

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**ESTUDIO DEL CONTROL DE
PROCESOS DE DIFUSIÓN
SOBRE SUPERFICIES**

Tesis que presenta
Diana Assaely León Velasco
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. L. Héctor Juárez Valencia

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Secretario: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Vocal: Dr. Pedro González-Casanova Henríquez

Vocal: Dr. José Héctor Morales Bárcenas

Vocal: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Ciudad de México, Octubre 2016



Estudio del Control de Procesos de Difusión sobre Superficies

Autor: Diana Assaely León Velasco
Asesor: Dr. L. Héctor Juárez Valencia



*Disertación Preparada para el Grado de
Doctorado en Ciencias (Matemáticas)*

7 de Octubre de 2016



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**ESTUDIO DEL CONTROL DE
PROCESOS DE DIFUSIÓN
SOBRE SUPERFICIES**

Tesis que presenta
Diana Assaely León Velasco
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. L. Héctor Juárez Valencia

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Secretario: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Vocal: Dr. Pedro González-Casanova Henríquez

Vocal: Dr. José Héctor Morales Bárcenas

Vocal: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Ciudad de México, Octubre 2016



Estudio del Control de Procesos de Difusión sobre Superficies

Autor: Diana Assaely León Velasco
Asesor: Dr. L. Héctor Juárez Valencia

*Disertación Preparada para el Grado de
Doctorado en Ciencias (Matemáticas)*

7 de Octubre de 2016

*“En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la
continuidad y la perseverancia”.*
Jacques Anatole (1844-1924). Escritor francés.

*“En el fondo, los científicos somos gente con suerte: podemos jugar a lo que queramos
durante toda la vida”.*
Lee Smolin Físico teórico y cosmólogo.

*“Aquel que le gusta la práctica sin la teoría, es como el marino que navega barco sin timón
ni brújula y nunca sabe dónde anclar”.*
Leonardo Da Vinci (1452-1519). Artista florentino.

AGRADECIMIENTOS:

A mi hija Fernanda, por ser mi motor y mi vida.

A mi madre, mis hermanos, mi abuela y toda mi familia, que siempre han creído en mí, y que han estado ahí cuando más los he necesitado.

A Mariano que nunca ha dejado de creer en mí, que siempre me ha dado todo su apoyo, confianza y que me alienta a seguir.

Al Dr. L. Héctor Juárez Valencia, por sus enseñanzas, consejos y sobre todo por la dirección de este trabajo, ya que él es parte primordial de este.

Al Dr. Roland Glowinski por su asesoría y dirección antes, durante y después de mi estancia en la Universidad de Houston bajo el programa de movilidad de CONACyT.

A mis sinodales, por tomarse el tiempo de revisar mi trabajo y orientarme con sus comentarios para mejorarlo.

A mis profesores del posgrado por orientarme, con sus buenos consejos y sus enseñanzas para mejorar como persona y como estudiante.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo otorgado, el cual fue esencial para realizar mis estudios.

1. Introducción	3
1.1. Motivación	5
1.2. Objetivos	5
2. Preliminares	7
2.1. Problema modelo sobre superficies planas	7
2.2. Controlabilidad Exacta y Aproximada	10
2.2.1. Formulación del problema de controlabilidad aproximada	12
2.3. Reformulación por medio de penalización (funcional de costo penalizado)	13
2.4. Condiciones de optimalidad	14
2.5. Método de gradiente conjugado	16
2.6. Discretización en el tiempo y espacio	17
2.7. Ejemplos numéricos en 1 y 2 dimensiones	22
2.7.1. Ejemplos numéricos: control Distribuido	22
2.7.2. Ejemplos numéricos: ‘chattering control’	29
3. Control de Procesos Difusivos sobre Superficies en \mathbb{R}^3	35
3.1. Formulación del problema de control sobre superficies	35
3.1.1. Formulación del problema de controlabilidad aproximada sobre superficies	36
3.2. Condiciones de optimalidad	39

3.3. Método de gradiente conjugado	41
3.4. Chattering Control sobre superficies	43
4. Discretización de los problemas de control	45
4.1. Discretización en el tiempo	45
4.2. Discretización completa (espacio–temporal) sobre el toro	47
4.2.1. Parametrización sobre el toro	47
4.2.2. Discretización espacial sobre el toro	49
4.2.3. Método de gradiente conjugado	53
4.3. Discretización completa sobre la esfera	55
4.3.1. Discretización espacial sobre la esfera	56
4.3.2. Método de gradiente conjugado	59
5. Resultados Numéricos	63
5.1. Control sobre superficies toroidales	63
5.1.1. Control Distribuido	64
5.1.2. Chattering control	71
5.1.3. Control Nulo	76
5.2. Control sobre superficies esféricas	82
5.2.1. Control Distribuido	82
5.2.2. Problema de controlabilidad nula	98
6. Conclusiones y Perspectivas	105
A. Control Puntual	109
A.1. Concepto de punto estratégico	110
A.2. Formulación del problema de Control Puntual	110
A.3. Solución numérica del problema de Control Puntual, por medio del primal	112
A.3.1. Gradiente Conjugado, solución del problema (A.22)	112
Bibliografía	114

Muchos fenómenos físico-químicos modelados por EDP tienen lugar en la superficies del planeta Tierra, por lo que cabe preguntarse si es posible controlar algunos de ellos (por ejemplo, la contaminación). Los problemas de control sobre superficies son muy escasos; de hecho, buscando en la literatura encontramos el estudio teórico de Lebeau, pero no encontramos trabajos sobre la solución numérica de este tipo de problemas sobre superficies.

Por lo tanto, en este trabajo se aborda el estudio de los problemas de control sobre superficies. En particular, se estudia numéricamente la controlabilidad de procesos de difusión sobre superficies en \mathbb{R}^3 , como el toro y la esfera. Para lograr esto, empleamos una metodología que combina diferencias finitas para la discretización del tiempo, elementos finitos para la aproximación en el espacio y un algoritmo de gradiente conjugado para la solución iterativa de una función objetivo penalizada, con el objeto de encontrar el control óptimo asociado.

Los tipos de problemas que se abordan en este trabajo son los de controlabilidad, es decir aquellos en donde el objetivo es llevar un sistema difusivo (modelado por ecuaciones diferenciales parciales) a un estado final deseado. Dado un intervalo de tiempo $0 < t < T$, un estado inicial y_0 y un estado final y_T deseado, el objetivo es calcular el control v , actuando en un subdominio de la región de interés, que permita alcanzar el estado y_T , ya sea en forma exacta o aproximada.

En el presente trabajo se abordan principalmente dos tipos de problemas de control:

(i) Problemas de ‘controlabilidad aproximada’, los cuales están asociados con funciones objetivo y_T diferentes de cero. En este caso, la difusión y el tiempo juegan el papel más importante para lograr alcanzar en forma satisfactoria el objetivo (estado) y_T .

(ii) Problemas de ‘controlabilidad nula’, los cuales están asociados a funciones objetivo $y_T = 0$. Para este caso, se obtienen mejores resultados de controlabilidad, debido a que la tendencia natural de los sistemas de difusión, en donde no hay fuentes o una función de control, es producir soluciones convergentes al valor promedio del estado inicial.

Los problemas de control son muy comunes en las Ciencias e Ingeniería. Por ejemplo, cuando deseamos obtener la temperatura exacta (o muy cercana a un valor dado) de un sistema, de manera global o local en un momento dado. Un ejemplo común en Ingeniería Química, es el diseño de convertidores catalíticos en automóviles, cuando se producen las reacciones químicas queremos encaminar la ‘destrucción’ en un tiempo dado (muy pequeño en la práctica) de los productos químicos contaminantes contenidos en los gases de escape (ver [7] y [8]).

Para *sistemas lineales*, la controlabilidad es equivalente a la posibilidad de estabilizar el sistema. Los problemas de estabilización abundan, en particular en los sistemas de ‘multicuerpo’ (multibody) hechos de muchas partes diferentes que pueden ser consideradas como tres, dos, o una dimensión y las cuales están vinculadas por uniones y articulaciones (ver, [3]). En este caso el estudio de la controlabilidad es una aproximación a la estabilización, ver [20].

Un punto también importante es la *Controlabilidad y reversibilidad*: Supongamos que tenemos un sistema que al tiempo $t = -t_0$, con $t_0 > 0$, estaba en el estado z_1 y ahora (tiempo $t = 0$) está en el estado y_0 . Deseamos tener un sistema que *regrese* a un estado lo más cercano posible a z_1 , es decir $y_T = z_1$. Si esto es posible, significa que hay alguna clase de propiedad de ‘reversibilidad’ para el sistema considerado. Este tipo de problemas son de interés en sistemas ambientales, donde la *no controlabilidad* de sistemas (o subsistemas) está asociada a cambios ‘irreversibles’ (ver [4], [21]).

Como último ejemplo: si el interior de algún aparato se calienta en un cuarto con temperatura ambiente, podemos controlar la distribución de temperatura por medio de un dispositivo de calentamiento; por medio de la ecuación de calor y haciendo control sobre la fuente.

La teoría de control constituye una herramienta complementaria para resolver los problemas de optimización dinámica integrando la teoría del cálculo variacional y el principio de optimalidad. En este trabajo abordaremos el estudio teórico y numérico de los problemas de

control en ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, enfocándonos en los problemas de control sobre superficies de \mathbb{R}^3 . Un problema de control, a grandes rasgos, consiste de:

- Un procesos de entrada–salida (sistema de control).
- Observaciones de la salida del sistema controlado.
- Un objetivo que debe alcanzarse..

Donde el objetivo es buscar un control v tal que:

- Minimice un criterio o costo: *control óptimo*.
- Alcance un estado observable: *problema de controlabilidad*.
- Estabilice un sistema o un estado: *problema de estabilización*.

Consideremos la siguiente ecuación de estado

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mu \mathcal{A}(v) = f + \mathcal{B}v, \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

cuyo estado del sistema (salida) esta dado por la solución y de la EDP, y la cual contiene funciones de control (entrada), denotadas por v ; con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. En (1.1), \mathcal{A} es un operador diferencial parcial, lineal o no lineal, y \mathcal{B} mapea el ‘espacio de controles’ en el ‘espacio de estado’. La EDP (1.1) debe incluir *condiciones de frontera*, suponiendo que las tiene, el control v puede ser aplicado en un subdominio $\omega \subset \Omega$ (así v es llamado *control distribuido*), sobre la frontera Γ de Ω , o en parte de ella (v es llamado *control de frontera*), en un punto de Ω (*control puntual*), o en cualquier otro parámetro de la EDP (1.1).

Ahora, podemos introducir la noción de *controlabilidad*: Dados un intervalo de tiempo $0 < t < T$, y los estados inicial y final, el objetivo es ‘llevar el sistema’ a un estado que satisface un criterio u objetivo prescrito. Si esto es posible, decimos que el sistema es *controlable* (o *aproximadamente controlable*); en otro caso, el sistema es *no controlable*. El anterior problema de controlabilidad, en general, tiene múltiples soluciones; para forzar unicidad vamos a buscar soluciones minimizando un funcional definido sobre el espacio de control.

Queremos mencionar dos referencias obligadas para el estudio de problemas de control en EDP. Primero, mencionamos el libro del Profesor J.L. Lions [19] para un estudio de la teoría de los problemas de control óptimo; y segundo, pero no menos importante, el libro del Profesor R. Glowinski [13] para un estudio teórico y numérico de los problemas de controlabilidad en EDP.

1.1. Motivación

Muchos fenómenos físico-químicos modelados por EDP tienen lugar en la superficie del planeta Tierra; por lo tanto tiene sentido intentar controlar algunos de ellos (por ejemplo, la contaminación). Esto nos motiva a querer estudiar problemas de control sobre superficies de \mathbb{R}^3 , en particular esferas. Una búsqueda en la literatura muestra que, por ejemplo, el control de los procesos de difusión sobre superficies de \mathbb{R}^3 , todavía no ha atraído mucho la atención, a pesar de que tales problemas tienen un gran potencial en las aplicaciones. De hecho, el origen de este trabajo es inspirado en los resultados de controlabilidad nula para la ecuación de calor mostrados en [16], los cuales no sólo pueden ser considerados en dominios acotados de \mathbb{R}^3 , si no también para variedades de Riemann, el usual operador de Laplace será remplazado entonces por el operador Laplace–Beltrami.

1.2. Objetivos

Uno de los objetivos de este trabajo es calcular el control de norma mínima \mathcal{L}^2 sobre superficies realizando controlabilidad nula en un tiempo dado T . Este problema es más complicado de lo que parece (como se muestra en [26] por ejemplo), por lo cual, decidimos aproximar-lo mediante una secuencia de problemas penalizados, los cuales son relativamente fácil de resolver numéricamente, por medio de variaciones de los métodos discutidos en [2] para la ecuación de calor clásica. Si bien computacionalmente la controlabilidad nula es de nuestro interés, decidimos tomar ventaja de la metodología desarrollada para, primero, investigar computacionalmente la solución de los problemas de controlabilidad donde la función objetivo es diferente de cero, el cual es un problema que requiere de mayor esfuerzo ya que, en general, los procesos de difusión nos son exactamente controlables.

Las primeras superficies de \mathbb{R}^3 que decidimos considerar son las superficies de toros circulares, por la simple razón de que es más simple parametrizar y triangular que en el caso de las superficies esféricas. De hecho, estructuras en formas de toro ocurren en la ciencia e industria (maquinas Tokamak por ejemplo), pero son menos comunes que las esféricas. Por último, tenemos como principal objetivo estudiar la solución numérica de los problemas que tienen lugar en las superficies esféricas en \mathbb{R}^3 , para esto es necesario considerar coordenadas cartesianas (a diferencia del caso del toro) para representar una esfera con el fin de evitar las singularidades que introduce la parametrización con coordenadas esféricas.

En este capítulo vamos a describir de manera general la teoría de control distribuido, sobre superficies planas en \mathbb{R}^d , con d la dimensión espacial. Así mismo mostraremos algunos ejemplos numéricos en 1 y 2 dimensiones.

2.1. Problema modelo sobre superficies planas

Sea Ω un conjunto abierto conexo acotado (esto es, un dominio acotado) en \mathbb{R}^d (hasta hace poco, $d \leq 3$ en las aplicaciones, pero recientemente el *modelado en Finanzas*, así como el *control de la ecuación de Schrödinger* han introducido ejemplos en donde $d \geq 4$).

Nota: La hipótesis de ‘acotamiento’ no es estrictamente necesaria.

Por simplicidad supondremos que $\Gamma = \partial\Omega$ es ‘suficientemente suave’. Sea ω un subconjunto abierto de Ω . Hacemos énfasis en que ω puede ser arbitrariamente ‘pequeño’. Si la función de control v tiene soporte en $\bar{\omega}$, entonces v es llamado *control distribuido* (ver figura 2.1). La ecuación de estado está dada por

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v \chi_{\omega \times (0, T)} \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

en donde $\chi_{\omega \times (0, T)}$ es la función característica del conjunto $\omega \times (0, T)$ y \mathcal{A} es un operador elíptico de segundo orden con coeficientes constantes o variables, el cual también puede depender de t . Para simplificar un poco la notación, a partir de ahora, denotaremos por Q el dominio del espacio-tiempo $\Omega \times (0, T)$.

Ejemplo 2.1. Un operador típico \mathcal{A} está definido por

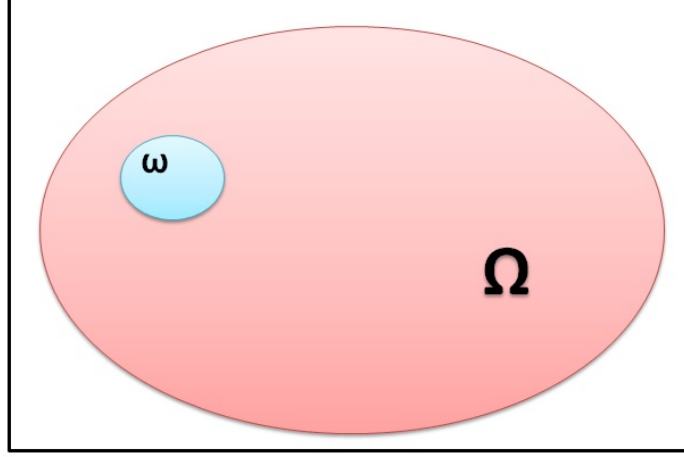


Figura 2.1: Control Distribuido

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y &= -\nabla \cdot (A(x)\nabla y) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla y \\ &= -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^d a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla y, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^d$, y

- (i) Los coeficientes $a_{ij} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, $\forall i, j$, $1 \leq i, j \leq d$, y la función matricial $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2, \quad \forall \xi (= \{\xi_i\}_{i=1}^d) \in \mathbb{R}^d, \text{ para toda } x \in \Omega, \quad (2.3)$$

con $\alpha \geq 0$ y $\|\cdot\|$ la norma Euclidiana canónica de \mathbb{R}^d .

- (ii) El vector \mathbf{V}_0 es de divergencia nula (esto es, $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0$) y pertenece a $(\mathcal{L}^\infty(\Omega))^d$.
- (iii) La formulación variacional del problema (2.1) está dada por

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} z \, dx + \int_{\Omega} A(x)\nabla y \cdot \nabla z \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{V}_0 \cdot \nabla y z \, dx = \int_{\Omega} v \chi_{\omega \times (0, T)} z \, dx. \quad (2.4)$$

Si las hipótesis anteriores sobre las a_{ij} y \mathbf{V}_0 se satisfacen, entonces podemos definir el siguiente funcional bilineal $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(y, z) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{V}_0 \cdot \nabla y z \, dx, \quad (2.5)$$

el cual es *continuo* en $\mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathcal{H}^1(\Omega)$, y *fuertemente elíptico* en $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, como se verifica a continuación:

De la siguiente igualdad vectorial

$$\nabla \cdot (z\mathbf{V}_0 y) = z\mathbf{V}_0 \cdot \nabla y + y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla z,$$

y del teorema de la divergencia, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z\mathbf{V}_0 \cdot \nabla y \, dx &= - \int_{\Omega} y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla z \, dx + \int_{\partial\Omega} zy\mathbf{V}_0 \cdot \bar{n} \, d\partial\Omega \\ &= - \int_{\Omega} y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla z \, dx \quad \text{ya que } y \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.6)$$

entonces, si consideramos $z = y$ obtenemos

$$\int_{\Omega} y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla y \, dx = - \int_{\Omega} y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla y \, dx,$$

de donde se sigue que,

$$\int_{\Omega} y\mathbf{V}_0 \cdot \nabla y \, dx = 0.$$

Luego, de (2.3) y de $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0$, se cumple la siguiente relación

$$a(y, y) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx, \quad \forall y \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

lo cual demuestra que $a(y, z)$ es fuertemente elíptica. Además, si $\mathbf{V}_0 = 0$ y si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq d$, entonces el funcional bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrico.

Por otro lado, si denotamos por $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ el *espacio dual* de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, entonces el operador \mathcal{A} es *lineal* y *continuo* de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ en $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$, y es un *isomorfismo* de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ sobre $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$.

Volviendo a (2.1), y motivados por la clase de operadores elípticos discutidos en el ejemplo anterior, vamos a suponer a partir de ahora que el operador \mathcal{A} es *lineal* y *continuo* de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ sobre $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ y que satisface la siguiente propiedad (elipticidad):

$$\langle \mathcal{A}\phi, \phi \rangle \geq \alpha \|\phi\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2,$$

donde α es una constante positiva y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el dual de paridad (*duality pairing*) entre $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. El operador \mathcal{A} es autoadjunto en $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ya que $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ se satisface:

$$\langle \mathcal{A}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{A}\psi \rangle.$$

El funcional bilineal

$$\{\phi, \psi\} \mapsto \langle \mathcal{A}\psi, \phi \rangle, : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

será denotado por $a(\cdot, \cdot)$ y es simétrico si y sólo si el operador \mathcal{A} es autoadjunto.

Para simplificar las cosas, vamos añadir a (2.1) la siguiente *condición de frontera* de tipo Dirichlet:

$$y = 0 \quad \text{en } \Gamma \times (0, T). \quad (2.8)$$

La *condición inicial*

$$y(0) = y_0, \quad (2.9)$$

donde y_0 está dado en $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Así, nuestro problema de valores iniciales queda descrito como sigue

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Suponemos que

$$v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)). \quad (2.11)$$

Notemos que el sistema (2.10) tiene una *única solución* (denotada algunas veces por $t \mapsto y(t; v)$ con $y(t; v) = x \mapsto y(x, t; v)$), la cual tiene las siguientes propiedades:

$$y \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}(\Omega)), \quad (2.12)$$

$$y \text{ es continua de } [0, T] \text{ en } \mathcal{L}^2(\Omega). \quad (2.13)$$

2.2. Controlabilidad Exacta y Aproximada

Definición 2.1. El problema (2.10) es *exactamente controlable* si para $y_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ existe $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (2.10) satisface

$$y(T) = y_T.$$

La controlabilidad exacta es difícil de conseguir, de hecho, si suponemos que los coeficientes del operador \mathcal{A} son suaves, entonces la solución y es, al tiempo $T > 0$, suave fuera de ω . Por lo tanto, si la función objetivo y_T es dada en $\mathcal{L}^2(\Omega)$ entonces la condición de *controlabilidad exacta*

$$y(T) = y_T,$$

en general, será imposible de conseguir. Sin embargo, es posible relajar la condición y abordar el problema de *controlabilidad aproximada*. Antes de definir de forma precisa este concepto, primero introducimos un resultado clave:

Proposición 2.1. Cuando v genera todo el espacio $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, entonces $y(T; v)$ genera un subespacio afín el cual es denso en $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (ver [13]).

Demostración: Sea Y_0 la solución del problema (2.10) cuando $v = 0$, es decir, Y_0 es solución de

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = 0 \quad \text{en } Q \tag{2.14}$$

$$y = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \tag{2.15}$$

$$y(0) = y_0.$$

Entonces, la función $y(T; v) - Y_0$ describe un subespacio en $\mathcal{L}^2(\Omega)$, y debemos demostrar la densidad de este subespacio en $\mathcal{L}^2(\Omega)$; para esto, basta con demostrar que si existe $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ tal que

$$(y(T; v), g)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{O} \times (0, T)), \tag{2.16}$$

entonces, $g \equiv 0$.

Sea ψ solución de la ecuación adjunta

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{A}^* \psi = 0 \quad \text{en } Q, \tag{2.17}$$

donde el operador \mathcal{A}^* denota el adjunto de \mathcal{A} y ψ satisface:

$$\psi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \tag{2.18}$$

$$\psi(x, T) = g(x). \tag{2.19}$$

Si multiplicamos ambos lados de (2.17) por $y(v)$ e integramos, obtenemos

$$0 = - \int_{\omega} \left(\int_0^T \frac{\partial \psi}{\partial t} y dt \right) dx + \int_0^T \left(\int_{\omega} (\mathcal{A}^* \psi) y dx \right) dt \quad (2.20)$$

$$= \int \int_{\omega \times (0, T)} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y \right) \psi dx dt - \int_{\omega} y(T; v) g dx, \quad (2.21)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} (y(T; v), g)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} &= \int \int_{\omega \times (0, T)} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y \right) \psi dx dt \\ &= \int \int_{\omega \times (0, T)} \psi v dx dt, \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Luego de (2.16) y (2.22), tenemos que

$$\int \int_{\omega \times (0, T)} \psi v dx dt = 0, \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)),$$

por lo tanto

$$\psi = 0, \quad \text{en } \omega \times (0, T). \quad (2.23)$$

Entonces, de la extensión continua del *Teorema de unicidad de Mizohata* (ver [24]) se sigue que

$$\psi \equiv 0, \quad \text{en } Q; \quad (2.24)$$

y combinando (2.19) y (2.24) obtenemos que $g = 0$, con lo cual se demuestra la proposición. \square

La proposición dice que cuando movemos v sobre todo el espacio $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, entonces la solución $y(T; v)$ abarca un conjunto afín denso en $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Por lo tanto, esta proposición nos permite afirmar que hay una gran cantidad de controles v que nos permiten llegar tan cerca como queramos a y_T en un tiempo finito $T > 0$ (pero no alcanzarlo en forma exacta).

Se ha supuesto que $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, pero el resultado anterior de densidad se sigue cumpliendo si v genera un subespacio denso de $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$. Algunos ejemplos de tales subespacios densos son $\mathcal{H}^1(\omega \times (0, T))$, $\mathcal{H}_0^1(\omega \times (0, T))$ y $\mathcal{D}(\omega \times (0, T))$, este último espacio es el espacio de las funciones \mathcal{C}^∞ que tienen un soporte compacto en $\omega \times (0, T)$.

2.2.1. Formulación del problema de controlabilidad aproximada

A continuación definiremos el concepto de controlabilidad aproximada.

Definición 2.1. Sea B la bola unitaria en $\mathcal{L}^2(\Omega)$. El problema de *controlabilidad aproximada* consiste en buscar el control v de tal manera que $y(T; v)$ se encuentre en un entorno pequeño de y_T , es decir

$$y(T; v) \in y_T + \beta B, \quad (2.25)$$

con $\beta > 0$.

De acuerdo a la Proposición 2.1 existen controles v (en realidad, una infinidad de v), tales que (2.25) se cumple. Por lo tanto, para obtener una solución única, se selecciona de entre todos los posibles aquel que resuelva el siguiente problema de minimización:

$$\inf_v \frac{1}{2} \int \int_{\omega \times (0, T)} v^2 dx dt, \quad v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)), \quad y(T; v) \in y_T + \beta B, \quad (2.26)$$

(se pueden ver otras opciones de (2.26) en [13]). Dado que este problema de minimización tiene solución única, es posible obtener métodos numéricos para encontrarla, tales métodos numéricos serán abordados en la sección 2.5. Por lo pronto, haremos la siguiente observación:

Observación 2.1. Todo lo dicho anteriormente es cierto, con

$$T > 0, \quad \text{arbitrariamente pequeño}, \quad (2.27)$$

$$\omega \subset \Omega, \quad \text{arbitrariamente 'pequeño'}, \quad (2.28)$$

$$\beta > 0, \quad \text{arbitrariamente pequeño}.$$

Hacer $\beta \rightarrow 0$ será (en general) imposible.

2.3. Reformulación por medio de penalización (funcional de costo penalizado)

Para aquellos problemas que involucran ‘muchas restricciones’ de diferente naturaleza, se pueden utilizar argumentos de penalización. Para el problema de control distribuido nos interesa penalizar la restricción (2.25). ¡Esto se puede hacer de muchas maneras! Una posibilidad es la siguiente: introducimos

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \int \int_{\omega \times (0, T)} v^2 dx dt + \frac{k}{2} \|y(T, v) - y_T\|^2. \quad (2.29)$$

donde el parámetro de penalización k es positivo y ‘grande’, $\|\cdot\|$ denota la norma en \mathcal{L}^2 , y la función y es obtenida a partir de v mediante la solución del problema (2.10). Así, consideramos el siguiente problema

$$\inf_{v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))} J_k(v), \quad (2.30)$$

el cual tiene solución única, denotada por u_k . Este problema se puede resolver por medio del estudio de su formulación dual, mediante la teoría de dualidad convexa, o en forma directa, es decir usando el problema primal, como veremos más adelante. Un resultado importante es:

Existe k suficientemente grande tal que la solución u_k del problema (2.30) verifica

$$\|y(T, u_k) - y_T\| \leq \beta,$$

es decir, que

$$y(T; u_k) \in y_T + \beta B, \quad (2.31)$$

ver prueba en [13] Sección 1.6.

2.4. Condiciones de optimalidad

Para simplificar la notación, denotamos por $J(\cdot)$ el funcional en (2.30), la solución u del problema (2.30) satisface $DJ(u) = 0$, donde $DJ(u)$ es el gradiente del funcional $J(\cdot)$ en u , con $u \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$. Por lo cual, es de suma importancia calcular $DJ(\cdot)$, para así obtener las condiciones de optimalidad del problema (2.30). Primero, definimos la norma $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ como

$$(u, v) = \int_{\omega \times (0, T)} uv \, dx \, dt. \quad (2.32)$$

Ahora, sea $\delta v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ una perturbación de $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, se tiene entonces que

$$\delta J(v) = \int_{\omega \times (0, T)} v \delta v \, dx \, dt + k \int_{\Omega} (y(T) + y_T) \delta y(T) \, dx. \quad (2.33)$$

donde $y(T)$ es la solución en $t = T$ del problema parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ y(0) = y_0, & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2.34)$$

y, $\delta y(T)$ es la solución en $t = T$ del siguiente problema homogéneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta y}{\partial t} + \mathcal{A}\delta y = \delta v \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } Q, \\ \delta y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ \delta y(0) = 0, & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2.35)$$

Observemos que, $(y(T) + \delta y(T))$ es solución de la suma de (2.34) con (2.35). Adicionalmente, notemos que la formulación variacional de (2.35) viene dada por

$$\int_{\Omega} p(T) \delta y(T) dx - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t}(t) \delta y(t) dx dt + \int_Q \mathcal{A}p(t) \delta y(t) dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} p(t) \delta v(t) dx dt. \quad (2.36)$$

esto es,

$$\int_{\Omega} p(T) \delta y(T) dx + \int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t}(t) + \mathcal{A}p(t) \right) \delta y(t) dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} p(t) \delta v(t) dx dt. \quad (2.37)$$

donde $p(t) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, $\forall t \in (0, T)$, es solución del siguiente *problema adjunto*:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{A}p = 0 & \text{en } Q, \\ p = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ p(T) = k(y(T) - y_T), & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (2.38)$$

Entonces, se sigue de (2.37) y (2.38) que

$$\delta J(v) = \int_{\omega \times (0, T)} (v + p) \delta v dx dt, \quad (2.39)$$

así, el gradiente de $J(\cdot)$ es definido por

$$D J(v) = (v + p(v))|_{\omega \times (0, T)}. \quad (2.40)$$

De lo visto anteriormente, decimos que u_k es el control óptimo, el cual es obtenido del siguiente *sistema de optimalidad* asociado a (2.30):

	$u_k + p _{\omega \times (0, T)} = 0,$	(2.41)
con	$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = u_k \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } Q, \\ y(0) = y_0, \quad y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \end{cases}$	(2.42)
y	$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t}(t) + \mathcal{A}p = 0, & \text{en } Q, \\ p(T) = k(y(T) - y_T), \quad p = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T). \end{cases}$	(2.43)

El problema (2.30), o el problema equivalente (2.41)–(2.43), es resuelto por medio de un algoritmo iterativo de gradiente conjugado.

2.5. Método de gradiente conjugado

Podemos resolver el problema (2.30) usando un *algoritmo de gradiente conjugado*, el cual a pesar de su aparente simplicidad es una de las herramientas más poderosas del computo científico; ya que actualmente se utiliza para resolver problemas muy complicados de la ciencia e ingeniería, los cuales pueden involucrar millones de incógnitas. La popularidad de la metodología del gradiente conjugado, está claramente relacionada con sus ‘buenas’ propiedades de convergencia (ver [11]).

Sea $U = \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, vamos a denotar por (\cdot, \cdot) y $\|\cdot\|$ el producto escalar en U y la norma en U , respectivamente. Considerando los resultados de la sección anterior, el problema (2.30) puede ser resuelto por medio del siguiente *algoritmo de gradiente conjugado*:

Paso 1. Inicialización:

$$\text{Dado } u_0 \text{ en } U; \quad (2.44)$$

resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} + \mathcal{A}y_0 = u_0 \chi_{(\omega \times (0, T))} & \text{en } Q, \\ y_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), & y_0(0) = y^0, \end{cases} \quad (2.45)$$

y

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_0}{\partial t} + \mathcal{A}p_0 = 0 & \text{en } Q, \\ p_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), & p_0(T) = k(y_0(T) - y_T). \end{cases} \quad (2.46)$$

Calcular

$$g_0 = u_0 + p_0|_{\omega \times (0, T)} \quad (2.47)$$

Si $\|g_0\|^2 / \|u_0\|^2 \leq \text{tol}$, tomar $u_k = u_0$; en caso contrario calcular

$$d_0 = g_0 \quad (2.48)$$

Paso 2. Descenso: Para $m \geq 0$, suponemos que u_m , g_m , y d_m son conocidos (con g_m , y d_m diferentes de 0), calcular u_{m+1} , g_{m+1} , d_{m+1} como sigue:

Resolver los siguientes dos problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_m}{\partial t} + \mathcal{A}y_m = d_m \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } Q, \\ y_m = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), & y_m(0) = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathcal{A}p_m = 0 & \text{en } Q, \\ p_m = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \quad p_m(T) = k y_m(T). \end{cases} \quad (2.50)$$

Calcular

$$\bar{g}_m = d_m + p_m|_{\omega \times (0, T)}, \quad (2.51)$$

$$\alpha_m = \frac{\|g_m\|^2}{(d_m, \bar{g}_m)}. \quad (2.52)$$

y tomar

$$u_{m+1} = u_m - \alpha_m d_m \quad (2.53)$$

$$g_{m+1} = g_m - \alpha_m \bar{g}_m \quad (2.54)$$

Paso 3. Prueba de convergencia. Construcción de una nueva dirección de descenso.

Si $\|g_{m+1}\|^2 / \|g_0\|^2 \leq \text{tol}$, tomar $u_k = u_{m+1}$; en caso contrario, calcular

$$\beta_m = \frac{\|g_{m+1}\|^2}{\|g_m\|^2}, \quad (2.55)$$

$$d_{m+1} = g_{m+1} + \beta_m d_m. \quad (2.56)$$

Hacer $m = m + 1$ y regresar a paso 2. \square

Una implementación que combina diferencias finitas y elemento finito para resolver los problemas parabólicos en el anterior algoritmo será discutido brevemente en la Sección 2.6.

2.6. Discretización en el tiempo y espacio: diferencias finitas y elemento finito, respectivamente

Vamos a combinar *discretización en el tiempo* mediante métodos de *diferencias finitas* con *discretización en el espacio* usando métodos de *elemento finito*.

Asumiendo que T es acotado, vamos a introducir un *paso de discretización en el tiempo* definido por $\Delta t = T/N$, donde N es un entero positivo, entonces se utiliza el esquema de discretización en el tiempo de *Euler implícito*. Luego, introducimos una *triangulación de elemento finito* T_h de Ω (h : longitud más grande de los nodos de los triángulos de T_h); suponemos que $\bar{\Omega}$ y $\bar{\omega}$ son uniones de los triángulos de T_h . Por último, aproximamos $\mathcal{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{L}^2(\Omega)$, y

$\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ por los siguientes espacios *finito dimensionales* (con \mathbb{P}_1 el espacio de polinomios de grado ≤ 1)

$$V_h = \{z_h \mid z_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), z_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.57)$$

y

$$V_{0h} = \{z_h \mid z_h \in V_h, z_h = 0 \text{ sobre } \Gamma\} \quad (2.58)$$

respectivamente. En este punto, es conveniente introducir $a : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, llamado funcional *bilineal* asociado con el operador elíptico \mathcal{A} ; el cual es definido por

$$a(y, z) = \langle \mathcal{A}y, z \rangle, \quad \forall y, z \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad (2.59)$$

donde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el dual de paridad entre $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Similarmente, tenemos que

$$a(z, y) = \langle \mathcal{A}^*y, z \rangle, \quad \forall y, z \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad (2.60)$$

De las propiedades del operador \mathcal{A} (ver Sección 2.1), el funcional bilineal anterior es continuo sobre $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ y elíptico- $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Ahora, aproximamos el problema de control (2.30) mediante

$$\inf_{\mathbf{v} \in U_h^{\Delta t}} J_h^{\Delta t}(\mathbf{v}), \quad (2.61)$$

donde, en (2.61), tenemos que $\mathbf{v} = \{v_h^n\}_{n=1}^N$, y

$$U_h^{\Delta t} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \{v_h^n\}_{n=1}^N, v_h^n \in V_h|_{\bar{\omega}}\}. \quad (2.62)$$

El producto escalar en $U_h^{\Delta t}$ es definido como:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_h^{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\omega}} v_h^n w_h^n dx, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_h^{\Delta t}. \quad (2.63)$$

El funcional de costo $J_h^{\Delta t}$ es descrito por

$$J_h^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\omega}} |v_h^n|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{\bar{\Omega}} |y_h^N - y_T|^2 dx, \quad (2.64)$$

con $\{y_h^n\}_{n=1}^N$ obtenida de y^0 and \mathbf{v} mediante la solución del siguiente *problema parabólico discreto*:

$$y_h^0 = y_{0h} \quad \text{con } y_{0h} (\in V_{0h}) \text{ una aproximación de } y^0; \quad (2.65)$$

luego, para $n = 1, \dots, N$, asumimos que y_h^{n-1} es conocido, resolvemos

$$\begin{cases} y_h^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\Delta t} z_h dx + a(y_h^n, z_h) = \int_{\bar{\omega}} v_h^n z_h dx, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.66)$$

Los problemas (2.66) (para $n = 1, \dots, N$) son problemas Dirichlet discretos bien-planteados.

