

ASPECTOS CUALITATIVOS DE LAS
ECUACIONES DE LORENZ
Y SISTEMA SINCRONIZADO
POR
ED SCOTT WILSON GARCÍA
Tesis de Maestría

ASPECTOS CUALITATIVOS DE LAS ECUACIONES DE LORENZ
Y SISTEMA SINCRONIZADO

TESIS QUE PRESENTA

ED SCOTT WILSON GARCÍA

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

ASESOR

DR. ERNESTO PÉREZ CHAVELA

JUNIO 1996

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Agradecimientos

a Ce Acatl Topiltzin Quetzalcóatl, por darle movimiento al universo.

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

LAS ECUACIONES DEL SISTEMA DE LORENZ

Deducción de las ecuaciones _____	I-1
Antecedentes _____	I-1
Convección de Rayleigh-Bérnard _____	I-2
El sistema de ecuaciones de Lorenz _____	I-8
Características de las ecuaciones de Lorenz _____	I-10
Análisis del campo vectorial _____	I-10
Puntos fijos de las ecuaciones de Lorenz _____	I-12
El origen _____	I-13
Puntos de equilibrio C_1 y C_2 _____	I-15

CAPÍTULO II

MODELO GEOMÉTRICO

La Herradura de Smale y Dinámica Simbólica _____	II-1
Introducción _____	II-1
Construcción de la herradura de Smale _____	II-4
Conceptos de dinámica simbólica _____	II-7
Órbitas Homoclínicas _____	II-15
Introducción _____	II-15
La órbita homoclínica en el sistema de Lorenz _____	II-17

CAPÍTULO III

ESTUDIOS SOBRE EL SISTEMA DE LORENZ

Comportamiento estudiado de las ecuaciones de Lorenz	III-1
Bifurcaciones	III-1
Caos intermitente	III-7
Periodicidad ruidosa	III-9
Localización de órbitas periódicas	III-11
Método numérico para la localización	III-11
El bacín de atracción de los puntos fijos en el intervalo (r_A, r_H)	III-16
Concepción teórica	III-16
Búsqueda numérica	III-17
Resultados del proceso de cómputo	III-18

CAPÍTULO IV

ESTUDIOS DE UN SISTEMA DE LORENZ ACOPLADO

Introducción	IV-1
Conjunto positivamente invariante	IV-3
Función de Lyapunov	IV-3
Determinación del conjunto positivamente invariante	IV-4
Conjunto positivamente invariante en el Sistema Acoplado	IV-10
Sistema acoplados	IV-10
Sincronización	IV-12
Determinación del conjunto positivamente invariante	IV-14
Sincronización del sistema acoplado de Lorenz	IV-18
Métodos numéricos	IV-18
Estudio numérico	IV-20
Demostración de sincronización en la primera variable	IV-29
Apendice 1	IV-35

CONCLUSIONES

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se desarrolla un estudio acerca del sistema de ecuaciones de Lorenz, y el estudio de dos sistemas de Lorenz acoplados. El sistema dinámico en cuestión ha sido muy estudiado en años recientes, ya que nos proporciona un sistema de comportamiento caótico. Las ecuaciones de Lorenz están definidas en \mathbb{R}^3 y dependen de tres parámetros. Conforme se varían los parámetros, se cambia el comportamiento del flujo determinado por el sistema. Para algunos valores de los parámetros, las soluciones numéricas oscilan en una manera pseudo aleatoria que ha sido llamada “caótica”. Además de esto, para algunos valores de los parámetros se encuentra la pre-turbulencia, fenómeno en el cual las trayectorias oscilan caóticamente por largos periodos de tiempo antes de llegar a un comportamiento estable, ya sea periódico o estacionario.

En el primer capítulo se expondrá la deducción del sistema de ecuaciones diferenciales, hablando un poco de los antecedentes que llevaron a su formulación, de la convección de Rayleigh-Béarnard, y cómo se llega a la forma explícita del sistema bajo estudio.

Después se procederá a hacer un análisis del sistema mediante el método cualitativo, estudiando la forma de las ecuaciones, los puntos de equilibrio, y los valores propios asociados. Con esto se determinará esquemáticamente la forma que presenta el campo vectorial involucrado. Se encontrarán los puntos de equilibrio del sistema, determinándose de qué tipo se tratan, ya sean puntos silla, focos, o sumideros. Dentro de este punto se notarán las características y diferencias entre los puntos de equilibrio en el origen y fuera de él.

En el capítulo segundo se hará un estudio teórico de lo que puede considerarse un modelo geométrico de las ecuaciones. Para tal efecto se estudiará la herradura de Smale, su construcción, y su relación con la dinámica simbólica. Posteriormente se estudiarán las órbitas homoclínicas y su relación con el sistema de Lorenz, ya que en ellas aparece una órbita de este tipo. Se verá la

relación que existe entre la aparición de dicha órbita homoclínica y la aparición del comportamiento caótico. Para esto se planteará un esquema cualitativo de la órbita homoclínica y se estudiará numéricamente el comportamiento del campo en una vecindad de dicha órbita. Posteriormente se procederá a exponer un modelo del sistema de Lorenz, basado en lo anteriormente expuesto, pero restringido a una sola dimensión. Este modelo explicará muchas de las observaciones que se tienen sobre los flujos en el sistema de Lorenz.

Para el tercer capítulo se estudiará el comportamiento del sistema de Lorenz conforme se varían los parámetros que contiene. Para distintos valores de los parámetros se observan distintos comportamientos. En algunos casos se observa el movimiento pseudo aleatorio llamado caótico. Antes de aparecer este tipo de comportamiento, se observan también las bifurcaciones típicas de los sistemas caóticos, y se verá el papel que juega el número de Feigenbaum en el sistema de Lorenz. También hacen su aparición el caos intermitente, que es una especie de comportamiento caótico que “gira” alrededor de una órbita inestable. Más acerca de este tema se verá en la sección dedicada a su estudio. También se verá otro tipo de comportamiento, parecido al caos, pero con cierta periodicidad. Este comportamiento es conocido en la literatura como “periodicidad ruidosa”. Después se procederá a la localización de órbitas periódicas, para lo cual se incluirá una sección de fundamento teórico y se finalizará con una sección que incluye el método numérico para su localización. Para terminar el capítulo se estudiará el bacín de atracción de los puntos fijos. Se dará su descripción teórica, su búsqueda numérica y se expondrán los resultados del proceso de cómputo. La forma que aparece del bacín de atracción de los puntos fijos no ha sido reportado previamente en la literatura.

Finalmente, en el capítulo cuarto, se hará el estudio de un par de sistemas de Lorenz acoplados. Mucho de este trabajo se basa en las ideas desarrolladas por Hildebrando Rodrigues, citado en las referencias. Para eso primero se introducirán los conceptos con los cuales se trabajará. Estos incluyen los conceptos de la función de Lyapunov estricta y no estricta, y el método generalizado para determinar la existencia de un conjunto positivamente invariante en el sistema de Lorenz. Para un par de sistemas de Lorenz acoplados

se procederá a demostrar la sincronización en una variable, es esto se hará uso de la función de Lyapunov no estricta. En seguida se definirá lo que es un sistema acoplado y el flujo de acoplamiento. A continuación se demostrará que el sistema acoplado también tiene un conjunto positivamente invariante. La demostración en este caso es una alternativa a la desarrollada por Rodrigues. En la demostración que se desarrolla en esta tesis se prescinde de la generalización a espacios de Banach y se detallan los pasos que se tendrían que seguir al aplicar este método a cualquier otro sistema de ecuaciones acopladas.

En seguida se define matemáticamente la sincronización. Lo que sigue es un estudio numérico de dos sistemas de Lorenz acoplados. En esta parte se estudia el comportamiento que presentan los sistemas acoplados, y se presenta evidencia numérica que nos indica que los sistemas sincronizan. Esto se hará para el acoplamiento lineal en las tres variables que definen cada sistema, es decir, las dimensiones x , y y z . Finalmente se hará la demostración analítica de la sincronización para los sistemas acoplados linealmente en la primera variable. En esta parte se desarrolla una demostración en la cual entra en juego uno de los términos definidos en el capítulo: el *flujo de acoplamiento*. Mediante el análisis de este flujo, tratándolo como si fuera un sistema diferencial independiente del que venimos estudiando, podemos obtener información importante acerca de la sincronización. En pocas palabras, para tener la certeza de que los sistemas sincronizan en el sentido estrictamente matemático de la palabra, es necesario demostrar que el flujo de acoplamiento está definido en un campo vectorial con un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Esto se hace mediante cambio de variables, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad de Gronwall, y la fórmula de variación de constantes.

CAPÍTULO I

LAS ECUACIONES DEL SISTEMA DE LORENZ

Deducción de las ecuaciones

Antecedentes

Para empezar nuestro estudio sobre el sistema de ecuaciones de Lorenz, es necesario hacer una revisión histórica para observar el proceso mediante el cual se llegó a su planteamiento. La idea inicial fue el de construir un modelo matemático capaz de hacer predicciones climatológicas. Lorenz, siendo meteorólogo en la universidad M.I.T. en los Estados Unidos, tenía a su disposición una de las primeras computadoras que se pusieron al servicio de la investigación y en ella experimentó con los resultados de su modelo. En el planteamiento utilizó la teoría de convección para fluidos no viscosos desarrollada por Rayleigh y Bénard, haciendo la suposición de que todos los movimientos de la atmósfera (que son los que determinan el comportamiento del clima) están gobernados únicamente por este tipo de movimientos convectivos. Quizás parezca una sobre simplificación pero aún así condujo a un modelo matemático rico en propiedades y características poco conocidas hasta ese momento.

Convección de Rayleigh-Bénard

Veamos de una manera esqueta y no muy detallada el desarrollo teórico de las ecuaciones de Lorenz. Cabe señalar que desde el punto de vista matemático, la deducción de dichas ecuaciones no presenta más que un interés histórico. De hecho, las mismas ecuaciones se pueden deducir a partir de otros modelos. Para una profundización sobre los detalles de lo que aquí se comenta, se recomienda consultar la referencia [0].

Para el desarrollo que efectuó Lorenz, es necesario manejar ciertos números adimensionales y propiedades físicas, sobre las cuales no se redundará, ya que vistos desde el punto de vista matemático, son únicamente números reales. Estos números y las funciones involucradas son los siguientes. $\vec{v}(\vec{r}, t)$ es la velocidad y $\bar{\theta}(\vec{r}, t)$ es la desviación de temperatura, y $\bar{\lambda}$ es una función que depende de las propiedades físicas de nuestro sistema. En el caso particular de $\bar{\lambda}$, dado la naturaleza del problema, este término se simplifica y no es necesario prestarle mucha atención: la razón de este detalle va más allá de los alcances de esta tesis. La segunda ecuación que presentaremos es conocida como la ecuación de la incompresibilidad y presupone precisamente eso: que el fluido se comporta de manera ideal y por lo tanto no cambia de volumen. Estas ecuaciones se distinguen por la presencia de dos números adimensionales que son muy importantes en el estudio de mecánica de fluidos. Como nota aclaratoria mencionaremos que dentro del campo de la modelación científica, con los números adimensionales es posible introducir constantes matemáticas que tengan un significado en el mundo físico que se desea modelar. En la teoría bajo la cual se desarrolló el uso de los números adimensionales, se puede reproducir el comportamiento físico a cualquier escala del modelo matemático siempre y cuando se mantengan sin variación los valores de estos números. En particular para el caso de las ecuaciones de Lorenz tratamos con el número de Prandtl, dado por la fórmula, $Pr = \nu / D_T$, y el número de Rayleigh, $Ra = (\rho_0 g \alpha d^3 / \eta D_T) \delta T$. Reiteramos que para los efectos históricos planteados, basta considerar estos dos números como elementos de los reales. Para una explicación detallada es recomendable la consulta a un libro de mecánica de fluidos: en este trabajo no es importante la coherencia física del modelo sino sus consecuencias matemáticas y

por ende no se entrará en detalle sobre los números adimensionales involucrados. Pasemos entonces a la deducción del sistema de Lorenz.

Dentro del desarrollo matemático efectuado, lo que corresponde primero es fijarnos en las ecuaciones que gobiernan la convección de Rayleigh-Béarnard. Para ello debemos imaginar un fluido de extensión horizontal de longitud infinita al cual le aplicamos una fuente de calor por la parte inferior. La parte inferior la podemos considerar como una placa caliente de dimensiones infinitas. Este fenómeno físico se rige por las siguientes ecuaciones [1]:

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \bar{\theta} \bar{\lambda} + \nabla^2 \bar{v},$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{\theta} = \text{Ra} \bar{\lambda} \cdot \bar{v} + \nabla^2 \bar{\theta}.$$

Las ecuaciones planteadas al principio de esta sección están definidas en sistemas de coordenadas cartesianos de la forma tradicional, es decir, la dirección horizontal corresponde a la variable y , la vertical corresponde a la z y el eje coordenado de la variable x sale del plano del papel en la dirección normal. Este esquema se ve representado gráficamente por la figura 1 a un lado. Sea $u(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$ la primera y tercera componente de la velocidad. Es decir, refiriéndonos a un sistema de ejes coordenados como el que acabamos de mencionar, $u(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$ corresponden a las velocidades en las direcciones x y z respectivamente. Supongamos que la componente de la velocidad sobre el eje y es igual a cero. Esto implicaría directamente que todo el movimiento será sobre los planos perpendiculares al eje y : no habrá ningún flujo entre cualquier par de planos ajenos ya que para cada punto (x,y,z) , la variable y permanece constante para

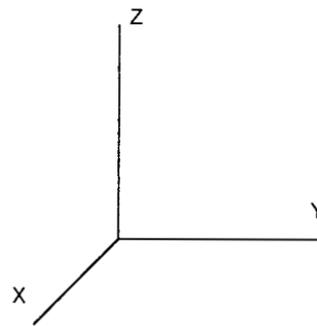


figura 1

todo tiempo. Es decir, tomando en consideración que se está tratando con un campo vectorial que se presupone continuo, sólo es posible el movimiento en forma de cilindros, sin ningún desplazamiento sobre el eje y . Habiendo hecho esta suposición nos permitirá reducir el problema de ser uno diferencial parcial a uno diferencial ordinario. Con la consideración de que sólo hay movimiento con respecto a los ejes x y z , la ecuación de incompresibilidad se reduce a lo siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + w_z = 0.$$

Es claro que en la aplicación del gradiente lo único que hemos hecho es eliminar la parcial de la componente de la velocidad con respecto a la variable y . Ésta es la principal suposición del párrafo anterior donde asumimos que la proyección del vector velocidad sobre el plano y - z y sobre el plano x - y era idénticamente cero. En este momento podemos introducir una herramienta de la mecánica de fluidos denominado una *función de corriente de Lagrange*. Una función ψ es una función de corriente de Lagrange para el sistema que hemos planteado si satisface las siguientes dos relaciones:

$$\psi_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z} = -u,$$

$$\psi_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} = w.$$

Debido a la simplificación que hemos hecho al principio, anulando la componente del vector velocidad en la dirección del eje y , la teoría de convección de Rayleigh Bérnard nos dice que el fluido se va a mover en forma de cilindros. La parte del fluido que está en contacto con la placa caliente (que se mencionó en la página 3) será expuesta a una transferencia de calor por conducción lo cual aumentará su temperatura. En fluidos reales, al aumentar la temperatura por lo general la densidad disminuye y esa parte del fluido tenderá a subir. Por otro lado, el fluido en contacto con la placa fría en la parte superior perderá calor y su densidad aumentará, propiciando que baje. En particular el principio de Le Chatelier (y que se podrá encontrar en cualquier libro de química

de nivel básico) dice que la masa no desaparece ni se genera, sino que siempre se conserva. Entonces, dado que estamos tratando con un fluido al que suponemos incompresible (por la segunda ecuación planteada) el cambio de densidades se verá reflejado en el movimiento del fluido. El aumento en energía cinética que representa el incremento de temperatura se va a ver reflejado en el movimiento del fluido, según la fórmula de convección de Rayleigh-Bernard. En un sistema continuo donde la diferencia entre la temperatura de ambas placas no es demasiado grande, el movimiento puede ocurrir de la siguiente forma: un cilindro del fluido gira en la dirección de las manecillas del reloj o en dirección contraria. Esto da pauta a reflexionar en lo siguiente: cuando el fluido está en la parte superior de su recorrido, en contacto con la placa superior, el movimiento sólo se puede dar en la dirección horizontal. En otras palabras, si la distancia entre la placa superior e inferior es de 1 (normalizando las unidades), y el origen está justo a la mitad entre las dos placas, podemos escribir $w|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0$ evaluando la proyección del vector velocidad sobre la coordenada z en los puntos antes mencionados. Es decir, hasta arriba y hasta abajo sólo hay movimiento en el eje x . Si además de eso hacemos otra simplificación de naturaleza física y asumimos que la fuerza de tensión superficial es insignificante, tendremos:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0.$$

Esta última relación, en términos generales, nos dice que el fluido se mueve a velocidad constante cuando está en contacto con la placas superior y la placa inferior.

Entonces, en términos de la función de corriente de Lagrange, tenemos:

$$w|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\pm\frac{1}{2}} = 0.$$

Una función ψ que satisface estas condiciones es la siguiente: $\psi(x, y, z) = \psi_1(t) \cos(\pi z) \sin(qx)$. Esta ψ la podemos derivar, primero con respecto de la z y después con respecto de la x para así obtener:

$$u = \pi \psi_1(t) \text{sen}(\pi z) \text{sen}(qx), \quad (1)$$

$$w = q \psi_1(t) \text{cos}(\pi z) \text{cos}(qx). \quad (2)$$

Regresemos ahora a la primera ecuación de Rayleigh-Bérnard, es decir,

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \theta \vec{\lambda} + \nabla^2 \vec{v},$$

y reescribámoslo con respecto a las variables x y z . Esto nos lleva a (la misma ecuación, pero escrita en términos de sus componentes):

$$\text{Pr}^{-1}(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + \nabla^2 u, \quad (3)$$

$$\text{Pr}^{-1}(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \nabla^2 w + \theta. \quad (4)$$

Calculando la rotacional de la primera ecuación se tiene:

$$\text{Pr}^{-1} \left[-(\nabla^2 \psi)_t + \frac{\partial}{\partial z}(uu_x + wu_z) - \frac{\partial}{\partial x}(uw_x + ww_z) \right] = -\nabla^2 \psi - \theta_x,$$

donde utilizamos la relación:

$$\nabla^2 \psi = - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Suponiendo que la temperatura es fija en ambos extremos podemos escribir:
 $\theta|_{z=\pm 1/2} = 0$

Basta tomar θ de la forma:

$$\theta(x, y, z) = \theta_1(t) \text{cos}(\pi z) \text{cos}(qx) + \theta_2(t) \text{sen}(2\pi z).$$

Sustituyendo la ecuación anterior en las ecuaciones (3) y (4) y con la combinación de las ecuaciones (1), (2) se obtiene al simplificar:

$$\text{Pr}^{-1}(\psi_1)_t = \frac{q\theta_1}{\pi^2 + q^2} - (\pi^2 + q^2)\psi_1.$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria para ψ_1 .

De la tercera ecuación de Rayleigh-Bernard, es decir, de

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = Ra \vec{\lambda} \cdot \vec{v} + \nabla^2 \theta.$$

se obtiene al sustituir la función θ y efectuar las manipulaciones necesarias:

$$\theta_t + \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = Ra\psi_x + \nabla^2 \theta,$$

donde

$$\psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = \pi q \psi_1 \left[-\frac{\theta_1}{2} \sin(2\pi z) + \theta_2 \cos(qx)(\cos(\pi z) + \cos(3\pi z)) \right].$$

Si exigimos igualdad de los términos $\cos(qx)\cos(\pi z)$ y $\sin(2\pi z)$, y despreciamos el término $\cos(qx)\cos(3\pi z)$ obtenemos:

$$(\theta_1)_t = -\pi q \psi_1 \theta_2 + q Ra \psi_1 - (\pi^2 + q^2) \theta_1,$$

$$(\theta_2)_t = \frac{1}{2} \pi q \psi_1 \theta_1 - 4\pi^2 \theta_2.$$

Que concierne a los términos en $\cos(qx)\cos(\pi z)$ y $\sin(2\pi z)$ respectivamente. Con lo cual tenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para $\psi_1, \theta_1, \theta_2$. Este sistema de tres ecuaciones diferenciales es el sistema de Lorenz, para el cual tan solo debemos hacer unas cuantas simplificaciones de la forma siguiente. Hagamos los cambios de variable:

$$t' = (\pi^2 + q^2)t, \quad x = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)} \psi_1, \quad y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)^3} \theta_1,$$

$$z = \frac{\pi q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} \theta_2, \quad r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} Ra, \quad b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}, \quad p = Pr$$

Se obtiene:

$$\dot{x} = p(y - x),$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

El sistema de ecuaciones de Lorenz

$$\dot{x} = -p(x - y),$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

Este es la forma del sistema de Lorenz que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Una de las características del sistema es que para que exista movimiento (y que es una consecuencia de la mecánica de fluidos y por lo cual no entraremos en detalle) es requisito que $r \geq 1$, lo cual, por el cambio de variable efectuado, necesariamente implica lo siguiente:

$$Ra \geq \frac{(\pi^2 + q^2)^3}{q^2}.$$

Esto nos proporciona un valor mínimo para el número adimensional de Rayleigh. No perdamos de vista que en el propósito de este trabajo no está el de explicar los fenómenos de transporte que ocurren con los fluidos incompresible. Nos basta con saber que un número de Raleigh suficientemente grande nos asegura de que existirá movimiento. En este valor mínimo se verifica que:

$$q^2 \geq \frac{1}{2} \pi^2.$$

Ahora bien, nuestro parámetro b está determinado por q , lo cual implica que para $b = 8/3$, se obtiene el valor mínimo para el número de Rayleigh. No es necesario que fijemos b en este valor, ya que cualquier $b \leq 8/3$ nos garantizará el movimiento, ya que

$$b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2} \leq \frac{4\pi^2}{\pi^2 + \pi^2/2} = 8/3.$$

Las ecuaciones de Lorenz también pueden ser obtenidas del modelo matemático que surge del análisis de una rueda bajo un chorro de agua, donde la rueda tiene recipientes para atrapar el agua,

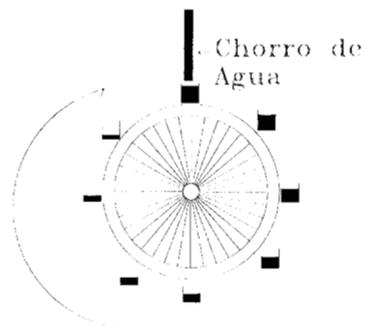


figura 2

pero que la dejan escapar a una velocidad constante (figura 2). Entonces, como podemos apreciar en la figura, el recipiente que se encuentra en la parte superior se llena de agua, desbalanceando la rueda e iniciando su giro, que puede ser en el sentido positivo o negativo. Al girar la rueda, el chorro llenará los recipientes que siguen. Como todos los recipientes dejan escapar el agua, se irán vaciando y en cierto momento la rueda quedará suspendida y comenzará a girar en el sentido opuesto.

