
- Una barrera de potencial la cual suministra un valor umbral que el sistema tiene que vencer, de tal manera que cuando la intensidad de la señal sobrepasa dicho umbral, el sistema evoluciona de un pozo a otro de manera sincronizada.

El potencial típico de la RE es el potencial no lineal biestable que se caracteriza por tener un máximo que corresponde al estado inestable, y dos mínimos que corresponden a los dos estados estables del potencial, como se muestra en la Fig. 1.1

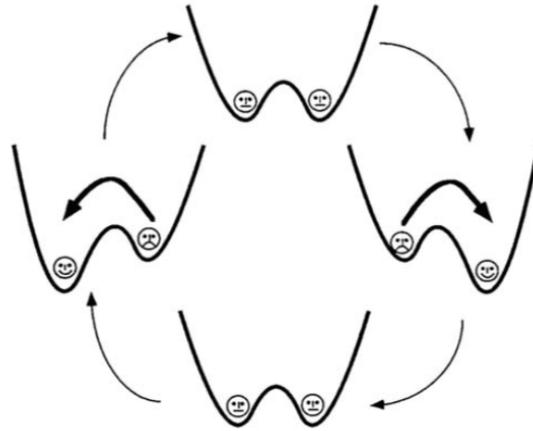


Figura 1.1: Mecanismo de la RE. Un potencial biestable simétrico es balanceado por una señal periódica débil. La presencia de una dosis óptima de ruido junto con la señal externa permitirá que el sistema oscile de manera sincronizada de un pozo de potencial a otro.

El fenómeno de la RE se produce cuando la PB localizada en cualquiera de los pozos del potencial, es sometida a una fuerza externa débil que oscila en el tiempo y que es capaz de producir modulaciones del potencial biestable. Si la señal no es suficientemente intensa (señal débil), para abandonar uno de los pozos, la partícula puede entonces saltar de uno a otro debido únicamente al ruido interno. Si la temperatura es muy baja (ruido interno pequeño), la PB permanecerá siempre en el pozo de partida. Si por otro lado, la temperatura es muy grande (ruido interno grande), la PB se difunde como si el potencial no estuviera presente. Luego entonces debe existir una temperatura (una dosis óptima de ruido) para la cual la partícula pueda saltar de un pozo a otro de manera sincronizada con la señal externa débil. Es decir, un ruido óptimo para el cual la correlación entre la señal débil y la respuesta del sistema sea máxima. En conclusión podemos decir que la *resonancia estocástica es un fenómeno capaz de detectar y transmitir información de señales débiles de manera eficiente debido a la presencia de fluctuaciones estocásticas*. Cabe mencionar que a partir de los años 90 del siglo pasado comenzaron a surgir trabajos importantes que empezaron a revelar el papel constructivo que desempeña el ruido en la neurobiología y en el mecanismo de percepción de los seres vivos, por ejemplo, en la sensación táctil [7], sistemas cerebrales [8], sistemas neuronales [9], [10], [11], etc. Una cantidad importante de estudios sobre la RE han sido formulados en un sistema paradigmático: el potencial biestable en una dimensión, en el contexto de las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck. Sin embargo, estudios recientes muestran la presencia de la RE en sistemas un tanto cuanto complejas descritas en términos de ecuaciones tipo Langevin acopladas, cuyas soluciones han requerido hasta ahora de los métodos numéricos por computadora por su grado de complejidad matemática. [12].

Fue a finales de los años 80 del siglo pasado, cuando Vemuri y Roy [14] propusieron otro mecanismo alternativo capaz de detectar señales ópticas débiles (campos eléctricos débiles) durante el proceso de encendido de un sistema láser, cuando éste actúa como un receptor super-regenerativo de manera similar como en los receptores de radar [15]. La idea básica es entonces la siguiente:

las señales ópticas débiles incidentes deben ser amplificadas en el proceso de encendido, el cual ocurre como consecuencia de la emisión espontánea caracterizada como ruido interno. El proceso de encendido del sistema láser es un caso particular de la relajación dinámica o decaimiento de estados inestables debido a la presencia de las fluctuaciones estocásticas o ruido, o más general de la relajación dinámica de condiciones iniciales sean éstas inestables, metaestables o marginales [16]-[22]. En este sentido, el proceso de encendido del sistema láser consiste entonces en el decaimiento que experimenta la intensidad de la luz láser desde un valor inicial  $I(0)$  (estado inestable de mayor energía) hasta alcanzar el valor de su estado estacionario  $I_{st}$  (estado estable de menor energía), por efecto de la emisión espontánea. Vemuri y Roy establecieron un criterio de detección en términos de un parámetro adimensional conocido como receptor de salida (RS) y reportaron los resultados numéricos de este parámetro en función del promedio de los tiempo de paso durante el cual ocurre el proceso de decaimiento. ***Básicamente el RS se define como el cociente  $A_e/A_0$ , donde  $A_e$  representa el área bajo la curva que describe el promedio de la intensidad de salida del sistema láser como función del tiempo, en presencia de un campo eléctrico, mientras que  $A_0$  representa el área bajo la curva de la intensidad promedio sin campo eléctrico.*** Mostraron que el RS es muy sensible a la presencia de señales débiles.

En el mismo año de la publicación del trabajo de Vemuri y Roy, y siguiendo las ideas de estos autores, Balle et al. [23] propusieron otro criterio teórico para detectar señales ópticas débiles en el proceso de encendido de un sistema láser, el cual consiste en lo siguiente: ***la diferencia entre las escalas de tiempo que caracterizan el proceso de encendido en presencia y ausencia de la señal débil, debe ser mayor o igual a la máxima varianza.*** Este criterio determina el valor crítico de un cierto parámetro, que definimos como  $\beta_c$ , cuyo valor determina la intensidad de la señal débil que se debe detectar. Para valores de  $\beta$  menores que  $\beta_c$  no hay detección, mientras que para valores mayores que  $\beta_c$  la detección se realiza de manera eficiente. Las escalas de tiempo antes mencionadas se conocen como tiempos promedio de primer paso (MFPT por sus siglas en inglés). Fueron Littler et al. [24] quienes al año siguiente pusieron en práctica la propuesta de Balle et al. y mostraron experimentalmente que la señal óptica débil se puede detectar mediante las mediciones de los tiempos de paso (tiempos de iniciación) del sistema láser de Argón bajo la acción de una señal atenuada de un láser de He-Ne. Dos años después del trabajo de Vemuri y Roy, Jiménez-Aquino y Sancho [25], establecieron finalmente la expresión teórica del RS como una función explícita de las escalas de tiempo conocidas como tiempos de relajación no lineales (NLRT por sus siglas en inglés). Los resultados teóricos reportados en [25] fueron comparados con los resultados numéricos de Vemuri y Roy [14], y se mostró que únicamente fueron consistentes con los reportados para el sistema láser de tinte (dye láser). Es muy importante destacar que para poder lograr los objetivos antes mencionados, fue necesario caracterizar la dinámica transitoria (proceso de encendido) del sistema láser mediante el MFPT y el NLRT. En general estas escalas de tiempo han sido utilizados también para caracterizar la relajación dinámica de estados inestables, metaestables y marginales, entre muchas otras aplicaciones. En el caso particular del sistema láser la caracterización del proceso de encendido es muy similar a la caracterización del proceso de decaimiento del estado inestable de un potencial biestable, como se mostrará en el contenido de esta tesis. La diferencia entre ambas escalas de tiempo es que el NLRT puede caracterizar la relajación dinámica tomando en cuenta la evolución completa del sistema conforme éste evoluciona hacia su estado estacionario. El modelo más conocido en el estudio del

decaimiento de un estado inestable es la ecuación de Langevin unidimensional con ruido aditivo, siendo el estado inestable inicial el máximo relativo de un potencial que proporciona la fuerza determinista. El modelo teórico propuesto para caracterizar el decaimiento de estados inestables via la ecuación tipo Langevin fue establecido por primera vez por De Pasquale and Tombesi en 1979 [26]. Este modelo teórico se conoce como teoría cuasi-determinista (QDT) por sus siglas en inglés). La QDT es una buena descripción teórica debido a que proporciona el mecanismo preciso para caracterizar el proceso de decaimiento de un estado inestable. El mecanismo físico de la QDT es el siguiente: La presencia de pequeñas fluctuaciones estocásticas cambian la condición inicial alrededor del estado inestable y una vez que el sistema abandona dicho estado inicial, el proceso dinámico es dominado por la fuerza de potencial. Más aún, la QDT permite caracterizar la relajación dinámica de potenciales inestables no lineales arbitrarios los cuales son muy difíciles tratar matemáticamente a través de la ecuación de Fokker-Planck.

Casi 20 años después de los trabajos de Vemuri y Roy [14] y Balle et al. [23], fue propuesto otro sistema físico distinto al sistema láser que en principio puede ser capaz de detectar amplitudes débiles de campos eléctricos, en un proceso de relajación por influencia de fluctuaciones estocásticas. El sistema físico en cuestión es una partícula con carga eléctrica inmersa en un baño térmico, que experimenta el proceso de relajación alrededor del estado inestable de un potencial debido a la influencia de las fluctuaciones estocásticas y también bajo la acción de campos eléctrico y magnético cruzados [27, 28, 29, 30]. Por estar inmersa en un baño térmico, dicha partícula experimenta la acción de una fuerza de fricción, la fuerza de Lorentz y la fuerza fluctuante o ruido interno. Las preguntas obvias que pudieran surgir de esta propuesta serían las siguientes: (i) *¿Por qué proponer este sistema físico distinto al sistema láser como otro mecanismo de detección de señales débiles?* (ii) *¿Tiene algo que ver una PB con carga eléctrica en un campo magnético con el sistema láser antes mencionado?* y (iii) *¿Será posible que el proceso de decaimiento del estado inestable de dicha PB, pueda detectar amplitudes débiles de un campo eléctrico, como lo hace el proceso de encendido del sistema láser?* La respuesta a estas preguntas fueron en efecto respondidas y reportadas en los trabajos de Jiménez-Aquino y Romero-Bastida y publicados hace relativamente poco tiempo [27, 28]. Las razones son las siguientes: a pesar de que ambos sistemas son en principio diferentes, la dinámica que sigue la PB en un campo magnético es sorprendentemente muy similar a la dinámica del sistema láser, y por esta razón la propuesta formulada por los autores tiene un sustento basado en esta analogía con el sistema láser. Es importante comentar que la diferencia entre ambos sistemas radica en que la dinámica del sistema láser, como veremos en el contenido de esta tesis, se describe mediante una ecuación tipo Langevin para el campo eléctrico complejo, mientras que la dinámica de la PB con carga eléctrica, se describe en términos de la ecuación de Langevin para el vector de posición. Sin embargo, a pesar de esta diferencia cuantitativa en las ecuaciones dinámicas, las trayectorias de ambos sistemas son muy similares y de carácter rotacional. Esta situación, permite entonces reformular los desarrollos matemáticos en términos de números complejos establecidos por Balle et al. [23] y Jiménez-Aquino y Sancho [25] por un desarrollo matricial, que permite apreciar mejor la similitud entre ambas dinámicas y entender mejor por qué la QDT es una muy buena aproximación para describir la dinámica transitoria de un sistema rotacional. En el estudio de la PB en un campo magnético, usamos los mismos criterios de detección establecidos para el sistema láser, es decir, la estadística de los tiempos de paso y el RS. También se formula la QDT para la caracterización dinámica del decaimiento del estado inestable de la PB en los campos eléctrico y magnético cruzados. En los

estudios reportados en [27, 28], se supone que el campo magnético es un vector constante que apunta en la dirección  $z$  de un sistema cartesiano de coordenadas y el campo eléctrico también un vector constante pero sobre el plano  $x-y$ . En esta tesis, supondremos las mismas condiciones para ambos vectores. El proceso de decaimiento de la partícula cargada consiste en lo siguiente: Al tiempo  $t = 0$ , la partícula se encuentra localizada en el estado inestable de un potencial biestable, y abandona dicho estado debido a la presencia de las fluctuaciones térmicas (ruido interno) y del campo magnético; una vez desencadenado el proceso de relajación, un campo eléctrico débil debe incidir sobre la partícula acelerando el proceso de decaimiento hacia el estado estacionario correspondiente. La dinámica que sigue la PB es de carácter rotacional debido a la presencia del campo magnético.

Un aspecto importante que vale la pena resaltar en esta tesis es el siguiente: todos los trabajos relacionados con la detección de señales débiles antes mencionados, han sido formulados suponiendo que la dinámica estocástica es un proceso Markoviano, es decir, la función de correlación del ruido interno es una función delta de Dirac que es una propiedad de las fluctuaciones estocásticas conocidos como *ruido blanco* (el espectro de potencias es una constante). Esto significa que la correlación del ruido es instantánea y que no existe correlación a dos tiempos distintos, o dicho en otras palabras que no guarda memoria. Sin embargo es bien conocido que al tratar de modelar los fenómenos reales, uno normalmente recurre a los métodos hasta cierto punto idealizados y éste es precisamente el caso de ruido blanco. Sin embargo, prácticamente en todos los fenómenos reales las fluctuaciones estocásticas están siempre correlacionadas, es decir que guardan memoria o que tienen un tiempo de correlación a dos tiempos distintos. Las fluctuaciones estocásticas con esta propiedad se les conoce como *ruido de color* (el espectro de potencias es función de la frecuencia). Por esta razón los sistemas inducidos por ruido de color se les conoce en la literatura como procesos estocásticos no-Markovianos [31, 32, 33]. Paradójicamente son los procesos Markovianos los que han sido estudiados más extensivamente que los no-Markovianos, siendo estos últimos los que predominan en la naturaleza (los procesos reales). La razón es muy simple, la matemática de los procesos Markovianos es mucho más simple que la de los no-Markovianos. Los dos grupos de procesos estocásticos han sido exitosamente aplicados al estudio de una gran variedad de sistemas físicos, químicos, biológicos, sociológicos, económicos, etc. Tomando en cuenta esta propuesta de los procesos no-Markovianos, nuestro objetivo principal en el presente trabajo de tesis consiste entonces en extender, el estudio de la detección de señales débiles en el proceso de decaimiento del estado inestable de una PB con carga eléctrica bajo la acción de campos eléctricos y magnéticos cruzados, pero ahora inmersa en un baño térmico con memoria. En la dinámica no-Markoviana, una de las ecuaciones que toma en cuenta la interacción térmica de una PB con el baño durante un tiempo finito de correlación es la llamada ecuación generalizada de Langevin (EGL) [34, 35, 36]. Ésta es una ecuación diferencial estocástica integro-diferencial caracterizada por un kernel de fricción con memoria arbitraria. En este trabajo de tesis estudiaremos el problema antes planteado tomando en cuenta el caso particular de un kernel de fricción del tipo Ornstein-Uhlenbeck (OU), esto es, un decaimiento exponencial con un tiempo finito de correlación. En este caso y mediante un apropiado cambio de variable la EGL se puede escribir como un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales estocásticas cuasi-Markovianas. Más aún, en el régimen sobre-amortiguado y para tiempos de correlación pequeños, es posible reducir estas ecuaciones en una ecuación muy similar al caso Markoviano cuyos coeficientes han sido renormalizados por un factor no-Markoviano que contiene al tiempo de correlación. Un trabajo previo a

este trabajo de tesis ha sido reportado en [38], donde se estudia la detección de señales débiles en un baño térmico con memoria. Nuestro trabajo de tesis es una extensión de dicho trabajo cuando la PB se encuentra también bajo la acción de un campo magnético constante. Las preguntas obvias que deben surgir en este caso son ahora. (i) *¿Qué expresión matemática tienen las escalas de tiempo que caracterizan el decaimiento del estado inestable de la PB?* (ii) *¿Qué forma tiene el parámetro de detección  $\beta$  cuando aplicamos el mismo criterio de la estadística de los tiempos de paso? (ii) ¿Qué ocurre con el RS en este caso?*

El contenido del presente trabajo de tesis consiste de cuatro capítulos: en el capítulo 2 presentamos el análisis cualitativo de la QDT con el propósito establecer el régimen de su validez y la expresión universal de la escala de tiempo que caracteriza un estado inestable. Seguido de este análisis, calculamos la estadística de los tiempos de paso que caracteriza el proceso de encendido del sistema láser y utilizamos el criterio correspondiente para obtener el parámetro crítico de detección  $\beta_c$  de las señales ópticas débiles. Posteriormente, calculamos el NLRT tomando en cuenta los efectos no lineales del sistema para luego aplicar el criterio del RS en función de NLRT. En este caso, comparamos los resultados teóricos con los obtenidos de la simulación numérica de la ecuación de tipo Langevin del sistema láser. El capítulo 3, está enfocado al estudio de la detección de amplitudes débiles de un campo eléctrico en la relajación dinámica del estado inestable de un potencial biestable bidimensional, de una PB con carga eléctrica inmersa en un baño térmico y en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados. Debido a la similitud de la ecuación de Langevin de la PB con la del sistema láser del capítulo anterior, omitiremos varios de los pasos algebraicos para obtener los resultados similares para el parámetro de detección y para el RS. También en este último caso, comparamos los resultados teóricos con los obtenidos de la simulación numérica de la ecuación de Langevin asociada a la PB. El capítulo 4 es la contribución novedosa del presente trabajo de tesis, pues éste consiste en entender los estudios del capítulo 3 al caso de una PB inmersa en baño térmico con memoria del tipo OU. Finalmente en el quinto y último capítulo damos nuestras conclusiones y perspectivas de nuestro trabajo.

