



Casa abierta al tiempo

**OSCILACIONES AEROELÁSTICAS NOLINEALES
DE CILINDROS EN UN ARREGLO**

Resultados de las ecuaciones diferenciales
empíricas con teoría de la estabilidad

Tesis que presenta
Aldo Yuck Franco

Para la obtención del grado de
Maestro en Física

Mayo de 2002

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**OSCILACIONES AEROELÁSTICAS
NOLINEALES DE CILINDROS
EN UN ARREGLO**

Resultados de las ecuaciones diferenciales
empíricas con teoría de la estabilidad

Tesis que presenta
Aldo Yuck Franco

Para la obtención del grado de
Maestro en Física

Asesor:
Peter Plaschko

Mayo de 2002

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A la memoria de mis padres

AGRADECIMIENTOS

Al CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA por el apoyo económico brindado mediante una beca (Maestría)

A todas las personas que me brindaron todo su apoyo para la realización de esta tesis.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor Dr. Peter Plaschko, por su paciencia, dedicación y apoyo constante para dirigir tan acertadamente este trabajo de tesis.

Indice

I. Introducción	Pag. 1
II. Fenómenos y modelos semiempiricos	Pag. 6
a) Teoria cuasiestatica	Pag. 6
b) Modelo de Paidoussis y Price	Pag. 10
c) Modelo de Granger Y Paidoussis	Pag. 13
d) Modelo de Berger	Pag. 16
III. Oscilaciones no lineales de dos cilindros en un modelo de estela	Pag. 20
Comentario 1	Pag. 34
Comentario 2	Pag. 35
Comentario 3	Pag. 37
IV. Oscilaciones de un cilindro movil dentro de un arreglo de cilindros fijos	Pag. 40
a) El desarrollo para calcular las soluciones para el termino de memoria.	Pag. 42
V. Conclusiones y perspectivas	Pag. 55
Referencias	Pag. 57
Apéndice A	
Formalismo no canonico aplicado al problema de la estela	Pag. 60
Apéndice B	
Exponentes de Floquet Para la configuración de un cilindro solo	Pag. 64

I.- Introducción

En la presente tesis consideramos modelos semiempíricos para investigar oscilaciones no lineales de cilindros. En el capítulo III investigaremos oscilaciones de dos cilindros en una configuración tándem, donde el primer cilindro (en la nomenclatura de navegación de botes: el cilindro barlovento) produce una estela donde está inmerso el segundo cilindro (el cilindro sotavento). En el capítulo IV analizaremos las oscilaciones de un cilindro rígido móvil en un arreglo de cilindros rígidos inmóviles. Los conocimientos de hidrodinámica respecto al objetivo de nuestra tesis son muy limitados. Solo existe una teoría asintótica para describir la estabilidad de un cilindro único. Para para el análisis exacto de la tesis se necesitaría una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo alrededor de un cilindro (o dos cilindros) que empiece a moverse en el ambiente de otros cilindros. Entonces se trata de un modelo bidimensional, no estacionario con condiciones de frontera desconocidas, porque los valores espacio temporales de las amplitudes, no se conocen al principio de los cálculos. Debe ser claro que los problemas de análisis se reflejan en tratamientos numéricos y experimentos numéricos, que no fueron hechos hasta ahora.

Pero el problema es de gran interés en la aplicación de técnicas, como generadores de vapor, condensadores y transformadores de calor. Aquí nos referiremos sólo a un ejemplo. Los cilindros son intercambiadores de calor (disipadores de calor); si un cilindro móvil tiene amplitudes grandes, éste colisiona con los cilindros inmóviles, esto significa que el sistema de transferencia de calor falla. La importancia de nuestro problema ha motivado a varios investigadores a hacer experimentos y de tratar de extraer datos de los resultados experimentales para establecer modelos semiempíricos. El proceso de desarrollar un modelo semiempírico necesita, sin embargo, una larga serie de experimentos para que se ajuste un modelo con los valores experimentales. Conocemos el ejemplo del Prof. E. Berger, que trabajó en la Universidad Técnica de Berlín, Alemania, que invirtió más de 20 años para formular un

modelo. Además se tiene que decir que un modelo semiempírico tiene siempre el carácter de ser “críptico”. Esto es por que un modelo nunca es completo y los datos incluidos en el modelo son desconocidos para las personas que se encuentran a éste modelo por primera vez. Pero, por otra parte, se tiene que decir que las ecuaciones de Navier-Stokes, representan un modelo macroscópico sin atender efectos microscópicos.

La tesis, por falta de equipo experimental, es un estudio teórico que trata de introducir ideas recientes de las matemáticas no lineales en modelos lineales de varios autores. Los modelos no lineales son importantes porque no sólo pueden predecir la transición entre el estado de equilibrio y las oscilaciones (como los modelos lineales) sino que también predicen cantidades tan importantes como las amplitudes y las fases de las oscilaciones. Los conocimientos matemáticos necesarios para esta tesis fueron transmitidos en clases de posgrado dados por el asesor de la tesis Prof. P. Plaschko.

Ahora empezaremos con una breve discusión de los modelos a usar.

Berger [1] considera un modelo no lineal de oscilaciones transversales (de un cilindro) a un flujo y supone que las oscilaciones son provocadas por la fuerza de sustentación.

Paidoussis y Price [2] plantean el modelo lineal para dos cilindros uno (cilindro sotavento) detrás del otro (cilindro barlovento), que oscilan transversalmente al flujo incidente (véase figura 1).

Consideran que el flujo incide sobre los cilindros, pero también consideran la interacción de la estela del primer cilindro sobre el segundo cilindro.

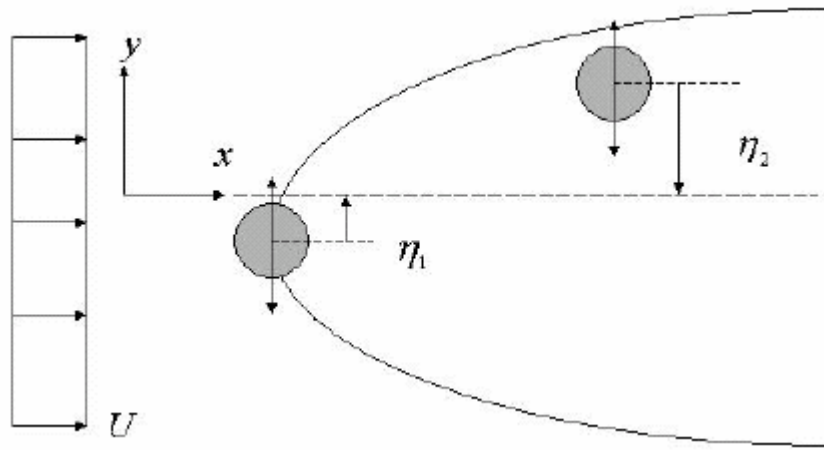


Figura 1. Configuración tándem, donde el primer cilindro es llamado cilindro barlovento y el segundo es llamado cilindro sotavento, con un flujo incidente.

Granger y Paidoussis [3] toman un modelo lineal de oscilación de un cilindro rígido restringido a moverse sólo en la dirección transversal al flujo, en medio de un arreglo de cilindros inmóviles (véase figura 2). Plantean también la ecuación con un término de memoria.

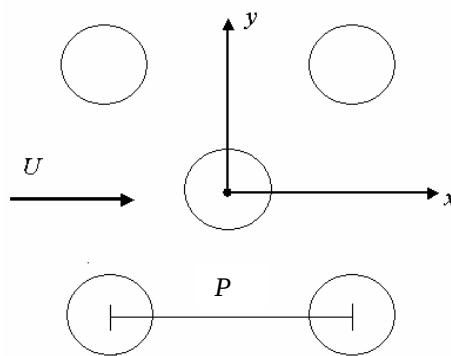


Figura 2. Una sección transversal de un arreglo de cilindros fijos con un cilindro que se desplaza en la dirección vertical.

Donde P es la distancia entre los centros de los cilindros

Berger y Plaschko [4] consideran un modelo no lineal para los desplazamientos en la dirección vertical de un solo cilindro. Aplican el método de escalas múltiples, la rutina de bifurcación y rutinas numéricas recientes para

calcular soluciones. Con estos métodos obtuvieron resultados relevantes para la solución que se bifurca desde el estado de equilibrio. Obtuvieron también la estabilidad de las soluciones y transiciones en forma de histéresis.

En el capítulo II discutiremos la teoría cuasiestática, que se usa para predecir oscilaciones de un cilindro móvil en un arreglo de cilindros fijos. Después daremos detalles de los modelos semiempíricos individuales mencionados anteriormente. Los modelos resultan que son lineales y los resultados correspondientes tienen ciertas limitaciones:

- Se desconocen las condiciones iniciales (CI). Por esto las teorías lineales no son capaces de calcular amplitudes y fases.
- Las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales son siempre estables.
- Los modelos lineales predicen la transición entre el equilibrio y oscilaciones sólo a lo largo de una curva (se llama esta curva en la teoría lineal “ el limite de estabilidad”). Los puntos que no están en esta curva representan el equilibrio u oscilaciones amortiguadas. Esto significa que linealmente falta una región bidimensional de oscilaciones estables.

Por otra parte, una aproximación no lineal da los pasos para establecer un criterio de predicción para la estabilidad, variando todo el conjunto de parámetros que se tienen en el sistema y que pudieran determinar la transición, desde un estado de equilibrio hasta la oscilación periódica de los cilindros.

Adicionalmente, la aproximación no lineal permite el cálculo de las amplitudes y frecuencias de oscilación de los cilindros. Por lo tanto se puede concluir que un estudio no lineal da generalmente más información que el análisis lineal correspondiente.

Así entonces, en el capítulo III se introducen términos no lineales en los modelos de oscilador lineal para formar una teoría de oscilaciones no lineales

del modelo propuesto por Paidoussis y Price [2]. Además se calcula la solución de bifurcación y la frontera de la transición entre la estabilidad y la inestabilidad.

Por último en el capítulo IV incorporamos el término de memoria en la ecuación diferencial ordinaria (EDO) del modelo de Berger [1], con los parámetros que propone. Calculamos la solución de bifurcación con el término de memoria, la amplitud y la fase del desplazamiento del cilindro.

El modelo que usaremos es el oscilador de Van der Pol que viene en la literatura [6] y tiene la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + \mu(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0; \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x, \quad (1)$$

donde $\ddot{x}$ es la aceleración, $\mu\dot{x}^2$ es la parte de amortiguamiento no lineal, $\mu\dot{x}$ es la parte de amortiguamiento lineal, $\dot{x}$ es la velocidad y x es el desplazamiento.

Esto lo compararemos con nuestro modelo para determinar sus propiedades, puesto que el modelo de Van der Pol ha sido estudiado minuciosamente con anterioridad.

En lo sucesivo usaremos un modelo que está basado en el modelo de Van de Pol con una excitación

$$\ddot{y} + (q_0 + q_2\dot{y}^2)\dot{y} + y = f, \quad (1')$$

f es la excitación hidrodinámica.

II Fenómenos y modelos semiempíricos

Trabajamos en esta tesis con la teoría cuasiestática para describir como nacen las ecuaciones de la fuerza de sustentación y con tres modelos semiempíricos, el modelo Berger y Plaschko [4], Paidoussis y Price [2] y Granger y Paidoussis [3]. Estos modelos son diferentes pero relacionados entre si: Todos los modelos se refieren a un flujo homogéneo con velocidad U que incide sobre el sistema.

a) Teoría Cuasiestática

En esta sección, para empezar, trataremos de caracterizar el desplazamiento en general de un cilindro rígido en un arreglo de cilindros fijos en dos dimensiones y después particularizarlo para nuestro trabajo. También calcularemos las fuerzas hidrodinámicas usando modelos cuasiestáticos. Esto significa que las fuerzas hidrodinámicas que actúan en un cilindro son aproximadamente iguales a las fuerzas hidrostáticas, si las fuerzas hidrostáticas actúan en el cilindro bajo el ángulo de ataque α (véase figura 3).

Consideramos un arreglo de cilindros y tomando una sección transversal como se muestra en la figura 3, con un flujo incidente. Consideramos que todos los cilindros son rígidos y fijos, exceptuando uno, el cual se desplaza en las direcciones vertical y horizontal caracterizados por el eje y y el eje x respectivamente. La ecuación de movimiento en la dirección vertical del cilindro se puede escribir como

$$mL\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_y, \quad (2)$$

donde F_y es la fuerza hidrodinámica total en la dirección vertical, L es la longitud del cilindro, D es el diámetro del cilindro, m es la masa por unidad de longitud, c es el amortiguamiento mecánico y k es la constante de restitución.