En un sentido coloquial, aquí es donde se presenta el caos, puesto que no se puede determinar cuantas vueltas dará en un sentido antes de girar al contrario. Este modelo es análogo a los cilindros de fluido entre las dos láminas, ya que el sentido del giro es impredecible, y el sistema de ecuaciones que se obtiene mediante la deducción matemática es precisamente el sistema de ecuaciones de Lorenz.

Características de las ecuaciones de Lorenz

Análisis del campo vectorial

Veamos qué nos dicen las ecuaciones de Lorenz. De la sección anterior tenemos el sistema siguiente:

$$\dot{x} = -p(x - y),$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

La primera ecuación no presenta ningún problema al análisis por su naturaleza lineal con respecto a las variables x e y . Es en la segunda y en la tercera ecuación donde surgen términos no lineales que harán posible la aparición del fenómeno de dinámica caótica. Lo mismo ocurre con la tercera ecuación, pero en esta ocasión el término no lineal depende de la x y de la y simultáneamente.

Recordando que las constantes deben ser de la forma $b > 0$, $p > 0$, y $r > 0$ para que el problema tenga sentido físico. Sustituycamos información en nuestras ecuaciones para observar el comportamiento sobre los ejes coordenados.

De aquí se puede ver que existe una simetría en el campo vectorial de tal forma que $F(x, y, z) = F(-x, -y, z)$. Esto lo podemos comprobar al analizar cada una de las tres componentes del campo vectorial:

$$\dot{x}\Big|_{(x,y,z)} = -p(x + y) = p((-x) + (-y)) = -\dot{x}\Big|_{(-x,-y,z)},$$

$$\dot{y}\Big|_{(x,y,z)} = -xz + rx - y = (-x)z - r(-x) + (-y) = -\dot{y}\Big|_{(-x,-y,z)},$$

$$\dot{z}\Big|_{(x,y,z)} = xy - bz = (-x)(-y) - bz = \dot{z}\Big|_{(-x,-y,z)}.$$

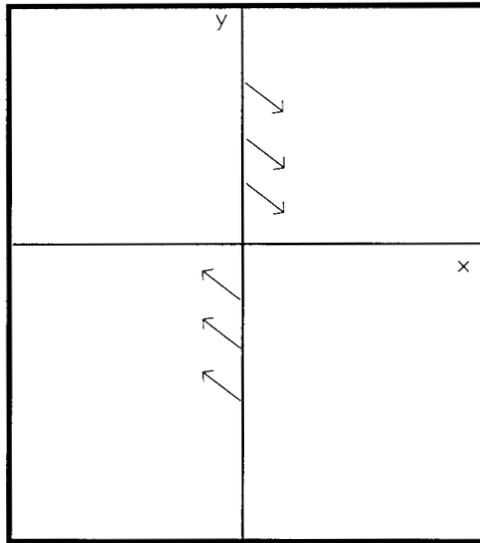


figura 3

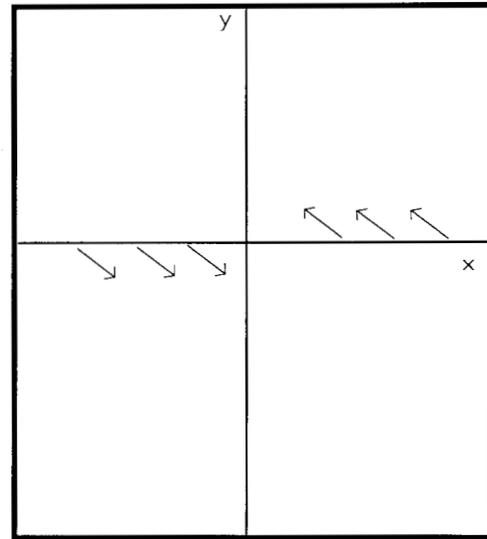


figura 4

Si vemos qué pasa cuando el flujo del sistema de ecuaciones cruza los ejes coordenados, en el eje z , $\dot{x} = \dot{y} = 0$, y $\dot{z} = -bz$. Esto nos indica que ningún flujo que pase por el eje z puede dejarlo y por lo tanto es invariante. Pero podemos decir aún más acerca del flujo sobre el eje de las z . Dado que $b > 0$ tenemos que $z < 0 \Rightarrow \dot{z} > 0$, y $z > 0 \Rightarrow \dot{z} < 0$. En otras palabras, el origen es un punto fijo estable relativo al eje z .

Si analizamos de manera similar lo que pasa con el campo vectorial a lo largo del eje y , es inmediato que si $y > 0$ entonces ocurre que $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$. Por otro lado si $y < 0$ es evidente que $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$ (figura 3).

En el análisis del eje x , cuando $x > 0$ entonces ocurre que $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$. Por otro lado si $x < 0$ es evidente que $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$ (figura 4).

Este análisis indica que puede haber cierto cambio de dirección en el flujo dado por el sistema de ecuaciones diferenciales, aunque no es fácil de determinar cómo será, por estar en un espacio de dimensión 3.

Puntos fijos de las ecuaciones de Lorenz

Existen tres puntos fijos para la ecuación de Lorenz. Uno es el origen pues para todo valor de los parámetros del sistema permanece como punto fijo. Los otros dos puntos de equilibrio son simétricos y se van moviendo conforme varían los parámetros. En particular, cuando el valor de r tiende hacia uno, como veremos más adelante en este trabajo, estos dos puntos fijos simétricos se colapsan al origen y desaparecen. Por otro lado, al aumentar el valor de r , llega el momento en que los dos puntos de equilibrio simétricos dejan de ser asintóticamente estables, produciéndose una bifurcación de Hopf.

El origen

Pongamos atención en los puntos estacionarios, es decir, los puntos donde $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Mediante la observación y un poco de álgebra, notamos que los puntos fijos son: $C_0 = (0, 0, 0)$, $C_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$, y $C_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$. La parte lineal de nuestro sistema está representado por el Jacobiano, i.e.

$$\begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix},$$

y de aquí podemos obtener el polinomio característico a partir de la resolución del determinante que resulta de restar la matriz identidad multiplicado por t e igualar a cero:

$$t^3 + t^2(p+b+1) + t(b+x^2 + pb + p + zp - pr) + (pb + 2px^2 + pbz - prb) = 0.$$

En este momento olvidemos que ya utilizamos la variable λ en la deducción de las ecuaciones y utilizemos una vez más este símbolo, pero ahora para especificar los valores propios del sistema. Valuando el polinomio característico en el origen obtenemos los valores propios:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(p+1) \pm \sqrt{(p+1)^2 - 4(p-pr)}}{2},$$

$$\lambda_3 = -b,$$

donde λ_1 corresponde al signo negativo del radical y λ_2 corresponde al signo positivo del radical. De aquí es claro que $\lambda_3 < 0$ y la parte real de $\lambda_1 < 0$ y sólo falta verificar qué pasa con la parte real de λ_2 . El único caso en el cual la raíz involucre un número complejo es cuando $(p+1)^2 - 4(p-pr) < 0$. Siguiendo el razonamiento tenemos:

$$(p+1)^2 < 4p(1-r) \Rightarrow 4p(1-r) > 0 \quad \text{como} \quad p > 0 \Rightarrow 1-r > 0 \Rightarrow r < 1.$$

Pero $r < 1$ no tiene sentido físico en las ecuaciones de Lorenz.

Para todo valor de $r > 1$ tenemos que la raíz cuadrada es real. En el caso de que $r > 1$ tenemos que $-4p(1-r)$ es positivo y el valor propio $\lambda_2 > 0$ lo cual implica que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico con una dirección

inestable. Esta dirección está dada por el vector propio correspondiente al valor propio λ_2 . Recordando que $Av = \lambda_2 v$ --para el vector propio asociado a λ_2 -- calculamos:

$$\begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p(x-y) \\ rx-y \\ bz \end{bmatrix},$$

para obtener así un vector propio en la dirección de la variedad inestable del origen, $(1, \kappa, 0)$, donde

$$\kappa = \frac{2r}{1-p + \sqrt{(p+1)^2 - 4(p-pr)}}.$$

También $\lambda_2 < 0$ y por lo tanto el origen es un punto de equilibrio hiperbólico y asintóticamente estable (i.e. estable en todas las direcciones). Cuando $r \rightarrow 1^+$ ó $r \rightarrow 1^-$ se puede ver de la expresión de C_1 y C_2 que ambos tienden al origen, y en $r = 1$ sólo hay un punto fijo y $\lambda_2 = 0$. Esto nos indica que el punto fijo deja de ser hiperbólico y su estudio es más delicado.

Puntos de equilibrio C_1 y C_2

Pasemos a ver la parte lineal de los dos puntos de equilibrio C_1 y C_2 . Para ambos el polinomio característico es:

$$f(t) = t^3 + t^2(p+b+1) + t(b(r+p)) + 2pb(r-1),$$

de lo cual podemos analizar las posibilidades con respecto al signo de las raíces con la regla de los signos de Descartes:

Sea V el número de variaciones de signo en la sucesión de coeficientes no nulos de $f(t)$ y P el número de raíces positivas de $f(t)$. Entonces $V-P$ es un número par no negativo.[2]

Inmediatamente se ve que los tres primeros coeficientes son mayores a cero, y entonces sólo quedan dos posibilidades: a decir, $2pb(r-1) > 0$ ó $2pb(r-1) < 0$, lo cual implica que tendremos una raíz positiva. Si $r > 1$ tendremos una raíz negativa y otros dos imaginarios cuya parte real puede ser positiva, negativa o cero. En caso de que al ir variando los parámetros de la ecuación, en algún momento se cambiara el signo de la parte real de estos dos valores propios conjugados (lo cual implicaría una bifurcación de Hopf) forzosamente tendríamos una ocasión con valores propios imaginarios de parte real igual a cero. Es decir,

$$t^3 + (p+b+1)t^2 + b(r+p)t + 2pb(r-1) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3) = 0.$$

Lo cual implica:

$$t^3 + (-\lambda_1)t^2 + (\lambda_2^2)t - \lambda_1\lambda_2^2 = 0,$$

o bien

$$2pb(r-1) = b(r+p)(p+b+1).$$

Por lo tanto, solamente cuando $r = \frac{p(p+b+3)}{(p-b-1)}$ tendremos que la parte real de los dos valores propios conjugados es igual a cero. En cualquier otro caso, la parte real será negativa cuando r se encuentre por debajo del valor $\frac{p(p+b+3)}{(p-b-1)}$. En este caso los dos puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

CAPÍTULO II

MODELO GEOMÉTRICO

La Herradura de Smale y Dinámica Simbólica

Introducción

Hasta ahora se ha tratado con el asunto de caos desde una distancia prudente y se ha omitido hacer cualquier definición al respecto. Siendo que las ecuaciones de Lorenz son bien conocidas por su dinámica caótica es sensato proceder a hacer una pequeña digresión para abordar lo que se conoce como caos. El comportamiento caótico en los sistemas dinámicos del siglo XX no es material nuevo, ya que desde el siglo pasado, Henri Poincaré había reconocido este tipo de proceder dentro de la dinámica planetaria del sistema solar.

Lo que se ha denominado caos es la evolución irregular e impredecible de muchos sistemas dinámicos no lineales que dependen del tiempo. Ocurre en osciladores mecánicos, en fluidos en movimiento, y reacciones químicas entre otros. Una de sus particularidades más notables es que nunca se repite el comportamiento que se ha observado en el pasado, es decir, para toda $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ψ es el flujo de nuestro sistema, $\psi_{x_0}(t) \neq x_0$. No obstante, los sistemas dinámicos caóticos están gobernados por ecuaciones determinísticas bien definidas.

En términos generales, podemos asociar el comportamiento caótico de un sistema dinámico con una sensibilidad extrema con respecto a las condiciones iniciales. Si bien es cierto que todo sistema dinámico debe presentar continuidad con respecto a las condiciones iniciales, los sistemas caóticos presentan una desviación exponencial con el paso del tiempo. Es decir, si tenemos un flujo que pasa por un punto del espacio, y alrededor de ese punto existe una vecindad, que pudiese ser la bola de radio R , entonces para un tiempo t dado, todos los flujos que pasan por el interior de la bola de radio R estarán en una bola de radio Re^t . Esto no contradice para nada los teoremas fundamentales de las ecuaciones diferenciales, pero sí contrasta notablemente con el comportamiento observado de los sistemas lineales. En estos últimos sistemas, la distancia con que se alejan dos flujos distintos que pasen por condiciones iniciales próximas, tan solo varía de forma lineal: esto hace posible que la predicción sobre el estado del sistema a distintos tiempos sea factible, lo cual no sucede con sistemas de dinámica caótica. Dado que en el sistema caótico la distancia entre los flujos que parten de dos puntos iniciales distintos puede crecer exponencialmente, después de un periodo muy corto es imposible hacer cualquier predicción, ya que nada nos garantiza que las dos trayectorias que comenzaron muy cercanas la una de la otra permanezcan cercanas.

Para las ecuaciones de Lorenz se tiene una característica que ha sido denominado un *atractor extraño*. Esto se da porque la distancia entre flujos que parten de distintos puntos iniciales no crece sin fin, sino que rápidamente llega a un tamaño máximo y con una forma determinada (llamada el atractor extraño) dentro del cual el sistema es positivamente invariante. Más acerca de este conjunto dentro del cual está contenido todo flujo de las ecuaciones de Lorenz se presentará cuando se exponga el material sobre sistemas de Lorenz acoplados. No obstante, también se podría tratar el conjunto invariante como un espacio topológico para llegar a una definición de caos generalizado. Esto no se hará en el marco de este trabajo, ya que involucra un desarrollo largo y es preferible mencionar un modelo conocido como la herradura de Smale.

Regresando al tema que nos atañe, el estudio de los sistemas caóticos no se ha dado hasta el siglo XX por una razón fundamental: el caos es una característica

inherente a los sistemas dinámicos no lineales, los cuales carecen en su gran mayoría de solución analítica. Para ello es necesario la utilización de métodos numéricos, los cuales no pueden ser aplicados --razonablemente-- sin la ayuda de una computadora digital. Por ende la computadora únicamente puede ser utilizada como una herramienta de apoyo, pero no puede ir más allá del razonamiento humano. En ilustración de esto debemos profundizar sobre algunos aspectos lógicos de los sistemas caóticos, incluyendo un análisis de la herradura de Smale y algo de dinámica simbólica. Si bien es cierto que nadie ha demostrado que la extrema sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales es un reflejo de este modelo de Smale, ciertamente ayuda a clarificar lo que pudiese estar ocurriendo.

Construcción de la Herradura de Smale

La herradura de Smale es un mapeo de dos dimensiones que tiene un conjunto invariante con una estructura complicada. Consiste de un mapeo sencillo donde surge un conjunto caótico invariante, por lo cual es esencial entenderlo para comprender el término aplicado a un sistema dinámico.

El mapeo en cuestión es mejor entendido mediante un esquema geométrico donde se puede visualizar su construcción, el cual se debe hacer en dos sentidos, hacia adelante en el tiempo y hacia atrás. Para empezar veamos como se efectua el mapeo hacia adelante, notando que estamos hablando de una función $f: [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1] \times [0,1]$.

La operación que efectua f se puede resumir de la siguiente forma: tomemos el cuadro unitario D , de nuestro dominio, expandámoslo en la dirección x y contraigámoslo en la dirección y como se indica en la figura 5.



figura 5

Para una mejor comprensión de lo que está ocurriendo subdividamos nuestra región D en las partes horizontales H_0 y H_1 . Después démosle vuelta como herradura así como se indica en la figura 6 e intersectémoslo con el cuadrado original D . Ahora procedamos a etiquetar las partes que provienen de las regiones H_0 y H_1 . A cada una de las cuatro regiones horizontales asignémosle un segundo dígito, donde éste será i cuando la $H \cap H_i \neq \emptyset$ y H_i es una de las dos regiones originales, H_0 o H_1 . (obviamente solo intersecta una de las dos regiones).

De esta forma tenemos las regiones H_{01} , H_{00} , H_{10} , y H_{11} . Es claro que también podemos definir la transformación inversa, $f^{-1}: [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1] \times [0,1]$, el cual lo podemos ver representado en las figuras 7 y 8, en las cuales nuestro dominio D ha sido dividido en las regiones verticales V_0 y V_1 , las cuales producen las nuevas regiones V_{00} , V_{10} , V_{01} y V_{11} .

El factor de expansión en la dirección x es λ y el de contracción en y es μ , lo cual implica que para $f(D)$ el ancho de H_{00} , H_{01} , H_{10} y H_{11} será de $1/\mu$. Al seguir aplicando f consecutivamente al dominio D , el ancho de los rectángulos se ve reducido una vez más por el factor $1/\mu$, donde ahora se tendrán 8 regiones horizontales, numeradas con el mismo algoritmo que se uso en el paso anterior: H_{000} , H_{001} , H_{010} , H_{011} , H_{100} , H_{101} , H_{110} , H_{111} (nótese que la forma de numerar las ocho regiones corresponde a los números de uno al ocho expresado en base binaria). Como se puede observar, cada rectángulo tendrá una sucesión binaria única al seguir aplicando f , y además el ancho se acercará a cero. Esto es porque en el paso k obtenemos 2^k rectángulos, cada uno etiquetado por una sucesión binaria de longitud k , cuyo grosor será de $1/\mu^k$, cuyo límite cuando k tiende a infinito es igual al cero. Cada uno de los 2^k rectángulos horizontales etiquetado por una sucesión binaria de longitud k nos sirve para definir la



figura 6

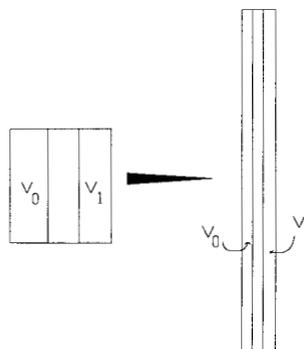


figura 7

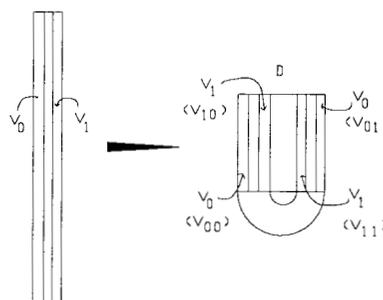


figura 8

etiquetado por una sucesión binaria de longitud k nos sirve para definir la

sucesión de conjuntos $\langle A_n \rangle$ con $A_k = D \cap f^{-k}(D)$, donde se observa que A_k es compacto para toda k . (Sin meternos mucho en detalles, basta notar que A_k es un conjunto cerrado y acotado y dado que estamos en un espacio métrico, entonces A_k es un conjunto compacto.) Se sabe de análisis que la intersección de una sucesión de conjuntos compactos anidados tales que $A_n \supset A_{n+1}$ (así como tenemos en este caso) es un conjunto no vacío. Esto nos indica que al hacer $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ obtendremos un número infinito de rectángulos horizontales con ancho igual a $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/\mu^k = 0$. Haciendo lo mismo para función inversa de f obtendremos un conjunto de rectángulos verticales de grosor igual a cero, cada uno asociado a una sucesión binaria que nos indica de donde salieron. (La construcción es enteramente análoga y por lo tanto no hace falta repetir textualmente el mismo procedimiento.)

Si ahora se hace una intersección entre la sucesión de conjuntos $\langle A_n \rangle$ obtenidos de f y la sucesión de conjuntos $\langle B_n \rangle$ obtenidos de la inversa de f , es decir,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(D) \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(D) \right),$$

obtenemos un conjunto infinito de puntos donde cada punto puede ser relacionado de manera única con una doble sucesión binaria (una sucesión corresponde a la recta horizontal y otra a la vertical de la cual el punto es la intersección). Este conjunto de puntos serán fijos para la función f --i.e., constituye un conjunto invariante para susodicha función: no importa cuantas veces apliquemos f o su inversa, jamás saldremos del conjunto original. En términos geométricos, cada punto de este conjunto invariante será la intersección de una recta horizontal y otra vertical de $\bigcap A_k$ y $\bigcap B_k$ respectivamente. Y cada uno de estos puntos tiene una sucesión binaria única que se obtiene concatenando la doble sucesión asociada a las dos rectas perpendiculares.

Lo que hemos obtenido de esta manera, por su forma geométrica asociada, se le conoce como la *herradura de Smale*.

Conceptos de Dinámica Simbólica

En este momento es adecuado introducir algunos conceptos de dinámica simbólica, lo cual nos permitirá hacer un estudio de órbitas periódicas y su relación con el conjunto invariante producto de la herradura de Smale. Para esto es necesario hacer algunas definiciones y aclaraciones sobre los conceptos que a continuación se detallan.

Comenzaremos con la definición de un espacio de todas las sucesiones de símbolos.

Definición: Una sucesión de símbolos de orden N es una cadena doblemente infinita de elementos del conjunto A donde $|A| = N$. (Es decir, la cardinalidad del conjunto A es igual a N).

Con esta definición, y con el caso que nos interesa en mente, una sucesión de símbolos de orden 2 es una cadena de símbolos binarios donde el conjunto A es de la siguiente forma, $A = \{0,1\}$.

Definición: El espacio de todas las sucesiones de orden N , denotado por Σ^N , es el conjunto de todas las posibles sucesiones de símbolos de orden N .

En nuestro caso particular, una vez más, el espacio que nos interesa es Σ^2 , que representa el conjunto de todas las posibles sucesiones binarias.