## Capítulo 2

# Estadística de los tiempos de paso y el sistema láser

### 2.1. Análisis Cualitativo de la QDT

En esta sección vamos a hacer un análisis cualitativo de la QDT (por sus siglas en inglés), para entender las ideas físicas de su descripción en el decaimiento de un estado inestable, de cualquier sistema físico sea este un sistema láser, una partícula Browniana (PB) o cualquier otro. Para ello vamos a considerar como ejemplo particular el decaimiento del estado inestable de un potencial para una partícula Browniana inmersa en un baño térmico. Calcularemos el tiempo de paso requerido por la partícula en alcanzar una barrera de potencial (barrera absorbente). Esta escala de tiempo es función del desplazamiento cuadrático promedio (DCP) que denotamos como  $\langle x^2(t) \rangle$ , donde  $\langle \dots \rangle$  es el promedio sobre el ensamble (realizaciones). Sin embargo, en el estudio del movimiento Browniano (MB) el DCP se estudia en dos casos límite con respecto al tiempo de relajación  $\tau$  de la partícula que se define de manera general como  $\tau = m/\gamma_0$ , siendo  $m$  su masa y  $\gamma_0$  el coeficiente de fricción.

- Límite de tiempos cortos  $t \ll \tau$ : en este caso se puede demostrar que el DCP se aproxima por  $\langle x^2(t) \rangle = Ct^2$  donde  $C$  es una constante.
- Límite de tiempos largos  $t \gg \tau$ : En este caso límite el DCP se aproxima por  $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ , siendo  $D = k_B T/\gamma_0$  el coeficiente de difusión de Einstein,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del fluido.

Como se puede apreciar, en el límite de tiempos cortos el DCP es proporcional a  $t^2$  el cual corresponde, de acuerdo con la mecánica clásica, al desplazamiento al cuadrado de una partícula libre; por esta razón el régimen de tiempos cortos se le conoce como el régimen balístico en el cual la PB no siente la presencia del baño térmico y como consecuencia se mueve como una partícula libre. Por otra parte en el límite de tiempos largos, el DCP es proporcional al tiempo, pero de acuerdo con la hidrodinámica clásica, una partícula inmersa en un fluido experimenta un proceso

de difusión y su desplazamiento al cuadrado como función del tiempo es una línea recta. podemos decir entonces que para tiempos largos la PB experimenta un proceso de difusión debido a las constantes colisiones con las moléculas del fluido, es decir, la partícula siente la presencia del baño térmico en la que está inmersa. A este régimen de tiempos largos se le conoce como régimen difusivo o también como régimen sobre-amortiguado.

Para el proceso de decaimiento de un estado inestable haremos un análisis similar para una partícula localizada inicialmente en el estado inestable ( $x(0) = 0$ ) del potencial  $V(x) = -(a_0/2)x^2$ , delimitado por barreras absorbentes localizadas en  $x = \pm R$ , de tal manera que la partícula puede moverse en el intervalo  $-R \leq x \leq R$ . Comenzamos nuestro análisis con la ecuación de Langevin sobre-amortiguada, es decir

$$\dot{x} = ax + \gamma_0^{-1}\xi(t), \quad (2.1)$$

donde  $a = a_0/\gamma_0$  y  $\xi(t)$  es un ruido blanco Gaussiano con promedio nulo  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  y función de correlación  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda\delta(t-t')$ , donde  $\lambda = \gamma_0 k_B T$  es la intensidad del ruido. La solución de (2.1) se puede escribir como

$$x(t) = h(t)e^{at}, \quad h(t) = \int_0^t e^{-as}\xi(s)ds. \quad (2.2)$$

Es fácil mostrar que

$$\langle h^2(t) \rangle = \frac{\lambda}{a}(1 - e^{-2at}), \quad (2.3)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\lambda}{a}(e^{2at} - 1). \quad (2.4)$$

De esta simple relación podemos estudiar también los dos casos límite para el tiempo, el límite de tiempos cortos y el límite de tiempos largos

- Límite de tiempos cortos tales que  $t \ll 1/2a$ : En este caso podemos mostrar fácilmente que el DCP está dado por  $\langle x^2(t) \rangle = 2\lambda t$ .
- Límite de tiempos largos tales que  $t \gg 1/2a$ : En esta aproximación el DCP es ahora  $\langle x^2(t) \rangle = (\lambda/a)e^{2at}$ .

Estos resultados nos muestran claramente lo siguiente: Para tiempos cortos que corresponde el comienzo del proceso de decaimiento, el DCP es lineal en el tiempo lo cual significa que la PB experimenta un proceso difusivo alrededor del estado inestable y como consecuencia la PB está sometida a las constantes colisiones con las moléculas del fluido o baño térmico en la que está inmersa. En el límite de tiempos largos y asumiendo intensidades pequeñas del ruido interno el DCP es dominado por el factor determinista  $e^{2at}$ , y como consecuencia la partícula evoluciona siguiendo una trayectoria casi determinista dominada por la fuerza del potencial. A este régimen de aproximación de tiempos largos en el decaimiento de estados inestables se le conoce como la *aproximación cuasi-determinista*. De manera cualitativa podemos concluir entonces que, en el régimen de tiempos largos, una vez abandonado el estado inestable inicial, el tiempo requerido por la PB en alcanzar la barrera de potencial  $\pm R$  debe ser  $t = (1/2a)\ln(aR^2/\lambda)$ . Ésta escala de tiempo es el tiempo característico o universal para el proceso de decaimiento de todo estado inestable inducido por intensidades pequeñas de ruido.

## 2.2. El sistema láser

Tal como hemos mencionado en la introducción de esta tesis, la dinámica transitoria o proceso de encendido de un sistema láser, fue propuesto para detectar señales ópticas débiles de manera similar como en los receptores de radar. Balle et al. sugirieron otro criterio basado en la estadística de los tiempos de primer paso, y casi inmediatamente después la propuesta fue corroborada experimentalmente por Littler et. al. El criterio propuesto por Vemuri y Roy en términos del llamado *receptor de salida* (RS) pudo ser expresado en términos de los NLRT en el trabajo reportado en [25]. Para una mejor comprensión de nuestro tema de tesis, es conveniente estudiar en esta sección los dos métodos teóricos propuestos para detectar señales ópticas débiles en el sistema láser. Para analizar el proceso de detección super-regenerativo, vamos a utilizar el modelo de láser que ha sido estudiado en la dinámica transitoria [14, 23, 24], y para ello asumimos que el proceso de emisión espontánea se introduce a través de las fluctuaciones estocásticas (ruido interno) delta correlacionados en la forma de Langevin. Esta suposición para delta es razonable ya que las fluctuaciones debido a las emisiones espontáneas, ocurren a una escala de tiempo mucho más rápida que lo que ocurre con la intensidad del láser para tiempos de observación macroscópicos. Incluiremos el efecto de saturación sobre el medio activo, debido a que estamos interesados en el funcionamiento del láser a altas frecuencias, muy por encima del umbral.

La ecuación diferencial estocástica que gobierna la dinámica de este sistema láser es entonces una ecuación tipo Langevin adimensional para el campo eléctrico complejo  $E = E_1 + iE_2$  de un solo modo [14], esto es

$$\frac{dE}{dt} = -kE + \frac{F}{1 + (A/F)I}E + ifE + k_e E_e + \xi(t), \quad (2.5)$$

donde  $k$  es la razón de decaimiento en la intensidad de radiación en la cavidad del láser,  $F$  es el factor de ganancia del medio activo,  $A$  es el parámetro de saturación del medio activo,  $I = |\mathbf{E}|^2 = E_1^2 + E_2^2$  es la intensidad del láser,  $E_e$  es el campo eléctrico externo el cual se considera como una cantidad real,  $k_e$  es el parámetro de acoplamiento entre la cavidad del láser y la señal externa,  $f$  es el parámetro de sintonización entre la cavidad del láser y la señal externa, y el término  $\xi(t)$  representa las fluctuaciones por emisión espontánea (ruido complejo) y que suponemos que satisface las propiedades de ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y función de correlación dada por

$$\langle \xi(t)\xi^*(t') \rangle = 2\epsilon\delta(t - t'), \quad (2.6)$$

siendo  $\epsilon$  la intensidad del ruido complejo y  $\xi^*(t)$  su complejo conjugado.

### 2.2.1. Estadística de los tiempos de paso

En este apartado vamos primeramente a estudiar el método propuesto por Balle et. al. [23] para detectar señales ópticas débiles en términos de la estadística de los tiempos de paso y su conexión con la QDT. Es muy importante resaltar en este trabajo que la dinámica dada por la Ec. (2.5) es de carácter rotacional (trayectoria espiral) aunque dicho efecto no aparece explícitamente en los cálculos teóricos asociados a la estadística de los tiempos de paso reportados en [23]. Cabe mencionar que la descripción teórica reportada en dicha referencia se realiza en el plano

complejo de coordenadas  $(E_1, E_2)$ , que de por sí es rotacional por naturaleza. Sin embargo, la razón del por qué dichos efectos de rotación no aparecen de manera explícita en la formulación reportada por Balle et. al, se puede explicar y entender mejor en un espacio transformado de coordenadas  $(E'_1, E'_2)$  del campo eléctrico complejo original  $(E_1, E_2)$ . Por esta razón nuestro estudio en esta sección se hará en términos de una formulación matricial en vez de una formulación en el plano complejo, aunque ambas son totalmente equivalentes y conducen a los mismos resultados para la estadística de los tiempos de paso. Para calcular la estadística de los tiempos de paso, debemos calcular el tiempo para el cual la intensidad del sistema láser alcanza un cierto valor referencia preestablecido  $I_r$  el cual corresponde a un 2% del valor de su estado estacionario, es decir,  $I_r = 0.02I_{st}$ , donde  $I_{st} = (F - k)/A$  [23]. En esta aproximación el término de saturación  $A/F \ll 1$  (términos no lineales) no son significativos y por lo consiguiente la Ec. (2.5) se puede aproximar a una ecuación lineal, que en su forma matricial se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = a\mathbf{E} + W\mathbf{E} + k_e\mathbf{E}_e + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.7)$$

donde  $a = F - k$  y  $W$  es una matriz antisimétrica dada por

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

y los vectores  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)$ ,  $\mathbf{E}_e = (E_e, 0)$ ,  $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1, \xi_2)$ , tal que

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \epsilon\delta_{ij}\delta(t - t'), \quad i, j = 1, 2. \quad (2.9)$$

En la Fig. 2.1, se muestra la evolución dinámica del sistema láser, de acuerdo con la Ec. (2.7)

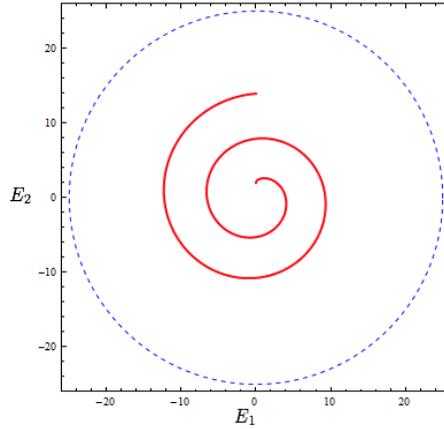


Figura 2.1: Evolución dinámica del sistema láser (2.7) en el plano complejo  $(E_1, E_2)$

Para poder entender el por qué los efectos rotacionales no aparecen en la QDT introducimos el siguiente cambio de variable

$$\mathbf{E}' = e^{-Wt}\mathbf{E}, \quad (2.10)$$

el cual corresponde a una rotación de las coordenadas  $(E_1, E_2)$  del plano complejo al espacio de coordenadas  $(E'_1, E'_2)$ , puesto que  $e^{-Wt}$  representa una matriz de rotación ortogonal dependiente del tiempo de tal forma que

$$R(t) \equiv e^{Wt} = \begin{pmatrix} \cos ft & \text{sen } ft \\ -\text{sen } ft & \cos ft \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde  $R^{-1}(t) \equiv e^{-Wt}$  es su inversa e igual a la transpuesta de  $R(t)$ , es decir,  $R^{-1}(t) = R^T(t)$ . En el espacio transformado de coordenadas la Ec. tipo Langevin (2.7) se transforma en

$$\frac{d\mathbf{E}'}{dt} = a\mathbf{E}' + k_e\mathbf{E}'_e + \boldsymbol{\xi}'(t), \quad (2.12)$$

siendo ahora  $\mathbf{E}'_e = R^{-1}(t)\mathbf{E}_e$  y  $\boldsymbol{\xi}'(t) = R^{-1}(t)\boldsymbol{\xi}(t)$ ; y como consecuencia tanto el campo eléctrico externo así como el ruido interno sufren los efectos de la rotación. Debido a la transformación (2.10), el módulo al cuadrado del campo eléctrico  $I = |\mathbf{E}|^2$  permanece invariante en el espacio transformado, esto es  $I = I'$ , donde  $I' = |\mathbf{E}'|^2 = E'^2_1 + E'^2_2$ . Por otro lado, en la Fig. 2.2 se muestran dos dinámicas del sistema láser (2.12) en el plano complejo  $(E'_1, E'_2)$  cuando las intensidad del campo eléctrico externo se compara con la del ruido interno. Si la magnitud del campo eléctrico externo es menor o igual a la intensidad del ruido interno, entonces la dinámica del sistema láser es prácticamente una línea recta como se muestra en la Fig. 2.2, y por lo tanto los efectos de rotación son prácticamente imperceptibles. En el caso contrario, si la amplitud del campo eléctrico es dominante sobre el ruido interno entonces la trayectoria es rotacional en forma de bucles, tal como se muestra en la Fig. 2.2.

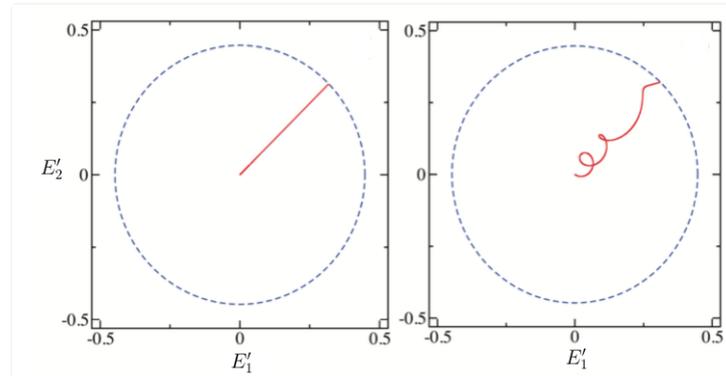


Figura 2.2: Evolución dinámica del sistema láser (2.12) en el espacio transformado  $(E'_1, E'_2)$ . Trayectoria recta para valores de  $E_e = \epsilon = 0.0001$ . Trayectoria rotacional obtenida para valores de  $E_e = 1.0$  Y  $\epsilon = 0.001$ .