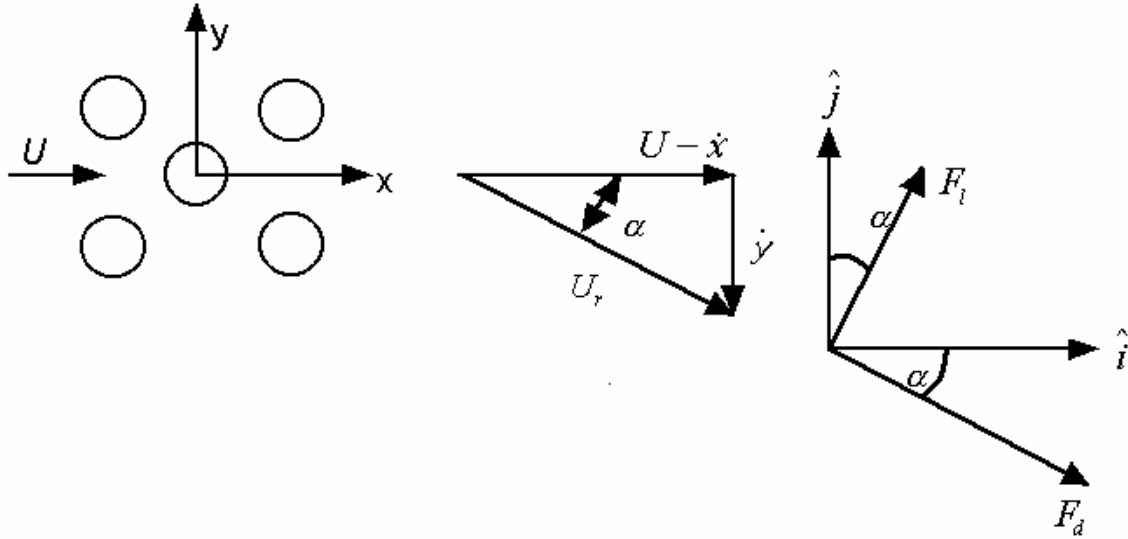


Figura 3 Vista de una sección transversal de un arreglo cilindros con un flujo incidente; diagrama de velocidades.

La fuerza hidrostática resulta de la fuerza de arrastre (F_d) y la fuerza de sustentación (F_l). Los coeficientes de estas fuerzas tienen valores adimensionales C_d y C_l . Entonces es válido lo siguiente

$$F_x = \frac{1}{2} \rho U_r^2 L D (C_d \cos(\alpha) + C_l \sin(\alpha)), \quad (3)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U_r^2 L D (C_l \cos(\alpha) - C_d \sin(\alpha)), \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del fluido.

Nótese que para la ecuación (2) necesitamos sólo la ecuación (4). También, según la figura 3 damos las siguientes relaciones

$$U_r = \left[(U - \dot{x}^2) + \dot{y}^2 \right]^{1/2}; \alpha = \arcsen \left(\frac{\dot{y}}{U_r} \right); \dot{y} = \frac{dx}{dt}; \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

La posición $(x, y) = (0, 0)$ denota la posición de equilibrio. Entonces se pueden desarrollar C_l y C_d con series de Taylor para los valores de (x, y) cerca del equilibrio ($|x| \ll 1, |y| \ll 1$) para

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_0} + \left(\frac{\partial C_l}{\partial x} \right)_{(0,0)} x + \left(\frac{\partial C_l}{\partial y} \right)_{(0,0)} y. \\ C_d &= C_{d_0} + \left(\frac{\partial C_d}{\partial x} \right)_{(0,0)} x + \left(\frac{\partial C_d}{\partial y} \right)_{(0,0)} y. \end{aligned} \quad (6)$$

Para determinar los desarrollos de C_d y C_l usaremos las siguientes simetrías

$$\begin{aligned} C_d(x, y) &= C_d(x, -y), \\ C_l(x, y) &= -C_l(x, -y), \end{aligned} \quad (7a)$$

El significado es que C_d es una función par en la variable y y C_l es una función impar en la variable y (véase la figura 4). Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} C_d(x, y=0) &\neq 0, \quad \frac{\partial C_d}{\partial y}(x, y=0) = 0, \\ C_l(x=0, y) &= 0, \quad \frac{\partial C_l}{\partial y}(x=0, y) \neq 0. \end{aligned} \quad (7b)$$

Además, ponemos el cilindro en la posición $x = 0$. Por lo tanto es válido que

$$\begin{aligned} C_d(x, y) &\approx C_{d_0}, \\ C_l(x, y) &\approx \left(\frac{\partial C_l}{\partial y} \right)_{(0,0)} y. \end{aligned} \quad (7c)$$

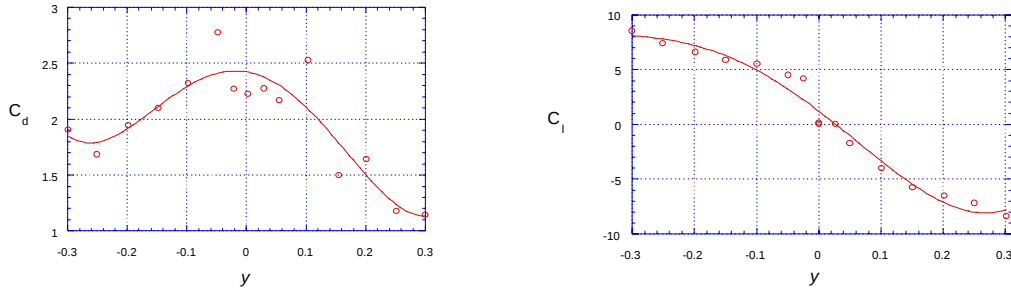


Figura 4 Datos experimentales obtenidos de Price y Valerio [7] y el ajuste de mínimos cuadrados. C_d y C_l son funciones de y , con $P/D=1.5$, para un arreglo como en la figura 2

Las simetrías de la ecuación (7b) está de acuerdo con lo propuesto en los experimentos de Price y Valerio [7].

Además suponemos que el ángulo de ataque α es muy pequeño $\alpha \ll 1$, que la velocidad en la dirección de x es cero y con esto podemos aproximar la ecuación (5) y obtenemos

$$\alpha \approx \text{sena} \approx \frac{y}{U}; \quad U_r \approx U; \quad \cos \alpha \approx 1. \quad (7d)$$

Entonces podemos escribir la ecuación (4) con las ecuaciones (7c) y (7d)

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 L D \left[\left(\frac{\partial C_l}{\partial y} \right)_{(0,0)} y - C_{d_0} \left(\frac{y}{U} \right) \right]. \quad (8)$$

La ecuación (8) representa la fuerza hidrodinámica total, contiene dos términos uno con el coeficiente estático de arrastre y otro con el coeficiente estático de sustentación. Nosotros usaremos la ecuación (8) en el capítulo IV.

b) Modelo de Paidoussis y Price

Éste modelo describe el movimiento transversal de dos cilindros rígidos uno (barlovento) tras del otro (sotavento) con un flujo homogéneo que incide sobre los dos cilindros. Además actúa sobre el segundo cilindro la influencia de la estela del primero (véase figura 1).

Paidoussis y Price [2] propusieron un modelo lineal para investigar posibles oscilaciones de la configuración mostrada en la figura 1. En una representación adimensional de éste modelo que gobierna los desplazamientos $\eta_{1,2}$ de los cilindros individuales obtenemos, en forma de matrices

$$I\bar{\eta}'' + \Delta\bar{\eta}' + (\Gamma + vK)\bar{\eta} = \bar{0}, \quad \eta_j = \frac{y_j}{D}, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

En la ecuación (9) usamos los siguientes símbolos

$$\begin{aligned} \bar{\eta}'' &= \begin{pmatrix} \eta_1'' \\ \eta_2'' \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}' = \begin{pmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{U}{\omega_0 D}, \quad v = \frac{2n}{\pi} \Omega^2, \quad d_0 = \frac{\delta}{\pi}, \\ n &= \frac{\rho \pi D^2}{4m}, \quad ' = \frac{d}{dt}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{mL}}, \end{aligned} \quad (9a)$$

con Ω la velocidad reducida, τ tiempo adimensional y ω_0 la frecuencia natural.

Tomando $h = 0$ significa que los dos cilindros tienen la misma frecuencia natural y por eso existe una sincronía, δ/π es el coeficiente lineal de amortiguamiento, n es la proporción de masa, la masa que desaloja el cilindro

dentro del flujo sobre la masa del cilindro, m es la masa del cilindro por unidad de longitud. Nótese también, que en ejemplos aerodinámicos n es un parámetro pequeño con un orden de magnitud típico $O(10^{-3})$. Más adelante, en el capítulo III usaremos v para un parámetro de un desarrollo (véase ecuaciones (29c) y (39)). También usaremos a en el capítulo IV como parámetro de otro desarrollo asintótico. Según las mediciones hechas por [2] las constantes que tomamos son las siguientes

$$\kappa = \kappa_{11} = \kappa_{22} = 4, \quad \kappa_{1,2} = 33.4 \text{ y } \kappa_{2,1} = -53.3 \quad (9b)$$

Nótese que el producto $\kappa_{12}\kappa_{21} < 0$, y en [2] lo atribuyen a la vorticidad del flujo (pero para un flujo potencial las kapas tienen signos iguales $\kappa_{12}\kappa_{21} > 0$).

Para determinar el modelo (9) se debe usar la ecuación (2) para dos cilindros con masas m_j , L_j , los amortiguamientos c_j , constantes de restitución k_j y fuerzas hidrodinámicas $F_y^{(j)}$, $j=1,2$. Debemos usar en lugar de la ecuación (2) un sistema con dos grados de libertad

$$m_1 L_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = F_y^{(1)}, \quad (10)$$

$$m_2 L_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = F_y^{(2)}. \quad (10a)$$

Usando una representación adimensional con el siguiente cambio de variable $\eta_1 = y_1 / D$, $\eta_2 = y_2 / D$, $\tau = \omega_1 t$, $' = d/d\tau$, y $\omega_1 = \sqrt{k_1 / m_1 L_1}$, obtenemos

$$\eta_1'' + \frac{\delta}{\pi} \eta_1' + \eta_1 = \frac{F_y^{(1)}}{m_1 L_1 \omega_1^2 D}, \quad \frac{\delta}{\pi} = \frac{c_1}{m_1 L_1 \omega_1^2}, \quad (11)$$

$$\eta_2'' + \frac{\delta}{\pi} \frac{c_2}{c_1} \frac{m_1 L_1}{m_2 L_2} \eta_2' + \frac{k_2}{k_1} \frac{m_1 L_1}{m_2 L_2} \eta_2 = \frac{F_y^{(2)}}{m_2 L_2 \omega_2^2 D} \quad (11a)$$

Una comparación de la ecuación anterior con la ecuación (9a) nos da como resultado

$$\frac{c_2}{c_1} \frac{m_1 L_1}{m_2 L_2} = 1; \frac{k_2}{k_1} \frac{m_1 L_1}{m_2 L_2} = 1 + h. \quad (12)$$

La comparación de los términos de acoplamiento nos da con la ecuación (9a)

$$\frac{F_y^{(1)}}{m_1 L_1 \omega_1^2 D} = v (\kappa \eta_1 + \kappa_{12} \eta_2), \quad (13)$$

$$\frac{F_y^{(2)}}{m_2 L_2 \omega_1^2 D} = v (\kappa_{21} \eta_1 + \kappa \eta_2). \quad (13a)$$

Existen varias maneras de cumplir estas con expresiones adimensionales. Un ejemplo es un sistema de dos cilindros con masas iguales y longitudes iguales $m_1 L_1 = m_2 L_2 = mL$. Entonces el resultado es $c_1 = c_2$, $k_1 / k_2 = 1 + h$ y

$$F_y^{(1)} = \alpha v (k \eta_1 + k_{12} \eta_2), \quad (14)$$

$$F_y^{(2)} = \alpha v (k_{21} \eta_1 + k \eta_2), \quad (14a)$$

$$\alpha = mL \omega_1^2 D. \quad (14b)$$

Además debemos mencionar que los acoplamientos en (9) no son de tipo hidrodinámico en el sentido de Berger. Berger [1] formulaba la hipótesis de que los acoplamientos y los términos de amortiguamiento deberían ser expresados

sólo en forma de velocidades (η_1', η_2') , para ser similares a los términos que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes.

c) Modelo de Granger y Paidoussis

En [3] se considera la oscilación de un cilindro rígido que está restringido sólo a moverse en la dirección transversal al flujo, en un ambiente de cilindros rígidos inmóviles (véase figura 5). Los cilindros inmóviles forman los vértices de un cuadrado o son los vértices de un triángulo. El modelo correspondiente está basado en la consideración de tres efectos. En primer lugar se trata de un flujo en una “fisura” (el flujo que pasa entre los cilindros inmóviles). Al mismo tiempo se considera oscilaciones de un cuerpo con un grado de libertad y se introduce un término de memoria. Este último permite tomar en cuenta el efecto de retraso del tiempo entre desplazamiento del cilindro y los cambios resultantes de las fuerzas del fluido.

Para modelar el flujo de fisura que pasa en el arreglo de cilindros, se usa la definición (vease figura 5)

$$U_p = \gamma U; \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{P/D}{P/D - 1};$$

donde P es la distancia entre centros de cilindro. De la definición (15) y de la figura 2.