Es trivial notar que una bisucesión infinita es lo mismo que una sucesión sencilla, pero para el análisis que se efectúa a continuación es conveniente tratar con una sucesión que se mueve en dos sentidos, hacia la derecha y hacia la izquierda. Es decir, cada elemento del espacio Σ^N tendrá la forma: $s = \dots s_{-3}s_{-2}s_{-1} \cdot s_1s_2s_3\dots$, donde utilizamos el punto decimal para separar a las dos sucesiones infinitas.

Dentro del espacio Σ^N podemos definir una métrica.

Proposición: Una métrica en Σ^N está dada por $d(s, \bar{s}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|}$.

Donde los elementos del espacio $s, \bar{s} \in \Sigma^N$ son de la forma:

$$s = (\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots) \quad \bar{s} = (\dots, \bar{s}_{-3}, \bar{s}_{-2}, \bar{s}_{-1}, \bar{s}_0, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \dots).$$

Se checa fácilmente que nuestra función d satisface las propiedades que debe satisfacer una métrica.

Definición: La topología en Σ^N está definida por los conjuntos abiertos de la forma tradicional de los espacios métricos, es decir, un abierto Ω será de tal forma que para todo punto en su interior se puede encontrar una bola de radio mayor a cero tal que la bola este contenida en Ω . Es decir, $\forall x \in \Omega$ se tiene que $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Definición: Se dice que un espacio es perfecto si es cerrado y cada punto en el conjunto es un punto de acumulación del mismo conjunto.

Teorema: El espacio Σ^N equipado con la métrica antes mencionada es compacto, totalmente desconexo, y perfecto.

Demostración:

1) Sea S nuestra colección de símbolos. Con la métrica valor absoluto forma un espacio métrico compacto y totalmente desconexo (véase [4]). Por el teorema de Tychonov, Σ^N es compacto. 2) Por ser S totalmente desconexo, Σ^N es totalmente desconexo, ya que el producto de espacios totalmente desconexos es así mismo totalmente desconexo. 3) Σ^N es cerrado, ya que es un espacio métrico compacto. Sea $\bar{s} \in \Sigma^N$ un punto arbitrario de Σ^N ; entonces, para mostrar que \bar{s} es un punto límite de Σ^N , necesitamos mostrar que cada vecindad del punto contiene un punto dentro de Σ^N . Sea $\eta^{M(\varepsilon)}(\bar{s})$ una vecindad de \bar{s} y sea $\hat{s} = \bar{s}_{M(\varepsilon)+1} + 1$ si $\bar{s}_{M(\varepsilon)+1} \neq N$, y $\hat{s} = \bar{s}_{M(\varepsilon)+1} - 1$ si $\bar{s}_{M(\varepsilon)+1} = N$. Entonces la

secuencia $\left\{ \cdots \bar{s}_{-M(\varepsilon)-2} \hat{\delta} \bar{s}_{-M(\varepsilon)} \cdots \bar{s}_{-1} \bullet \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_{M(\varepsilon)} \hat{\delta} \bar{s}_{M(\varepsilon)+2} \cdots \right\}$ está contenido en $\eta^{M(\varepsilon)}(\bar{s})$ y no es igual a \bar{s} ; por lo tanto Σ^N es perfecto.

Un resultado útil referente a la materia se la debemos a Hausdorff [5] y que se puede resumir en la siguiente proposición:

Proposición: Todo conjunto perfecto en un espacio completo tiene cuando menos la cardinalidad del continuo.

Ahora bien, según la referencia [4], entre las invariantes topológicas podemos encontrar la compacidad, la conectividad, y la perfección. Esto implica de forma inmediata el siguiente teorema:

Teorema: Sea Y un espacio topológico y suponga que Σ^N y Y son homeomorfos. Entonces Y es compacto, totalmente desconexo y perfecto.

Nuestra métrica la podemos simplificar mediante el uso de la expresión:

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}} \quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = \bar{s}_i \\ 1 & \text{si } s_i \neq \bar{s}_i \end{cases}.$$

Esta es equivalente a la dada con anterioridad ya en una sucesión binaria se tiene la igualdad de los términos

$$\frac{|s_i - \bar{s}_i|}{1 + |s_i - \bar{s}_i|} = \frac{1}{2} \delta_i,$$

con lo cual, la nueva métrica es distinta por un factor de escala, haciendo idéntico al espacio métrico generado.

Con esta métrica es lógico pensar que dos sucesiones son cercanas si coinciden en un bloque central largo. Consideraremos ahora el mapeo de corrimiento.

Definición: El mapeo de corrimiento, denotado por σ , es un mapeo de la forma

$\sigma: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$ tal que para $s = \dots s_{-3}s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2s_3\dots$ tenemos que

$\sigma(s) = \dots s_{-3}s_{-2} \cdot s_{-1}s_0s_1s_2s_3\dots$, es decir, $\sigma(s)_i = s_{i+1}$.

En otras palabras el mapeo de corrimiento nos mueve el punto decimal un lugar hacia la izquierda. De esta definición es claro que $\sigma(\Sigma^2) = \Sigma^2$. Además, sin mucho problema, Wiggins [4] demuestra que es continua.

Consideremos ahora la estructura de órbita de σ sobre Σ^2 , para lo cual tenemos la siguiente teorema:

Teorema: El mapeo σ tiene:

1. Un número infinito, pero numerable, de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente grande.
2. Un número infinito no numerable de órbitas no periódicas.
3. Una órbita densa.

Demostración.

Empezemos por explicar lo que se quiere decir por periodico bajo σ . Es claro que secuencias compuestas de algún patron repetitivo generan el mismo elemento de Σ^2 después de aplicarle un número de veces el corrimiento σ . Eso quiere decir que son periódicas bajo σ . Por ejemplo, las órbitas $\{\overline{10.10}\}$ y $\{\overline{01.01}\}$ son periódicas bajo el corrimiento σ , ya que

$$\sigma\{\overline{10.10}\} = \sigma\{\overline{01.01}\} \quad \text{y} \quad \sigma\{\overline{01.01}\} = \sigma\{\overline{10.10}\}.$$

Es obvio que podemos tener un número infinito de elementos de Σ^2 que consisten de patrones repetitivos. Esto es porque a cada sucesion con patrones repetitivos podemos asociarle un número natural (recordando que una sucesión binaria es tan solo una forma de escribir un número utilizando la base binaria).

Esta relación de los elementos que son periodicos bajo σ con los números racionales es además biunívoca y consecuentemente por cada órbita periódica

existe un número natural y viceversa. Ahora bien, debido a que los números racionales son densos, para cada sucesión de dígitos de longitud arbitrariamente grande (pero finita) podemos encontrar un número racional asociado, después del cual el patrón de dígitos se comienza a repetir. Esto se asocia directamente con el periodo de una órbita periódica bajo σ y por lo tanto podemos encontrar un número infinito de órbitas de periodo arbitrariamente grande (hay una órbita periódica por cada número racional), y debido a la relación uno a uno que se tiene con los números racionales, aunque sea infinito el número de órbitas, serán numerables. Esto demuestra 1.

Ahora bien, cada número irracional también tiene una expresión en base binaria, el cual jamás tendrá un patrón repetitivo (pues si lo tuviera entonces sería racional). Por esta razón cada órbita no periódica del corrimiento σ tiene asociado biunívocamente un número irracional en forma binaria. Siendo la cardinalidad de los irracionales igual a \aleph_0 , lo que los distingue con la propiedad de no numerabilidad, llegamos a demostrar el segundo punto del teorema.

A manera de ejemplo, una órbita no periódica vendrá dado por el número π en forma binaria, colocando todos los dígitos de posición par del lado derecho del punto decimal y los de posición impar del lado izquierdo para así obtener nuestra bisucesión infinita.

Veamos ahora la tercera parte, que nos afirma que existe una órbita de σ que es densa.

Para obtener esta órbita procedamos de la siguiente manera. Para toda sucesión de longitud finita solo existe un número finito de posibilidades. Para ilustrar esto considere las primeras sucesiones binarias de longitud 1, 2 y 3:

- longitud 1: $\{0\}, \{1\}$
- longitud 2: $\{00\}, \{10\}, \{01\}, \{11\}$
- longitud 3: $\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}, \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}$

Podemos introducir un orden en estas sucesiones de la siguiente manera considerando si $s = \{s_1 \cdots s_k\}$ y $\bar{s} = \{\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_k\}$, decimos:

$$s < \bar{s} \quad \text{si } k < k',$$

$$\text{y si } k = k':$$

$$s < \bar{s} \quad \text{si } s_i < \bar{s}_i$$

donde i corresponde al primer entero tal que $s_i \neq \bar{s}_i$. Este ordenamiento nos da una forma sistemática para distinguir entre distintas sucesiones que tengan la misma longitud. De esta manera denotaremos las sucesiones binarias con longitud k de la siguiente forma

$$s_1^k < \dots < s_{2^k}^k,$$

donde el superíndice se refiere a la longitud de la sucesión y el subíndice se refiere a una secuencia en particular de longitud k que está especificada de manera única por nuestro método de ordenamiento. Esto nos proporciona una forma sistemática para escribir nuestro candidato a una órbita densa.

Considere ahora la siguiente sucesión:

$$s = \{ \dots s_8^3 s_6^3 s_4^3 s_2^3 s_2^2 \cdot s_1^1 s_1^2 s_3^3 s_1^3 s_3^3 s_5^3 s_7^3 \dots \}.$$

De esta forma s contiene todas las posibles sucesiones binarias de longitud finita. Ahora, para mostrar que la órbita de s es densa en Σ^2 , argumentamos lo siguiente: sea s' un punto arbitrario en Σ^2 y sea $\varepsilon > 0$ dado. Una ε -vecindad de s' consiste de todos los puntos s'' de Σ^2 tales que $d(s', s'') < \varepsilon$, con la métrica definida anteriormente. Por lo tanto, debido a la definición de la métrica en Σ^2 , debe existir un número entero $N = N(\varepsilon)$ tal que $s_i' = s_i'' \quad \forall |i| < N$. Ahora, por construcción, la sucesión finita $\{s'_{-N} \dots s'_{-1} s'_1 \dots s'_N\}$ está contenida en algún lugar de s ; por lo tanto debe existir un entero \bar{N} tal que $d(\sigma^{\bar{N}}(s), s') < \varepsilon$, así que podemos concluir que la órbita de s es densa en Σ^2 .

Ahora queremos relacionar la dinámica de s en Σ^2 a la dinámica del mapeo f (herradura de Smale) sobre su conjunto invariante Λ . Hasta este momento hemos demostrado la existencia de un mapeo Φ bien definido que asocia a cada punto $p \in \Lambda$ una sucesión binaria bi-infinita $(\Phi: \Lambda \mapsto \Sigma^2)$. Hemos notado que cualquier iterado de $p \in \Lambda$, digamos $f^k(p)$, puede ser encontrado al mover el punto decimal en la sucesión asociada con p , k veces a la derecha si k es positivo

o k veces a la izquierda si k es negativo. En particular, la relacion $\sigma \circ \Phi(p) = \Phi \circ f(p)$ es cierta para toda $p \in \Lambda$. Si Φ fuese invertible y continua (la continuidad es necesaria dado que f es continua), entonces se tendría lo siguiente:

$$\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi(p) = f(p), \quad \forall p \in \Lambda$$

Por lo tanto, si la órbita de $p \in \Lambda$ bajo f se denota por :

$$\{\dots f^{-n}(p), \dots, f^{-1}(p), p, f(p), \dots, f^n(p) \dots\},$$

dado que $\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi(p) = f(p)$, vemos que

$$f^n(p) = (\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi) \dots \circ (\Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi(p)) = \Phi^{-1} \circ \sigma^n \circ \Phi(p).$$

Por lo tanto la órbita de $p \in \Lambda$ bajo f correspondería directamente a la órbita de $\Phi(p)$ bajo σ en Σ^2 . En particular, la estructura de órbita completa de σ en Σ^2 sería idéntica a la estructura de f en Λ . Así que para verificar que esto suceda, basta ver que Φ es un homeomorfismo entre Λ y Σ^2 . Este resultado se tiene en el siguiente teorema (demostracion [4]):

Teorema: El mapeo $\Phi: \Lambda \mapsto \Sigma^2$ es un homeomorfismo.

Debido a este resultado podemos resumir la dinámica de la herradura de Smale, f , sobre el conjunto invariante Λ en el siguiente teorema, análogo al que se tiene para σ en Σ^2 :

Teorema: La herradura de Smale, f , tiene

1. una infinidad numerable de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente grande,
2. un número infinito no numerable de órbitas no periodicas,
3. una órbita densa.

Ahora bien, ¿en dónde se ve reflejado el caos? Sean dos puntos p y p' arbitrariamente cercanos. Su representacion en Σ^2 sea dada por s y \bar{s} . Dado que están arbitrariamente cercanos, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe una N tal que la

distancia $d(s, \bar{s}) < \varepsilon$ lo cual implica que $s_i = \bar{s}_i \forall |i| \leq N$. Esto quiere decir que para algún $M > N$ se debe encontrar que $s_M \neq \bar{s}_M$. Geométricamente esto implica directamente que p está en un rectángulo y p' está en otro y se tiene que la distancia $d(p, p') \geq 1 - 2\lambda$. donde λ es el factor de contracción. Por lo tanto, para cualquier punto $p \in \Lambda$, no importando que tan pequeña escojamos una vecindad, existe al menos un punto dentro de esta inmediación tal que después de un número finito de iteraciones, p y este punto se han separado por una distancia fija. Consecuentemente presenta una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

Órbitas Homoclínicas

Introducción

En los campos vectoriales definidos por los sistemas de ecuaciones diferenciales, como es bien sabido, muchas veces se tienen variedades invariantes estables e inestables asociadas a los puntos de equilibrio. Teóricamente, es posible que la intersección de una variedad inestable y una estable sea distinta del vacío. Cuando esto ocurre, se dice que dicha intersección genera una órbita homoclínica. En términos físicos, imaginemos que tenemos una partícula en el campo vectorial definido por nuestro sistema diferencial. Si colocamos la partícula exactamente sobre la variedad inestable, resultará que su trayectoria coincidirá con la variedad estable.

Una órbita heteroclínica se puede dar en un campo que tenga cuando menos dos puntos fijos, y consiste de la trayectoria que tiende hacia el primer punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$ y al segundo punto fijo cuando $t \rightarrow -\infty$. Es decir, la intersección de la variedad estable del primer punto con la variedad inestable del segundo punto, genera la órbita heteroclínica.

En años recientes se ha vuelto aparente que las órbitas homoclínicas y heteroclínicas muchas veces son el mecanismo para el surgimiento del caos y para explicar el caos momentáneo que se observa en algunos sistemas físicos.

En resumen, las órbitas homoclínicas son generadas por la intersección (no transversal) de las variedades estable e inestable. En sistemas planos la órbita homoclínica también se conoce como separatriz. Véase la figura 9.

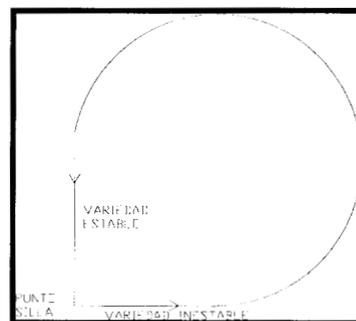


figura 9

El método de análisis de las órbitas homoclínicas utilizado requiere que ésta sea un conjunto invariante, lo cual sucede en dimensiones dos y tres pero no en otras de orden superior.

Otra de las sugerencias que ha aparecido en la literatura en un esfuerzo por encontrar una razón de ser del comportamiento caótico de las ecuaciones es la aparición de una bifurcación de Hopf. Recordemos que una bifurcación de Hopf se da cuando tenemos un sistema con un punto de equilibrio alrededor del cual la parte lineal del campo vectorial tiene un par de valores propios complejos con parte real negativa, y al variar el parámetro del sistema la parte real se convierte en cero. Matemáticamente eso es lo constituye una bifurcación de Hopf, pero en términos más coloquiales lo podemos visualizar un campo vectorial que espiralea hacia el punto fijo y que al variar un parámetro de la ecuación, el espiraleo se vuelve menos pronunciado hasta el valor de bifurcación, cuando el punto fijo se convierte en un centro. En particular esta situación se da cuando los valores propios del punto fijo son imaginarios, y su parte real se vuelve cero en el valor de la bifurcación. Con respecto al sistema de ecuaciones de Lorenz, en el capítulo primero vimos que esto sucede cuando $r = \frac{p(p+b+3)}{(p-b-1)}$. Lo curioso del asunto es que la aparición del comportamiento caótico ocurre antes de que se aparezca la bifurcación de Hopf. Por lo tanto, no es posible concluir que este tipo de bifurcación sea el causante del comportamiento observado, pero tampoco se puede descartar que tenga alguna influencia.

La órbita homoclínica en el sistema de Lorenz

Ya hemos visto que para que C_1 y C_2 sean sumideros es necesario que $1 < r < \frac{p(p+b+3)}{p-b-1}$. Además, para estos valores de r vimos que el origen tiene dos dimensiones estables y una inestable, lo cual implica que la variedad estable divide el espacio \mathfrak{R}^3 en dos mitades en las cuales se encuentra inestabilidad. Es imposible que el flujo que está de un lado de esta superficie estable de dos dimensiones logre pasar al otro lado, ya que estas subvariedades son invariantes: de un lado está C_1 y del otro C_2 . Por lo tanto las trayectorias que comienzan en una mitad del espacio se van hacia C_1 y las que comienzan en la otra mitad se van hacia C_2 y jamás pueden espiralar hacia el origen, ya que están en una parte del espacio que tiene una componente de la variedad inestable. Al aumentar el valor de r hace su aparición una órbita homoclínica. Esto se puede ver esquematizado en la figura 14. A este valor de r donde hace su aparición la órbita homoclínica, denotémoslo por r' . Luego, conforme r se acerca a r' , en el intervalo $\left(1, \frac{p(p+b+3)}{p-b-1}\right)$ las trayectorias que comienzan en la variedad inestable del origen espiralean hacia C_1 y al pasar $r > r'$ comienzan a espiralar hacia C_2 lo cual indica que, por continuidad del flujo, debe haber una órbita homoclínica. Además, la variedad estable del origen debe tener una forma bastante irregular para que esto pueda ocurrir, ya que ninguna trayectoria la puede cruzar transversalmente. Una demostración más rigurosa de la existencia de esta órbita homoclínica puede encontrarse en la referencia [3]

Encontremos el valor de r' de la órbita homoclínica.

La dirección inestable del origen viene dado por $(1, \kappa, 0)$. Entonces comenzamos una trayectoria allí, integrando por Runge Kutta de orden cuarto, y vemos hacia cual de los dos puntos de equilibrio asintóticamente estables converge. Después incrementamos r por Δr y vemos si converge al mismo punto y repetimos la acción hasta que converja a un punto distinto. Cuando esto ocurre restamos Δr y hacemos $\Delta r = \Delta r / 10$, y repetimos el ciclo. Un método de convergencia como el de Newton Raphson es más rápido que este, pero el tiempo en que se obtuvieron los resultados no justificó el cambiar de método. Se

obtuvo $r' \approx 13.85$, el cual es un valor distinto al reportado por Sparrow[7]. Repitiendo los cálculos pero ahora con el punto inicial igual a $(1/\kappa, 1, 0)$, obtenemos $r \approx 13.92$, como Sparrow, debido a que este punto está más cercano al origen, pero debemos notar que tampoco es correcto, ya que si tomamos $(1/\kappa^2, 1/\kappa, 0)$ nos da $r \approx 13.87$. Esto es porque el valor que estamos tomando está sobre la variedad inestable pero de la parte lineal, y esta nunca coincidirá exactamente con la variedad inestable real, donde se localiza la órbita homoclínica. Y solo podemos concluir que por allí anda el valor de r' : nunca se podrá determinar con exactitud mediante un método numérico. La reproducción de estos resultados se puede lograr ya sea programando los métodos numéricos, o bien utilizando los programas que fueron obtenidos en el desarrollo de esta tesis (específicamente *orbitas.c*) y que se encuentran disponibles en el servidor público de <ftp://ftp.imp.mx/pub/lorenz>.

CAPÍTULO III

ESTUDIOS SOBRE EL SISTEMA DE LORENZ

Comportamiento estudiado de las ecuaciones de Lorenz

Bifurcaciones

En su libro sobre el tema, Colin Sparrow [13] hace referencia a varios autores que han encontrado órbitas periódicas estables en algunos intervalos del parámetro r , manteniendo constantes los otros parámetros.

El primer intervalo donde hace su aparición este fenómeno ocurre cuando r tiene un valor aproximado a 100. El segundo es más amplio e incluye el valor donde $r=150$, y, por último, el tercero tiene valores del parámetro r en el intervalo abierto $(200, \infty)$. Para cualquier simulación numérica hecha fuera de estos intervalos, hasta la fecha, sólo se ha encontrado caos. Consecuentemente, procederemos a explicar estas ventanas de bifurcación, mencionando antes unos detalles sobre la teoría de bifurcación.

Notemos que en la discusión a continuación, todas las bifurcaciones son respecto del parámetro r , manteniendo fijos los otros dos parámetros en los valores $\sigma=10$, $b=8/3$.

1. Bifurcación Silla-nodo

En este tipo de bifurcación, de un lado del valor de bifurcación del parámetro r no aparece ninguna órbita periódica, y del otro hace su aparición una órbita estable (nodo) y uno inestable (silla). Esto lo podemos ver resumido esquemáticamente en la figura 10.