Como podemos observar de las figuras anteriores, solamente cuando la intensidad del campo eléctrico externo es menor o igual que la intensidad del ruido interno ( $E_e \leq \epsilon$ ), los efectos de rotación en la evolución dinámica del sistema láser no son apreciables. Por esta razón la QDT utilizada para calcular la estadística de los tiempos de paso en [23] no contiene los efectos de

rotación del sistema. De ahora en adelante, vamos a calcular dicha estadística en el espacio transformado del plano complejo y haremos uso de estos resultados para aplicar el criterio de detección de las señales débiles. Primeramente, para calcular el tiempo de paso requerido por la intensidad del sistema láser en alcanzar el valor de referencia  $I_r$ , partimos de la solución de la Ec. (2.12) dada por

$$\mathbf{E}'(t) = \mathbf{h}'(t)e^{at}, \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{h}'(t) = h'_1(t) + h'_2(t)$  tal que

$$\mathbf{h}'(t) = \int_0^t e^{-as} R^{-1}(s) [k_e \mathbf{E}_e + \boldsymbol{\xi}(s)] ds, \quad (2.14)$$

para condiciones iniciales fijas tal que  $\mathbf{E}'(0) = 0$ . Es fácil mostrar que  $\mathbf{h}(t) = h_1(t) + h_2(t) = h'_1(t) + h'_2(t) = \mathbf{h}'(t)$ . Veamos ahora qué ocurre en el límite de tiempos largos tales que  $t \gg 1/2a$ . En este caso vemos que para valores pequeños del campo externo  $\mathbf{E}_e$  y del ruido interno  $\boldsymbol{\xi}(t)$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{h}'}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} R^{-1}(t) [k_e \mathbf{E}_e + \boldsymbol{\xi}(t)] \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

que nos indica que en este régimen de aproximación  $\mathbf{h}'(t)$  llega ser una constante es decir  $\mathbf{h}'(\infty) = \mathbf{h}'$ , donde en este caso  $\mathbf{h}' = h'_1 + h'_2$  es una variable aleatoria Gaussiana (VAG) puesto que  $\boldsymbol{\xi}(t)$  también lo es. Por tanto en el régimen de tiempos largos tales que  $t \gg 1/2a$ , el proceso estocástico dado por (2.13) se transforma en un proceso cuasi-determinista dado por  $\mathbf{E}'(t) = \mathbf{h}'e^{at}$  de tal manera que  $\mathbf{h}'$  juega el papel de una condición inicial efectiva. En términos de la intensidad del campo eléctrico  $I'$  la ecuación cuasi-determinista puede escribirse como

$$I'(t) = h'^2 e^{2at}, \quad (2.16)$$

donde  $h'^2 \equiv |\mathbf{h}'|^2 = h_1'^2 + h_2'^2$ . A partir de la solución (2.16) vemos que el tiempo  $t$  es también una variable aleatoria, y por lo tanto el tiempo promedio requerido para la intensidad del sistema láser en alcanzar el valor de referencia  $I'_{st} = I_r$  será

$$\langle t \rangle = \frac{1}{2a} \left\langle \ln \left( \frac{I'_r}{h'^2} \right) \right\rangle. \quad (2.17)$$

Esta escala de tiempo promedio se puede calcular a través de la densidad de probabilidad marginal  $P(h')$ , la cual a su vez requiere de la densidad de probabilidad Gaussiana conjunta

$$P(h'_1, h'_2) = \frac{1}{2\pi(\det \sigma_{ij})^2} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (\sigma^{-1})_{ij} (h'_i - \langle h'_i \rangle)(h'_j - \langle h'_j \rangle) \right], \quad (2.18)$$

siendo  $\sigma_{ij} = \langle h'_i h'_j \rangle - \langle h'_i \rangle \langle h'_j \rangle$  la matriz de correlación. De la Ec. (2.14) podemos ver que

$$\langle h'_i \rangle = k_e \int_0^\infty e^{-at} R_{ik}^{-1}(t) E_{ek} dt, \quad (2.19)$$

$$\langle h'_i h'_j \rangle = \langle h'_i \rangle \langle h'_j \rangle + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(t+t')} R_{ik}^{-1}(t) R_{jl}^{-1}(t') \langle \xi_k(t) \xi_l(t') \rangle dt dt'. \quad (2.20)$$

Es fácil verificar que

$$\langle h'_1 \rangle = \frac{k_e E_e a}{a^2 + f^2}, \quad \langle h'_2 \rangle = \frac{k_e E_e a}{a^2 + f^2}, \quad (2.21)$$

y

$$\langle h'_i h'_j \rangle = \langle h'_i \rangle \langle h'_j \rangle + \frac{\epsilon}{2a} \delta_{ij}. \quad (2.22)$$

La Ec. (2.22) nos muestra que las variables  $h'_i$  son independientes y por tanto la matriz de correlación  $\sigma_{ij} = (\epsilon/2a)\delta_{ij}$  es una matriz diagonal, cuyos elementos están dados por  $\sigma^2 \equiv \sigma_{ii} = \epsilon/2a$ . Bajo estas condiciones la densidad de probabilidad dada en (2.18) se reduce a la simple expresión

$$P(h'_1, h'_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(1/2\sigma^2)[(h'_1 - \langle h'_1 \rangle)^2 + (h'_2 - \langle h'_2 \rangle)^2]}. \quad (2.23)$$

Para calcular  $P(h')$  hacemos uso de la transformación

$$P(h'_1, h'_2) dh'_1 dh'_2 \rightarrow P(h', \theta) J(h', \theta) dh' d\theta, \quad (2.24)$$

donde  $J(h', \theta)$  representa la transformación Jacobiana del espacio de coordenadas  $(h'_1, h'_2)$  al espacio  $(h', \theta)$ , siendo  $h'_1 = h' \cos \theta$  y  $h'_2 = h' \sin \theta$ . Se puede mostrar que el Jacobiano da como resultado  $J(h', \theta) = h'$ , y después de efectuar la integración marginal de  $P(h', \theta)$  con respecto al ángulo  $\theta$  obtenemos finalmente lo siguiente

$$P(h') = \frac{h'}{\sigma^2} I_0(p'h'/\sigma^2) e^{-(1/2\sigma^2)(h'^2 + p'^2)^2}, \quad (2.25)$$

donde  $p'^2 = \langle h'_1 \rangle^2 + \langle h'_2 \rangle^2 = (k_e E_e)^2 / (a^2 + f^2)$ , y la función  $I_0(x)$  es la función modificada de Bessel de orden cero [40]. Para la estadística de los tiempos de paso necesitamos los dos primeros momentos  $\langle t \rangle$  y  $\langle t^2 \rangle$ , los cuales se pueden calcular a través de la función generadora de momentos (FGM)  $G(2a\nu) = \langle e^{-2a\nu t} \rangle = \langle (I_r'^2 / h'^2)^\nu \rangle$ . La FGM se calcula explícitamente de la densidad de probabilidad  $P(h')$  dando como resultado

$$\begin{aligned} G(2a\nu) &= \left( \frac{I_r'}{2\sigma^2} \right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m + \nu + 1)}{(m!)^2} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m \\ &= G_0(2a\nu) e^{-\beta^2/2} M(\nu + 1, 1, \beta^2/2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $G_0(2a\nu) = (I_r'/2\sigma^2)^{-\nu} \Gamma(\nu + 1)$  es la función generadora de momentos en ausencia del campo eléctrico,  $M(\nu + 1, 1, \beta^2/2)$  la función hipergeométrica confluyente de Kummer y

$$\beta^2 = \frac{p'^2}{\sigma^2} = \frac{2a(k_e E_e)^2}{\epsilon(a^2 + f^2)}. \quad (2.27)$$

La estadística de los tiempos de paso se obtiene entonces de la FGM mediante las siguientes derivadas

$$\langle 2at \rangle = -\frac{dG}{d\nu} \Big|_{\nu=0}, \quad \langle 2at^2 \rangle = \frac{d^2 G}{d\nu^2} \Big|_{\nu=0}, \quad (2.28)$$

obteniéndose entonces después de cierta álgebra, la siguiente expresión

$$\langle 2at \rangle = \langle 2at \rangle_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{mm!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m, \quad (2.29)$$

donde

$$\langle 2at \rangle_0 = \ln \left( \frac{aI'_r}{\epsilon} \right) + \gamma, \quad (2.30)$$

es el MFPT en ausencia de la fuerza externa y  $\gamma = -\psi(1) = 0.577$  es el número de Euler. Para la varianza del tiempo de paso definida como  $(2a\Delta t)^2 \equiv \langle 2at^2 \rangle - \langle 2at \rangle^2$  obtenemos la siguiente expresión

$$\langle (2a\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \right) \frac{(-1)^m}{mm!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m - \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{mm!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m \right]^2. \quad (2.31)$$

De acuerdo con la QDT, la estadística de los tiempos de paso es válida en el límite de tiempos largos y para valores pequeños de las amplitudes tanto del campo eléctrico como del ruido interno. Como podemos observar las Ecs. (2.29) y (2.31) no contienen términos oscilantes, aunque dichas ecuaciones describan la rejación dinámica de un sistema que es rotacional por naturaleza.

### 2.2.2. Un criterio de detección de señales ópticas débiles

El criterio propuesto por Balle et. al para la detección de señales débiles tiene que ver con un valor crítico  $\beta_c$ , para el cual la reducción del tiempo de paso  $\langle t \rangle$  debe ser mayor o igual a la máxima varianza, esto es

$$[\langle t \rangle_{\beta_c} - \langle t \rangle_{\beta=0}]^2 \geq (\Delta t)_{\beta=0}^2. \quad (2.32)$$

Para una señal débil, se debe cumplir la condición de que la amplitud de la señal sea menor o igual a la intensidad de ruido interno, es decir  $E_e/\epsilon \leq 1$ , o bien valores pequeños del parámetro  $\beta$ . En estas condiciones se pueden aproximar tanto la escala de tiempo (2.29) como la varianza (2.31) de tal manera que

$$\langle 2at \rangle = \langle 2at \rangle_0 - \frac{\beta^2}{2}, \quad (2.33)$$

$$\langle (2a\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) - \frac{\beta^4}{8}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo estas expresiones en el criterio (2.32) y quedándonos solo a ordenes de  $\beta^4$ , tenemos entonces que el valor crítico de  $\beta_c$  satisface

$$\beta_c \geq [4\psi'(1)]^{1/4} = 1.6, \quad (2.35)$$

el cual corresponde al mismo valor reportado en [23]. El criterio establece que abajo de dicho valor crítico no hay detección y para valores mayores que dicho valor, la detección se realiza de manera eficiente. En otras palabras, si  $\beta > \beta_c$  entonces la dinámica debe ser dominada por la evolución determinista. En este caso  $\beta \rightarrow \infty$  y la FGM se aproxima a  $G(2a\nu) = (\alpha/\beta^2)^{-\nu}$  con  $\alpha = 2aI'_r/\epsilon$ , luego entonces el tiempo de paso y su varianza estarán dados por

$$\langle 2at \rangle = \ln \left( \frac{\alpha}{\beta^2} \right), \quad (2.36)$$

$$\langle (2a\Delta t)^2 \rangle = \frac{4}{\beta^2}. \quad (2.37)$$

En la Fig. 2.3, mostramos el valor crítico de  $\beta$  correspondiente a la unión entre las dos escalas de tiempo (2.33) y (2.36).

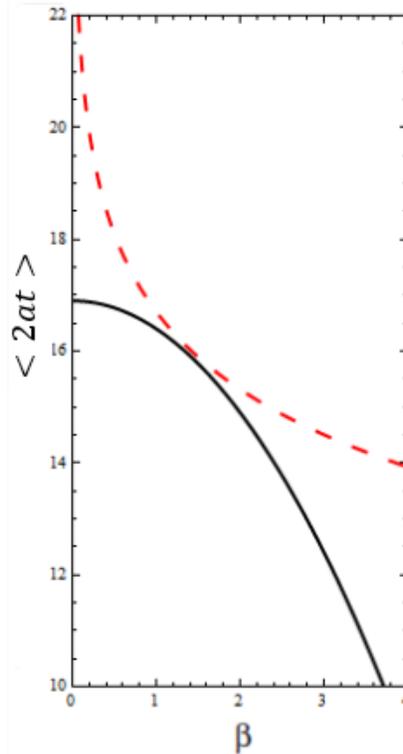


Figura 2.3: Resultados para el MFPT como función de  $\beta$  obtenidas de la Ec. (2.33) (línea sólida) y de la solución determinista Ec.(2.36) (línea punteada) para valores tales que  $\alpha = 1.794 \times 10^7$ .

El punto de unión entre ambas es el valor de  $\beta_c \approx 1.6$ .

### 2.3. Detección de señales ópticas débiles y los NLRT

Dos años después de la propuesta hecha por Vemuri y Roy para detectar señales ópticas débiles en un sistema láser en términos del RS, Jiménez-Aquino y Sancho mostraron que el RS podía obtenerse como una función de los NLRT [25], asociados a la dinámica transitoria del sistema láser tomando en cuenta los efectos de saturación de dicho sistema. Antes de establecer la conexión del RS con los NLRT, vamos a introducir la definición de NLRT y caracterizar, a través de esta escala de tiempo, la dinámica transitoria del sistema láser dada por la Ec. (2.5) en la aproximación  $A/F \ll 1$ . Posteriormente estudiaremos su conexión con el RS que nos cuantificará el otro criterio para la detección de señales ópticas débiles. Así que en el régimen de aproximación

$A/F \ll 1$ , la Ec. (2.5) se puede escribir como

$$\frac{dE}{dt} = aE - A|E|^2E + ifE + k_e E_e + \xi(t), \quad (2.38)$$

o en su forma vectorial como

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = a\mathbf{E} - A|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + W\mathbf{E} + k_e\mathbf{E}_e + \boldsymbol{\xi}(t). \quad (2.39)$$

Podemos observar de esta ecuación dinámica que el término  $a\mathbf{E} - A|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$  se asemeja a la expresión de una “fuerza” derivable de un “potencial biestable” en dos dimensiones en el espacio de coordenadas  $(E_1, E_2)$ , es decir,  $V(E_1, E_2) = -(a/2)(E_1^2 + E_2^2) + (A/4)(E_1^2 + E_2^2)^2$ , el cual se ilustra en la Fig. 2.4

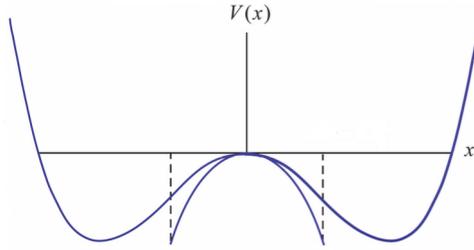


Figura 2.4: Potencial biestable unidimensional

El NLRT es una escala de tiempo que puede caracterizar la relajación dinámica de un estado inestable asociado a un potencial no lineal. Su definición fue introducida en los años 80 para tal propósito. En esta sección vamos a establecer su definición para caracterizar la relajación dinámica del sistema láser (2.39) en términos de su intensidad  $I(t) = |\mathbf{E}|^2$ . Esta escala de tiempo se define como [19, 20, 25]

$$T = \int_0^\infty \frac{\langle I(t) \rangle - \langle I \rangle_{st}}{\langle I(0) \rangle - \langle I \rangle_{st}} dt, \quad (2.40)$$

donde  $I(0)$  es el valor inicial de la intensidad al tiempo  $t = 0$  e  $I_{st} = a/A$  el valor de su estado estacionario. Esta escala de tiempo caracteriza entonces el proceso de encendido del sistema láser cuando, por efecto de la emisión espontánea cuantificada como fluctuaciones estocásticas, su intensidad experimenta un proceso de relajación desde su valor inicial  $I(0)$  hasta alcanzar el valor estacionario  $I_{st}$  antes mencionado. El cociente  $m(t) \equiv [\langle I(t) \rangle - \langle I \rangle_{st}] / [\langle I(0) \rangle - \langle I \rangle_{st}]$  es una cantidad adimensional y su integral como definido en la Ec. (2.40) es el área bajo la curva  $m(t)$ . Vamos ahora a calcular esta escala de tiempo para el proceso de encendido del sistema láser usando de nueva cuenta la QDT tomando en cuenta que dicha teoría se puede explicar mejor en el espacio transformado de coordenadas  $(E'_1, E'_2)$ . Recordemos también que la intensidad del láser es invariante ante una transformación o rotación de las coordenadas  $(E_1, E_2)$ . Antes de caracterizar la relajación dinámica del sistema láser antes mencionado, vamos a establecer una dinámica determinista que involucre la definición de un “potencial inestable” no lineal arbitrario, siendo el “potencial” del sistema láser (2.39) un caso particular. La dinámica determinista no

lineal para la intensidad de un sistema láser más general y en ausencia de fuerzas externas se puede definir como

$$\frac{dI}{dt} = f(I) \quad f(I) = \frac{I(I_{st} - I)}{C_0 + Ig(I)}, \quad (2.41)$$

donde  $C_0 = I_{st}/2a$  y  $g(I) > 0$  es un polinomio. La función  $f(I)$  posee dos raíces, la primera está en  $I = 0$  la cual corresponde al estado inestable tal que  $f'(I)|_{I=0} > 0$ , la otra raíz se encuentra en  $I = I_{st}$  y que corresponde al estado estable tal que  $f'(I)|_{I=0} < 0$ . Es fácil demostrar que la dinámica determinista para la intensidad del sistema láser (2.39) en ausencia del campo externo  $\mathbf{E}_e$ , se puede escribir como