Para introducir un término de memoria escribimos la ecuación (8) en su forma adimensional. Para esto usamos de nuevo $\eta_1 = y_1 / D$ y $\tau = \omega_0 t$ obteniendo de la ecuación (8)

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 DL \left[\left(\frac{\partial C_l}{\partial \eta} \right)_{(0,0)} \eta - C_{d_0} \frac{\eta'}{\Omega} \right] \quad (16)$$

Se introduce el término de memoria reemplazando el primer término del paréntesis rectangular de la ecuación (16)

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial \eta} \right)_{(0,0)} \eta \rightarrow \left(\frac{\partial C_l}{\partial \eta} \right)_{(0,0)} H * \eta, \quad (17)$$

de donde introducimos el producto de convolución

$$H * y = \int_0^t H(t-u) \eta(u) du. \quad (18)$$

La función H es adimensional, la definiremos más adelante. Entonces es válido con (16), (17) y (18)

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 DL \left[\left(\frac{\partial C_l}{\partial \eta} \right)_{(0,0)} \int_0^\tau H(\tau-u) \eta(u) du - C_{d_0} \left(\frac{\eta'}{\Omega} \right) \right]. \quad (19)$$

La ecuación (18) es conveniente para calcular el retraso temporal, ya que la convolución es una integral que involucra todos los tiempos entre el tiempo inicial y el tiempo final. La función H es la que definieron Granger y Paidoussis [3] como

$$H(u) = \frac{d\Phi(u)}{du}, \quad (20)$$

donde la función Φ está definida por

$$\Phi(u) = 1 - \sum_{k=1}^2 \alpha_k \exp(-\beta_k u). \quad (21)$$

En la ecuación (21) α_k y β_k son constantes empíricas las cuales fueron determinadas en [3] en la forma

$$\alpha_1 = 1.134, \quad \alpha_2 = -0.121, \quad \beta_1 = 0.084, \quad \beta_2 = 1.723. \quad (22)$$

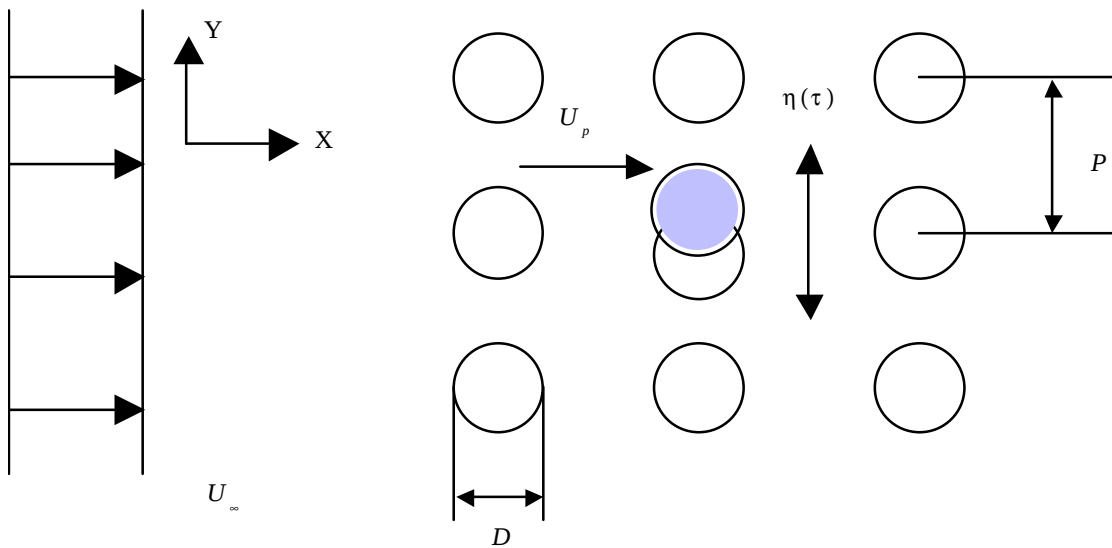


Figura 5 El movimiento transversal de un cilindro dentro de un arreglo de cilindros fijos.

d) Modelo de Berger

El modelo de Berger [1] está dirigido a un solo cilindro rígido móvil en ausencia de otros cilindros. El cilindro está montado de tal forma que sólo se mueve en la dirección transversal al flujo, bajo la influencia de la sustentación. Éste modelo consiste de dos osciladores del tipo Van der Pol. Uno de estos osciladores representa el movimiento del cilindro, mientras que el otro oscilador describe la evolución temporal de la sustentación. La ecuación del primer oscilador que gobierna el desplazamiento del cilindro $y(t)$, propuesta por Berger [1] es

$$mL \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[D_0 + D_2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{dy}{dt} + ky = f_y \quad (23)$$

En la ecuación (23) t es el tiempo, D_j , $j = 0, 2$ son los coeficientes de amortiguamiento lineal y cúbico respectivamente.

El coeficiente lineal D_0 del amortiguamiento está dado por $D_0 = D_{0f} + D_{0m}$, donde D_{0f} es coeficiente hidrodinámico y D_{0m} es el coeficiente mecánico. En contraste, el coeficiente no lineal D_2 es de origen hidrodinámico ($D_2 = D_{2f}$). Para obtener una ecuación adimensional de la ecuación (23) se hace el siguiente cambio de variable, $\eta = y/D$, $\tau = \omega_0 t$, ($\omega_0 = \sqrt{k/mL}$ es la frecuencia propia del cilindro) sustituyéndolo (23) resulta

$$\eta'' + (d_0 + d_2 \eta'^2) \eta' + \eta = F_y, \quad (23a)$$

$$d_0 = \frac{D_0}{mL \omega_0}, \quad d_2 = \frac{D_2 \omega_0 D_2}{mL}, \quad F_y = \frac{f_y}{mL \omega_0^2 D},$$

donde d_0 y d_2 son los coeficientes de amortiguamiento adimensionales y F_y es la fuerza del fluido sin dimensiones.

En las ecuaciones (23) y (23a) ya se ha introducido un modelo simplificado para el coeficiente del amortiguamiento hidrodinámico en la forma de un polinomio de orden dos: $d_f = d_0 + d_2 \eta'^2$, ahora daremos algunas razones para usar éste término. En primer lugar diremos que éste término es causado por las fuerzas debido a la presión y a la viscosidad del fluido que ejerce sobre las paredes del cilindro. Los cálculos de esta fuerza requieren de las soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes. En ausencia de una teoría razonable de la hidrodinámica correspondiente, tenemos que usar un modelo semiempírico. Se sabe de experimentos de Bleviss [8] que los vórtices que genera el fluido al pasar por un cilindro establecen un sistema organizado de vórtices en la estela que persiste hasta números de Reynolds $R \leq 2.0 \times 10^5$ ($R = UD/\lambda$, donde λ es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluido). Experimentos para el número de Strouhal S ($S = f_{vs} D/U$, donde f_{vs} es la frecuencia de los vórtices) dan los valores entre $0.15 \leq S \leq 0.19$.

El cilindro entonces se expone a una fuerza en la dirección transversal del flujo incidente. Si f_{vs} está cerca de la frecuencia propia (o natural) del cilindro $f_0 = \omega_0 / 2\pi$, ocurre el fenómeno de resonancia en una banda corta con amplitudes pequeñas A (típicamente $A/D \ll 1$, Feng [9]). Las oscilaciones correspondientes se llaman vibraciones inducidas por vórtices (abreviado VIV). Esta resonancia determina el amortiguamiento hidrodinámico. La hipótesis es que – debido al origen hidrodinámico de la fuerza - el amortiguamiento es independiente del desplazamiento del cilindro y varía sólo con la velocidad de éste: $d_j = d_j(\eta')$, $j = 1, 2$. Las amplitudes de las VIV's tienen, además pequeñas amplitudes, medidas experimentalmente por [9]. Se puede desarrollar d_f en una serie de Taylor alrededor del origen $y = 0$, excluyendo términos impares (debido a que cambian de signo al cruzar la posición cero). Poniendo

la forma más simple, obtenemos el término empírico $d_f = d_0 + d_2 \eta'^2$ que ya fue usada en la ecuación (23a).

En la siguiente ecuación (24) damos una lista de los parámetros para adimensionales adicionales; estos parámetros son completamente experimentales y fueron propuestos por [1].

$$d_{of} = 2.416253 ; \quad d_{2f} = -14.629367 , \quad (24)$$

$$d_0 = Q_0 + d_{of} np ; \quad p = \frac{(\Omega^2 - 1)}{W^2} ; \quad (24a)$$

$$d_2 = \frac{4}{3} d_{2f} n \frac{p}{W^2} ; \quad F_y = n W^2 C_l ; \quad (24b)$$

$$W = \frac{f_{vs}}{f_0} = -0.04676 + 0.839598 \Omega - 0.000134 \Omega^2 . \quad (24c)$$

En la formula (24) d_{of} y d_{2f} son constantes adimensionales de ajuste, en la formula (24a), Q_0 es el amortiguamiento mecánico, Ω es la velocidad reducida. Nótese que es válido $2\pi S \approx 1$, además tenemos que $W = f_{vs} / f_0 = 2\pi S \Omega \approx \Omega$.

El coeficiente de la fuerza de sustentación está gobernado por la siguiente ecuación de Van der Pol.

$$c_l'' + (\xi_0 + \xi_2 c_l'^2) c_l' + W^2 c_l = (b_0 + b_2 \eta'^2) \eta' . \quad (25)$$

La parte derecha de la ecuación (25) representa un término de interacción, ξ_0 es el coeficiente lineal y ξ_2 es el coeficientes cubico de amortiguamiento. La interacción y el amortiguamiento están expresados en forma de velocidades, significando que son términos hidrodinámicos. Un valor

típico del número de Reynolds es $R = O(10^4)$. La ecuación (25) se puede considerar que surge de las ecuaciones de Navier-Stokes en el marco del modelo de Berger. Experimentos de Kobayashi [10] muestran que el flujo es transcrítico (nunca laminar, pero sin desarrollar una turbulencia), existen interferencias y su espectro es ruidoso. Las oscilaciones del cilindro son, armónicas y sin influencia de sonidos ruidosos. Estas tendencias fueron bien predichas por resultados numéricos Plaschko, Berger y Brod [11].

La teoría de Berger es la única que contiene mecanismos de tipo de la ecuación (25) que representa lo que surge de las ecuaciones del flujo.

En el comentario 2 del capítulo III vamos a discutir como se podría generalizar el modelo de Berger para el caso de oscilaciones de dos cilindros.

III. Oscilaciones no lineales de dos cilindros en el modelo de estela

Ahora investigamos el movimiento transversal de dos cilindros, como la configuración de la figura 1, expuestos a un flujo uniforme que incide sobre ellos. El segundo cilindro está siempre en la región de la estela del primer cilindro.

Escribiendo el modelo (9) en forma matricial e introduciendo el término no lineal del amortiguamiento queda como sigue

$$I\bar{\eta}'' + \Delta\bar{\eta}' + (\Gamma + vK)\bar{\eta} = \bar{0}; \quad (26)$$

con la nueva matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_0 + d_2\eta_1^{2'} & 0 \\ 0 & d_0 + d_2\eta_2^{2'} \end{pmatrix} \quad (26^a)$$

Nótese que el término de amortiguamiento mecánico y el término lineal de amortiguamiento están dentro del término $d_0 = \delta / \pi$

En el apéndice se da la representación de la ecuación (26) desde el punto de vista de un sistema no canónico. Esto lo usaremos para analizar la evolución de la energía del sistema.

Ahora analizamos la posibilidad de una bifurcación en el sistema de ecuaciones (26) reescribiendolo como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden.

Usando la transformación

$$x_1 = \eta_1, \quad (27a)$$

$$x_2 = \eta_1', \quad (27b)$$

$$x_3 = \eta_2, \quad (27c)$$

$$x_4 = \eta_2', \quad (27d)$$

y sustituyendo (27) en la ecuaciones (26) obtenemos el siguiente sistema

$$x_1' = x_2, \quad (28a)$$

$$x_2' = -(1 + v\kappa)x_1 - d_0 x_2 - v\kappa_{12} x_3 - d_2 x_2^3, \quad (28b)$$

$$x_3' = x_4, \quad (28c)$$

$$x_4' = -v\kappa_{21} x_1 - (1 + h + v\kappa)x_3 - d_0 x_4 - d_2 x_4^3. \quad (28d)$$

Ahora escribiendo las ecuaciones (28) en forma matricial se obtiene lo que sigue

$$\underline{x}' = \underline{J} \underline{x} + \underline{C} \underline{x} = \underline{0}, \quad (29)$$

donde

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+v\kappa) & -d_0 & -v\kappa_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -v\kappa_{21} & 0 & -(1+h+v\kappa) & -d_0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 x_4^2 \end{bmatrix}.$$
(29)

Para calcular los puntos fijos de las ecuaciones (28) se debe cumplir con $x_1' = x_2' = x_3' = x_4' = 0$. Es fácil de ver que uno de los puntos fijos (PF) está dado por

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad (30)$$

éste punto fijo corresponde al estado de equilibrio y lo podemos denotar como el vector en el origen $\underline{x} = \underline{0}$. La ecuación (30) es un punto fijo, que está en el origen.