Si procedemos de una manera similar a la Sección 2.4, se puede demostrar fácilmente que el gradiente del funcional $J_h^{\Delta t}$ en \mathbf{v} se define por medio de

$$(D J_h^{\Delta t}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_h^{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\omega}} (v_h^n + p_h^n) w_h^n, \quad \forall \mathbf{w} \in U_h^{\Delta t} \quad (2.67)$$

donde la familia $\{p_h^n\}_{n=1}^N$ se obtiene de la solución del siguiente problema parabólico adjunto discreto:

$$p_h^{N+1} = k(y_h^N - y_{T_h}) (\in V_{0h}), \quad (2.68)$$

donde y_{T_h} es una aproximación de y_T perteneciente a V_{0h} ; luego, para $n = N, \dots, 1$, suponemos que p_h^{n+1} es conocido, resolvemos (el problema elíptico discreto bien-planteado)

$$\begin{cases} p_h^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{p_h^n - p_h^{n+1}}{\Delta t} z_h dx + a(z_h, p_h^n) = 0, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.69)$$

Los problemas discretos (2.66) y (2.69) tienen solución única (esto se sigue de las propiedades del funcional bilineal $a(\cdot, \cdot)$). Por otro lado, el problema de control discreto (2.61) es bien-planteado, y tiene solución única, denotada por $\mathbf{u}_h^{\Delta t} = \{u_h^n\}_{n=1}^N$, la cual se caracteriza por

$$D J_h^{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{\Delta t}) = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

El problema discreto (2.61) es equivalente a resolver el problema (2.70). Dicho problema se puede resolver, por tanto, mediante un algoritmo de gradiente conjugado el cual es una variante del algoritmo (2.44)–(2.56) (ver Sección 2.5), el cual será descrito más adelante.

Observación 2.2. Podemos aplicar la *regla del trapecio* para evaluar las integrales que tienen lugar en (2.63), (2.64), (2.66) y (2.69) (ver [12] y [10]; para más detalles sobre el uso de integración numérica en el contexto de problemas de control).

Algoritmo de gradiente conjugado:**Paso 1. Inicialización:**

$$\text{Dado } \mathbf{u}_0 = \{u_0^n\}_{n=1}^N \text{ en } U_h^{\Delta t}, \quad (2.71)$$

se toma

$$y_0^0 = y_{0h}, (\in V_{0h}), \quad (2.72)$$

y, para $n = 1 \dots, N$, suponer y_0^{n-1} conocido, resolver

$$\begin{cases} y_0^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{y_0^n - y_0^{n-1}}{\Delta t} z_h dx + a(y_0^n, z_h) = \int_{\bar{\omega}} u_0^n z_h dx, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.73)$$

Ahora, se define

$$p_0^{N+1} = k(y_0^N - y_{Th}), (\in V_{0h}), \quad (2.74)$$

y para $n = N, \dots, 1$, suponer que p_0^{n+1} es conocido, resolver

$$\begin{cases} p_0^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{p_0^n - p_0^{n+1}}{\Delta t} z_h dx + a(z_h, p_0^n) = 0, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.75)$$

Calcular $\mathbf{g}_0 = \{g_0^n\}_{n=1}^N$ por medio de

$$g_0^n = u_0^n + p_0^n|_{\omega}, \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (2.76)$$

Si $\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_0^n|^2 dx / \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |u_0^n|^2 dx \leq tol$, tomar $\mathbf{u}_h^{\Delta t} = \mathbf{u}_0$; en caso contrario calcular

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{g}_0. \quad (2.77)$$

Paso 2. Descenso: Para $m \geq 0$, suponemos que \mathbf{u}_m , \mathbf{g}_m , y \mathbf{d}_m son conocidos (con \mathbf{g}_m , y \mathbf{d}_m diferentes de $\mathbf{0}$), calcular \mathbf{u}_{m+1} , \mathbf{g}_{m+1} , \mathbf{d}_{m+1} como sigue:

Tomar

$$\bar{y}_m^0 = 0, (\in V_{0h}), \quad (2.78)$$

para $n = 1 \dots, N$, suponer \bar{y}_m^{n-1} conocido, resolver

$$\begin{cases} \bar{y}_m^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{\bar{y}_m^n - \bar{y}_m^{n-1}}{\Delta t} z_h dx + a(\bar{y}_m^n, z_h) = \int_{\bar{\omega}} d_m^n z_h dx, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.79)$$

Luego, tomar

$$\bar{p}_m^{N+1} = k \bar{y}_m^N, (\in V_{0h}), \quad (2.80)$$

y, para $n = N, \dots, 1$, suponer \bar{p}_m^{n+1} conocido, resolver

$$\begin{cases} \bar{p}_m^n \in V_{0h}, \\ \int_{\bar{\Omega}} \frac{\bar{p}_m^n - \bar{p}_m^{n+1}}{\Delta t} z_h dx + a(z_h, \bar{p}_m^n) = 0, \quad \forall z_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (2.81)$$

Calcular

$$\bar{g}_m = \{\bar{g}_m\}_{n=1}^N = \{d_m^n + \bar{p}_m^n|_{\omega}\}_{n=1}^N, \quad (2.82)$$

$$\alpha_m = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_m^n|^2 dx}{\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} d_m^n \bar{g}_m dx}. \quad (2.83)$$

y actualizar \mathbf{u}_m y \mathbf{g}_m por medio de

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m - \alpha_m \mathbf{d}_m, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{g}_{m+1} = \mathbf{g}_m - \alpha_m \bar{g}_m, \quad (2.85)$$

respectivamente.

Paso 3. Prueba de convergencia. Construcción de una nueva dirección de descenso.

Si $\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_{m+1}^n|^2 dx / \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_0^n|^2 dx \leq \text{tol}$, $\mathbf{u}_h^{\Delta t} = \mathbf{u}_0$; en caso contrario, calcular

$$\beta_m = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_{m+1}^n|^2 dx}{\sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Omega}} |g_m^n|^2 dx}, \quad (2.86)$$

y actualizar \mathbf{d}_m por medio de

$$\mathbf{d}_{m+1} = \mathbf{g}_{m+1} + \beta_m \mathbf{d}_m. \quad (2.87)$$

Hacer $m = m + 1$ y regresar a paso 2. \square

Observación 2.3. El algoritmo (2.71)–(2.87) es un análogo discreto del algoritmo (2.44)–(2.56).

La implementación computacional del Algoritmo 2.71)–(2.87) requiere la solución de problemas Dirichlet discretos (2.73), (2.75) y (2.79), (2.81); para resolver estos problemas (lineales) podemos usar *métodos directos* (como Cholesky si el funcional bilinear $a(\cdot, \cdot)$ es simétrico) o *métodos iterativos* (como gradiente conjugado, relajación, multigrad, entre otros). Para inicializar los métodos iterativos debemos usar la solución del problema correspondiente al paso de tiempo anterior.

2.7. Ejemplos numéricos en 1 y 2 dimensiones: control distribuido y ‘chattering control’

En esta sección mostraremos algunos resultados numéricos en 1 y 2 dimensiones usando la metodología discutida en la sección anterior para el problema de control distribuido. También, describiremos un breve resumen del problema de ‘chattering control’, donde la función de control tiene su soporte sobre un conjunto de medida cero que se mueve periódicamente sobre el dominio Ω , y mostraremos algunos resultados de dicho caso.

2.7.1. Ejemplos numéricos: control Distribuido

Resultados numéricos en una dimensión

Para validar la metodología anteriormente vista, vamos a considerar el siguiente problema de valores a la frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } (0, 1) \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = 0, \\ y(T) = y_T. \end{cases} \quad (2.88)$$

En este caso se toma el soporte del control $\omega = (0.4, 0.6) \in (0, 1)$, la constante de difusión $\mu = 1/10$, $T = 2$ como tiempo final, y $tol = 10^{-6}$ como criterio de paro para el algoritmo de gradiente conjugado. Además, consideraremos las siguientes funciones objetivo

$$y_T = 4x(1-x) \quad (2.89)$$

$$y_T = 4x\left(x - \frac{1}{8}\right)(1-x) \quad (2.90)$$

$$y_T = \begin{cases} 8\left(x - \frac{1}{4}\right), & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2; \\ 8\left(\frac{3}{4} - x\right), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 3/4; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.91)$$

En primer lugar, vamos a presentar resultados numéricos de convergencia, utilizando la función objetivo definida por (2.89), donde se consideran diferentes valores de Δt y Δx para la discretización en el tiempo y el espacio, respectivamente. En los siguientes experimentos fijamos $\mathbf{u}_0 = 0$ como control inicial para el algoritmo de gradiente conjugado, y $k = 10^6$ como parámetro de penalización. Dichos resultados numéricos se presentan en la tabla 2.1 donde u^c y $y^c(T)$ denotan el control óptimo y el correspondiente estado final, respectivamente, calculados mediante el algoritmo (2.71)–(2.87). Por otro lado, *No. iters* denota el número de iteraciones necesarias para converger al control óptimo para la tolerancia dada anteriormente, *Norm u^c* denota $\|u^c\|_{\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))}$, y *Rel. error* es el error relativo entre la función objetivo exacta y la calculada dado por $\|y_T - y^c(T)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} / \|y_T\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$, con $\Omega = (0, 1)$. Los resultados

Tabla 2.1: Resumen de los resultados de convergencia, con la función objetivo (2.89).

Δx	1/50	1/100	1/200	1/400	1/100	1/200
Δt	1/100	1/100	1/100	1/100	1/200	1/200
<i>No. iters</i>	18	11	10	9	11	9
<i>Norm u^c</i>	2.2938	2.4564	2.5471	2.5830	2.4076	2.4986
<i>Rel. error</i>	0.0164	0.0165	0.0163	0.0165	0.0172	0.0171

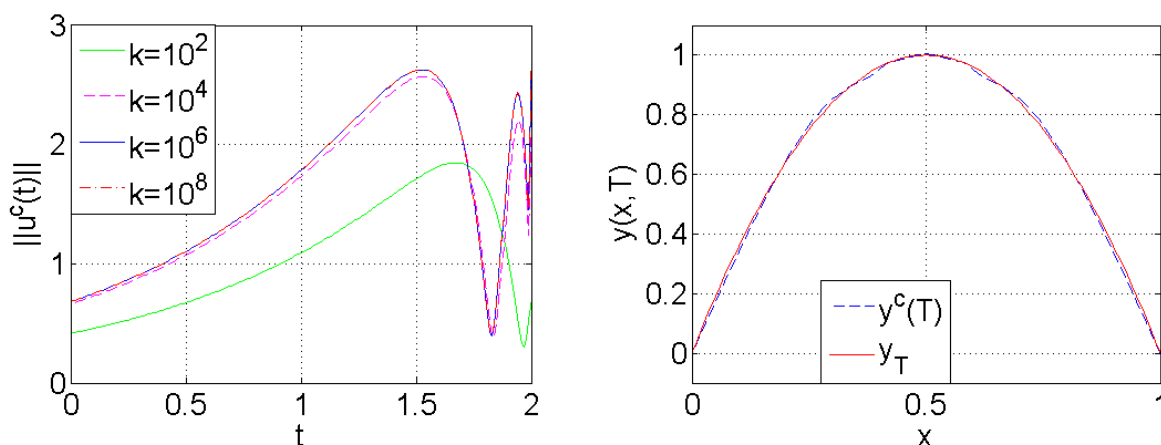
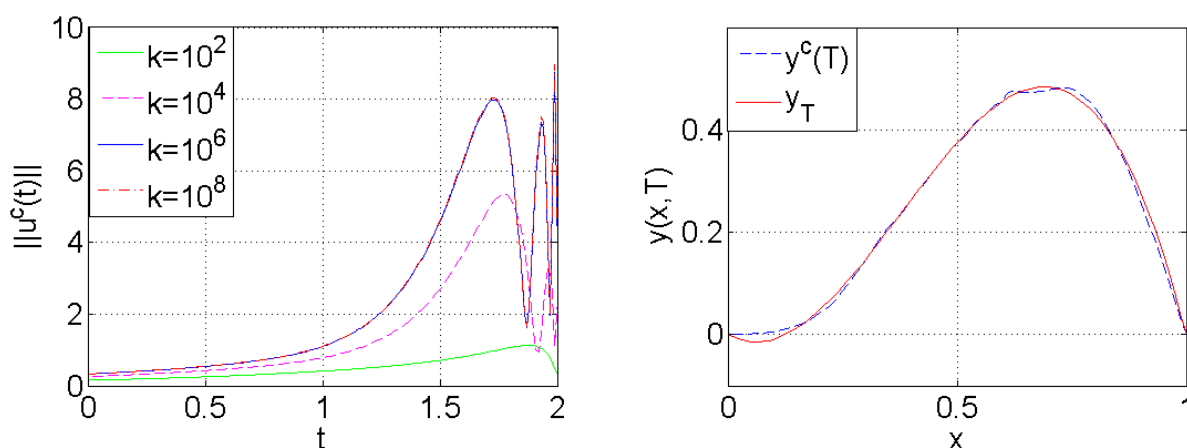
mostrados en esta tabla indican que los diferentes parámetros de discretización elegidos nos llevan a resultados similares, lo cual sugiere convergencia con respecto a la discretización en el espacio–tiempo. La diferencia relativa entre la función objetivo y la calculada, en la mayoría de los casos, es de aproximadamente el 1.6%. Debido a estos resultados, hemos decidido fijar los parámetros de discretización en $\Delta t = 1/100$ y $\Delta x = 1/100$ para los siguientes experimentos numéricos.

La tabla 2.2 muestra la influencia del parámetro de penalización k para dos diferentes funciones objetivos suaves, a saber (2.89) y (2.90), mostrando la convergencia del estado final calculado a y_T cuando $k \rightarrow +\infty$. Los resultados son mejores para el caso de la función objetivo (2.89) debido a que se obtiene mejor precisión con menos iteraciones. Esta función es simétrica respecto $x = 1/2$. Así mismo, se puede observar que para $k > 10^6$ los resultados numéricos son prácticamente lo mismo en todos los casos.

Las figuras 2.2 y 2.3 visualizan la evolución de la norma- \mathcal{L}^2 del control en función del tiempo para diferentes valores de k y la gráfica de la función objetivo calculada $y^c(T)$ comparada con y_T , para los casos de las funciones par con respecto a $x = 1/2$ (2.89) y la función no simétrica alrededor de $1/2$ (2.90), respectivamente. Estas figuras muestran que existe una oscilación de la función de control cerca de T , similar a los casos de calor mostrados en [13].

Tabla 2.2: Resultados numéricos para funciones objetivo suaves.

y_T	k	No. iters	Norm u^c	Rel. error
$4x(1-x)$	10^2	5	1.6482	0.1158
	10^4	11	2.3783	0.0183
	10^6	11	2.4564	0.0165
	10^8	11	2.4573	0.0165
$4x(x - \frac{1}{8})(1-x)$	10^2	6	0.8147	0.3442
	10^4	27	0.0305	0.0762
	10^6	46	4.7824	0.0313
	10^8	44	4.8286	0.0309
	10^{10}	44	4.8319	0.0309

Figura 2.2: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Comparación entre y_T y $y^c(T)$. Caso: función objetivo (2.89).Figura 2.3: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Comparación entre y_T y $y^c(T)$. Caso: función objetivo (2.90).

Con el fin de ver la influencia de la función objetivo, vamos a considerar la función no-suave dada por (2.91), los resultados se resumen en la tabla 2.3. Nuevamente observamos que los

Tabla 2.3: Resultados numéricos para una función objetivo no-suave.

k	No. iters	Norm u^c	Rel. error
10^2	5	2.2551	0.1905
10^4	18	4.2016	0.0517
10^6	41	5.8432	0.0402
10^8	41	5.8906	0.0401

resultados no cambian significativamente cuando $k > 10^6$. La figura 2.4 visualiza la evolución de la norma- \mathcal{L}^2 del control en función del tiempo para diferentes valores de k (izquierda), además de la comparación entre $y^c(T)$ y y_T donde $k = 10^6$ (derecha).

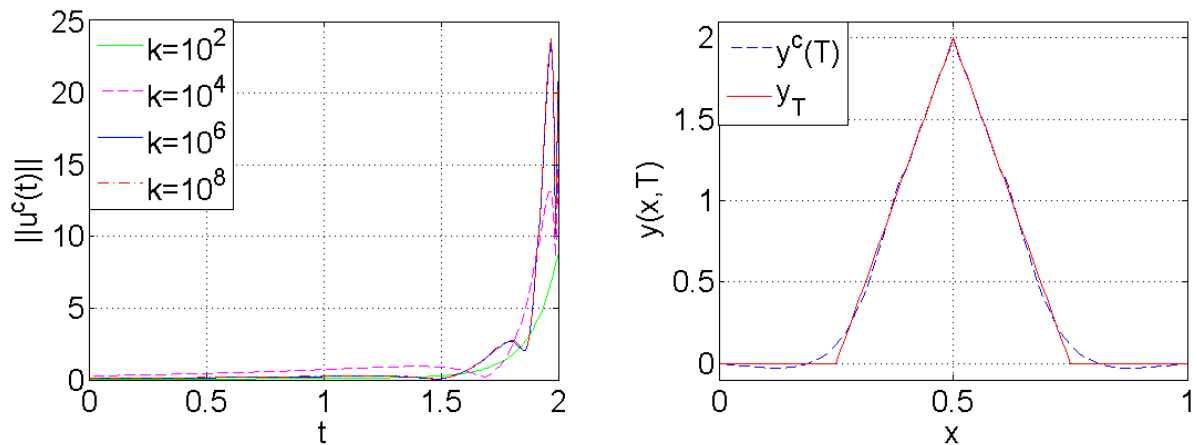


Figura 2.4: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Comparación entre y_T y $y^c(T)$. Caso: función objetivo (2.91).

Los ejemplos anteriores muestran que no siempre recuperamos la función objetivo y_T de forma exacta, pero si en una vecindad de ésta, independientemente de si la función objetivo es suave o no-suave, siendo la única condición que esta función objetivo sea cuadrado integrable.

Resultados numéricos en dos dimensiones

A continuación vamos a mostrar algunos ejemplos numéricos en 2 dimensiones usando la metodología discutida en la sección anterior. Como en el caso de 1-D, consideramos un problema de difusión con valores a la frontera, el cual está definido por

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \nabla^2 y = v \chi_{\omega \times (0, T)} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, \\ y(T) = y_T, \end{cases} \quad (2.92)$$

con $x \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. y $\Gamma = \partial\Omega$. Elegimos $y_0 = 0$, $T = 3$, $\mu = 1/2$ en la ecuación (2.92). Hemos considerado tres diferentes funciones objetivos, uno suave y dos no suaves, con el fin de estudiar la influencia de la ‘suavidad’ en el problema de control.

Consideremos la siguiente función objetivo suave

$$y_T(x_1, x_2) = 4x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1), \quad (2.93)$$

con $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. La tabla 2.4 resume algunos resultados numéricos de convergencia cuando el control tiene como soporte el subdominio $\omega = (0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$, y donde se han tomado diferentes valores de Δt y Δx para la discretización en el tiempo y el espacio, respectivamente. Así mismo, hemos fijado $\mathbf{u}_0 = 0$ como control inicial para el algoritmo de gradiente conjugado, $tol = 10^{-5}$ como criterio de paro, y $k = 10^6$ como parámetro de penalización. Podemos observar en dicha tabla, que los resultados no difieren significativamente de los

Tabla 2.4: Resumen de los resultados de convergencia, con $\omega = (0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$ y $\Delta x_1 = \Delta x_2$

Δx_1	1/50	1/100	1/150	1/50	1/100	1/150
Δt	1/100	1/100	1/100	1/150	1/150	1/150
<i>No. iters</i>	10	10	10	10	10	10
<i>Norm u^c</i>	0.3607	0.3783	0.3846	0.3571	0.3744	0.3806
<i>Rel. error</i>	0.0182	0.0191	0.0193	0.0188	0.0198	0.0191

parámetros de discretización que hemos considerado, implicando así convergencia respecto a la discretización espacio–tiempo. Adicionalmente, se observa que la función objetivo y_T difiere de la calculada $y^c(T)$ aproximadamente en un 1.9 %, en la mayoría de los casos. Por tanto, para el resto de los experimentos numéricos hemos decidimos considerar los parámetros de discretización $\Delta t = 1/100$ y $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1/50$.

Por otro lado, la tabla 2.5 muestra la influencia del parámetro de penalización k , en diferentes subdominios de soporte ω . Los resultados resumidos en esta tabla nos indican que cuando $|\omega|$ decrece las soluciones requieren de mayor un número iteraciones de gradiente conjugado para converger al óptimo. También, se puede observar que cuando $k > 10^6$ no hay cambios significativos en los resultados numéricos (en todos los casos), por lo cual hemos decidido fijar el valor del parámetro de penalización en $k = 10^6$. La figura 2.5 muestra la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ para el caso en el que el conjunto de soporte para el control es $\omega = (0.4, 0.6) \times (0.4, 0.6)$ y el objetivo es dado por la función (2.93).

Tabla 2.5: Resultados numéricos para diferentes subdominios cuadrados.

ω	$ \omega / \Omega $	k	No. Iters	Norm u^c	Rel. error
$(0, 1) \times (0, 1)$	1	10^2	3	0.2575	0.0019
		10^4	3	0.2681	0.0019
		10^6	3	0.2682	0.0019
		10^8	3	0.2682	0.0019
$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	0.36	10^2	4	0.2802	0.0903
		10^4	8	0.3526	0.0225
		10^6	9	0.3607	0.0182
		10^8	10	0.3607	0.0182
$(0.4, 0.6) \times (0.4, 0.6)$	0.04	10^2	5	0.4806	0.3322
		10^4	15	1.0205	0.0544
		10^6	19	1.0694	0.0468
		10^8	19	1.0701	0.0467

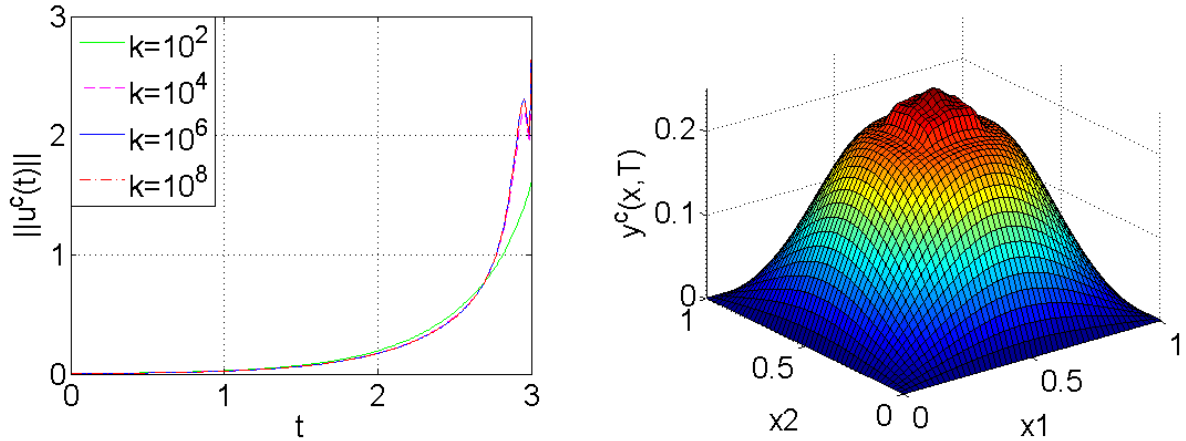


Figura 2.5: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Caso: función objetivo (2.93) y conjunto de soporte $\omega = (0.4, 0.6) \times (0.4, 0.6)$.

Para los siguientes experimentos numéricos vamos a considerar dos objetivos no-suaves, definidas por las siguientes funciones

$$y_T(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - 2\sqrt{(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2}, & \text{si } (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.94)$$

$$y_T(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_2, & \text{si } x_1 \geq x_2, \frac{1}{3}(1 - x_1) \geq x_2 \\ \frac{2}{3}(1 - x_1), & \text{si } x_1 \geq x_2, \frac{1}{3}(1 - x_1) \leq x_2 \\ \frac{2}{3}(1 - x_2), & \text{si } x_1 \leq x_2, (1 - 3x_1) \leq x_2 \\ 2x_1, & \text{si } x_1 \leq x_2, (1 - 3x_1) \geq x_2 \end{cases} \quad (2.95)$$

con $(x_1, x_2) \in \Omega$. Elegimos nuevamente, $y_0 = 0$ como estado inicial y $T = 3$. En la figura 2.6 se pueden observar las gráficas de los objetivos (2.94) y (2.95).

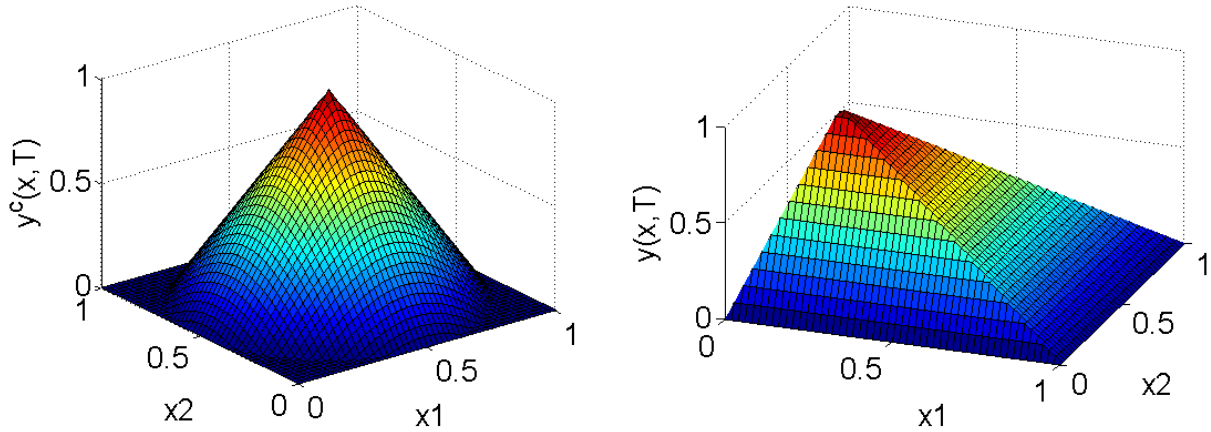


Figura 2.6: Izquierda: Función objetivo(2.94). Derecha: Función objetivo (2.95).

Para los siguientes resultados hemos fijamos los parámetros en $\Delta t = 1/100$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1/50$, $tol = 10^{-5}$, $u_0 = 0$ y $k = 10^6$. La tabla 2.6 muestra los resultados numéricos para diferentes subdominios ω como conjuntos de soporte del control. Los resultados

Tabla 2.6: Resultados numéricos para diferentes subdominios cuadrados.

y_T	$\hat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	No. Iters	Norm u^c	Rel. error
(2.94)	$(0, 1) \times (0, 1)$	1	13	0.8502	0.0029
	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	0.36	11	0.9800	0.0373
	$(0.4, 0.6) \times (0.4, 0.6)$	0.04	17	1.9271	0.0721
	$(0.44, 0.54) \times (0.44, 0.54)$	0.01	37	3.2481	0.0745
(2.95)	$(0, 1) \times (0, 1)$	1	17	1.2054	0.0060
	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	0.36	32	2.1732	0.0557
	$(0.4, 0.6) \times (0.4, 0.6)$	0.04	60	10.6528	0.1093
	$(0.44, 0.54) \times (0.44, 0.54)$	0.01	150	20.0161	0.1414

presentados en la tabla 2.6 sugieren de nuevo que cuando $|\omega|$ es pequeño es más difícil controlar el sistema y se necesitan mas iteraciones para alcanzar la convergencia. Además, notamos que cuando la función objetivo es no-simétrica respecto a la recta paralela al eje- z $\gamma = \{(1/2, 1/2, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \lambda \lambda \in \mathbb{R}\}$, como en (2.95), es mucho más difícil controlar el sistema. Sin embargo, como en el caso de una dimension, recuperamos de forma favorable la información para funciones objetivos no-suaves, usando la metodología de la sección anterior. En la figura 2.7 mostramos la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ para el caso en el que el conjunto de soporte para el control es $\omega = (0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$ y el objetivo es dado por la función (2.94).

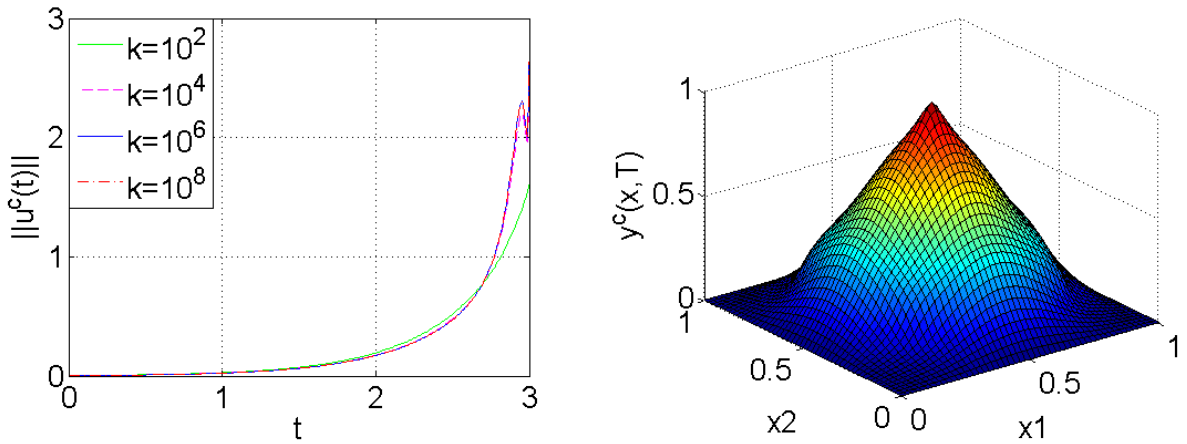


Figura 2.7: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Caso: función objetivo (2.94) y conjunto de soporte $\omega = (0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$.

2.7.2. Ejemplos numéricos: ‘chattering control’

Las funciones de control que hasta ahora hemos considerando tienen su soporte en un subdominio ω , el cual es un subconjunto abierto de Ω . Sin embargo, es natural preguntar si en (2.1) el conjunto ω puede reemplazarse por un conjunto ‘muy pequeño’, en particular por un conjunto de medida cero. Por ejemplo, nos preguntamos si es posible controlar el sistema mediante un punto en el caso 1-D, y por medio de una curva (o parte de ella) para el caso 2-D.

Ahora, para ilustrar la técnica de ‘chattering control’ consideremos el modelo unidimensional, es decir $\Omega \subset \mathbb{R}$ y ω es reducido a un punto, digamos

$$\omega = \{b\} \quad b \in \Omega. \quad (2.96)$$

Así, si $\delta(x - b)$ denota la medida de Dirac en b , entonces la *función de estado* y es dada por

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v(t)\delta(x - b) \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad y(0) = y_0, \quad y = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T). \quad (2.97)$$

En (2.97) el control v depende únicamente de t y es llamado *control puntual* (ver más detalles de control puntual en el Apéndice A). Por otro lado, sea $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ las funciones propias de $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ sus correspondientes valores propios. Entonces decimos que b es un *punto estratégico* en Ω si $w_j(b) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Observemos que las funciones propias del operador $\mathcal{A} = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ del problema con condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet (2.97) son:

$$w_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{\|\sin(n\pi x)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}.$$

Por lo tanto, para poder asegurar el control del sistema, dado cualquier blanco $y_T \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, basta con pedir que el punto b sea un punto estratégico, es decir:

$$\sin(n\pi b) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

esto es, $b \in \mathbb{I}$. Las computadoras solo ‘conocen’ los números racionales, por lo cual es necesario hacer un barrido sobre el control, es decir, debemos usar la técnica de ‘chattering control’. Esta técnica consiste en mover el punto de control (o una curva de control, en el caso 2-D) con el objeto de evitar la anulación de las funciones propias y así poder rehacer el control.

Resultados numéricos en una dimensión

Consideramos un conjunto de problemas de prueba parametrizados por T , y_T , k , y por el soporte b_0 del problema de control puntual. Estos problemas pueden ser formulados como sigue

$$\min_{v \in \mathcal{L}^2(0, T)} J_k(v), \quad (2.98)$$

donde

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \int_0^T |v|^2 dt + \frac{k}{2} \int_0^1 |y(T) - y_T|^2 dx, \quad (2.99)$$

con y la solución del siguiente *problema de difusión*:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v(t) \delta(x - b_0) & \text{en } (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & \text{sobre } (0, T) \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (2.100)$$

donde $b_0 \in (0, 1)$, llamado punto de control, y $\mu > 0$; tenemos, claramente, $\Omega = (0, 1)$.

Por otro lado, la técnica de ‘chattering control’ puede ser implementada de forma sencilla al dar movimientos oscilatorios al punto de control b_0 de la siguiente manera:

$$b(t) = b_0 + \epsilon \sin(2\pi ft), \quad b_0 \in \mathbb{Q} \quad (2.101)$$

donde ϵ es la amplitud de las oscilaciones y f su frecuencia.

Para los experimentos numéricos, primero, consideramos la función objetivo suave definida por

$$y_T(x) = \frac{27}{4} x^2 (1 - x). \quad (2.102)$$

Elegimos $\mu = 1/10$ en (2.100), $T = 3$, $\Delta t = 1/100$ para la discretización en el tiempo, mientras que la discretización en el espacio se obtuvo usando una malla uniforme sobre $(0, 1)$ con $\Delta x = 1/100$. Hemos fijado $u_0 = 0$ como control inicial, y $tol = 10^{-6}$ como criterio de

paro. Ahora, tomemos la frecuencia $f = 3$, y fijamos el parámetro de penalización en $k = 10^8$ (para $k > 10^8$ no hay diferencia significativa en los resultados) y realizamos control para el punto estratégico $b_0 = \sqrt{2}/3$ y chattering control para el punto $b_0 = 1/2$, el cual claramente no es un punto estratégico. En este experimento se prueban cuatro diferentes amplitudes (para el caso de chattering control), como se observa en la tabla 2.7. Los resultados muestran

Tabla 2.7: Resultados numéricos obtenidos mediante chattering control empleando diferentes amplitudes ϵ . Caso: función objetivo suave

b_0	ϵ	No. Iters	$\ u\ _{\mathcal{L}^2(0,T)}$	Rel.error
$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	16	2.0391×10^3	0.0636
	0	5	94.5270	0.3540
$\frac{1}{2}$	0.01	34	2.9648×10^3	0.0947
	0.05	42	716.5231	0.0380
	0.1	30	328.8762	0.0420

que cuando b_0 es un punto estratégico se obtienen buenos resultados, como se aprecia en el primer renglón de dicha tabla. Por otro lado, se puede observar, para el caso donde b_0 es un punto no-estratégico, que cuando no se emplea chattering control ($\epsilon = 0$) se obtienen malos resultados, dado que el error relativo en este caso es del 35 % aproximadamente. Sin embargo cuando ϵ es lo suficientemente grande, en este caso $\epsilon = 0.05$, se necesitan más iteraciones para alcanzar convergencia, además entre más grande sea ϵ menor es la norma del control $\|u\|_{\mathcal{L}^2(0,T)}$. En la figura 2.8 mostramos la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ y y_T para el caso $b_0 = 1/2$ y $\epsilon = 0.05$.

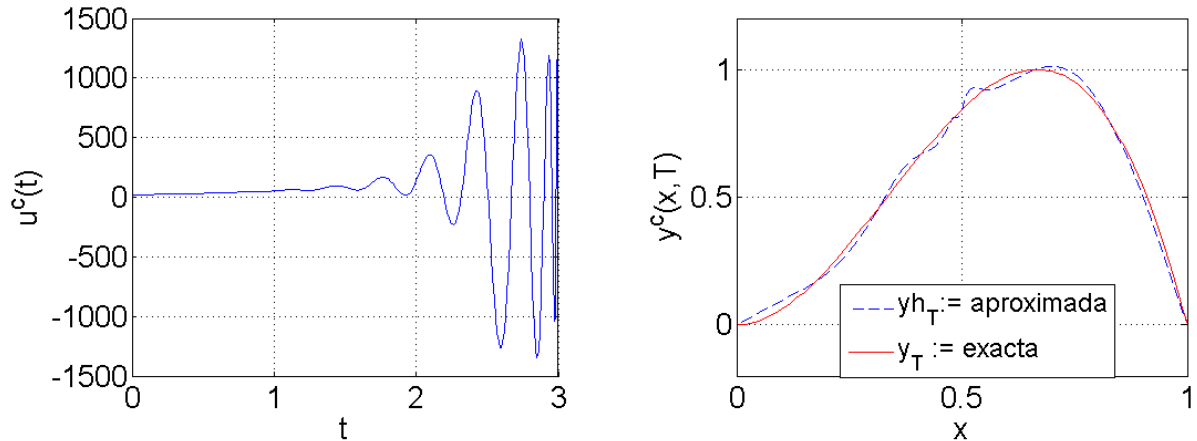


Figura 2.8: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Caso: función objetivo suave, y $\epsilon = 0.05$.