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I(I_{st} - I)}{C_0}. \quad (2.42)$$

Al comparar esta expresión con la Ec. (2.41) vemos que ambos son compatibles si  $g(I) = 0$ . Usaremos la Ec. (2.41) para establecer una expresión general del NLRT de acuerdo con su definición. Si asumimos que  $\langle I(0) \rangle = 0$  entonces, después de sustituir la Ec. (2.41) en la Ec. (2.40) podemos escribir

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\langle I \rangle_{st}} \int_0^\infty [\langle I \rangle_{st} - \langle I(t) \rangle] dt \\ &= \frac{1}{2a} \left\langle \int_{I_0}^{I_{st}} \frac{dI}{I} \right\rangle + \frac{1}{I_{st}} \int_{I_0}^{I_{st}} g(I) dI, \end{aligned} \quad (2.43)$$

puesto que para  $t = 0$  se tiene  $I(0) \equiv I_0$  y para  $t \rightarrow \infty$  se tiene el valor de  $I(\infty) = I_{st}$ . La conexión entre el NLRT y la QDT se hace de la siguiente manera: debido a que al comienzo de la relajación dinámica la condición inicial debe ser una cantidad fluctuante, entonces la QDT asume que  $I(0) = h^2$ , siendo  $h$  una variable aleatoria que juega el papel de una condición inicial efectiva, responsable del decaimiento del estado inestable hasta alcanzar su valor del estado estacionario  $I(\infty) = I_{st}$ . Bajo estas condiciones el NLRT que caracteriza el decaimiento del estado inestable de un sistema láser no lineal será entonces

$$T = \left\langle \ln \left( \frac{I_{st}}{h^2} \right) \right\rangle + C_{NL}, \quad (2.44)$$

donde ahora

$$C_{NL} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{I_{st}} \int_{h^2}^{I_{st}} g(I) dI. \quad (2.45)$$

El término logarítmico representa el término universal característico del decaimiento de todo estado inestable, mientras que el segundo representa la contribución de los términos no lineales lejos del estado inestable inicial, donde las fluctuaciones estocásticas ya no son relevantes, es decir,  $h \rightarrow 0$ . El primer término tiene que ver entonces con la parte lineal del “potencial”. De hecho este primer término se puede calcular usando la QDT estudiado en la sección anterior en la aproximación lineal de la dinámica del sistema láser. Recordemos que nos interesa calcular el NLRT en el espacio transformado de coordenadas usando la transformación (2.10), para el cual la Ec. (2.39) se puede escribir también como

$$\frac{d\mathbf{E}'}{dt} = a\mathbf{E}' - A|\mathbf{E}'|^2\mathbf{E}' + k_e\mathbf{E}'_e + \boldsymbol{\xi}'(t). \quad (2.46)$$

La solución de esta ecuación lineal asumiendo que  $\mathbf{E}'(0) = 0$ , satisface la misma Ec. (2.13) y por tanto también la solución dada por la Ec. (2.16). Sin embargo, si tomamos en cuenta el proceso completo entonces (2.16) puede reescribirse como

$$I'(t) = h'^2 e^{2at} \theta(t_i - t) + I'_{st} \theta(t - t_i), \quad (2.47)$$

donde  $\theta(t)$  es la función de paso. Sustituyendo la Ec. (2.47) en (2.40) podemos demostrar que en la aproximación lineal el NLRT será

$$T_L = \frac{1}{2a} \left\langle \ln \left( \frac{I'_{st}}{h'^2} \right) \right\rangle - C_L, \quad (2.48)$$

donde

$$C_L = \frac{1}{2a} \left[ 1 - \frac{\langle h'^2 \rangle}{I'_{st}} \right]. \quad (2.49)$$

Esta escala de tiempo así como  $C_L$  se pueden calcular a través de la densidad de probabilidad marginal  $P(h')$  dada por la Ec. (2.25). Primeramente se puede mostrar que  $\langle h'^2 \rangle = 2\sigma^2 + p'^2$ , donde ya sabemos que  $\sigma^2 = \epsilon/2a$  y  $p'^2 = (k_e E_e)^2 / (a^2 + f^2)$ , el cual podemos despreciar para pequeñas intensidades del ruido interno y pequeñas amplitudes del campo eléctrico, por lo que  $C_L \approx 1/2a$ . Por otro lado, el NLRT en el régimen lineal es entonces

$$T_L = T_L^0 + \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{mm!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m, \quad (2.50)$$

donde

$$\beta^2 = \frac{p'^2}{\sigma^2} = \frac{2a(k_e E_e)^2}{\epsilon(a^2 + f^2)}, \quad (2.51)$$

y

$$T_L^0 = \frac{1}{2a} \left\{ \ln \left( \frac{aI'_{st}}{\epsilon} \right) + \gamma - 1 \right\}, \quad (2.52)$$

es el NLRT en ausencia del campo eléctrico ( $\beta = 0$ ) y  $\gamma = 0.577$  de nuevo el número de Euler. Si hacemos uso de la siguiente identidad  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{mm!} = -[E_1(x) + \gamma + \ln(x)]$  [40], entonces la Ec. (2.50) se puede escribir como

$$T_L = T_L^0 - \frac{1}{2a} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)]. \quad (2.53)$$

Igualando las Ecs. (2.48) y (2.53) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \left\langle \ln \left( \frac{I'_{st}}{h'^2} \right) \right\rangle &= \frac{1}{2a} \left\{ \ln \left( \frac{aI'_{st}}{\epsilon} \right) + \gamma \right\} \\ &- \frac{1}{2a} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalmente el NLRT asociado a la relajación dinámica de un sistema láser no lineal de acuerdo con la Ec. (2.44) se puede escribir como

$$T_{NL} = T_0 - \frac{1}{2a} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)] + C_{NL}, \quad (2.55)$$

siendo ahora

$$T_0 = \frac{1}{2a} \left\{ \ln \left( \frac{aI'_{st}}{\epsilon} \right) + \gamma \right\}. \quad (2.56)$$

En el caso particular de la dinámica (2.46), podemos ver que  $C_{NL} = 0$  y por lo tanto el NLRT que caracteriza su decaimiento será

$$T_e = T_0 - \frac{1}{2a} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)], \quad (2.57)$$

y  $T_0$  es el mismo que la Ec. (2.56). La escala de tiempo (2.57) caracteriza entonces el proceso de encendido del sistema láser (2.46) cuando su intensidad relaja hasta el valor de su estado estacionario. En la siguiente sección calcularemos el RS como función de las escalas de tiempo (2.57) y (2.56).

### 2.3.1. El Receptor de Salida

El RS es el criterio propuesto por Vemuri y Roy [14] para detectar señales débiles. El procedimiento para calcular dicha cantidad es el siguiente: en la Fig. 2.5 se muestra la evolución dinámica del promedio de la intensidad del sistema láser dada por la Ec. (2.46) en ausencia y en presencia del campo eléctrico externo (señal externa).

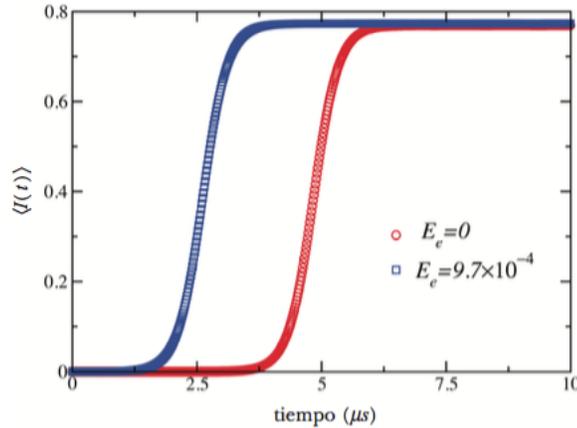


Figura 2.5: Evolución dinámica del promedio  $\langle I(t) \rangle$ . La curva de color rojo representa la evolución temporal en ausencia de campo eléctrico. La curva azul corresponde al caso cuando el campo eléctrico está presente.

El RS se define como el cociente  $\mathcal{R}_S = A_e/A_0$ , donde  $A_0$  representa el área bajo la curva en ausencia del campo externo y  $A_e$  el área correspondiente bajo la acción del campo externo. En el trabajo de Vemuri y Roy el láser actúa como un receptor super-regenerativo periódicamente encendido y apagado a un tiempo  $T_e$ , siendo éste un tiempo para el cual la intensidad haya alcanzado su valor estacionario. En este sentido el NLRT se puede escribir también de la siguiente

manera [25]

$$T = \int_0^\infty \frac{\langle I(t) \rangle - \langle I \rangle_{st}}{\langle I(0) \rangle - \langle I \rangle_{st}} dt \simeq \int_0^{T_C} \frac{\langle I(t) \rangle - \langle I \rangle_{st}}{\langle I(0) \rangle - \langle I \rangle_{st}} dt. \quad (2.58)$$

Esta expresión tiene sentido si  $T_C \geq C T_0$ , donde  $T_0$  es el mismo que la Ec. (2.56) y  $C=1.5$  es una constante que garantiza que el sistema ha alcanzado su estado estacionario. Si suponemos nuevamente que  $\langle I(0) \rangle = 0$ , entonces de acuerdo con la Fig. 2.5 podemos mostrar que el RS tiene la siguiente estructura algebraica

$$\mathcal{R}_S = \frac{A_e}{A_0} = \frac{T_e - T_C}{T_0 - T_C} = 1 + \frac{T_0 - T_e}{T_C - T_0}, \quad (2.59)$$

donde  $T_e$  es la escala de tiempo promedio que ocupa el sistema en alcanzar su estado estacionario en presencia de la señal externa, dada por la Ec. (2.57) y  $T_0$  el tiempo promedio en alcanzar el mismo valor estacionario en ausencia de dicha señal externa. Al sustituir las expresión de  $T_e$  obtenemos finalmente

$$\mathcal{R}_S = 1 + \frac{[E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)]}{2a(T_C - T_0)}. \quad (2.60)$$

Este resultado se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.6, como función del campo aplicado. La línea continua corresponde a la expresión teórica (2.60) y los puntos en rojo a los cálculos de la simulación numérica de la Ec. (2.46). La gráfica nos muestra que el RS es muy sensible a la presencia de señales ópticas débiles y el proceso de detección de la señal comienza para ciertos valores de  $E_e$  cercanos a  $10^{-5}$ .

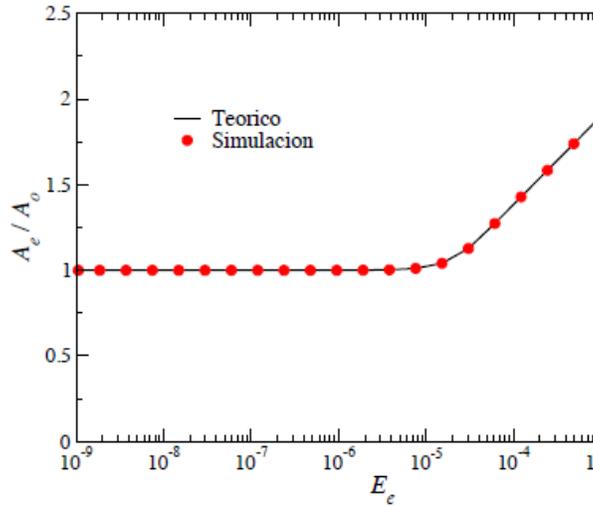


Figura 2.6: Receptor de Salida como función del NLRT

## Capítulo 3

# Detección de señales débiles en un campo magnético

Casi 20 años después de los trabajos relacionados con la detección de señales ópticas débiles en un sistema láser y siguiendo la misma idea de este sistema, fue propuesto otro mecanismo alternativo para detectar amplitudes débiles de un campo eléctrico aplicado [27, 28]. Éste consiste en el decaimiento del estado inestable de una partícula Browniana con carga eléctrica, inmersa en un baño térmico de temperatura y bajo la acción de campos eléctrico y magnético cruzados. A pesar de que este sistema es, en principio diferente que el sistema láser estudiado en las secciones anteriores, la dinámica que sigue la PB es sorprendentemente muy similar al del sistema láser. En este sentido nuestra propuesta tiene un sustento basado en las ideas subyacentes del sistema láser. Hemos visto que para el sistema láser la descripción teórica se basa en una ecuación tipo Langevin para el campo eléctrico complejo, mientras que para la PB con carga eléctrica la descripción teórica se llevará a cabo en el contexto de la ecuación de Langevin. Mostraremos que ambas dinámicas tienen mucha similitud debido a que las ecuaciones asociadas son muy parecidas matemáticamente, motivo por el cual podremos ahorrar algunos cálculos algebraicos realizados ya en la sección anterior. Nuestro sistema consiste entonces en lo siguiente: consideremos una PB con carga eléctrica  $q_0$  y masa  $m$  inmersa en un baño térmico de temperatura  $T$ , localizada en el estado de equilibrio inestable de un potencial biestable bidimensional y en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados. El potencial biestable bidimensional es entonces  $V(x, y) = -(a_0/2)(x^2 + y^2) + (b_0/4)(x^2 + y^2)^2$ , donde  $a_0, b_0 > 0$ , y  $r^2 \equiv |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2$  es el módulo al cuadrado del vector de posición  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Supondremos que el campo magnético es un vector constante que apunta a lo largo del eje  $z$ , es decir,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  y el campo eléctrico un vector constante localizado sobre el plano cartesiano de coordenadas  $x$ - $y$  tal que  $\mathbf{E}_e = (E_{ex}, E_{ey})$ . En este caso la fuerza externa de Lorentz que actúa sobre la PB está dada por  $\mathbf{F} = (q_0)\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q_0\mathbf{E}_e$  donde  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , por lo que dicha fuerza debe estar sobre el plano  $x$ - $y$ . La ecuación de Langevin asociada a la PB se puede escribir entonces como [29]

$$m\dot{\mathbf{u}} = -\gamma_0\mathbf{u} + a_0\mathbf{r} - b_0r^2\mathbf{r} + q_0\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q_0\mathbf{E}_e + \sqrt{\lambda}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (3.1)$$

donde  $\gamma_0 > 0$  es la constante de fricción y la fuerza fluctuante  $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_x, \xi_y)$  satisface la propiedad de ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo  $\langle \xi_i \rangle = 0$  y función de correlación

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad i, j = x, y, \quad (3.2)$$

siendo  $\lambda$  es la intensidad del ruido que satisface la relación de fluctuación-disipación tal que  $\lambda = \gamma_0 k_B T$ . Estamos interesados en estudiar la relajación dinámica del estado inestable de la PB en el régimen sobreamortiguado para el cual la ecuación anterior se reduce entonces a

$$\dot{\mathbf{r}} = \tilde{a}\mathbf{r} - \tilde{b}r^2\mathbf{r} + \tilde{W}\mathbf{r} + \tilde{q}\Lambda\mathbf{E}_e + \sqrt{\tilde{\lambda}}\Lambda\boldsymbol{\xi}(t), \quad (3.3)$$

donde

$$\tilde{a} = \frac{a}{1+C^2}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{1+C^2}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{1+C^2}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\gamma_0^2(1+C^2)^2}, \quad (3.4)$$

con  $a = a_0/\gamma_0$ ,  $b = b_0/\gamma_0$ ,  $q = q_0/\gamma_0$ , y  $C = q_0 B/\gamma_0$  que es una constante adimensional. Las matrices  $\tilde{W}$  y  $\Lambda$  están dadas por

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega} \\ -\tilde{\Omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & C \\ -C & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

con  $\tilde{\Omega} = \tilde{a}C$ . Si comparamos los tres primeros términos de la Ec. (3.3) con los tres primeros términos de la Ec. (2.39), podemos observar que sus estructuras matemáticas son idénticas si hacemos la correspondencia  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $|\mathbf{E}|^2 \rightarrow r^2$ ,  $W \rightarrow \tilde{W}$ ,  $a \rightarrow \tilde{a}$  y  $A \rightarrow \tilde{b}$ . Por esta razón la dinámica que sigue la PB es muy similar a la del sistema láser y que corresponde a una dinámica de carácter rotacional, véase la Fig. 2.1. Para poder calcular la estadística de los tiempos de paso debemos recurrir nuevamente a la QDT, la cual como hemos mostrado, es apropiada en un sistema transformado de las coordenadas mediante una matriz de rotación. En este caso la transformación será

$$\mathbf{r}' = e^{-\tilde{W}t}\mathbf{r}, \quad (3.6)$$

donde nuevamente  $\mathbb{R}(t) = e^{\tilde{W}t}$  representa una matriz de rotación tal que  $\mathbb{R}^{-1}(t) = e^{-\tilde{W}t}$  es su inversa o su transpuesta, siendo

$$\mathbb{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\Omega}t & \text{sen } \tilde{\Omega}t \\ -\text{sen } \tilde{\Omega}t & \cos \tilde{\Omega}t \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

y por lo consiguiente la Ec. (3.3) se transforma como

$$\dot{\mathbf{r}}' = \tilde{a}\mathbf{r}' - \tilde{b}r'^2\mathbf{r}' + \tilde{q}\Lambda\mathbf{E}'_e + \sqrt{\tilde{\lambda}}\Lambda\boldsymbol{\xi}'(t), \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{E}'_e = \mathbb{R}^{-1}(t)\mathbf{E}_e$ ,  $\boldsymbol{\xi}' = \mathbb{R}^{-1}(t)\boldsymbol{\xi}(t)$ . También el modulo al cuadrado  $r'^2 \equiv |\mathbf{r}'|^2 = x'^2 + y'^2$  satisface la condición  $r'^2 = r^2$ , lo cual significa que es invariante ante la transformación de rotación. En la Fig. 3.1 se muestran las trayectorias de la PB en el espacio transformado  $(x', y')$ .