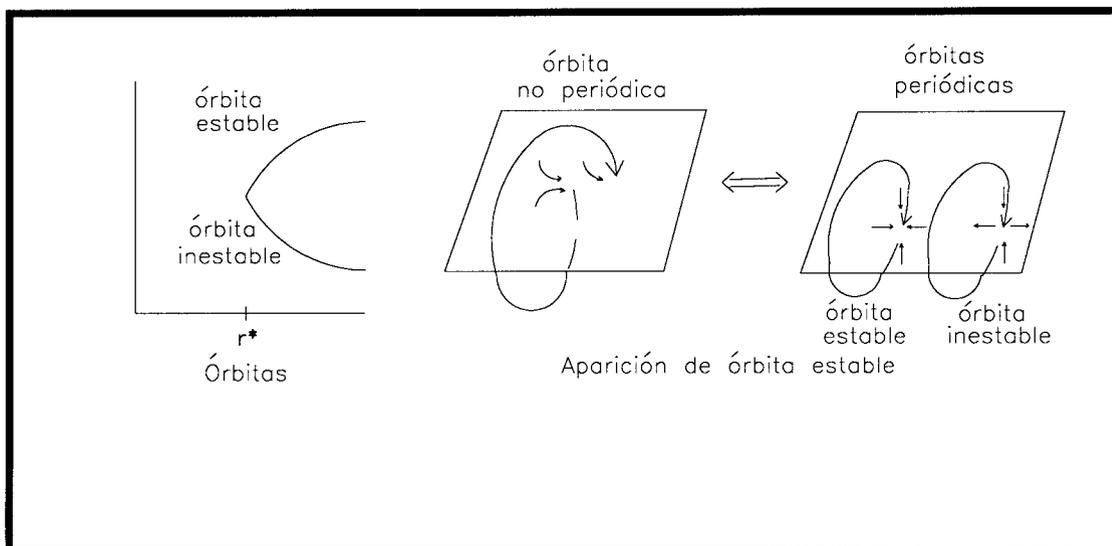


figura 10

2. Bifurcación silla-nodo simétrico (o rompimiento de simetría)

De un lado del valor de bifurcación tenemos dos órbitas periódicas estables y una órbita inestable que se van acercando uno a otro conforme nos acercamos al valor de la bifurcación. Del otro lado sólo resta una órbita periódica simétrica y estable (la simetría se transfiere a las órbitas no estables (véase la figura 11).

3 Bifurcación de duplicación de periodo.

En este caso lo que sucede es lo siguiente: de un lado del valor de bifurcación tenemos una órbita periódica de periodo T , mientras que del otro surge una órbita estable de periodo $2T$ (Sigue existiendo la órbita de período T , pero se vuelve inestable y es imposible de localizar numericamente.) Esto sólo puede ocurrir en órbitas no simétricas. Véase la figura 12.

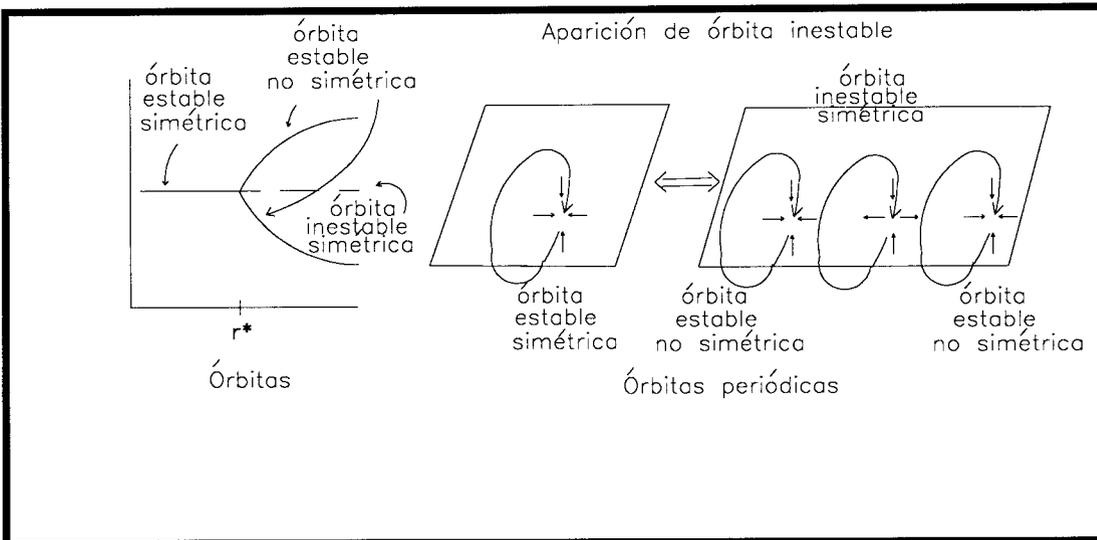


figura 11

Estas no son las únicas bifurcaciones que existen, pues además, por ejemplo,

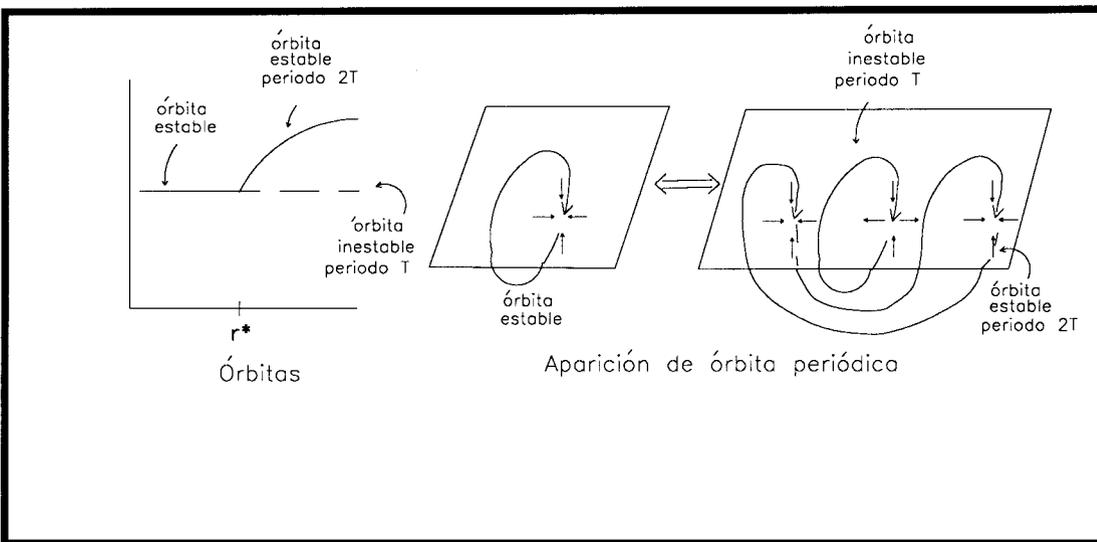


figura 12

puede suceder que una órbita periódica se bifurque a un toro invariante, es decir, que la orbita periodica deje de serlo y comience a moverse sobre la superficie de un toro invariante. Esto sería análogo a una bifurcación de Hopf para periodos

estacionarios. En las ecuaciones de Lorenz esto no puede suceder ya que debe cumplirse la contracción de volúmenes, y por lo tanto el toro no puede ser invariante.

Analizamos ahora lo que ocurre en cada una de estas ventanas de bifurcación.

En la ventana $99.524 < r < 100.795$ tenemos una bifurcación de duplicación de periodo. La órbita periódica involucrada la podemos representar simbólicamente como $X2Y$, ya que el flujo gira dos veces alrededor del punto X antes de girar una vez alrededor del punto Y , véase la figura 13. Esta ventana en particular fue estudiada por Franceschini en 1980 [14]. En el intervalo $(99.98, 100.795)$ todos los flujos convergen hacia la órbita $X2Y$ mencionada. En el intervalo $(99.629, 99.98)$ existe una órbita estable de tipo $X2YX2Y$, (ó $(X2Y)2$). El periodo de la órbita se ha duplicado. Cuando r se acerca a 99.98 las dos vueltas que da la

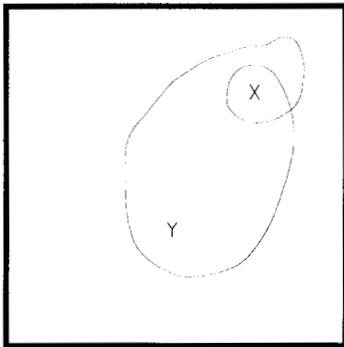


figura 13

órbita se acercan tanto una a la otra que se fusionan y se forma la órbita $X2Y$. Sparrow supone que durante la existencia de la órbita estable de periodo $2T$, sigue existiendo, pero de forma inestable, la órbita de periodo T . Esto es una consecuencia lógica de la teoría de bifurcaciones y del modelo geométrico que se adaptó a las ecuaciones de Lorenz, pero debemos recordar que como no se ha demostrado la existencia de una foliación contractiva, es tan solo una suposición la existencia

de esta órbita inestable. Puede existir o puede no existir, pero de ninguna forma la podemos encontrar numéricamente dada su naturaleza inestable.

Para el intervalo $(99.547, 99.629)$ con respecto del parámetro r , ocurre otro doblamiento de periodo y aparece $(X2Y)4$. Las próximas bifurcaciones aparecen en 99.5298 y 99.5255. De aquí podemos notar que el intervalo entre las bifurcaciones se hace cada vez más pequeño conforme disminuye r . Todo parece indicar que al seguir por este camino aparecerán un número infinito de bifurcaciones en un valor límite del parámetro r . Existen buenas razones para suponer esto en base a que Feigenbaum en 1978 [15] y otros demostraron que

hay propiedades *universales* asociados a este tipo de bifurcaciones. En particular, el límite existe y esta dada por la fórmula:

$$\lim \frac{r_{n-1} - r_n}{r_n - r_{n+1}} = \delta \cong 4.669201\dots$$

donde r_n es el valor del parámetro donde ocurre la bifurcación n-ésima. Inicialmente Feigenbaum realizaba cálculos de duplicación de periodo para la función $x_{t+1} = r \operatorname{sen} \pi x_t$. Debido a sus limitaciones en procesamiento de cómputo, buscó una manera más sencilla de encontrar el valor límite y se dio cuenta de que convergían geoméricamente. Calculando la razón de convergencia para esta ecuación obtuvo 4.669. Notó poco después que la razón de convergencia para la duplicación de periodo en la ecuación logística también era de 4.669.

Al seguir experimentando con otras funciones que presentaban el fenómeno de duplicación de periodo, siempre obtuvo el mismo número llegando a una precisión de 4.6692016090 para todas las funciones que probó, independientemente de que fueran cuadráticas o trigonométricas.

Con este antecedente, y siguiendo sus propios cálculos, Franceschini examinó el valor que le daban sus cálculos y determinó un valor de 4.67 para el límite. Usando el δ de Feigenbaum, Franceschini calculó entonces $r_\infty \approx 99.5214$. Para valores cercanos a 100.795 tenemos la órbita $X2Y$ y para $r > 100.795$ ya no aparecen. La bifurcación en 100.795 es de tipo silla nodo. Por abajo del valor de $r = 99.524$, el número infinito de órbitas periódicas que nos quedan pierden su estabilidad.

Veamos ahora la ventana de desdoblamiento del intervalo (145,166). En este caso la órbita periódica involucrada es de periodo $X2Y2$ y fue estudiada por Manneville y Pomeau [16]. Es similar a la expuesta hace un momento, pero a diferencia, ésta involucra una órbita periódica estable *simétrica*. De hecho, en el valor del parámetro de 154.4 hay una bifurcación de rompimiento de simetría y la órbita simétrica estable pierde su simetría a un par de órbitas $X2Y2$ no simétricas, las cuales son estables en el intervalo (148.2,154.4). No obstante, se supone que continúa la existencia de la órbita simétrica, pero por ser inestable es

imposible de localizar mediante cualquier método numérico. En el valor del parámetro igual a 148.2 las órbitas $X2Y2$ no son simétricas vistas solas, pero una es simétrica a la otra, y en este valor del parámetro empiezan las bifurcaciones de doblamiento de periodo hasta llegar a $r_{\infty} \approx 145$.

Caos intermitente

Veamos qué pasa por encima de una ventana de doblamiento de periodo, donde ocurre el fenómeno conocido como *caos intermitente*. Para $r=166.07$, por ejemplo, ya no existe la órbita $X2Y2$ estable simétrica: lo que ocurre es un caos intermitente. Las órbitas fluyen sobre la órbita periódica con periodos intermitentes de caos. La duración del periodo caótico varía, incrementándose según nos alejamos de r_∞ .

La longitud de los intervalos laminares (donde el flujo sigue el de la órbita periódica) varía proporcionalmente según $\frac{1}{(r-r_c)^{1/2}}$ (r_c es el valor donde desaparece la órbita simétrica periódica).

Se puede explicar este comportamiento de la siguiente manera. Dibujando un mapeo de retorno en el

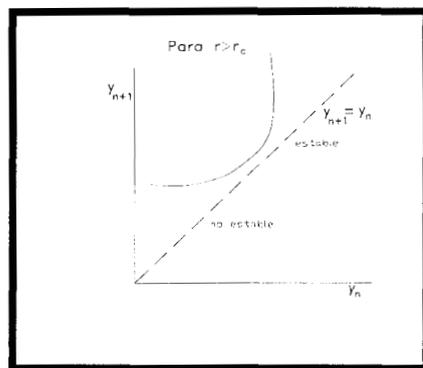


figura 15

plano $x=0$ observamos que todos los puntos están sobre una curva. En el caso de $r < r_c$ tenemos dos puntos fijos, donde uno corresponde a la órbita periódica estable y la otra a la órbita periódica no estable. Véase la figura 14.

Cuando $r > r_c$, la órbita periódica ha

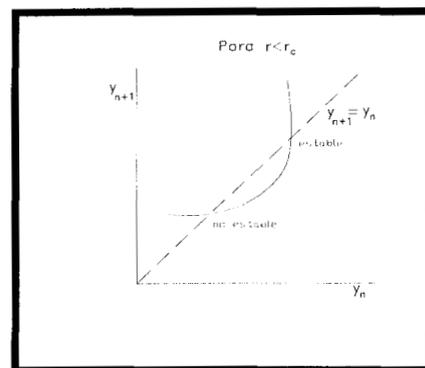


figura 14

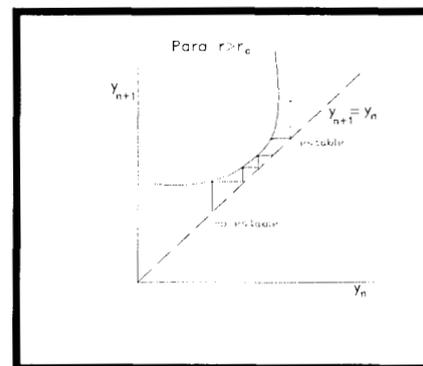


figura 16

desaparecido como se observa en la figura 15. No obstante cuando el flujo que se mueve en forma caótica cae en el intervalo que está debajo de la curva, entonces empieza a viajar por la órbita periódica durante un tiempo, esquematizado en la figura 16, y mientras más alejada está la curva de la recta $y_n = y_{n+1}$, durante menos iteraciones estará sobre la órbita periódica.

Manneville y Pomeau en 1979 [16] supusieron que la curva era cuadrática y que además la curva se aleja de la recta $y_n = y_{n+1}$ a una velocidad constante al variar el parámetro r , y con ello obtuvieron que el número de pasos durante el cual se sigue la órbita periódica varía proporcionalmente a $\frac{1}{(r - r_c)^{1/2}}$.

Periodicidad ruidosa

Otro fenómeno que se observa en las ecuaciones de Lorenz es la *periodicidad ruidosa*. Para analizar esto veamos qué ocurre con la ventana XY de doblamiento de periodo que comprende el intervalo $(214.368, \infty)$. Esta ventana de la órbita periódica es similar a la que corresponde a la órbita $X2Y2$, pero ahora la órbita simétrica sigue existiendo en el intervalo $(313, \infty)$. Mediante cálculos computacionales se obtiene el valor $r_\infty = 214.364$, y la periodicidad ruidosa hace su aparición para valores donde $r < r_\infty$. Pero antes debemos dar un par de definiciones.

Plano de retorno: Un plano de retorno es una sección, de codimensión uno, transversal al flujo de una ecuación diferencial.

Semi-periodicidad: Supongamos que para un plano de retorno podemos localizar n regiones conectadas E_1, E_2, \dots, E_n (tales que $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \leq n, i \neq j$) tales que todas las trayectorias pasan por estas regiones en orden cíclico. Entonces decimos que el sistema es semiperiódico de periodo n .

Lo curioso es cuando $r \rightarrow r_\infty$ por debajo. Ocurre que el sistema se vuelve semiperiódico con periodos $2, 4, 8, \dots, 2^n, 2^{n+1}, \dots$ y cuando $r \rightarrow r_\infty, n \rightarrow \infty$. Y este sistema semiperiódico se junta con el sistema periódico cuando ambos tienen periodo infinito, en el punto r_∞ .

En resumen, la ventana $X2Y$ es un ejemplo de una ventana que involucra órbitas no simétricas, dos de las cuales desaparecen en una bifurcación silla-nodo.

La ventana $X2Y2$ es un ejemplo de una ventana con una órbita simétrica que eventualmente desaparece en una bifurcación silla-nodo.

La ventana XY es única en el sentido de que la órbita simétrica estable, una vez que aparece, permanece para todo valor del parámetro r , no importa qué tan grande esta sea. Además, por encima de las ventanas de doblamiento de periodo (r grande) encontramos caos intermitente y por debajo de estas ventanas (r pequeña) tenemos el fenómeno de la periodicidad ruidosa.

Es de hacer mención que estas bifurcaciones no son las que se analizaron en un principio, puesto que estas son bifurcaciones relevantes a los flujos y no de puntos fijos. Hasta el momento no hay ningún método analítico que nos permite encontrar los valores de bifurcación de las órbitas periódicas y estas se deben encontrar numéricamente. Según el modelo geométrico que hemos estudiado, la representación simbólica de la herradura de Smale nos indica que tendremos un número infinito de órbitas periódicas. Esto nos conduce a suponer que deben existir más ventanas como las recién estudiadas. Quizás sea necesario una elección distinta de los otros dos parámetros de la ecuación para que estos puedan ser localizados numéricamente, lo cual nos lleva a hacernos las siguientes preguntas:

¿Qué pasa con las ventanas $X2Y$, $X2Y2$, y XY al variar el parámetro b ?

¿Qué pasa con las ventanas al variar p ?

¿Qué pasa con el sistema, qué bifurcaciones y ventanas tiene, al variar b dejando fijos a p y r ? Estas ventanas, ¿cómo varían al variar r ó p ?

¿Qué pasa con el sistema, qué bifurcaciones y ventanas tiene, al variar p dejando fijos a b y r ? Estas ventanas, ¿cómo varían al variar r ó b ?

Localización de órbitas periódicas

Metodo numérico para la localización

Un método para localizar las órbitas periódicas, y seguir las al variar el parámetro r , aparece en la referencia [9] y se detalla a continuación.

La función de la cual queremos encontrar la raíz la construimos de la siguiente manera: sea Σ una sección transversal de codimensión uno y sea $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ la función de Poincaré y busquemos los ceros de la función $P-I$, donde I =identidad. Cuando hayamos encontrado $P(x_0) - I(x_0) = 0$, tendremos que x_0 estará sobre una órbita periódica. Para definir P y poder aplicar el método de Newton-Raphson observemos lo siguiente. El método utilizado para encontrar órbitas periódicas es básicamente el de Newton-Raphson. Es decir, encontrar los ceros mediante la fórmula de iteración $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Si $\Phi(x,t)$ es una solución del sistema y $\tau(x)=t$ es la función que nos da el tiempo que tarda la trayectoria en volver a intersectar la sección transversal, entonces tenemos que

$$DP(x) = D_x \Phi(x, \tau(x)) + \frac{d}{dt} \Phi(x, \tau(x)) D\tau(x) ,$$

puesto que $P(x)=\Phi(x,\tau(x))$.

De esta ecuación podemos notar que $D_x \Phi(x,t)$ es solución de la ecuación variacional correspondiente: $\frac{d}{dt} H(x,t) = J(\Phi(x,t))H(x,t)$, recordando que $J(\Phi(x,t))$ es la matriz jacobiana evaluada en $\Phi(x,t)$. De aquí se pueden obtener $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$ al resolver la ecuación variacional. En el caso de la ecuación de Lorenz, esto equivale a resolver nueve ecuaciones diferenciales parciales, a decir:

$$1^* \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial x_0 \end{pmatrix} = P \left[\frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial x_0} \right]$$

$$2^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial y_0} \right) = p \left[\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \right]$$

$$3^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial z_0} \right) = p \left[\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \right]$$

$$4^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = r \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0} - x \frac{\partial z}{\partial x_0} - z \frac{\partial x}{\partial x_0}$$

$$5^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) = r \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0} - x \frac{\partial z}{\partial y_0} - z \frac{\partial x}{\partial y_0}$$

$$6^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z_0} \right) = r \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0} - x \frac{\partial z}{\partial z_0} - z \frac{\partial x}{\partial z_0}$$

$$7^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) = x \frac{\partial y}{\partial x_0} - y \frac{\partial x}{\partial x_0} - b \frac{\partial z}{\partial x_0}$$

$$8^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) = x \frac{\partial y}{\partial y_0} - y \frac{\partial x}{\partial y_0} - b \frac{\partial z}{\partial y_0}$$

$$9^*. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) = x \frac{\partial y}{\partial z_0} - y \frac{\partial x}{\partial z_0} - b \frac{\partial z}{\partial z_0}$$

De estas ecuaciones no es necesario resolver la 3, 6, y 9 ya que escogemos nuestra sección transversal sobre un plano donde la variable z es constante. Para resolver estas ecuaciones basta notar que con las parciales de x , y y z respecto de x_0 , y_0 y z_0 se puede hacer un cambio de variable y las nueve ecuaciones se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias de las cuales se conoce la solución exacta.

Ahora bien, si nos fijamos en el plano de retorno, podemos definir una función $g(x)$, la cual nos dará la distancia entre x y el punto sobre el plano de retorno, partiendo del punto inicial x . Si el valor de $g(x)$ es igual a cero, entonces se ha encontrado una órbita periódica, y por lo tanto el problema se reduce a encontrar la raíz de la función $g(x)$. Definamos de esta forma la función $g(x)$ en términos de sus componentes, de la siguiente manera:

$$g_1(\bar{x}, t) = \Phi_1(\bar{x}, t) - x_1 = x - x_0$$

$$g_2(\bar{x}, t) = \Phi_2(\bar{x}, t) - x_2 = y - y_0$$

$$g_3(\bar{x}, t) = \Phi_3(\bar{x}, t) - c = z - c$$

Donde c es la que nos define el plano constante de nuestra z , i.e.: $z=c$.

Aplicando Newton-Raphson a $g(x)$, considerando que $Dg = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]$, donde

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} - \delta_{ij}. \text{ En esta forma cabe señalar que}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por las reglas de cálculo con respecto a la derivación de una función dada en forma implícita, en nuestro caso en particular resulta:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_0} - 1 \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y_0} \quad \frac{\partial g_1}{\partial z_0} = \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z_0}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_0} \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y_0} - 1 \quad \frac{\partial g_2}{\partial z_0} = \frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z_0}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial x_0} = \frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_0} \quad \frac{\partial g_3}{\partial y_0} = \frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y_0} \quad \frac{\partial g_3}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z_0} - 1$$

Debido a que $\frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{\partial g_3}{\partial y} = \frac{\partial g_3}{\partial z} = 0$ tenemos lo siguiente a partir de las

ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial t}{\partial x_0} = - \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial t}{\partial y_0} = - \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial t}{\partial z_0} = - \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

Por lo tanto tenemos todo lo que necesitamos para calcular Dg y aplicar la fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ hasta encontrar la raíz que buscamos, un punto sobre

la órbita periódica. El algoritmo es el siguiente:

1. Este quizás sea el punto más importante. Se debe escoger un punto inicial que no este muy alejado de la órbita periódica. No hay ningún método para determinar esto y lo único que parece ayudar es la familiaridad con el problema y un poco de suerte.
2. Calcular el periodo t que tarda la trayectoria que pasa por (x_0, y_0, z_0) en volver a cruzar el plano $z = z_0$ en el mismo sentido y en una posición cercana. En este paso también se obtiene el punto (x, y, z_0) .
3. Con el periodo t integrar las ecuaciones diferenciales 1*, 2*, 4*, 5*, 7*, 8* para obtener las parciales de la $x, y, y z$ con respecto al punto inicial.
4. Obtener $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, y $\frac{\partial z}{\partial t}$ al evaluar los componentes del campo vectorial en el punto (x_0, y_0, z_0) .
5. Por sustitución obtener la matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - 1 & \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) & \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial z}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) & \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial y_0} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) & -1 \end{bmatrix}$$

$$6. \text{ Calcular la derivada direccional: } Dg = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dg_x \\ Dg_y \\ Dg_z \end{bmatrix}.$$

7. Calcular el nuevo punto (x_1, y_1, z_1) mediante la fórmula de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - \frac{x - x_0}{Dg_x} \\ y_0 - \frac{y - y_0}{Dg_y} \\ z_0 \end{bmatrix}$$

8. Verificar si $(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0)$, y si no reemplazar el valor de (x_0, y_0, z_0) y comenzar el ciclo otra vez. Una característica importante es que necesitamos hacer una buena suposición inicial para que resulte el método, de lo contrario fracasará. Algunos ejemplos de puntos sobre órbitas periódicas de distintos tipos son los siguientes:

r	p	b	x	y	z
100	10	8/3	-20.217644	-32.763798	99.00
28	10	8/3	-12.786189	-19.364189	24.00
15.8	10	8/3	-10.780017	-6.675985	24.00

El bacín de atracción de los puntos fijos en el intervalo (r_A, r_H)

Concepción teórica

Como resultado del análisis que se ha venido haciendo, se ha notado que el comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz hace su aparición en un valor del parámetro r_A anterior a la aparición de la órbita homoclínica cuando $r=r_H$. Es decir, el comportamiento caótico aparece cuando todavía se da la existencia de dos puntos de equilibrio asintóticamente estables. Naturalmente surge la pregunta: ¿En que vecindades serán decisivos los factores estables de estos puntos de equilibrio? En otras palabras, ¿cuál será la forma que tienen los bacines de estos puntos? Por el teorema de Hartman y Grobman, sabemos que para todo punto de equilibrio de un campo vectorial, existe una vecindad a su alrededor en donde se puede considerar el campo como si estuviese compuesto únicamente por su parte lineal. Esto quiere decir que dentro de esta vecindad, todo flujo se dirigirá irremediamente hacia el punto fijo. Esto implica, de manera directa, que no todos los flujos en el intervalo (r_A, r_H) pueden ser caóticos.

Pero debe recalcarse que cuando $r=r_H$ los puntos fijos desaparecen, y por lo tanto es lógico pensar que los bacines se reducen a un conjunto vacío. No obstante, cuando $r < r_A$, todo flujo del espacio muere en cualquiera de los dos puntos de equilibrio y por ende el espacio está separado en dos conjuntos, es decir, dos conjuntos formados por los bacines de los dos puntos de equilibrio. ¿Cómo es que cambia la forma del bacín conforme movemos el parámetro r dentro del intervalo (r_A, r_H) ?

Búsqueda numérica

Para resolver estas interrogantes se codificó una serie de programas cuyo resultado final fue el archivo denominado ixch3b.c (y que se encuentra ftp anónimo en //ftp.imp.mx/pub/lorenz) para determinar la forma del bacín en el intervalo que nos interesa. Básicamente el programa funciona de la siguiente forma:

1. Partiendo del punto de equilibrio se obtienen n rayos que parten en todas direcciones, manteniendo constante el ángulo entre cualesquiera dos rayos contiguos.
2. Para cada rayo se resuelven los siguientes pasos.
3. Partiendo de un punto en una vecindad muy pequeña se calcula el flujo que pasa por allí y se verifica si penetra en la vecindad del punto donde el comportamiento lo podemos asumir como lineal.
4. Si lo anterior ocurre procedemos a repetir el cálculo con un punto sobre el mismo rayo pero un poco más alejado.
5. Se repiten las operaciones anteriores hasta encontrar el primer punto donde el flujo nunca entra a la vecindad lineal del punto de equilibrio. Este punto ya está afuera del bacín.
6. Se regresa uno al punto anterior y nos alejamos ahora solamente $1/10$ de la distancia.
7. Se repiten los pasos 3 a 5.
8. Si no se ha alcanzado la precisión deseada se repiten los pasos 5 y 6.

Resultados del proceso de cómputo

En la figura 17 podemos ver graficados la proyección sobre dos dimensiones de las figuras tridimensionales que se obtuvieron con este programa. El diagrama nos muestra la forma para el bacín en $r=r_A$, seguido por otro valores donde sucesivamente el parametro se va acercando a r_H . Cuando $r \rightarrow r_H$, el tamaño del bacín tiende al punto de equilibrio de una forma muy rápida. En esta figura se ve que el bacín de atracción se va reduciendo para desaparecer de súbito cuando $r = r_H$ (como en efecto nos dice la teoría, ya que desaparecen los puntos fijos.)

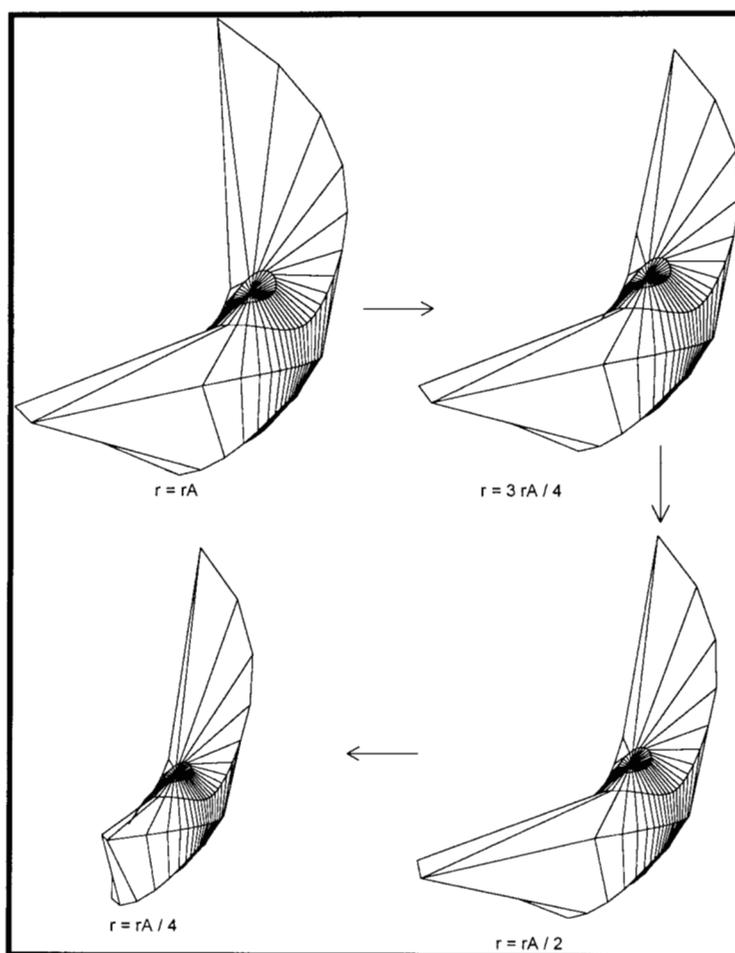


figura 17

El detalle interesante es el hecho de que el bacín para el valor de $r = r_A - 0.1$ no difiere en nada para el que se obtiene con $r=r_A$. Y según lo que se conoce del comportamiento de las ecuaciones de Lorenz el bacín debe poder abarcar cuando menos la mitad de \mathbb{R}^3 , para cada uno de los dos puntos de equilibrio asintóticamente estables (numéricamente todas las trayectorias terminan en uno o en otro de los puntos de equilibrio). Este fenómeno lo aclaramos en el siguiente párrafo.

Cuando se siguió buscando la forma para otros valores del parámetro r se obtuvo que la forma del bacín pierde su suavidad. Por ejemplo en la figura 18 tenemos el bacín obtenido para un valor del parámetro $r = r_A - 1.5$.

Esto nos condujo a un análisis del programa computacional que calcula el bacín y la forma que lo hacía. Por la definición, el bacín es el conjunto de puntos tales que el flujo que pasa por ellos tiende inequívocamente hacia el punto fijo cuando el tiempo tiende hacia el infinito. Pero esto es técnicamente imposible de calcular en la computadora en un tiempo finito. Por lo tanto se optó por calcular el bacín como el conjunto de puntos a través de los cuales el flujo que pase por ellos se acerca arbitrariamente al punto fijo. Si fijamos una ε lo suficientemente pequeña, entonces por el teorema de Hartman y Grobmann el comportamiento del sistema en esa vecindad será de forma lineal y no será muy aventurado suponer que la bola de radio ε está contenido en el bacín; por lo tanto, de esta forma podemos obtener una buena aproximación del bacín. Utilizando una

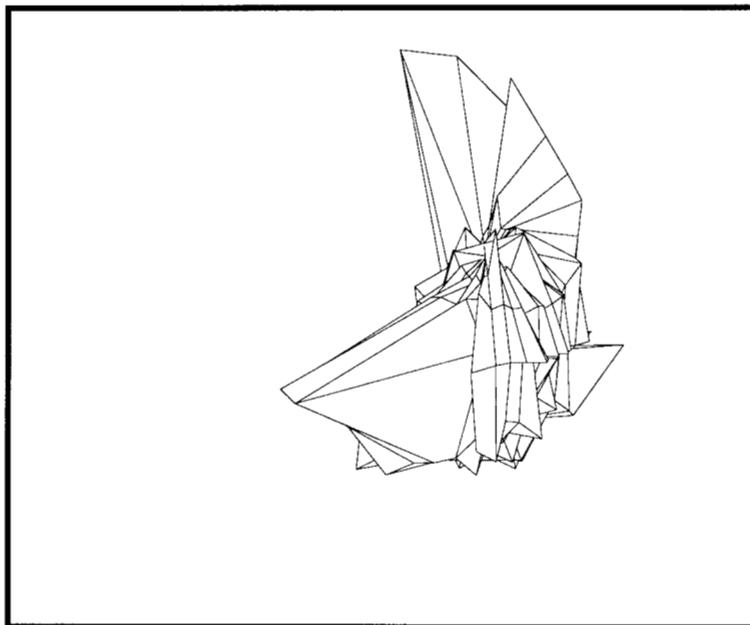


figura 18

$\varepsilon=0.01$ el tiempo requerido para calcular la forma del bacín para un solo valor del parámetro fue de aproximadamente una hora, pero el hecho de obtener la forma antes mencionada nos indicó que debíamos reducir la ε . Esto se hizo llevándose hasta $\varepsilon=0.00001$ y

700,000 iteraciones por punto, (25 horas de tiempo de cómputo por cada bacín) para obtener, a final de cuentas, exactamente los mismos resultados. Al alejarnos

más del valor r_A , como se observa en la figura 41, el bacín pierde su forma suave, y esto es lógico ya que debe extenderse tan lejos como queramos.

La pregunta que surge es ¿por qué permanece la forma suave del bacín en una zona donde no existe caos y solo gradualmente pierde su forma para abarcar claramente un conjunto amorfo con puntos arbitrariamente distantes de los puntos fijos?

Esto es porque estamos en una zona de preturbulencia, de caos no estable, es decir, las trayectorias parecen caóticas pero tarde o temprano espiralean hacia uno de los puntos fijos, y conforme pierde la forma continua el bacín, desaparecen estas órbitas preturbulentas. Aquí tenemos un tipo de bifurcación no contemplado en la literatura sobre el asunto de las ecuaciones de Lorenz.

Lo que estamos observando aquí es una bifurcación en donde hay un cambio drástico en el campo vectorial pero donde los puntos de equilibrio sólo juegan un papel secundario. Los puntos de equilibrio, localmente hablando, siguen siendo asintóticamente estables, pero la vecindad local en donde lo son no se puede determinar con precisión por el efecto de la preturbulencia. Curiosamente, la forma de la vecindad en donde no ocurre la preturbulencia concuerda con la forma del bacín de estabilidad en el rango del parámetro donde se observa comportamiento caótico.

CAPÍTULO IV

ESTUDIOS DE UN SISTEMA DE LORENZ ACOPLADO

Introducción

En este capítulo trataremos con el fenómeno conocido como la sincronización. Desde un punto de vista intuitivo, la sincronización aparece de manera natural en la vida diaria como por ejemplo se ha visto que en algunas partes del mundo las luciérnagas brillan en la oscuridad al mismo tiempo, de forma sincronizada. También lo podemos observar en una pareja de personas caminando, que comienzan con pasos distintos y que después de un rato de andar sus pasos se han sincronizado, involuntariamente. También se ha observado que un grupo de mujeres viviendo en un dormitorio común universitario, después de un tiempo han sincronizado su regla. En sistemas con reacción química se ha observado la sincronización, y esto, en un futuro, podrá ser una herramienta para reducir costos de producción y volver más eficientes a las empresas de la transformación industrial. Esto ha motivado el estudio de los sistemas acoplados, ya que en los últimos años han aparecido varios artículos donde se aplica esta técnica. El enfoque que presentamos aquí es puramente matemático o teórico. En un futuro próximo trataremos de aplicar esto a problemas concretos. Cuando ocurre la sincronización, el flujo de dos ecuaciones cuyo comportamiento podría ser caótico, es decir, impredecible, comienzan a acercarse el uno al otro hasta que sus

comportamientos son casi idénticos. Aunque no podamos predecir *a priori* la trayectoria que estos flujos seguirán, podemos predecir que serán casi indistinguibles. Todo esto se logra mediante la adición de un término de acoplamiento a ambos sistemas. Con la adición de este término, nos movemos de dos sistemas en \mathcal{R}^3 a uno en $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$.

Para hacer el estudio correspondiente, es necesario definir rigurosamente algunos términos, como *función de Lyapunov estricta y no estricta, sistema acoplado, flujo de acoplamiento, sincronización y pseudosincronización*. Todo esto lo aplicaremos a un par de sistemas de Lorenz acoplados de manera lineal. Más adelante veremos qué quiere decir esto. El fenómeno de la sincronización es muy curioso, ya que cada una de las dos partes del sistema acoplado puede tener un comportamiento caótico muy complejo, como en el caso de las ecuaciones de Lorenz. Como puede recordarse del material visto en los capítulos anteriores, dependiendo del valor de los parámetros en el sistema de Lorenz, se puede tener un comportamiento con movimiento caótico sujeto a un atractor extraño.

El material que se desarrolla a continuación consta de tres partes :

1. Definiciones y demostración de la existencia de un conjunto positivamente invariante para un sistema de Lorenz mediante una función de tipo Lyapunov.
2. Definiciones y demostración de un conjunto positivamente invariante para un sistema de Lorenz acoplado.
3. Estudio numérico y demostración de la sincronización en un sistema de Lorenz acoplado.

Conjunto positivamente invariante

Función de Lyapunov

Para demostrar la existencia de un conjunto positivamente invariante, utilizaremos las ideas expuestas por Lyapunov, modificadas ligeramente. Veamos las definiciones de una función de Lyapunov normal y estricta :

Definición \therefore Sea $\Omega \subset \mathfrak{R}^3$ y $u \in \mathfrak{R}^3$. Una función de prueba de Lyapunov es una función $V : \Omega \mapsto \mathfrak{R}^+$ continua, tal que cuando $|u| \rightarrow \infty$ se tiene que $V(u) \rightarrow \infty$ uniformemente, y cuya derivada direccional, $\dot{V}(u)$, a lo largo de la trayectoria solución de $\dot{u} = G(u)$ existe. Y además, $\dot{V}(u) < 0$ para toda $u \in \Omega$. Se dice que la función es estricta si $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega$ es numerable y no estricta si $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega$ es no numerable.

El procedimiento que se sigue para encontrar un conjunto positivamente invariante, es el que sigue :

1. Se encuentra una función de Lyapunov no estricta, es decir, no es necesario que $\dot{V}(u) < 0$ para toda $u \in \mathfrak{R}^3$.
2. Se encuentran dos funciones, $a : \mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}$ y $b : \mathfrak{R}^3 \mapsto \mathfrak{R}$ tales que cuando $|u| \rightarrow \infty$ se tiene que $a(u) \rightarrow \infty$ y $b(u) \rightarrow \infty$ uniformemente y además, $a(u) \leq V(u) \leq b(u)$ para toda $u \in \mathfrak{R}^3$.
3. Se encuentra el conjunto $\Omega_\rho = \{u \in \mathfrak{R}^3 : \dot{V}(u) \leq -\rho < 0\}$ y se verifica que su complemento sea un conjunto acotado. Se verifica que el $\sup_{u \in \mathfrak{R}^3 \setminus \Omega_\rho} b(u) < \infty$.

El conjunto $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega_\rho$ es positivamente invariante. En el caso de que $\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega_\rho = \{\bar{u}\}$, entonces \bar{u} es un punto de equilibrio estable y la función de Lyapunov es estricta.

Determinación del conjunto positivamente invariante

Teorema IV-1 : Existe un conjunto positivamente invariante para el sistema de ecuaciones de Lorenz.

Demostración:

Tomemos el sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= -y - xz + rx, \\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

Primero debemos definir en qué rango de los parámetros vamos a restringir la búsqueda del conjunto positivamente invariante. Sea el espacio de los parámetros el siguiente conjunto:

$$\{(\sigma, r, b) \in \mathbb{R}^3: \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 15, \frac{1}{2} \leq r \leq 30, \frac{1}{2} \leq b \leq 4\}.$$

Una función de Lyapunov adecuada es la siguiente:

$$V(x, y, z, \lambda) := x^2 + y^2 + (z - (\sigma + r))^2,$$

$$\text{donde } \lambda = (\sigma, r, b).$$

Si desea ver cómo es que se llega a esta función, puede consultarlo al final del capítulo en el *apendice 1*.

Verifiquemos ahora la derivada direccional :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} - 2(\sigma + r)\dot{z} \\ &= 2x(-\sigma x + \sigma y) + 2y(-y - xz + rx) + 2z(-bz + xy) - 2(\sigma + r)(-bz + xy) \\ &= -2\sigma x^2 + 2\sigma xy - 2y^2 - 2xyz + 2xyr - 2bz^2 + 2xyz + 2bz(\sigma + r) - 2xy(\sigma + r) \\ &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2bz(\sigma + r).\end{aligned}$$

En esta función hemos reemplazado el término cuadrático $2xy(a_1\sigma + a_2r)$ por $2bz(\sigma + r)$. Con esto hemos reducido el problema ya que hemos sustituido un término que depende de dos variables por uno que solo depende de la z .

Para obtener una función que nos dé una derivada direccional menor a cero, es necesario tratar con el término $2bz(\sigma + r)$, pues desconocemos su signo. Pero existe una manera de eliminar este problema. Esto es al completar el cuadrado. Entonces para :

$$-\dot{V} = 2\sigma x^2 + 2y^2 + 2b(z^2 - z(\sigma + r)),$$

podemos completar el cuadrado con el número $\frac{b(\sigma + r)^2}{2}$, el cual es siempre positivo en el espacio de parámetros que estamos considerando :

$$\begin{aligned} -\dot{V} &= 2\sigma x^2 + 2y^2 + 2b\left(z^2 - z(\sigma + r) + \frac{(\sigma + r)^2}{4} - \frac{(\sigma + r)^2}{4}\right) \\ &= 2\sigma x^2 + 2y^2 + 2b\left(z - \frac{(\sigma + r)}{2}\right)^2 - \frac{b(\sigma + r)^2}{2}. \end{aligned}$$

Con esto vemos que la derivada direccional es una función negativa más el número $\frac{b(\sigma + r)^2}{2}$, y por lo tanto $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \dot{V}(x) < \infty$. Con este hecho es posible encontrar un conjunto fuera del cual la derivada direccional será negativa.

Para la función $V = x^2 + y^2 + (z - (\sigma + r))^2$ se tiene que $V(x, y, z) \rightarrow \infty$ de manera uniforme cuando $|(x, y, z)| \rightarrow \infty$.

Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| > \sigma + r\}$, entonces dentro del conjunto Ω tenemos :

$$\begin{aligned}
-\dot{V} &= 2\sigma x^2 + 2y^2 + 2b\left(z - \frac{(\sigma+r)}{2}\right)^2 - \frac{b(\sigma+r)^2}{2} \\
&\geq 2b\left(z - \frac{(\sigma+r)}{2}\right)^2 - \frac{b(\sigma+r)^2}{2} \\
&= 2b\left(z^2 - (\sigma+r)z + \frac{(\sigma+r)^2}{4}\right) - \frac{b(\sigma+r)^2}{2} \\
&= 2bz^2 - 2b(\sigma+r)z + 2b(\sigma+r)^2 - 2b(\sigma+r)(\sigma+r) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V} < 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \subset \mathfrak{R}^3$. Además $V > 0$, con lo cual la función cumple con las propiedades para ser una función de Lyapunov no estricta. Haciendo la negación del procedimiento anterior, se obtiene que $\dot{V} \geq 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \setminus \Omega$ y es claro que:

$$\mathfrak{R}^3 \setminus \Omega = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 : |z| \leq \sigma + r\}$$

es un conjunto no numerable, y por lo tanto la V es una función de Lyapunov no estricta.

Como puede observarse, la forma de encontrar dicha función es una especie de ensayo y error.

Ahora veamos como se obtienen las funciones necesarias para encontrar un conjunto positivamente invariante. Para empezar necesitamos una función $c(x, y, z) \leq -\dot{V}$. La necesidad de esta función surge del hecho de que necesitamos buscar un conjunto fuera del cual $\dot{V} < 0$. Para hacerlo necesitamos definir una $\rho > 0$ tal que $\dot{V} \leq -\rho$. La mejor manera de encontrar un conjunto asociado a esta ρ es acotando la función \dot{V} por otra función, llamémosle $c(x, y, z)$, tal que $\dot{V} \leq -c(x, y, z) \leq -\rho < 0$.

Tomando los valores extremos de σ , r , b del conjunto de los parámetros y sustituyento obtenemos :

$$\begin{aligned}
-\dot{V} &\geq 2\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(|z| - \frac{0.5 + 0.5}{2}\right)^2 - \frac{4(15 + 30)^2}{2}. \\
&= x^2 + 2y^2 + z^2 - |z| + \left(\frac{1}{4}\right) - 2(45)^2 := c(x, y, z).
\end{aligned}$$

La desigualdad se da puesto que se toman los valores ínfimos del conjunto de los parámetros.

Sea $\rho = 1/4$, entonces para que $c(x, y, z) \geq \rho$ tenemos :

$$\begin{aligned}
x^2 + 2y^2 + z^2 - |z| + \left(\frac{1}{4}\right) - 2(45)^2 &\geq \left(\frac{1}{4}\right), \\
x^2 + 2y^2 + z^2 - |z| &\geq 2(45)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como la desigualdad es válida para todo elemento dentro del conjunto de los parámetros, tenemos que, con tal de que $|x| \geq 45\sqrt{2}$, $|y| \geq 45$ y $|z| \geq 45\sqrt{2} + 1$, se tiene que $\dot{V} \leq -\rho$.

Por lo tanto V es decreciente sobre toda trayectoria del campo vectorial del sistema de Lorenz fuera de la caja :

$$K = \{x : |x| < 45\sqrt{2}\} \times \{y : |y| < 45\} \times \{z : |z| < 45\sqrt{2} + 1\}.$$

Lo que sigue es verificar es que el valor que toma la función de Lyapunov sobre las trayectorias de flujo del campo vectorial, está acotado. Para que esto se cumpla, debemos tener que el valor de V está acotado dentro de un conjunto compacto. Busquemos esta acotación mediante la función $b(x, y, z)$ tal que $V \leq b(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
V &= x^2 + y^2 + (z - (\sigma + r))^2 \\
&\leq x^2 + y^2 + (|z| + (\sigma + r))^2 \\
&\leq x^2 + y^2 + (|z| + 45)^2 := b(x, y, z).
\end{aligned}$$

Dentro de la caja K ,

$$\sup b(x, y, z) = 2(45)^2 + 45^2 + ((45\sqrt{2} + 1) + 45)^2 < \infty,$$

y la función V está acotada.

Sólo falta verificar que existe una función $a(x, y, z) \leq V$ tal que $a(x, y, z) \rightarrow \infty$ cuando $|x, y, z| \rightarrow \infty$. Es sencillo ver que :

$$a(x, y, z) := x^2 + y^2 + (|z| + 1)^2 \leq V$$

cumple con esta propiedad.

Entonces, fuera de la caja K , sobre cualquier trayectoria de nuestro campo vectorial, la función V es siempre decreciente. Además, nuestra función de Lyapunov tiene un mínimo localizado en el punto $(0, 0, \sigma + r)$, el cual está dentro de la caja. Por esta razón, cuando se va reduciendo el valor de la función de prueba de Lyapunov, ésta se acerca a su punto mínimo. Cuando entra a la caja K , ya no puede salir, ya que la derivada direccional fuera de la caja es negativa. Si suponemos que el flujo si sale de la caja K , tendríamos una contradicción, pues la función de Lyapunov alcanza su mínimo en el interior de la caja. Es precisamente la misma lógica que utilizó Lyapunov en su estudio sobre estabilidad de puntos de equilibrio, solo que en este caso se ha sustituido el punto por un conjunto más grande.

Consecuentemente, K es positivamente invariante para el campo vectorial del sistema de Lorenz.

Este resultado es de esperarse, ya que numéricamente, todas las trayectorias en este intervalo de parámetros, ya sea que terminan en un punto de equilibrio, u oscilan alrededor del atractor extraño. Véase la figura 19. Esto finaliza la demostración del *Teorema IV-1*.

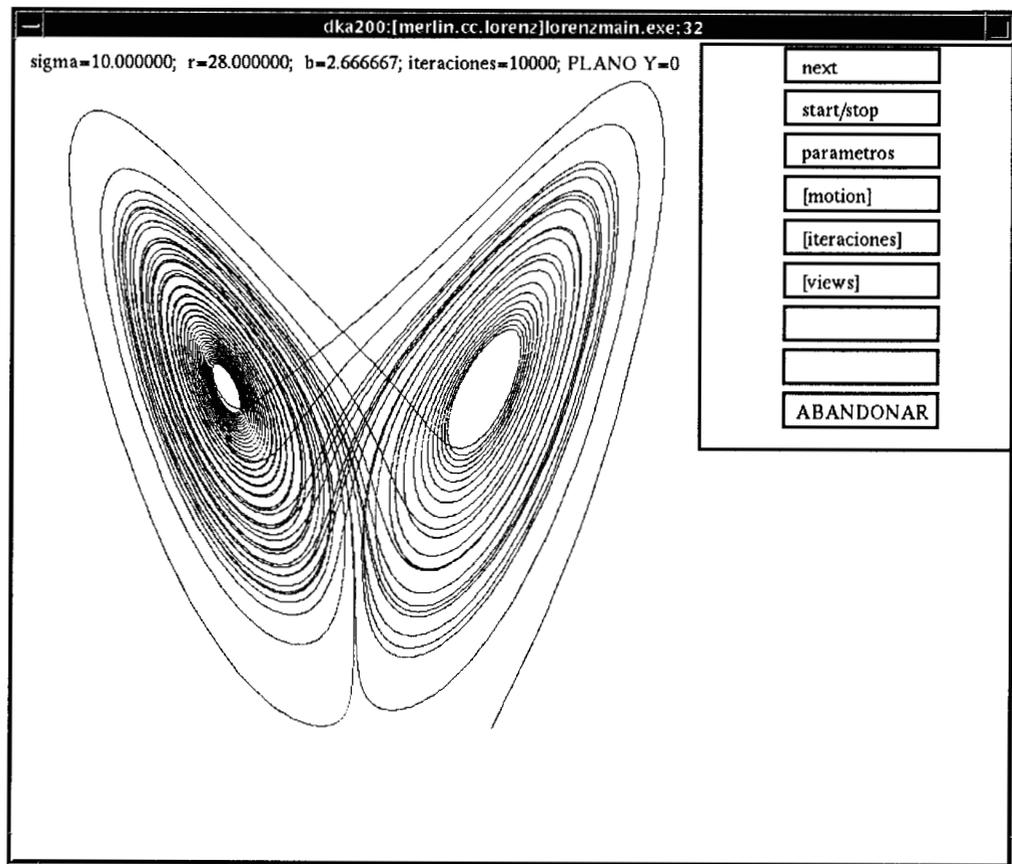


figura 19

Conjunto positivamente invariante en el Sistema Acoplado

Sistemas acoplados

Para el estudio de un par de sistemas de Lorenz acoplados, y su posible sincronización, consideremos primero lo siguiente.

El sistema de Lorenz es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias definida en \mathfrak{R}^3 . Es decir, el sistema de ecuaciones define un campo vectorial en \mathfrak{R}^3 y la solución que pasa por cualquier punto $u_0 \in \mathfrak{R}^3$ se define como $\varphi_{u_0}(t)$, donde $\varphi_{u_0}(0) = u_0$. Es decir, $\varphi_{u_0}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$.

Antes de proceder es necesario definir lo que es un sistema acoplado.

Definición: Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \xi \in \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y sea $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ un sistema de ecuaciones diferenciales definido en \mathfrak{R}^3 y \mathbf{g} una función $\mathbf{g}: \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Entonces, el sistema $\dot{\xi} = \mathbf{h}(\xi)$ definido en $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$ dada por:

$$\dot{\xi} = [\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]A' + [\mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u})]A'',$$

se llama *sistema acoplado* de los sistemas $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ y $\mathbf{f}(\mathbf{v})$.

Por ejemplo, para acoplar el sistema de Lorenz de forma lineal en la variable x , tendríamos que $\mathbf{g}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = -k(x_1 - x_2)$, obteniendo:

$$\dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma y_1 - k(x_1 - x_2),$$

$$\dot{y}_1 = -y_1 - x_1 z_1 + r x_1,$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1, \\ \dot{x}_2 &= -\sigma x_2 + \sigma y_2 - k(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= -y_2 - x_2z_2 + rx_2, \\ \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_2.\end{aligned}$$

donde $\lambda = (\sigma, b, r)$ es un parámetro.

El análisis de este tipo de sistemas se hace más fácil mediante el estudio por separado de cada una de sus partes.

La variable de nuestro sistema acoplado es $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathfrak{R}^6$ y nuestras curvas solución $\varphi_{\xi_0}(t)$ estarán definidas por: $\varphi_{\xi_0}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^6$, con un punto inicial, o valor a la frontera, $\xi_0 \in \mathfrak{R}^6$.

Para hacer un estudio con algún significado tangible, debemos reducir la dimensionalidad del problema de \mathfrak{R}^6 a \mathfrak{R}^3 . Esto se puede hacer al tomar la función $\Phi: \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, definida por:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Si pensamos en una función $\psi_{\xi_0}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $\psi_{\xi_0}(t) := \Phi(\varphi_{\xi_0}(t))$, el conjunto $\psi = \{\psi_{\xi_0} : \xi_0 \in \mathfrak{R}^6\}$ forma una familia de trayectorias en \mathfrak{R}^3 . La familia ψ *no* es solución de un campo vectorial: esto se debe a que para alguna t y $\xi_0, \xi_1 \in \mathfrak{R}^6$ distintas, se tiene que $\psi_{\xi_0}(t) = \psi_{\xi_1}(t)$, lo cual sería contradictorio al Teorema de Existencia y Unicidad. Basta pensar en los puntos $\xi_0 = (a, b, c, 0, 0, 0)$ y $\xi_1 = (2a, 2b, 2c, a, b, c)$. En el caso de nuestra familia de curvas, tenemos que $\psi_{\xi_0}(0) = \psi_{\xi_1}(0)$. Pero las curvas solución que definen las trayectorias que siguen $\psi_{\xi_0}(t)$ y $\psi_{\xi_1}(t)$ no son iguales, ya que están definidas por φ_{ξ_0} y φ_{ξ_1} . En resumen, la familia ψ es un conjunto de curvas en el espacio \mathfrak{R}^3 las cuales pueden intersectarse una o muchas veces.

Definición: Sea a $\dot{\xi} = h(\xi)$ un sistema diferencial acoplado definido en $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$ y compuesto por dos sistemas $\dot{u} = f(u)$ en \mathfrak{R}^3 . Sea $\varphi_{\xi_0}(t)$ la solución de $\dot{\xi} = h(\xi)$ que pasa por el punto $\xi_0 \in \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$. Sea

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Entonces el flujo de $\psi_{\xi_0} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definida por $\psi_{\xi_0}(t) := \Phi(\varphi_{\xi_0}(t))$ se llama *flujo de acoplamiento*.

Dentro de la familia ψ --de los flujos de acoplamiento-- existen varias posibilidades, entre las que podemos destacar :

1. $\forall \xi_0 \in \mathfrak{R}^6, \forall N > 0, \exists t_0 \in \mathfrak{R}^+ : \|\psi_{\xi_0}(t_0)\| > N$. En este caso, se dice que los sistemas se salen de cualquier conjunto acotado, es decir, no son positivamente invariantes.

2. La sincronización.

3. La pseudosincronización.

Sincronización

Pasemos a definir formalmente lo dos últimos términos :

Definición: Si en un sistema diferencial acoplado se tiene que

$$\forall \xi_0 \in \mathfrak{R}^6 \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \exists t_0 : \forall t > t_0$$

se verifica que

$$\|\psi_{\xi_0}(t)\| < \varepsilon.$$

Entonces se dice que *el sistema acoplado sincroniza*.

Definición: Si en un sistema diferencial acoplado se tiene que

$$\forall \xi_0 \in \mathfrak{R}^6, \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{\xi_0}(t) = \tilde{\psi}(t)$$

y donde se tiene que

$$\exists T > 0 : \tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t + kT) \quad \forall k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

(es una “órbita periódica”),

Se dice que los sistemas de ecuaciones acoplados *pseudosincronizan*.

Lo que sigue es analizar un sistema acoplado de forma lineal de las ecuaciones de Lorenz :

$$\dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma y_1 - k(x_1 - x_2),$$

$$\dot{y}_1 = -y_1 - x_1 z_1 + r x_1,$$

$$\dot{z}_1 = -b z_1 + x_1 y_1,$$

$$\dot{x}_2 = -\sigma x_2 + \sigma y_2 - k(x_2 - x_1),$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 - x_2 z_2 + r x_2,$$

$$\dot{z}_2 = -b z_2 + x_2 y_2.$$

Este sistema está acoplado de forma lineal en la dimensión x . También es posible acoplarlo linealmente en la dirección y ó z , ó en varias a la vez. Lo primero que debemos establecer es la existencia de un conjunto positivamente invariante. Si esto no se cumple, no es posible la garantizar la sincronización, puesto que no podemos saber que pasa con el sistema cerca del infinito.

Para entender la mecánica en la determinación del conjunto positivamente invariante en el sistema acoplado, primero hay que pensar que tenemos dos sistemas de Lorenz sin acoplar, es decir, un sistema dual en \mathfrak{R}^6 . Estas serían :

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -\sigma x_1 + \sigma y_1 \\ -y_1 - x_1 z_1 + r x_1 \\ -b z_1 + x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} -\sigma x_2 + \sigma y_2 \\ -y_2 - x_2 z_2 + r x_2 \\ -b z_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Es obvio, por los resultados obtenidos anteriormente, que este sistema dual es positivamente invariante en $K \times K$. Estos resultados fueron posibles gracias a que fuera del conjunto K , la derivada direccional $\dot{V} < 0$.

Ahora a estos sistemas les agregamos el término de acoplamiento :

$$\dot{w} = f(x_1, y_1, z_1) - k(x_1 - x_2),$$

$$\dot{v} = f(x_2, y_2, z_2) - k(x_2 - x_1).$$

Lo que se tiene que hacer en el sistema acoplado es determinar qué efecto tiene el término de acoplamiento sobre \dot{V} . Entonces, si existe un conjunto \hat{K} tal que $K \times K \subset \hat{K}$, y la contribución del término de acoplamiento a \dot{V} es negativa fuera de \hat{K} , el conjunto \hat{K} será positivamente invariante para el sistema acoplado.

Determinación del conjunto positivamente invariante

Teorema)IV-2 : Los sistemas de Lorenz acoplados linealmente en las variables x , y , y z son positivamente invariantes.

Demostración :

Construyamos una función de Lyapunov no estricta, utilizando la que obtuvimos en la primera parte :

$$W(u, v) = V(u) + V(v).$$

Esta función es mayor o igual a cero; sólo falta determinar si podemos encontrar un conjunto acotado fuera del cual la derivada direccional a lo largo de las trayectorias es menor o igual a cero : $\dot{W} \leq 0$.

Nótese que hemos separado la función que proponemos en dos partes, una que sólo depende de la u y otra que sólo depende de la v . Por esta razón, la variación de $V(u)$ con respecto a v se anula sobre toda trayectoria, y análogamente para la variación de $V(v)$ con respecto de u . Es decir :

$$\left(\frac{\partial V(u)}{\partial y} + \frac{\partial V(v)}{\partial x} \right) \{ [f(u) + g(u, v)]A' + [f(v) + g(v, u)]A'' \} = 0.$$

Esto lleva a que la variación de W sobre las trayectorias del sistema acoplado se pueda escribir como :

$$\dot{W} = \left(\frac{\partial V(u)}{\partial u} + \frac{\partial V(v)}{\partial v} \right) \{ [f(u) + g(u, v)]A' + [f(v) + g(v, u)]A'' \}.$$

Llevando a cabo las operaciones de las matrices A' y A'' se obtiene :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \left(\frac{\partial V(u)}{\partial u} \right) [f(u) + g(u, v)] + \left(\frac{\partial V(v)}{\partial v} \right) [f(v) + g(v, u)] \\ &= \dot{V}(u) + \dot{V}(v) + \left(\frac{\partial V(u)}{\partial u} \right) [g(u, v)] + \left(\frac{\partial V(v)}{\partial v} \right) [g(v, u)]. \end{aligned}$$

Donde es trivial notar que

$$\dot{V}(u) = \dot{V}(v) \leq -\frac{1}{4} \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus K \times K.$$

Por ende, sólo hay que verificar el término :

$$\left(\frac{\partial V(u)}{\partial u} \right) [g(u, v)] + \left(\frac{\partial V(v)}{\partial v} \right) [g(v, u)].$$

Aplicando la derivada direccional al término que nos interesa en el sistema acoplado sobre el eje x :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u} \begin{pmatrix} -k(x_1 - x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial v} \begin{pmatrix} -k(x_2 - x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} \begin{pmatrix} -k(x_1 - x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial x_2} \begin{pmatrix} -k(x_2 - x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2x_1(-k(x_1 - x_2)) + 2x_2(-k(x_2 - x_1)) \\ &= -2k(x_1 - x_2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Este último término es menor o igual a cero siempre y cuando se acote el valor de k a los número positivos. Entonces :

$$\dot{W}(u, v) = \dot{V}(u) + \dot{V}(v) - 2k(x_1 - x_2)^2 \leq -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2k(x_1 - x_2)^2 \leq -\frac{1}{2}.$$

Y se concluye que $\dot{W} < 0$ para $\hat{K} = K \times K$.

Con los mismos razonamientos hechos para el caso no acoplado, es evidente que $W(u, v) = V(u) + V(v)$ es una función de Lyapunov no estricta y los argumentos restantes para demostrar que $\hat{K} = K \times K$ es positivamente invariante, para el acoplamiento lineal en la dimensión x , son inmediatos. Es decir, $\sup_{\hat{K}} (W(u, v)) < \infty$ y además, cuando $|(u, v)| \rightarrow \infty$, $W(u, v) \rightarrow \infty$ uniformemente.

Aplicando la derivada direccional al sistema acoplado sobre el eje y y fijándonos en el término de interés, se obtiene :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u} \begin{pmatrix} 0 \\ -k(y_1 - y_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ -k(y_2 - y_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial y_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -k(y_1 - y_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial y_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -k(y_2 - y_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & = 2y_1[-k(y_1 - y_2)] + 2y_2[-k(y_2 - y_1)] \\ & = -2k[(y_1^2 - y_1 y_2) + (y_2^2 - y_1 y_2)]. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $-2k(y_1 - y_2)^2 \leq 0$. Y por las mismas razones que antes, el conjunto $K \times K$ es positivamente invariante.

Aplicando el operador diferencial de Lyapunov al sistema acoplado sobre el eje z , tenemos que :

$$\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(z_1 - z_2) \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(z_2 - z_1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1)}{\partial z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(z_1 - z_2) \end{pmatrix} + \frac{\partial V(x_2, y_2, z_2)}{\partial z_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(z_2 - z_1) \end{pmatrix} = \\
& = 2[-k(z_1 - (\sigma + r))(z_1 - z_2)] + 2[-k(z_2 - (\sigma + r))(z_2 - z_1)] \\
& = -2k[(z_1^2 - z_1 z_2 - (\sigma + r)z_1 + (\sigma + r)z_2) + (z_2^2 - z_1 z_2 - (\sigma + r)z_2 + (\sigma + r)z_1)].
\end{aligned}$$

Entonces tenemos :

$$\begin{aligned}
-2k[z_1^2 - z_1 z_2 - (\sigma + r)z_1 + (\sigma + r)z_2 + z_2^2 - z_1 z_2 - (\sigma + r)z_2 + (\sigma + r)z_1] &= \\
= -2k[z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_2] & \\
= -2k[z_1 - z_2]^2 \leq 0. &
\end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto $K \times K$ también es positivamente invariante en este caso.

Sincronización del sistema acoplado de Lorenz

El sistema acoplado de Lorenz, en cada una de sus dos partes, tiene un comportamiento caótico muy semejante al del sistema de Lorenz sencillo. Este comportamiento caótico es muy complejo, pero aún así, las dos partes del sistema acoplado con comportamientos caóticos muy distintos el uno del otro, después de un intervalo de tiempo suficientemente grande llegan a converger en un comportamiento caótico casi idéntico.

Haremos un estudio numérico de los sistemas acoplados linealmente en las dimensiones x , y y z , y finalizaremos con la demostración analítica de la sincronización del sistema acoplado en la dimensión x .

En las siguientes páginas graficaremos series de tiempo, los cuales representan la norma del flujo de acoplamiento. En pocas palabras, es la distancia entre los flujos de ambas partes del sistema acoplado, graficado contra el tiempo.

Métodos Numéricos

Dentro de la literatura publicada acerca de las ecuaciones de Lorenz, es bien conocido que el método de Euler mejorado tiene la suficiente precisión para reproducir el flujo del campo vectorial y que la utilización de métodos más costosos no repercuten en ninguna mejoría en cuanto a la precisión obtenida. El método de Euler mejorado [23] lo podemos resumir de la siguiente manera.

El método de Euler tiene la forma $Y_{j+1} = Y_j + hS$, donde S es una aproximación a la pendiente de la curva solución $y=y(x)$ en el intervalo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ y h es el tamaño de paso. En el método de Euler mejorado el valor de la pendiente es modificado mediante el método trapezoidal, para darnos la fórmula de iteración: $Y_{j+1} = Y_j + \frac{1}{2}h[f(x_j, Y_j) + f(x_{j+1}, p_{j+1})]$, donde $p_{j+1} = Y_j + hf_j$.

Para todos los estudios numéricos que se hicieron sobre la ecuación de Lorenz, este método resulto ser adecuado. No obstante, cuando se comenzó a trabajar sobre el sistema acoplado surgieron varios problemas. El sistema acoplado resultó presentar un mayor grado de rigidez, y fue necesario utilizar un método que garantizara mayor exactitud. En los párrafos que siguen se muestran los resultados que se obtuvieron con ambos métodos, para ejemplificar lo que sucede cuando un sistema no rígido se altera de tal forma que comienza a presentar rigidez.

El método de Runge-Kutta de orden cuatro resulto ser adecuado para el análisis del sistema, siempre y cuando se efectuaran los calculos en procesador RISC, como se verá más adelante.

Para utilizar el método de Runge-Kutta de orden cuatro es necesario evaluar f en cuatro puntos seleccionados y usar obtener un promedio ponderado para ΔY_j . En particular se hace:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_j, Y_j), \\k_2 &= hf(x_j + \alpha_1 h, Y_j + \beta_1 k_1), \\k_3 &= hf(x_j + \alpha_2 h, Y_j + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2), \\k_4 &= hf(x_j + \alpha_3 h, Y_j + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3), \\Y_{j+1} &= Y_j + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4.\end{aligned}$$

Haciendo cierto manipuleo que no es relevante para esta tesis, pero que se puede consultar en la referencia [23], se llega a la fórmula de iteración del método:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_j, Y_j), \\k_2 &= hf(x_j + h/2, Y_j + k_1/2), \\k_3 &= hf(x_j + h/2, Y_j + k_2/2), \\k_4 &= hf(x_j + h, Y_j + k_3), \\Y_{j+1} &= Y_j + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.\end{aligned}$$

Estudio Numérico

Comenzaremos con el sistema acoplado linealmente en la dimensión x . La figura 20 se obtuvo integrando numéricamente la serie de tiempo del flujo de acoplamiento mediante el método de Runge Kutta de cuarto orden. Es claro de la figura que el sistema alcanza la sincronización, ya que la gráfica converge a cero. Es importante notar que estos resultados aún se observan cuando se integra por un método menos exacto, como el de Euler mejorado.

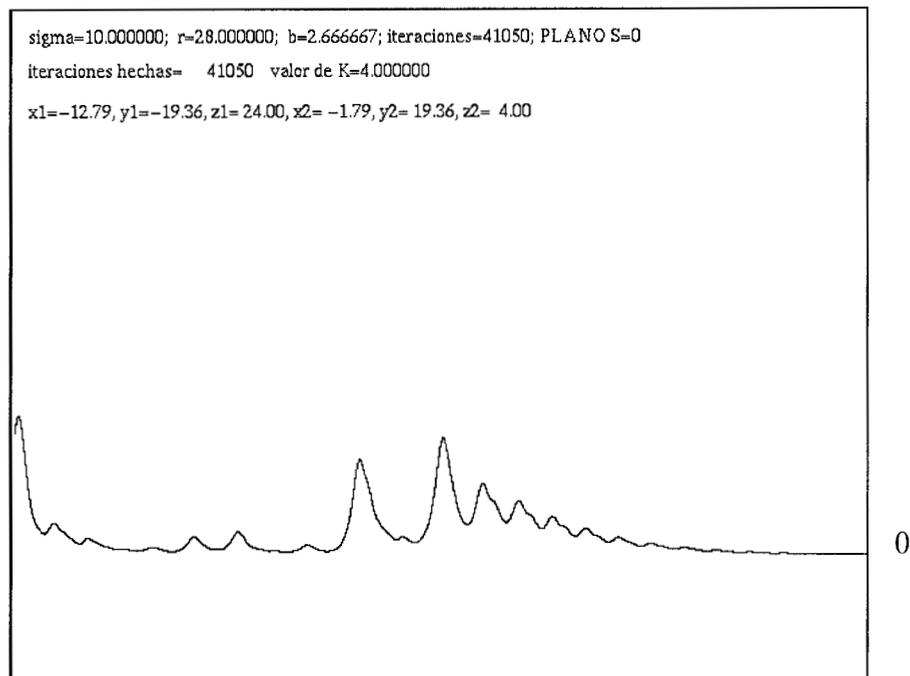


figura 20

De la figura 21 a la figura 28 podemos observar una proyección en dos dimensiones del flujo de las dos partes del sistema acoplado bajo estudio. Cada uno de los flujos es representada por una curva distinta, donde no hemos incluido demasiadas iteraciones para poder observar como es que los

dos flujos van convergiendo en uno solo. En cada una de las figuras hemos graficado las curvas que se generan con 5000 iteraciones, comenzando cada curva en un punto inicial distinto y alejado el uno del otro. El punto donde comienza cada curva esta indicado con un punto oscuro. En la figura 21, los dos flujos comienzan de puntos iniciales muy distintos. En la 22 están girando en sentidos opuestos. En la 23 se nota que una de las dos partes cambia su sentido de giro para que esté en el mismo sentido que la otra parte. De las figuras 24 a la 27 los flujos giran en el mismo sentido acercándose cada vez más, hasta que en la figura 28 se han vuelto casi indistintos.

Es digno de notarse que el flujo que siguen las dos partes del sistema de Lorenz es de naturaleza caótica, prácticamente indistinguible del comportamiento del sistema de Lorenz sin acoplar.

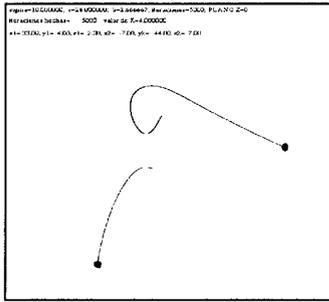


figura 21

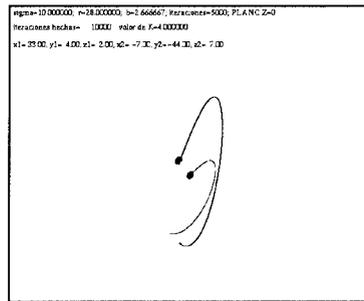


figura 22

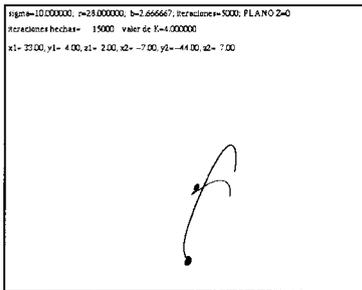


figura 23

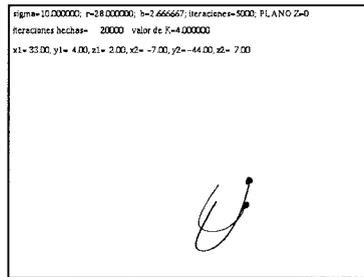


figura 24

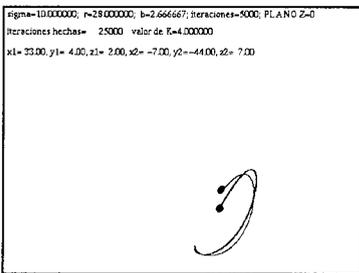


figura 25

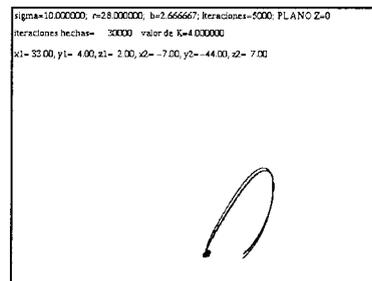


figura 26

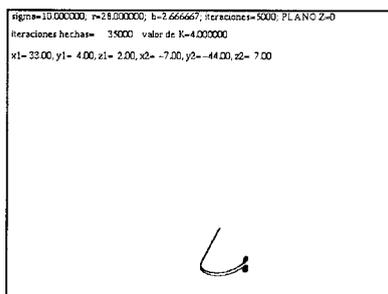


figura 27

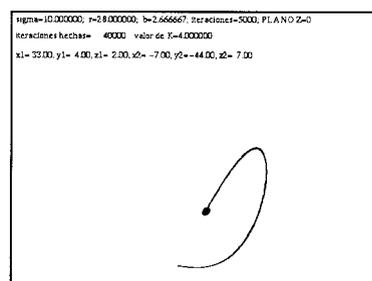


figura 28

Si observamos el comportamiento numérico del sistema acoplado linealmente en la dimensión y , nos topamos con algunas dificultades. Para comenzar, la serie de tiempo del flujo de acoplamiento que obtenemos al integrar con Euler mejorado lo podemos observar en la figura 29. En esta figura no se nota ninguna tendencia hacia la sincronización, sino que más bien parece que se trata de una oscilación. Al variar nuestra constante de acoplamiento, k , obtenemos una variación en la forma en que oscila la serie de tiempo. Por ejemplo, en la figura 30 hemos cambiado el valor de $k=4$ a $k=7$.

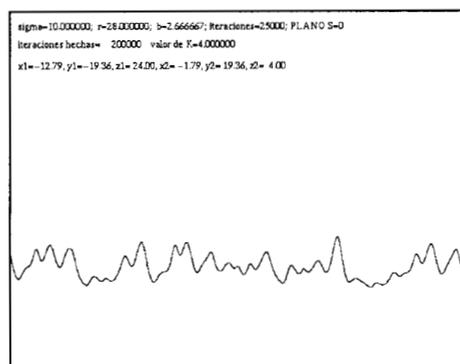


figura 29

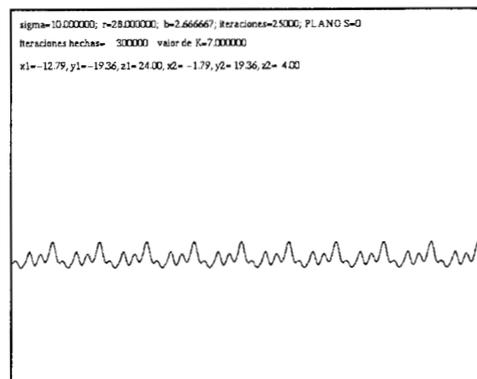


figura 30

Una vez que se aplica un método que genera menos errores numéricos en las operaciones computacionales, como Runge-Kutta de orden cuarto, se nota que el sistema sincroniza rápidamente para cualquier punto inicial que se tome. Esto se aprecia en la figura 31. Esto se debe a cierta rigidez que presenta el sistema, que es más notorio en procesadores que ejecutan un mayor número de instrucciones por cada operación numérica, como se da en caso de los procesadores de la familia x86, que encontramos en las computadoras personales. Cuando se utiliza un procesador de diseño RISC, la rigidez del sistema con el método de Euler mejorado es menos aparente, y desaparece por completo con Runge Kutta. (Aunque se vuelve insignificante, la rigidez no desaparece por completo con procesadores x86, debido a la

multiplicación de los errores por el hecho de utilizar más instrucciones para las mismas operaciones numéricas.)

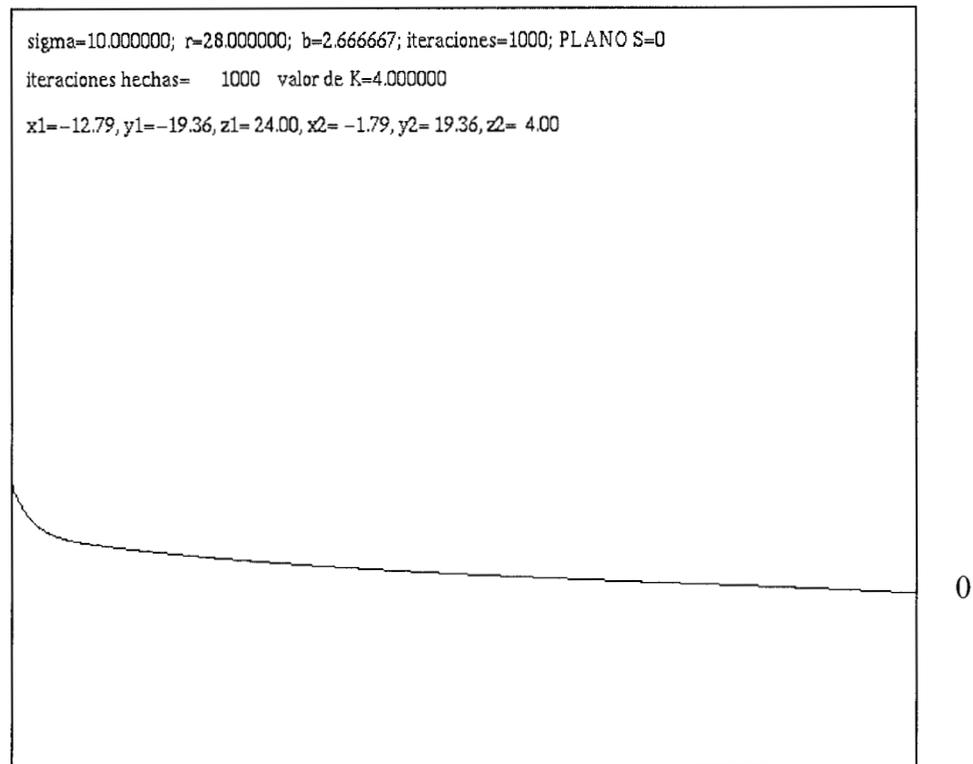


figura 31

La forma en que se da esta sincronización puede observarse en las figuras 32 y 33, notándose que persiste el comportamiento caótico. En la figura 32, las dos partes del sistema acoplado comienzan de puntos iniciales muy distintos y rápidamente se acercan uno a otro. En la figura 33 se observa que continúan su flujo por caminos prácticamente idénticos, dibujando las figuras que caracterizan al sistema de Lorenz sencillo.

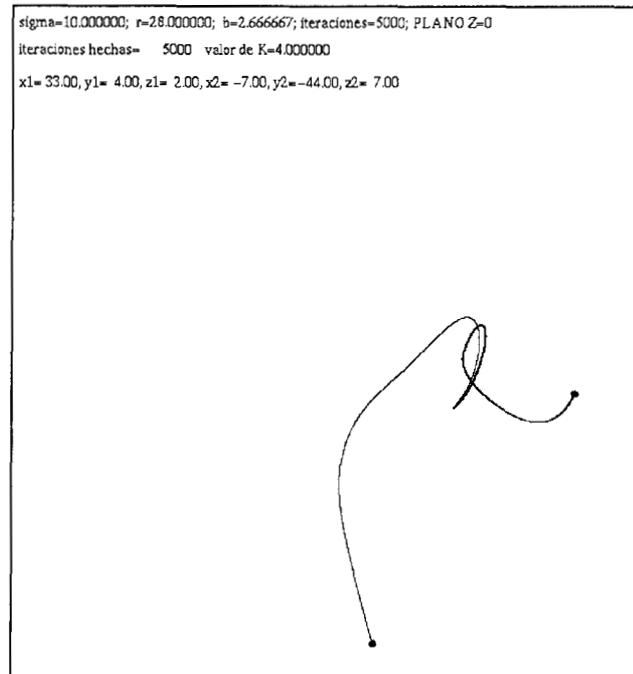


figura 32

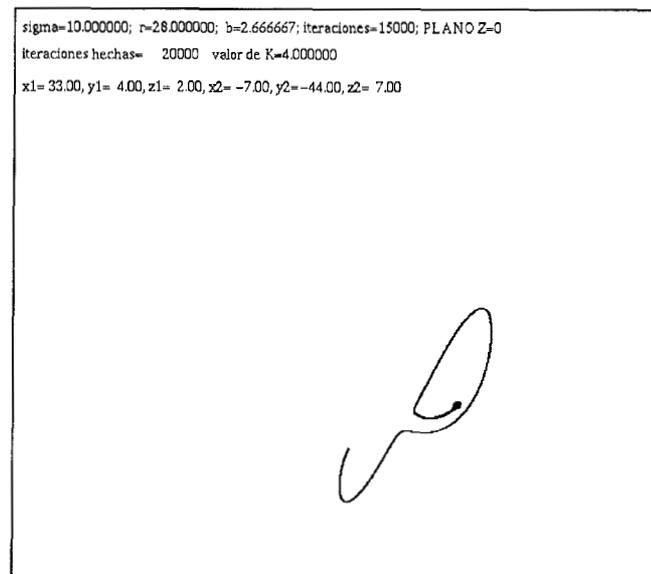


figura 33

El sistema acoplado en z parece ser un poco más complicado, pero es similar a lo que se observa en el caso anterior. Utilizando el método numérico de Euler mejorado se observa un comportamiento que nos indica que el sistema podría estar siendo afectado por cierta rigidez, resultando similar a lo que se observa en la figura 30. Para eliminar este problema, utilizamos el método de Runge Kutta de cuarto orden en un procesador de características RISC, para obtener la serie que se ve ilustrada en la figura 34, en donde se nota una clara tendencia a la sincronización. La gráfica converge asintóticamente al valor cero.

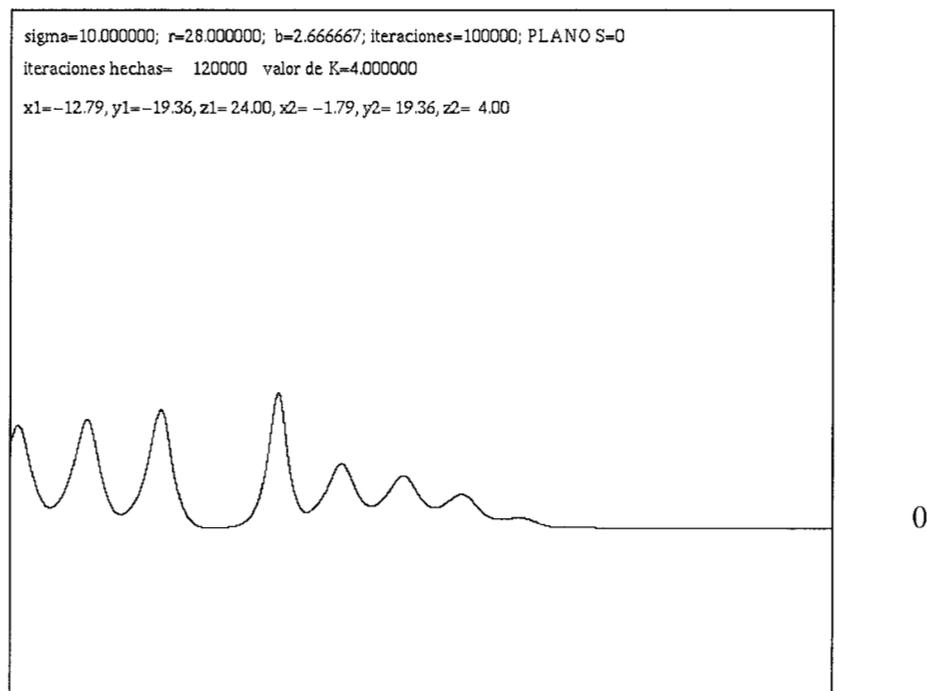


figura 34

La forma en que se obtiene la sincronización se ve de las figuras 35 a la 38. Otra vez comenzamos de puntos iniciales muy distintos. Las dos partes del sistema comienzan a girar en el mismo sentido en la figura 35. En la figura 36 los flujos siguen girando, acercándose cada vez más. En las figuras 37 y 38 siguen girando y convergiendo en un solo flujo.

Debemos recalcar que estos experimentos numéricos fueron realizados para un gran numero de puntos iniciales distintos y en todos los casos se obtuvieron resultados similares. Tambien se varió la constante de acoplamiento, k , y se notó que la sincronización se lleva a cabo más rápidamente cuanto mayor sea el valor de esta k .

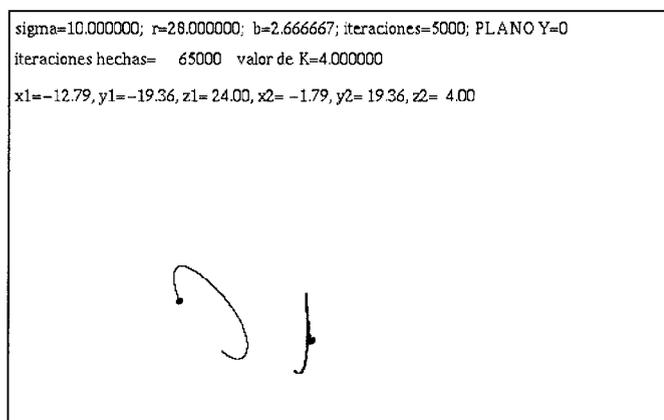


figura 35

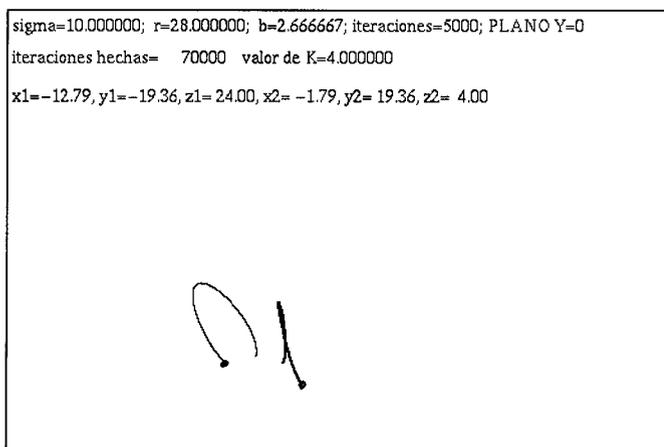


figura 36

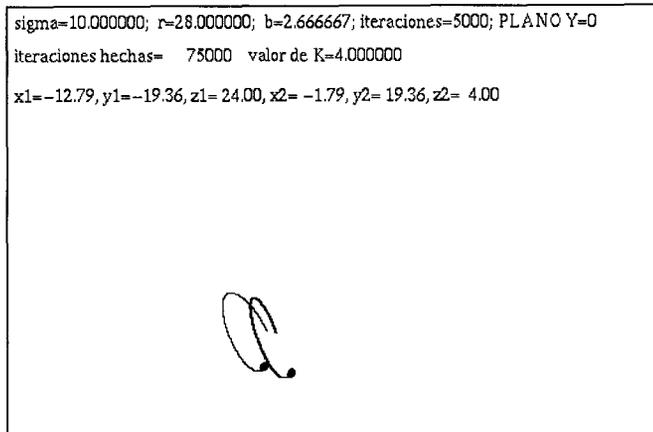


figura 37

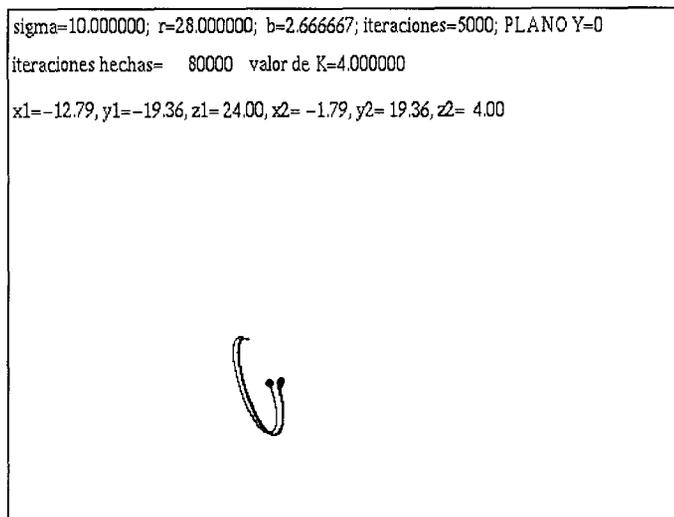


figura 38

Enfatizamos el hecho de que estos resultados son numéricos, y definitivamente no garantizan que los sistemas sincronizan. Para eso es necesario la demostración analítica.

Demostración de sincronización en la primera variable

Para verificar la sincronización, es necesario observar analíticamente el flujo de acoplamiento, el cual debe converger hacia el origen.

Recordemos : el conjunto donde están contenidos los parámetros es el siguiente,

$$\Lambda = \{(\sigma, r, b) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 15, \frac{1}{2} \leq r \leq 30, \frac{1}{2} \leq b \leq 4\},$$

y para los valores de los parámetros dentro de este conjunto, hemos encontrado un conjunto invariante \hat{K} .

Teorema IV-3: El sistema de Lorenz acoplado linealmente en la variable x , sincroniza dentro del conjunto de parámetros Λ , para valores de $k > 3.5$.

Demostración :

Escribamos el sistema acoplado de la siguiente manera (*):

$$\dot{p} = f(p, u) = -\sigma(x_1 - y_1) - k(x_1 - x_2),$$

$$\dot{u} = g(p, u) = \begin{pmatrix} -y_1 - x_1 z_1 + r x_1 \\ -b z_1 + x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{q} = f(q, v) = -\sigma(x_2 - y_2) - k(x_2 - x_1),$$

$$\dot{v} = g(q, v) = \begin{pmatrix} -y_2 - x_2 z_2 + r x_2 \\ -b z_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$p = x_1, q = x_2, u = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ y } v = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Demostraremos que para dos condiciones iniciales distintas la norma de la diferencia de las distancias entre las órbitas respectivas (es decir, la norma del flujo de acoplamiento) tiende exponencialmente a cero. Con esto el sistema sincronizará. Para ver si esto es posible, es necesario estudiar el comportamiento del flujo de acoplamiento. Para este efecto escribamos este flujo en dos partes, de la forma : $w = p - q$ y $\tilde{w} = u - v$. Para esto se tiene que : $\dot{w} = \dot{p} - \dot{q}$ y $\dot{\tilde{w}} = \dot{u} - \dot{v}$. Es importante notar que el flujo de

acoplamiento no es solución de un campo vectorial definido en \mathfrak{R}^6 , donde está el sistema acoplado, pero si es solución del campo definido en (*).

Desarrollemos la primera ecuación :

$$\begin{aligned}\dot{w} = \dot{p} - \dot{q} &= f(p, u) - f(q, v) = f(p, u) - f(q, u) + f(q, u) - f(q, v) \\ &= -\sigma(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_2) + \sigma(y_1 - y_2) = -(\sigma + k)(x_1 - x_2) + \sigma(y_1 - y_2) \\ &= -(\sigma + k)w + \begin{pmatrix} \sigma & 0 \end{pmatrix} \tilde{w}.\end{aligned}$$

$$\text{Donde } \sigma(y_1 - y_2) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \end{pmatrix} \tilde{w}.$$

Es decir, tenemos una ecuación no homogénea de la forma :

$$\dot{w} = Aw + b(t).$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es :

$$w(t) = w(t_0)e^{-(\sigma+k)t}.$$

Podemos simplificar este sistema podemos utilizar la formula de variación de constantes, que dice [17] :

Fórmula de variación de constantes: Sea $\varphi(t)$ una solución de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ que pasa por (t_0, x_0) y sea X una matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado, entonces :

$$\varphi(t) = X(t) \left[X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s)ds \right].$$

Aplicando la fórmula e integrando de s a t , obtenemos :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{-(\sigma+k)t} \left[e^{(\sigma+k)s} w(s) + \int_x e^{-(\sigma+k)\xi} b(\xi) d\xi \right], \\ \varphi(t) &= e^{-(\sigma+k)t} \left[e^{(\sigma+k)s} w(s) + \int_x e^{-(\sigma+k)\xi} (\sigma \quad 0) \tilde{w}(\xi) d\xi \right], \\ \varphi(t) &= e^{-(\sigma+k)(t-s)} w(s) + \int_x e^{-(\sigma+k)(t-\xi)} (\sigma \quad 0) \tilde{w}(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Sacando normas y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que :

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{-(\sigma+k)(t-s)} \|w(s)\| + \sigma \int_x e^{-(\sigma+k)(t-\xi)} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi.$$

Pasemos ahora a analizar la ecuación, $\dot{\tilde{w}} = \dot{u} - \dot{v}$.

Esta segunda ecuación nos describe el comportamiento de la otra parte del sistema. Veamos cómo se desarrolla :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{w}} &= \dot{u} - \dot{v} = g(p, u) - g(q, v) = g(q, u) - g(q, v) + g(p, u) - g(q, u), \\ \dot{\tilde{w}} &= \begin{pmatrix} -(y_1 - y_2) - (x_2 z_1 - x_2 z_2) \\ -b(z_1 - z_2) + (x_2 y_1 - x_2 y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-x_1 z_1 + x_2 z_1) + r(x_1 - x_2) \\ (x_1 y_1 - x_2 y_1) \end{pmatrix}, \\ \dot{\tilde{w}} &= \begin{pmatrix} -(y_1 - y_2) - x_2(z_1 - z_2) \\ x_2(y_1 - y_2) - b(z_1 - z_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-z_1 + r)(x_1 - x_2) \\ y_1(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \\ \dot{\tilde{w}} &= \begin{pmatrix} -1 & -x_2 \\ x_2 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r - z_1) \\ y_1 \end{pmatrix} (x_1 - x_2), \\ \dot{\tilde{w}} &= \begin{pmatrix} -1 & -x_2 \\ x_2 & -b \end{pmatrix} \tilde{w} + \begin{pmatrix} (r - z_1) \\ y_1 \end{pmatrix} w.\end{aligned}$$

Es decir, tenemos una ecuación no homogénea de la forma :

$$\dot{\tilde{w}} = A(t)\tilde{w} + b(t).$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es :

$$\tilde{w}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{pmatrix} \tilde{w}(t_0).$$

Podemos utilizar la formula de variación de parámetros para escribir:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{bs} \end{pmatrix} \tilde{w}(s) + \int_s^t \begin{pmatrix} e^\xi & 0 \\ 0 & e^{b\xi} \end{pmatrix} b(\xi) d\xi \right], \\ \tilde{\varphi}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{bs} \end{pmatrix} \tilde{w}(s) + \int_s^t \begin{pmatrix} e^\xi & 0 \\ 0 & e^{b\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r - z_1(\xi) \\ y_1(\xi) \end{pmatrix} \tilde{w}(\xi) d\xi \right], \\ \tilde{\varphi}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-b(t-s)} \end{pmatrix} \tilde{w}(s) + \int_s^t \begin{pmatrix} e^{-(t-\xi)} & 0 \\ 0 & e^{-b(t-\xi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r - z_1(\xi) \\ y_1(\xi) \end{pmatrix} \tilde{w}(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Es fácil establecer luego la desigualdad :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}(t)\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-b(t-s)} \end{pmatrix} \right\| \|\tilde{w}(s)\| + \int_s^t \left\| \begin{pmatrix} e^{-(t-\xi)} & 0 \\ 0 & e^{-b(t-\xi)} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} r - z_1(\xi) \\ y_1(\xi) \end{pmatrix} \right\| \|w(\xi)\| d\xi, \\ \|\tilde{\varphi}(t)\| &\leq e^{-\alpha(t-s)} \|\tilde{w}(s)\| + L \int_s^t e^{-\alpha(t-\xi)} \|w(\xi)\| d\xi.\end{aligned}$$

Donde $\alpha = \max(1, b)$,

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} r - z_1(\xi) \\ y_1(\xi) \end{pmatrix} \right\|^2 &= r^2 + 2rz_1(\xi) + z_1^2(\xi) + y_1^2(\xi) \leq \\ &\leq 30^2 - 2(0.5)(45\sqrt{2} + 1) + (45\sqrt{2} + 1)^2 + 45^2 < 900 - 65 + 4180 = 5015 = L^2.\end{aligned}$$

En seguida vemos que :

$$\begin{aligned}\|w(t)\| &= \|p(t) - q(t)\| \leq \|p(t)\| + \|q(t)\| \leq 90\sqrt{2} = M_1, \\ \|\tilde{w}(t)\| &= \|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t)\| + \|v(t)\| \leq 2[45^2 + (42\sqrt{2} + 1)^2]^{1/2} < 160 = M_2.\end{aligned}$$

Esto último dado que el sistema acoplado permanece dentro de un conjunto positivamente invariante.

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leq M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-(\sigma+k)(t-\xi)} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi \\ \|\tilde{\varphi}(t)\| &\leq M_2 e^{-\alpha(t-s)} + L \int_s^t e^{-\alpha(t-\xi)} \|w(\xi)\| d\xi.\end{aligned}$$

Combinando ecuaciones:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}(t)\| &= M_2 e^{-\alpha(t-s)} + L \int_s^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[M_1 e^{-(\sigma+k)(\tau-s)} + \sigma \int_s^\tau e^{-(\sigma+k)(\tau-\xi)} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi \right] d\tau \\ \|\tilde{\varphi}(t)\| &= M_2 e^{-\alpha(t-s)} + M_1 L e^{-\alpha t + (\sigma+k)s} \int_s^t e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} d\tau + \sigma L e^{-\alpha t} \int_s^t e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} \int_s^\tau e^{(\sigma+k)\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Analicemos:

$$\begin{aligned}M_1 L e^{-\alpha t + (\sigma+k)s} \int_s^t e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} d\tau &= \frac{M_1 L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t + (\sigma+k)s} \left(e^{-(\sigma+k-\alpha)s} - e^{-(\sigma+k-\alpha)t} \right) \\ &= \frac{M_1 L}{\sigma+k-\alpha} \left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-(\sigma+k)(t-s)} \right) \leq \frac{M_1 L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha(t-s)}.\end{aligned}$$

Lo cual se cumple siempre y cuando $\sigma+k-\alpha > 0$. Además, esto es necesario para evitar una singularidad. En nuestro conjunto de parámetros, basta con que $k > 3.5$.

En seguida veremos acotada la doble integral:

$$\begin{aligned}\sigma L e^{-\alpha t} \int_s^t e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} \int_s^\tau e^{(\sigma+k)\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi d\tau &= \sigma L e^{-\alpha t} \int_s^t \int_s^\tau e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} e^{(\sigma+k)\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi d\tau = \\ &= \frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t e^{(\sigma+k)\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| \left(e^{-(\sigma+k-\alpha)\tau} \right) \Big|_s^\tau d\xi = \\ &= \frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t e^{(\sigma+k)\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| \left(e^{-(\sigma+k-\alpha)s} - e^{-(\sigma+k-\alpha)\xi} \right) d\xi = \\ &= \frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t \left(e^{(\sigma+k)\xi - (\sigma+k-\alpha)s} - e^{\alpha\xi} \right) \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi = \\ &= -\frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t \left(e^{\alpha\xi} - e^{(\sigma+k)\xi - (\sigma+k-\alpha)s} \right) \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi = \\ &\leq -\frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t e^{\alpha\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}(t)\| &\leq M_2 e^{-\alpha(t-s)} + \frac{M_1 L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha(t-s)} - \frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} e^{-\alpha t} \int_s^t e^{\alpha\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi, \\ e^{\alpha t} \|\tilde{\varphi}(t)\| &\leq \left(M_2 + \frac{M_1 L}{\sigma+k-\alpha} \right) e^{\alpha s} - \frac{\sigma L}{\sigma+k-\alpha} \int_s^t e^{\alpha\xi} \|\tilde{w}(\xi)\| d\xi.\end{aligned}$$

Se nota que $\tilde{\varphi}(t)$ y $\tilde{w}(t)$ es la misma función, y se recuerda [18]:

Desigualdad de Gronwall: Sea $u: [0, \alpha] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua y no negativa. Suponga que existen $c, k \geq 0$ tales que $\mu(t) \leq c + \int_s^t k\mu(t)dt$ para toda $t \in [0, \alpha]$. Entonces:

$$\mu(t) \leq ce^{k(t-s)} \text{ para toda } t \in [0, \alpha].$$

Esto lo podemos utilizar para escribir:

$$e^{\alpha t} \|\tilde{\varphi}(t)\| \leq \left[\left(M_2 + \frac{M_1 L}{\sigma + k - \alpha} \right) e^{\alpha s} \right] e^{-\frac{\sigma L}{\sigma + k - \alpha}(t-s)} = Ne^{-\gamma(t-s)}.$$

$$\text{Donde } N = \left(M_2 + \frac{M_1 L}{\sigma + k - \alpha} \right) e^{\alpha s}, \quad \gamma = -\frac{\sigma L}{\sigma + k - \alpha}(t-s) > 0.$$

Entonces tenemos que para $\|\tilde{\varphi}(t)\|$:

$$\|\tilde{\varphi}(t)\| \leq Ne^{-(\gamma+\alpha)t+\gamma s} \leq Ne^{-(\gamma+\alpha)t+\gamma s+\alpha s} = Ne^{-(\gamma+\alpha)(t-s)}.$$

Y por lo tanto, $\|\tilde{\varphi}(t)\|$ está exponencialmente acotado.

Sustituyamos esto en la relación para $\|\varphi(t)\|$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-(\sigma+k)(t-\xi)} Ne^{-(\gamma+\alpha)(\xi-s)} d\xi = \\ &= M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \sigma Ne^{-(\sigma+k)t+(\gamma+\alpha)s} \int_s^t e^{-(\sigma+k-\gamma-\alpha)\xi} d\xi = \\ &= M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \sigma Ne^{-(\sigma+k)t+(\gamma+\alpha)s} \left[\frac{e^{-(\sigma+k-\gamma-\alpha)t} - e^{-(\sigma+k-\gamma-\alpha)s}}{\sigma + k - \gamma - \alpha} \right] \leq \\ &\leq M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \sigma Ne^{-(\sigma+k)t+(\gamma+\alpha)s} \left[\frac{e^{-(\sigma+k-\gamma-\alpha)t}}{\sigma + k - \gamma - \alpha} \right] = \\ &\leq M_1 e^{-(\sigma+k)(t-s)} + \frac{\sigma Ne^{-(\gamma+\alpha)(t-s)}}{\sigma + k - \gamma - \alpha} \leq \left(M_1 + \frac{\sigma N}{\sigma + k - \gamma - \alpha} \right) e^{-\beta(t-s)}. \end{aligned}$$

Donde $\beta = \min(\sigma + k, \gamma + \alpha)$. También podemos especificar que $\sigma + k - \alpha - \gamma > 0$, lo cual se cumple si $k > 3.5$.

Y de esta forma $\|\varphi(t)\|$ también se encuentra exponencialmente acotado.

Por lo tanto, el flujo de acoplamiento tiende a cero exponencialmente. Es decir, el sistema acoplado sincroniza. Esto demuestra el *Teorema IV-3*.

Apendice 1

Para encontrar la función de prueba de Lyapunov partamos de la primera función con que generalmente se intenta :

$$V = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2.$$

El principal problema al que debemos dirigir nuestra atención, en la función de Lyapunov, es donde la derivada direccional debe ser menor a cero.

Al encontrar la derivada a lo largo de las trayectorias del campo vectorial del sistema de Lorenz para la función V tenemos :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2xa_1(-\sigma x + \sigma y) + 2ya_2(-y - xz + rx) + 2za_3(-bz + xy) \\ &= (-2\sigma x^2 + 2\sigma xy)a_1 + (-2y^2 - 2xyz + 2rxy)a_2 + (-2bz^2 + 2xyz)a_3.\end{aligned}$$

Si hacemos que $a_2 = a_3$ obtenemos :

$$\dot{V} = (-2\sigma x^2 + 2\sigma xy)a_1 + (-2y^2 + 2rxy - 2bz^2)a_2.$$

Si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$, los términos $-2\sigma x^2 a_1$, $-2y^2 a_2$ y $-2bz^2 a_2$ son negativos, y por eso sólo hay que concentrarnos en el término $2xy(a_1\sigma + a_2r)$.

Hasta el momento lo que tenemos es una función con derivada direccional de la forma :

$$\dot{V} = -2\sigma x^2 a_1 - 2a_2(y^2 + bz^2) + 2xy(a_1\sigma + a_2r).$$

Si notamos que el término xy está presente en $\dot{z} = -bz + xy$, podríamos eliminarlo de la derivada direccional si la ponemos en la forma :

$$\dot{V} = -2\sigma x^2 a_1 - 2a_2(y^2 + bz^2) + 2xy(a_1\sigma + a_2r) + a_4\dot{z},$$

donde $a_4 = -2(a_1\sigma + a_2r)$.

Esto se logra con una $V = a_1x^2 + a_2y^2 + a_2(z - a_5)^2$ ya que al derivar se tiene :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2a_1x\dot{x} + 2a_2y\dot{y} + 2a_2(z - a_5)\dot{z} \\ &= 2a_1x\dot{x} + 2a_2y\dot{y} + 2a_2z\dot{z} - 2a_2a_5\dot{z},\end{aligned}$$

donde $a_5 = -\frac{a_4}{2a_2} = \frac{\sigma a_1 + r a_2}{a_2}$.

Haciendo $a_1 = a_2 = 1$ tenemos que nuestra función queda :

$$V = x^2 + y^2 + (z - (\sigma + r))^2.$$

CONCLUSIONES

En el desarrollo de este trabajo se dio una introducción a las características del sistema de ecuaciones de Lorenz, sistema que ha sido muy estudiado debido a su naturaleza caótica y a la presencia de un atractor extraño. En seguida se estudiaron los conceptos de dinámica simbólica, la herradura de Smale, y la órbita homoclínica que aparece en dicho sistema. El motivo de este desarrollo fue para dejar en firme los conceptos que son necesarios para un posterior estudio de estas ecuaciones, y en especial del sistema acoplado, ya que hasta la fecha no hay ningún modelo que explique todas las propiedades que se observan. En seguida se detallan los resultados de un estudio numérico hecho en una estación de trabajo de RISC, para de esta forma entender un poco más la complejidad del sistema. Hasta aquí se puede decir que fue un trabajo de programación y recopilación bibliográfica. En el capítulo IV es donde están los resultados importantes de la tesis.

Después de presentar el comportamiento del sistema de Lorenz, se acoplaron dos sistemas de Lorenz, y se demostró que para un tiempo suficientemente grande y con un término de acoplamiento adecuado, es posible que ambos sistemas presenten una sincronización en su comportamiento. Esto ocurre aunque cada sistema tenga un punto inicial muy diferente al otro. Y también se observa que la sincronización no implica la pérdida del comportamiento caótico ni la desaparición del atractor extraño. Es bien sabido que existen muchos procesos químicos que tienen un comportamiento caótico. Existe literatura al respecto [21] en donde acoplar osciladores químicos. Los métodos de análisis de sistemas

acoplados del capítulo IV podrían ser utilizados para buscar la posible sincronización.

REFERENCIAS

- [0] Lorenz, E.N., "Deterministic non-periodic flows", *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- [1] Berge, et al., *Order within Chaos*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [2] Albert, A., *Álgebra Superior*, Editorial Hispano Americana, México, 1969.
- [3] Hastings, S.P., Troy, W.C., "A shooting approach to the Lorenz Equations", *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 27 (1992) no. 2.
- [4] Wiggins, S. *Global Bifurcations and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] Hausdorff, *Set Theory*, Chelsea, New York, 1962.
- [6] Dugundji, J. *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [7] Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [8] Piskunov, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, Montaner y Simon, Barcelona, 1978.
- [9] Curry, J.H., "An algorithm for finding closed orbits". *Global Theory of Dynamical Systems*. ed. Z. Nitecki and C. Robinson, Lect. Notes in Math., 819, Springer-Verlag, pp. 111-117.
- [10] Lorenz, E.N., "Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium". *J. Atmos. Sci.*, 36, pp. 1685-1699.
- [11] Williams, R.F., "Structure of the Lorenz attractors". *Publications Mathématiques, I.H.E.S.*, 50, pp. 59-72.
- [12] Guckenheimer, G., Williams, R.F., "Structural stability of the Lorenz attractor". *Publications Mathématiques, I.H.E.S.*, 50, pp. 73-100.
- [13] Çambel, A.B., *Applied Chaos Theory*, Academic Press, New York, 1993.
- [14] Franceschini, V. "A Feigenbaum sequence of bifurcations in the Lorenz model", *J. Stat. Phys.*, 22 (3), pp. 397-406.
- [15] Feigenbaum, M.J., "Qualitative universality for a class of non-linear transformations", *J. Stat. Phys.*, 19, pp. 25-52.
- [16] Manneville, P., Pomeau, Y., "Intermittency and the Lorenz model", *Phys. L.*, 75A, 1.
- [17] Braun, M., *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Editorial Iberoamericana, Mexico, 1990.
- [18] Hirsch, M.W., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [19] Rodrigues, H.M., "Uniform Ultimate Boundedness and Synchronization", Technical Report, CDSNS94-160, Georgia Institute of Technology, 1994.
- [20] Rodrigues, H.M., Afraimovich, V., "Uniform Ultimate Boundedness and Synchronization for Nonautonomous Equations", Technical Report, CDSNS94-202, Georgia Institute of Technology, 1994.
- [21] Neu, J., "Coupled Chemical Oscillators", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 37, no. 2, October 1979.
- [22] Bonilla, L.L., Neu, J.C., Spigler, R., "Nonlinear Stability of Incoherence and Collective Synchronization in a Population of Coupled Oscillators", Plenum Publishing Corp, Belgium, 1992.
- [23] Smith, W.A., *Análisis Numérico*, Prentice-Hall, Mexico, 1988.