Ahora, vamos aplicar nuevamente la técnica de chattering control sólo que en esta ocasión, queremos conducir el sistema a una función objetivo no suave la cual se define por

$$y_T = \begin{cases} 8(x - \frac{1}{2}), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 3/4; \\ 8(1 - x), & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.103)$$

Para estos experimentos elegimos los mismos parámetros que para el ejemplo anterior. La tabla 2.8 muestra los resultados para $f = 3$ y diferentes amplitudes ϵ para el punto $b_0 = 1/2$. Esta tabla muestra que si no se realiza ‘chattering’ no se puede controlar el sistema, pues el

Tabla 2.8: Resultados numéricos obtenidos mediante chattering control empleando diferentes amplitudes ϵ . Caso: función objetivo no-suave

ϵ	No. Iters	$\ u\ _{\mathcal{L}^2(0,T)}$	Rel.error
0	5	227.4563	0.7094
0.001	48	6.030×10^3	0.1638
0.01	56	6.8501×10^3	0.1496
0.05	200	2.5892×10^3	0.1035
0.1	114	1.7197×10^3	0.0737

error relativo entre el blanco y la función calculada es del 71 % aproximadamente. La mejora es muy significativa cuando se realiza ‘chattering’, aún en el caso en que la amplitud de las oscilaciones ϵ sean muy pequeñas. La mejor aproximación a la función objetivo se logra con $\epsilon = 0.1$ en este caso. La figura 2.9 muestra la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ y y_T para el caso $\epsilon = 0.1$. En esta figura se puede observar que es más difícil recuperar la información

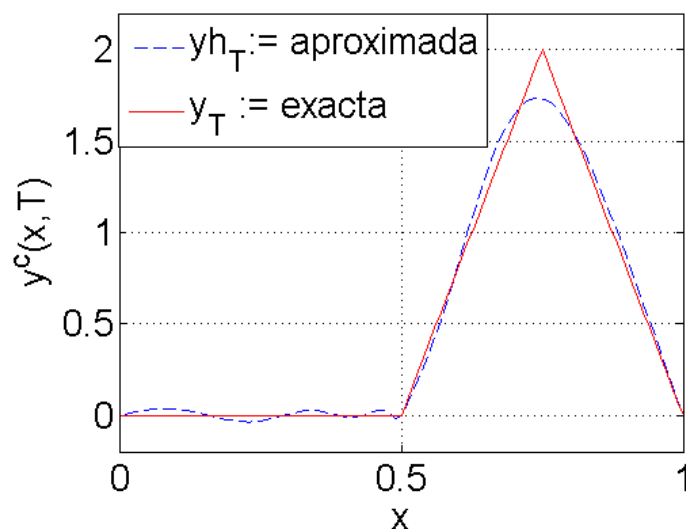


Figura 2.9: Gráfica de $y^c(T)$. Caso: función objetivo no-suave, y $\epsilon = 0.1$.

donde existen singularidades de la derivada, esto es debido a que el operador de difusión suaviza las soluciones.

Resultados numéricos en dos dimensiones

En los siguientes experimentos, vamos a considerar el problema (2.92) con funciones de control cuyo soporte es una curva γ en Ω . Para este conjunto de experimentos usamos la técnica de chattering control moviendo la curva γ aleatoriamente en cada paso de tiempo t de la siguiente manera

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \varepsilon\Theta(t)$$

con $\Theta(t) \in (0, 1)$ un número aleatorio para cada $t \in (0, T)$ y $\varepsilon > 0$ pequeño. De hecho, existen algunas otras opciones para realizar chattering control, pero aquí preferimos esta técnica porque es fácil de realizar computacionalmente.

En este caso escogemos la función objetivo y_T y la curva γ_0 definidas por

$$y_T(x_1, x_2) = \frac{27}{4}x_1^2(x_1 - 1)x_2^2(x_2 - 1), \quad (2.104)$$

y

$$\gamma_0 = \{x = (s, s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (1/2, 2/3)\}, \quad (2.105)$$

respectivamente. La figura 2.10 muestra la gráfica de γ sobre el dominio Ω .

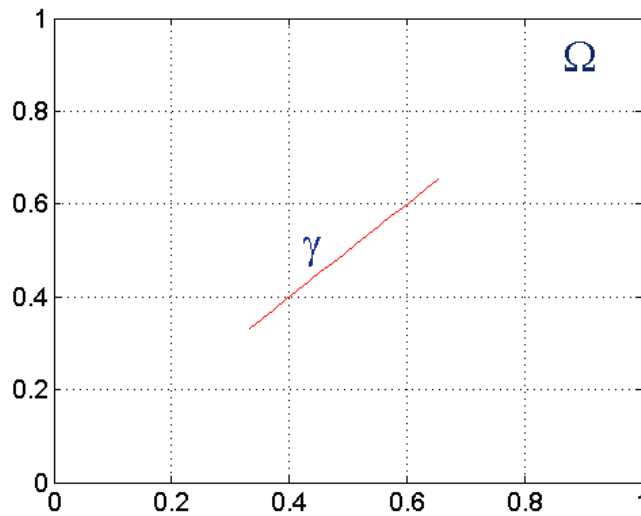


Figura 2.10: Curva γ sobre Ω .

Luego, fijemos $\mu = 1$, $y_0 = 0$, $T = 3$ en (2.92), además elegimos los parámetros $\Delta t = 1/100$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1/100$, $tol = 10^{-5}$, $u_0 = 0$ y $k = 10^8$. La tabla 2.9 muestra los resultados numéricos para diferentes valores de ε . En esta tabla, se observa como el control mejora significativamente cuando hacemos chattering control. La figura 2.11 muestra la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ para el caso $\varepsilon = 0.1$.

Tabla 2.9: Resultados numéricos obtenidos mediante chattering control empleando diferentes valores de ε .

ε	<i>No. Iters</i>	$\ u\ _{\mathcal{L}^2(0,T)}$	<i>Rel.error</i>
0	50	188.6827	0.3549
0.001	304	734.1083	0.1683
0.01	118	544.3566	0.0699
0.1	100	397.7441	0.0693

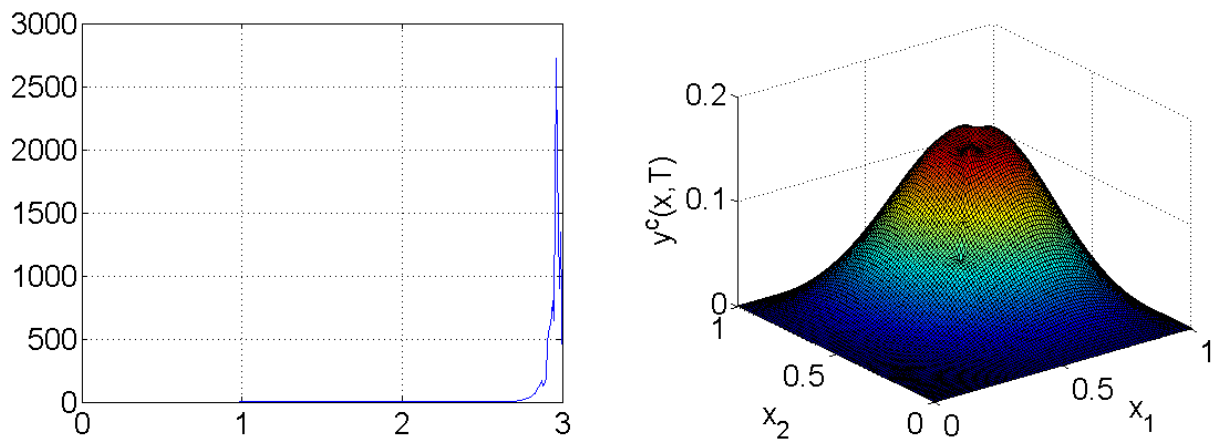


Figura 2.11: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Caso: $\varepsilon = 0.1$.

CAPÍTULO 3

CONTROL DE PROCESOS DIFUSIVOS SOBRE SUPERFICIES EN \mathbb{R}^3

En este capítulo explicaremos como se formulan los problemas de controlabilidad sobre superficies, así cómo las condiciones de optimalidad. Además, vamos a describir un algoritmo de gradiente conjugado el cual resuelve un problema de control de un proceso difusivo sobre una superficie de \mathbb{R}^3

3.1. Formulación del problema de control sobre superficies

A continuación abarcaremos la solución de problemas de controlabilidad asociado con un proceso de difusión el cual tiene lugar sobre una superficie Σ de \mathbb{R}^3 , como el toro o la esfera.

Sea ω un subconjunto abierto de Σ . El primer problema que consideramos es un problema de controlabilidad exacta, esto es:

Encontrar $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución y del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial t}(t)z \, d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} y(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z \, d\Sigma = \int_{\omega} v(t)z \, d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \quad \text{ctp en } (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

satisface

$$y(T) = y_T, \quad (3.2)$$

donde:

- (i) ∇_Σ es el *gradiente tangencial* sobre Σ .
- (ii) $d\Sigma$ es la medida de superficie infinitesimal.
- (iii) $\mathcal{H}^1(\Sigma) = \{z \mid z \in \mathcal{L}^2(\Sigma), \int_\Sigma |\nabla_\Sigma z|^2 d\Sigma < +\infty\}$.
- (iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \forall \mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^3, \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^3$.
- (v) $y_0, y_T \in \mathcal{L}^2(\Sigma)$, y $\mu(> 0)$ es un coeficiente de difusión.

El anterior problema de controlabilidad no tiene solución, en general. Sin embargo, es posible considerar *controlabilidad aproximada* ya que el conjunto $\{y(T; v)\}_{v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))}$ es *denso* en $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ (ver Sección 2.2 para resultados relacionados). Aprovechando los resultados de densidad anteriores, introducimos, en el siguiente párrafo, una variante de controlabilidad del problema de controlabilidad exacta anterior.

Observación 3.1. Supongamos que $y_T = 0$; entonces de los resultados mostrados en [16] se sigue que, $\forall y_0 \in \mathcal{L}^2(\Sigma)$, existe un control $v \in \mathcal{L}^2(\omega)$, tal que la solución del problema de valores iniciales (3.1) satisface $y(T) = 0$. Esta propiedad es conocida como la *propiedad de controlabilidad nula* y se cumple para superficies suficientemente suaves de \mathbb{R}^3 (y para dominios planos acotados). Comentaremos más de esta propiedad en el Capítulo 5.

Observación 3.2. El operador elíptico asociado con la ecuación (3.1) es claramente $(-1)\mu$ veces el *operador de Laplace–Beltrami*.

3.1.1. Formulación del problema de controlabilidad aproximada sobre superficies

Considerando los resultados de densidad mencionados anteriormente, aproximamos el problema de controlabilidad exacta (3.1)–(3.2) por el siguiente (*problema penalizado*):

$$\begin{cases} u_k \in \mathcal{U}, \\ J_k(u_k) \leq J_k(v), \forall v \in \mathcal{U}, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde

- (i) $\mathcal{U} = \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$.
- (ii) El funcional de costo $J_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por medio de

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \int_{\omega \times (0, T)} |v|^2 d\Sigma dt + \frac{k}{2} \int_\Sigma |y(T) - y_T|^2 d\Sigma, \quad (3.4)$$

con $k > 0$, y donde la función y es obtenida del control v vía la solución del problema de valores iniciales (3.1). Al igual que en los problemas anteriores, se sigue que el problema de controlabilidad aproximada (3.3) tiene solución única, caracterizada por

$$DJ_k(u_k) = 0, \quad (3.5)$$

donde $DJ_k(u_k)$ es el diferencial de J_k en u_k . La solución de (3.5) mediante un algoritmo de gradiente conjugado se tratará en la sección 3.3, pero antes abordaremos el cálculo de $DJ_k(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$, lo cual constituye un tema de suma importancia para nuestro estudio. Antes de esto, sin embargo queremos resaltar algunas observaciones:

Observación 3.3. Usando resultados de [13], se puede demostrar que si denotamos por y_k la solución del problema (3.1) asociado con u_k , entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k(T) = y_T \text{ in } \mathcal{L}^2(\Sigma),$$

lo cual justifica que tomemos (3.3) como problema de controlabilidad aproximada. Por otro lado, a menos de que la propiedad de controlabilidad exacta se cumpla para la función objetivo y_T bajo consideración, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))} = +\infty.$$

El siguiente teorema proporciona un resultado relacionado.

Teorema 3.1. Supongamos que se satisface la propiedad de controlabilidad exacta para la función objetivo y_T . Tenemos entonces que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = u \text{ in } \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)), \quad (3.6)$$

donde, u es el control de norma mínima en $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, que resuelve el problema de controlabilidad exacta.

Demostración. Vamos a esbozar la prueba (clásica) de este importante resultado. Suponiendo que el conjunto de las funciones de control v que llevan a la controlabilidad exacta es no vacío, entonces éste es un subconjunto convexo cerrado de \mathcal{U} . Esto implica la unicidad del control de norma mínima en \mathcal{U} que resuelve el problema de controlabilidad exacta anterior; denotaremos este control por u . Tomando $v = u$ en (3.3) obtenemos

$$\int_{\omega \times (0, T)} |u_k|^2 d\Sigma dt + k \int_{\Sigma} |y_k(T) - y_T|^2 d\Sigma \leq \int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt, \quad \forall k > 0, \quad (3.7)$$

lo cual claramente implica que

$$\int_{\omega \times (0, T)} |u_k|^2 d\Sigma dt \leq \int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt, \quad \forall k > 0 \quad (3.8)$$

y

$$\int_{\Sigma} |y_k(T) - y_T|^2 d\Sigma \leq k^{-1} \int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt, \quad \forall k > 0. \quad (3.9)$$

Si sigue entonces de (3.9) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma} |y_k(T) - y_T|^2 d\Sigma = 0. \quad (3.10)$$

Por otro lado, puesto que en el espacio de Hilbert \mathcal{U} la bola cerrada centrada en 0 y de radio $\sqrt{\int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt}$ es débilmente compacta, se deduce de (3.8) que uno puede extraer de $\{u_k\}_{k>0}$ una subsucesión — también denotada por $\{u_k\}_{k>0}$ — la cual converge débilmente en \mathcal{U} a u^* verificando

$$\int_{\omega \times (0, T)} |u^*|^2 d\Sigma dt \leq \int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt. \quad (3.11)$$

A partir de la semicontinuidad inferior débil de la función (convexa) $v \rightarrow \int_{\omega \times (0, T)} |v|^2 d\Sigma dt$ se sigue de (3.8) y (3.11) que

$$\begin{aligned} \int_{\omega \times (0, T)} |u^*|^2 d\Sigma dt &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\omega \times (0, T)} |u_k|^2 d\Sigma dt \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\omega \times (0, T)} |u_k|^2 d\Sigma dt \\ &\leq \int_{\omega \times (0, T)} |u|^2 d\Sigma dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando variantes cercanas de técnicas desarrolladas en [19] para el control de ecuaciones parabólicas lineales, podemos mostrar que la convergencia débil de $\{u_k\}_k$ a u^* implica, en el espacio

$$W(0, T) = \left\{ z \mid z \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Sigma)), \frac{\partial z}{\partial t} \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}(\Sigma)) \right\},$$

la convergencia débil de $\{y_k\}_k$ a la función y^* , la solución única de (3.1) asociada con $v = u^*$ ($\mathcal{H}^{-1}(\Sigma)$ denota el espacio dual de $\mathcal{H}^1(\Sigma)$). El anterior resultado de convergencia implica —entre otras propiedades— que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k(T) = y^*(T) \text{ débilmente en } \mathcal{L}^2(\Sigma). \quad (3.13)$$

Combinando los resultados de convergencia (3.10), y (3.13) podemos mostrar fácilmente que

$$y^*(T) = y_T. \quad (3.14)$$

La relación (3.14) muestra que u^* pertenece al conjunto de estas funciones de control que permiten realizar la controlabilidad exacta; se sigue entonces de (3.11) y (3.12) que $u^* = u$ y que el conjunto $\{u_k\}_{k>0}$ converge (fuertemente) a u en $\mathcal{U} = \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$. \square

En el caso en que $y_T = 0$, el anterior resultado justifica el uso del enfoque penalizado para aproximar la función de control de la norma mínima en \mathcal{U} que realiza la controlabilidad–nula.

3.2. Condiciones de optimalidad

En esta sección abordaremos el problema del cálculo de la derivada del funcional J_k utilizando técnicas variacionales, lo cual nos permitirá formular las condiciones de optimalidad del problema de minimización. Asimismo, la posibilidad de calcular la derivada del funcional objetivo J_k nos permitirá proponer un algoritmo iterativo de gradiente conjugado para encontrar el control de norma mínima.

Sea $\delta v \in \mathcal{U}$ una perturbación de $v \in \mathcal{U}$; tenemos entonces que (con notación obvia)

$$\delta J_k(v) = \int_{\omega \times (0, T)} v \delta v \, d\Sigma \, dt + k \int_{\Sigma} (y(T) - y_T) \delta y(T) \, d\Sigma, \quad (3.15)$$

con δy la solución del siguiente problema de valores iniciales (obtenido por la perturbación de (3.1)–(3.2)):

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial \delta y}{\partial t}(t) z \, d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} \delta y(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z \, d\Sigma = \int_{\omega} \delta v(t) z \, d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ \delta y(0) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Considerar ahora p , una función de x, t , la cual satisface que $p(t) \in \mathcal{H}^1(\Sigma)$, $\forall t \in (0, T)$, y lo suficientemente suave como función de t para permitir la integración por partes con respecto de t ; tomando $z = p(t)$ en (3.16), obtenemos:

$$\int_{\Sigma \times (0, T)} \frac{\partial \delta y}{\partial t}(t) p(t) \, d\Sigma \, dt + \mu \int_{\Sigma \times (0, T)} \nabla_{\Sigma} \delta y(t) \cdot \nabla_{\Sigma} p(t) \, d\Sigma \, dt = \int_{\omega \times (0, T)} \delta v(t) p(t) \, d\Sigma \, dt. \quad (3.17)$$

Se sigue de (3.17), después de integrar por partes respecto de t , y considerando la relación $\delta y(0) = 0$, que

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} p(T) \delta y(T) d\Sigma - \int_{\Sigma \times (0, T)} \frac{\partial p}{\partial t}(t) \delta y(t) d\Sigma dt + \mu \int_{\Sigma \times (0, T)} \nabla_{\Sigma} p(t) \cdot \nabla_{\Sigma} \delta y(t) d\Sigma dt = \\ \int_{\omega \times (0, T)} p(t) \delta v(t) d\Sigma dt. \end{cases} \quad (3.18)$$

Supongamos que p es la solución al problema de valores iniciales con *retroceso en el tiempo* (la ecuación *adjunta* o ecuación de *co-estado*):

$$\begin{cases} - \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} p(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ p(T) = k(y(T) - y_T). \end{cases} \quad (3.19)$$

Combinando (3.15) con (3.18), (3.19) obtenemos

$$\delta J_k(v) = \int_{\omega \times (0, T)} (v + p) \delta v d\Sigma dt. \quad (3.20)$$

Debido a que \mathcal{U} es un espacio de Hilbert para el producto interior $\{v, w\} \rightarrow \int_{\omega \times (0, T)} v w d\Sigma dt$, entonces también se tiene que $\delta J_k(v) = \int_{\omega \times (0, T)} D J_k(v) \delta v d\Sigma dt$. Por lo tanto, se deduce de (3.20) que

$$\boxed{D J_k(v) = v + p|_{\omega \times (0, T)}}. \quad (3.21)$$

Sea u_k la única solución del problema de control (3.3), y sean y_k y p_k las soluciones de (3.1) y (3.19), respectivamente. Se sigue de lo visto anteriormente que u_k es caracterizada por las siguientes relaciones (llamadas en conjunto el *sistema de optimalidad*):

$$u_k + p_k|_{\omega \times (0, T)} = 0, \quad (3.22)$$

con

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial y_k}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} y_k(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = \int_{\omega} u_k(t) z d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ y_k(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

y

$$\begin{cases} - \int_{\Sigma} \frac{\partial p_k}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} p_k(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ p_k(T) = k(y_k(T) - y_T). \end{cases} \quad (3.24)$$

Las relaciones (3.22)–(3.24) claramente sugieren el siguiente enfoque para resolver el problema de control (3.3):

- (i) Sea u_0 un valor inicial para u_k .
- (ii) Denotamos por y_0 la solución de (3.1) asociada con u_0 .
- (iii) Denotamos por p_0 la solución de (3.19) asociada con y_0 .
- (iv) Si $u_0 + p_0|_{\omega \times (0, T)}$ es lo suficientemente pequeña en \mathcal{U} tomar $u_k = -p_0|_{\omega \times (0, T)}$; de lo contrario usar apropiadamente el residual $u_0 + p_0|_{\omega \times (0, T)}$ para corregir u_0 , y repetir el proceso.

En la Sección 3.3 vamos a mostrar que el programa anterior se puede lograr usando un *algoritmo de gradiente conjugado* el cual opera en el espacio \mathcal{U} .

Observación 3.4. Una alternativa al enfoque anterior (problema *dual* de este en cierto sentido, como se muestra en el Capítulo 1 de [13]) se puede definir como sigue:

- (i) Sea e_0 un valor inicial para $y_k(T)$.
- (ii) Denotar por p_0 la solución de (3.19) verificando $p_0(T) = e_0$.
- (iii) Denotamos por y_0 la solución de (3.1) asociada con $u_0 = -p_0|_{\omega \times (0, T)}$.
- (iv) Si $e_0 - k(y_0(T) - y_T)$ es lo suficientemente pequeño en $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ tomar $u_k = u_0$; de lo contrario usar apropiadamente el residual $e_0 - k(y_0(T) - y_T)$ para corregir e_0 , y repetir el proceso.

Este enfoque alternativo se puede implementar mediante un algoritmo de gradiente conjugado que opera en $\mathcal{L}^2(\Sigma)$. Algunas variantes de éste se han ensayado en [2] y [13], para resolver numéricamente problemas de controlabilidad aproximada para la ecuación de calor en dominios acotados de \mathbb{R}^2 . En este trabajo, resolveremos de manera directa el problema (3.3) (*problema primal*) usando un algoritmo de gradiente conjugado que opera en el espacio de control \mathcal{U} . Las principales razones para preferir el enfoque directo sobre el dual son que: (a) es conceptualmente más simple, y (b) se puede extender fácilmente a modelos de difusión no-lineal, a diferencia del enfoque dual.

3.3. Método de gradiente conjugado

El problema (3.3) es un problema de minimización bien planteado en el espacio de control \mathcal{U} , el cual es un espacio de Hilbert para el producto-interior $\{v, w\} \rightarrow \int_{\omega \times (0, T)} v w d\Sigma dt$. Este es un caso particular de los problemas de minimización en el espacio de Hilbert cuya solución de gradiente conjugado es discutida en, por ejemplo, el Capítulo 1 de [13] y el Capítulo 3 de

[11] (véase también las referencias que ahí se mencionan). Tomando en cuenta los resultados de la Sección 3.2, y en particular (3.21), la solución del problema (3.3) puede obtenerse por medio del siguiente algoritmo de gradiente conjugado (por conveniencia de notación, denotamos por Y_0 el valor inicial denotado por y_0 anteriormente):

Paso 1. Inicialización: dado

$$u_0 \text{ en } \mathcal{U}, \quad (3.25)$$

resolver los siguientes dos problemas.

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial y_0}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} y_0(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = \int_{\omega} u_0(t) z d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ y_0(0) = Y_0, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} - \int_{\Sigma} \frac{\partial p_0}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} p_0(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ p_0(T) = k(y_0(T) - y_T). \end{cases} \quad (3.27)$$

Calcular

$$g_0 = u_0 + p_0|_{\omega \times (0, T)}. \quad (3.28)$$

Si $\int_{\omega \times (0, T)} |g_0|^2 d\Sigma dt / \max \left[1, \int_{\omega \times (0, T)} |u_0|^2 d\Sigma dt \right] \leq tol$, tomar $u_k = u_0$; en otro caso, calcular

$$d_0 = g_0. \quad (3.29)$$

Paso 2. Descenso: Para $q \geq 0$, suponiendo que u_q , g_q , y d_q son conocidos, los dos últimos distintos de 0, calculamos u_{q+1} , g_{q+1} , y si es necesario, d_{q+1} como sigue:

Resolver

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{y}_q}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} \bar{y}_q(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = \int_{\omega} d_q(t) z d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ \bar{y}_q(0) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} - \int_{\Sigma} \frac{\partial \bar{p}_q}{\partial t}(t) z d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} \bar{p}_q(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z d\Sigma = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \text{ ctp en } (0, T), \\ \bar{p}_q(T) = k\bar{y}_q(T), \end{cases} \quad (3.31)$$

y calcular

$$\bar{g}_q = d_q + \bar{p}_q|_{\omega \times (0, T)}. \quad (3.32)$$

Obtener

$$\alpha_q = \frac{\int_{\omega \times (0, T)} |g_q|^2 d\Sigma dt}{\int_{\omega \times (0, T)} d_q \bar{g}_q d\Sigma dt}, \quad (3.33)$$

y después

$$u_{q+1} = u_q - \alpha_q d_q, \quad (3.34)$$

$$g_{q+1} = g_q - \alpha_q \bar{g}_q. \quad (3.35)$$

Paso 3. Prueba de convergencia. Construcción de la nueva dirección de descenso

Si $\int_{\omega \times (0, T)} |g_{q+1}|^2 d\Sigma dt / \max \left[\int_{\omega \times (0, T)} |g_0|^2 d\Sigma dt, \int_{\omega \times (0, T)} |u_{q+1}|^2 d\Sigma dt \right] \leq tol$ tomar $u_k = u_{q+1}$; en otro caso, calcular

$$\beta_q = \frac{\int_{\omega \times (0, T)} |g_{q+1}|^2 d\Sigma dt}{\int_{\omega \times (0, T)} |g_q|^2 d\Sigma dt}, \quad (3.36)$$

y

$$d_{q+1} = g_{q+1} + \beta_q d_q. \quad (3.37)$$

Hacer $q + 1 \rightarrow q$ y regresar a Paso 2. \square

Con respecto a la elección de tol , si tomamos en cuenta el Capítulo 3 de [11], podemos escoger $tol = 10^{-h}$ donde h es el número de dígitos usados para la representación del punto flotante de los números reales en la plataforma informática que usamos para nuestros cálculos.

Mediante una ligera variante al análisis realizado en el Capítulo 1 de [13] para la ‘ecuación de calor ordinaria’, se puede probar que, dado un valor de tol , el número de iteraciones, necesario para lograr la convergencia del anterior algoritmo, varía respecto a \sqrt{k} .

3.4. Chattering Control sobre superficies

Las funciones de control que hemos estado considerando hasta ahora tienen soporte en ω , un subconjunto abierto de Σ . Si el espacio de control \mathcal{U} es igual a $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ la

propiedad de controlabilidad aproximada se mantiene. Una alternativa a este tipo de control (distribuido) es el uso de funciones de control con soporte sobre curvas, o tramos de curvas definidas en Σ ; llamemos γ al conjunto definido por ese soporte curvilíneo. A diferencia del caso anterior, la propiedad de controlabilidad no se garantiza si γ es fija en el tiempo. De hecho, la propiedad de controlabilidad aproximada no se mantiene si, por ejemplo, Σ denota un toro en \mathbb{R}^3 y γ es un pequeño círculo de este, y la razón es que siempre existen funciones propias w del operador de Laplace–Beltrami ∇_{Σ}^2 tal que $w|_{\gamma} = 0$ (una curva de este tipo es llamada una *línea nodal* de w ; las propiedades de las líneas nodales de las funciones propias del operador de Laplace–Beltrami, para el toro y otras superficies suaves de \mathbb{R}^3 , han sido investigadas computacionalmente en [1, 14]). Un remedio simple para la anterior propiedad de no controlabilidad, o para mejorar la controlabilidad existente, es imponer a γ un *movimiento oscilatorio*; los expertos de control lo llaman *chattering control*, y ha sido estudiado por ejemplo en [13], [29] y [22] (ver también las referencias incluidas en estos trabajos).

En este capítulo vamos a combinar la discretización en el tiempo mediante métodos de diferencias finitas, y la discretización en el espacio vía elemento finito.

4.1. Discretización en el tiempo

Sea N un entero positivo, definimos el *paso de discretización del tiempo* Δt como $\Delta t = T/N$. A continuación, aproximamos el problema de control (3.3) por

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{\Delta t} \in \mathcal{U}^{\Delta t}, \\ J_k^{\Delta t}(\mathbf{u}_k^{\Delta t}) \leq J_k^{\Delta t}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}^{\Delta t}, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{U}^{\Delta t} = (\mathcal{L}^2(\omega))^N$, $\mathbf{u}_k^{\Delta t} = \{u_k^n\}_{n=1}^N$, $\mathbf{v} = \{v^n\}_{n=1}^N$, y el funcional de costo $J_k^{\Delta t}$ se define

$$J_k^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N \int_{\omega} |v^n|^2 d\Sigma + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |y^N - y_T|^2 d\Sigma, \quad (4.2)$$

con y^N extraída del conjunto $\{y^n\}_{n=1}^N$, que a su vez se obtiene a partir de \mathbf{v} y y_0 , resolviendo los problemas:

$$y^0 = y_0, \quad (4.3)$$

para $n = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} y^n \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \\ \int_{\Sigma} \frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} z \, d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} y^n \cdot \nabla_{\Sigma} z \, d\Sigma = \int_{\omega} v^n z \, d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $y^n = y(x, n\Delta t)$. Los problemas (4.4) son problemas elípticos bien-planteados; estrictamente hablando, estos no están asociados con ninguna condición de frontera debido a que Σ es una superficie *sin* frontera.

Usando argumentos clásicos de *convexidad*, se puede demostrar fácilmente que el problema discreto (4.1) tiene solución única, descrita por

$$DJ_k^{\Delta t}(\mathbf{u}_k^{\Delta t}) = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

donde $DJ_k^{\Delta t}$ denota el diferencial de $J_k^{\Delta t}$. Tomando $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \longrightarrow \Delta t \sum_{n=1}^N v^n w^n (= (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\Delta t})$ como producto-interior sobre $\mathcal{U}^{\Delta t}$, y usando una variante del tiempo-discreto del método de perturbación usado en la Sección 3.2, podemos demostrar que

$$(DJ_k^{\Delta t}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\omega} (v^n + p^n) w^n \, d\Sigma, \quad (4.6)$$

donde $\{p^n\}_{n=1}^N$ se obtiene de \mathbf{v} por medio de la solución de (4.3), (4.4) y del siguiente problema de valores iniciales con retroceso en el tiempo (el sistema adjunto asociado):

$$p^{N+1} = k(y^N - y_T), \quad (4.7)$$

para $n = N, \dots, 1$

$$\begin{cases} p^n \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \\ \int_{\Sigma} \frac{p^n - p^{n+1}}{\Delta t} z \, d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} p^n \cdot \nabla_{\Sigma} z \, d\Sigma = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \end{cases} \quad (4.8)$$

con $p^n = p(x, n\Delta t)$. No hay ninguna dificultad básica al derivar un algoritmo de tiempo-discreto análogo al algoritmo de gradiente conjugado (3.25)–(3.37), para resolver el problema discreto de control (4.1), mediante las condición de optimalidad (4.5). Con el fin de evitar ser repetitivos no describiremos este algoritmo en este momento. Mejor esperaremos hasta incorporar la discretización espacial de los problemas (4.3), (4.4), (4.7) y (4.8).

Observación 4.1. Para discretizar en el tiempo los problemas parabólicos (3.1) y (3.19), hemos utilizado el esquema de Euler hacia atrás (backward Euler scheme), obteniendo de este modo (4.3), (4.4) y (4.7), (4.8). Este esquema implícito es de primer orden, pero es A-estable rígido, robusto y preserva el principio del máximo si se combina con discretizaciones espaciales adecuadas. En [2] se utilizó un esquema implícito de dos pasos hacia atrás de

segundo orden para resolver los problemas de controlabilidad relacionados con la ecuación de calor clásica, el cual también podríamos haber utilizado. Las principales razones por las cuales no lo hicimos son: (a) el esquema no preserva el principio del máximo, (b) se requiere un procedimiento de arranque, para obtener los dos valores de inicio, (c) es significativamente más complicado deducir el sistema adjunto discreto asociado, (d) si $\nu = 0$, al igual que en el modelo continuo, los modos espectrales de la solución crecen monótonamente con los valores propios del operador de Laplace-Beltrami negativo, y (e) los ingenieros de la NASA que trabajan en el control en tiempo real de los sub-sistemas del Transbordador Espacial y la Estación Espacial Internacional ha permitido observar que la mayoría de las veces el método favorito de discretización en el tiempo para estos ingenieros es el esquema de Euler hacia adelante con un paso de discretización fijo, y lo suficientemente pequeño para evitar inestabilidades numéricas.

4.2. Discretización completa (espacio-temporal) sobre el toro

Vamos a considerar el proceso de difusión el cual tiene lugar sobre la superficie Σ de un toro de \mathbb{R}^3 . El toro y la parametrización de Σ es visualizada en la figura 4.1, donde R (respectivamente, r) es el radio mayor (respectivamente, menor). La figura 4.1 muestra también los dos ángulos θ y ϕ usados para parametrizar Σ .

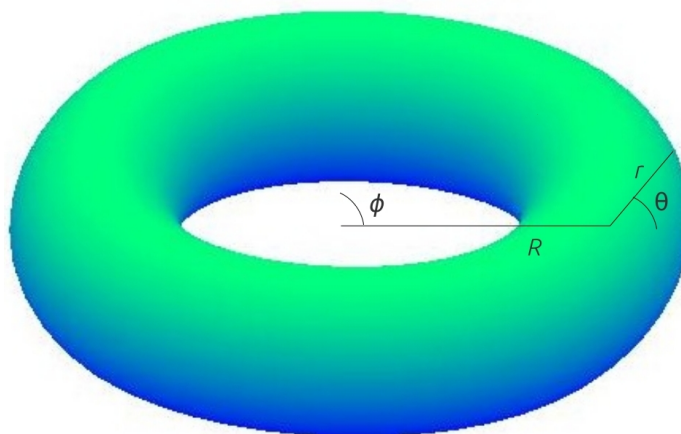


Figura 4.1: Un toro y su superficie

4.2.1. Parametrización sobre el toro

La discretización del problema (3.3) se ha abordado en la Sección 4.1. En cuanto a la discretización en el espacio (consideremos la superficie de un toro Σ) tenemos dos opciones:

- (i) Aproximar Σ por una superficie poliédrica y proceder como en [1] para aproximar los problemas elípticos encontrados (4.4), (4.8).
- (ii) Como en [14], usar la parametrización asociada con la figura 4.1, es decir,

$$\begin{cases} x_1 = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \\ x_2 = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \\ x_3 = r \sin \theta, \end{cases} \quad (4.9)$$

para mapear Σ sobre el cuadrado $\widehat{\Omega} = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ del plano (ϕ, θ) , e imponer *condiciones de frontera periódicas* para tener en cuenta el hecho de que Σ no tiene frontera. Como el problema se formula sobre un dominio plano, uno puede fácilmente aproximar el espacio, utilizando los métodos de elemento finito discutidos en, por ejemplo, el Apéndice 1 de [9].