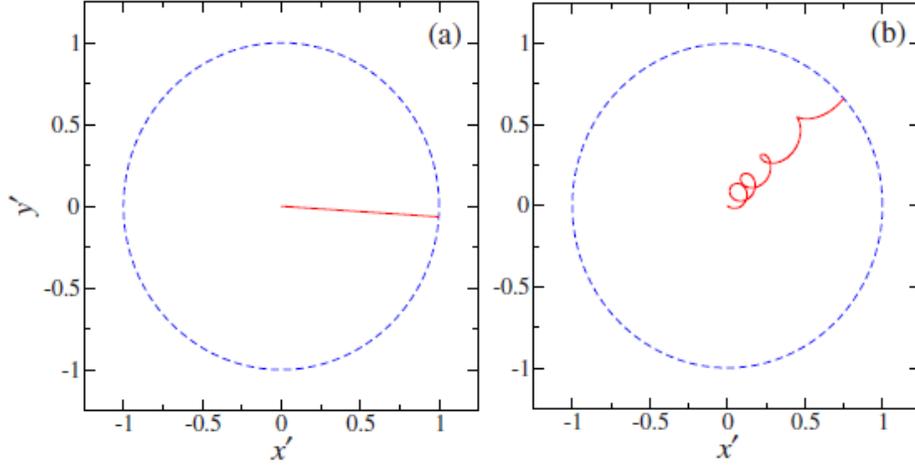


Figura 3.1: Evolución dinámica de la PB en el espacio transformado  $(x', y')$  para valores  $a_0 = 300$ ,  $\gamma_0 = 270$ ,  $C = 10$ , (a)  $qE = 10^{-3}$  y (b)  $qE = 20.0$

### 3.1. Estadística de los tiempos de paso

De forma similar como se hizo con el sistema láser, vamos ahora a calcular la estadística de los tiempos de paso para la PB usando de nueva cuenta la QDT. Recordemos que la QDT es apropiada para describir la relajación dinámica en el régimen lineal del potencial y en el sistema transformado de coordenadas. En el régimen lineal el potencial inestable está dada por  $V(x, y) = -(a_0/2)(x^2 + y^2) = -a_0 r^2/2$ , donde ahora la PB está restringida a moverse en la región delimitada por  $-R^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ , donde  $R$  es una barrera absorbente del potencial previamente establecido. Podemos establecer que la barrera del potencial sea  $R^2 = C_0 r_{st}^2$ , donde  $0 < C_0 \ll 1$  y  $r_{st}^2 = a_0/b_0$  es el valor del estado estacionario. Así que la Ec. de Langevin (3.8) en el régimen lineal será simplemente

$$\dot{\mathbf{r}}' = \tilde{a}\mathbf{r}' + \tilde{q}\Lambda\mathbf{E}'_e + \Lambda\xi'(t). \quad (3.9)$$

La estadística de los tiempos de paso se obtiene a través de la solución de esta ecuación dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{h}'(t) e^{at}, \quad (3.10)$$

donde

$$\mathbf{h}'(t) = \int_0^\infty e^{-\tilde{a}s} \Lambda \mathbb{R}^{-1}(s) [\tilde{q}\mathbf{E}'_e + \sqrt{\tilde{\lambda}}\xi(s)] ds, \quad (3.11)$$

con la condición inicial  $\mathbf{r}'(0) = 0$ . Podemos observar que la Ec. (3.11) es muy similar a la Ec. (2.14) calculada para el sistema láser. En este sentido podemos mostrar que en el límite de tiempos largos tales que  $t \gg 1/2\tilde{a}$  y para valores pequeños del campo externo y de la intensidad del ruido interno, también  $d\mathbf{h}'/dt \rightarrow 0$  y por tanto el proceso  $\mathbf{h}'$  se convierte en una VAG dada por  $\mathbf{h}'(\infty) = \mathbf{h}'$ . En

este límite de aproximación el proceso  $\mathbf{r}'(t)$  se vuelve un proceso cuasi-determinista y también satisface

$$r'^2(t) = h'^2 e^{2at}, \quad (3.12)$$

donde  $h'^2 \equiv |\mathbf{h}'|^2 = h_1'^2 + h_2'^2$ . Nuevamente, el tiempo medio requerido para la PB en alcanzar la barrera de potencial  $R$ , cuando relaja desde su estado inestable inicial, por efecto de las fluctuaciones, tiene la expresión

$$\langle t \rangle = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\langle \ln \left( \frac{R'^2}{h'^2} \right) \right\rangle. \quad (3.13)$$

Igual que en la sección anterior, esta escala de tiempo se puede calcular a través de la densidad de probabilidad marginal  $P(h')$ , que a su vez requiere de la densidad de probabilidad conjunta  $P(h_1', h_2')$ . Ésta última requiere de la matriz de correlación  $\sigma_{ij} = \langle h_i' h_j' \rangle - \langle h_i' \rangle \langle h_j' \rangle$ , la cual se obtiene de la Ec. (3.11). Podemos considerar sin pérdida de generalidad que el campo eléctrico está dado por  $\mathbf{E} = (E, E)/\sqrt{2}$  y por tanto es fácil mostrar que

$$\langle h_1' \rangle = \langle h_2' \rangle = \frac{q_0 E_e}{\sqrt{2} a_0}, \quad (3.14)$$

y

$$\langle h_i' h_j' \rangle = \langle h_i' \rangle \langle h_j' \rangle + \frac{\lambda}{2a_0 \gamma_0} \delta_{ij}, \quad (3.15)$$

De nueva cuenta podemos notar que la matriz de correlación es diagonal con elementos dados por  $\sigma_{ii} = \sigma^2 = \lambda/2a_0 \gamma_0$ , o bien  $\sigma^2 = D/2a$ , donde  $D = \lambda/\gamma_0^2 = k_B T/\gamma_0$  es el coeficiente de difusión de Einstein. La densidad de probabilidad marginal es la misma que la Ec. (2.25) excepto que ahora  $p'^2 = \langle h_1' \rangle^2 + \langle h_2' \rangle^2 = (q_0 E_e)^2/a_0^2$ . Siguiendo los mismos pasos algebraicos dados en la sección 2.2.1, podemos concluir que el MFPT tiene la siguiente expresión

$$\langle 2\tilde{a}t \rangle = \langle 2\tilde{a}t \rangle_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m, \quad (3.16)$$

con

$$\beta^2 = \frac{p'^2}{\sigma^2} = \frac{2(q_0 E_e)^2}{a\lambda}, \quad (3.17)$$

y

$$\langle 2\tilde{a}t \rangle_0 = \ln \left( \frac{a_0 \gamma_0 R'^2}{\lambda} \right) + \gamma, \quad (3.18)$$

es el MFPT en ausencia de la fuerza externa y  $\gamma=0.577$  es el número de Euler. La varianza es en este caso

$$\langle (2\tilde{a}\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \right) \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m - \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m \right]^2. \quad (3.19)$$

Tal como podemos observar, las Ecs. (3.16) y (3.19) tienen exactamente la misma estructura matemática que las que fueron obtenidas para el el sistema láser, excepto por el parámetro  $\beta$ . Tampoco contienen términos oscilantes que hagan notar la naturaleza rotacional de la dinámica de Langevin (3.8). La razón de la ausencia de las oscilaciones en dichas expresiones se debe a que en la región de valores pequeños del parámetro  $\beta$ , la intensidad del ruido interno es dominante sobre la amplitud del campo eléctrico inyectado y la trayectoria que sigue la PB es prácticamente una línea recta, tal como se muestra en la Fig. 3.1(a).

### 3.1.1. Un criterio de detección de señales débiles

El criterio (2.32) propuesto por Balle et. al. para la detección de señales ópticas débiles, también lo podemos aplicar en el proceso de decaimiento del estado inestable de la PB. Recordemos que para la detección de amplitudes débiles del campo inyectado el parámetro  $\beta$  es pequeño, de tal manera que las expresiones para el promedio del tiempo de paso (3.16) y la varianza (3.19) se pueden aproximar como

$$\langle 2\tilde{a}t \rangle = \langle 2\tilde{a}t \rangle_0 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{16}, \quad (3.20)$$

$$\langle (2\tilde{a}\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) - \frac{\beta^4}{8}. \quad (3.21)$$

Las cuales al ser sustituidos en (2.32) obtenemos de nueva cuenta el valor crítico

$$\beta_c \geq [4\psi'(1)]^{1/4} = 1.6, \quad (3.22)$$

que es exactamente el mismo valor que se obtuvo para el sistema láser estudiado por Balle et. al. [23]. También abajo de este valor crítico no debe haber detección y por encima de dicho valor  $\beta > \beta_c$ , la detección se realiza eficientemente. Si  $\beta \rightarrow \infty$  la FGM es igual a  $G(2a\nu) = (\alpha/\beta^2)^{-\mu}$  con  $\alpha = 2a_0\gamma_0 R'^2/\lambda$ , de este modo el tiempo de paso y su varianza se aproximan a

$$\langle 2\tilde{a}t \rangle = \ln \left( \frac{\alpha}{\beta^2} \right), \quad (3.23)$$

$$\langle (2\tilde{a}\Delta t)^2 \rangle = \frac{4}{\beta^2}. \quad (3.24)$$

Lo que podemos concluir en este apartado es lo siguiente: aunque exista una similitud en el comportamiento dinámico del sistema láser con el de la PB en un campo magnético, ambos sistemas son en principio diferentes y sin embargo, el criterio de detección propuesto conduce exactamente a la misma condición que debe satisfacer el parámetro crítico, como se muestra en la Ec. (3.22). Este resultado es sin duda sorprendente por las razones antes mencionadas. En la Fig. 3.2 mostramos el valor crítico de  $\beta$  correspondiente a la unión entre las dos escalas de tiempo (3.20) y (3.23). Este valor crítico se puede entender como una cota inferior para la validez de la aproximación de la escala de tiempo determinista (3.23).

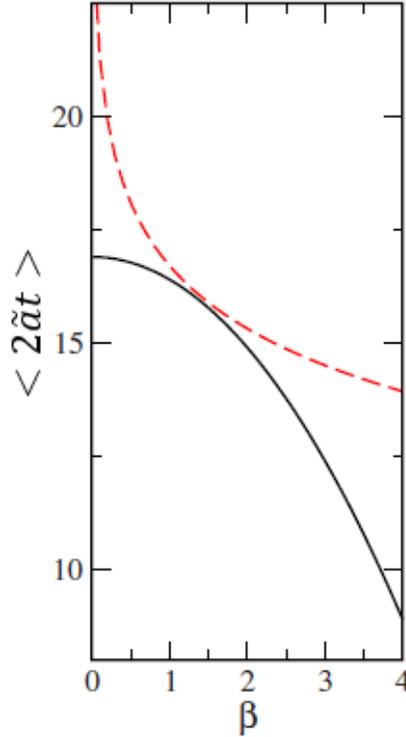


Figura 3.2: Resultados para el MFPT como función de  $\beta$  obtenidas de la Ec. (3.20) (línea sólida) y de la solución determinista Ec.(3.23) (línea punteada) para los parámetros del sistema tales que  $2a_0\gamma_0 R'^2/\lambda=1.8 \times 10^7$

### 3.2. Detección de señales débiles y los NLRT

En esta sección vamos a mostrar que también es posible calcular el RS como función del NLRT asociado al decaimiento del estado inestable de un potencial biestable bidimensional para la PB, de forma muy similar como en el sistema láser. Para el caso de la PB, esta escala de tiempo se define en términos del valor medio  $\langle \rho(t) \rangle$ , con  $\rho(t) \equiv r^2(t)$ , de la siguiente manera

$$T = \int_0^\infty \frac{\langle \rho(t) \rangle - \langle \rho \rangle_{st}}{\langle \rho(0) \rangle - \langle \rho \rangle_{st}}. \quad (3.25)$$

También es posible definir una dinámica determinista para potenciales no lineales arbitrarios en términos de  $\rho(t)$ , la cual se define como

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho) \quad f(\rho) = \frac{\rho(\rho_{st} - \rho)}{C_0 + \rho g(\rho)}, \quad (3.26)$$

donde  $C_0 = \rho_{st}/2\tilde{\alpha}$  y  $g(\rho) > 0$  es un polinomio. La función  $f(\rho)$  posee dos raíces: la primera es  $\rho = 0$  que corresponde al estado inestable tal que  $f'(\rho)|_{\rho=0} > 0$ , la otra raíz está en  $\rho = \rho_{st}$  y

corresponde al estado estacionario estable tal que  $f'(\rho)|_{\rho=0} < 0$ . En particular la Ec. (3.26) es consistente con el potencial biestable cuando  $g(\rho) = 0$ .

La conexión entre el NLRT y la QDT se establece de nueva cuenta asumiendo que la condición inicial  $\rho(0) = h^2$  es una variable aleatoria, y juega el papel de una condición inicial efectiva responsable del decaimiento del estado inestable de la PB hasta alcanzar su valor del estado estacionario  $\rho(\infty) = \rho_{st}$ . Si además suponemos que  $\langle \rho(0) \rangle = 0$  entonces, al sustituir le Ec. (3.26) en la Ec. (3.25) obtenemos el NLRT asociado a un potencial no lineal arbitrario

$$T = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\langle \ln \left( \frac{\rho_{st}}{h^2} \right) \right\rangle + C_{NL}^M, \quad (3.27)$$

donde

$$C_{NL}^M = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_{st}} \int_{h^2}^{\rho_{st}} g(\rho) d\rho. \quad (3.28)$$

El término logarítmico es otra vez el término universal característico del decaimiento de todo estado inestable, mientras que  $C_{NL}$  da cuenta de las contribuciones no lineales del potencial lejos del estado inestable inicial. Siguiendo los mismos pasos algebraicos del sistema láser, el primer término de (3.27) se calcula usando la QDT en la aproximación lineal de la dinámica dada por la Ec. (3.9). Recordemos que también  $\rho(t) = \rho'(t)$ , de modo que en este régimen lineal también el proceso completo se escribe como

$$\rho'(t) = h'^2 e^{2\tilde{a}t} \theta(t_i - t) + \rho'_{st} \theta(t - t_i), \quad (3.29)$$

donde  $\theta(t)$  es la función de paso. Sustituyendo la Ec. (3.29) en (3.25) podemos demostrar que en la aproximación lineal el NLRT será

$$T_L^M = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\langle \ln \left( \frac{\rho'_{st}}{h'^2} \right) \right\rangle - C_L^M, \quad (3.30)$$

donde  $C_L^M = (1/2\tilde{a})[1 - (\langle h'^2 \rangle / \rho'_{st})]$ . También es posible mostrar que  $C_L^M \approx 1/2\tilde{a}$  y

$$T_L^M = T_{0L}^M + \frac{1}{2\tilde{a}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{mm!} \left( \frac{\beta^2}{2} \right)^m, \quad (3.31)$$

donde  $\beta^2$  es lo mismo que la Ec. (4.15), y

$$T_{0L}^M = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\{ \ln \left( \frac{a_0 \gamma_0 \rho'_{st}}{\lambda} \right) + \gamma - 1 \right\}, \quad (3.32)$$

es el NLRT en ausencia del campo eléctrico ( $\beta = 0$ ) y  $\gamma$  el número de Euler. Finalmente concluimos que el NLRT asociado a la relajación dinámica de una PB en un potencial no lineal arbitrario y en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados está dado por

$$T_{NL}^M = T_0^M - \frac{1}{2\tilde{a}} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)] + C_{NL}^M, \quad (3.33)$$

con

$$T_0^M = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\{ \ln \left( \frac{a_0 \gamma_0 \rho'_{st}}{\lambda} \right) + \gamma \right\} = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\{ \ln \left( \frac{a \rho'_{st}}{D} \right) + \gamma \right\}. \quad (3.34)$$

En el caso particular de la dinámica (3.8) podemos concluir que  $C_{NL}^M = 0$  y por lo tanto el NLRT que caracteriza el decaimiento del estado inestable de la partícula será

$$T_e^M = T_0^M - \frac{1}{2a} [E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)], \quad (3.35)$$

siendo  $T_0^M$  lo mismo que la Ec. (3.34).