Para buscar otros puntos fijos posibles PFs usamos, $x_1' = x_2' = 0$ y $x_3' = x_4' = 0$. Entonces obtenemos de las ecuaciones (28b) y (28d)

$$\begin{aligned} (1 + v\kappa)x_1 + v\kappa_{12}x_3 &= 0, \\ v\kappa_{21}x_1 + (1 + h + v\kappa)x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Las ecuaciones (31) es un sistema de ecuaciones homogéneo, tiene solamente una solución no trivial si su determinante es cero. Entonces vemos que $\underline{x} = \underline{0}$ en el único punto si es válido

$$(1 + v\kappa)(1 + h + v\kappa) - v^2\kappa_{12}\kappa_{21} = 0. \quad (32)$$

Para el estudio de la estabilidad del PF $\underline{x} = \underline{0}$ tenemos que linealizar las ecuaciones (29). El correspondiente Jacobiano evaluado en el punto del equilibrio (30) está denotado por $\underline{J} \equiv \underline{J}(v)$.

Ahora conservamos los parámetros $d_0 = \delta / \pi$, h , κ , κ_{12} y κ_{21} que tienen valores constantes y variamos el parámetro v . Los valores propios σ del Jacobiano (29a) evaluados al punto crítico $v = v_c$ de la bifurcación de Hopf están definidos por

$$\sigma_{1,2}(v_c) = \pm i\omega; \quad \sigma_{3,4}(v_c) = -a \pm ib, \quad a, b, \omega > 0; \quad (33a)$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{\pi v_c}{2n}}. \quad (33b)$$

El cálculo del valor crítico tiene que ser efectuado numéricamente. Existen dos alternativas.

- a) Se calcula los valores propios $\sigma_j(v)$ con $j=1, 2, 3, 4$ del Jacobiano $\underline{J}(v)$. Si los valores propios tienen partes reales $\text{Re}[\sigma_j(v)] < 0$ con $j=1, 2, 3, 4$, sabemos que el punto de equilibrio de la ecuación (20) es estable. Una variación del parámetro v puede, sin embargo, conducir a una transición en el signo de dos valores propios. Haciendo la variación de v se puede lograr que en el punto crítico, según la ecuación (33a) puedan desaparecer las partes reales de los valores propios, mientras los otros valores propios tienen partes reales negativas.
- b) Equivalentemente se puede aplicar el criterio de Routh para analizar el polinomio característico

$$\det[\underline{J}(v) - \sigma \underline{I}] = \sigma^4 + p_3 \sigma^3 + p_2 \sigma^2 + p_1 \sigma + p_0 = 0. \quad (34)$$

El criterio de Routh predice los valores propios definidos por (33a), si es válido que

$$p_1 p_2 p_3 - p_1^2 - p_0 p_3^2 = 0, \quad (35)$$

El criterio de Routh lo aplicaron Paidoussis y Price [2]. En el marco de la teoría de bifurcación es, sin embargo, más practico usar la alternativa a) porque las soluciones de bifurcación se basan en los valores propios de $\underline{J}$ y de su matriz adjunta.

La matriz $\underline{J}(\underline{v})$, definida por (29a), es la única cantidad para determinar los valores propios σ . Con valores constantes κ , κ_{12} y κ_{21} se obtienen que los valores propios dependen de h , d_0 y v . La matriz $\underline{J}(\underline{v})$, el valor propio σ y el valor crítico v_c son explícitamente independientes de la razón de masa n . Sólo la velocidad reducida Ω_c tiene la dependencia conforme a la ecuación (33b) y depende de la razón de masas n .

Ahora continuemos con el cálculo de las amplitudes y fases de la solución de bifurcación. El análisis correspondiente fue desarrollado por looss y Josephs [6], lo cual es una teoría adecuada para sistemas cúbicos como el de las ecuaciones (28). Esta rutina fue usada exitosamente para calcular soluciones de bifurcación [4] y [12] (esto lo veremos más tarde en el marco de la discusión de la ecuación (44)). Se trata del método de proyecciones en las direcciones de los vectores propios. Primeramente, introduciremos el vector crítico

$$\underline{J}_0 \underline{x}_0 = i\omega \underline{x}_0; \quad (36a)$$

$$\underline{J}_0^T \bar{\underline{x}}_0 = -i\omega \bar{\underline{x}}_0; \quad (36b)$$

$$\underline{J}_0 = \underline{J}(\underline{v}_c). \quad (36c)$$

El superíndice T se usa para denotar la matriz transpuesta, $\underline{J}_0^T(\underline{v})$ es la matriz transpuesta de $\underline{J}_0(\underline{v})$ y $\bar{\underline{x}}_0$ representa el vector propio crítico adjunto.

Nota: Dado que el valor propio es complejo $\sigma_{3,4}(\underline{v}_c) \in \mathbb{C}$ no se puede normalizar el vector propio crítico es decir $\langle \underline{x}_0, \bar{\underline{x}}_0 \rangle \in \mathbb{C}$.

Introducimos el producto escalar de dos vectores como

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^4 a_n b_n^*; \quad b_n^* = cc(b_n). \quad (37)$$

Se escribe las ecuaciones (28) en forma matricial

$$\dot{x}_j = \underline{J}(\underline{v})_{jm} x_m + \underline{C}(\underline{v})_{jabc} x_a x_b x_c, \quad (38a)$$

donde usamos la convención de suma. El término no lineal tiene la siguiente forma (véase (29a))

$$\underline{C}(\underline{v})_{jabc} x_a x_b x_c = -d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^3 \\ 0 \\ x_4^3 \end{bmatrix}. \quad (38b)$$

Siguiendo los pasos en el desarrollo de Ioss y Joseph [6] usaremos el desarrollo de Lindstedt-Poincaré

$$x = \varepsilon x^{(1)}(s) + \varepsilon^3 x^{(3)}(s) + O(\varepsilon^5); \quad (39a)$$

$$s = [\omega + \varepsilon^2 \omega_2 + O(\varepsilon^4)]\tau; \quad (39b)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_c + \varepsilon^2 \underline{v}_2 + O(\varepsilon^4); \quad \omega_2, \underline{v}_2 \in \Re; \quad (39c)$$

$$\varepsilon = [x, e^{is} \bar{x}_0]. \quad (39d)$$

La solución de bifurcación se origina continuamente de la solución del equilibrio. Por esto usamos en (39a) un término de orden menor, que es pequeño cerca del punto donde se origina la bifurcación. También usamos en la ecuación (39a) solo términos impares, un hecho que es motivado por la estructura cubica del sistema original (28). La variable s representa un tiempo escalado. Para el desarrollo de Lindstedt-Poincaré es típico que algunos parámetros sean desconocidos (en nuestro caso estos son los parámetros $\underline{v}_2$ y ω_2) al principio de los cálculos. Se usan estos parámetros en ordenes más altos para evitar resonancias. Éste proceso da valores definitivos a estos parámetros.

Se aplica el producto escalar para dos funciones vectoriales periódicas con periodo 2π

$$[a(s), b(s)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^4 \int_0^{2\pi} a_n(s) \cdot b_n^*(s) ds, \quad (40a)$$

$$a(s) = a(s + 2\pi), \quad (40b)$$

$$b(s) = b(s + 2\pi). \quad (40c)$$

Un reacomodo de la ecuación (39d) y usando (39a) da

$$[X^{(1)}, e^{is} \bar{X}_0] = 1, \quad (41)$$

$$[X^{(3)}, e^{is} \bar{X}_0] = 0. \quad (41a)$$

De la misma manera, introduciendo (39a) en (38a) da como resultado el orden menor que es la siguiente ecuación

$$L_0 X^{(1)} = 0; \quad L_0 = J_0 - \omega \frac{d}{ds}, \quad (42a)$$

y el tercer orden está dado por

$$L_0 X^{(3)} = LD; \quad (42b)$$

$$LD = \left(\omega_2 \frac{d}{ds} - v_2 \underline{J}_v(v_c) - \underline{C}(v_c) X^{(1)} X^{(1)} \right) X^{(1)}.$$

(LD definido como lado derecho) donde usamos las siguientes desarrollos de matrices

$$\underline{J}(v) = \underline{J}_0 + \varepsilon^2 v_2 \underline{J}_v(v_c) + O(\varepsilon^4); \quad \underline{J}_v(v_c) = \left. \frac{\partial \underline{J}_v}{\partial v} \right|_{v=v_c}; \quad (43)$$

$$\underline{\underline{C}}(v) = \underline{\underline{C}}(v_c) + O(\epsilon^2).$$

La solución del problema (42a) a primer orden tiene la forma

$$x^{(1)} = Ae^{is}x_0 + cc; \quad (44)$$

$$A = \frac{1}{\langle x^{(1)}, \bar{x}^{(1)} \rangle}. \quad (44a)$$

La ecuación (44) da a la rutina el nombre de método de proyecciones, porque la solución de orden menor (44) es proyectada en la dirección del vector propio x_0 .

Para evitar resonancias causadas por el término inhomogéneo la corrección del término de (42.b) invocaremos la alternativa de Fredholm (véase [6])

$$[LD, e^{is}\bar{x}_0] = 0. \quad (45)$$

La alternativa de Fredholm (AdF) se refiere a un operador diferencial L de orden n . Si una función u satisface el problema homogéneo $L(u) = 0$ (como $x^{(1)}$ en (42a)), entonces dice la AdF que para el problema inhomogéneo, $L(g) = D$, se tiene una solución única, si es válido que $[D, \bar{g}] = 0$, donde $\bar{g}$ es la solución homogénea adjunta: $L^T(\bar{g}) = 0$ (L^T es el operador adjunto de L). En el capítulo III damos la AdF para ecuaciones lineales. También tenemos este problema en el capítulo IV.

De esto obtenemos las relaciones

$$i\omega_2 - A v_2 T_2 = T_3; \quad (46^a)$$

$$T_2 = [J_v(v_c) x_0, \bar{x}_0]; \quad (46b)$$

$$T_3 = [C(v_c) x^{(1)} x^{(1)} x^{(1)}, e^{is} \bar{x}_0]. \quad (46c)$$

Nota una condición adicional es usar el complejo conjugado de la AdF.

Para el cálculo del término T_2 se usa la derivada del Jacobiano

$$J_v = \frac{\partial J}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & -\kappa_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_{21} & 0 & -\kappa & 0 \end{Bmatrix}, \quad (47)$$

y de esto obtenemos entonces

$$T_2 = -\bar{x}_{02}^* (\kappa x_{01} + \kappa_{12} x_{03}) - \bar{x}_{04}^* (\kappa x_{03} + \kappa_{21} x_{01}), \quad (48)$$

donde x_{0m} denota las componentes m-esimas de x_0 y $\bar{x}_{0m}$ denota las componentes m-esimas de $\bar{x}_0$.

La determinación del término T_3 se efectúa con la ecuación (38b), la ecuación (44) y la ecuación (24b)

$$T_3 = -3d_2(v_c) A |A|^2 (x_{02} |x_{02}|^2 \bar{x}_{02}^* + x_{04} |x_{04}|^2 \bar{x}_{04}^*). \quad (49)$$

Sumando y restando la ecuación (46^a) y el complejo conjugado de (46^a), se determinan los dos parámetros v_2 , ω_2 y obtenemos

$$v_2 = -\frac{\operatorname{Re}[T_3]}{\operatorname{Re}[T_2 A]}; \quad (50a)$$

$$\omega_2 = v_2 \operatorname{Im}[T_2 A] + \operatorname{Im}[T_3]. \quad (50b)$$

Ahora que los parámetros v_2 y ω_2 ya se han calculado, podemos establecer el resultado final para la solución de bifurcación. Por ultimo la solución de bifurcación periódica tiene en el orden menor la forma

$$x^{(1)}(\tau) = |A|\beta \{ \exp [i(\omega + \omega_2 \beta^2 + \phi)\tau] x_0 + cc \} + O(\beta^3); \quad (51)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{v - v_c}{v_2}};$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[A]}{\operatorname{Re}[A]}\right)$$

y su periodo T está dado por
$$T = \frac{2\pi}{\omega + \omega_2 \beta^2}.$$

Por un lado la solución armónica existe solamente para $(v - v_c)/v_2 \geq 0$.

Pero la solución del equilibrio es estable para $v - v_c \leq 0$. Entonces obtenemos de la ecuación (39) el escenario de la bifurcación de Hopf para

i) $v \leq v_c$.

Para i) la solución en el equilibrio es estable, además hay para $v_2 \leq 0$ (vease la figura 6, parte izquierda) una bifurcación de Hopf subcrítica que es inestable.

ii) $v \geq v_c; \quad v_2 \geq 0$.

Para ii) la solución del equilibrio es inestable (vease la figura 6 parte derecha), además hay una bifurcación de Hopf supercrítica que es estable.