Usando la transformación (4.9), tenemos claramente que

$$d\Sigma = r(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad (4.10)$$

$$\nabla_{\Sigma} y = \left[\frac{1}{R + r \cos \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right]. \quad (4.11)$$

Denotemos por $\widehat{\omega}$ la pre-imagen de ω ($\omega \subseteq \Sigma$) por la transformación geométrica definida por (4.9); el problema de control discretizado en el tiempo puede ser reformulado entonces como (manteniendo algunas de las notaciones sin cambios):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{\Delta t} \in \mathcal{U}^{\Delta t}, \\ J_k^{\Delta t}(\mathbf{u}_k^{\Delta t}) \leq J_k^{\Delta t}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}^{\Delta t}, \end{cases} \quad (4.12)$$

con $\mathcal{U}^{\Delta t} = (\mathcal{L}^2(\widehat{\omega}))^N$, el espacio $\mathcal{U}^{\Delta t}$ es equipado con el siguiente producto-interior

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \rightarrow r\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\omega}} v^n w^n (R + r \cos \theta) d\phi d\theta (= (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\Delta t}).$$

El funcional de costo $J_k^{\Delta t}$ se define por

$$J_k^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{r}{2} \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\omega}} |v^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \frac{k}{2} r \int_{\widehat{\Omega}} |y^N - y_T|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad (4.13)$$

en donde y^N se obtiene del conjunto $\{y^n\}_{n=1}^N$ que a su vez se obtiene de y_0 y \mathbf{v} por medio de la solución del conjuntos de problemas:

$$y^0 = y_0, \quad (4.14)$$

para $n = 1, \dots, N$ resolver

$$\begin{cases} y^n \in \mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega}), \\ r \int_{\widehat{\Omega}} \frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \mu \int_{\widehat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial y^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial y^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = \\ r \int_{\widehat{\Omega}} v^n z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall z \in \mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega}). \end{cases} \quad (4.15)$$

En (4.15) se ha utilizado el espacio de funciones doblemente periódicas $\mathcal{H}^1(\widehat{\Omega})$, definido por

$$\mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega}) = \left\{ z \mid z \in \mathcal{H}^1(\widehat{\Omega}), z(\phi, 0) = z(\phi, 2\pi) \text{ ctp sobre } (0, 2\pi), z(0, \theta) = z(2\pi, \theta) \text{ ctp sobre } (0, 2\pi) \right\}.$$

Por lo tanto (4.15) es un problema elíptico bien-planteado asociado con un operador elíptico con *coeficientes no-constant*es y que varían suavemente con respecto a θ y ϕ .

El diferencial $DJ_k^{\Delta t}(\mathbf{v})$ de $J_k^{\Delta t}$ en $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^{\Delta t}$ está dado por

$$(DJ_k^{\Delta t}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_{\Delta t} = r\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\Omega}} (v^n + p^n) w^n(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}^{\Delta t}, \quad (4.16)$$

en donde el conjunto $\{p^n\}_{n=1}^N$ se obtiene de y^N (y por lo tanto a partir de \mathbf{v}) mediante la solución del siguiente sistema adjunto discretizado en el tiempo

$$p^{N+1} = k(y^N - y_T), \quad (4.17)$$

para $n = N, \dots, 1$, resuelve

$$\begin{cases} p^n \in \mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega}), \\ r \int_{\widehat{\Omega}} \frac{p^n - p^{n+1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \\ \mu \int_{\widehat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial p^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial p^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega}). \end{cases} \quad (4.18)$$

La solución del problema (4.12) se caracteriza por $DJ_k^{\Delta t}(\mathbf{u}_k^{\Delta t}) = \mathbf{0}$.

4.2.2. Discretización espacial sobre el toro

Con los preliminares dados (en la subsección anterior) podemos abordar ahora la discretización completa del problema de control (3.3) sobre el toro Σ . El primer paso en esta

dirección es la aproximación de $\mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega})$. En este trabajo preferimos el uso de *aproximaciones de elemento finito*, ya que estos métodos se pueden aplicar directamente a las ecuaciones de estado y co-estado, debido a que éstas se han introducido en nuestro estudio directamente en sus formas variacionales. Consideramos por tanto una triangulación de elementos finitos \mathcal{T}_h de $\widehat{\Omega}$ con las siguientes propiedades clásicas (véase, por ejemplo, el Apéndice 1 de [9] y las referencias en él):

- (i) \mathcal{T}_h es una colección finita de triángulos cerrados K contenidos en $\overline{\widehat{\Omega}}$, en donde h denota la longitud de la(s) arista(s) de mayor tamaño en la triangulación.
- (ii) $\overline{\widehat{\Omega}} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$.
- (iii) Si K y K' pertenecen a \mathcal{T}_h , con $K \neq K'$, tenemos ya sea $K \cap K' = \emptyset$, o K y K' tienen un solo vértice en común, o una arista completa en común.

En este caso, dado que estamos tratando con espacios de funciones de doble periodicidad, \mathcal{T}_h tiene que satisfacer la propiedad adicional:

- (iv) Los vértices de \mathcal{T}_h localizados sobre la arista $\{\{\phi, \theta\} \mid \phi = 2\pi, \theta \in [0, 2\pi]\}$ de $\overline{\widehat{\Omega}}$ se obtienen a partir de los ubicados sobre la arista $\{\{\phi, \theta\} \mid \phi = 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$ mediante una translación -2π paralela al eje $O\phi$. Una propiedad similar se cumple para las otras dos aristas de $\overline{\widehat{\Omega}}$.

Una triangulación que verifica la anterior asunción es visualizada en la figura 4.2 a continuación:

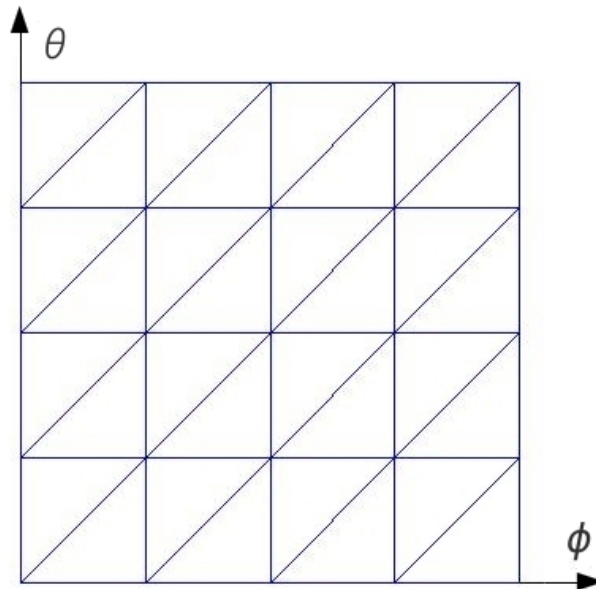


Figura 4.2: Una triangulación de $\overline{\widehat{\Omega}}$

Aproximamos entonces $\mathcal{H}_p^1(\widehat{\Omega})$ por

$$V_h = \left\{ z \mid z \in \mathcal{C}^0(\widehat{\Omega}), z|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. z(0, \theta) = z(2\pi, \theta), z(\phi, 0) = z(\phi, 2\pi), \forall \{\phi, \theta\} \in [0, 2\pi]^2 \right\} \quad (4.19)$$

donde \mathbb{P}_1 es el espacio de los polinomios de dos variables de grado ≤ 1 .

De ahora en adelante, vamos a suponer que $\widehat{\omega}$ es también la unión de triángulos de \mathcal{T}_h , la cual es una simplificación razonable que nos permite aproximar completamente el problema de control (3.3) mediante

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \\ J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}) \leq J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \end{cases} \quad (4.20)$$

donde el espacio de control completamente discretizado $\mathcal{U}_h^{\Delta t}$ se define por

$$\mathcal{U}_h^{\Delta t} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \{v_h^n\}_{n=1}^N, v_h^n \in V_h|_{\widehat{\omega}} \right\}, \quad (4.21)$$

y se le puede asociar el producto-interior

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \rightarrow r\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\omega}} v_h^n w_h^n (R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad (4.22)$$

el cual vamos a denotar por $(\cdot, \cdot)_h^{\Delta t}$. Además denotaremos con $\mathcal{T}_{\widehat{\omega}_h}$ al subconjunto de \mathcal{T}_h definido por

$$\mathcal{T}_{\widehat{\omega}_h} = \left\{ K \mid K \in \mathcal{T}_h, K \subset \widehat{\omega} \right\}.$$

El funcional de costo $J_{kh}^{\Delta t}$ se describe por

$$J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{r}{2} \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\omega}} |v_h^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \frac{k}{2} r \int_{\widehat{\Omega}} |y_h^N - y_T|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad (4.23)$$

en donde y_h^N se obtiene del conjunto $\{y_h^n\}_{n=1}^N$, que a su vez se obtiene de y_0 y \mathbf{v} por medio de la solución del conjunto de problemas elípticos

$$y_h^0 = y_{0h} (\in V_h). \quad (4.24)$$

Para $n = 1, \dots, N$ resolver

$$\begin{cases} y_h^n \in V_h \\ r \int_{\widehat{\Omega}} \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \mu \int_{\widehat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial y_h^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial y_h^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = \\ r \int_{\widehat{\Omega}} v_h^n z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall z \in V_h, \end{cases} \quad (4.25)$$

donde y_{0h} es una aproximación de y_0 perteneciente a V_h .

Observación 4.2. Para los cálculos cuyos resultados serán presentados en el Capítulo 5, hemos empleado la *regla del trapecio* sobre cada triángulo de \mathcal{T}_h y $\mathcal{T}_{\widehat{\omega}_h}$ para aproximar las integrales encontradas en (4.22), (4.23) y (4.25), tomando ventaja de la propiedad de aditividad:

$$\int_{\widehat{\Omega}} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K, \quad y \quad \int_{\widehat{\omega}} = \sum_{K \in \mathcal{T}_{\widehat{\omega}_h}} \int_K. \quad \square$$

Procediendo como en la Sección 3.2, podemos mostrar que el diferencial $DJ_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v})$ de $J_{kh}^{\Delta t}$ en \mathbf{v} se define por medio de

$$(DJ_h^{\Delta t}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_h^{\Delta t} = r\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\widehat{\omega}} (v_h^n + p_h^n) w_h^n(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \quad (4.26)$$

con $\{p_h^n\}_{n=1}^N$ obtenido de la solución del problema adjunto discretizado completamente

$$p_h^{N+1} = k(y_h^N - y_{Th}). \quad (4.27)$$

Para $n = N, \dots, 1$, resolver

$$\begin{cases} p_h^n \in V_h, \\ r \int_{\widehat{\Omega}} \frac{p_h^n - p_h^{n+1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \\ \mu \int_{\widehat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial p_h^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial p_h^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = 0, \quad \forall z \in V_h. \end{cases} \quad (4.28)$$

En (4.27), y_{Th} es una aproximación de y_T perteneciente a V_h . Se sigue de (4.26) que

$$DJ_h^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \{v_h^n + p_h^n|_{\widehat{\omega}}\}_{n=1}^N. \quad (4.29)$$

La solución $\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}$ del problema (4.23) se caracteriza por

$$DJ_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}) = \mathbf{0}. \quad (4.30)$$

La observación 4.2 también aplica a las integrales en (4.26) y (4.28).

4.2.3. Método de gradiente conjugado

Si consideramos (4.26) y (4.29), tiene sentido resolver el problema de control discreto completo (4.20) vía la solución de (4.30). Esta solución se puede conseguir mediante un *algoritmo de gradiente conjugado*, el cual es simplemente la versión *discreta completa* del algoritmo (3.25)–(3.37) discutido en la Sección 3.3. Este nuevo algoritmo de gradiente conjugado es el siguiente:

$$\text{Dado } \mathbf{u}_0 = \{u_0^n\}_{n=1}^N \text{ en } \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \quad (4.31)$$

resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0^0 = y_{0h}; \\ \text{para } n = 1, \dots, N, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} y_0^n \in V_h, \\ r \int_{\hat{\Omega}} \frac{y_0^n - y_0^{n-1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \mu \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial y_0^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial y_0^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = \\ r \int_{\hat{\omega}} u_0^n z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0^{N+1} = k(y_0^N - y_{Th}); \\ \text{para } n = N, \dots, 1, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} p_0^n \in V_h, \\ r \int_{\hat{\Omega}} \frac{p_0^n - p_0^{n+1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \\ \mu \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial p_0^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial p_0^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = 0, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Definir $\mathbf{g}_0 = \{g_0^n\}_{n=1}^N$ por

$$g_0^n = u_0^n + p_0^n|_{\hat{\omega}}, \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (4.34)$$

Si $\frac{r \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\hat{\omega}} |g_0^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}{\max \left[1, r \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\hat{\omega}} |u_0^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta \right]} \leq \text{tol}$, tomar $\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} = \mathbf{u}_0$; en caso contrario calcular

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{g}_0. \quad (4.35)$$

Para $q \geq 0$, suponiendo que \mathbf{u}_q , \mathbf{g}_q , y \mathbf{d}_q son conocidos, los últimos dos diferentes de $\mathbf{0}$, calculamos \mathbf{u}_{q+1} , \mathbf{g}_{q+1} , y, si es necesario, \mathbf{d}_{q+1} como sigue:

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_q^0 = 0; \\ \text{para } n = 1, \dots, N, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_q^n \in V_h, \\ r \int_{\hat{\Omega}} \frac{\bar{y}_q^n - \bar{y}_q^{n-1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \mu \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial \bar{y}_q^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial \bar{y}_q^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = \\ r \int_{\hat{\Omega}} d_q^n z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_q^{N+1} = k\bar{y}_q^N; \\ \text{para } n = N, \dots, 1, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_q^n \in V_h, \\ r \int_{\hat{\Omega}} \frac{\bar{p}_q^n - \bar{p}_q^{n+1}}{\Delta t} z(R + r \cos \theta) d\phi d\theta + \\ \mu \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial \bar{p}_q^n}{\partial \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial \bar{p}_q^n}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\phi d\theta = 0, \quad \forall z \in V_h. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Calcular

$$\bar{\mathbf{g}}_q = \{\bar{g}_q^n\}_{n=1}^N = \{d_q^n + \bar{p}_q^n|_{\hat{\Omega}}\}_{n=1}^N, \quad (4.38)$$

$$\alpha_q = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\Omega}} |g_q^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}{\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\Omega}} \bar{g}_q^n d_q^n (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{u}_{q+1} = \mathbf{u}_q - \alpha_q \mathbf{d}_q, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{g}_{q+1} = \mathbf{g}_q - \alpha_q \bar{\mathbf{g}}_q. \quad (4.41)$$

Si $\frac{\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\Omega}} |g_{q+1}^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}{\max \left[\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\Omega}} |g_0^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta, \sum_{n=1}^N \int_{\hat{\Omega}} |u_{q+1}^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta \right]} \leq tol$, tomar

$\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} = \mathbf{u}_{q+1}$; en otro caso, calcular

$$\beta_q = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\omega}} |g_{q+1}^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}{\sum_{n=1}^N \int_{\hat{\omega}} |g_q^n|^2 (R + r \cos \theta) d\phi d\theta}, \quad (4.42)$$

y

$$\mathbf{d}_{q+1} = \mathbf{g}_{q+1} + \beta_q \mathbf{d}_q. \quad (4.43)$$

Hacer $q + 1 \rightarrow q$ y regresar a (4.36).

□

La observación 4.2 se aplica para el cálculo de las diferentes integrales encontradas en el algoritmo (4.31)–(4.43). A continuación se incluyen dos observaciones adicionales:

Observación 4.3. Los diversos problemas elípticos lineales discretos que ocurren en (4.32), (4.33) y (4.36), (4.37) están todos asociados con la misma matriz, los cuales sólo difieren por su lado derecho. Dado que la matriz anterior es simétrica definida positiva y sparse, los sistemas lineales asociados se pueden resolver por medio de una variante ‘sparse’ del método de Cholesky como el que está disponible en MATLAB[®]. Una alternativa a Cholesky es utilizar un algoritmo de gradiente conjugado inicializado por la solución del paso de tiempo anterior. Es recomendable usar un paso de tiempo Δt suficientemente pequeño, para asegurar que la matriz asociada con el esquema de Euler hacia atrás no sea muy mal condicionada, permitiendo de esta manera la solución de estos problemas elípticos discretos por un algoritmo de gradiente conjugado preconditionado por la diagonal de la matriz. En este trabajo de tesis doctoral hemos resuelto estos sistemas lineales usando una de las rutinas de MATLAB[®] amigables las cuales deciden ‘por sí solas’ cuál es el resolvidor más apropiado para el sistema lineal bajo consideración.

Observación 4.4. El algoritmo de gradiente conjugado (4.31)–(4.43) es un resolvidor para (4.30), el cual es un problema lineal en $\mathcal{U}_h^{\Delta t}$. Para valores grandes del parámetro de penalización k el número de condición del operador lineal asociado con $DJ_{kh}^{\Delta t}$ es del orden de k , y esto implica que el problema lineal (4.30) resulte mal condicionado, provocando que la solución obtenida por medio del algoritmo (4.31)–(4.43) sea sensible a errores de redondeo. Esto explica que cuando tomamos como criterio de paro tol en (4.31)–(4.43) un valor demasiado pequeño, las propiedades de convergencia del algoritmo de gradiente conjugado se deterioran. Para evitar esta situación hemos considerado tol significativamente mayor que el valor sugerido en la Sección 3.3 (consideramos tol del orden de 10^{-5} en nuestras simulaciones).

4.3. Discretización completa sobre la esfera

Ahora, como segunda aplicación, consideremos un proceso de difusión que tiene lugar sobre la superficie de una esfera en \mathbb{R}^3 . En este caso, vamos a considerar las coordenadas

cartesianas para representar esta superficie con el fin de evitar las singularidades que la parametrización habitual (coordenadas esféricas) introduce. La esfera es visualizada en la figura 4.3 y denotamos por Σ la superficie, representada por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, donde R es su radio.

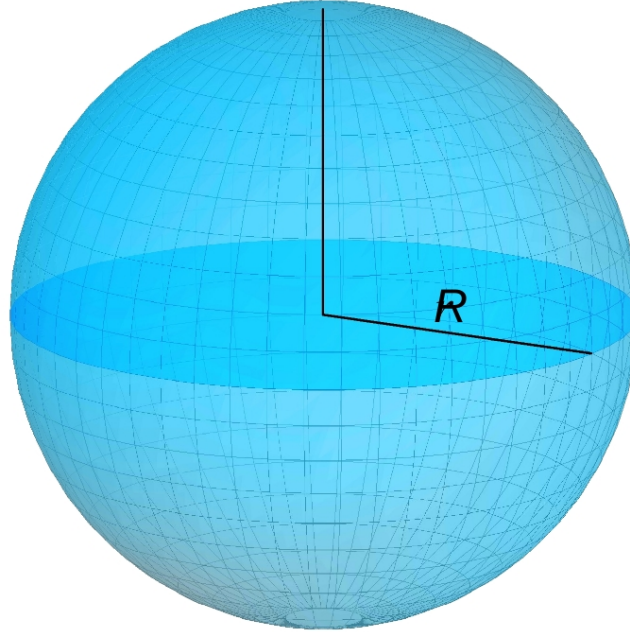


Figura 4.3: Superficie de una esfera

4.3.1. Discretización espacial sobre la esfera

Con el fin de obtener un espacio discretizado, aproximamos Σ por una superficie poliédrica y procedemos como en [1] para aproximar los diferentes problemas elípticos descritos en (4.4) y (4.8). Sin embargo, aquí procederemos de una manera ligeramente diferente, principalmente cuando se calcula el gradiente de la superficie ∇_{Σ} .

Sea Σ_h la superficie poliédrica que aproxima a Σ , como se muestra en la figura 4.4. Los elementos de Σ_h son caras o ‘parches’ triangulares, y denotamos por \mathcal{T}_h el conjunto formado por ellas. Cada elemento triangular, $T \in \mathcal{T}_h$, se puede describir mediante la parametrización isoparamétrica

$$x_h(\epsilon, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_i \varphi_i(\epsilon, \eta) \quad (4.44)$$

donde, (ϵ, η) son las coordenadas que definen el elemento de referencia típico $\hat{T} \in \mathbb{R}^2$, y $x_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, con $i = 1, 2, 3$, son las coordenadas físicas del elemento triangular T . Las funciones lineales $\varphi_i(\xi, \eta)$ son las correspondientes funciones base de referencia

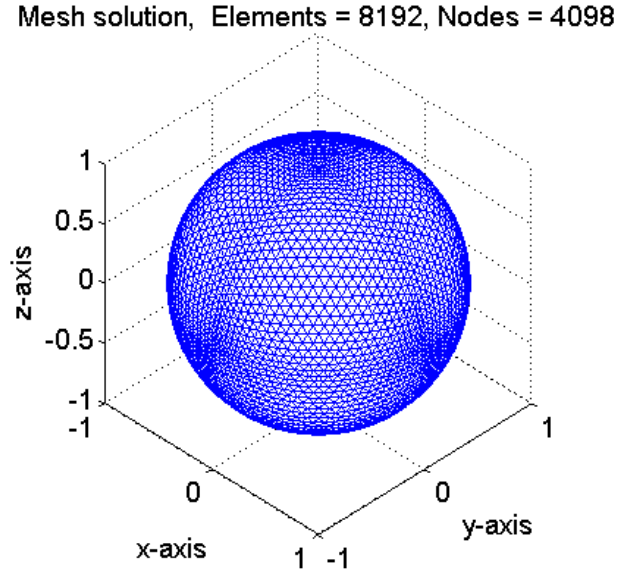


Figura 4.4: Superficie poliédrica de la esfera de radio 1.

Denotamos por h el máximo diámetro de los elementos en Σ_h , y aproximamos entonces $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ por

$$V_h = \{z \mid z \in \mathcal{H}^1(\Sigma_h), z|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (4.45)$$

donde en (4.45), \mathbb{P}_1 es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 .

Ahora, podemos obtener la contraparte discreta de los problemas (4.4) y (4.8) para la esfera. Por ejemplo, la versión discreta de (4.4) se puede escribir como sigue.

Sea y_{0h} una aproximación de y_0 perteneciente a V_h .

Para $n = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} y_h^n \in V_h, \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\Delta t} z \, dT + \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_T y_h^n \cdot \nabla_T z \, dT = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\omega} \int_T v_h^n z \, dT, \quad \forall z \in V_h. \end{cases} \quad (4.46)$$

En la última integral estamos suponiendo que $\bar{\omega}$ es también la unión de triángulos de \mathcal{T}_h , y denotamos este conjunto de triángulos como \mathcal{T}_h^ω . El gradiente tangencial $\nabla_T y_h^n$ se puede calcular por medio de la proyección del gradiente usual ∇y_h^n sobre la superficie de T , esto es

$$\nabla_T y_h^n = (\mathbb{I} - \mathbb{P}_T) \nabla y_h^n \quad (4.47)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad en \mathbb{R}^3 y $\mathbb{P}_T = \mathbf{n}_T \mathbf{n}_T^t$ es la matriz de proyección ortogonal a la dirección normal de T . Esta cantidad está bien definida, ya que ∇y_h^n es un vector constante

sobre cada $T \in \mathcal{T}$ y \mathbf{n}_T es el vector normal unitario (único) a T . Por supuesto, la integral en (4.46) se puede calcular ya sea en el elemento físico T o en elemento de referencia \widehat{T} usando la parametrización (4.44). Las integrales en la ecuación (4.8) son aproximadas de manera similar.

Para simplificar la notación, en lugar de (4.46) vamos a escribir

Para $n = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} y_h^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\Delta t} z \, d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} y_h^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z \, d\Sigma_h = \int_{\omega_h} v_h^n z \, d\Sigma_h, \quad \forall z \in V_h. \end{cases} \quad (4.48)$$

La anterior aproximación isoparamétrica de elemento finito nos permite aproximar completamente el problema de control (3.3) por

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \\ J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}) \leq J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \end{cases} \quad (4.49)$$

donde el espacio de control completamente discretizado $\mathcal{U}_h^{\Delta t}$ se define como

$$\mathcal{U}_h^{\Delta t} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \{v_h^n\}_{n=1}^N, v_h^n \in V_h|_{\overline{\omega_h}} \right\}, \quad (4.50)$$

y se le asocia el producto-interior

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_h^{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} v_h^n w_h^n \, d\Sigma_h. \quad (4.51)$$

El funcional de costo $J_{kh}^{\Delta t}$ está ahora dado por

$$J_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |v_h^n|^2 \, d\Sigma_h + \frac{k}{2} \int_{\Sigma_h} |y_h^N - y_T|^2 \, d\Sigma_h, \quad (4.52)$$

en donde y_h^N se extrae del conjunto $\{y_h^n\}_{n=1}^N$, que a su vez se obtiene de y_0 y \mathbf{v} por medio de la solución del siguiente conjunto de problemas

$$y_h^0 = y_{0h} \quad (\in V_h) \quad (4.53)$$

Para $n = 1, \dots, N$, resolver

$$\begin{cases} y_h^n \in V_h \\ \int_{\Sigma_h} \frac{y_h^n - y_h^{n-1}}{\Delta t} z \, d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} y_h^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z \, d\Sigma_h = \int_{\omega_h} v_h^n z \, d\Sigma_h, \quad \forall z \in V_h. \end{cases} \quad (4.54)$$

La observación 4.2 también se aplica a las integrales en (4.51), (4.52) y (4.54), con Σ_h , y ω_h en lugar de $\widehat{\Omega}$ y $\widehat{\omega}$, respectivamente.

Ahora, tenemos que el diferencial $DJ_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{v})$ de $J_{kh}^{\Delta t}$ en \mathbf{v} se puede definir mediante

$$(DJ_h^{\Delta t}(\mathbf{v}), \mathbf{w})_h^{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} (v_h^n + p_h^n) w_h^n d\Sigma_h, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \quad (4.55)$$

con $\{p_h^n\}_{n=1}^N$ obtenido a partir de la solución del problema adjunto discreto

$$p_h^{N+1} = k(y_h^N - y_{T_h}). \quad (4.56)$$

Para $n = N, \dots, 1$, resolver

$$\begin{cases} p_h^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{p_h^n - p_h^{n+1}}{\Delta t} z d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} p_h^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z d\Sigma_h = 0, \quad \forall z \in V_h. \end{cases} \quad (4.57)$$

En (4.56), y_{T_h} es una aproximación de y_T perteneciente a V_h . Se sigue de (4.55) que

$$DJ_h^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \{v_h^n + p_h^n|_{\omega_h}\}_{n=1}^N. \quad (4.58)$$

La solución $\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}$ del problema (4.52) está dada por

$$DJ_{kh}^{\Delta t}(\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t}) = \mathbf{0}. \quad (4.59)$$

Nuevamente podemos aplicar la observación 4.2, en esta ocasión para las integrales (4.55) y (4.57), considerando Σ_h , y ω_h en lugar de $\widehat{\Omega}$ y $\widehat{\omega}$, respectivamente.

4.3.2. Método de gradiente conjugado

Tomando en cuenta (4.55) y (4.58), resolvemos el problema de control discreto (4.49) mediante la solución de (4.59). Esta solución se obtiene mediante la version discreta completa del algoritmo de gradiente conjugado (3.25)–(3.37), el cual se presenta a continuación.

$$\text{Dado } \mathbf{u}_0 = \{u_0^n\}_{n=1}^N \text{ en } \mathcal{U}_h^{\Delta t}, \quad (4.60)$$

resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0^0 = y_{0h}; \\ \text{para } n = 1, \dots, N, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} y_0^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{y_0^n - y_0^{n-1}}{\Delta t} z d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} y_0^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z d\Sigma_h = \int_{\omega_h} u_0^n z d\Sigma_h, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.61)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0^{N+1} = k(y_0^N - y_{T_h}); \\ \text{para } n = N, \dots, 1, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} p_0^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{p_0^n - p_0^{n+1}}{\Delta t} z d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} p_0^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z d\Sigma_h = 0, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Definir $\mathbf{g}_0 = \{g_0^n\}_{n=1}^N$ por

$$g_0^n = u_0^n + p_0^n|_{\omega_h}, \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (4.63)$$

Si $\frac{\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_0^n|^2 d\Sigma_h}{\max \left[1, \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |u_0^n|^2 d\Sigma_h \right]} \leq tol$, tomar $\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} = \mathbf{u}_0$; en otro caso, calcular

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{g}_0. \quad (4.64)$$

Para $q \geq 0$, suponiendo que \mathbf{u}_q , \mathbf{g}_q , y \mathbf{d}_q son conocidos, los dos últimos diferentes de $\mathbf{0}$, calculamos \mathbf{u}_{q+1} , \mathbf{g}_{q+1} , y, si es necesario, \mathbf{d}_{q+1} como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_q^0 = 0; \\ \text{para } n = 1, \dots, N, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_q^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{\bar{y}_q^n - \bar{y}_q^{n-1}}{\Delta t} z d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} \bar{y}_q^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z d\Sigma_h = \int_{\omega_h} d_q^n z d\Sigma_h, \quad \forall z \in V_h, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_q^{N+1} = k\bar{y}_q^N; \\ \text{para } n = N, \dots, 1, \text{ resolver} \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_q^n \in V_h, \\ \int_{\Sigma_h} \frac{\bar{p}_q^n - \bar{p}_q^{n+1}}{\Delta t} z d\Sigma_h + \mu \int_{\Sigma_h} \nabla_{\Sigma_h} \bar{p}_q^n \cdot \nabla_{\Sigma_h} z d\Sigma_h = 0, \quad \forall z \in V_h. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Calcular

$$\bar{\mathbf{g}}_q = \{\bar{g}_q^n\}_{n=1}^N = \{d_q^n + \bar{p}_q^n|_{\omega_h}\}_{n=1}^N, \quad (4.67)$$

$$\alpha_q = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_q^n|^2 d\Sigma_h}{\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} \bar{g}_q^n d_q^n d\Sigma_h}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{u}_{q+1} = \mathbf{u}_q - \alpha_q \mathbf{d}_q, \quad (4.69)$$

$$\mathbf{g}_{q+1} = \mathbf{g}_q - \alpha_q \bar{\mathbf{g}}_q. \quad (4.70)$$

Si $\frac{\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_{q+1}^n|^2 d\Sigma_h}{\max \left[\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_0^n|^2 d\Sigma_h, \sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |u_{q+1}^n|^2 d\Sigma_h \right]} \leq \text{tol}$, tomar $\mathbf{u}_{kh}^{\Delta t} = \mathbf{u}_{q+1}$; en caso contrario, calcular

$$\beta_q = \frac{\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_{q+1}^n|^2 d\Sigma_h}{\sum_{n=1}^N \int_{\omega_h} |g_q^n|^2 d\Sigma_h}, \quad (4.71)$$

y

$$\mathbf{d}_{q+1} = \mathbf{g}_{q+1} + \beta_q \mathbf{d}_q. \quad (4.72)$$

Hacer $q + 1 \rightarrow q$ y regresar a (4.65).

□

La observación 4.2 también aplica al cálculo de las integrales del algoritmo (4.60)–(4.72). Por otro lado, la observación 4.3 se aplica también a los problemas elípticos lineales discretos que ocurren en (4.61), (4.62) y (4.65), (4.66). Así mismo, la observación 4.4 se aplica al algoritmo de gradiente conjugado (4.60)–(4.72), considerando (4.59) en lugar de (4.30).

Recordemos que el problema de controlabilidad aproximada que consideramos consiste en encontrar $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución y del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial t}(t) z \, d\Sigma + \mu \int_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} y(t) \cdot \nabla_{\Sigma} z \, d\Sigma = \int_{\omega} v(t) z \, d\Sigma, \quad \forall z \in \mathcal{H}^1(\Sigma), \quad \text{ctp en } (0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

satisface

$$y(T) \in y_T + \beta B,$$

donde B es la bola unitaria en $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, con $\beta > 0$.

En este capítulo mostraremos algunos resultados numéricos de problemas de control sobre superficies en \mathbb{R}^3 .

Vamos a considerar tres tipos de problemas de controlabilidad, estos son: 1) Problemas de controlabilidad aproximada, donde la función de control tiene como soporte un subdominio de una superficie en \mathbb{R}^3 (en particular, el toro y la esfera); 2) Problemas de ‘chattering control’, donde la función de control tiene como soporte una curva que se mueve periódicamente sobre la superficie; 3) Problemas de controlabilidad nula, donde la función objetivo es $y_T = 0$.

5.1. Control sobre superficies toroidales

En esta sección presentaremos algunos ejemplos numéricos usando la metodología discutida en la sección 4.2.

5.1.1. Control Distribuido

Experimentos con una función objetivo suave

Consideramos la superficie de un toro Σ con radio menor $r = 1$ y radio mayor $R = 2$. En primer lugar, consideramos el blanco

$$y_T(\phi, \theta) = \cos \phi + \sin \theta, \quad (5.1)$$

con $\{\phi, \theta\} \in \widehat{\Omega} = (0, 2\pi)^2$. Elegimos $y_0 = 0$, $\mu = 2$ y $T = 2$ en la ecuación (3.1). En los siguientes experimentos numéricos el control tiene como soporte subdominios en forma de bandas $\widehat{\omega}$, el cual puede tener un barrido vertical $(\phi_f - \phi_0)$ con $\widehat{\omega} = (\phi_0, \phi_f) \times (0, 2\pi)$, o un barrido horizontal $(\theta_f - \theta_0)$ con $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\theta_0, \theta_f)$. La Figura 5.1 muestra subdominios de cada tipo sobre la superficie Σ . Para simplificar, nos limitaremos a llamar ‘subdominio vertical’ a los subdominios en bandas–verticales, y de manera similar para los horizontales.

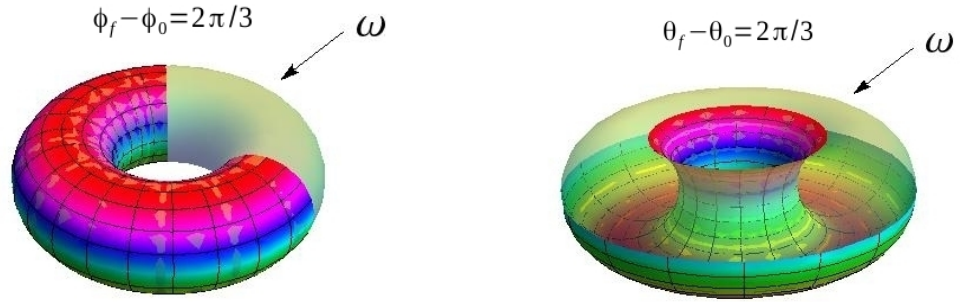


Figura 5.1: Dominios del control: barrido vertical (izquierda) y barrido horizontal (derecha).

Primero presentamos resultados numéricos donde el control tiene como soporte el subdominio horizontal $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, donde diferentes valores de Δt son empleados en el algoritmo de gradiente conjugado (4.31)–(4.43). Además, se consideran diferentes mallas uniformes regulares sobre $\widehat{\Omega}$ para la discretización de elemento finito, con $\Delta\phi = \Delta\theta$ (ver la Fig. 4.2). El criterio de paro para el algoritmo de gradiente conjugado se fija en $tol = 5 \times 10^{-5}$. En estos experimentos hemos tomado $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ como control inicial, y $k = 10^8$ como valor del parámetro de penalización. Los resultados numéricos correspondientes se han resumido en la Tabla 5.1, donde u^c y y^c denotan el control óptimo calculado y la correspondiente función de estado calculada, respectivamente, y *No. iters* denota el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia del algoritmo de gradiente conjugado para la tolerancia anterior, *Norm u^c* es $\|u^c\|_{\mathcal{L}^2(\widehat{\omega} \times (0, T))}$ y *Rel. error* denota el error relativo entre la función objetivo exacta y la calculada dado por $\|y_T - y^c(T)\|_{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})} / \|y_T\|_{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})}$. Esta tabla muestra que los diferentes valores para los parámetros de discretización elegidos conducen a resultados muy cercanos, sugiriendo convergencia con respecto a la discretización en espacio–tiempo. En particular, la función objetivo calculada difiere del objetivo exacto por aproximadamente 1.6 % en la mayoría de los casos. Por lo tanto, decidimos fijar el parámetro de discretización en $\Delta t = 1/100$ y $\Delta\phi = \Delta\theta = 2\pi/48$, para la función objetivo suave bajo consideración.

Tabla 5.1: Resultados de convergencia, con $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$ y $\Delta\phi = \Delta\theta$

$\Delta\phi$	$2\pi/48$	$2\pi/72$	$2\pi/96$	$2\pi/108$	$2\pi/48$	$2\pi/96$
Δt	1/100	1/100	1/100	1/100	1/200	1/200
<i>No. iters</i>	29	28	27	26	29	27
<i>Norm u^c</i>	36.3334	37.0708	37.6837	37.8554	37.8081	37.6194
<i>Rel. error</i>	0.0161	0.0163	0.0161	0.0160	0.0172	0.0168

La tabla 5.2 muestra la influencia del parámetro de penalización en los resultados numéricos, mostrando la convergencia de $y_k(T)$ a y_T cuando $k \rightarrow +\infty$. Se consideran diferentes subdominios de soporte ω en estos experimentos. Estos resultados muestran que al incrementar $|\omega|$ las soluciones numéricas son menos sensibles al valor de k . Además, hemos encontrado que para $k > 10^8$ los resultados numéricos son esencialmente lo mismo para todos los casos. Por lo tanto, no vamos a considerar valores de k mayores que 10^8 en lo que sigue.

Tabla 5.2: Resultados numéricos para diferentes subdominios en bandas–horizontales.