### 3.2.1. El Receptor de Salida

De la misma manera como en el sistema láser, podemos también calcular el RS como el parámetro que caracteriza el proceso de detección de la señal externa débil, en función de los NLRT. La Fig. 3.3, muestra la evolución temporal del promedio  $\langle r^2(t) \rangle$  de la PB en presencia y en ausencia del campo eléctrico externo, de acuerdo con la dinámica no lineal dada por la Ec. (3.8).

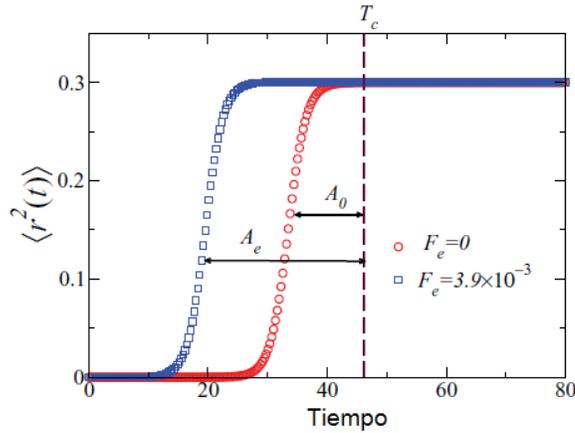


Figura 3.3: Simulación de la evolución temporal de  $\langle r^2(t) \rangle$  durante el intervalo de tiempo  $T_c = 46.2$  tal como se indica en la línea punteada. Los valores de los parámetros son  $a_0 = 3 \times 10^2$ ,  $b_0 = 10^3$ ,  $\gamma_0 = 9 \times 10^2$ ,  $C = 10^{-2}$  y  $\lambda = 10^{-4}$ . Los círculos corresponden a la ausencia del campo externo  $F_e = 0$  y los cuadrados cuando  $F_e = 3.9 \times 10^{-3}$ .

De igual forma como en el caso del sistema láser, el NLRT también se puede aproximar como

$$T = \int_0^\infty \frac{\langle \rho'(t) \rangle - \langle \rho' \rangle_{st}}{\langle \rho'(0) \rangle - \langle \rho' \rangle_{st}} dt \simeq \int_0^{T_c} \frac{\langle \rho'(t) \rangle - \langle \rho' \rangle_{st}}{\langle \rho'(0) \rangle - \langle \rho' \rangle_{st}} dt \quad (3.36)$$

donde  $T_c = 46.2$  corresponde al tiempo que garantiza que la PB ha alcanzado sus estado estacionario. De acuerdo con su definición y de la Fig. 3.3, el RS lo expresamos como

$$\mathcal{R}_S = \frac{A_e}{A_0} = 1 + \frac{T_0^M - T_e^M}{T_c - T_0^M}. \quad (3.37)$$

Al sustituir la Ec. (3.35) concluimos que el RS está dada por

$$\mathcal{R}_S = \frac{A_e}{A_0} = 1 + \frac{[E_1(\beta^2/2) + \gamma + \ln(\beta^2/2)]}{2\tilde{a}(T_c - T_0^M)}. \quad (3.38)$$

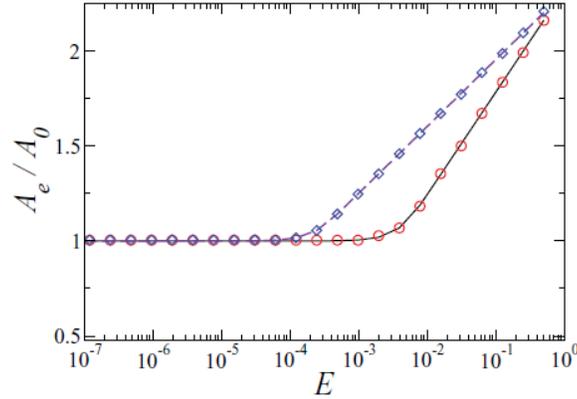


Figura 3.4: Receptor de salida como función del campo eléctrico  $E$ . Las líneas continua y punteada corresponden al resultado teórico (3.38) para intensidades de ruido  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-7}$  respectivamente. Con los valores de los parámetros  $a_0 = 300$ ,  $b_0 = 1000$ ,  $\gamma_0 = 900$ ,  $C = 10^{-2}$ . Los círculos y cuadrados corresponden a la simulación numérica.

La Fig. 3.4 muestra la gráfica del RS (3.38) como función de la fuerza externa por unidad de carga y su comparación con los resultados de la simulación numérica de la Ec. (3.8) para valores asignados a los parámetros. En la gráfica podemos ver que el RS es muy sensible a los valores pequeños de la amplitud del campo eléctrico externo y de la intensidad del ruido interno. Observamos que conforme disminuye la intensidad del ruido, también lo hace la amplitud del campo eléctrico. La gráfica corresponde a los valores de la intensidad del ruido  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-7}$ . En cada caso la detección ocurre para valores de la fuerza eléctrica por unidad de carga de  $E \approx 10^{-2}$  y  $E \approx 10^{-4}$ , respectivamente. También el RS es muy similar al caso del sistema láser.



## Capítulo 4

# Detección de señales débiles en un baño térmico con memoria

Nuestra tesis concluye en este capítulo con el estudio del proceso de detección de amplitudes débiles de un campo eléctrico externo, en la relajación dinámica del estado inestable de una PB con carga eléctrica inmersa en un baño térmico con memoria (proceso no-Markoviano) y bajo la acción de campos eléctrico y magnético cruzados. Nuestra propuesta se formula en términos de la ecuación de Langevin generalizada (ELG) caracterizada por un decaimiento exponencial en el kernel de fricción con memoria (kernel de fricción tipo Ornstein-Uhlenbeck). Usaremos de nueva cuenta los dos criterios formulados en los capítulos anteriores y compararemos los resultados obtenidos en este caso no-Markoviano con los obtenidos en el caso Markoviano estudiado en el capítulo 3. Debemos mencionar que nuestra descripción también se llevará a cabo en el régimen sobre-amortiguado de la EGL

### 4.1. Ecuación Generalizada de Langevin

Consideremos una PB con carga eléctrica  $q_0$  y masa  $m$  inmersa en un baño térmico de temperatura  $T$  e inicialmente localizada en el estado de equilibrio inestable del potencial bidimensional  $V(x, y)$  definida ya en el capítulo anterior. De la misma manera que en el capítulo anterior, tanto el campo eléctrico como el magnético son constantes tal que  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  y  $\mathbf{E}_e = (E_{ex}, E_{ey})$ , de modo que la fuerza de Lorentz está en el plano  $xy$ . La dinámica no-Markoviana de una PB cargada bajo la acción de campos eléctrico y magnético externos que toma en cuenta la interacción térmica no instantánea con sus alrededores, se describe en general por la EGL con kernel de fricción arbitrario. En el presente caso, la EGL se puede escribir como

$$m\dot{\mathbf{u}} = a_0\mathbf{r} - b_0r^2\mathbf{r} + q_0\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q_0\mathbf{E}_e - \int_0^t \gamma(t-t')\mathbf{u}(t')dt' + \mathbf{f}(t), \quad (4.1)$$

donde  $\gamma(t-t')$  es el Kernel de fricción con memoria,  $\mathbf{f}(t)$  la fuerza fluctuante que suponemos Gaussiana con promedio nulo y función de correlación dado por  $\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = k_B T \delta_{ij} \gamma(t-t')$ ,

que corresponde a la relación de fluctuación-disipación de segunda clase [35, 36]. En nuestro problema usaremos el kernel de memoria tipo Ornstein-Uhlenbeck (OU) definido por  $\gamma(t-t') = (\gamma_0/\tau)e^{-|t-t'|/\tau}$ , siendo  $\gamma_0$  el coeficiente de fricción y  $\tau$  el tiempo de correlación del ruido interno, y por tanto

$$\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = \frac{\gamma_0 k_B T}{\tau} e^{-|t-t'|/\tau}. \quad (4.2)$$

El siguiente paso consiste en caracterizar el decaimiento del estado inestable del potencial usando la QDT y la solución lineal de la Ec. (4.1). Esto al parecer no es una tarea fácil de lograr debido a la estructura algebraica de dicha ecuación. Sin embargo, existe un método que nos permite aplicar la QDT. Éste consiste en introducir un cambio de variable que permite reescribir la dinámica (4.1) en un conjunto acoplado de ecuaciones cuasi-Markovianas. El cambio de variable es entonces

$$\boldsymbol{\eta}(t) = -\frac{\gamma_0}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \mathbf{u}(t') dt' + \mathbf{f}(t), \quad (4.3)$$

donde

$$\mathbf{f}(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \boldsymbol{\xi}(t') dt', \quad (4.4)$$

de tal manera que la dinámica (4.1) se transforma en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas cuasi-Markovianas

$$m\dot{\mathbf{u}} = a_0 \mathbf{r} - b_0 r^2 \mathbf{r} + q_0 \mathbf{u} \times \mathbf{B} + q_0 \mathbf{E}_e + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (4.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{\tau} \boldsymbol{\eta} - \frac{\gamma_0}{\tau} \mathbf{u} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\tau} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (4.6)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}(t)$  es un ruido blanco Gaussiano con valor medio nulo y función de correlación  $\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$ . Estamos interesados en la caracterización del proceso de decaimiento del estado inestable en el régimen sobre-amortiguado y en las aproximaciones para los cuales  $1 - a\tau \gg b\tau(3x^2 + y^2)$ ,  $1 - a\tau \gg b\tau(3y^2 + x^2)$  y  $C \gg 2b\tau xy$ , donde los parámetros  $C = q_0 B/\gamma_0$ ,  $a = a_0/\gamma_0$  y  $b = b_0/\gamma_0$ . En la evolución dinámica de la PB, el máximo valor de la variable  $r^2 = x^2 + y^2$  es  $r_{st}^2 = a_0/b_0$ . También el máximo valor para cada variable  $x$  y  $y$  por separado es tal que  $x = y = r_{st}$ , ó  $x^2 = y^2 = r_{st}^2$ . La dinámica de la PB está entonces restringida para valores de los parámetros tales que  $a\tau \ll 2/3$  y  $2a\tau \ll C$ . Bajo estas condiciones, podemos mostrar después de cierta álgebra que

$$\dot{\mathbf{r}} = \hat{a}\mathbf{r} - \hat{b}r^2\Lambda\mathbf{r} + \hat{W}\mathbf{r} + \hat{q}\Lambda\mathbf{E} + \sqrt{\hat{\lambda}}\Lambda\boldsymbol{\xi}(t), \quad (4.7)$$

donde los parámetros

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\tilde{a}}{1 - a\tau}, & \hat{b} &= \frac{\tilde{b}}{1 - a\tau}, & \hat{q} &= \frac{\tilde{q}}{1 - a\tau}, & \hat{\lambda} &= \frac{\tilde{\lambda}}{(1 - a\tau)^2}, \\ \tilde{a} &= \frac{a}{1 + C^2}, & \tilde{b} &= \frac{b}{1 + C^2}, & \tilde{q} &= \frac{q}{1 + C^2}, & \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{\gamma_0^2(1 + C^2)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

siendo ahora  $q = q_0/\gamma_0$  y las matrices

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & C \\ -C & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

con  $\hat{\Omega} = \hat{a}C$ . Notemos que los parámetros  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{q}$  y  $\tilde{\lambda}$  son los mismos ya definidos en capítulo 3 para el caso Markoviano. Es claro que en el límite Markoviano  $\tau = 0$ , la Ec. (4.7) se reduce a la Ec. (3.3). Si usamos la misma transformación de coordenadas (3.6) obtenemos ahora la Ec. de Langevin cuasi-Markoviana

$$\dot{\mathbf{r}}' = \hat{a}\mathbf{r}' - \hat{b}r'^2\Lambda\mathbf{r}' + \hat{q}\Lambda\mathbf{E}' + \sqrt{\hat{\lambda}}\Lambda\xi'(t), \quad (4.10)$$

donde  $\mathbf{E}' = \mathcal{R}^{-1}(t)\mathbf{E}$ ,  $\xi'(t) = \mathcal{R}^{-1}(t)\xi(t)$ , y  $\mathcal{R}(t)$  es de nueva cuenta una matriz de rotación tal que

$$\mathcal{R}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos \hat{\Omega}t & \text{sen } \hat{\Omega}t \\ -\text{sen } \hat{\Omega}t & \cos \hat{\Omega}t \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

#### 4.1.1. Un criterio de detección de señales débiles

Recordemos que la QDT es apropiada en el espacio transformado de coordenadas y además en el régimen lineal, es decir

$$\dot{\mathbf{r}}' = \hat{a}\mathbf{r}' + \hat{q}\Lambda\mathbf{E}' + \sqrt{\hat{\lambda}}\Lambda\xi'(t), \quad (4.12)$$

cuya solución asumiendo la condición inicial  $\mathbf{r}'(0) = 0$  se puede escribir nuevamente como  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{h}'(t)e^{\hat{a}t}$ , siendo ahora

$$\mathbf{h}'(t) = \int_0^t e^{-\hat{a}s} \Lambda \mathcal{R}^{-1}(s) [\hat{q}\mathbf{E} + \sqrt{\hat{\lambda}}\xi] ds. \quad (4.13)$$

De nueva cuenta, en el límite de tiempos largos tales que  $t \gg 1/2\hat{a}$ , el proceso  $\mathbf{h}'(t)$  llega a ser una constante  $\mathbf{h}'$  y el proceso  $\mathbf{r}'(t)$  un proceso cuasi-determinista de tal modo que también  $r'^2(t) = h'^2 e^{2\hat{a}t}$ . Es evidente que los pasos algebraicos para calcular la estadística de los tiempos de paso, son muy similares a los desarrollados en el capítulo 3. Como consecuencia de esta similitud se obtienen las siguientes expresiones  $\langle h'_1 \rangle = \langle h'_2 \rangle = q_0 E / \sqrt{2} a_0$ , tal que  $p'^2 = (q_0 E)^2 / a_0^2$  y la varianza  $\sigma^2 = \lambda / 2\gamma_0 a_0 (1 - a\tau) = D_e / a$ , donde  $D_e = D / (1 - a\tau)$  es el coeficiente de difusión efectiva y  $D = \lambda / \gamma_0^2 = k_B T / \gamma_0$  el coeficiente de difusión de Einstein. La estadística de los tiempos de paso en este caso será ahora

$$\langle 2\hat{a}t \rangle = \langle 2\hat{a}t \rangle_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta_e^2}{2} \right), \quad (4.14)$$

donde

$$\beta_e^2 = \frac{p'^2}{\sigma^2} = \frac{2(q_0 E_e)^2 (1 - a\tau)}{a\lambda} = \beta^2 (1 - a\tau), \quad (4.15)$$

siendo  $\beta^2 = 2(q_0 E_e)^2 / a\lambda$ , y

$$\langle 2\hat{a}t \rangle_0 = \ln \left( \frac{a_0 \gamma_0 R'^2 (1 - a\tau)}{\lambda} \right) + \gamma, \quad (4.16)$$

es el MFPT en ausencia de la fuerza externa y  $\gamma = 0.577$  es el número de Euler. Similarmente la varianza tiene la forma

$$\langle (2\hat{a}\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \right) \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta_e^2}{2} \right) - \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m m!} \left( \frac{\beta_e^2}{2} \right) \right]^2. \quad (4.17)$$

Queremos ahora aplicar el mismo criterio de detección propuesto en los capítulos anteriores, solo que en este caso cuasi-Markoviano debemos de analizar el comportamiento de las expresiones exactas anteriores (4.14) y (4.17) con sus expresiones aproximadas en la región de  $\beta$  pequeña, es decir,

$$\langle 2\hat{a}t \rangle = \langle 2\hat{a}t \rangle_0 - \frac{\beta_e^2}{2}, \quad (4.18)$$

y

$$\langle (2\hat{a}\Delta t)^2 \rangle = \psi'(1) + \frac{\beta_e^4}{8}. \quad (4.19)$$

Asignamos el valor del parámetro  $a=0.3$  y comparamos el comportamiento de la escala de tiempo exacto (4.14) con la expresión aproximada (4.18), ambos como función de  $\beta$ , para los valores de  $\tau=0, 0.5, 0.8$ . Dicho comportamiento se muestra en las Figs. 4.1a, 4.1b y 4.1c respectivamente. En cada figura podemos observar que en la región de  $\beta$  pequeña ambas escalas de tiempo coinciden. Ésta es precisamente la región que nos interesa puesto que corresponde a la región donde la intensidad de ruido es mayor que la amplitud del campo eléctrico aplicado.