La curva $\nu_2 = 0$ representa el límite entre las oscilaciones estables e inestables. De las ecuaciones (38^a) y (37) obtenemos para el cálculo esta curva

$$|x_{02}|^2 \operatorname{Re}(Ax_{02} \bar{x}_{02}^*) + |x_{04}|^2 \operatorname{Re}(Ax_{04} \bar{x}_{04}^*) = 0$$

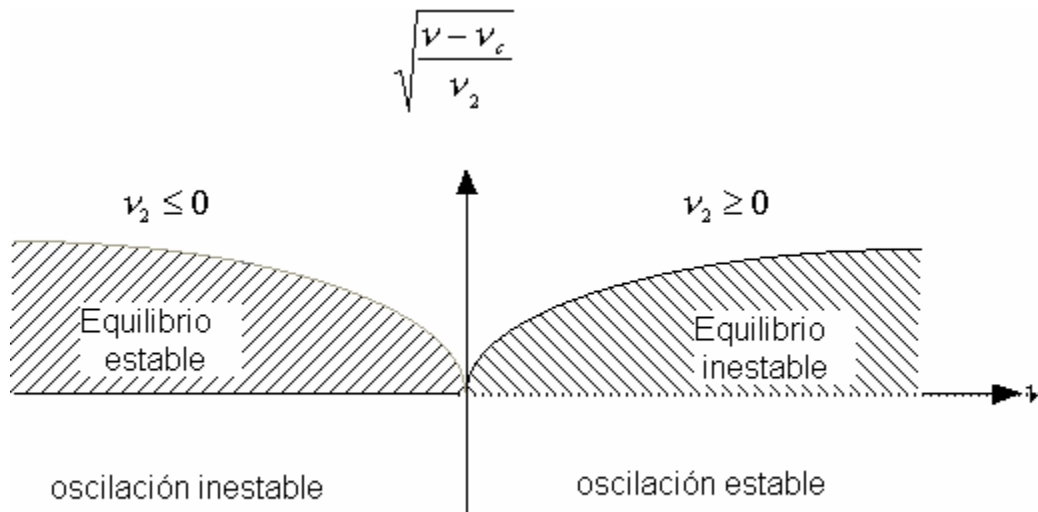


Figura 6 representación esquemática de la bifurcación de Hopf.

Donde la parte pteada representa la frontera inestable

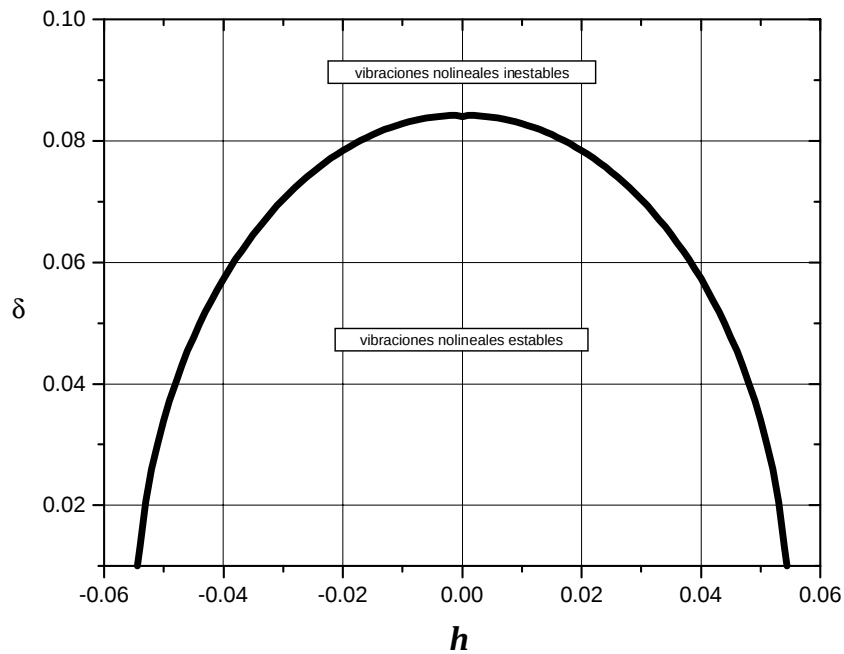


Figura 7 El límite de la estabilidad es cuando $v_2 = 0$,
 dado por la ecuación (34). Oscilaciones estables se encuentran
 en el interior de la parábola, $n = 0.001$.

El límite depende entonces sólo de los valores propios y la relación dada por $v_c = v_c(h, \delta)$. Los resultados numéricos correspondientes están dibujados en la figura 7. Los hallazgos indicados en este dibujo son fáciles de entender. Se encuentra oscilaciones estables en una zona parabólica E: $0 \leq h \leq h(d_0)$. Empezando con cambios en el parámetro h en la región E vemos que un aumento de h reduce el intervalo de vibraciones y para valores de $h \geq h(d_0)$ existen sólo oscilaciones inestables. También se reduce por un incremento del amortiguamiento δ el extenso del intervalo de vibraciones estable.

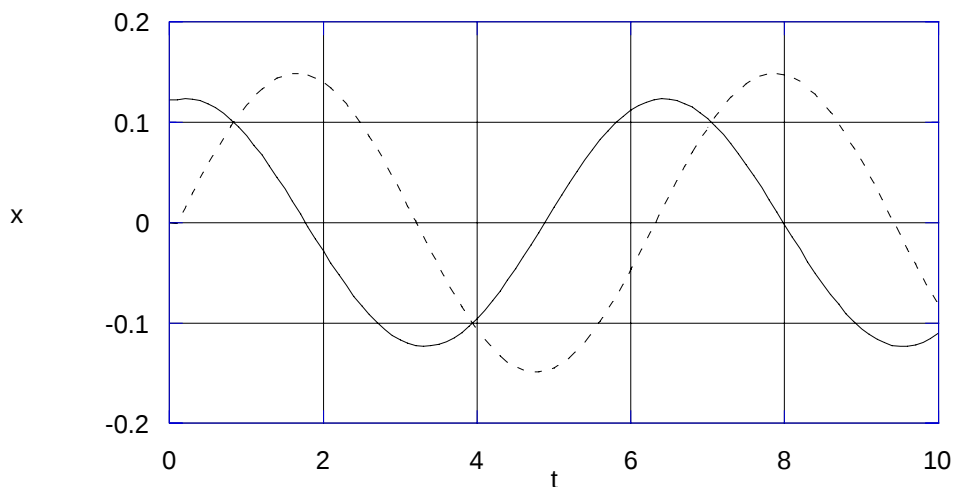


Figura 8 Evolución temporal de las amplitudes (evolución de la ecuación (39)).

$$h = 0.0, n = 0.001, \delta = 0.02, \Omega = 0.8.$$

x_1 (primer cilindro, línea continua),

x_2 (segundo cilindro, línea punteada).

En la figura 8 se advierte la evolución temporal de las oscilaciones estables de los cilindros individuales. El segundo cilindro está excitado por la estela del primer cilindro y tiene amplitudes un poco más grandes que las del primer cilindro. Nótese que las amplitudes en la figura 8 están en el mismo orden de magnitud que las amplitudes de un cilindro único. Los últimos fueron considerados en los experimentos por Kobayashi [10] y más tarde también experimentalmente por Brinca y Laneville [13], mientras un estudio analítico fue hecho por Berger y Plaschko [4]. Éste resultado es también consistente con las pequeñas amplitudes características para VIV's.

Con los valores numéricos que obtubimos nos da como resultado que $\omega = 1 + O(\beta^3)$. Entonces obtenemos $T = 2\pi / \omega + O(\beta^2)$ y éste periodo se puede encontrar en la figura 8. No mostramos otros dibujos con valores diferentes de δ o de h , porque para un aumento de δ conduce a oscilaciones más amortiguadas con amplitudes reducidas. Igualmente para aumento de h ,

que significa un mayor grado de asincronía, conduce también a una reducción de la amplitud.

Comentario 1

Hasta el momento aprovechamos – usando una generalización no lineal del amortiguamiento - la teoría de Paidoussis y Price [2]. Una debilidad de éste estudio es que no incluye de ninguna manera el efecto de la distancia entre los dos cilindros Ψ . Una teoría que incluye el efecto fue desarrollada por Plaschko [14]. La idea fue que el primer cilindro es expuesto al flujo entrante U , mientras el segundo cilindro está expuesto a la estela del primer cilindro. Se usa entonces una teoría asintótica de la estela (un desarrollo del tipo expansión asintótica) que tiene Ψ como un parámetro. De esta manera se obtiene el resultado que el análisis basado en la ecuación (18) describe el límite de los valores muy grandes de Ψ en la teoría asintótica de Plaschko [14]. Los hallazgos más interesantes publicados en Plaschko [14] son que un incremento de Ψ aumenta las amplitudes y disminuye las velocidades reducidas de la transición entre el equilibrio y las oscilaciones.

Comentario 2

En una fase de las investigaciones de ésta tesis tratamos de traducir el formalismo de Berger (dos ecuaciones para el desplazamiento y el sustentación de un cilindro único véase ecuaciones (15ª) y (17)). Esta resulta para el caso de dos cilindros en un sistema de cuatro ecuaciones de orden dos para los dos desplazamientos $\eta_{1,2}$ y las dos sustentaciones $c_{1,2}$. Escribiéndolas en forma de sistema de ecuaciones de orden dos obtenemos (véase (5) y (6))

$$\begin{aligned} x_1 &= \eta_1; & x_2 &= \eta_1'; & x_3 &= c_1; & x_4 &= c_1'; \\ x_5 &= \eta_2; & x_6 &= \eta_2'; & x_7 &= c_2; & x_8 &= c_2'; \end{aligned}$$

Entonces se sigue que las ecuaciones canónicas son como sigue

$$\begin{aligned} x_{k+4m}' &= x_{k+1+4m}', \quad m = 0, 1; \quad k = 1, 3; \\ x_2' &= -(d_0 + d_2 x_2^2) x_2 - x_1 + nW^2 x_3; \\ x_6' &= -(d_0 + d_2 x_6^2) x_6 - x_5 + nW^2 x_7; \\ x_4' &= -(\xi_0 + \xi_2 x_4^2) x_4 - W^2 x_3 + (b_0 + b_2 x_2^2) x_2; \\ x_8' &= -(\xi_0 + \xi_2 x_8^2) x_8 - W^2 x_7 + (b_0 + b_2 x_5^2) x_5 + \alpha x_4; \end{aligned}$$

El acoplamiento entre las oscilaciones de los cilindros es según las ideas de éste modelo de origen hidrodinámico. En ausencia de conocimientos más detallados, usamos también los mismos coeficientes de amortiguamiento y de interacción para ambos cilindros así como la fuerza no lineal que efectúa los desplazamientos.

Como el acoplamiento entre los dos cilindros introducimos en la ecuación para c_2' un término $\alpha c_1'$. Esto es un modelo “hidrodinámico” donde el acoplamiento contiene solo el efecto de las velocidades. También estimamos que la influencia del primer cilindro sobre el segundo cilindro es

débil y no la incluimos en nuestro modelo.

Éste sistema tiene un PF en el origen

$$x_m = 0; \quad m = 1, 2, \dots, 8.$$

Entonces tratamos con éste sistema (y con otros sistemas con acoplamientos entre los dos cilindros individuales modificados) de encontrar una bifurcación de Hopf que conduce a oscilaciones armónicas de los cilindros. Éste resultado fue, sin embargo, no fue logrado. La razón es, probablemente que no logramos una teoría del acoplamiento completo causado por.

- i. El uso de coeficientes iguales.
- ii. La ausencia del efecto de la distancia Ψ (véase comentario 1) entre los dos cuerpos.

Ojalá que en un futuro se tenga más tiempo para retomar esta investigación y tratar de resolver lo que se plantea en los comentarios 1 y 2.

Comentario 3

Aquí consideramos la AdF para sistemas de ecuaciones lineales, dado por un sistema homogéneo $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$. Éste tiene solución si es válido $\det(\underline{A}) = 0$. Ahora consideremos el sistema inhomogéneo correspondiente

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}. \quad (\text{C3.1})$$

El sistema (C3.1) es soluble si es válido

$$(g, b) = 0; \quad (\text{C3.2a})$$

$$\underline{A}^T \underline{g} = \underline{0}. \quad (\text{C3.2b})$$

Demostración

Por simplicidad podemos escoger $x, b \in \Re_2$,

$$\text{Det}(\underline{A}) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C3.3})$$

La solución de (C3.3) es $C = \lambda A$, $D = \lambda B$, donde λ es una constante. Ahora tomando la ecuación (C3.2b) y desarrollándola obtuvimos

$$\underline{A}^T \underline{g} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \lambda A \\ B & \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = (g_1 + \lambda g_2) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C3.4})$$

de la ecuación (C3.4) obtenemos la solución $g_1 = -\lambda g_2$.

Ahora para el producto interior

$$(g,b)=\begin{pmatrix} -\lambda g_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = g_2(b_2 - \lambda b_1) = 0, \quad (C3.5)$$

por lo tanto de la ecuación (C3.5) se obtiene $b_2 = \lambda b_1$, y la ecuación inhomogénea es $\frac{A}{\lambda} u = \frac{b}{\lambda}$ de esto se sigue que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \lambda A & \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Au_1 + Bu_2 = b_1, \lambda(Au_1 + Bu_2) = b_2 \quad (C3.6)$$

por lo tanto de la ecuación (C3.6) obtuvimos como resultado $b_2 = \lambda b_1$.