$\widehat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	k	<i>No. Iters</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel. error</i>
$(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$	1	10^4	5	14.5960	0.0033
		10^6	5	14.5469	0.0033
		10^8	5	14.5470	0.0033
$(0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$	0.3408	10^4	19	34.3037	0.0269
		10^6	20	34.7010	0.0258
		10^8	20	34.7332	0.0258
$(0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$	0.1955	10^4	23	61.1809	0.0392
		10^6	26	64.8340	0.0312
		10^8	26	64.8657	0.0312
$(0, 2\pi) \times (3\pi/4, 5\pi/4)$	0.1375	10^4	25	84.0090	0.0582
		10^6	41	96.5666	0.0298
		10^8	41	96.6947	0.0297
$(0, 2\pi) \times (7\pi/8, 9\pi/8)$	0.0641	10^4	35	153.5422	0.1203
		10^6	41	205.1510	0.0539
		10^8	47	207.1548	0.0513
$(0, 2\pi) \times (15\pi/16, 17\pi/16)$	0.0320	10^4	39	204.3826	0.2504
		10^6	54	358.7140	0.0937
		10^8	54	363.1198	0.0925

La figura 5.2 muestra la norma- \mathcal{L}^2 - del control calculado u^c en función del tiempo para diferentes valores de k para el caso $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$. Esta figura muestra la oscilación de la función del control cerca de T como en el caso de calor en [13] y [26].

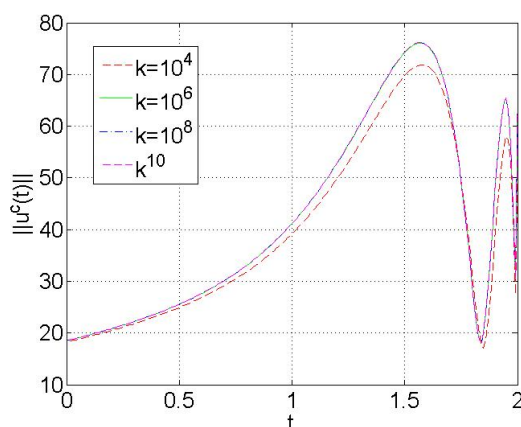


Figura 5.2: Norma del control calculado, para $k = 10^4, 10^6, 10^8$ y $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$.

Por otro lado, la figura 5.3 muestra la gráfica de la función objetivo calculada $y^c(T)$ y algunas de sus secciones transversales para el caso $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$. Además, se puede observar que el mayor deterioro de $y^c(T)$ se concentra a lo largo de la dirección $-\theta$.

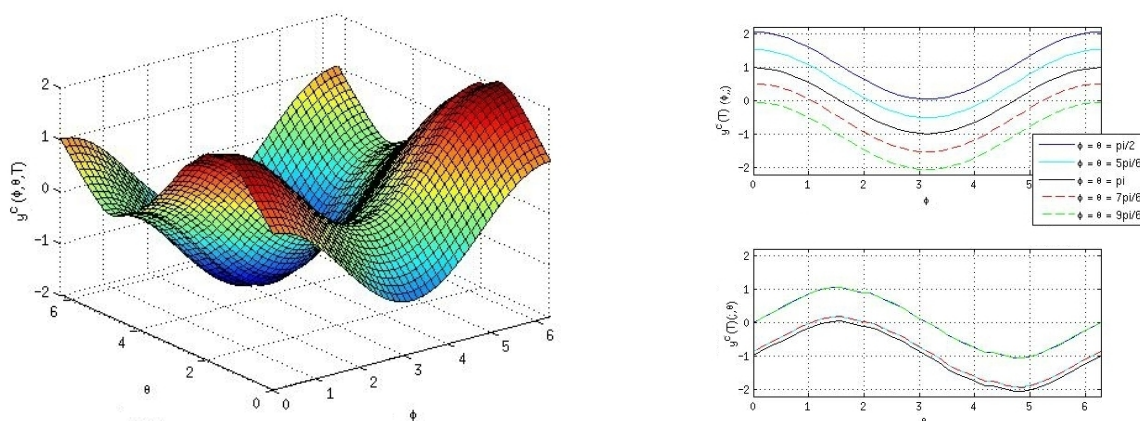


Figura 5.3: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Secciones Transversales de $y^c(T)$. Caso: $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$.

Los subdominios de soporte vertical no son tan buenos para obtener resultados razonables como los horizontales. Por ejemplo, los resultados para todos los subdominios horizontales en la Tabla 5.2, excepto el último, son mejores que los resultados correspondientes para subdominios verticales $\widehat{\omega} = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, como se puede ver fácilmente en la Tabla 5.3. Este comportamiento está asociado con el hecho de que para $|\omega|$ lo suficientemente pequeño y R/r suficientemente grande, la distancia media (a lo largo de las geodésicas) de los puntos de Σ al dominio del soporte del control ω es menor cuando ω es una banda horizontal, en comparación a cuando se trata de una vertical (de hecho, la escala de longitud a lo largo de las direcciones verticales es del orden de πr , mientras que es πR en las direcciones horizontales).

Tabla 5.3: Resultados numéricos para un subdominio vertical.

$\widehat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	k	<i>No. Iters</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel. error</i>
$(0, \pi) \times (0, 2\pi)$	0.5	10^4	72	92.5621	0.1223
		10^6	108	131.8721	0.0731
		10^8	108	132.3743	0.0729

Experimentos con una función objetivo no-suave

Ahora, para el siguiente conjunto de experimentos consideramos un objetivo no-suave, definido por la siguiente función:

$$y_T = |\cos \phi| + |\sin \theta|. \quad (5.2)$$

Nuevamente, escogemos el radio mayor $R = 2$ y el radio menor $r = 1$. El estado inicial se elige como $y_0 = 0$ y escogemos $T = 2$. La Tabla 5.4 muestra los resultados numéricos para diferentes valores de μ cuando el control tiene su soporte en el subdominio de la banda horizontal $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, el cual satisface $|\omega|/|\Omega| = 0.3408$, y para diferentes valores de los parámetros de discretización Δt y $\Delta \phi = \Delta \theta$. El control inicial en las iteraciones del gradiente conjugado es $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, el valor del parámetro de penalización es $k = 10^8$ y el criterio de paro se fija en $tol = 5 \times 10^{-5}$. Esta tabla muestra que diferentes valores de

Tabla 5.4: Resumen de los resultados de convergencia, con $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$ y $\Delta \phi = \Delta \theta$

μ	$\Delta \phi$	$2\pi/72$	$2\pi/96$	$2\pi/108$	$2\pi/96$	$2\pi/108$
	Δt	$1/100$	$1/100$	$1/100$	$1/200$	$1/200$
2	<i>No. iters</i>	22	17	18	20	19
	<i>Norm u^c</i>	39.7510	39.7861	39.6623	39.5984	39.6021
	<i>Rel. error</i>	0.0676	0.0685	0.0691	0.0695	0.0699
1	<i>No. iters</i>	18	15	15	18	16
	<i>Norm u^c</i>	29.9848	29.9491	30.0671	30.5332	30.3434
	<i>Rel. error</i>	0.0635	0.0651	0.0668	0.0668	0.0674
1/2	<i>No. iters</i>	21	17	17	21	20
	<i>Norm u^c</i>	31.74084	31.4472	31.2907	32.8792	32.6179
	<i>Rel. error</i>	0.0568	0.0586	0.0599	0.0577	0.0578
1/4	<i>No. iters</i>	28	25	25	34	30
	<i>Norm u^c</i>	53.5163	52.6179	52.7648	57.6699	55.9594
	<i>Rel. error</i>	0.0770	0.0784	0.0783	0.0806	0.0817

los parámetros de discretización conducen a resultados muy similares para cada valor de μ , mostrando así la convergencia respecto a la discretización numérica. Los resultados de la Tabla 5.4 sugieren que existe un valor óptimo de μ (para ω y T dados), para el cual se minimiza la norma del control. Esto no sorprende, ya que cuando μ es grande, la tendencia ‘natural’

del sistema es llevar la solución rápidamente a $\bar{y}_0 = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} y_0 d\Sigma$, por la excesiva difusión, y éste es un fenómeno contra el cual el control debe luchar (a menos de que $y_T = \bar{y}_0$), mientras que para valores pequeños de μ (difusión débil) se requiere más tiempo para que la acción del control afecte significativamente los puntos de Σ , que estén lejos de ω . De hecho, no pudimos obtener, numéricamente, resultados convergentes para $\mu = 1/8$ con $T = 2$ y el conjunto de soporte $\widehat{\omega}$ dado anteriormente, incluso con una malla más fina en el espacio y el tiempo. En realidad, para valores pequeños de μ , se requiere un tiempo T más grande o un conjunto de soporte más grande para el control. La Tabla 5.5 muestra los resultados con $\widehat{\omega}$ mas grande.

Tabla 5.5: Resultados para valores pequeños de μ

μ	$\widehat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	No. iters.	Norm u^c	Rel.error
1/8	$(0, 2\pi) \times (0, 3\pi/2)$	0.6704	39	31.5961	0.0364
1/25	$(0, 2\pi) \times (0, 5,5)$	0.8192	31	14.8281	0.0307
1/10000	$\widehat{\Omega}$	1	2	8.4977	0.0039

Como era de esperar, si $\omega = \Omega$ entonces es posible controlar el sistema para cualquier valor de μ y T . Queremos enfatizar que no es necesario usar una malla más fina (en espacio y tiempo) para obtener mejores resultados.

En la figura 5.4 observamos la función objetivo calculada $y^c(T)$, así como algunas de sus secciones transversales para el caso $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, $\mu = 1/2$, $\Delta\phi = \Delta\theta = 2\pi/108$ y $\Delta t = 1/100$. Notemos que el mayor error se establece lo largo de la dirección $-\theta$, lo cual es de esperarse.

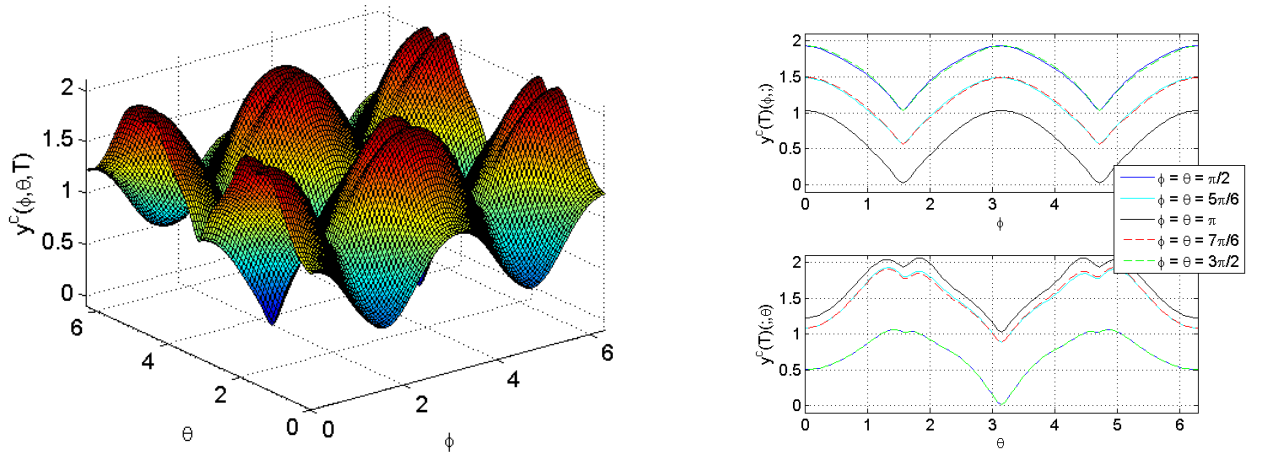


Figura 5.4: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Secciones Transversales de $y^c(T)$. Caso: $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, $\mu = 1/2$, $\Delta\phi = \Delta\theta = 2\pi/108$ y $\Delta t = 1/100$.

Ahora investigamos el efecto de T en la controlabilidad, con diferentes valores de μ . Escogimos $\Delta t = 1/100$ y $\Delta\phi = \Delta\theta = 2\pi/108$. Los valores de r , R , k y tol son los mismos que en los

ejemplos anteriores. Los resultados numéricos se resumen en la Tabla 5.6. Todos los resultados

Tabla 5.6: Resultados numéricos para diferentes valores de T y μ .

μ	T	$ \omega / \Omega $	No. <i>I</i> ters	Norm u^c	Rel.error
1	2	0.3408	15	30.0671	0.0668
	1	0.3408	13	42.4999	0.0674
	1/2	0.3408	27	106.0272	0.0670
	1/4	0.3408	197	546.0387	0.0940
1/2	2	0.3408	17	31.2907	0.0599
	1	0.3408	27	74.9730	0.0670
	1/2	0.3408	190	377.8660	0.1067
1/4	2	0.3408	25	52.7048	0.0783
	1	0.3408	91	197.4128	0.1445
1/8	2	0.3408	86	140.1057	0.1445

se obtuvieron con el conjunto de soporte $\widehat{\omega}_1 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$. Esta tabla indica que hay una pérdida de precisión cuando T y μ se hacen pequeños. Aparentemente, un valor de μT cercano a $1/4$ es crítico para conjunto de soporte dado y la metodología numérica empleada. De hecho, con el fin de obtener una solución convergente para $\mu T < 1/4$ necesitamos considerar un mayor conjunto de soporte del control. Por ejemplo, para $\mu = 1/2$ y $T = 1/4$ se obtuvo un resultado convergente con el conjunto de soporte más grande $\widehat{\omega}_2 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 2\pi)$, como se muestra en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7: Resultado numéricos para $T = 1/4$ sobre $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 2\pi)$.

μ	T	$ \omega / \Omega $	No. <i>I</i> ters	Norm u^c	Rel.error
1/2	1/4	0.6704	48	179.7166	0.0771

A continuación, se estudian las propiedades de controlabilidad para tres diferentes soportes en bandas–horizontales con la misma medida de superficie $|\omega|$. Para estos experimentos consideramos $\mu = 1/2$ y $T = 2$. Los parámetros de discretización son los mismos que en el experimento anterior, así como los otros parámetros. La Tabla 5.8 muestra los resultados para dos conjuntos de experimentos: los primeros tres casos tienen el área $|\omega| = 4\pi(\pi - 1)$, y los últimos tres casos tienen área $|\omega| = 2\pi(\pi - 1)$. El comportamiento no es independiente de la zona de control, ya que el número de iteraciones del gradiente conjugado, para lograr convergencia, es diferente en cada caso. Sin embargo, los errores relativos son similares para cada conjunto de experimentos.

Tabla 5.8: Resultados numéricos para diferentes soportes con la misma área de superficie $|\omega|$.

Conjunto de soporte $\widehat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	No. <i>I</i> ters	<i>Norm</i> u^c	<i>Rel. error</i>	<i>Rel. error/Norm</i> u^c
$\widehat{\omega}_1 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$	0.3408	17	31.2907	0.0599	0.0019
$\widehat{\omega}_2 = (0, 2\pi) \times (\pi, 5,5991)$	0.3408	53	104.7046	0.0729	6.9624×10^{-4}
$\widehat{\omega}_3 = (0, 2\pi) \times (0, 1,6429)$	0.3408	154	139.1066	0.0709	5.0977×10^{-4}
$\widehat{\omega}_4 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, \pi)$	0.1704	131	224.7782	0.0928	4.1291×10^{-4}
$\widehat{\omega}_5 = (0, 2\pi) \times (\pi, 3\pi/2)$	0.1704	131	224.7782	0.0928	4.1291×10^{-4}
$\widehat{\omega}_6 = (0, 2\pi) \times (0, 0,7354)$	0.1704	61	137.7779	0.0940	6.8238×10^{-4}

Con el fin de estudiar la influencia de R y r en la controlabilidad, consideramos el subdominio del soporte $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, y los parámetros $\mu = 1/2$, $T = 2$. Los parámetros de discretización son los mismo que antes. Primero, fijamos R en 2 y hacemos tender $r/R \rightarrow 0^+$; los resultados se resumen en la Tabla 5.9. Se puede observar que cuando r disminuye la diferencia relativa entre y_T y $y^c(T)$ aumenta. Esto puede explicarse por el efecto

Tabla 5.9: Resultados numéricos para $r/R \rightarrow 0$, con $R = 2$ fijo.

r	No. <i>I</i> ters	<i>Norm</i> u^c	<i>Rel. error</i>	$ \omega $	$ \omega / \Omega $
1	17	31.2907	0.0599	$4\pi(\pi - 1)$	$(\pi - 1)/2\pi = 0,3408$
1/2	17	20.8174	0.0681	$2\pi(\pi - 1/2)$	$(\pi - 1/2)/2\pi = 0,4204$
1/4	24	29.7111	0.0692	$\pi(\pi - 1/4)$	$(\pi - 1/4)/2\pi = 0,4602$
1/8	20	30.9316	0.0938	$(\pi/2)(\pi - 1/8)$	$(\pi - 1/8)/2\pi = 0,4801$
1/16	20	44.5047	0.1083	$(\pi/8)(\pi - 1/16)$	$(\pi - 1/16)/2\pi = 0,4901$

de la difusión: si μ es fijo, entonces la difusión juega un rol más fuerte cuando el área de la superficie disminuye, y consecuentemente es más difícil controlar el sistema. Por otro lado, cuando el área de la superficie del toro aumenta, ocurre lo contrario, como se muestra en la Tabla 5.10. En este caso, es evidente que se necesitan menos iteraciones para conseguir la

Tabla 5.10: Resultados numéricos para $r/R \rightarrow 0$, con $r = 1$ fijo.

R	No. <i>I</i> ters	<i>Norm</i> u^c	<i>Rel. error</i>	$ \omega $	$ \omega / \Omega $
2	17	31.2907	0.0599	$4\pi(\pi - 1)$	$(\pi - 1)/2\pi = 0,3408$
4	11	37.4346	0.0639	$4\pi(2\pi - 1)$	$(\pi - 1/2)/2\pi = 0,4204$
8	11	50.3318	0.0591	$4\pi(4\pi - 1)$	$(\pi - 1/4)/2\pi = 0,4602$
16	9	69.0994	0.0590	$4\pi(8\pi - 1)$	$(\pi - 1/8)/2\pi = 0,4801$
32	9	96.4666	0.0577	$4\pi(16\pi - 1)$	$(\pi - 1/16)/2\pi = 0,4901$

misma precisión, cuando R aumenta. En realidad, con $\mu = 1/2$ y $T = 2$, la escala de longitud de difusión $\approx \sqrt{\mu T} = 1$ es menor que el tamaño del toro cuando $r = 1$ y $R > 1$. Por lo tanto, el tamaño del conjunto del soporte $|\omega|$ se puede mantener fijo cuando R aumenta sin

afectar la controlabilidad del sistema. Para verificar este comportamiento, consideramos los siguientes conjuntos de soporte en diferentes toros, incrementado el tamaño:

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_1 &= (0, 2\pi) \times (\pi, 5,5991) \text{ para } R = 2, \\ \widehat{\omega}_2 &= (0, 2\pi) \times (\pi, 4,4551) \text{ para } R = 4, \\ \widehat{\omega}_3 &= (0, 2\pi) \times (\pi, 3,7483) \text{ para } R = 8.\end{aligned}$$

Todos ellos tienen la misma área, $|\omega| = 4\pi(\pi - 1)$. La Tabla 5.11 muestra que no hay pérdida de precisión, a pesar de que la razón $|\omega|/|\Omega|$ decrece cuando R se hace más grande.

Tabla 5.11: Resultados numéricos para $r/R \rightarrow 0$, con $r = 1$ y $|\omega| = 4\pi(\pi - 1)$.

μ	R	$\widehat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	No. Iters	Norm u^c	Rel. error	Rel. error/Norm u^c
1/2	2	$\widehat{\omega}_1$	0.3408	53	104.7046	0.0729	6.9624×10^{-4}
	4	$\widehat{\omega}_2$	0.1704	141	285.6099	0.0866	3.0321×10^{-4}
	8	$\widehat{\omega}_3$	0.0852	66	417.4203	0.0900	2.1561×10^{-4}
1	2	$\widehat{\omega}_1$	0.3408	36	66.6719	0.0671	0.0010
	4	$\widehat{\omega}_2$	0.1704	39	115.0360	0.0859	7.4663×10^{-4}
	8	$\widehat{\omega}_3$	0.0852	37	169.9421	0.0858	5.0488×10^{-4}

La figura 5.5 muestra la función objetivo calculada y la norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c en función del tiempo para el caso $\widehat{\omega}_2$ y $R = 4$.

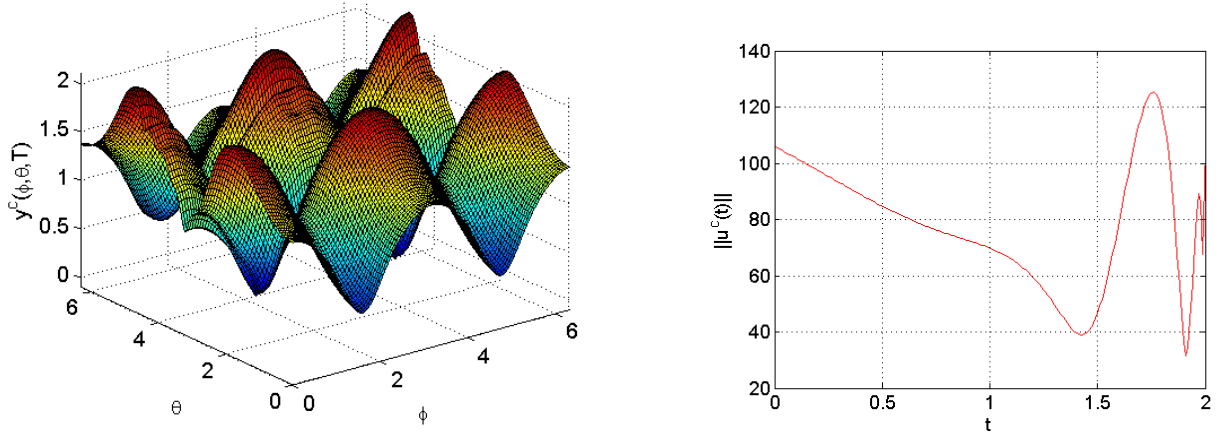


Figura 5.5: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c en función del tiempo. Caso: $\widehat{\omega}_2$ y $R = 4$.

5.1.2. Chattering control

En los anteriores experimentos hemos considerado funciones de control cuyo soporte es un subconjunto abierto de ω del toro Σ . Como ya se mencionó en la subsección 3.4, una

alternativa al control distribuido es considerar una curva γ como un conjunto de soporte. No obstante, puede que no se cumpla la propiedad de controlabilidad aproximada en este caso si la curva se mantiene fija, por las razones mencionadas ahí. En este caso una alternativa es aplicar ‘chattering control’, una técnica que consiste en imponer un movimiento oscilatorio para la curva dada γ , con el fin de mejorar la controlabilidad. En esta subsección se discute la aplicación de nuestra metodología numérica en combinación con ‘chattering control’ para el problema de controlabilidad aproximada. Para los experimentos numéricos, consideramos curvas que son imágenes de ‘líneas verticales’ $\phi = \phi_0$ o ‘líneas horizontales’ $\theta = \theta_0$, con $\theta_0, \phi_0 \in [0, 2\pi]$ constantes. Llamamos a este tipo de líneas, líneas coordenadas, y a sus imágenes, curvas coordenadas.

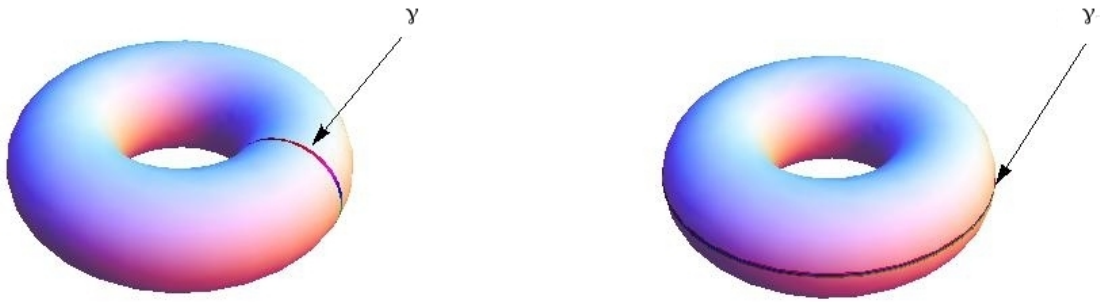


Figura 5.6: Imagen de una línea vertical (izquierda) y de una línea horizontal (derecha).

La Figura 5.6 muestra la imagen, bajo la transformación (4.9) de la línea vertical coordenada $\phi = \pi$ (izquierda) y de la línea horizontal coordinada $\theta = \pi$ (derecha).

La técnica de ‘chattering control’ en un toro se implementa fácilmente si damos un movimiento oscilatorio a una curva-coordenada, y esto puede hacerse mediante las líneas coordenadas en la siguiente forma sencilla:

$$\phi(t) = \phi_0 + \varepsilon \sin(2\pi ft), \quad (5.3)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon \sin(2\pi ft), \quad (5.4)$$

donde ε es la amplitud de las oscilaciones y f es su frecuencia. En los experimentos numéricos, el movimiento de estas curvas se implementa haciendo interpolación lineal sobre la malla fija dada. Al igual que en la subsección anterior realizamos experimentos con dos tipos de objetivos: el suave definido en (5.1), y el no-suave definido en (5.2).

Experimentos numéricos con la función objetivo suave (5.1)

En los siguientes experimentos fijamos $y_0 = 0$, $\mu = 1/2$, $T = 2$, $tol = 5 \times 10^{-5}$, $\Delta t = 0,01$, $\Delta\phi = 2\pi/48 = \Delta\theta$. Primero estudiamos la influencia de la frecuencia f y de la amplitud ε

en la controlabilidad, para la curva horizontal definida por $\theta_0 = \pi$ en (5.4). La Tabla 5.12 muestra que los diferentes valores de f y ε conducen a diferentes valores de *Rel. error*.

Tabla 5.12: Resumen de los resultados numéricos obtenidos por chattering control alrededor de la línea horizontal $\theta = \pi$. En este ejemplo tomamos $k = 10^8$.

ε	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$
f	3	3	2	1	3	2	1
<i>No. iters</i>	302	246	223	333	59	143	103
<i>Norm u^c</i>	1.7731×10^3	1.4087×10^3	1.3680×10^3	1.8098×10^3	610.2806	745.0731	757.7227
<i>Rel. error</i>	0.0795	0.00631	0.0762	0.1044	0.0733	0.0430	0.0813

Ahora, tomamos la frecuencia $f = 2$ y realizamos chattering control para tres diferentes curvas coordenadas horizontales. En este experimento se prueban tres diferentes amplitudes para cada una de estas curvas, como se muestra en la Tabla 5.13. Es obvio que los casos

Tabla 5.13: Resultados numéricos obtenidos mediante chattering control empleando diferentes líneas horizontales.

θ_0	ε	<i>No. Iters</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel.error</i>
	0	59	980.9205	0.7165
0	$\pi/12$	398	817.1389	0.0566
	$\pi/4$	446	466.3484	0.1033
	0	36	1076.8	0.3404
$\pi/2$	$\pi/12$	250	731.9357	0.1632
	$\pi/4$	365	742.6952	0.1304
	0	20	1715.9	0.7159
π	$\pi/12$	302	1773.1	0.0795
	$\pi/4$	143	745.0731	0.0430

donde no se emplea chattering control ($\varepsilon = 0$) dan malos resultados, como se esperaba. Sorprendentemente, el caso $\theta_0 = \pi/2$ tampoco es bueno, incluso con chattering. Por otro lado, se obtienen buenos resultados con $\theta_0 = 0$ y π . La Figura 5.7 muestra que el deterioro ocurre principalmente a lo largo de la dirección $-\theta$, y también muestra las oscilaciones que hace la norma \mathcal{L}^2 del control u^c cuando aplicamos chattering control.

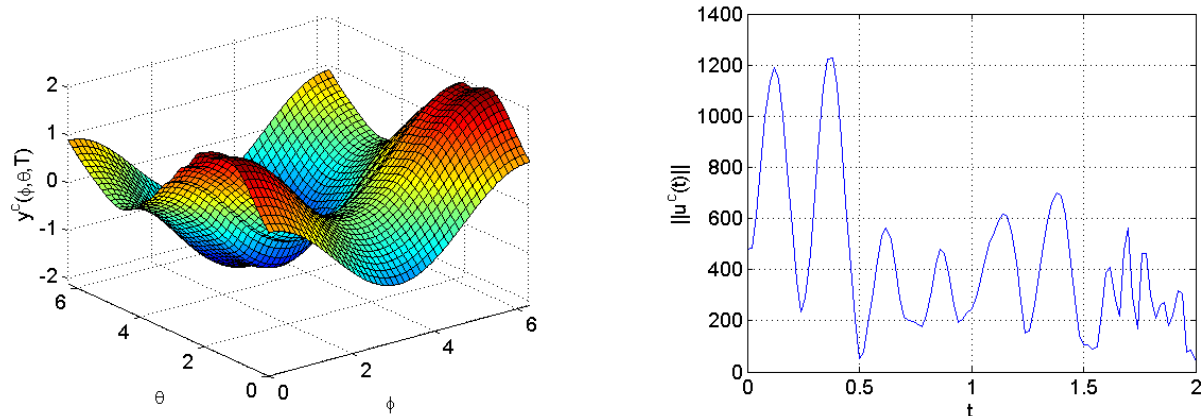


Figura 5.7: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c en función del tiempo. Caso: $\theta_0 = \pi$ y $\varepsilon = \pi/4$.

No es sorprendente que se obtengan resultados pobres con la técnica de ‘chattering control’ sobre curvas coordenadas verticales. Por ejemplo, para el caso $\phi_0 = \pi$ obtuvimos los resultados que se muestran en la Tabla 5.14 para $\varepsilon = 1/4$ y $f = 2$. Estos resultados son claramente muy pobres. Obtuvimos resultados ligeramente mejores con $\mu = 1$ y $\mu = 2$, pero la mejora no es

Tabla 5.14: Resultados numéricos obtenidos mediante chattering control empleando $\phi_0 = \pi$, $\varepsilon = 1/4$ y $f = 2$.

μ	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
1/2	400	2.0231×10^3	0.4641
1	425	2.7110×10^3	0.2190
2	264	2.7568×10^3	0.1187

significativa. La Figura 5.8 muestra que el deterioro ocurre principalmente a lo largo de la dirección- ϕ .

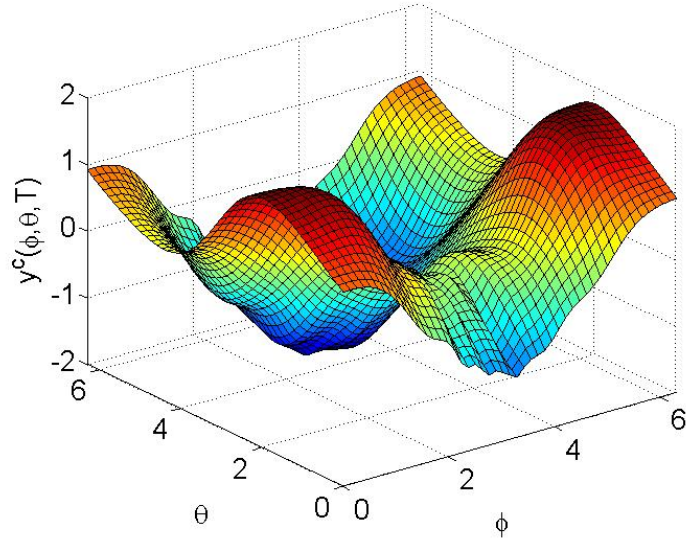


Figura 5.8: Gráfica de $y^c(T)$ obtenida con chattering control alrededor de la línea vertical $\phi_0 = \pi$, con $\mu = 2$, $\epsilon = \pi/4$, $f = 2$.

En resumen, se obtienen mejores resultados con ‘chattering control’ cuando se emplean como conjuntos de soporte del control curvas coordenadas horizontales en comparación con las verticales; la razón es que estas curvas horizontales son más grandes que las verticales, y además su acción (oscilatoria) es principalmente a lo largo de la dirección- θ (donde la longitud de escala más pequeña tiene lugar).

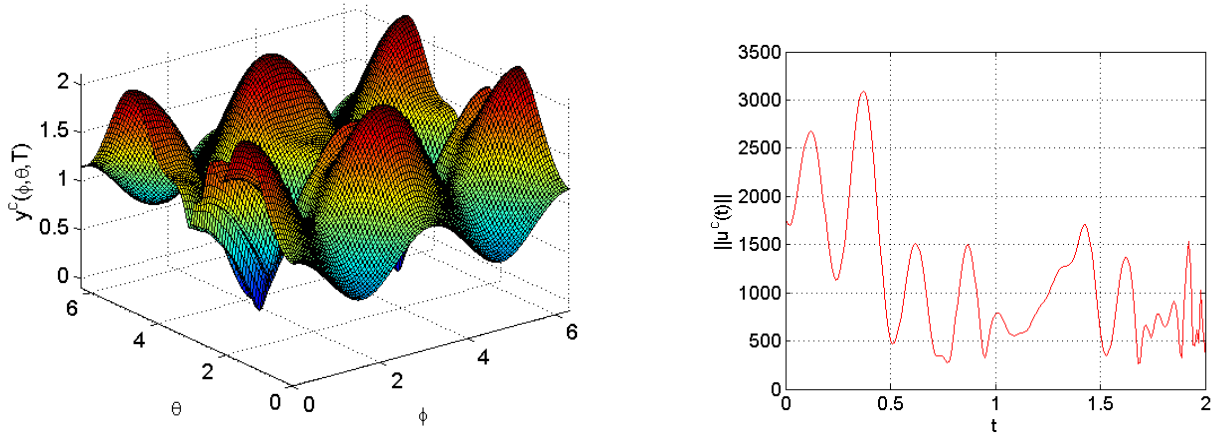
Experimentos numéricos con la función objetivo no-suave (5.2)

Ahora, aplicamos la técnica de ‘chattering control’ para conducir el sistema a la función objetivo no-suave definida por (5.2). En este caso elegimos nuevamente $y_0 = 0$, $\mu = 1/2$, $T = 2$, $k = 10^8$ y $tol = 5 \times 10^{-5}$. Los parámetros de discretización son $\Delta t = 1/100$ y $\Delta \phi = \Delta \theta = 2\pi/104$. La Tabla 5.15 muestra resultados para $f = 2$ y diferentes amplitudes ϵ para las curvas de soporte $\theta = 0$, $\pi/2$ y π . Estos resultados muestran que para la función objetivo no-suave (5.2) ‘chattering control’ con $\epsilon = \pi/12$ y $\epsilon = \pi/4$ no mejora significativamente los resultados obtenidos con $\epsilon = 0$ (control fijo con soporte en una curva).

La gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ y la evolución de la norma del control $u^c(T)$, para el caso donde el control tiene soporte sobre la línea coordenada $\theta_0 = \pi$ y $\epsilon = \pi/4$, se muestran en la figura 5.9.

Tabla 5.15: Resultados numéricos para diferentes líneas coordenadas $\theta = \theta_0$.

θ	ε	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
	0	27	2.7661×10^3	0.1107
0	$\pi/12$	80	1.0059×10^3	0.0845
	$\pi/4$	28	571.2529	0.0818
	0	139	7.8117×10^3	0.1786
$\pi/2$	$\pi/12$	406	5.0375×10^3	0.1368
	$\pi/4$	101	2.2837×10^3	0.1097
	0	34	3.6849×10^3	0.1228
π	$\pi/12$	79	2.0122×10^3	0.0992
	$\pi/4$	40	1.1635×10^3	0.0824

Figura 5.9: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c en función del tiempo. Caso: $\theta_0 = \pi$ y $\varepsilon = \pi/4$.

5.1.3. Control Nulo

La siguiente serie de experimentos numéricos tienen que ver con los problemas donde la función objetivo es $y_T = 0$ (el estado nulo). Recordemos que un sistema tiene la *propiedad de controlabilidad-nula* si puede ser llevado de cualquier estado inicial y_0 , al estado-nulo en un tiempo finito. Dado que la tendencia natural de un sistema de difusión no-controlado sobre Σ es producir soluciones convergentes a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$ (si asumimos que $\int_{\Sigma} y_0 d\Sigma = 0$), es razonable pensar que estos sistemas tienen la propiedad de controlabilidad-nula. De hecho, se demuestra en [16] que para superficies suaves de \mathbb{R}^d (como la superficie del toro Σ considera en esta sección), la ecuación de calor asociada con el operador de Laplace-Beltrami tiene la siguiente propiedad: $\forall T > 0$, y $y_0 \in \mathcal{L}^2(\Sigma)$, existe $v \in \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$, tal que la correspondiente solución de la ecuación de calor verifica $y(T) = 0$. Entre estos controles que realizan la controlabilidad nula, uno de particular interés es el control (único) de norma

mínima en $\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))$; el cálculo de este control se ha discutido en [26] (un artículo muy inspirador, por cierto) para la ecuación de calor sobre un dominio acotado de \mathbb{R}^d . Nuestro objetivo, en este trabajo es más modesto: basándonos en el Teorema 3.1 (con $y_T = 0$), esto es usar la metodología basada en penalización discutida en los Capítulos 3 y 4, para calcular una aproximación de este control de norma mínima realizando la controlabilidad nula, para valores de k tan grandes como sean posibles.

Resultados con un estado inicial suave

En primer lugar, investigamos la propiedad de controlabilidad nula (aproximada) con el estado inicial suave y_0 definido sobre $\widehat{\Omega}$ por

$$y_0(\phi, \theta) = \cos \phi + \sin \theta. \quad (5.5)$$

Tomamos, como antes, $r = 1$, $R = 2$, los demás parámetros son los mismos también, esto es $\mu = 2$, $\Delta t = 1/100$, $\Delta \phi = \Delta \theta = 2\pi/48$, $tol = 5 \times 10^{-5}$, $k = 10^8$, el algoritmo de gradiente conjugado se inicializa por $u_0 = 0$.

Comenzamos nuestros experimentos numéricos con el conjunto de soporte $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$, $k = 10^8$, y $T = 2, 3$ y 5 . Los resultados numéricos reportados en la Tabla 5.16 muestran que mientras T sea más grande la norma- \mathcal{L}^2 de $y^c(T)$ disminuye. En realidad, este resultado no nos sorprende ya que en este caso particular la difusión no se opone a la acción del control, como ocurre en general, sino que ‘coopera’ con el con el fin de alcanzar el estado nulo. De hecho, en la ausencia de control (es decir, $u = 0$), el estado final verifica:

Tabla 5.16: Dependencia de la controlabilidad–nula con respecto de T . Caso $\widehat{\omega} = (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$.

Cantidad	$T = 2$	$T = 3$	$T = 5$
Número de iteraciones	13	14	11
$Norm\ u^c$	7.0289	3.9168	1.3460
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})}$	0.0412	0.0196	0.0118
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})}/\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})}$	0.0046	0.0022	0.0013

$\|y_{nc}^c(T)\|_{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})}/\|y_0\|_{\mathcal{L}^2(\widehat{\Omega})} = 0.2562, 0.1551$ y 0.0570 si $T = 2, 3$ y 5 , respectivamente, donde y_{nc}^c es la función de estado no–controlada calculada. Esto significa que la reducción del (la norma del) estado inicial por difusión, tras $T = 2, 3$ and 5 es de aproximadamente 74 %, 84 % y 94 %, respectivamente.

Ahora estudiamos el comportamiento de la controlabilidad nula para subdominios de soportes horizontales de diferentes tamaños. Elegimos $T = 3$ para estos experimentos. La Tabla 5.17 muestra que el estado calculado $y^c(T)$ se aproxima más al estado nulo cuando $|\omega|$ aumenta. Las dos últimas columnas de esta tabla muestran que: 1) La razón de decrecimiento de $y^c(T)$ con respecto de y_0 , no mejora significativamente cuando el tamaño del conjunto de

soporte ω aumenta, excepto cuando $\omega = \Omega$; 2) la razón ‘real’ de decrecimiento, es decir, debida a la aplicación del control solamente (mostrada en la última columna), tiene un comportamiento similar. De hecho, las cantidades en la última columna son iguales a las cantidades en la anterior a esta (penúltima columna) multiplicada por la constante $\|y_0\|/\|y_{nc}^c(T)\|$, lo cual quita la contribución de difusión para el decrecimiento de y_0 al estado nulo. Observamos que el tamaño del conjunto del soporte para la función del control no juega un papel significativo en relación al número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia.

Tabla 5.17: Dependencia de la controlabilidad–nula aproximada con respecto a $|\omega|$. Subdominios de soportes horizontales.

$\hat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
$(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$	1	2	1.4188	2.0748×10^{-5}	2.3383×10^{-6}	1.5078×10^{-5}
$(0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$	0.3408	14	3.9167	0.0196	0.0022	0.0142
$(0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$	0.1955	15	6.2900	0.0290	0.0033	0.0211
$(0, 2\pi) \times (3\pi/4, 5\pi/4)$	0.1375	14	7.9594	0.0412	0.0046	0.0299
$(0, 2\pi) \times (7\pi/8, 9\pi/8)$	0.0641	24	11.7634	0.0489	0.0055	0.0355
$(0, 2\pi) \times (15\pi/16, 17\pi/16)$	0.0320	19	14.7410	0.0556	0.0063	0.0404

La Figura 5.10 visualiza la evolución de la norma del control para diferentes valores de k y la gráfica de la función objetivo calculada $y^c(T)$. Por supuesto, las pequeñas oscilaciones sobre el objetivo calculado son en la dirección de θ , y son más evidentes entre $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, debido al subdominio horizontal empleado para el soporte del control.

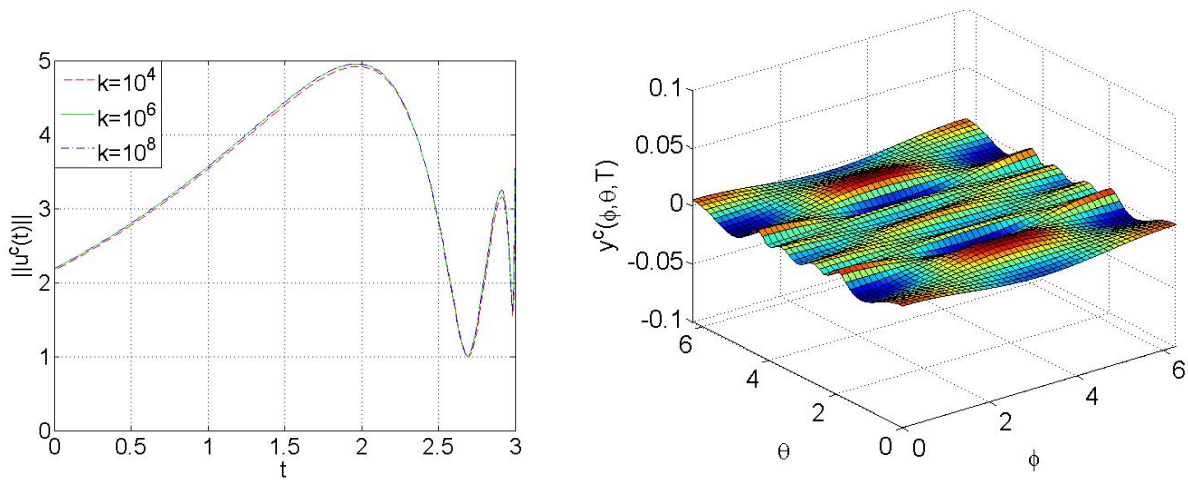


Figura 5.10: Izquierda: Evolución de la norma del control calculada. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Caso para $\hat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$ (controlabilidad–nula).

La Tabla 5.18 muestra los resultados numéricos con diferentes subdominios de soportes verticales. Una vez más, los resultados numéricos no son tan buenos como los obtenidos con subdominios horizontales.

Tabla 5.18: Dependencia de la controlabilidad–nula aproximada con respecto a $|\omega|$. Subdominios de soportes verticales.

$\phi_f - \phi_0$	$ \omega / \Omega $	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
π	0.5000	26	5.4407	0.0911	0.0103	0.0662
$2\pi/3$	0.3333	41	10.4483	0.1039	0.0117	0.0755
$\pi/2$	0.2500	38	13.1074	0.1569	0.0177	0.1140
$\pi/4$	0.1250	49	23.3285	0.1608	0.0181	0.1169

Curvas como conjuntos de soporte para la controlabilidad nula

En los experimentos anteriores hemos visto que los resultados numéricos para la controlabilidad nula dependen del tamaño del conjunto de soporte, $|\omega|$, pero esta dependencia es marginal, de hecho. Por lo tanto, esto sugiere que todavía podemos tener buenas propiedades de controlabilidad nula aproximada si el control tiene como soporte una curva horizontal coordenada γ de Σ y el estado inicial es el mismo (suave) definido en (5.5). Los resultados presentados en la Tabla 5.19, obtenidos para $\gamma = \{\{\phi, \theta\} | 0 < \phi < 2\pi, \theta = \pi\}$, validan esta predicción cuando $T = 2$, y 3. En particular, los resultados con $T = 3$ se comparan favorablemente con aquellos obtenidos con los soportes horizontales de la Tabla 5.17. Además, se requieren menos iteraciones de gradiente conjugado para alcanzar la convergencia. En la Figura 5.11 mostramos la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$, para el conjunto del soporte $\theta = \pi$ y $T = 3$.

Tabla 5.19: Controlabilidad nula aproximada. Caso de la línea horizontal $\theta = \pi$.

T	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
2	8	198.8242	0.1386	0.0156	0.0610
3	7	105.4722	0.0296	0.0033	0.0215

Resultados con un estado inicial no–suave

Con el fin de investigar más a fondo la influencia del estado inicial, y_0 , en los resultados numéricos, hemos realizado experimentos numéricos con el estado inicial no–suave

$$y_0(\phi, \theta) = |\cos \phi| + |\sin \theta|,$$

el cual es una función Lipschitz–continua no- C^1 de (ϕ, θ) . Las tablas 5.20 y 5.21 resumen los resultados numéricos: La tabla 5.20 es la análoga de la tabla 5.17 asociada con la nueva función y_0 . Similarmente, la tabla 5.21 es la análoga de la tabla 5.19. Comparando las tablas 5.17 y 5.19

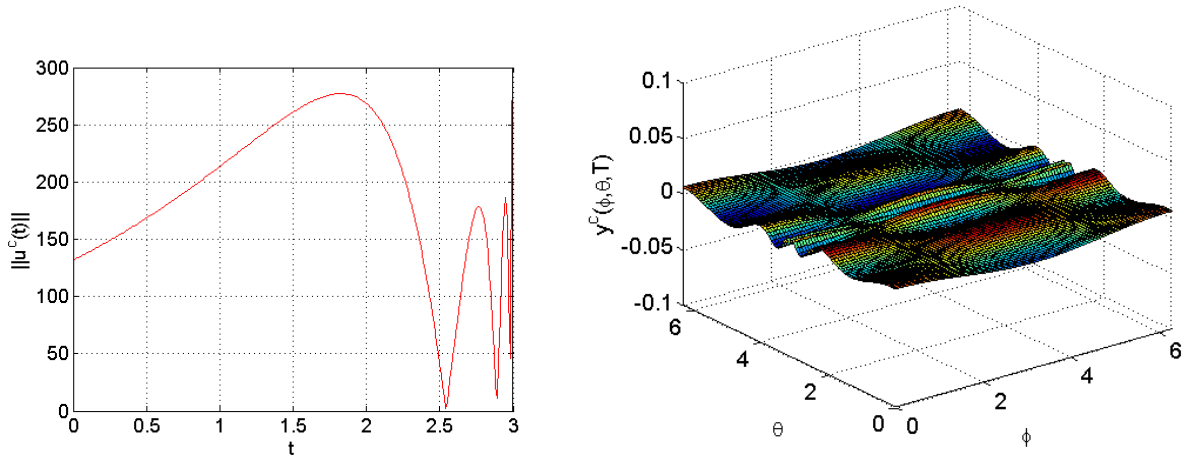


Figura 5.11: Izquierda: evolución de la norma del control calculado. Derecha: gráfica de $y^c(T)$. Controlabilidad nula con y_0 suave, el conjunto de soporte $\theta = \pi$ y tiempo final $T = 3$.

con las tablas 5.20 y 5.21 se muestra que el estado inicial suave $y_0(\phi, \theta) = \cos \phi + \sin \theta$ conduce a mejores resultados de controlabilidad–nula aproximada que $y_0(\phi, \theta) = |\cos \phi| + |\sin \theta|$. La diferencia que observamos no se deriva de la no–suavidad del segundo estado inicial, sino del hecho de que éste verifica $\int_{\Sigma} y_0 d\Sigma \neq 0$. Sin embargo, sin controlar, la solución de la ecuación de estado verificará $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = (1/|\Sigma|) \int_{\Sigma} y_0 d\Sigma \neq 0$, donde $|\Sigma| =$ medida de Σ . Cancelando (o casi cancelando) la contribución de la componente constante de la solución es lo que hace el cálculo del control más costoso en este caso. No obstante, incluso en esta difícil situación, nuestra metodología no se comporta mal, como se muestra en las dos últimas columnas de las Tablas 5.20 y 5.21.

Tabla 5.20: Dependencia con respecto a $|\omega|$ de la controlabilidad–nula aproximada con respecto a un estado inicial no–suave.

$\hat{\omega}$	$ \omega / \Omega $	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
$(0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$	0.3408	10	12.5523	0.0812	0.0068	0.0072
$(0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$	0.1955	9	17.2856	0.1033	0.0087	0.0092
$(0, 2\pi) \times (3\pi/4, 5\pi/4)$	0.1375	10	20.7466	0.1062	0.0089	0.0094
$(0, 2\pi) \times (7\pi/8, 9\pi/8)$	0.0641	14	29.3117	0.1100	0.0092	0.0098
$(0, 2\pi) \times (15\pi/16, 17\pi/16)$	0.0320	9	36.1717	0.1175	0.0098	0.0104

En la Figura 5.12 mostramos la evolución de la norma del control y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$, para el caso en el que el conjunto del soporte para el control es $\hat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$.

Tabla 5.21: Controlabilidad nula aproximada. Caso de la línea horizontal $\theta = \pi$ (para un estado inicial no-suave).

T	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
2	5	335.2381	0.2936	0.0246	0.0261
3	5	234.2418	0.1427	0.0120	0.0127

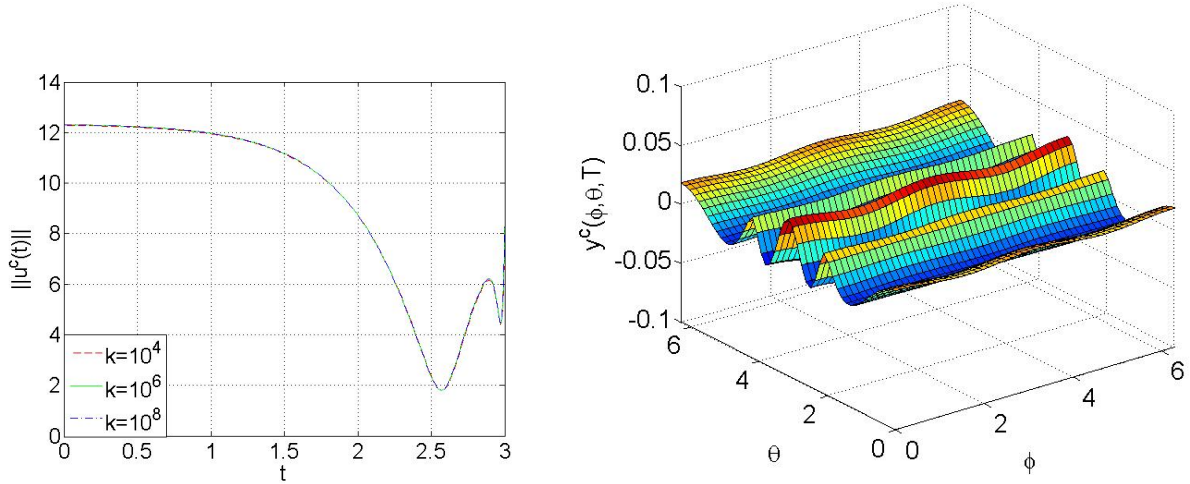


Figura 5.12: Izquierda: evolución de la norma del control calculado. Derecha: gráfica de $y^c(T)$. Controlabilidad nula con y_0 no-suave y el conjunto de soporte $\hat{\omega} = (0, 2\pi) \times (2\pi/3, 4\pi/3)$.

Como un último experimento numérico, consideremos el (todavía) estado inicial no-suave

$$y_0 = |\cos \phi| + |\sin \theta| - \frac{4}{\pi}, \quad (5.6)$$

el cual satisface $\bar{y}_0 = (1/|\Sigma|) \int_{\hat{\Omega}} y_0 d\Sigma = 0$. En este caso obtenemos mucho mejores resultados de controlabilidad como se muestra en la Tabla 5.22 y en la Figura 5.13, mostrando que la metodología numérica empleada resuelve el problema de controlabilidad-nula en una forma satisfactoria, al menos, con este y_0 (aunque son necesarias más iteraciones de gradiente conjugado para lograr la convergencia).

Tabla 5.22: Controlabilidad nula aproximada. Caso de la línea horizontal $\theta = \pi$ (para un estado inicial no-suave con $\bar{y}_0 = 0$).

T	$N. Iter$	$Norm u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\hat{\Omega})}}$
2	49	66.6718	0.0043	0.0011	0.0411
3	21	11.2341	0.0029	7.4238×10^{-4}	0.0862

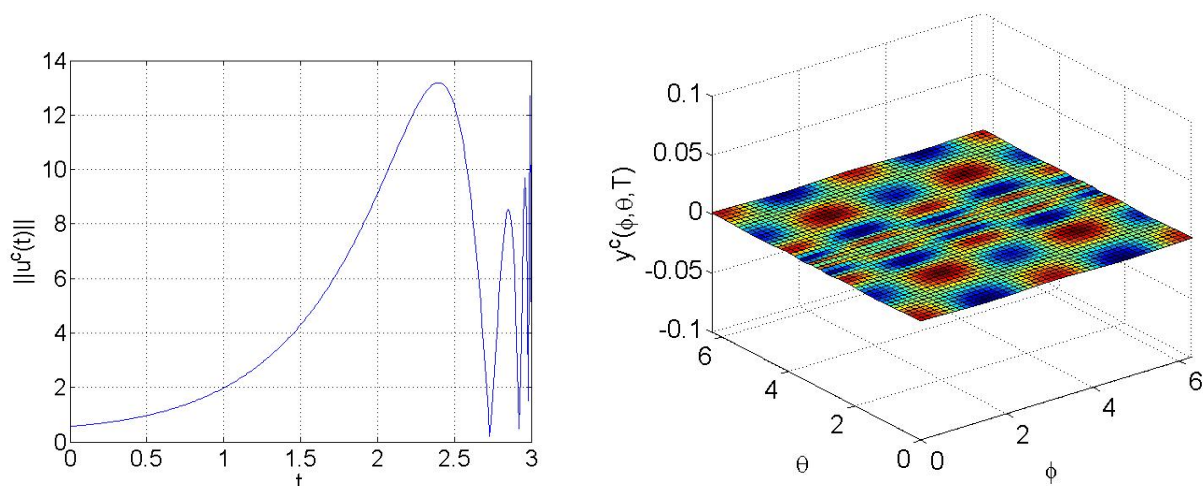


Figura 5.13: Izquierda: evolución de la norma del control calculado. Derecha: gráfica de $y^c(T)$. Controlabilidad nula con y_0 no-suave (donde $\bar{y}_0 = 0$) y el conjunto de soporte $\theta = \pi$.

5.2. Control sobre superficies esféricas

A continuación mostraremos algunos ejemplos numéricos del problema de control sobre superficies esféricas usando la metodología discutida en la sección 4.3. En esta sección, consideramos dos tipos de control, los cuales son: 1) Problema de controlabilidad aproximada (control distribuido); y 2) Problemas de controlabilidad nula.

5.2.1. Control Distribuido

Experimentos con una función objetivo suave

En primer lugar, consideramos la superficie de una esfera con radio $R = 1$, y la función objetivo suave

$$y_T(x_1, x_2, x_3) = \sin(2x_1x_2) + \cos(2x_2x_3), \quad (5.7)$$

con $\{x_1, x_2, x_3\} \in \Sigma$. Elegimos $y_0 = 0$, $\mu = 1/2$, y $T = 2$ en el problema variacional (3.1), con Σ la esfera unitaria y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$ como el conjunto de soporte para la función del control. Primero presentamos resultados numéricos para diferentes valores de Δt y h (donde el parámetro de discretización h se refiere al diámetro máximo de los elementos en la malla semi-regular sobre Σ , ver sección 4.3). Para este caso hemos tomado $u_0 = \mathbf{0}$ como control inicial, $k = 10^8$ como valor del parámetro de penalización y fijamos el criterio de paro en $tol = 10^{-5}$ en el algoritmo de gradiente conjugado (4.60)–(4.72).

Los resultados numéricos correspondientes se presentan en la tabla 5.23, en donde se utiliza la misma notación introducida anteriormente, es decir *No. iters* indica el número de iteraciones necesarias para converger al óptimo dada la tolerancia anterior, $Norm u^c = \|u^c\|_{\mathcal{L}^2(\omega \times (0, T))}$, y $Rel. error = \|y_T - y^c(T)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} / \|y_T\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ con u^c (resp., y^c) el control óptimo calculado (resp., la solución asociada a (4.3)–(4.4)). Estos resultados indican que para h suficientemente pequeña la solución no varía mucho con Δt , lo cual sugiere convergencia con respecto a la discretización en espacio–tiempo. En particular, en todos los casos la diferencia relativa entre $y^c(T)$ y y_T es aproximadamente del 5%.

Tabla 5.23: Resultados de convergencia para $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$.

h	0.0787	0.0201	0.0051	0.0013	0.0201	0.0051
Δt	1/100	1/100	1/100	1/100	1/200	1/200
<i>No. iters</i>	16	20	19	18	20	18
<i>Norm u^c</i>	10.3845	12.9920	14.3885	14.5753	13.0010	14.1877
<i>Rel. error</i>	0.0531	0.0504	0.0504	0.0522	0.0502	0.0520

Por consiguiente, hemos seleccionado los parámetros de discretización $\Delta t = 1/100$ y $h = 0.0051$ con el fin de investigar la influencia del parámetro de penalización k en las soluciones numéricas. Consideramos diferentes subdominios ω para el soporte del control, con distintos tamaños $|\omega|$, como se muestra en la tabla 5.24. Los resultados reportados en esta tabla muestran la convergencia de $y_k(T)$ a y_T cuando $k \rightarrow +\infty$, además notamos que los resultados numéricos son esencialmente los mismos en todos los casos cuando $k > 10^8$. El mejor resultado se obtiene para el caso $|\omega| = 0.3|\Sigma|$ debido a que la distancia de ω al punto más lejano en Σ (uno de los polos) es más pequeña que en los otros casos, implicando que el efecto del control es mayor para este caso en la escala de longitud característica dada, $\sqrt{\mu T} = 1$.

Tabla 5.24: Dependencia de los resultados numéricos respecto a k para diferentes subdominios.

ω	$ \omega / \Sigma $	k	<i>No. Iters</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel. error</i>
Σ	1	10^4	4	6.8156	0.0010
		10^6	4	6.8253	7.5202×10^{-4}
		10^8	4	5.0279	7.3486×10^{-4}
		10^{10}	4	5.0279	7.3486×10^{-4}
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$	0.5	10^4	28	16.5423	0.0684
		10^6	34	19.3445	0.0567
		10^8	34	19.3586	0.0566
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$	0.3	10^4	17	13.5167	0.0537
		10^6	19	14.3812	0.0505
		10^8	19	14.3885	0.0504
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.05 \leq x_3 \leq 0.05\}$	0.05	10^4	13	21.4641	0.0768
		10^6	14	23.6017	0.0705
		10^8	14	23.6288	0.0704

La figura 5.14 muestra la evolución en el tiempo de $\|u^c(t)\|_{\mathcal{L}^2(\omega)}$ para el caso $|\omega| = 0.5|\Sigma|$ con tres valores de k . En esta figura se muestra claramente el comportamiento altamente oscilatorio de la función del control cuando t se aproxima a T , un fenómeno que es bien conocido para la ecuación de calor, como se muestra en, por ejemplo, [13], [17], [18], y [26]. De hecho, este comportamiento oscilatorio es más fuerte para los casos con $Norm\ u^c$ más grandes en la tabla 5.24. Por otro lado, en la figura 5.15 mostramos la gráfica de $y^c(T)$, y $|y_T - y^c(T)|$, para el caso $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$ y donde $k = 10^8$. No es sorprendente que $y^c(T)$ aproxime mejor a y_T en la región que ocupa ω que en su complemento $\Sigma \setminus \omega$.

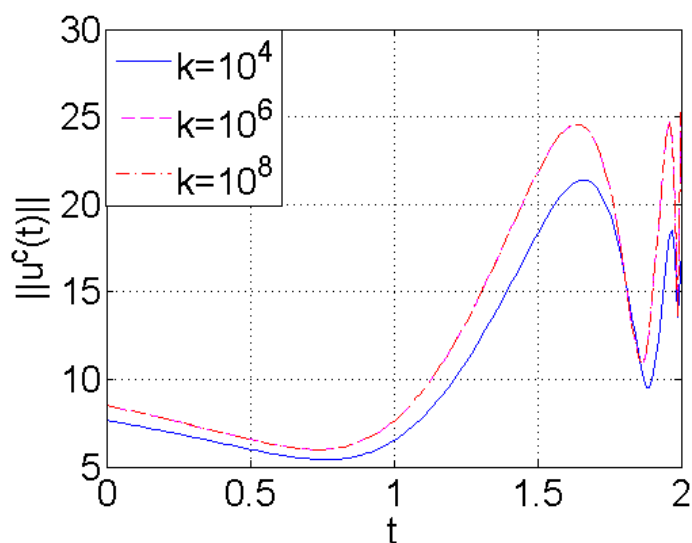


Figura 5.14: Norma del control calculado vs tiempo, para $k = 10^4, 10^6, 10^8$ y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$,

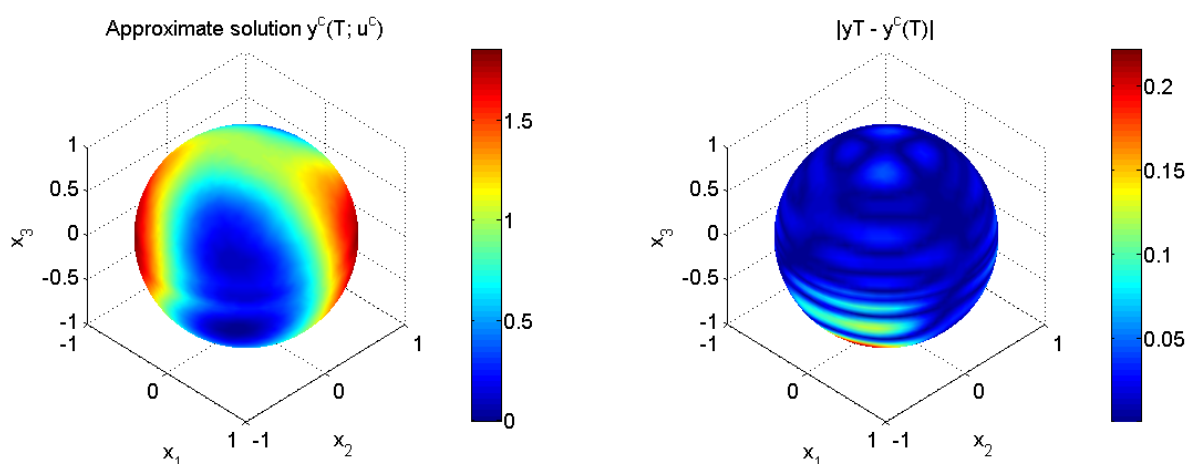


Figura 5.15: Visualización de $y^c(T)$ (izquierda) y $|y_T - y^c(T)|$ (derecha). Caso: $k = 10^8$ y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$.

Un tema importante es la influencia del coeficiente de difusión μ . Cualitativamente, aumentar μ mejorará la tendencia ‘natural’ del sistema a evolucionar, cuando no hay ningún control, hacia el valor promedio del estado inicial, es decir $y(t) \rightarrow \bar{y}_0 (= \int_{\Sigma} y_0 d\Sigma / |\Sigma|)$. Cuando se trata controlar el sistema éste es un efecto contra el cual se debe ‘luchar’ (a menos que $y_T = \bar{y}_0$). Por otro lado, cuando $\mu \rightarrow 0$, la ausencia de suficiente difusión provocará que efecto del control sea más débil lejos de ω . A partir de estas obvias consideraciones anticipamos que la controlabilidad es una función no-monótona de μ . Los resultados mostrados en la tabla 5.25 validan esta predicción para el caso cuando $y_0 = 0$, $h = 0.0051$, $\Delta t = 1/100$, $k = 10^8$, $T = 2$, y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$. El mejor caso ocurre cuando $\mu T = 1$.

Tabla 5.25: Influencia de μ para $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$, $y_0 = 0$ y $T = 2$.

μ	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
1	44	24.3525	0.0634
1/2	34	19.3586	0.0566
1/4	46	17.8515	0.0635
1/8	100	36.8160	0.0833

Experimentos con una función objetivo no-suave

Para el siguiente conjunto de experimentos numéricos, consideramos una función objetivo no-suave, definida por la siguiente función:

$$y_T(x) = |\sin(2x_1 x_2)| + |\cos(2x_2 x_3)|, \quad (5.8)$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nuevamente, consideramos la esfera con radio $R = 1$, el estado inicial $y_0 = 0$, el parámetro de penalización $k = 10^8$ y el criterio de paro $tol = 10^{-5}$ en el algoritmo de gradiente conjugado. Elegimos diferentes parámetros de discretización Δt y h cuando el conjunto de soporte del control es dado por el subdominio $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$. Los resultados numéricos correspondientes para $\mu = 1/2$ y $T = 2$ son resumidos en la tabla 5.26, y muestran convergencia respecto a los parámetros de discretización. En este caso la

Tabla 5.26: Resultados de convergencia para $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$ y un objetivo no-suave.

h	0.0787	0.0201	0.0051	0.0013	0.0201	0.0051
Δt	1/100	1/100	1/100	1/100	1/200	1/200
No.iters	6	12	10	9	12	10
Norm u^c	6.6679	8.8285	9.2332	9.6992	8.7940	9.1684
Rel. error	0.0671	0.0638	0.0674	0.0678	0.0635	0.0676

función objetivo calculada difiere de la exacta por alrededor de 6.5% en la mayoría de los casos, lo cual es ligeramente mayor que la diferencia correspondiente obtenida para el objetivo suave. Por lo tanto, para los siguientes experimentos, podemos mantener los mismos

parámetros de discretización que utilizamos previamente con el objetivo suave: $\Delta t = 1/100$ y $h = 0.0051$.

En cuanto a la influencia del subconjunto de soporte ω , la tabla 5.27 muestra los resultados numéricos para diferentes subdominios, los cuales son simétricos con respecto a la línea ecuatorial. En este caso el error obtenido es ligeramente mayor que el correspondiente al objetivo suave. Por supuesto, bajo las mismas condiciones es más difícil aproximar el objetivo

Tabla 5.27: Resultados numéricos para diferentes subdominios ω , con una función objetivo no-suave.

ω	$ \omega / \Sigma $	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
Σ	1	14	6.0928	0.0022
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.9 \leq x_3 \leq 0.9\}$	0.90	8	5.5072	0.0146
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.8 \leq x_3 \leq 0.8\}$	0.80	8	5.5881	0.0222
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.7 \leq x_3 \leq 0.7\}$	0.70	10	5.7698	0.0341
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.55 \leq x_3 \leq 0.55\}$	0.55	13	7.0761	0.0414
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.5 \leq x_3 \leq 0.5\}$	0.50	9	7.1176	0.0497
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$	0.30	10	9.2332	0.0674
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.2 \leq x_3 \leq 0.2\}$	0.20	12	12.6560	0.0645
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.05 \leq x_3 \leq 0.05\}$	0.05	13	22.4331	0.0679

no-suave que uno suave. Sin embargo, el comportamiento cualitativo es el mismo, es decir, para pequeños ω los puntos en los polos están más lejos y la acción del control es menos efectiva, a menos que consideremos un tiempo más largo T .

La figura 5.16 muestra la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$, para el caso $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$. De nuevo, la acción del control tiene una mayor influencia dentro del subdominio del control que lejos de este.

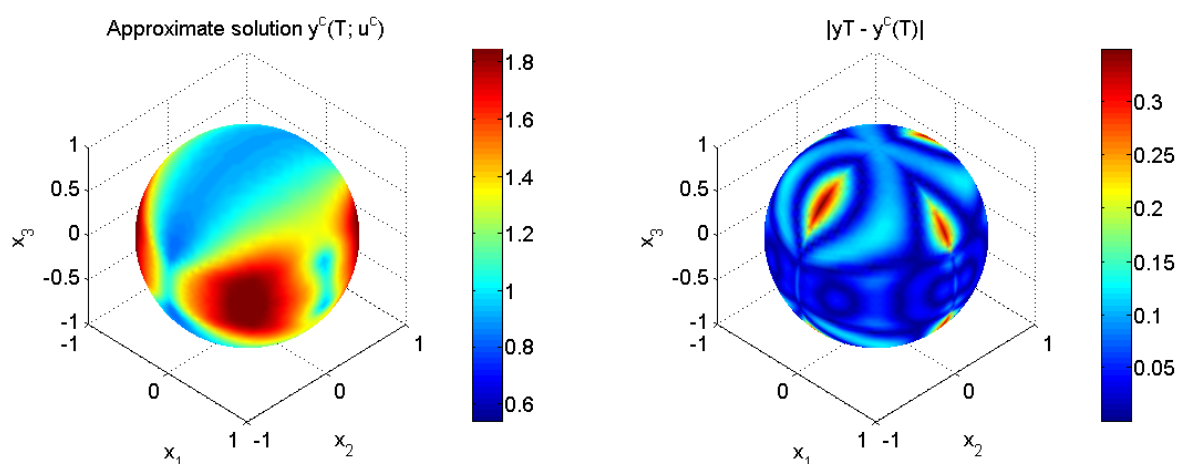


Figura 5.16: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Gráfica del error $|y_T - y^c(T)|$. Caso: $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$.

Ahora, investigamos la influencia del parámetro de difusión μ para este mismo caso con función objetivo (blanco) no suave. Mantenemos los mismos parámetros y valores de los ejemplos anteriores, con excepción de μ y $|\omega|$. La tabla 5.28 muestra que es más difícil controlar el sistema cuando μ disminuye, como ocurre con el caso de la función objetivo suave. Así

Tabla 5.28: Resultado numéricos para diferentes valores of μ , con la función objetivo no-suave (5.8).

ω	$ \omega / \Sigma _S$	μ	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$	0.5	1	20	12.5932	0.0779
		1/2	22	11.7713	0.0682
		1/4	26	12.2879	0.0723
		1/8	55	24.4898	0.0865
		1/10	99	45.1834	0.0883
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.5 \leq x_3 \leq 0.5\}$	0.5	1	13	9.7446	0.0468
		1/2	9	7.1176	0.0497
		1/4	11	6.4009	0.0511
		1/8	20	9.0149	0.0537
		1/10	23	11.1241	0.0572
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$	0.3	1	11	11.9749	0.0684
		1/2	10	9.2332	0.0674
		1/4	11	8.7718	0.0690
		1/8	20	24.4898	0.0812
		1/10	30	45.1834	0.0832

mismo, estos resultados sugieren que para cada conjunto de soporte ω puede existir un valor óptimo de μT el cual produce la solución con mejor precisión. Este valor óptimo no esta fuertemente relacionado con la suavidad de la función objetivo pero si con la geometría y las propiedades físicas del sistema. Como ya hemos explicado anteriormente (para el caso de un objetivo suave), cuando μ es grande la tendencia ‘natural’ del sistema es llevar la solución de manera rápida a $\bar{y}_0 = (1/|\Sigma|) \int_{\Sigma} y_0 d\Sigma$, por lo que la función de control tiene que actuar en contra de esta tendencia, a menos que $y_T = \bar{y}_0$. Por otro lado, para valores pequeños de μ es necesario considerar tiempos mayores para que la acción del control afecte significativamente los puntos de Σ que se encuentran lejos de ω .

Por consiguiente, investigamos el efecto del tiempo μT en la controlabilidad; en esta ocasión variamos los valores de μ y T manteniendo fijo $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$. Los resultados numéricos se muestran en la tabla 5.29. Por supuesto, encontramos una pérdida de precisión cuando μT disminuye. Los mejores resultados se obtienen cuando la escala de longitud característica $\sqrt{\mu T}$ toma un valor cercano a 1, lo cual es aproximadamente la distancia del conjunto del soporte ω a los puntos en los polos, a lo largo de la superficie de la esfera. Más aún, un valor de μT entre 1/4 y 1/8 es algo crítico para el conjunto de soporte dado, ya que las soluciones convergentes se obtienen con una precisión no aceptable (menos del 10 % del error relativo) para valores pequeños. Con el propósito de obtener una solución con mejor precisión

Tabla 5.29: Resultados numéricos para $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$ y diferentes valores de T y μ .

μ	T	$ \omega / \Sigma $	No. <i>I</i> ters	Norm u^c	Rel.error
1	2	0.3	11	11.9749	0.0684
	1.5	0.3	10	12.2146	0.0688
	1	0.3	10	13.3376	0.0676
	1/2	0.3	11	17.7431	0.0699
	1/4	0.3	18	43.5057	0.0843
	1/8	0.3	65	143.4465	0.1696
1/2	4	0.3	7	7.0106	0.0793
	3	0.3	7	7.2707	0.0790
	2	0.3	10	9.2332	0.0674
	1	0.3	11	12.3766	0.0693
	1/2	0.3	16	29.0787	0.0843
	1/4	0.3	50	116.5275	0.1352
1/4	8	0.3	7	4.9572	0.0793
	6	0.3	7	5.1332	0.0791
	4	0.3	10	6.4831	0.0674
	2	0.3	11	8.7718	0.0690
	1	0.3	24	22.1714	0.0784
	1/2	0.3	51	73.9656	0.1398
1/8	16	0.3	7	3.4923	0.0795
	12	0.3	7	3.6297	0.0791
	8	0.3	10	4.5842	0.0674
	4	0.3	11	8.7718	0.0690
	2	0.3	20	24.4898	0.0812
	1	0.3	50	49.6053	0.1431

cuando $\mu T \leq 1/8$, podemos considerar un conjunto del soporte para el control más grande. Por ejemplo, en la tabla 5.30 mostramos que para $\mu = 1/2$ y $T = 1/5$ es posible obtener un resultado aceptable con el conjunto de soporte $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.65 \leq x_3 \leq 0.65\}$. Para este caso, en la figura 5.17 se muestra la solución calculada $y^c(T)$, y la diferencia $|y_T - y^c(T)|$; por supuesto, esta figura claramente ilustra que es más difícil controlar el sistema en los polos que en el resto de la esfera.

Tabla 5.30: Resultado numérico para $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.65 \leq x_3 \leq 0.65\}$, $\mu = 1/2$ y $T = 1/5$.

μ	T	$ \omega / \Sigma $	No. <i>I</i> ters	Norm u^c	Rel.error
1/2	1/5	0.65	32	36.0589	0.0688

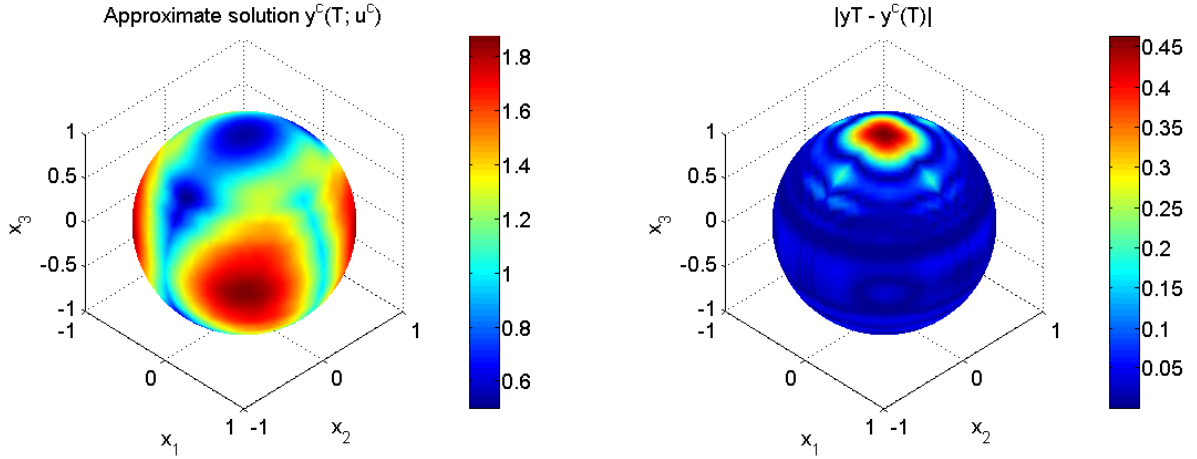


Figura 5.17: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: Gráfica del error $|y_T - y^c(T)|$. Caso: $\mu = 1/2$, $T = 1/5$ y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.65 \leq x_3 \leq 0.65\}$.

A continuación, estudiamos la propiedades de la controlabilidad para diferentes conjuntos de soporte con la misma medida de superficie $|\omega|$. Para estos experimentos consideramos $\mu = 1/2$ y $T = 2$, y mantenemos todos los otros parámetros como en los experimentos previos. La tabla 5.31 resume los resultados para dos conjuntos de experimentos: el primer conjunto incluye tres casos con el área de superficie $|\omega| = 2\pi$, y el segundo conjunto incluye tres casos con área $|\omega| = 4\pi/5$. Estos resultados muestran que el comportamiento no es independiente de

Tabla 5.31: Resultados numéricos para diferentes soportes con la misma medida de superficie $|\omega|$.

Supporting set ω	$ \omega / \Sigma $	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
$\omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid x_3 > 0\}$	0.5	22	11.7713	0.0682
$\omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.5 \leq x_3 \leq 0.5\}$	0.5	9	7.1176	0.0497
$\omega_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.5 \leq x_1 \leq 0.5\}$	0.5	14	9.9366	0.0598
$\omega_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid 0.6 \leq x_3 \leq 1\}$	0.2	24	17.2843	0.1358
$\omega_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.2 \leq x_3 \leq 0.2\}$	0.2	12	12.6560	0.0645
$\omega_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.2 \leq x_1 \leq 0.2\}$	0.2	20	16.8209	0.0613

la zona del control, ya que el número de iteraciones del algoritmo de gradiente conjugado para alcanzar la convergencia en la tolerancia dada es diferente para cada caso, y el error relativo no necesariamente es el mismo. Por supuesto, el peor resultado se obtiene con ω_4 debido a que en este caso su distancia al polo Sur es más grande que para los otros casos. Sin embargo, el comportamiento de los resultados para ω_2 , ω_3 y ω_5 , ω_6 es similar como esperábamos.

Experimentos con un objetivo no suave más ‘sofisticado’

Ahora, nos gustaría considerar una diferente función objetivo no-suave definida por la siguiente función

$$y_T(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \Sigma, x_3 > \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} \sin(3\pi x_3) + \cos(2\pi x_3) & \text{si } x \in \Sigma, -\frac{1}{6} \leq x_3 \leq \frac{1}{6} \\ -1 & \text{si } x \in \Sigma, x_3 < -\frac{1}{6} \end{cases} \quad (5.9)$$

Notése que este nuevo objetivo es constante con valor 2 en la mayor parte del hemisferio norte ($x_3 > 1/6$) y es constante con valor -1 la mayor parte del hemisferio sur ($x_3 < -1/6$), además estos valores están conectados continuamente por la función trigonométrica en (5.9) definida alrededor de la franja ecuatorial $-1/6 \leq x_3 \leq 1/6$. Bajo las mismas condiciones de los experimentos anteriores, es posible pensar que es más difícil controlar el sistema para alcanzar este objetivo más exigente. En particular para $R = 1$, $y_0 = 0$, $\Delta t = 1/100$, $h = 0.0051$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $k = 10^{10}$, $tol = 10^{-5}$, $\mu = 1/2$ y $T = 2$, mostramos en la tabla 5.32 algunos resultados numéricos para diferentes conjuntos de soporte $\omega = \omega_N$ en el hemisferio norte, definido por

$$\omega_N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma, \delta_N R < x_3 < R\}, \quad (5.10)$$

con $0 \leq \delta_N < 1$, es decir, ω_N es un casquete esférico en la zona norte.

Tabla 5.32: Resultados numéricos para el objetivo continuo no-suave (5.9) y diferentes casquetes esféricos en la zona norte.

δ_N	$ \omega_N / \Sigma $	No. ITERS	Norm u^c	Rel.error
0	0.5	141	111.8703	0.1559
0.75	0.125	300	142.3226	0.2384
0.875	0.0625	250	243.3815	0.2053
0.95	0.025	315	327.3470	0.2842

Obviamente, es más difícil llevar el sistema cerca de la función objetivo (5.9) cuando el conjunto de soporte es un casquete esférico pequeño en la zona norte ω_N , no sólo porque el polo sur está más lejos, si no también porque estos conjuntos de soporte no incluyen la franja ecuatorial donde el objetivo tiene su cambio abrupto de 2 a -1 . La figura 5.18 muestra la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$ para el mejor caso (el menos peor), es decir, cuando $\delta_N = 0$. Esto demuestra que la parte de la función objetivo que es más difícil de alcanzar es la que se encuentra alrededor de la franja ecuatorial donde dicha función cambia más rápidamente y es no-suave.

Desde luego, si elegimos un conjunto de soporte del control que incluya la región (o parte de la región) donde el objetivo tiene su cambio abrupto de 2 a -1 , esperamos obtener mejores resultados. Para este propósito, consideramos los conjuntos de soporte de la forma $\omega_\delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma, -\delta R < x_3 < \delta R\}$. La tabla 5.33 corrobora que el error obtenido es mucho menor que el obtenido para los subdominios de la forma ω_N .

En la figura 5.19 observamos la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$ para el caso $\omega = \omega_\delta$ y $\delta = 0.3$; en esta figura se puede observar que el mayor error se concentra en los polos, como era de esperarse.

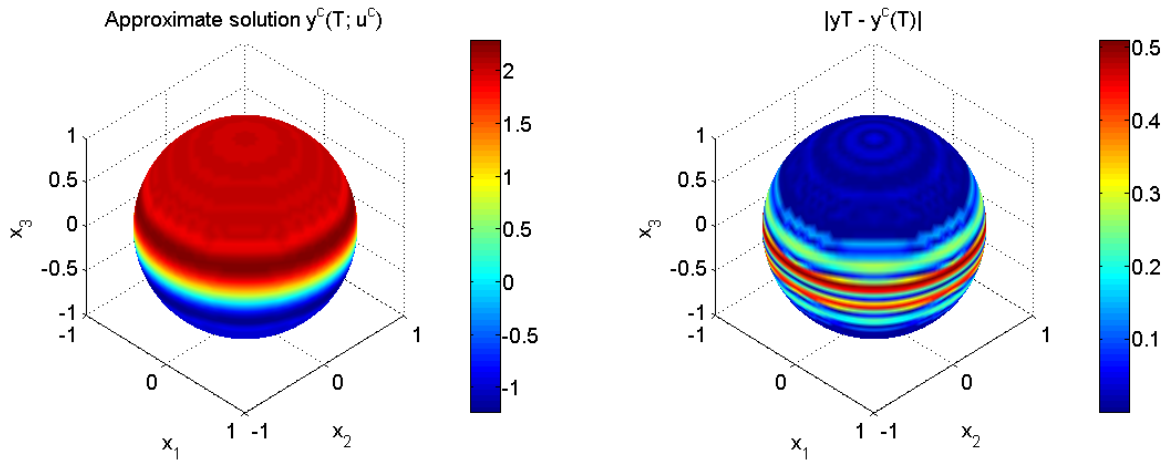


Figura 5.18: Caso ω_N con $\delta_N = 0$ y objetivo (5.9). Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: $|y_T - y^c(T)|$.

Tabla 5.33: Resultados numéricos para diferentes subconjuntos $\omega = \omega_\delta$, y el objetivo (5.9).

δ	$ \omega / \Sigma $	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
0.5	0.5	13	22.4510	0.0209
0.3	0.3	15	39.1580	0.0252
0.2	0.2	19	60.7837	0.0337
0.02	0.05	35	227.4739	0.0863

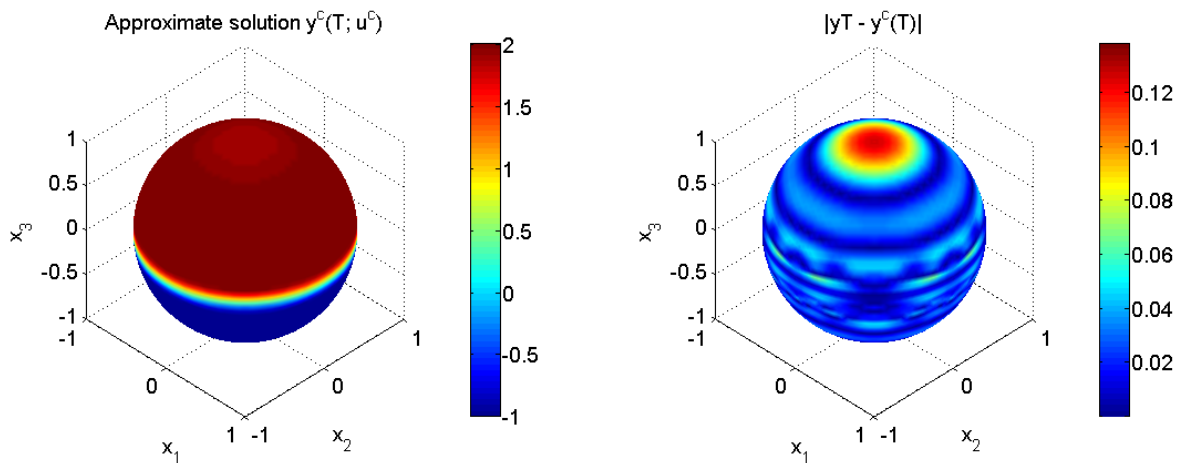


Figura 5.19: Caso $\omega = \omega_\delta$ con $\delta = 0.3$, y objetivo (5.9). Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: $|y_T - y^c(T)|$.

Experimentos con una función objetivo discontinua

Ahora, consideramos un objetivo discontinuo definido por la siguiente función:

$$y_T(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \Sigma, x_3 \geq 0 \\ -1 & \text{si } x \in \Sigma, x_3 < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Como en los anteriores ejemplos, escogemos $R = 1$, $y_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $\Delta t = 1/100$, $h = 0,0051$, $\mu = 1/2$, $T = 2$ con el fin de investigar la influencia del parámetro de penalización k con un criterio de paro $tol = 10^{-5}$ para las iteraciones del algoritmo de gradiente conjugado. La tabla 5.34 muestra los resultados numéricos para dos subdominios ω_N de la forma (5.10). Notemos

Tabla 5.34: Resultados numéricos para diferentes valores de k con una función objetivo discontinua, y el soporte ω_N .

δ_N	$ \omega_N / \Sigma $	k	<i>No. Iters</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel.error</i>
0	0.5	10^6	72	148.8302	0.1402
		10^8	80	117.8068	0.1274
		10^{10}	81	172.6996	0.1270
		10^{15}	81	172.7599	0.1271
0.75	0.125	10^8	140	99.2490	0.3193
		10^{10}	150	101.7040	0.3180
		10^{15}	150	101.8320	0.3180

que, para valores de $k > 10^{10}$ los resultados numéricos son prácticamente los mismos en ambos casos. Mirando el error relativo, observamos que los resultados numéricos son menos precisos que los obtenidos con las funciones objetivo continuas no-suaves.

La figura 5.20 muestra la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$ para el caso $\delta_N = 0$. En esta figura se observa que los métodos numéricos encuentran una solución razonable para este caso, y el error se concentra mayormente alrededor de la región de la discontinuidad del objetivo.

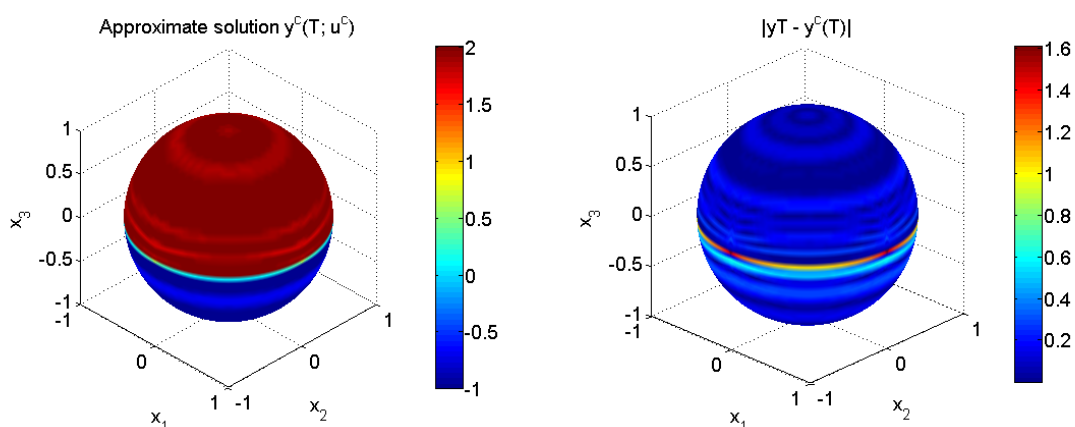


Figura 5.20: Gráfica de $y^c(T)$ (izquierda) y $|y_T - y^c(T)|$ (derecha) para el caso $\delta_N = 0$ y el objetivo discontinuo.

Estos experimentos se repitieron pero con una malla dos veces más fina y un paso de tiempo más pequeño, es decir, $\Delta t = 1/200$, $h = 0.0017$, y los demás parámetros con el mismo valor. Los resultados no mejoraron significativamente como se muestra en la tabla 5.35.

Tabla 5.35: Resultados numéricos para diferentes valores de k con una función objetivo discontinua, soporte ω_N ; $\Delta t = 1/200$ y $h = 0.0017$.

δ_N	$ \omega_N / \Sigma $	k	<i>No. ITERS</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel.error</i>
0	0.5	10^6	90	195.8025	0.1451
		10^8	90	198.9890	0.1379
		10^{10}	90	199.0279	0.1378
		10^{15}	90	199.0131	0.1378
0.75	0.125	10^8	200	207.7558	0.2881
		10^{10}	216	218.4220	0.2880
		10^{15}	216	218.4223	0.2880

También observamos que no es posible obtener mejores resultados con tiempos de control T más grandes cuando usamos capas esféricas ω_N como conjuntos de soporte del control, como se muestra en la tabla 5.36. Aunque, claro esta, llevar el sistema a un estado discontinuo con estados intermediarios continuos es una tarea complicada.

Tabla 5.36: Resultados numéricos para diferentes valores de T con un objetivo discontinuo.

T	δ_N	$ \omega_N / \Sigma $	<i>No. ITERS</i>	<i>Norm u^c</i>	<i>Rel.error</i>
4	0	0.5	200	270.5414	0.1643
	0.75	0.125	210	379.8139	0.2712
	0.875	0.0625	284	284.8326	0.3056
8	0	0.5	80	175.3507	0.2065
	0.75	0.125	225	136.3576	0.2738
	0.875	0.0625	300	257.8070	0.3125

Las figuras 5.21 y 5.22 muestran la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$ para los casos cuando $T = 4$ y $T = 8$, respectivamente. Para ambos casos el conjunto del soporte del control es el pequeño casquete esférico ω_N con $\delta_N = 0.75$.

Por supuesto, si consideramos conjuntos de soporte que incluyan la región donde la función objetivo (5.11) tiene la discontinuidad, esperaríamos obtener mejores resultados como en la tabla 5.33 para el objetivo (5.9). La tabla 5.37 muestra los resultados para diferentes subdominios de soporte ω_δ , y como esperábamos, somos capaces de obtener mejores resultados que los mostrados en las tablas 5.34–5.36.

La figura 5.23 muestra la solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$, para el subconjunto de soporte ω_δ con $\delta = 0,3$. Podemos observar que el error más grande se concentra en la parte donde se localiza la discontinuidad del objetivo.

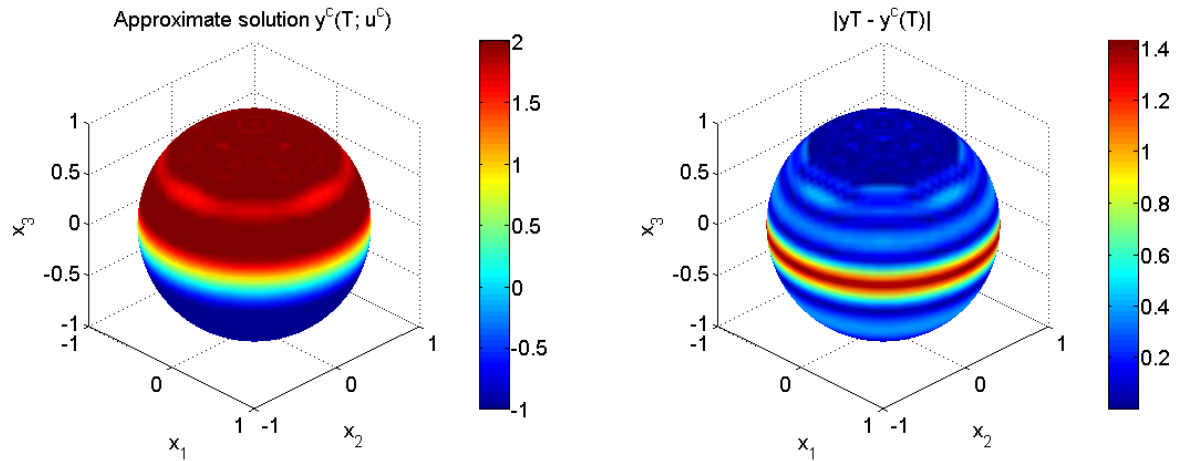


Figura 5.21: Gráfica de $y^c(T)$ (izquierda) y $|y_T - y^c(T)|$ (derecha). Caso para $T = 4$ y soporte ω_N con $\delta_N = 0.75$.

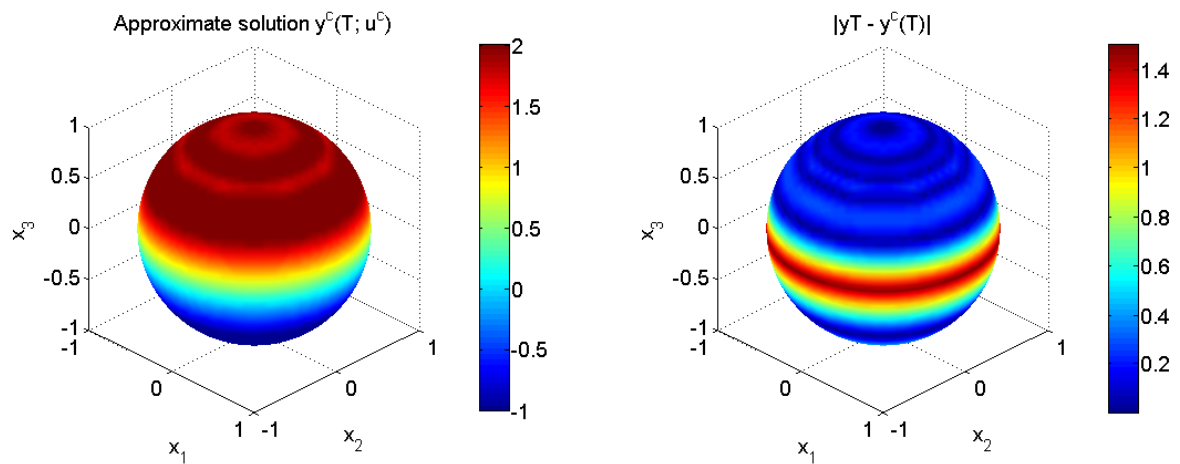


Figura 5.22: Gráfica de $y^c(T)$ (izquierda) y $|y_T - y^c(T)|$ (error). Caso para $T = 8$ y soporte ω_N con $\delta_N = 0.75$.

Tabla 5.37: Resultados numéricos para diferentes conjuntos de soporte $\omega = \omega_\delta$, y el objetivo discontinuo (5.11).

δ	$ \omega / \Sigma $	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
0.5	0.5	41	110.5757	0.0360
0.3	0.3	60	135.2841	0.0280
0.2	0.2	41	145.5588	0.0334
0.02	0.05	87	274.0528	0.1284

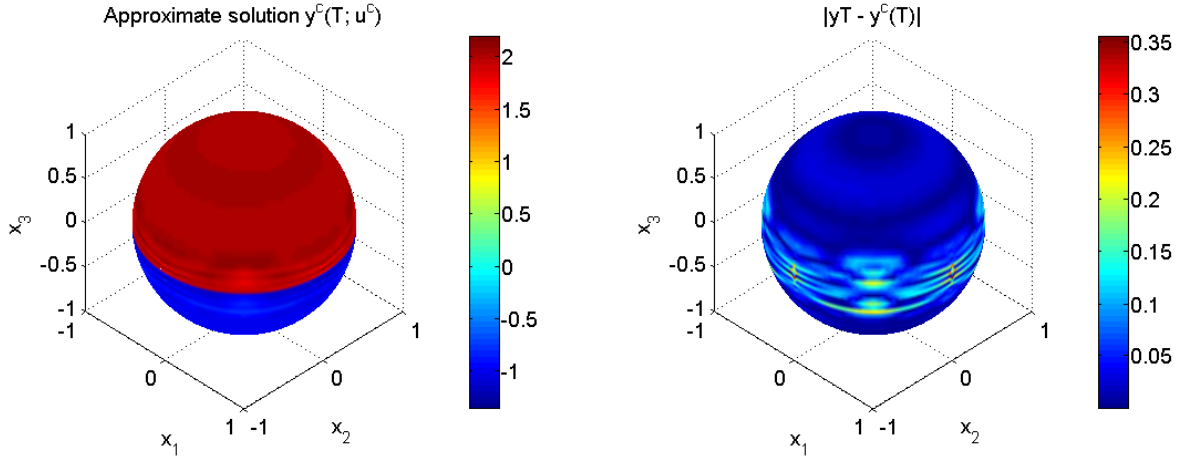


Figura 5.23: Gráfica de $y^c(T)$ (izquierda) y $|y_T - y^c(T)|$ (derecha). Caso: conjunto de soporte ω_δ con $\delta = 0.3$ y función objetivo (5.11).

Podemos concluir que resulta muy difícil controlar el sistema en la esfera cuando la función objetivo es discontinua y el conjunto de soporte del control no contiene la región de discontinuidad. Sin embargo, si el conjunto de soporte incluye la región de discontinuidad, es posible controlar el sistema de una forma muy aceptable, asumiendo que escogemos μ y T de manera correcta, es decir, si la longitud característica $\sqrt{\mu T}$ es comparable a la distancia de ω hasta el punto más lejano localizado en la superficie de la esfera.

Curvas como conjuntos de soporte de la función del control

En los ejemplos anteriores hemos considerado funciones de control cuyo soporte es dado por subconjuntos abiertos ω de la esfera Σ . Una alternativa a este tipo de control (distribuido) es el uso de funciones de control cuyo soporte es dado por curvas o segmentos de curva sobre la superficie de la esfera. Realizamos experimentos con la función objetivo no-suave (5.8). En los siguientes experimentos elegimos una vez más $R = 1$, $y_0 = 0$, $\Delta t = 1/100$, $h = 0.0051$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $k = 10^8$ y $tol = 10^{-5}$. A continuación, estudiamos la influencia de μ en la controlabilidad, con $T = 2$ fijo, para la curva γ definida por $x_3 = 0$, es decir,

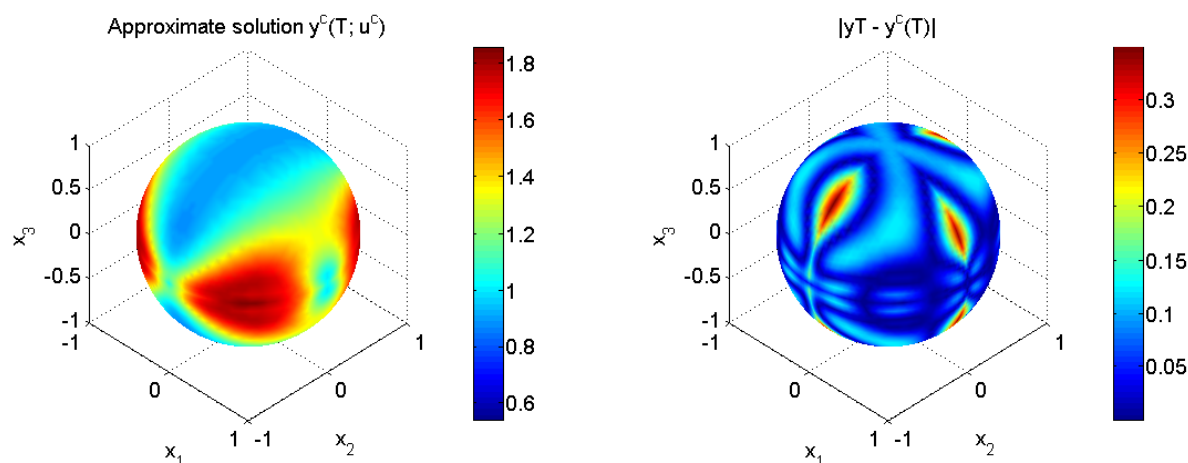
$$\gamma = \{ \{x_1, x_2, 0\} \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2 \}. \quad (5.12)$$

Los resultados numéricos se resumen en la tabla 5.38, la cual muestra que el sistema puede ser controlado de forma aceptable para todos los valores de μ considerados en este experimento, y el mejor resultado se obtiene cuando $\mu T = 1$, es decir, $\mu = 1/2$.

Las gráficas de la solución calculada $y^c(T)$, y el error absoluto $|y_T - y^c(T)|$ para el caso $\mu = 1/2$ se muestran en la figura 5.24. Como era de esperar, se puede observar que la precisión de la solución es mejor cerca del conjunto de soporte γ (el ecuador).

Tabla 5.38: Resultados numéricos para la curva (5.12) con la función objetivo no-suave (5.8).

μ	No. Iters	Norm u^c	Rel.error
1	13	228.8157	0.0855
1/2	21	225.0500	0.0715
1/4	16	197.3219	0.0761
1/8	50	433.7918	0.0815
1/10	54	649.3923	0.0868

Figura 5.24: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: $|y_T - y^c(T)|$. Caso: $\mu = 1/2$ y el soporte γ .

Luego, estudiamos la influencia de R (el tamaño de la esfera) en la controlabilidad. Usamos los mismos parámetros de discretización que en los experimentos anteriores y consideramos el caso particular en el que $\mu = 1/2$ y $T = 2$. La curva de soporte del control es del mismo tipo, es decir, la línea ecuatorial definida por (5.12).

Los resultados numéricos, mostrados en la Tabla 5.39, indican que, con los parámetros dados, aún podemos obtener soluciones numéricas aceptables para $R = 1/2$ y $R = 2$, los cuales son cercanos a $R = 1$. Sin embargo, para valores de R fuera de este rango, las soluciones se deterioran.

Tabla 5.39: Resultados numéricos para diferentes radios R . Caso: $\mu = 1/2$ y $T = 2$

R	No.Iters	Norm u^c	Rel.error
1/4	6	158.5534	0.1292
1/2	18	275.3508	0.0797
1	21	225.0500	0.0715
2	50	613.4716	0.0815
4	150	2.3866×10^3	0.3581

Por ejemplo, cuando R aumenta el error relativo crece debido a que la difusión juega un papel más débil en superficies más grandes durante el mismo tiempo finito $T = 2$. Para mejorar el control para valores de R mayores (superficies grandes), podría ser necesario considerar valores de T más grandes, como se muestra en la tabla 5.40, donde mostramos resultados numéricos para diferentes tiempos, con $R = 4$ fijo.

Tabla 5.40: Resultados numéricos, para diferentes valores de T y radio $R = 4$.

T	No.Iters	Norm u^c	Rel.error
2	150	2.3866×10^3	0.3581
4	56	1.2446×10^3	0.1928
6	59	699.4525	0.1111
12	33	217.6379	0.0666

La solución calculada $y^c(T)$, y el error $|y_T - y^c(T)|$ para el caso $R = 4$ y $T = 12$ se muestran en la figura 5.25. De nuevo, el sistema puede ser controlado de mejor manera cerca del conjunto de soporte γ .

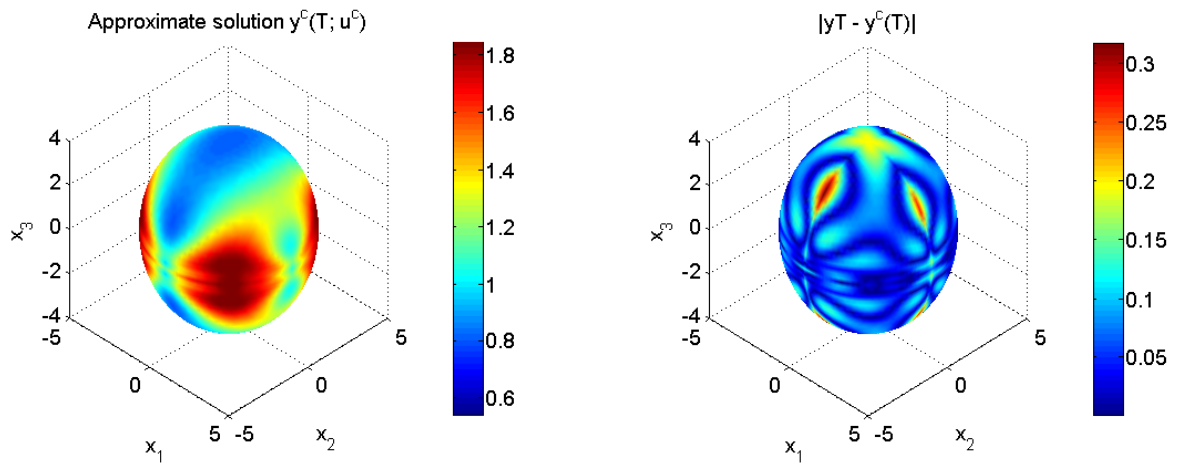


Figura 5.25: Izquierda: Gráfica de $y^c(T)$. Derecha: $|y_T - y^c(T)|$. Caso: $\mu = 1/2$ y el conjunto de soporte γ .

Por otro lado, cuando R disminuye, la difusión juega un papel cada vez mayor (con el mismo tiempo $T = 2$) y resulta más difícil controlar el sistema, ya que ahora el control tiene que ‘pelear’ contra el ‘exceso de difusión’ con el fin de llevar el sistema al objetivo. Así que, puede ser necesario considerar tiempos cortos de control en estos casos. La tabla 5.41 corrobora que para superficies ‘pequeñas’ un tiempo de control menor T ayuda a mejorar la controlabilidad.

Tabla 5.41: Resultados numéricos para diferentes radios $R < 1$ y tiempos $T \leq 1$. Caso: $\mu = 1/2$

R	T	No.Iters	Norm u^c	Rel.error
	1	25	361.5006	0.0795
1/2	1/2	17	361.2619	0.0806
	1/4	38	784.2133	0.0711
	1	16	447.4305	0.1091
1/4	1/2	48	1.688×10^3	0.0856
	1/4	38	757.3329	0.0820
	1	7	245.3929	0.1398
1/8	1/2	16	531.7759	0.1358
	1/4	31	1.0173×10^3	0.1107
	1/8	48	1.0498×10^3	0.1094

5.2.2. Problema de controlabilidad nula

En la siguiente colección de experimentos numéricos la función objetivo considerada es dada por $y_T = 0$, es decir, el estado nulo. Recordemos que un sistema tiene la *propiedad de controlabilidad nula* si es posible llevar el sistema de cualquier estado inicial y_0 , al estado nulo en un tiempo finito. Debido a que la tendencia natural de un sistema difusivo no-controlado sobre una superficie Σ es producir soluciones convergentes a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$ (si asumimos que $\int_{\Sigma} y_0 d\Sigma = 0$), es razonable pensar que este sistema tiene la propiedad de controlabilidad.

Resultados con un estado inicial suave

Primero, estudiamos la propiedad de controlabilidad nula (aproximada) con el estado inicial suave y_0 definido en Σ por

$$y_0(x_1, x_2, x_3) = \sin(2x_1x_2) + \cos(2x_2x_3) \quad (5.13)$$

Para estos experimentos tomamos $R = 1$, $\Delta t = 1/100$, $h = 0.0051$ con $nn = 4098$, $k = 10^8$. El algoritmo de gradiente conjugado es inicializado con $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ y lo detenemos con $tol = 5 \times 10^{-7}$. Para $\mu = 1/2$ y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$, la tabla 5.42 muestra los resultados numéricos para diferentes valores de T . En dicha tabla, $y_{nc}^c(T)$ denota la solución numérica del sistema no-controlado (es decir, el estado natural) en el tiempo T , mientras que $y^c(T)$ denota la solución calculada del sistema controlado en el tiempo T .