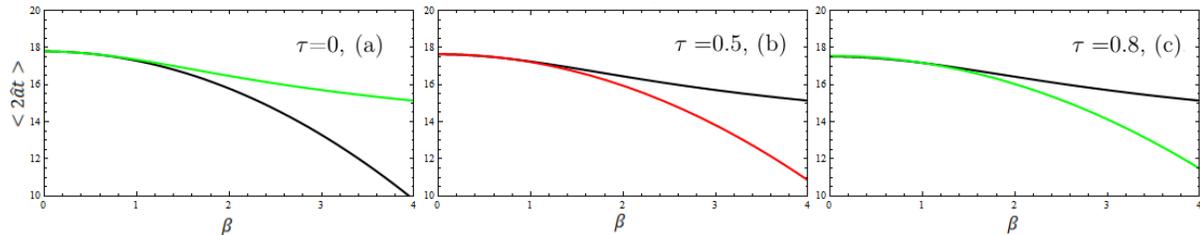


Figura 4.1: Comparación entre las escalas de tiempo (4.14) y (4.18), para el valor de  $\tau=0, \tau=0.5, \tau=0.8$ . En todos los casos coinciden en la región de  $\beta$  pequeña

De la misma manera realizamos la comparación de entre las varianzas (4.17) y (4.19), tal como se muestra en las Figs. 4.2a, 4.2b, 4.2c, para los mismos valores de los parámetros  $a$  y  $\tau$ . Claramente, todas las curvas coinciden en la región de máxima varianza  $\psi'(1)$ , y es el mismo valor en la región de  $\beta$  pequeña.

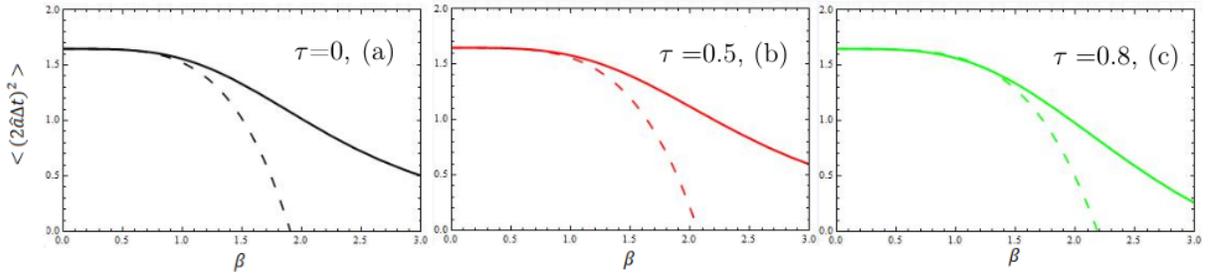


Figura 4.2: Comparación entre las varianzas (4.17) (línea continua) y (4.19) (línea punteada), para distintos valores de  $\tau$ . Ambas coinciden en la región de  $\beta$  pequeña y de máxima varianza

De esta manera podemos concluir que en la aproximación de  $\beta$  pequeña, correspondiente al dominio de la intensidad del ruido sobre la amplitud del campo eléctrico aplicado, las aproximaciones son claramente justificadas. Al sustituir las Ecs. (4.18) y (4.19) en el criterio (2.32), nuevamente obtenemos el valor crítico efectivo  $\beta_{ce}=1.6$  el cual corresponde al mismo valor del caso Markoviano. ¿Qué conclusiones podemos obtener de este resultado, con respecto al resultado del caso Markoviano? Para poder responder a esta pregunta, veamos cuál es el comportamiento de la escala de tiempo (4.18) con respecto al parámetro  $\beta$  para distintos valores de  $\tau=0, 0.5, 0.8, 1.0$ . Como podemos observar de la Fig. 4.3, las cuatro escalas de tiempo, (Markoviana  $\tau=0$  y no-Markovianas  $\tau=0.5, 0.8, 1.0$ ) se intersectan en un mismo valor de  $\beta = \sqrt{2}=1.4242$ . Este mismo punto corresponde al punto de coincidencia con la escala de tiempo determinista dada por  $\langle 2\tilde{a}t \rangle = \ln(\alpha/\beta^2)$ , con  $\alpha = 2a_0\gamma_0 R'^2/\lambda$ . Este comportamiento, es exactamente el mismo que el caso Markoviano. Sin embargo, la diferencia está en los valores de la amplitud del campo eléctrico inyectado  $E_e$  que habrá de detectarse. Esto se debe a que  $\beta_e^2 = \beta^2(1 - a\tau)$  el cual también se puede escribir como  $\beta_e^2 = 2(q_0 E_e)^2/a\lambda_e$ , donde  $\lambda_e = \lambda/(1 - a\tau)$ , que significa una renormalización de la intensidad del ruido Markoviano por el factor  $1/(1 - a\tau)$ . El criterio de detección propuesto establece lo siguiente: por debajo del valor del valor de  $\beta_c$  no hay detección de la señal débil, mientras que por encima de dicho valor, la detección debe ser de manera eficiente. Luego entonces el valor de  $\beta_{ce}=1.6$ , permite estimar los valores de la amplitud de la señal externa que habrá de detectarse en el caso no-Markoviano, es decir

$$E_e^{nm} \approx \left(1 + \frac{a\tau}{2}\right) E_e^m, \quad (4.20)$$

donde  $E_e^m = 1.13(\sqrt{a}/q_0) \sqrt{\lambda}$ , es el valor de  $E_e$  en el caso Markoviano. En conclusión, el parámetro crítico efectivo  $\beta_{ce}$  aunque corresponde al mismo valor crítico Markoviano ( $\beta_c = 1.6$ ), dicho valor contribuye a detectar valores de campo eléctrico mayores que el caso Markoviano en el rango de valores  $0 < a\tau \ll 2/3$ . Consideremos como ejemplo el caso para cual  $a=0.3$  y  $\tau=0.5, 0.8, 1.0, 1.5$ . En estos casos vemos que  $E_e^{nm} = 1.075E_e^m$ ,  $E_e^{nm} = 1.12E_e^m$ , y  $E_e^{nm} = 1.15E_e^m$ ,  $E_e^{nm} = 1.225E_e^m$ , respectivamente. Es importante comentar que el punto de intersección de  $\beta=1.4142$ , puede entenderse con la cota mínima de la validez de la escala de tiempo determinista y está muy cercano al valor crítico  $\beta_{ce}=1.6$ .

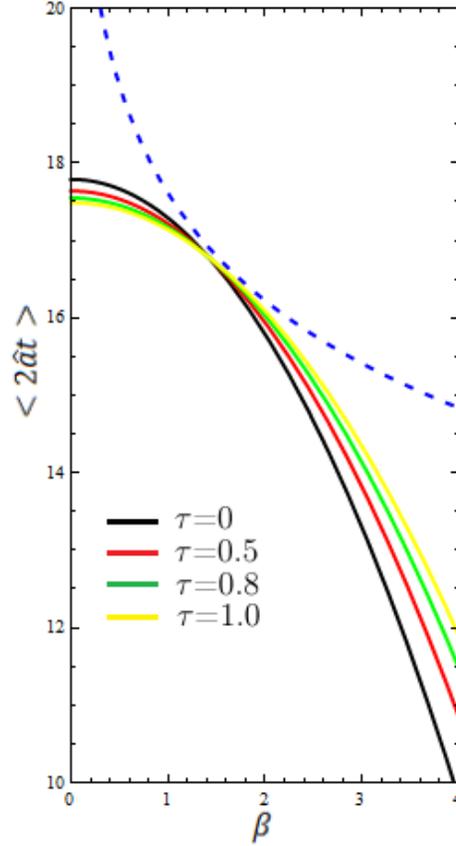


Figura 4.3: Comportamiento de las escalas de tiempo (4.18) como función del parámetro  $\beta$ . El punto  $\beta = 1.4142$  corresponde al punto de intersección entre las escalas de tiempo para los valores de  $\tau$  y el punto de coincidencia con el tiempo determinista

#### 4.1.2. El receptor de salida

En el caso del RS, también seguimos los mismos procedimientos algebraicos de la sección 3.2 del capítulo anterior. En este caso los NLRT son ahora

$$\mathcal{T}_{NL}^M = \mathcal{T}_0^M - \frac{1}{2\hat{a}} [E_1(\beta_e^2/2) + \gamma + \ln(\beta_e^2/2)] + \mathcal{C}_{NL}^M, \quad (4.21)$$

con

$$\mathcal{T}_0^M = \frac{1}{2\hat{a}} \left\{ \ln \left( \frac{a_0 \gamma_0 \rho'_{st} (1 - a\tau)}{\lambda} \right) + \gamma \right\} = \frac{1}{2\hat{a}} \left\{ \ln \left( \frac{a \rho'_{st}}{D_e} \right) + \gamma \right\}. \quad (4.22)$$

Estas expresiones representan las escalas de tiempo que caracterizan el decaimiento del estado inestable de un potencial arbitrario no lineal, de una PB con carga eléctrica inmersa en un baño térmico con memoria y en presencia de campos eléctrico y magnético cruzados. La expresión (4.22) es el NLRT en ausencia del campo eléctrico externo. Si el potencial no lineal es en particular

biestable entonces  $\mathcal{C}_{NL}^M = 0$  y por lo tanto el NLRT que caracteriza el dicho decaimiento es simplemente

$$\mathcal{T}_e^M = \mathcal{T}_0^M - \frac{1}{2a} [E_1(\beta_e^2/2) + \gamma + \ln(\beta_e^2/2)], \quad (4.23)$$

y  $\mathcal{T}_0^M$  es el mismo que la Ec. (4.22). También el RS se demuestra que tiene la siguiente estructura algebraica

$$\mathcal{R}_S = \frac{A_e}{A_0} = 1 + \frac{[E_1(\beta_e^2/2) + \gamma + \ln(\beta_e^2/2)]}{2\hat{a}(\mathcal{T}_c - \mathcal{T}_0^M)}, \quad (4.24)$$

donde  $\mathcal{T}_c$  se muestra en la Fig. 4.4. Por otro lado, en la Fig. 4.5 se muestra el comportamiento del RS en función del campo eléctrico aplicado para dos valores de la intensidad del ruido  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-6}$  para un valor de  $\tau=0.1$ . Con la disminución de la intensidad del ruido la amplitud de la señal detectada también disminuye, siendo en el primer caso (línea continua) del orden de  $10^{-2}$ , y de  $10^{-4}$  en el segundo (línea punteada). De igual forma en la Fig. 4.6, se muestra el comportamiento del RS en función del campo eléctrico aplicado para valores de la intensidad del ruido  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-6}$  para un valor de  $\tau=0.8$ . También en este caso, con la disminución de la intensidad del ruido la amplitud de la señal detectada disminuye su valor. Por otro lado, en la Fig. 4.7, se muestra la comparación del RS no-Markoviano y el Markoviano. En un caso para el valor de  $\tau=0.8$  (línea roja continua) y  $\tau=0.0$  (línea negra continua) y el valor del ruido  $\lambda = 10^{-4}$ , se observa que cuando la memoria se incrementa el punto de detección tiene un corrimiento hacia la derecha de la curva de ruido blanco. Un comportamiento similar ocurre para el valor de  $\lambda = 10^{-6}$  con los mismos valores de  $\tau$ .

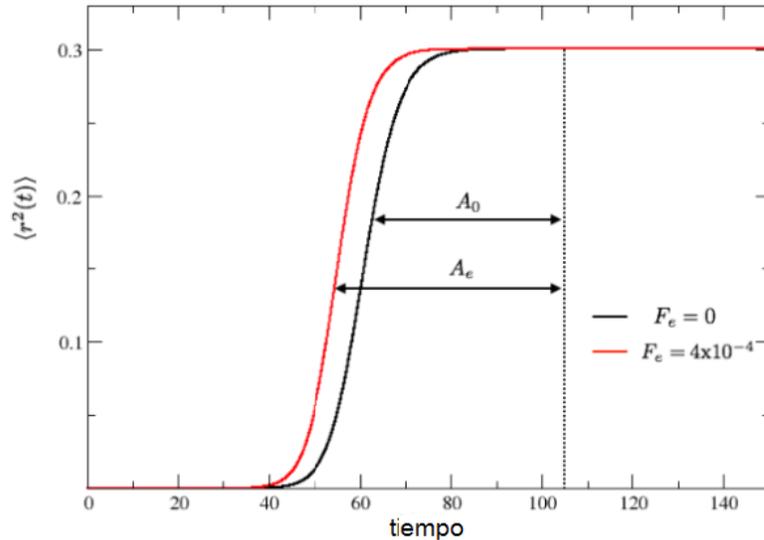


Figura 4.4: Evolución temporal de  $\langle r^2(t) \rangle$  y el tiempo  $\mathcal{T}_c=105$ . La línea negra corresponde al caso en ausencia de fuerza eléctrica y la línea roja en presencia de la fuerza eléctrica  $F_e=4 \times 10^{-4}$ . Con los valores de los parámetros  $a_0 = 3 \times 10^2$ ,  $b_0 = 10^3$ ,  $\gamma_0 = 9 \times 10^2$ ,  $C = 1$ ,  $\lambda = 10^{-4}$ ,  $\tau = 0.1$

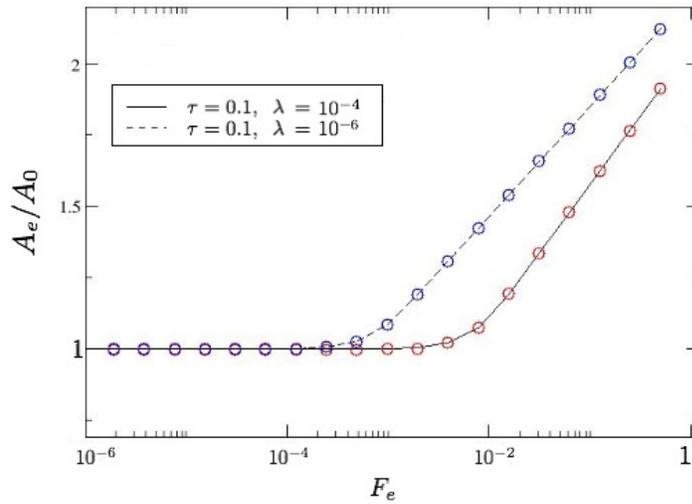


Figura 4.5: El RS en función del campo externo  $F_e$ , donde las líneas continua y punteada corresponden al resultado teórico (4.24), mientras que los círculos rojos y azules corresponden a la simulación numérica, ambos para valores de  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-6}$  respectivamente, y  $\tau=0.1$ . Con valores de los parámetros  $a_0 = 3 \times 10^2$ ,  $b_0 = 10^3$ ,  $\gamma_0 = 9 \times 10^2$  y  $C = 1$ .

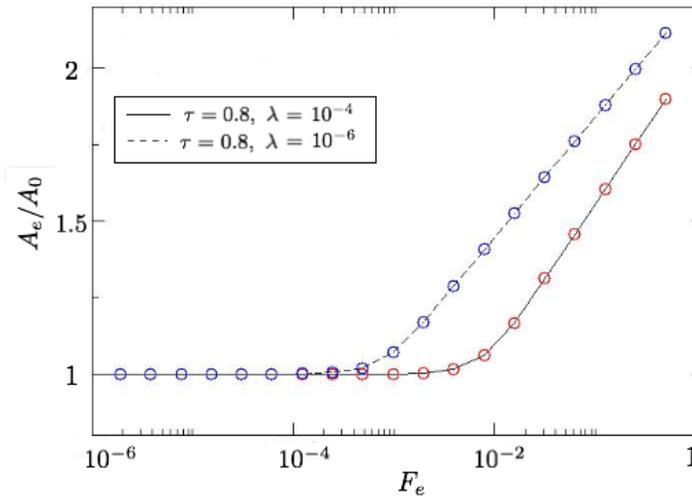


Figura 4.6: El RS en función del campo externo  $F_e$ , donde las líneas continua y punteadas corresponden al resultado teórico (4.24), mientras que los círculos rojos y azules corresponden a la simulación numérica, ambos para valores de  $\lambda = 10^{-4}$  y  $\lambda = 10^{-6}$  respectivamente, y  $\tau=0.8$ . Con valores de los parámetros  $a_0 = 3 \times 10^2$ ,  $b_0 = 10^3$ ,  $\gamma_0 = 9 \times 10^2$  y  $C = 1$ .