El resultado de la ecuación (C3.6), es el mismo resultado de la ecuación (C3.5), que es lo que se quería demostrar.

IV. Oscilaciones de un cilindro móvil dentro de un arreglo de cilindros fijos

El problema de un cilindro que se desplaza en la dirección del eje y de la sustentación es usualmente atacado con una teoría de un grado de libertad (UGL). Para calcular las fuerzas se usan modelos cuasiestáticos. Con esta hipótesis se obtiene la fuerza que incide sobre el cilindro en la forma de la ecuación (19), donde los términos de memoria (20), (21) y (22). Además sabemos que tenemos que reemplazar la velocidad U por γU (véase ecuación (10)) para modelar el efecto del flujo en una fisura. Además introducimos un término cíclico en el amortiguamiento. Entonces usamos el amortiguamiento propuesto por Berger [1] en la forma adimensional de acuerdo con la ecuación (23a). Entonces obtenemos la ecuación completa si ponemos como en el modelo de Berger las variables adimensionales $\eta = y/D$, $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{k/mL}$ (los parámetros D , ω_0 , k , m y L se refieren a los parámetros del cilindro móvil y fueron introducidos en la en la discusión de la ecuación (2).

Para obtener la forma de la ecuación necesitamos además las formulas empíricas de Paidoussis Mavriplis y Price [5]

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial \eta} \right)_{(0,0)} = -\frac{73}{\gamma^2}, \quad C_{d_0} = \frac{2.3}{\gamma^2}, \quad (52)$$

donde γ fue definido en la ecuación (15). Poniendo la sustitución $U = \gamma U$ y usando la ecuación (19) obtenemos

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 D L \left[-73 \int_0^{\tau} H(\tau - u) \eta(u) du - 2.3 \left(\frac{\eta'}{\Omega} \right) \right]. \quad (53)$$

Sabiendo que la dimensión de la parte izquierda de la ecuación (2) o de su generalización no lineal es $m L D \omega_0^2$, obtenemos la forma final para el oscilador

$$\eta'' + (d_0 + d_2 \eta'^2) \eta' + \eta = \frac{2n}{\pi} \left[-73\Omega^2 \int_0^\tau H(\tau - u) \eta(u) du - 2.3\Omega \right]. \quad (54)$$

En la ecuación (53) usamos otra vez $d_0 = \delta / \pi$ (amortiguamiento mecánico) e introducimos d_2 conforme a la ecuación del modelo de Berger (24b).

Para facilitar el desarrollo siguiente con n como parámetro, reescribimos la ecuación (54) en la forma

$$\eta'' + n(s_0 + s_2 \eta'^2) \eta' + \eta + nq \int_0^\tau H(\tau - u) \eta(u) du = 0, \quad (55a)$$

$$q = \frac{146}{\pi} \Omega^2, \quad (55b)$$

$$s_0 = \frac{\delta}{n\pi} + \frac{4.6}{\pi} \Omega, \quad (55c)$$

$$s_2 = \frac{d_2}{n}. \quad (55d)$$

Notese que según la ecuación (24b) s_2 es independiente de la variable n . Además suponemos que es valido

$$\frac{\delta}{n} = O(1). \quad (56)$$

a) El desarrollo para calcular las soluciones para el término de memoria

Ahora estudiaremos un problema aerodinámico, donde un cilindro móvil de un material rígido (por ejemplo de un metal) y está expuesto a un flujo de aire. Sabiendo que en este caso es valido que $n = O(10^{-3})$, se puede aprovechar a n como un parámetro de un desarrollo de tipo de dos variables para el desplazamiento del cilindro móvil. Entonces introducimos el desarrollo

$$\eta(\tau) = \eta_0(T_0, T_1) + n \eta_1(T_0, T_1) + O(n^2); \quad (57a)$$

$$T_0 = \tau, \quad (57b)$$

$$T_1 = n \tau, \quad n \rightarrow 0_+. \quad (57c)$$

Haciendo la primera derivada implícita de la ecuación (57) da como resultado el siguiente operador

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + n \frac{\partial}{\partial T_1} + O(n^2). \quad (58)$$

La segunda derivada da el siguiente operador

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2n \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + O(n^2). \quad (59)$$

En el orden más bajo (orden cero) de la ecuación (54) queda

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0^2} + \eta_0 = 0. \quad (60)$$

La primera corrección de la ecuación (54) está dada por

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial T_0^2} + \eta_1 = L D. \quad (61)$$

El lado derecho LD es la parte inhomogénea de la ecuación (61), está dado por

$$L D = - \left[2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \left\{ s_0 + s_2 \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} \right)^2 \right\} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + q \int_0^{T_0} H(T_0 - u) \eta_0 du \right] \quad (62)$$

La solución a orden más bajo es

$$\begin{aligned} \eta_0 &= A(T_1) \exp(iT_0) + A^*(T_1) \exp(-iT_0); \\ A^* &= cc(A). \end{aligned} \quad (63)$$

$A(T_1)$ es una función de la amplitud que varia con el argumento de la ecuación (57c). Esto significa que $A(T_1)$ varia lentamente. Se determina la forma de $A(T_1)$ solo en el próximo orden del desarrollo asintótico de dos cilindros del capítulo III, se debe de nuevo evitar resonancias. Las resonancias aparecen, si el lado derecho LD de la ecuación inhomogénea (61) contienen términos de tipo ($h(T_1)$ es una función arbitraria)

$$h(T_1) e^{iT_0}, \quad h^*(T_1) e^{-iT_0}, \quad (64)$$

que son solución del problema homogéneo (60). Notese, que términos de tipo (64) en LD conducen ala ED

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 1 \right) \eta_1 = h(T_1) e^{iT_0}, \quad (65)$$

y la solución particular de (65) η_{1p} será

$$\eta_{1p} = \frac{1}{2i} T_0 e^{iT_0} h(T_1). \quad (66)$$

Pero la solución particular de (66) es, por razones de la apariencia del término multiplicativo (T_0), que jamás es una solución periódica. Esto significa que para la búsqueda de oscilaciones periódicas se tiene que eliminar términos que causen resonancia, Por esto se pone a cero el término de tipo (64) que aparece en el $L D$. Llamemos a este término $L D^{\text{res}}$, obtenemos después de sustituir (63) en (62)

$$L D^{\text{res}} = - \left[2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \left\{ s_0 + s_2 \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} \right)^2 \right\} \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + q T_m^{\text{res}} \right] \exp(iT_0) + cc. \quad (67)$$

Sustituyendo en la integral del término de memoria $\tau = T_0$ y usando el cambio de variables $u = T_0 - \tau$ obtenemos después del uso de la ecuación (63)

$$\begin{aligned} T_m^{\text{res}} &= \int_0^{T_0} H(T_0 - u) \eta_0(u) du = \int_0^{T_0} H(u) \eta_0(T_0 - u) du = \\ &= \exp(iT_0) \int_0^{T_0} H(u) A[n(T_0 - u)] \exp(-iu) du + cc. \end{aligned} \quad (68)$$

Para desarrollar la ecuación (68) usaremos ahora las ecuaciones (20) y (21) entonces

$$H(u) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \beta_k \exp(-\beta_k u) h(u) + O(n). \quad (69)$$

La sustitución de la ecuación (69) en (68) se obtiene

$$T_m = \exp(iT_0) \sum_{k=1}^2 \alpha_k \beta_k \int_0^T A[n(T_0 - u)] \exp[-u(i + \beta_k)] du + cc. \quad (70)$$

Entonces usamos la expansión en series de Taylor para la amplitud

$$A[n(T_0 - u)] = A(T_1) + \sum_{j=1}^{\infty} (-n u)^j \frac{1}{j!} \frac{d^j A}{dT_1^j}(T_1). \quad (71)$$

La sustitución de esta expansión de (71) en (70) y una integración da como resultado

$$T_m = \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k \beta_k}{\beta_k + i} \{ A(T_1) [\exp(iT_0) - \exp(-\beta_k T_0)] - \exp(-\beta_k T_0) \sum_{j=1}^{\infty} (-u)^j \frac{1}{j!} \frac{d^j A}{dT_1^j} [T_0^j + O(T_0^{j-1})] \} + cc. \quad (72)$$

Recordando que los factores $\exp(-\beta_k T_0)$ representan términos no resonantes del amortiguamiento, obtenemos de (72) la parte resonante de la integral de memoria en la forma

$$\begin{aligned} T_m^{res} &= A(T_1)(\sigma_1 - i\sigma_2); \\ \sigma_1 &= \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k \beta_k^2}{\beta_k^2 + 1} = -0.08257; \\ \sigma_2 &= \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k \beta_k}{\beta_k^2 + 1} = 0.04206. \end{aligned} \quad (73)$$

Nota la aproximación (73) se puede escribir en la forma

$$T_m^{res} = \sigma_1 \eta_0 - \sigma_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial T_0} + O(n) + O(e^{-\beta_k T_0}), \quad (74)$$

obteniendo los mismos resultados si lo sustituimos en la ecuación (67).

Las ecuaciones (70) y (73) nos dan el término de resonancia cuya forma final está dada como

$$L D^{\text{res}} = \left[-q\sigma_1 A - i \left\{ 2 \frac{\partial A}{\partial T_1} + s_0 A + 3s_2 A |A|^2 - q\sigma_2 A \right\} \right] \exp(iT_0). \quad (75)$$

Para evitar la resonancia debemos hacer que $L D^{\text{res}} = 0$ y usamos una descomposición de la amplitud en partes reales e imaginarias

$$A(T_1) = R(T_1) \exp[i\Phi(T_1)]; \quad R, \Phi \in \mathbf{R}. \quad (76)$$

Sustituyendo (76) en (75) obtuvimos una ecuación para amplitud y una ecuación para la fase

$$\frac{dR}{dT_1} = -\frac{1}{2} [(s_0 - q\sigma_2)R + 3s_2 R^3], \quad (77)$$

y

$$\frac{d\Phi}{dT_1} = \frac{1}{2} q\sigma_1 = \Psi, \quad \Psi = \text{constante}, \quad (78)$$

respectivamente. La ecuación diferencial ordinaria (77) exhibe dos puntos fijos

$$R_1 = 0, \\ R_2 = \sqrt{\frac{s_0 - q\sigma_2}{3s_2}}. \quad (79)$$

El primer punto fijo $R_1 = 0$ representa el cilindro en equilibrio, así como la solución proporcional a R_2 describe una oscilación armónica del cilindro. Para estudiar la estabilidad de estas soluciones y la posible bifurcación de Hopf, analizaremos la estabilidad de los puntos fijos (77). Tomaremos una linealización del tipo (donde λ es el parámetro de linealización)

$$R(T_1) = R_f + \lambda G(T_1); \quad f = 1, 2, \quad (80)$$

Introduciendo (80) en (77) da las características de la estabilidad

$$\begin{aligned} R_1 : \quad & \frac{1}{G} \frac{dG}{dT_1} = -\frac{1}{2}(s_0 - q \sigma_2); \\ R_2 : \quad & \frac{1}{G} \frac{dG}{dT_1} = s_0 - q \sigma_2. \end{aligned} \quad (81)$$

Ahora obtenemos el criterio de la estabilidad. El punto fijo R_1 es estable para $s_0 - q \sigma_2 > 0$, R_2 es estable para $s_0 - q \sigma_2 < 0$ e inestable en toda la demás región. Las ecuaciones (81) a la posición

$$s_0 - q \sigma_2 = 0. \quad (82)$$

La tabla siguiente establece como se dan las estabilidades y la bifurcación de Hopf

$s_0 - q \sigma_2 < 0$	R_2	<i>estable</i>	
$s_0 - q \sigma_2 > 0$	R_2	<i>inestable</i>	
$s_0 - q \sigma_2 = 0$	<i>punto de bifurcacion de Hopf .</i>		

(83)

Para estudiar esta bifurcación, usaremos (55a) y (55c) substituyendo en (75) obtenemos

$$s_0 = \frac{\delta}{n\pi} + \frac{4.6\Omega^2}{\pi}; \quad \delta > 0 \quad \text{Paidoussis} . \quad (84)$$

Esta ecuación cuadrática que gobierna la velocidad reducida crítica Ω_c la solución está dada por

$$\Omega_c = 0.80562 \sqrt{\frac{\delta}{n}} = 0.90904 \sqrt{A_r};$$

$$A_r = \frac{\pi \delta}{4n}, \quad (85)$$

donde A_r denota el parámetro masa amortiguada. Para comparar nuestras predicciones con los datos experimentales presentados por Granger y Paidoussis [3] introducimos la velocidad crítica de la fisura

$$U_{prc} = 2\pi \gamma \Omega_c . \quad (86)$$

Por lo tanto obtenemos de (85) el valor crítico

$$U_{prc} = 5,713\gamma\sqrt{A_r} . \quad (87)$$

Ahora calculemos la amplitud R_2 . Usando (85) para reacomodar (84) y obtenemos.

$$s_0 - q\sigma_2 = 0.4903 (\Omega_c^2 - \Omega^2) =$$

$$= 0.4903 (0.8266 A_r - \Omega^2) . \quad (88)$$

Las oscilaciones armónicas son estables para $\Omega > \Omega_c$. Usando la ecuación (79) para la amplitud conduce a

$$R_2 = 0.09154 U^2 \sqrt{\frac{(\Omega^2 - \Omega_c^2)}{(1 - \Omega^2)}}; \Omega_c \leq \Omega \leq 1. \quad (89)$$

Por lo tanto vemos que la amplitud de (89) tiene a la posición $\Omega = 1$ existe una singularidad.

Para este punto nos gusta añadir un comentario respecto al efecto del término de memoria. En ausencia de un término de memoria es valido $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (véase (73)). En este caso obtenemos para los puntos fijos de la ecuación (79) los valores $R_1 = 0$; $R_2 = \sqrt{-s_0/3s_2}$. Las características de la estabilidad dan el resultado que R_1 ésta siempre estable ($s_0 > 0$, véase (81)) mientras que el otro punto fijo R_2 seria siempre inestable. Entonces vemos que en ausencia de ningún término de memoria no hay bifurcaciones y el cilindro estaría siempre en equilibrio. En otras palabras, la presencia del término de memoria representa una condición necesaria para que se manifiesten de oscilaciones del cilindro

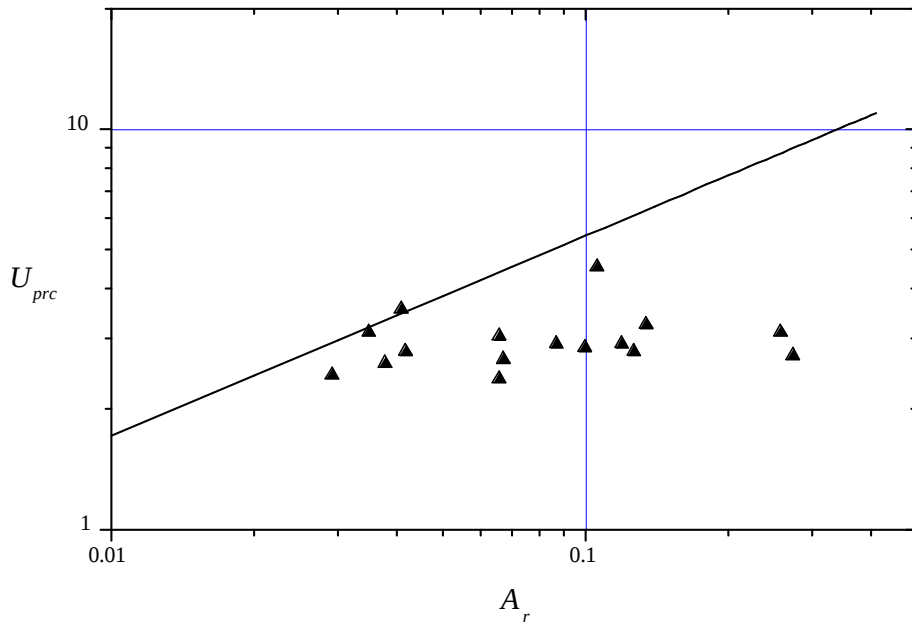


Figura 8 Comparación de los datos experimentales de G&P [3] (triángulos) con la predicción del modelo que presentamos (línea continua $\gamma = 1.5$)

Lo siguiente es comparar nuestras predicciones teóricas de la velocidad crítica de fisura con los encontrados experimentalmente. Una compilación de estos datos se tomaron de G&P [3] en su figura 7 donde en una gráfica Log-Log de la velocidad reducida v.s. A_r (parámetro masa amortiguada). Para la comparación escogimos los datos experimentales de Price & Paidoussis [21] para $P / D = 1.5$ (figura 7).

Nota al tomar la gráfica Log-Log de G&P [3] surgen un considerable de puntos experimentales esparcidos. Por lo tanto se toma el promedio de los resultados experimentales.

Nota nuestras predicciones reproducen la tendencia experimental con justicia, son buenos cualitativamente (Figura 7). Así concluimos que el presente modelo teórico -el cual incorpora la geometría de el arreglo de cilindros fijos en una manera más bien resumida – es capaz de describir solamente el movimiento de un cilindro que se desplaza en la dirección del eje “y” en un arreglo de tubos fijos, si la fisura tiene un espaciamiento suficientemente grande. Para arreglos más estrechos, el detalle de la configuración del flujo es dominante y un modelo teórico diferente se tiene que aplicar. Tenemos la esperanza de poder regresar a este cometido en un futuro próximo.

Ahora calculamos la solución en el primer orden (57), (61) y (78) obtenemos en primer lugar

$$\begin{aligned}
 \eta_0(\tau) &= [A(n\tau) \exp(i\tau) + cc] + O(n) = \\
 &= [R(n\tau) \cos(i\tau(1 + \psi(n\tau))) + cc] + O(n) = \\
 &= 2R(n\tau) \cos(\tau(1 + \psi(n\tau))) + cc,
 \end{aligned} \tag{90}$$

donde ponemos la fase en la integración de la ecuación (78) a cero. Ahora se tiene que calcular la amplitud R a través de una integración de la ecuación (77) con el punto fijo R_2 definido por la relación (79). Entonces obtenemos

$$\frac{dR}{dT_1} = -\frac{3s_2}{2} R[R^2 - R_2^2], \quad (91)$$

Una integración de (91) conduce a

$$R = \frac{R_2}{[D \exp(-3s_2 R_2^2 T_1) + 1]^{1/2}}; \quad D = \text{constante} \quad (92)$$

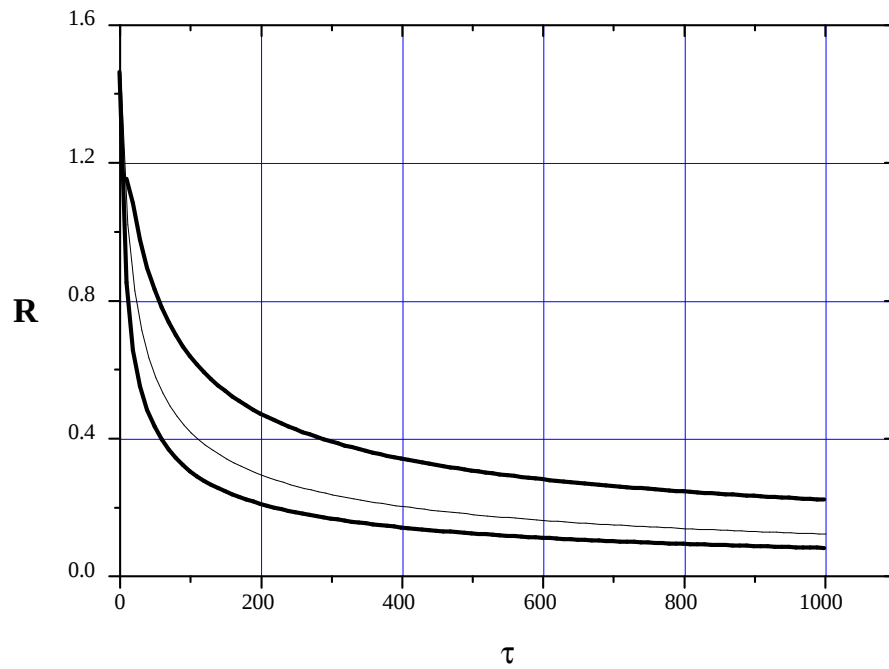


Figura 9 La evolución temporal de la amplitud de la ecuación (83) en función de τ . Superior con $\Omega = 0.95$, intermedia $\Omega = 0.90$ y la inferior $\Omega = 0.85$, $n=0.001$

La condición inicial es

$$R(0) = R_0, \quad (93)$$

Entonces obtenemos para la constante de integración D el valor

$$D = \frac{R_2^2 - R_0^2}{R_0^2}. \quad (94)$$

Por esto obtenemos en el primer orden el resultado final

$$\eta_0(\tau) = \frac{2 R_0 R_2 \cos[\tau(1 + n\psi)]}{[R_0^2 + (R_2^2 - R_0^2) \exp(-3s_2 R_2^2 T_1)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (95)$$

Nótese que como solución asintótica ($\tau \rightarrow \infty$) obtenemos la oscilación periódica

$$\eta_0(\tau) = 2 R_2 \cos[\tau(1 + n\psi)], \quad (96)$$

En el estudio de oscilaciones de cilindros es conveniente investigar el efecto del amortiguamiento no lineal. Para concluir el análisis de esta sección queremos investigar este efecto ahora. La solución del orden menor (96) representa para $R_2^2 < R_0^2$ una oscilación amortiguada y para $R_2^2 > R_0^2$ una oscilación excitada. Los máximos de (89) son – dejando aparte una pequeña corrección - definidos a las posiciones

$$\tau_k = \frac{2\pi k}{1 + n\psi}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (97)$$

Si usamos la ecuación diferencial de la fase (78) para el valor de ψ obtenemos con (57) y (88) de (97)

$$\tau_k = \frac{2\pi k}{1 + n q \sigma_1 / 2} = \frac{2\pi k}{1 - 6,0276 \Omega^2 n / \pi}. \quad (98)$$

Aplicaremos el método del decremento logarítmico desarrollado por Blevins [8]. Este método investiga el efecto de un amortiguamiento pequeño $\delta_1 / \pi \ll 1$ a una oscilación periódica con periodo 2π

$$y + \frac{\delta_1 y}{\pi} + y = 0 . \quad (99)$$

La solución de (99) es

$$y = A \exp \left\{ -\frac{\delta_1 t}{2\pi} \right\} \cos(\zeta t + B) ; \quad \zeta = \sqrt{1 - \delta_1^2 / 4\pi} \cong 1 ; A, B = cte . \quad (100)$$

considerando las posiciones de los máximos de (97) obtenemos $t_k = 2\pi k - B$; $k = 0, 1, \dots$. Pero a las posiciones de los máximos, que están separados por M ciclos de oscilaciones ($t_M = 2\pi M$), es valido que

$$\alpha = \ln \left[\frac{y(t_{k+M})}{y(t_k)} \right] = -\frac{\delta_1}{2\pi} t_M = VM\delta_1 ; M \gg 1. \quad (101)$$

Para un sistema con un amortiguamiento lineal la gráfica de α / M tiene que ser una línea recta con δ_1 . Cada división de los datos a la línea recta indican un amortiguamiento no lineal. Con aplicación de la ecuación (101) a nuestra oscilación (96) es valido que

$$\delta_1 = -\frac{1}{2M} \ln \left\{ \frac{R_0^2 + (R_2^2 - R_0^2) \exp(-3s_2 R_2^2 n \tau_k)}{[R_0^2 + (R_2^2 - R_0^2) \exp[-3s_2 R_2^2 n(\tau_M + \tau_k)]]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (102)$$

En la figura 8 muestra que el coeficiente de amortiguamiento disminuye conforme va aumentando la velocidad reducida, y tiende a cero cuando la velocidad reducida tiende a 1.

Lo anterior se ve más claro con el experimento, al aumentar la velocidad reducida el sustentación aumenta y por lo tanto el desplazamiento se ve favorecido.

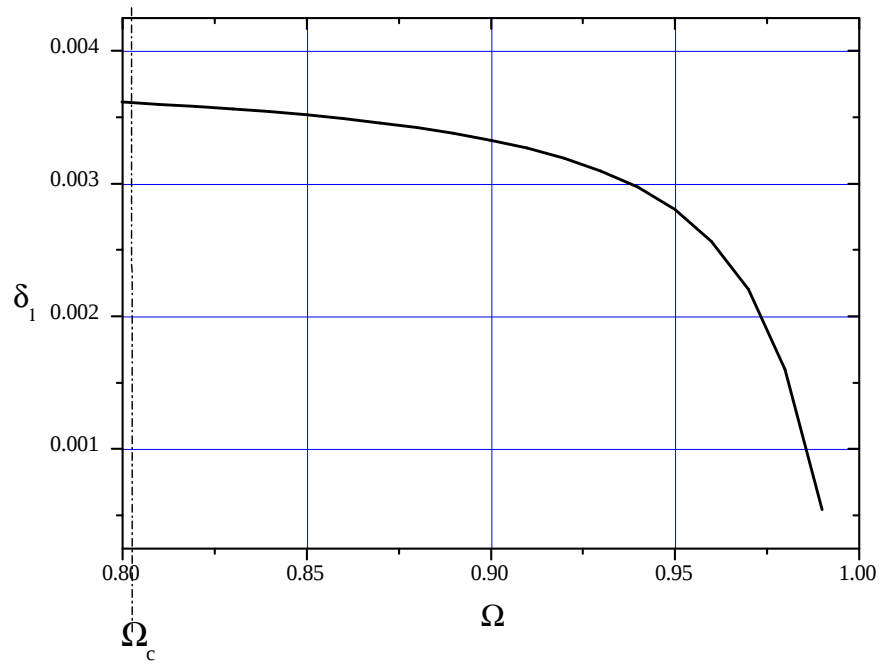


Figura 10. Decaimiento del coeficiente δ_1 del amortiguamiento como función de la velocidad reducida Ω , $n = 0.001$, $R_0 = 0.9$, $\delta = 0.001$, $\Omega_c = 0.80562$, $M = 100$

V. Conclusiones y perspectivas

Dos tópicos se cubrieron en esta tesis.

El movimiento de dos cilindros en una configuración de la figura 1.

El movimiento de un cilindro rígido en un arreglo de tubos fijos.

Ambos problemas fueron analizados en investigaciones anteriores con teorías lineales. En esta tesis se generalizó las teorías anteriores con la introducción de un término no lineal. En ambos casos (a) y (b) se usa para este término un amortiguamiento no lineal que caracteriza el mecanismo de oscilaciones inducidas por vórtices (vortex induced vibrations). También se lograron las siguientes metas:

- i. Describir la transición desde el equilibrio hasta oscilaciones periódicas.
- ii. Calcular las amplitudes, fases y periodos de las oscilaciones.
- iii. Desarrollar criterios para la estabilidad del equilibrio y de las oscilaciones.

Conclusiones

Ahora las conclusiones por separado para ambos casos.

- a) En esta tesis se realizó una teoría no lineal consistente para lograr los fines citados. Además, se construyó un método para analizar la energía de la configuración de la figura 1.
- b) Se desarrolló también una teoría consistente para aproximar soluciones de una ecuación integro diferencial no lineal. Los objetivos se lograron y se compararon con los datos experimentales con resultados satisfactoriamente buenos.

Perspectivas

Perspectivas para continuar las investigaciones de oscilaciones los ponemos para cada uno de los casos.

a) Desarrollar una teoría que incluya el efecto de la distancia entre los dos cilindros (véase comentario 1). Investigar el uso de dos ecuaciones del tipo de Van der Pol para cada cilindro (véase comentario 2).

b) Generalización del análisis para tratar el movimiento de un cilindro flexible con dos grados de libertad.

Además, en ambos casos sería interesantes plantear el estudio del efecto de flujos turbulentos.

Referencias

- [1] Berger E. 1988. On a mechanism of vortex excited oscillations of a cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 28, 301-319.
- [2] Paidoussis P. M. y Price, J. S. 1988. The mechanism underlying flow-induced instabilities of cylinder arrays in cross flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 187, 45-59
- [3] Granger S. y Paidoussis M. P. 1996. An improvement of the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, 320, 163-184.
- [4] Berger E. y Plaschko. P. 1993. Hopf bifurcations and hysteresis in flow-induced vibrations of cylinders. *Journal of Fluid and Structures*, 7, 849-866.
- [5] Paidoussis M: P. Mavriplis D. y Price S. J. A potencial-Flow for the dynamics of cilinder array in cross-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 146, 227-252.
- [6] looss G. y Joseph D. D. 1980. *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer Verlag, New York.
- [7] Price S. J. y Valerio N. R. A non-linear investigation of single-degree-of-freedom instability in cilinder arrays subjet to cross-flow. *International Symposium on Flow-Induced Vibrations, ASTIE, 1989, ed. M.K. Au-Yang,PVP Vol. 154*
- [8] Blevis R. D. 1977b. *Flow-induced vibration*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [9] Feng. C. C.1966. The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders. Master's thesis, University of British Columbia, Vancouver, B. C. Canada.

[10] Kobayashi, T. 1980. Schwingungen von federgelagerten, stumpfen Zylindern infolge Wirbelablösung. Dissertation, Technical University of Berlin, D 83, FB 9, Berlin, Germany.

[11] Plaschko P. Berger E. y Brod K. 1992. The transition of Flow-Induced Cylinder vibrations to Chaos. *Nonlinear Dynamics* 4: 251-268, 1993. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

[12] Peralta-Fabi R. y Plaschko P. 1993. Bifurcation of solutions to the controlled Burgers equation. *Acta Mechanica* 96, 155-161.

[13] Brika D. y Laneville A. 1993. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 250, 481-508.

[14] Plaschko, P. 1996. Heteroclinic bifurcations in flow-induced oscillations of cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, 10, 33-46.

[15] Shepherd T. G. 1990. A general method for finding extremal energy states of Hamiltonian dynamical systems, with application to perfect fluids. *Journal Fluid Mechanics*, 213, 573-587.

[16] Berger E. 1988. On a mechanism of vortex excited oscillations of a cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 28, 301-319.

[17] Granger S., Campistron R. y Lebet J. 1993. Motion dependent excitation mechanisms in a square in-line tube bundle subject to water cross flow: an experimental analysis. *Journal of Fluids and Structures*, 7, 521-550.

[18] Khalak A. y Williamson C. H. K. 1996. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures*, 10, 455-472.

[19] Lever J. H. y Weaver, D. S. 1986. On the stability of heat exchanger tube bundles, part II: Numerical results and comparison with experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 107, 393-410.

[20] Nakamura T. y Fujita K. 1993. An experimental study of fluid elastic vibration of a tube array by cross-flow. In *Proceedings of the Asia Pacific Vibration Conference 93, Symposium on FIVES, Session: Vibration of tube arrays*, pp. 25-50.

[21] Price S. J. y Paidoussis, M. P. 1986. A single-flexible-cylinder analysis for the fluidelastic instability of an array of flexible cylinders in cross-flow *Journal of Sound and Vibration*, 108, 193-199.

[22] Price, S. J., Paidoussis, M. P. 1989. The flow-induced response of a single flexible cylinder in an in-line array of rigid cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, 3, 61-82.

[23] Simpson A. y Flowers J. W. 1977. An improved mathematical model for the aerodynamic forces on tandem cylinders in motion with aeroelastic applications. *Journal of Sound and Vibration*, 51, 183-217.

[24] Plaschko P. y Mier y Terán L. C. 2002. *Sistemas no Lineales*. Mc Graw Hill.

Apéndice A: Formalismo no canónico aplicado al problema de la estela

Usaremos el formalismo de Hamiltoniano no canónico para deducir la ecuación diferencial ordinaria de dos cilindros en una configuración de la figura 1. Seguiremos las ideas presentadas por Shepard [15] e introduciremos el Hamiltoniano del sistema con dos grados de libertad

$$H = H(x); \quad x = (x_1, x_2, p_1, p_2);$$

$$x_j = \eta_j, \quad p_j = \frac{d\eta_j}{dt}; \quad j = 1, 2. \quad (\text{A.1})$$

El correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no canónico está dado por

$$\frac{dx}{dt} = (J + J A J) \nabla H, \quad (\text{A.2})$$

donde J denota la matriz antisimétrica – que no debe confundirse con la matriz de Jacobi – que sigue

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

y la matriz de 4X4 A se puede escoger para obtener el sistema (4).

Nótese que si $A = 0$ regresaremos a un sistema Hamiltoniano canónico. Nuestra solución para A es.

$$A = \begin{Bmatrix} -\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

de donde los coeficientes α , β , γ y δ varían con x . Escogiendo el Hamiltoniano en la forma

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + F(\eta_1, \eta_2). \quad (\text{A.5})$$

donde F denota un “potencial”

De esto obtenemos de (1) para ((40) el sistema no canónico)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_j &= p_j; & j &= 1, 2 \\ \frac{d}{dt}p_1 &= -F_1 + \alpha F_2 + \beta \frac{d}{dt}\eta_1; \\ \frac{d}{dt}p_2 &= -F_1 + \gamma F_1 + \delta \frac{d}{dt}\eta_2; & F_j &= \frac{fF}{f\eta_j} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Una comparación de la ecuación (A.6) con la ecuación (4)

$$\beta = d_0 + d_2 p_1^2; \quad -\delta = d_0 + d_2 p_2^2, \quad (\text{A.7})$$

y obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales acopladas

$$\begin{aligned} -F_1 - \alpha F_2 &= -\eta_1 - v(k \eta_1 + \kappa_{12} \eta_2); \\ F_2 - \gamma F_1 &= -(1+h)\eta_2 - v(\kappa_{21} \eta_1 + k \eta_2). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De esto obtenemos las derivadas de F1 y F2. Para la solución del sistema (A.8) igualemos:

$$F_{1,2} = F_{2,1}, \quad (\text{A.9})$$

dando como lo que sigue

$$\kappa_{12} + \alpha \kappa = \gamma \kappa + \kappa_{21} + \frac{[\gamma - \alpha(1+h)]}{v}. \quad (\text{A.10})$$

Una manera simple de resolver ecuación (A.10) tenga solución es

$$\alpha = 0; \quad \gamma = v \frac{(\kappa_{12} - \kappa_{21})}{1 + \kappa v}. \quad (\text{A.11})$$

Ahora usaremos este formalismo para calcular la evolución temporal de la energía con el siguiente Hamiltoniano.

$$F = \frac{\eta_1^2}{2} a_1 + \frac{\eta_2^2}{2} a_2 + \eta_1 \eta_2 a_3 \quad (\text{A.12})$$

Ahora el Hamiltoniano completo es

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \eta_1^2 + \frac{d}{dt} \eta_2^2 \right) + \frac{\eta_1^2}{2} a_1 + \frac{\eta_2^2}{2} a_2 + \eta_1 \eta_2 a_3 \quad (\text{A.13})$$

Donde

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 + \kappa v; \\
 a_2 &= 2v \kappa_{12}; \\
 a_3 &= 1 + h + v(\kappa + \kappa_{12} a_2) .
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

Después del cálculo de la energía, dibujemos la función de la energía H en función del tiempo (véase figura 9). Como efecto de la formula (A.19)

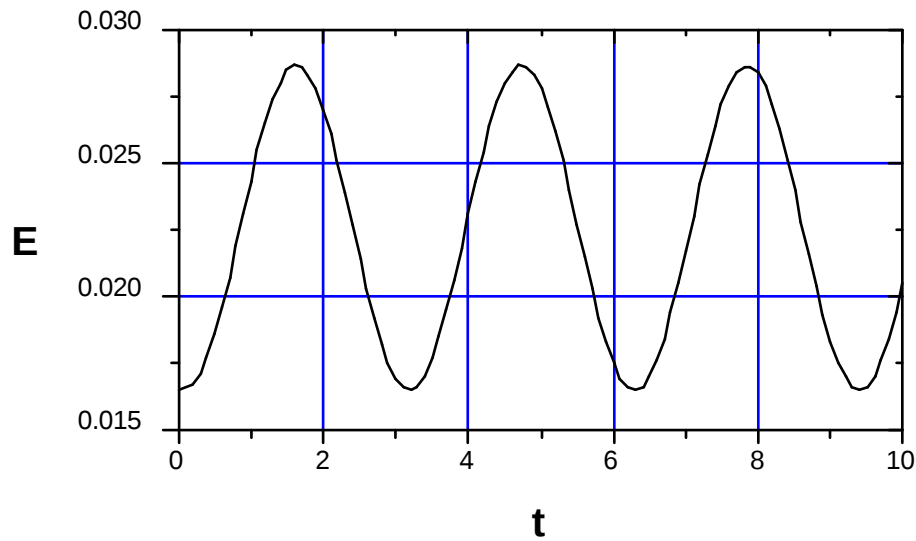


Figura 11. Evolución temporal de la energía
 $\Omega = 0.8$, $h = 0$, $n = 0.001$, $\delta = 0.002$

Apéndice B: Exponentes de Floquet para la configuración de un cilindro solo

Se puede determinar la estabilidad de soluciones periódicas mediante el uso de los exponentes de Floquet, para sistemas bidimensionales. En lo siguiente calcularemos dichos exponentes para la configuración de un cilindro solido, en especifico con el modelo de [4] con el término de memoria de la ecuación (55a).

Tomando la ecuación (55a) con el término de memoria de la ecuación (74) se obtiene lo que sigue

$$\eta'' + (s_0 - q\sigma_2)\eta' + s_2\eta'^3 + (1 + q\sigma_1)\eta = 0 \quad (B.1)$$

Con el cambio de variable que sigue

$$x = \eta; \quad y = \eta' \quad (B.2)$$

Obtenemos la siguiente ecuación

$$f_1(x, y) = y, \quad (B.3a)$$

$$f_2(x, y) = -[(s_0 - q\sigma_2) + s_2y^2]y - (1 + q\sigma_1)x. \quad (B.3b)$$

Entonces es valido que

$$\frac{df_1}{dx} = 0, \quad (B.4a)$$

$$\frac{df_2}{dy} = -[(s_0 - q\sigma_2) + 3s_2y^2] \quad (B.4b)$$

Para un sistema de un grado de libertad existe un solo coeficiente de Floquet. La teoria (véase por ejemplo Plaschko y Mier y Teran [24]) da la siguiente ecuación

$$I = \int_0^T \left(\frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} \right) ds = \begin{cases} > 1 & \text{inestable,} \\ < 1 & \text{estable} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

donde T es el periodo. Entonces obtenemos

$$I = - \int_0^T [(s_0 - q\sigma_2) + 3s_2 y^2] ds \quad (\text{B.6})$$

Investigando el integrando de la ecuación (B.6) vemos que

$$I < 0 : \frac{s_0 - q\sigma_2}{3s_2} = R_2^2 = -y^2, \quad (\text{B.7})$$

donde R es el radio del ciclo límite. La ecuación (B.7) ahora nos dice que el ciclo límite es estable.