Como era de esperar, para valores grandes de T la norma- \mathcal{L}^2 de $y^c(T)$ disminuye más que para tiempos menores, ya que este caso la difusión no tiene que ‘luchar’ contra el control sino que lo ayuda a alcanzar el estado nulo. Por lo tanto, es natural pensar que cuando T aumenta $\|y^c(T)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \rightarrow 0$. Sin embargo, no es obvio que la norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c también disminuya cuando T aumenta, este fenómeno puede ser asociado al comportamiento altamente oscilatorio de la función de control cuando T disminuye. Recordemos que más es

Tabla 5.42: Dependencia de la controlabilidad con respecto a T . Caso $|\omega|/|\Sigma| = 0.30$.

Cantidad	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 5$
Numero de iteraciones	33	12	12	10
$Norm\ u^c$	11.0765	4.9177	3.6459	2.6355
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0305	0.0247	0.0142	0.0091
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}/\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0086	0.0070	0.0040	0.0026
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}/\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0098	0.0080	0.0046	0.0029

difícil llevar el sistema al estado nulo con tiempos pequeños. En general, podemos concluir que los resultados numéricos son bastantes satisfactorios, debido a que la reducción de y_0 al estado nulo es más de un 99 % en todos los tiempos, como se muestra en la penúltima fila de la tabla; así mismo, la última fila de esta tabla muestra que la solución controlada y^c es más del 99 % más pequeña (más cerca al estado nulo) que la solución natural y_{nc}^c en cualquier tiempo.

A continuación, investigamos el comportamiento del control nulo para diferentes subdominios de soporte del control, es decir,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \Sigma \\ \omega_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.9 \leq x_3 \leq 0.9\} \\ \omega_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.7 \leq x_3 \leq 0.7\} \\ \omega_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.55 \leq x_3 \leq 0.55\} \\ \omega_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\} \\ \omega_6 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.2 \leq x_3 \leq 0.2\} \\ \omega_7 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.05 \leq x_3 \leq 0.05\}\end{aligned}$$

Elegimos $T = 2$ para estos experimentos. La tabla 5.43 indica que el estado calculado $y^c(T)$ se acerca mejor al estado nulo cuando $|\omega|$ aumenta. Las dos últimas columnas de esta tabla enfatizan que 1) la razón de decrecimiento de $y^c(T)$ con respecto a y_0 , no mejora significati-

Tabla 5.43: Dependencia de la controlabilidad nula aproximada con respecto a $|\omega|$.

ω	$ \omega / \Sigma $	$N. Iter$	$Norm\ u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$
ω_1	1	2	2.1928	1.6726×10^{-6}	4.7226×10^{-7}	5.4073×10^{-7}
ω_2	0.90	10	2.3515	0.0110	0.0031	0.0036
ω_3	0.70	11	2.9446	0.0191	0.0054	0.0062
ω_4	0.55	14	3.4724	0.0232	0.0065	0.0075
ω_5	0.30	12	4.9177	0.0247	0.0070	0.0080
ω_6	0.20	13	5.7826	0.0284	0.0080	0.0092
ω_7	0.05	13	9.3254	0.0236	0.0067	0.0076

vamente cuando el tamaño del conjunto de soporte ω crece, salvo cuando $\omega = \Sigma$; 2) la razón ‘real’ de decrecimiento, es decir, debido sólo a la aplicación del control (se muestra en la última columna), tiene un comportamiento similar. Además, se puede observar que el tamaño del conjunto de soporte para la función de control no juega un papel importante respecto al número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia, excepto cuando $\omega = \Sigma$.

La figura 5.26 muestra la evolución con el tiempo de la norma- \mathcal{L}^2 del control calculado u^c y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$ para el conjunto de soporte ω_7 . Al igual que ocurrió en los experimentos previos, es más difícil controlar el sistema en las zonas más alejadas a la zona de control ω (los polos en este caso). Así mismo, esta figura muestra un comportamiento oscilatorio de la solución $y^c(T)$ que va del ecuador a los polos (es decir, siguiendo los paralelos). Un comportamiento similar fue encontrado en la superficie del toro en un trabajo anterior, ver figuras 5.10 a 5.12 y la referencia [17].

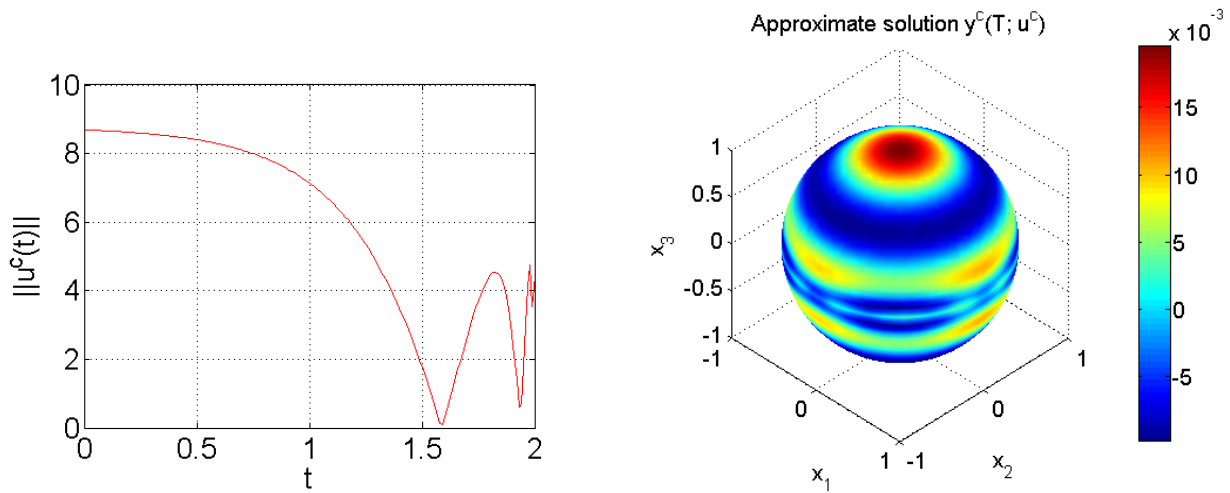


Figura 5.26: Izquierda: Evolución de la norma del control calculado. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Controlabilidad nula con el conjunto de soporte ω_7 .

Experimentos con un estado inicial suave, con $\bar{y}_0 = 0$

Ahora, consideremos el estado inicial y_0 , con $\bar{y}_0 = 0$, definido por

$$y_0(x_1, x_2, x_3) = \sin(2x_1x_2) \quad (5.14)$$

Para estos experimentos consideramos $\mu = 1/2$ y $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma \mid -0.3 \leq x_3 \leq 0.3\}$, y el resto de los parámetros son como en el ejemplo anterior, a excepción del criterio de paro el cual fijamos en $tol = 5 \times 10^{-6}$ (únicamente para este conjunto de experimentos). La tabla 5.44 muestra los resultados numéricos obtenidos con varios valores de T . En este caso obtenemos mejores resultados de controlabilidad que los mostrados en la tabla 5.42 para estado inicial

suave (5.13). Así mismo, podemos observar que la norma del control es menor que en los otros casos, aunque son necesarias más iteraciones de gradiente conjugado para lograr convergencia.

Tabla 5.44: Dependencia de la controlabilidad nula con respecto a T . Caso $|\omega|/|\Sigma| = 0.30$ con estado inicial (5.14).

Cantidad	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 5$
Número de iteraciones	23	26	37	40
$Norm\ u^c$	0.5623	0.0288	0.0015	4.0466×10^{-6}
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0024	1.2170×10^{-4}	5.4987×10^{-6}	1.4528×10^{-8}
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)} / \ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0014	7.3321×10^{-5}	3.3429×10^{-6}	8.7526×10^{-9}
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)} / \ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0280	0.0277	0.0242	0.0240

Experimentos con un estado inicial no-suave

Con el propósito de investigar más a fondo la influencia del estado inicial y_0 en los resultados numéricos, hemos realizado experimentos numéricos con el estado inicial no-suave

$$y_0(x_1, x_2, x_3) = |\sin(2x_1x_2)| + |\cos(2x_2x_3)|,$$

La tabla 5.45, la cual es análoga a la tabla 5.43, resume los resultados numéricos obtenidos con este nuevo estado inicial no-suave.

Tabla 5.45: Dependencia con respecto a $|\omega|$ de la controlabilidad nula con un estado inicial no-suave.

ω	$ \omega / \Sigma $	$N. Iter$	$Norm\ u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$
ω_1	1	1	3.1784	0.0019	4.0744×10^{-4}	4.1931×10^{-4}
ω_2	0.90	9	3.4069	0.0157	0.0034	0.0035
ω_3	0.70	11	4.2635	0.0276	0.0060	0.0062
ω_4	0.55	12	5.0173	0.0350	0.0076	0.0078
ω_5	0.30	12	7.1198	0.0363	0.0079	0.0081
ω_6	0.20	13	8.3610	0.0408	0.0091	0.0094
ω_7	0.05	9	13.3573	0.0486	0.0105	0.0108

Comparando las tablas 5.43 y 5.45 notamos que el estado inicial no-suave conduce a resultados menos precisos, pero la aparente diferencia significativa no se deriva de la falta (relativa) de suavidad del segundo estado inicial, sino del hecho de que este verifica $\bar{y}_0 = \int_{\Sigma} y_0 d\Sigma \neq 0$, lo que añade cierta dificultad al proceso de control.

Experimentos con un estado inicial discontinuo

Ahora, consideremos un estado inicial discontinuo definido por

$$y_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Sigma, x_3 \geq 0 \\ 0 & \text{if } x \in \Sigma, x_3 < 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Tomamos, al igual que antes, $R = 1$, $\Delta t = 1/100$, $h = 0.0051$ con $nn = 4098$ y $k = 10^{10}$. Las iteraciones del algoritmo de gradiente conjugado se inicializan con $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ y se detienen con el criterio $tol = 5 \times 10^{-7}$. Para esta primera serie de experimentos consideramos un conjunto de soporte simétrico de la forma $\omega = \omega_N \cup \omega_S$ (con ω_N definido por (5.10) y ω_S definido por

$$\omega_S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma, -R < x_3 < \delta_S R\}, \quad (5.16)$$

y $0 \leq \delta_S < 1$) con $\delta_N = \delta_S = 0.75$. La tabla 5.46 muestra los resultados numéricos con $\mu = 1/2$ y diferentes valores de T . Una vez más, para valores de T grandes la norma- \mathcal{L}^2 de $y^c(T)$ y de u^c disminuye más debido a las mismas razones ya explicadas anteriormente para el primer ejemplo con un estado inicial suave (véase Table 5.42).

Tabla 5.46: Dependencia de la controlabilidad nula con respecto a T . Caso con $\omega = \omega_N \cup \omega_S$, $\delta_N = \delta_S = 0.75$ y $\mu = 1/2$.

Cantidad	$T = 2$	$T = 3$	$T = 5$
Número de iteraciones	16	13	10
$Norm\ u^c$	3.1317	2.3123	1.6801
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0124	0.0105	0.0080
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}/\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0049	0.0042	0.0032
$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}/\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	0.0068	0.0058	0.0044

A continuación, estudiamos la influencia de los subdominios del soporte simétricos de la forma $\omega = \omega_N \cup \omega_S$ para $\mu = 1/2$ y el valor particular $T = 2$. Los resultados numéricos se muestran en la tabla 5.47, y vemos que estos son muy satisfactorios.

Tabla 5.47: Dependencia respecto a $\omega = \omega_N \cup \omega_S$ con $\delta_N = \delta_S$ de la controlabilidad nula aproximada con una estado inicial discontinuo.

$\delta_N = \delta_S$	$ \omega / \Sigma $	$N. Iter$	$Norm\ u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$
0.5	0.5	12	2.0476	0.0113	0.0045	0.0062
0.75	0.25	16	3.1317	0.0124	0.0049	0.0068
0.875	0.125	23	4.5158	0.0109	0.0043	0.0060
0.95	0.05	26	7.1112	0.0115	0.0046	0.0063
0.975	0.025	29	10.3870	0.0117	0.0052	0.0069

Dado que los resultados anteriores son bastante precisos, hemos decidido experimentar con subdominios de soporte para el control no-simétricos (casquetes esféricos) de la forma ω_N . La tabla 5.48 muestra que el comportamiento cualitativo de las soluciones es similar al de los experimentos anteriores, pero en esta ocasión las soluciones son menos precisas con los mismos parámetros $\mu = 1/2$ y $T = 2$. Por lo tanto, con este tipo de soportes de control se puede considerar un valor más grande de T para producir resultados más precisos.

Tabla 5.48: Dependencia con respecto a $\omega = \omega_N$ de la controlabilidad nula aproximada con el estado inicial discontinuo.

δ_N	$ \omega / \Sigma $	$N.Iter$	$Norm\ u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$
0	0.5	21	2.6653	0.0156	0.0062	0.0086
0.75	0.125	40	8.8132	0.0569	0.0226	0.0313
0.95	0.025	65	21.2081	0.0691	0.0274	0.0380

Curvas como conjunto de soporte para la controlabilidad nula

En los experimentos previos hemos visto que los resultados numéricos para la controlabilidad nula no dependen sólo del tamaño del conjunto de soporte, si no también de su distancia al punto más lejano en el dominio de la superficie Σ para los valores dados de μ y T . Esto sugiere que todavía podemos obtener buenas propiedades de controlabilidad nula aproximada si el control tiene su soporte en una curva γ de Σ . Los resultados presentados en la tabla 5.49, obtenidos por $\gamma = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, y el estado inicial no-suave $y_0 = |\sin(2x_1x_2)| + |\cos(2x_2x_3)|$ validan esta predicción cuando $\mu = 1/2$ y $T = 2$, y 3. Estos resultados inclusive son mejores que los obtenidos con casquetes esféricas de la forma ω_N como conjuntos de soporte.

Tabla 5.49: Controlabilidad nula aproximada con una curva γ como conjunto de soporte y un estado inicial no-suave.

T	$N.Iter$	$Norm\ u^c$	$\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_0\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$	$\frac{\ y^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}{\ y_{nc}^c(T)\ _{\mathcal{L}^2(\Sigma)}}$
2	16	139.3623	0.0677	0.0147	0.0151
3	14	102.4343	0.0477	0.0103	0.0106

La figura 5.27 y la gráfica del objetivo calculado $y^c(T)$. Una vez más, es más difícil controlar el sistema en los polos que cerca de la curva γ .

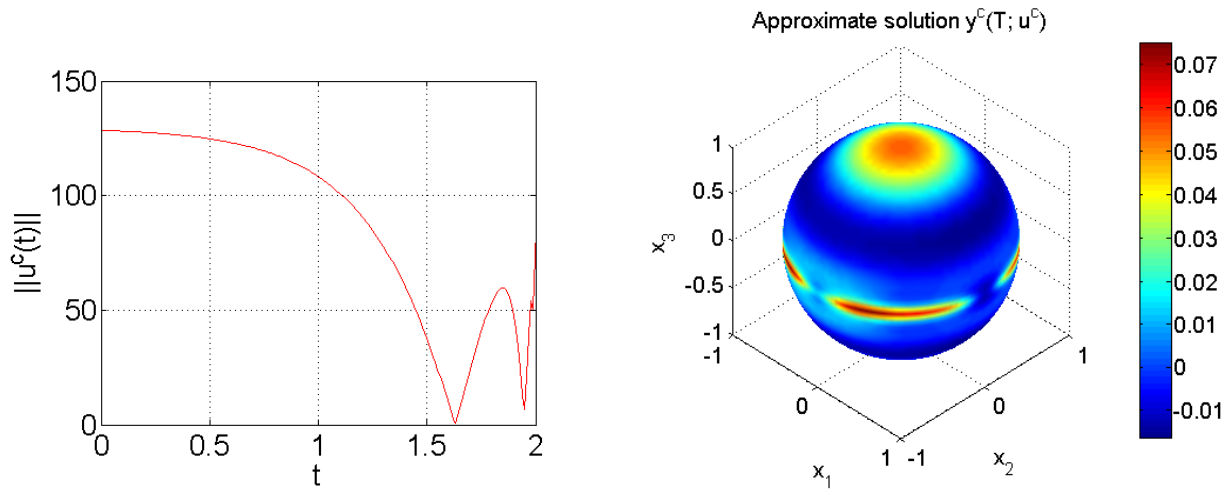


Figura 5.27: Izquierda: Evolución de la norma del control calculado. Derecha: Gráfica de $y^c(T)$. Controlabilidad nula con y_0 no-suave y conjunto de soporte $\omega = \gamma$.

Los problemas de control en ecuaciones diferenciales parciales son de suma importancia en el estudio de diversos fenómenos de interés en varias áreas de conocimiento y en muchas aplicaciones. Esto se debe a que su versatilidad permite integrar diversos campos de las matemáticas, como el análisis, el cálculo variacional, procesos estocásticos, la optimización, entre otros, para resolver problemas en donde se requiere minimizar un criterio, alcanzar un estado observable (control distribuido) o estabilizar un sistema o estado. Por lo tanto, el desarrollo de metodologías que nos permitan obtener buenas soluciones es un aspecto crucial, desde el punto de vista del análisis numérico y el cómputo científico, y las aplicaciones por supuesto. Por lo anterior el control es actualmente un campo de investigación importante en las matemáticas tanto desde el punto de vista teórico como numérico.

Llama la atención que el estudio de los problemas de control sobre superficies tridimensionales, y en particular los procesos de difusión, no han sido abordados por los investigadores expertos en el tema, tanto como se han estudiado en superficies planas e incluso en espacios tridimensionales. En este trabajo, se ha investigado la solución numérica de problemas de controlabilidad aproximada para procesos de difusión, enfocándonos en los que tienen lugar sobre las superficies de un toro y de una esfera. Cabe aclarar, que no encontramos en la literatura especializada trabajos previos en esta dirección.

La metodología propuesta se basa en forzar las restricciones mediante su incorporación como términos penalizados a la función objetivo. Los óptimos del sistema se obtienen mediante la combinación del algoritmo de gradiente conjugado, además del método de los elementos finitos y de diferencias finitas para aproximar los problemas en espacio y tiempo, respectivamente.

Hemos considerado principalmente dos tipos de problemas de control:

- (i) Problemas asociados con funciones objetivo, y_T , diferentes de cero (controlabilidad aproximada).

Tanto para el caso de los problemas de control en el toro como en la esfera, logramos mostrar la convergencia de $y_k(T)$ a y_T cuando $k \rightarrow \infty$. Así mismo, notamos que el parámetro de difusión y el tiempo juegan el papel más importante en la controlabilidad, ya que cuando μ es grande, la tendencia ‘natural’ del sistema es llevar la solución rápidamente a \bar{y}_0 , por lo que la función de control tiene que ‘luchar’ contra esta tendencia (a menos que $y_T = \bar{y}_0$), mientras que para valores pequeños de μ se requieren tiempos mayores para que la acción del control afecte significativamente los puntos de la superficie Σ que se estén lejos de conjunto de soporte ω .

Otro punto que vale la pena resaltar, es que las propiedades de controlabilidad no son independientes de la zona de control, ya que diferentes soportes ω con la misma medida de superficie $|\omega|$ nos conducen a diferentes resultados, tanto en el toro, como en la esfera.

- (ii) Problemas de controlabilidad nula, lo cual con lleva a resultados consistentes con lo que se ha demostrado en [16].

En este caso se obtienen los mejores resultados de controlabilidad, debido a que la tendencia natural de los sistemas de difusión es producir soluciones convergentes a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$, por lo que la difusión no tiene que luchar contra el control, como ocurre generalmente, sino que coopera con él, con el fin de alcanzar el estado nulo.

De lo anterior se desprende que se han alcanzado satisfactoriamente los objetivos planteados para este trabajo de tesis.

Por otro lado, referente al problema de encontrar el control de norma mínima realizando controlabilidad nula, queremos mencionar que es posible formularlo como

$$\Lambda u = f, \tag{6.1}$$

donde

- (i) Λ es un operador lineal compacto auto-adjunto definido positivo (pseudo-diferencial) de $\mathcal{U}(= \mathcal{L}^2(\omega \times (0, T)))$ en sí mismo.
- (ii) f es una función lineal que depende del dato inicial y_0 .

El problema (6.1) es un tipo de problema elíptico, sin embargo, debido a que Λ no es un isomorfismo de \mathcal{U} , resolver numéricamente el problema (6.1) es no trivial (recordándonos las dificultades que uno encuentra cuando resuelve numéricamente ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo). La solución numérica de problemas como (6.1), asociados con la ecuación de calor en dominios acotados de \mathbb{R}^d , se ha abordado con éxito en [5], [6], [25] y [26]. El procedimiento sencillo de penalización (pero muy robusto) que se ha considerado en este trabajo es equivalente a aproximar (6.1) por medio de

$$k^{-1}u + \Lambda u = f, \tag{6.2}$$

el cual es un procedimiento típico de regularización de Tijonov (el operador $k^{-1}I + \Lambda$ es un isomorfismo fuertemente elíptico auto-adjunto de \mathcal{U} , lo cual hace que el problema (6.2) sea bien-planteado, lo cual hace posible encontrar su solución por medio de un algoritmo de gradiente conjugado operando en \mathcal{U}).

Adicionalmente, queremos hacer notar que se han desarrollado resolvedores numéricos para problemas elípticos, sobre las superficies del toro y la esfera, mediante la elaboración de programas propios en el ambiente de MATLAB[®].

Por último, como trabajo futuro se puede considerar lo siguiente::

- Estudiar los problemas de control sobre superficies de los procesos de advección difusión y otros fenómenos físico-químicos modelados por ecuaciones más complicadas.
- Extender los resultados y los métodos presentados en esta tesis al caso tridimensional.
- Aplicar la metodología empleada a problemas reales en otras áreas de conocimiento y en la industria.

Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^d . Una alternativa al problema de control distribuido es el uso de funciones de control con soportes sobre un conjunto “muy pequeño”, en particular por un conjunto de medida cero. De este modo, tenemos que considerar funciones que no estén en $\mathcal{L}^2(\omega)$ (para un t dado). Se pueden considerar diferentes situaciones, sin embargo, es de nuestro interés considerar el caso en donde ω es reducido a un punto, es decir

$$\omega = \{b\}, \quad b \in \Omega. \quad (\text{A.1})$$

Así, si $\delta(x - b)$ denota la medida de Dirac en b , entonces la *función de estado* y es dada por

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v(t) \delta(x - b) \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad y(0) = 0, \quad y = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T). \quad (\text{A.2})$$

En (A.2) el control v depende únicamente de t , por tanto, suponemos que

$$v \in \mathcal{L}^2(0, T). \quad (\text{A.3})$$

(A.2) tiene solución única, ver detalles en [23]. Se sigue de esta referencia que, si $d \leq 3$ entonces

$$y \in \mathcal{L}^2(\Omega \times (0, T)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in \mathcal{L}^2(0, T; H^{-2}(\Omega)), \quad (\text{A.4})$$

así que

$$t \rightarrow y(t; v) \text{ es continua de } [0, T] \text{ en } \mathcal{H}^{-1}(\Omega). \quad (\text{A.5})$$

Cuando el control v genera el espacio $\mathcal{L}^2(0, T)$, $y(T; v)$ genera un subespacio de $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$. Luego, sea ψ la solución de

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{A}^* \psi = 0 \text{ en } \omega \times (0, T), \quad \psi(T) = f, \quad \psi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad (\text{A.6})$$

donde f es dado en $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle y(T; v), f \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(0, T). \quad (\text{A.7})$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el dual de paridad entre $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Obtenemos el siguiente resultado:

Proposición A.1. $y(T; v)$ genera un subconjunto de $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ cuando v describe $\mathcal{L}^2(0, T)$, si y solo si b es tal que

$$\psi(b, t) = 0 \quad (\text{A.8})$$

implica que $\psi = 0$, donde ψ es solución de (A.6).

Observación A.1. Si $d = 1$, la “funcion” $\{x, t\} \rightarrow v(t) \delta(x - b)$ pertenece a

$$\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}(\Omega));$$

esta propiedad implica a su vez que

$$y \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}_0^{-1}(\Omega)).$$

A.1. Concepto de punto estratégico

Supongamos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \quad \mathcal{A} \text{ independiente de } t. \quad (\text{A.9})$$

Tomando ventaja del hecho de que Ω es acotado, introducimos el conjunto $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de *funciones propias* de \mathcal{A} y $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ sus correspondiente *valores propios*. Decimos que b es un *punto estratégico* en Ω si $w_j(b) \neq 0$ para toda $j = 1, \dots, +\infty$.

Luego, (A.8) implica que $\psi = 0$ ya que

$$\psi(x, T) = f(x) = \sum_j f_j w_j(x), \quad f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

y $\psi(b, T) = \sum_j f_j w_j(b) \exp -\lambda_j(T - t) = 0$ sólo si $f_j = 0$, para toda $j = 1, \dots, +\infty$. En este caso, la proposición A.1 se cumple si y sólo si b es un punto estratégico.

A.2. Formulación del problema de Control Puntual

Suponemos desde ahora que b es un punto estratégico. Al igual que en control distribuido, el problema de control puntual consiste en buscar el control v que minimize el siguiente problema:

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_f} \frac{1}{2} \int_0^T v^2 dt, \quad (\text{A.10})$$

con

$$\mathcal{U}_f = \{v | v \in \mathcal{L}^2(0, T), y(T; v) \in y_T + \beta B_{-1}\} \quad (\text{A.11})$$

donde y_T es dada en $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$, y B_1 denota la bola unitaria de $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$. Este problema tiene solución única, y podemos resolverlo usando métodos numéricos. Sin embargo en la práctica resolvemos el problema de control penalizado.

Consideremos el siguiente *problema de controlabilidad puntual aproximada*:

$$\min_{v \in \mathcal{L}^2(0, T)} J(v) = \min_{v \in \mathcal{L}^2(0, T)} \left(\frac{1}{2} \int_0^T v^2 dt + \frac{k}{2} \|y(T) - y_T\|_{-1}^2 \right), \quad (\text{A.12})$$

obtenida por la penalización de la condición final $y(T) = y_T$. Luego, en (A.12) tenemos que,

- (i) El parámetro de *penalización* k es positivo.
- (ii) La función y se obtiene de v vía la solución del problema (A.2).
- (iii) La “función” *objetivo* y_T pertenece a $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$.
- (iv) La norma $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ $\|\cdot\|_{-1}$ es definida, $\forall g \in \mathcal{H}^{-1}(\Omega)$, por

$$\|g\|_{-1} = \|\varphi_g\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \left(= \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi_g|^2 dx \right)^{1/2} \right), \quad (\text{A.13})$$

con φ_g la solución en $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ del problema lineal Dirichlet

$$-\Delta \varphi_g = g \text{ en } \Omega, \quad \varphi_g = 0 \text{ sobre } \Gamma. \quad (\text{A.14})$$

El problema (A.12) tiene solución única u , la cual se caracteriza por la existencia de p perteneciente a $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ tal que $\{u, y, p\}$ satisfacen el siguiente *sistema de optimalidad*:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v\delta(x - b) \text{ en } \omega \times (0, T), \quad y = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad y(0) = 0. \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{A}^*p = 0 & \text{en } \omega \times (0, T), \quad p = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ p(T) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ con } p(T) = k(-\Delta)^{-1}(y_T - y(T)), \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$u(t) = p(b, t). \quad (\text{A.17})$$

Si definimos $f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ por $f = p(T)$; se sigue de (A.15)–(A.17) que f es solución del problema (dual)

$$-k^{-1}\Delta f + \Lambda f = y_T. \quad (\text{A.18})$$

En cuanto a la solución del problema (A.12) tenemos dos opciones: es decir podemos usar la *formulación primal* de (A.12) o la *formulación dual* (A.18). En este trabajo sólo discutiremos la formulación primal, ver [13] para detalles de la formulación dual.

A.3. Solución numérica del problema de Control Puntual, por medio del primal

Deseamos resolver el siguiente problema de controlabilidad puntual aproximado, por medio del problema penalizado $J(v)$

$$\min_{v \in \mathbb{R}^N} J_h^{\Delta t}(v), \quad (\text{A.19})$$

donde, $\Delta t = T/N$, $v = \{v\}_{n=1}^N$, y

$$J_h^{\Delta t}(v) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |v^n|^2 + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Phi_h^N|^2 dx. \quad (\text{A.20})$$

El problema (A.19) es bien planteado, su solución es única, denotada por $\mathbf{u}_h^{\Delta t}$, y se caracteriza por

$$\nabla J_h^{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{\Delta t}) = 0. \quad (\text{A.21})$$

El sistema de optimalidad para este problema esta definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla J_h^{\Delta t}(\mathbf{u}_h^{\Delta t}) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y = v(t)\delta(x-b) \text{ en } \omega \times (0, T), \quad y = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad y(0) = y_0. \\ -\Delta \Phi = y(T) - y_T \text{ en } \Omega, \quad y = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{A}^*p = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T), \quad p = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad p(T) = k\Phi(T). \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

A.3.1. Gradiente Conjugado, solución del problema (A.22)

El problema de control (A.19) es equivalente a resolver el sistema lineal (A.21), el cual esta asociado a una matriz simétrica definida positiva de $N \times N$, por lo cual podemos resolver el sistema de optimalidad por medio del siguiente algoritmo de gradiente conjugado

Sea $v_0 = \{v_0^n\}_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$

Paso 1. Inicialización:

(i) Dado $v_0 \in \mathbb{R}^n$, obtener:

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} + \mathcal{A}y_0 = v_0 \text{ en } \omega \times (0, T), \quad y_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad y_0(0) = 0.$$

de donde obtenemos $y_0(T)$.

(ii) Resolver

$$-\Delta \Phi_0 = y_0(T) - y_T \quad \text{en } \Omega, \quad \Phi_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma.$$

(iii) Obtener

$$-\frac{\partial p_0}{\partial t} + \mathcal{A}^* p_0 = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T), \quad p_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma; \quad p_0(T) = k\Phi_0(T).$$

(iv) $\mathbf{g}_0 = \{v_0^n - p_0^n(b)\}_{n=1}^N$,

(v) $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$.

Paso 2. Descenso: Suponiendo conocidos v_m, g_m, d_m , calcular $v_{m+1}, g_{m+1}, d_{m+1}$, de la siguiente manera:

(i) Resolver

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} + \mathcal{A}y_m = \mathbf{d}_m(\mathbf{b}) \text{ en } \omega \times (0, T), \quad y_m = 0 \text{ sobre } \Sigma \quad y_m(0) = 0.$$

(ii) Resolver

$$-\Delta \Phi_m = -y_m(T) \quad \text{en } \Omega, \quad \Phi_m = 0 \text{ sobre } \Sigma.$$

(iii) Obtener

$$-\frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathcal{A}^* p_m = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T), \quad p_m = 0 \text{ sobre } \Sigma; \quad p_m(T) = k\Phi_m(T).$$

(iv) Calcular

$$\bar{\mathbf{g}}_m = \{d_m^n - p_m^n(b)\}_{n=1}^N,$$

(v) Calcular

$$\alpha_m = \frac{\|\bar{\mathbf{g}}_m\|_{\Delta t}^2}{\langle \bar{\mathbf{g}}_m, \mathbf{d}_m \rangle_{\Delta t}}$$

- (vi) $v_{\mathbf{m}+1} = v_{\mathbf{m}} + \alpha_m \mathbf{d}_{\mathbf{m}}$,
- (vii) $\mathbf{g}_{\mathbf{m}+1} = \mathbf{g}_{\mathbf{m}} + \alpha_m \bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{m}}$
- (viii) *Prueba de convergencia:* Si

$$\|\mathbf{g}_{\mathbf{m}+1}\|_{\Delta t} \leq \epsilon \|\mathbf{g}_0\|_{\Delta t}$$

Tomar $v = v_{\mathbf{m}+1}$ y parar. En caso contrario, continuar:

Paso 3. Nueva dirección conjugada: Calcular

- (i) $\beta_m = \frac{\|\mathbf{g}_{\mathbf{m}+1}\|_{\Delta t}^2}{\|\mathbf{g}_{\mathbf{m}}\|_{\Delta t}^2}$
- (ii) $\mathbf{d}_{\mathbf{m}+1} = -\mathbf{g}_{\mathbf{m}+1} + \beta_m \mathbf{d}_{\mathbf{m}}$,

Hacer $m = m + 1$ y volver a 2.

La solución v encontrada por medio de este algoritmo y la correspondiente y asociada al problema (A.2), minimizan el funcional (A.20).

Observación A.2. Si suponemos que $d = 1$ (esto es, $\Omega \subset \mathbb{R}$); se sigue entonces de la Observación A.1 que la solución del problema parabólico (A.2) satisface

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{L}^2(\Omega)),$$

lo cual implica que, en (A.12) tiene sentido reemplazar $\|y(T) - y_T\|_{-1}$ por $\|y(T) - y_T\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$, lo cual es una simplificación significativa.

- [1] A. Bonito and R. Glowinski, *On the Nodal Set of the Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator for Bounded Surface in \mathbb{R}^3 ; A Computational Approach*. Communications on Pure and Applied Analysis, **13**(5), 2014, 2115–2126.
- [2] C. Carthel, R. Glowinski and J. L. Lions, *On exact and approximate boundary controllability for the heat equation: a numerical approach*. J. Optim. Theory Appl., **82**(3), 1994, 429–484.
- [3] P. G. Ciarlet, *Plates an Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis*, Masson, Paris, 1990.
- [4] Diaz, J. I. *Sobre la Controlabilidad Aproximada de Problemas no Lineales Disipativos*, Jornadas Hispano-Francesas Sobre Control de Sistemas Distribuidos, Universidad de Málaga, 1991, 41–48.
- [5] E. Fernández–Cara and A. Münch, *Strong convergent approximations of null controls for the 1D heat equation*. SEMA Journal, **61**(1), 2013, 49–78.
- [6] E. Fernández–Cara and A. Münch, *Numerical null controllability of the 1D heat equation: Duality and Carleman weights*. J. Optimization, Theory and Applications, **163**(01), 2014, 253–285.
- [7] A. Friedman, *Modellin Catalytic Converter Performance.*, En Mathematics in Industrial Problems, Springer-Verlag, 1998, 70–77.
- [8] C. M. Friend, *Catalysis and Surfaces*, Scientific American, 1993, 74–79.
- [9] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer, New York, 1984 (2nd printing: 2008).
- [10] R. Glowinski, *Ensuring well-posedness by analogy: Stokes problem and boundary control for the wave equation*. J. Comp. Phys., **103**, 1992, 189–221.

- [11] R. Glowinski, *Finite element methods for incompressible viscous flow*. Handbook of Numerical Analysis, **Vol. 9**, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 2003, 3-1176.
- [12] R. Glowinski, C. H. Li, and J. L. Lions, *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet controls: description of the numerical methods*. Japan J. Appl. Math., 1990.
- [13] R. Glowinski, J. L. Lions and J. W. He, *Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems: A Numerical Approach*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.
- [14] R. Glowinski and D. C. Sorensen, *Computing the Eigenvalues of the Laplace-Beltrami Operator on the Surface of a Torus: A Numerical Approach*. In Partial Differential Equations: Modelling and Numerical Simulation, Springer Netherlands, 2008, 225–232.
- [15] J.P. Kernevez, *The sentinel method and its application to environmental pollution problems*. CRC Press, 1997.
- [16] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*. Commun. in Partial Differential Equations, **20**(1–2), 1995, 335–356.
- [17] Assaely León, R. Glowinski and L. Héctor Juárez, *On the controllability of diffusion processes on the surface of a torus: A computational approach*. Pacific Journal of Optimization, **11**(4), 2015, 763–790.
- [18] Assaely León, R. Glowinski and L. Héctor Juárez, *On the controllability of diffusion processes on a sphere: A numerical study*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/cocv/2016045>
- [19] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [20] J. L. Lions, *Exact Controllability, Stabilization and Perturbation for Distributed Systems*, SIAM, Rev.,30, 1988, 1–68.
- [21] J. L. Lions Householder, *El Planeta Tierra*, Instituto de España, Espasa Calpe, S.A., Madrid, 1990.
- [22] J. L. Lions, *Very rapid oscillations and control*. In HERMIS '96, Proceedings of the Third Hellenic-European Conference on Mathematics and Informatics, E.A. Lipitakis, ed., LEA Publisher, Athens, 1997, 1-10.
- [23] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, Vol. I, Dunod, Paris, 1968.
- [24] Mizohata, S. *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A **31**, 1958, 219-239.

- [25] A. Münch and P. Pedregal, *Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach*. European Journal of Applied Mathematics, **25**(03), 2014, 277–306.
- [26] A. Münch and E. Zuazua, *Numerical approximation of null controls for the heat equation: Ill-posedness and remedies*. Inverse Problems, **26**(8), 2010, 085018.
- [27] Fredi Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [28] N.G. Zamani, J.M. Chunang, *Optimal Control of current in a cathodic protection system: A numerical investigation*. Opt. Cont. Appl. Meth., **Vol. 8**, 1987, 339-350.
- [29] M. I. Zelikin and V. F. Borisov, *Theory of Chattering Control: with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*. Springer, Boston, MA, 1994.