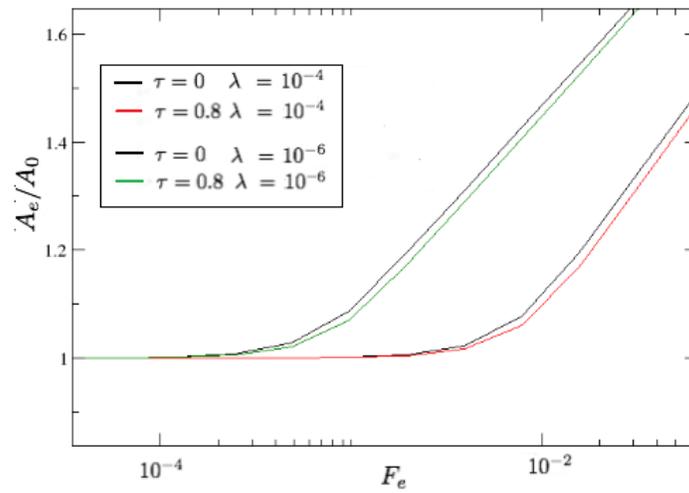


Figura 4.7: Comparación del RS Markoviano con el no-Markoviano. Para  $\tau=0$  (línea negra continua) y  $\tau=0.8$  (línea roja continua) y  $\lambda = 10^{-4}$ . Los mismos valores de  $\tau$  con  $\lambda = 10^{-6}$  corresponden a las líneas negra y verde. Con valores de los parámetros  $a_0 = 3 \times 10^2$ ,  $b_0 = 10^3$ ,  $\gamma_0 = 9 \times 10^2$  y  $C = 1$ .



## Capítulo 5

# Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de tesis hemos mostrado que los dos criterios propuestos a finales de los ochenta y principios de los noventa, para detectar señales ópticas débiles en el proceso de encendido de un sistema láser, han sido propuestos también como criterios teóricos para detectar señales débiles de un campo eléctrico en el proceso de decaimiento del estado inestable de una PB con carga eléctrica inmersa en un baño térmico y en presencia de campos eléctrico y magnético perpendiculares entre sí. Para poder entender con más claridad el proceso de detección en el decaimiento de la PB, ha sido necesario estudiar los dos criterios antes mencionados en la detección de señales ópticas débiles en el sistema láser, tal como lo mostramos en el capítulo 2. El criterio propuesto por Balle et al. [23] está directamente relacionado con la estadística del MFPT y el otro criterio correspondiente al receptor de salida con el NLRT. El decaimiento del estado inestable de la PB en esas condiciones ha sido caracterizado por ambas escalas de tiempo a través de la QDT, la cual ha mostrado ser una excelente descripción para dicho propósito. Para el criterio de la estadística de los tiempos de primer paso, es suficiente la aproximación lineal del potencial debido a que el proceso de detección se lleva a cabo alrededor del estado inestable una vez desencadenado el proceso de decaimiento por efecto del ruido interno, hasta alcanzar un valor de referencia o barrera absorbente del potencial. Sin embargo, el NLRT que está relacionado con el RS, caracteriza la relajación dinámica completa del sistema desde que abandona el estado inestable inicial hasta que alcanza el valor del estado estacionario que le corresponde. Es importante comentar que el modelo de láser propuesto en este trabajo y estudiado hace un tiempo por Vemuri y Roy [14], Balle et.al. [23], Littler et. al [24], etc., es un sistema cuya dinámica es de carácter rotacional, el cual no fue puesto de manifiesto explícitamente por dichos autores, tampoco el por qué la QDT es válida para caracterizar el proceso de decaimiento de dicho sistema. Estos puntos fueron aclarados con detalle en el capítulo 2 mediante el uso de una transformación del eléctrico  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)$  del sistema láser.

Usando las ideas subyacentes del sistema láser, pudimos extender dicho formalismo al estudio del proceso de detección de amplitudes débiles de un campo eléctrico en el decaimiento de la PB antes mencionada, este estudio fue desarrollado en el capítulo 3. Mencionamos también que el paralelismo que existe entre del sistema láser con la PB en un campo magnético, aunque ambos son en principio diferentes, proviene del hecho de que la dinámica de ambos sistemas son muy

similares y además es de naturaleza rotacional. Ésta es precisamente la razón del por qué los autores de la Ref. [27], propusieron que el proceso de decaimiento del estado inestable de la PB inmersa en un baño térmico y en presencia de un campo magnético puede ser un mecanismo alternativo para la detección de señales débiles. Debido a este paralelismo, es natural entonces preguntarse cuál sería el valor crítico del parámetro  $\beta$  si se hace uso del criterio de detección en términos de la estadística de los tiempos de primer paso. El resultado curioso y sorprendente que surge en este caso es que dicho valor crítico satisface la condición  $\beta_c \geq 1.6$ , la cual es exactamente la misma que se obtiene para el sistema láser antes mencionado. Este valor crítico se ilustra en las gráficas dadas en las Figs. 2.3 y 3.2 tanto para el sistema láser como para la PB respectivamente. Por otro lado, el criterio de detección usando el RS en el caso de la PB y según como se muestra en la Fig. 3.4, tiene un comportamiento también muy similar al del sistema láser que se muestra en la Fig. 2.6.

En el cuarto capítulo hemos estudiado el proceso de detección de señales débiles en el decaimiento del estado inestable de la PB antes mencionada, tomando en cuenta ahora que la interacción térmica entre la partícula y el baño ocurre en un tiempo finito de correlación  $\tau$ , es decir, existe un efecto de memoria en la correlación de las fluctuaciones estocásticas, y por tanto el proceso en este caso es no Markoviano. Para estos procesos la dinámica correspondiente que sigue la partícula está dada por la EGL (4.1), cuyo kernel de memoria que hemos utilizado en esta tesis es del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Aun en este caso particular del kernel de memoria, la EGL resulta un tanto cuanto complicada de manipular algebraicamente. Por esta razón en este trabajo hemos optado por otra alternativa menos complicada que nos permite avanzar un poco más en el problema. La estrategia consiste en incrementar el número de variables mediante una transformación dada por la Ec. (4.3) que permite reescribir la EGL en un conjunto acoplado de ecuaciones estocásticas *cuasi-Markovianas* dadas por las Ecs. (4.5) y (4.6). Todavía estas ecuaciones no son tan fáciles de manipular algebraicamente porque no solo están acopladas sino también son no lineales. Mediante manipulaciones algebraicas es posible restringir la dinámica dada por las Ecs. (4.5) y (4.6) en una ecuación de Langevin *cuasi-Markoviana* dada por la Ec. (4.7), en donde los parámetros Markovianos han sido reescalados por el factor no-Markoviano  $1/(1 - a\tau)$ , de acuerdo con la Ec. (4.8). Nuevamente con la transformación de coordenadas (3.6) podemos reescribir la Ec. (4.7) en la forma más apropiada dada por la Ec. (4.10), como lo demanda la QDT. Una vez establecida la Ec. (4.10) pudimos aplicar los mismos dos criterios estudiados en el capítulo 3 para la detección de señales débiles. Para el criterio de la estadística de los tiempos de primer paso, hemos mostrado que en este caso no-Markoviano, el parámetro crítico efectivo cuasi-Markoviano también satisface que  $\beta_{ce}=1.6$ , que es exactamente el mismo valor del parámetro crítico Markoviano  $\beta_c^m=1.6$ . El valor crítico  $\beta_{ce}=1.6$  determina los valores de campo que deben ser detectados tal como hemos mostrado en la Ec. (4.20). Este efecto se muestra en la Fig. 4.3, donde se muestra un comportamiento universal de la escala de tiempo cuasi-Markoviana, es decir, todas las escalas de tiempo en el intervalo de valores  $0 < a\tau \ll 2/3$  se intersectan en el punto  $\beta=1.4142$ , cercano al valor crítico  $\beta_c=1.6$ . También la Ec. (4.20) nos dice que conforme aumenta el valor del tiempo de correlación mayor es el valor del campo eléctrico por detectar. Finalmente también el RS tiene un comportamiento similar al caso Markoviano y los resultados concluyentes en este caso son: para un valor fijo del tiempo de correlación del ruido  $\tau$ , y conforme la intensidad del ruido  $\lambda$  disminuye su valor, menor es el valor de la amplitud del campo eléctrico externo que se debe detectar, este hecho se muestra en las Figs. 4.5 y 4.6. Por otro lado, el RS

Markoviano se ha comparado con el resultado del caso no-Markoviano. Este hecho se muestra en la Fig. 4.7 para un valor fijo del ruido y variando el valor de la memoria. Se observa que conforme el tiempo de correlación aumenta, mayor es la amplitud del campo eléctrico externo que se debe detectar.

Para finalizar queremos hacer el siguiente comentario: El problema de la detección de señales ópticas débiles fluctuantes en el tiempo, ha sido estudiado y reportado en [39], para un sistema láser, donde se ha mostrado la existencia de cierto tipo de resonancia. Podemos tomar en cuenta esta propuesta para extender las ideas al problema de la detección de señales débiles en el proceso de decaimiento del estado inestable de una PB inmersa en un baño térmico y en presencia de un campo magnético constante, tanto para el caso Markoviano como para el caso no-Markoviano.



# Bibliografía

- [1] R. Benzi, A. Sutera, and A. Valpiani, *The Mechanism of stochastic resonance*, J. Phys. A **14**, L453(1981); **18**, 2239 (1985).
- [2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani, *Stochastic resonance in climatic change*, Tellus **34**, 10 (1982).
- [3] A. N. Grigorenko and P. I. Nikitin, IEEE Transactions on Magnetics. 31, (5) 2491 (1995); A. N. Grigorenko, P. I. Nikitin, and G. V. Roshchepkin, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 65, (10) 788 (1997).
- [4] L. F. Yang, Z. H. Hou, H. W. Xin, *Stochastic resonance in the absence and presence of external signals for a chemical reaction*, J. Chem. Phys. 110, (7) 3591 (1999).
- [5] B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Theory of stochastic resonance*, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).
- [6] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Stochastic resonance: A remarkable idea that changed our perception of noise*, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
- [7] J. J. Collins, T. T. Imhoff, and P. Grigg, *Noise-enhanced tactile sensation*, Nature **383**, 770 (1996).
- [8] K. Kitajo, D. Nozaki, L. M. Ward, and Y. Yamamoto, *Behavioral stochastic resonance within the human brain*, Phys. Rev. Lett. **90**, 218103 (2003).
- [9] T. A. Engel, B. Helbig, D. F. Russell, L. Schimansky-Geier, and A. B. Neiman, *Coherent stochastic oscillations enhance signal detection in spiking neurons*, Phys. Rev. E **80**, 021919 (2009).
- [10] M. James, F. Moss, P. Hänggi and C. Van den Broeck, *Switching in the presence of colored noise: The decay of an unstable state*, Phys. Rev. A **38**, 4690 (1988).
- [11] P. Hänggi and P. Jung, in *Colored Noise in Dynamical Systems*, edited by I. Prigogine and Stuart A. Rice, Advances in Chemical Physics Vol. LXXXIX (Wiley & Sons, New York, (1995).
- [12] H. Li, Z. Hou, and H. Xin, *Internal noise enhanced detection of hormonal signal through intracellular calcium oscillations*, Chem. Phys. Lett. **402**, 444 (2005).

- [13] C. Nicolis, *Solar variability and stochastic effects on climate*, Sol. Phys. **74**, 473 (1981).
- [14] G. Vemuri and R. Roy, *Super-regenerative laser receiver: Transient dynamics of a laser with an external signal*, Phys. Rev. A **39**, 2539 (1989).
- [15] J. R. Whitehead, *Super-Regenerative Receiver*, Cambridge University Press, Cambridge (1950).
- [16] H. A. Kramers, *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*, Physica **7**, 284 (1940).
- [17] F. Haake, *Decay of Unstable States*, Phys. Rev. Lett **41** 1685 (1978).
- [18] N. V. Agudov, R. Mannella, A. V. Safonov, B. Spagnolo, *Noise delayed decay of unstable states: theory versus numerical simulations*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 5279 (2004).
- [19] J. Casademunt, J. I. Jiménez-Aquino and J. M. Sancho, *Decay of unstable states in the presence of colored noise and random initial conditions*, Phys. Rev. A **40**, 5905 (1989).
- [20] P. Colet, M. San Miguel, J. Casademunt, and J. M. Sancho, *Relaxation from a marginal state in optical bistability*, Phys. Rev. A **39**, 149 (1989).
- [21] A. N. Malakhov, *Chaos, Time scales of overdamped nonlinear Brownian motion in arbitrary potential profiles*, **7**, 488 (1997).
- [22] A. L. Pankratov, *Time evolution of averages in dynamical systems driven by noise* Phys. Lett. A **255**, 17 (1999).
- [23] S. Balle, F. De Pasquale, and M. San Miguel, *Passage-time calculation for the detection of weak signals via the transient dynamics of a laser*, Phys. Rev. A **41**, 5012 (1990).
- [24] I. Littler, S. Balle, K. Bergmann, G. Vemuri, and R. Roy, *Detection of weak signals via the decay of an unstable state: Initiation of an injection-seeded laser*, Phys. Rev. A. **41**, 4131 (1990).
- [25] J. I. Jiménez Aquino and J. M. Sancho, *The decay of unstable states and the quasideterministic theory*, Phys. Rev. A **43**, 589 (1991).
- [26] F. de Pasquale and P. Tombesi, *The decay of an unstable equilibrium state near a “critical point”*, Phys. Lett. **72** 7 (1979).
- [27] J. I. Jiménez Aquino and Romero-Bastida, *Detection of weak and large electric fields through the transient dynamics of a Brownian particle in a electromagnetic field*, Phys. Rev. E **81**, 031128 (2010).
- [28] J. I. Jiménez Aquino and Romero-Bastida, *Detection of weak signals through nonlinear relaxation times for a Brownian particle in a electromagnetic field*, Phys. Rev. E **84**, 011137 (2011).
- [29] J. B. Taylor, *Diffusion of Plasma Across a Magnetic Field*, Phys. Rev. Lett **6**, 262 (1961).

- [30] B. Kursunoglu, *Brownian motion of charged particles in a magnetic field*, Ann. Phys. **17**, 259 (1962).
- [31] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, 3rd ed. (Elsevier, Amsterdam, 2007).
- [32] N. G. van Kampen, , Braz. J. Phys. **28**, 90 (1998).
- [33] F. Moss and P. V. E. McClintock, *Noise in Nonlinear Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989).
- [34] H. Mori, , Progr. Theoret. Phys. **33**, 423 (1965).
- [35] R. Kubo, , Rep. Prog. Phys. **29**, 255 (1966).
- [36] R. Zwanzig, *Nonlinear generalized Langevin equations*, J. Stat. Phys. **9**, 215 (1973).
- [37] J. Luzcka, *Non-Markovian stochastic processes: colored noise*, Chaos **15**, 026117 (2005).
- [38] J. I. Jiménez Aquino, R. M. Velasco and Romero-Bastida, *Detection of weak signals in memory thermal baths*, Phys. Rev. E **90**, 052146 (2014).
- [39] J. Dellunde, M. C. Torrent, J. M. Sancho, and M. San Miguel, *Transient dynamics of a laser under a fluctuating weak external field*, Optics Comm. **109**, 435 (1994).
- [40] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, (1972)).



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

---

UNIDAD IZTAPALAPA ·

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**Detección de señales débiles en un baño  
térmico con memoria en presencia de  
un campo magnético**

Tesis que presenta:

**Fernando García Apolonio**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Física)**

Asesor: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Presidente: Dr. Emilio Cortés Reyna

Secretario: Dr. José Inés Jiménez Aquino

Vocal: Dr. José Miguel Méndez Alcaraz

Ciudad de México, Mayo 2017



Casa abierta al tiempo  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00051  
Matrícula: 2151800790

DETECCIÓN DE SEÑALES DÉBILES  
EN UN BAÑO TÉRMICO CON  
MEMORIA EN PRESENCIA DE UN  
CAMPO MAGNÉTICO

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 30 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. EMILIO CORTES REYNA  
DR. JOSE MIGUEL MENDEZ ALCARAZ  
DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO



Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)  
DE: FERNANDO GARCIA APOLONIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ  
  
LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI  
  
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE  
  
DR. EMILIO CORTES REYNA

VOCAL  
  
DR. JOSE MIGUEL MENDEZ ALCARAZ

SECRETARIO  
  
DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO