

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

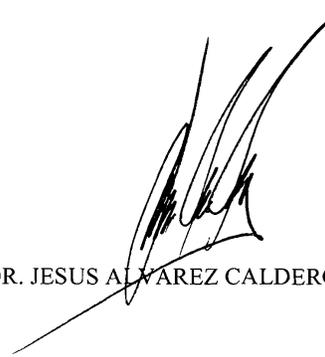
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE PROCESOS E HIDRÁULICA

TESIS DE DOCTORADO EN CIENCIAS

**ESTIMACION ROBUSTA DE ESTADOS EN
PLANTAS NO-LINEALES CON MEDICIONES DISCRETAS:
APLICACIÓN A REACTORES DE POLIMERIZACIÓN**

Presenta: M.I.Q. HECTOR HERNANDEZ ESCOTO

Asesor: DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'J. Alvarez Calderon', is written over the text 'DR. JESUS ALVAREZ CALDERON'.

Mayo del 2002

AGRADECIMIENTOS

Agradezco, en la realización de mis estudios de Doctorado y de la presente tesis a:

El Departamento de Ingeniería Química de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, por haberme dado la oportunidad de estudiar dentro de su programa de posgrado.

Al Dr. Jesús Alvarez Calderón, asesor de la presente tesis.

A mi jurado de examen de grado:

Dr. Arturo Jiménez Gutiérrez (Presidente)

Dr. Julio Ernesto Solís Daún (Vocal 1)

Dr. Enrique Saldivar Guerra (Vocal 2)

Dr. Jesús Alvarez Calderón (Vocal 3)

Dr. José de Jesús Alvarez Ramírez (Secretario)

ha sido un gran honor el que hayan evaluado mi tesis.

Mis estudios de Doctorado y el desarrollo de la presente tesis se llevaron a cabo gracias al apoyo económico que recibí de:

El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología: Beca-Crédito Nacional

El Centro de Investigación en Polímeros: “Galardón” otorgado con base en su programa de Apoyo a la Formación de Recursos Humanos.

DEDICATORIAS

*.....El hombre tiene su fuerza, y el ejercicio de su poder actúa,
se mueve, se ocupa en algo, piensa, abraza el porvenir
y en ello encuentra.....*

(extraído de 'Eugénie Grandet' de Honoré Balzac)

Dedico esta tesis a toda la gente que me acompaño a lo largo de mis estudios doctorales, de forma muy especial a:

Mi esposa e hijo, que con ellos empiezo una nueva etapa de vida.

Mis padres y hermanos, sabiendo que siempre estarán conmigo.

Mi tía Soledad y mi primo Alberto, quienes siempre me han escuchado.

Al Dr. Jaime Vernon Carter, un gran amigo y persona generosa.

A mis amigos y compañeros de "estudios": Rogelio Hernández, Héctor Puebla, Eduardo Castellanos, Carlos Fernández, Teresa López, Guadalupe Arenas, Carlos Ortiz, Hugo Pérez, Cesar Anota, ...

Sobre todo, agradezco y dedico el presente trabajo a DIOS

.....

INDICE

Introducción	01
I.1 Estimación de estados	01
I.2 Reactores de polimerización	03
I.3 Antecedentes y justificación del proyecto	05
I.4 Alcances del proyecto	06
1. Diseño de un Estimador Robusto para Plantas No-Lineales con Mediciones Discretas	07
1.1 El problema de estimación	07
1.2 Propiedad de detectabilidad	11
1.2.1 Planta en forma normal	16
1.3 Construcción del Estimador	17
1.3.1 Vector de grados de estimación	17
1.3.2 Estimador candidato en coordenadas z	19
1.3.3 Parametrización de ganancias	20
1.3.4 Estimador candidato en coordenadas originales x	23
1.4. Convergencia del estimador	24
1.4.1 Dinámicas de error de estimación	25
1.4.2 Condiciones de convergencia	26
2. Ejemplo de Aplicación 1: Estimación en un Reactor de Polimerización por Radicales Libres	29
2.1 La polimerización por radicales libres	29
2.2 El reactor de polimerización y su problema de estimación	30
2.3 Vector de grados admisibles de estimación	31
2.4 Construcción-sintonización del estimador	32
2.5 Desempeño y funcionamiento del estimador	32
2.6 Figuras	36

3. Ejemplo de Aplicación 2	
Estimación en un Reactor de Alquidales con Mediciones Discretas-Retardadas	39
3.1 Los reactores de alquidales	39
3.2 El problema de estimación	40
3.3. Modelo del reactor	43
3.4 Diseño del estimador	45
3.4.1 Resolubilidad del problema de estimación	45
3.4.2 Modelo del estimador	48
3.4.3 Estimador	48
3.4.4 Convergencia	50
3.5 Implementación	50
3.4.1 Sistema experimental	50
3.4.2 Funcionamiento del estimador	51
3.6 Figuras	53
Conclusiones	59
Apéndice A: Vectores, matrices y mapas no lineales	60
Apéndice B: Forma Normal de la Planta y Cambio de Coordenadas	61
Apéndice C: Prueba del Lema 1.1	64
Apéndice D. Prueba del Teorema 1.1	66
Apéndice E. Funcionalidades y parámetros cinéticos del reactor de polimerización por radicales libres	68
Referencias Bibliográficas	72

INTRODUCCION

Este trabajo doctoral trata el problema de estimación de estados para plantas continuas no-lineales con mediciones discretas. La motivación del trabajo surge de la dificultad de monitoreo de reactores de polimerización y, por ello, la aplicación de su estrategia de solución se muestra en este tipo de procesos. Para enmarcar la aportación de este trabajo, a continuación se da un concreto estado del arte en cuanto a estimación de estados se refiere, se mencionan las características de los reactores de polimerización, y se sienta el punto de partida y, por último, el punto final.

I.1 Estimación de estados

En las últimas dos décadas, la estimación de estados de procesos químicos, con base en sus modelos y a través de sus mediciones de entradas y salidas, ha sido abordado extensivamente. Ello se debe a que tiene gran aplicabilidad e implicación en las tareas que conlleva el monitoreo y el control de procesos y de calidad de productos, la detección de fallas y la reconciliación de datos, la validación y la estimación de parámetros de modelos, etc.; y por el lado particular que corresponde al enfoque de este trabajo, es importante resaltar que la aplicabilidad de esquemas de control no lineal avanzado, como uno de tipo geométrico [Alvarez, 1996] o uno de tipo predictivo [Phani y Bequette, 1996], depende del funcionamiento y desempeño de un estimador de estados.

Para sistemas lineales, se puede decir que existe un marco teórico de estimación y control de estados ya maduro [Rugh, 1996; Kwakernaak, 1972]. La aplicación de sus técnicas a procesos químicos, es precedida de una linealización de los modelos correspondientes alrededor de un punto de operación nominal; sin embargo, el desempeño de los estimadores y/o controladores lineales se empobrece cuando las condiciones de operación del proceso se alejan del punto nominal de diseño, y/o cuando se tiene incertidumbre en los parámetros del modelo del proceso. Luego, es natural pensar que, el desempeño de un estimador y/o controlador para un proceso químico será mejor si dicho estimador es diseñado con técnicas acordes a la naturaleza no-lineal de dichos procesos, es decir, con técnicas no-lineales. En el campo de sistemas no-lineales se han propuesto cuatro estrategias básicas de diseño de estimadores de estados: (i) filtro extendido de Kalman (FEK) [Gelb, 1974], (ii) geométrica [Krener e Isidori, 1983], (iii) alta ganancia [Ciccarella y col., 1993], y (iv) modo deslizante [Slotine y col., 1987]. La estrategia de diseño de FEKs es, por mucho, la más utilizada y exitosamente probada a nivel simulación y laboratorio [ver Bequette, 1991; Mutha y col., 1997; Mutha y col., 1999; y referencias en ellas]; sin embargo, su aplicación industrial se ve obstaculizada por su carencia de criterios de

convergencia y procedimientos sistemáticos de sintonización. A diferencia del FEK, las otras tres estrategias ofrecen criterios de convergencia; pero, sus aplicaciones se restringen a un cierto tipo de plantas (p. ej., plantas completamente observables, al igual que el FEK), sus procedimientos de construcción del estimador pueden llegar a ser elaborados, y los de sintonización, complejos. Entonces, no se puede decir que el marco teórico de estimación (y control) no-lineal esté suficientemente desarrollado y, menos aún, que su aplicabilidad a procesos químicos sea directa y sistemática.

El problema de estimación de procesos químicos, que se aborda en este trabajo, surge de la naturaleza de las mediciones de los procesos químicos: continuas y/o discretas. En ello, se considera la naturaleza no-lineal y continua de los procesos químicos; la naturaleza no-lineal de las relaciones entre los estados del proceso y las mediciones; y que las mediciones discretas, muchas veces, tienen tiempos de muestreo largos y son retardadas (p. ej., un sistema de reacción con medición de composición). En estudios para plantas continuas con mediciones discretas, típicamente se aplican estrategias de diseño que se basan en modelos inherentemente discretos, o se hacen modificaciones *ad hoc* de estrategias para mediciones continuas, para manejar las mediciones discretas. Estos estudios ignoran el tiempo de muestreo, y su aplicación a plantas con observabilidad parcial no es directa. Como ejemplo de ellos se puede mencionar los trabajos de aplicación de FEKs [Mutha y col., 1999; y referencias en ella]; el observador de Moraal y Grizzle (1995), que requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, vía un algoritmo iterativo de Newton; el de Ciccarella y col. (1995), que es la versión discreta (planta discreta con mediciones discretas) de su observador de alta ganancia para plantas continuas con mediciones continuas [Ciccarella y col., 1993]; y el observador de Tatiraju y col. (1999), de tipo Luenberger, para una clase de reactores de polimerización con mediciones continuas y discretas-retardadas, que consiste de un observador para mediciones continuas [Soroush, 1997] con un regresor polinomial recursivo que genera extrapolaciones continuas, a tiempo presente, de las mediciones discretas retardadas, y cuyo criterio de convergencia parece no ser apropiado a causa de la extrapolación mencionada. Con respecto a la importancia del tiempo de muestreo, cabe mencionar que Nesic y col. (1999), en su trabajo de estabilización por retroalimentación de estados de plantas continuas con mediciones discretas, consideran que éste es un grado de libertad en el diseño de un control con base en un modelo discreto obtenido o aproximado a partir de uno continuo; y derivan una condición de estabilidad que establece un límite superior en el tiempo de muestreo. Este resultado, con respaldo teórico, está en acorde con los hechos bien conocidos en la construcción e implementación de controles y filtros discretos [Kuo, 1992; Palmor y Shinnar, 1979], y motiva a pensar que, una característica similar se debe presentar en el diseño de un estimador para plantas continuas con mediciones discretas, y más aún, en el caso de mediciones retardadas significativamente.

Lo mencionado evidencia, motiva y justifica estudios hacia el desarrollo de una metodología de estimación de estados que, con un marco teórico apropiado, considere:

- (i) una definición de detectabilidad no-lineal, susceptible a evaluación e interpretación, para tratar directamente con plantas de observabilidad completa o parcial;
- (ii) un procedimiento sistemático de construcción y de sintonización;
- (iii) criterios de convergencia robusta en un sentido no-local práctico apropiado (p. ej., semiglobal), y con tolerancia a dinámicas no-modeladas y a ruido en las mediciones;
- (iv) el caso de mediciones con diferentes tiempos de muestreo o con tiempos de muestreo ajustables (p. ej., si se tienen mediciones continuas, el tiempo de muestreo es cero).

En esta línea, cabe mencionar que recientemente, una estrategia para plantas con observabilidad parcial y con mediciones continuas [Deza y col., 1992; Ciccarella y col, 1993; Besancon y Hammouri, 1996], que acopla técnicas geométricas y de alta ganancia, se ha extendido al caso general de plantas con observabilidad parcial [Alvarez y López, 1999; Alvarez, 2000]. En estos dos trabajos se incluye una definición de estimabilidad, para el tratamiento de plantas con observabilidad parcial y la determinación preliminar de la resolubilidad del problema de estimación; un criterio de convergencia, local y robusta con respecto a errores paramétricos; y procedimientos sistemáticos de construcción y de sintonización. Continuando sus trabajos anteriores, Alvarez y col. (2000) diseñaron un estimador para una clase de reactores de polimerización por radicales libres, cuya condición de convergencia se extendió a un marco semiglobal (o no-local). Siguiendo la misma estrategia de los trabajos anteriores, y para la misma clase de reactores de polimerización, con mediciones discretas-retardadas adicionales a las mediciones continuas, en Hernández (1998) y Hernández y Alvarez (1999) se diseñó un estimador cuya construcción y sintonización fue sistemática; sin embargo, su criterio de convergencia es incompleto en el sentido que, no considera el papel que toma el tiempo de muestreo en la convergencia del estimador.

1.2 Reactores de polimerización

Los reactores de polimerización constituyen la parte medular de cualquier planta industrial productora de polímeros. Estos reactores adoptan diferentes formas (de tanque agitado o tubular) y tipos de operación (lote, semilote o continuo) debido a que, los procesos de polimerización presentan una amplia gama de cinéticas (p. ej., por radicales libres, aniónica, etc.) y se pueden llevar a cabo en diferentes medios (en masa, en solución, en suspensión o en emulsión). En cualquiera de sus

configuraciones (p. ej., de radicales libres, en solución, en un tanque agitado), los procesos de polimerización presentan las siguientes características particulares [Ray, 1986; Elicabe y Meira, 1988]:

(i) estructuras de estado estacionario no-lineales; por ejemplo, la operación continua de reactores de tanque agitado puede tener múltiples estados estacionarios, los cuales son sensibles a cambios en las condiciones de operación;

(ii) reacciones con dinámicas complejas o con disparos térmicos potenciales; por ejemplo, en reactores de tanque agitado operados en lote, se pueden presentar trayectorias de reacción con oscilaciones autónomas, o un proceso autoacelerado;

(iii) alta viscosidad, sobre todo a conversiones altas; por ejemplo, en un sistema de polimerización por radicales libres, la viscosidad puede incrementarse en seis órdenes de magnitud cuando la polimerización progresa de 0 al 60 por ciento;

(iv) la arquitectura molecular del polímero es sensible a las condiciones de operación del reactor y, por lo tanto, la calidad del polímero se determina en la etapa de síntesis, es decir, cambios en los flujos de alimentación de materia prima, en condiciones de mezclado, en temperatura, etc., pueden alterar la distribución de los pesos moleculares y grados de ramificación del polímero.

En consecuencia, es común que se presenten en el reactor problemas serios de mezclado, transferencia de calor, control y seguridad; y se puede decir que la operación de un reactor de polimerización es una tarea que requiere de un preciso y continuo monitoreo de las variables que determinan su estado, como son la conversión monómero a polímero (que determina la velocidad de producción), la temperatura y volumen del reactor (que señalan la seguridad de operación), y la distribución de pesos moleculares del producto polimérico (que determina la calidad del producto).

El problema de monitoreo de reactores de polimerización no es una tarea sencilla. Por ejemplo, mediciones de flujos y temperaturas en las entradas y salidas del reactor, o de la temperatura del reactor, se obtienen fácilmente de forma continua e instantánea (p. ej., por medio de rotámetros y termopares); mediciones de conversión o de composición se pueden obtener relativamente fácil, si no continuas e instantáneas, sí discretas con tiempos de muestreo pequeños (p. ej., indirectamente a través de un densímetro, refractómetro o viscosímetro); sin embargo, mediciones de las propiedades estructurales del polímero, como la distribución de pesos moleculares, se obtienen de forma discreta y con un retardo significativo (p. ej., por medio de un cromatógrafo de permeación en gel, o de exclusión de tamaños de partículas). Grandes avances se han logrado en el desarrollo de instrumentos de medición; por ejemplo, existen densímetros implementables en línea con muy alta frecuencia de medición, y los tiempos de análisis de los cromatógrafos se han reducido; pero, todavía se conservan ciertas desventajas en los altos costos de adquisición, mantenimiento y manejo de los equipos,

especialmente en los de cromatografía, que son la herramienta más poderosa para caracterizar estructuras poliméricas.

Una opción para atacar el problema de monitoreo de los reactores de polimerización, especialmente en lo que respecta a la calidad del polímero, y que no requiere de altos costos, es la búsqueda de relaciones entre variables que sean fáciles de medir en línea (p. ej., densidad o viscosidad) y propiedades estructurales del polímero (p. ej., peso molecular promedio o polidispersidad). Otra opción económica es el diseño de estimadores de estado. En esta última opción no se debe de perder de vista que los modelos de los reactores de polimerización contienen una alta no-linealidad que resulta de las peculiaridades mencionadas arriba, y que se tiene un problema extra no sencillo en el manejo de mediciones discretas, y más aún, si éstas están retardadas significativamente.

I.3 Antecedentes y justificación del proyecto

En los últimos diez años, el grupo de investigación de Jesús Alvarez, dentro del Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica de la Universidad Autónoma Metropolitana (unidad Iztapalapa), ha estado entendiendo y aplicando metodologías avanzadas, de tipo geométrico y de alta ganancia, de diseño de controladores y estimadores de estados para procesos químicos, particularmente en reactores de polimerización. En esta línea, los alcances logrados pueden verse en [Alvarez \(1996\)](#), [Alvarez y López \(1999\)](#), [Alvarez \(2000\)](#), [Alvarez y col. \(2000\)](#), [Hernández \(1998\)](#) y [Hernández y Alvarez \(1999\)](#), los cuales, a excepción de [Alvarez \(1996\)](#), se mencionaron a lo largo de esta introducción. En [Alvarez \(1996\)](#) se presenta un control por retroalimentación de salidas asistido por un estimador de estados. Las aplicaciones de estos trabajos se ejemplifican considerando una clase de reactores de polimerización por radicales libres ya que, éstos presentan la mayor parte de las peculiaridades y problemas de los procesos de polimerización.

Con base en estos trabajos, se puede decir que, en general, se tiene una metodología de estimación de estados de tipo geométrico y de alta ganancia, para plantas no-lineales continuas con mediciones continuas, la cual, se respalda en un marco teórico de estabilidad local, y lleva a una estimación robusta con respecto a errores paramétricos. Además, la metodología se ha extendido a un marco teórico de estabilidad semiglobal para una clase de reactores de homopolimerización por radicales libres con mediciones continuas [[Alvarez y col., 2000](#)]; y a otra similar, de un marco teórico incompleto de estabilidad local, para la misma clase de reactores, en un caso especial mediciones discretas-retardadas adicionales [[Hernández y Alvarez, 1999](#)].

Puntualizando, ya que en las áreas de procesos químicos industriales es muy común el caso de plantas con mediciones discretas, y teniendo como principales antecedentes los trabajos de [Hernández \(1998\)](#) y [Hernández y Alvarez \(1999\)](#), se evidencia la pertinencia de extender la metodología para el caso de mediciones continuas de [Alvarez y López \(1999\)](#) y [Alvarez \(2000\)](#) al caso de mediciones discretas. Esto es además un siguiente paso natural de investigación, así como lo sería el investigar cómo ampliar el marco de estabilidad local a uno de estabilidad no-local.

I.4 Alcances del trabajo

Como un paso metodológico hacia la extensión mencionada del esquema de estimación de estados, en la presente tesis se abordan los siguientes problemas:

- (i) el establecimiento de una definición congruente de la propiedad de detectabilidad de plantas no-lineales, y de una definición de una propiedad de estimabilidad del estimador, y así, poder determinar preliminarmente la posibilidad de diseñar un estimador;
- (ii) la derivación de un procedimiento sistemático de construcción y sintonización de un estimador de estados para plantas no-lineales continuas con mediciones discretas; esto, con base en las propiedades de detectabilidad de la planta, y de estimabilidad del estimador viable;
- (iii) la obtención de condiciones de convergencia del estimador del punto anterior, que conlleve la caracterización del papel que juegan, en el desempeño del estimador, el tiempo de muestreo y las ganancias del estimador.

Estos problemas se trataron en un marco de estabilidad local robusta con respecto a errores paramétricos. De esta forma, se permite enfocar la atención en los aspectos fundamentales del problema, en el entendido que, los resultados obtenidos se podrían extender al caso matemáticamente más complejo, de robustez con respecto a errores por dinámicas no modeladas o erróneamente modeladas.

La aplicabilidad del esquema de estimación, que resulta de las soluciones de los problemas establecidos arriba, se ejemplifica a través de dos reactores de polimerización en los cuales se cuentan con mediciones experimentales. De esta forma se pone a una prueba más severa al estimador, ya que éste debe ser robusto no precisamente sólo con respecto a errores paramétricos, sino también con respecto a errores inherentes por dinámicas no modeladas debido a su carácter desconocido o complejo; sin embargo, en un sentido práctico, puede decirse que los errores de predicción de un buen modelo sólo se deben a errores en sus parámetros.

CAPITULO 1
DISEÑO DE UN ESTIMADOR ROBUSTO
PARA PLANTAS NO-LINEALES CONTINUAS CON MEDICIONES DISCRETAS

En este capítulo, se desarrolla una estrategia de diseño de un estimador de estados para plantas no-lineales continuas con mediciones discretas. En ello, primero se plantea una definición de la propiedad de detectabilidad de una planta, y una definición de la propiedad de estimabilidad de un existente estimador de la planta. Luego, con base en las propiedades de detectabilidad y estimabilidad, se combinan estrategias geométricas y convencionales para obtener un esquema sistemático de construcción del estimador; se realiza un análisis de estabilidad de las dinámicas de error de estimación para obtener un procedimiento sistemático de sintonización y criterios de convergencia robusta con respecto a errores en los parámetros del modelo de la planta. Por último, se hace una discusión del papel que juegan el tiempo de muestreo y las ganancias del estimador, en la convergencia y desempeño del estimador. De esta manera se abarcan las características adecuadas que, acorde a lo planteado anteriormente en la Sección I.4, debe tener una estrategia sistemática de diseño de estimadores.

1.1 El problema de estimación

Con miras en procesos químicos, cuyo comportamiento puede ser descrito por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales, y sin ignorar otro tipo de sistemas dinámicos como los mecánicos, eléctricos o biológicos, se considera una clase general de plantas no-lineales continuas,

$$\dot{x} = f[x, u(t), r], \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1a}$$

$$y(t_k) = h[x(t_k), r], \quad y_u(t_k) = u(t_k), \quad t_{k+1} = t_k + T, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{1.1b}$$

de un conjunto 'x' de n estados, un conjunto 'u' de p entradas, un conjunto 'r' de n_p parámetros constantes y un conjunto 'y' de m salidas; con las siguientes restricciones:

- (i) los conjunto 'y' y 'y_u' de mediciones de las salidas y entradas, respectivamente, se obtienen en tiempos discretos (t_k) con tamaños periódicos de intervalos de muestreo (T = t_{k+1} - t_k);
- (ii) los estados, las entradas y los parámetros toman valores en conjuntos compactos (acotados y cerrados), es decir, x ∈ X, u ∈ U, r ∈ R;
- (iii) cada entrada u_i es suficientemente diferenciable con respecto al tiempo (p. ej., hasta un orden v_i), estando acotada su última derivada temporal en la forma (|v| denota la norma del vector v)

$$|v(t)| \leq \varepsilon_v, \quad v(t) = [u_1^{(v_1)}, \dots, u_p^{(v_p)}]', \quad u_i^{(v_i)} = d^{v_i}u/dt^{v_i} \tag{1.1c}$$

(iv) cada tripleta (x_0, u, r) , de estados iniciales-entradas-parámetros, determina una trayectoria única del estado de la planta $[x(t)]$, la cual, a su vez, determina una trayectoria única de la salida $[y(t)]$ y una evolución única de la planta $[E(t)]$,

$$x(t) = \theta_x[t, t_0, x_0, u(\cdot), r], \quad y(t) = h[x(t), r] = \theta_y[t, t_0, x_0, u(\cdot), r], \quad E(t) = \{x(t), u(t), r\} \quad (1.1d)$$

o equivalentemente, los mapas f y h son funciones C^∞ , es decir, infinitamente diferenciables con respecto a sus argumentos (x, u, r) en sus respectivos dominios [a lo largo de $E(t)$]. Para el propósito a tratar, se debe tener en mente que la trayectoria del estado $[x(t)]$ está en correspondencia uno a uno con el par de las trayectorias entrada-salida $[u(t), y(t)]$.

Las restricciones enumeradas representan o se pueden asociar a limitaciones físicas y prácticas de la mayoría de los procesos químicos, así como de otros tipos de sistemas.

Cabe resaltar que, a lo largo de esta tesis, los términos ‘estado’, ‘entrada’, ‘salida’, ‘parámetro’ y ‘medición’, se utilizan para referirse al conjunto de estados (x) , entradas (u) , salidas (y) , parámetros (r) y mediciones (y, y_u) ; y el término ‘trayectoria’ de un estado, entrada, salida o medición, se refiere a la evolución que la entrada, salida o medición tiene a lo largo del tiempo y se denota por $x(t)$, $u(t)$ o $y(t)$, respectivamente.

Para el establecimiento y solución del problema de estimación de esta tesis, a continuación, se sienta la base de convergencia adaptando la definición de estabilidad exponencial dada en [Alvarez \(2000\)](#). Entonces, se designa a $\chi(t)$ como cualquier trayectoria perturbada de $x(t)$ [[Ec. \(1.1d\)](#)], en el sentido que ésta resulta de un estado inicial erróneo χ_0 de x_0 , de una entrada perturbada $v(t)$ de $u(t)$ y de un parámetro aproximado ρ de r :

$$\chi(t) = \theta_x[t, t_0, \chi_0, v(\cdot), \rho], \quad [\chi_0, v(t), \rho] \in P[x_0, u(t), r] \quad (1.2a)$$

$$P[x_0, u(t), r] = \{[\chi_0, v(t), \rho] \mid |\chi_0 - x_0| \leq \delta_{x_0}, \quad \|v(t) - u(t)\| = \sup_t |v(t) - u(t)| \leq \delta_u, \quad |\rho - r| \leq \delta_r\} \quad (1.2b)$$

donde P es una vecindad alrededor de la tripleta $[x_0, u(t), r]$.

Definición 1.1 La trayectoria $x(t)$ [[Ec. \(1.1d\)](#)], del estado de la [planta \(1.1\)](#), es estable de forma robusta (R) y exponencial (E) si existe un conjunto $\{A, L, B, C\}$ de constantes positivas, tal que, cualquiera de sus trayectorias $\chi(t)$ [[Ec. \(1.2a\)](#)], perturbadas, correspondiente a una tripleta $[\chi_0, v(t), \rho]$ [[Ec. 1.2b](#)], converge a ella de la manera

$$|\chi(t) - x(t)| \leq Ae^{-L(t-t_0)}|\chi_0 - x_0| + B\|v(t) - u(t)\| + C|\rho - r| \quad \blacklozenge$$

Esta definición, vista de otra forma, establece que cualquier trayectoria perturbada $[\chi(t)]$, debida a errores suficientemente pequeños en el estado inicial ($|\chi_0 - x_0| \leq \delta_{x_0}$), en la entrada ($\|v(t) - u(t)\| \leq \delta_u$) y en el parámetro ($|\rho - r| \leq \delta_r$), permanecerá arbitrariamente cercana a la de la planta $[x(t)]$, si la

trayectoria de la planta es RE-estable. Como consecuencia, dada la diferenciabilidad continua del mapa h [Ec. (1.1b)], cualquier trayectoria $\psi(t)$, asociada a una trayectoria perturbada $\chi(t)$ vía Ec. (1.1d), permanecerá cercana de manera similar a la de la salida $y(t)$ [Ec. (1.1d)], si $x(t)$ es RE-estable.

Previendo los efectos de la naturaleza discreta de las mediciones [Ec. (1.1b)], se considera a

$$\{x(t_k), T\} = [x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)], \quad t_{k+1} = t_k + T \quad (1.3a)$$

como una secuencia de estados en tiempos sucesivos, extraída de la trayectoria $x(t)$ [Ec. (1.1d)], en la cual, el lapso entre los tiempos sucesivos es periódico y de tamaño T . Correspondientemente, también se considera a

$$\{\chi(t_k), T\} = [\chi(t_0), \chi(t_1), \chi(t_2), \dots, \chi(t_k)], \quad t_{k+1} = t_k + T \quad (1.3b)$$

como una secuencia de estados perturbados, de cualquier trayectoria perturbada $\chi(t)$ [Ec. (1.2)], en los mismos tiempos sucesivos de la secuencia de los de la planta [Ec. (1.3a)]. Luego, reemplazando el término de comportamiento “exponencial”, propio de una trayectoria, por el término de comportamiento “geométrico”, propio de una sucesión de números, se introduce la siguiente definición de estabilidad robusta de una secuencia, acorde a la **Definición 1.1**.

Definición 1.2. La secuencia $\{x(t_k), T\}$ [Ec. (1.3a)], de estados de la planta (1.1), es estable de forma robusta (R) y geométrica (G) si existe un conjunto de constantes positivas $\{A, G, B, C\}$, tal que, cualquiera de sus secuencias perturbadas $\{\chi(t_k), T\}$ [Ec. (1.3b)], correspondiente a una tripleta $[\chi_0, v(t), \rho]$ [Ec. (1.2b)], converge a ella de la manera

$$|\chi(t_k) - x(t_k)| \leq AG^k |\chi_0 - x_0| + B \|v(t) - u(t)\| + C |\rho - r|, \quad 0 < G < 1 \quad \blacklozenge$$

La **Definición 1.1**, en un marco de estimación de estados, significa que si se considera al sistema (1.1) como un modelo perfecto de una planta (o proceso), éste describirá la trayectoria real (o verdadera) del estado de la planta [denotada por $x(t)$] si se cuenta con los datos reales (o verdaderos) del estado inicial (denotado por x_0), de la entrada (denotada por u) y el parámetro (denotado por r). Sin embargo, cuando tales datos son erróneos (denotados por χ_0 , v y ρ , respectivamente), la correspondiente trayectoria $\chi(t)$ estará desviada de $x(t)$; pero, si $x(t)$ es RE-estable y los errores en los datos son suficientemente pequeños [es decir, $|\chi_0 - x_0| \leq \delta_{x_0}$, $\|v(t) - u(t)\| \leq \delta_u$, $|\rho - r| \leq \delta_r$], la trayectoria $\chi(t)$ será una descripción suficientemente precisa de $x(t)$, de otra forma $\chi(t)$ será una descripción totalmente errónea de $x(t)$. De modo similar se interpreta para una secuencia de estados (**Definición 1.2**). Cabe decir que, aunque es imposible obtener un modelo perfecto de un proceso, en la práctica sí se obtienen modelos suficientemente apropiados que hacen que se pueda trabajar bajo la suposición ideal de modelo con errores paramétricos.

Una vez sentada la base de estabilidad o convergencia e imitando, para el caso de mediciones discretas, las características del estimador para plantas continuas con mediciones continuas dadas en [Alvarez y López \(1999\)](#), a continuación se plantea el problema de estimación de la presente tesis en un formato de definición para resaltar las características propias que se persiguen.

Problema de Estimación. Para una clase de plantas no-lineales continuas con mediciones discretas, con base en su modelo [Ec. (1.1)], diseñar un estimador de estados de la forma

$$\chi_e(t_{k+1}) = \Theta_e[T, \chi_e(t_k), y_u(t_k), y(t_k), \rho], \quad \chi_e(t_0) = \chi_{e_0}, \quad T = t_{k+1} - t_k, \quad \chi_e = (\chi_u, \chi, \chi_m)',$$

$$\chi(t_k) = (0, I, 0) \chi_e(t_k), \quad \psi(t_k) = h[\chi(t_k), \rho], \quad \psi_u(t_k) = h_u[\chi_u(t_k)],$$

construido con un parámetro inexorablemente aproximado ρ de r , y accionado por las mediciones discretas de la salida $[y(t_k)]$ y de la entrada $[y_u(t_k)]$, de tal manera que, en línea genere:

(i) una secuencia $\{\chi(t_k), T\}$, de estados estimados, RG-convergentes ([Definición 1.2](#)) a la secuencia $\{x(t_k), T\}$, de estados reales;

(ii) secuencias $\{\eta(t_k), T\}$ y $\{\mu(t_k), T\}$, de los errores de estimación de la salida ($\eta = \psi - y$) y de la entrada ($\mu = \psi_u - y_u$), respectivamente, RG-convergentes ([Definición 1.2](#)) a cero, con dinámicas casi-lineales (cL), no-interactivas (nI) y de polo-asignable (PA),

$$L_i^\gamma(\eta_i) = q_i(t_k), \quad \eta_i = \psi_i - y_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (1.4a)$$

$$L_i^\mu(\mu_i) = w_i(t_k), \quad \mu_i = v_i - u_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad (1.4b)$$

donde L_i^γ y L_i^μ son los i -ésimos operadores en diferencias de orden κ_i+1 y v_i , respectivamente,

$$L_i^\gamma(\eta_i) = \eta_i(t_{k+\kappa_i+1}) + d_{1,i}^0(T) \eta_i(t_{k+\kappa_i}) + \dots + d_{\kappa_i+1,i}^0(T) \eta_i(t_k), \quad \sigma[L_i^\gamma(\eta_i)] = (\gamma_{1,i}^0, \dots, \gamma_{\kappa_i+1,i}^0) \quad (1.5a)$$

$$L_i^\mu(\mu_i) = \mu_i(t_{k+v_i}) + d_{1,i}^1(T) \mu_i(t_{k+v_i-1}) + \dots + d_{v_i,i}^1(T) \mu_i(t_k), \quad \sigma[L_i^\mu(\mu_i)] = (\gamma_{1,i}^1, \dots, \gamma_{v_i,i}^1) \quad (1.5b)$$

con un respectivo conjunto de polos, $[\sigma(L_i^\gamma), \dots, \sigma(L_m^\gamma)]$ y $[\sigma(L_i^\mu), \dots, \sigma(L_p^\mu)]$, asignables por medio de procedimientos convencionales de sintonización, y donde las secuencias $q(t_k) = [q_1(t_k), \dots, q_m(t_k)]'$ y $w(t_k) = [w_1(t_k), \dots, w_p(t_k)]'$ están acotadas de la siguiente forma

$$|q(t_k)| \leq A_q \gamma_q^k q_0 + B_q \delta_u + C_q \delta_r, \quad q_0 = |q(t_0)|, \quad 0 < \gamma_q < 1; \quad |w(t_k)| \leq \delta_w \quad \blacklozenge$$

Como se puede ver, en forma similar al caso con mediciones continuas [\[Alvarez y López, 1999\]](#), el estado del estimador (χ_e) consiste del estado estimado de la planta (χ), de la entrada aumentada estimada (χ_u) y de un conjunto de estados asociados a los errores paramétricos persistentes (χ_m). La entrada aumentada consta de la entrada y sus derivadas temporales requeridas. Los coeficientes $[d_{1,j}^0(T), \dots, d_{\kappa_j+1,j}^0(T)]$ y $[d_{1,j}^1(T), \dots, d_{v_j,j}^1(T)]$ [\[Ec. \(1.5\)\]](#), de las dinámicas de error de estimación de la salida y entrada, respectivamente, junto con el tiempo de muestreo (T), son grados de libertad en el diseño del estimador

ya que, éstos determinan la posibilidad de realizar una convergencia a cero arbitrariamente rápida del error de estimación de la salida y de la entrada, cuyo efecto se refleja en la velocidad y desempeño de convergencia del estado estimado al real. Además, con ellos se puede llevar a cabo una sintonización no interactiva de ganancias al usar técnicas convencionales para filtros discretos lineales de una salida, como los comúnmente empleados en la práctica industrial.

1.2. Propiedad de detectabilidad

A continuación, se presenta la definición de detectabilidad para plantas no-lineales, base de la presente estrategia de diseño de estimadores. Esto es porque, el analizar la propiedad de detectabilidad de la planta significa evaluar si la información que se tiene disponible (medición y modelo de la planta) es suficiente para reconstruir el estado y otras variables de interés; y a través de ella se establece la posibilidad de diseñar un estimador apropiado, cualquiera que sea la estrategia a ser utilizada (p.ej., el filtro extendido de Kalman).

Para lograr el propósito anunciado, la definición de detectabilidad que corresponde a la de estimabilidad en [Alvarez \(2000\)](#), se pone en perspectiva con las definiciones de observabilidad local débil [\[Hermann y Krener, 1977\]](#) y asintótica [\[Sontag, 1990\]](#), y su terminología se hace consistente con la definición estándar de detectabilidad para sistemas lineales [\[Wonham, 1985\]](#). Luego, con base en la propiedad de detectabilidad, se plantea un cambio de coordenadas para llevar a la planta a una forma normal, con dinámicas observables casi-lineales, y de esta forma anteceder y mostrar la plataforma del estimador que aquí se diseña. Cabe hacer notar que, para presentar esta propiedad y sólo en esta sección, se consideran continuas las mediciones de la salida y de la entrada.

Las definiciones de observabilidad local débil y asintótica se basan en nociones de indistinguibilidad de estados desde el punto de vista entrada-salida de la planta, es decir, una misma entrada puede generar distintos estados y éstos se ven reflejados en una misma salida; y se interpretan como la capacidad de distinguir instantáneamente o, en el caso asintótico, después de un cierto tiempo, cada estado de sus vecinos a partir de las mediciones de la salida y de la entrada. En nuestro caso se extiende este punto de vista, por cuestión de generalidad, de un par de datos entrada y salida a una tripleta de datos entrada, salida y parámetro. Siguiendo esta línea, se considera el problema de determinar en línea (es decir, en el tiempo $t \geq t_0$), de manera única, e instantánea o asintótica (es decir, después de un intervalo de tiempo $[t, \tau]$, $\tau < \infty$), el estado de la [planta \(1.1\)](#) $[x(t)]$ a partir de la tripleta de datos de entrada-salida-parámetro $[u(t), y(t), r]$ [\[Alvarez, 2000\]](#).

Una solución auxiliar del problema establecido [Alvarez, 2000] es el de suponer que se tienen disponibles las señales de las derivadas con respecto al tiempo de la entrada y la salida, y derivar sucesivamente con respecto al tiempo cada ecuación $y_i = h_i(x, r)$ ($i = 1, \dots, m$), de medición de la salida [Ec. (1.1b)], hasta un orden k_i , remplazando el término \dot{x} , resultante en cada derivación, por su correspondiente función vectorial f [Ec. (1.1a)], y de esta manera obtener un sistema algebraico variante en tiempo,

$$\phi_I[x(t), x_u(t), r] = x_y(t), \quad \dim \phi_I = \dim x_y = k, \quad k = k_1 + \dots + k_m, \quad k \leq n \quad (1.6a)$$

con el número máximo posible de k ecuaciones independientes acorde a la condición de rango

$$\text{rank } \partial_x \phi_I[x(t), x_u(t), r] = k, \quad \partial_x \phi_I := \partial \phi_I / \partial x \quad (1.6b)$$

y cuya solución para $x(t)$ cae en una superficie de dimensión $n - k$ variante en tiempo,

$$X(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid \phi_I[x(t), x_u(t), r] = x_y(t)\}, \quad \dim X(t) = n - k \quad (1.6c)$$

El mapa no-lineal ϕ_I y los vectores aumentados x_u y x_y de señales de entrada y salida, están dados por:

$$\phi_I(x, x_u, r) = [h_1, \dots, L_f^{(k_1-1)} h_1; \dots; h_m, \dots, L_f^{(k_m-1)} h_m]', \quad \dim \phi_I = k \leq n \quad (1.7a)$$

$$x_y = [y_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}; \dots; y_m, \dots, y_m^{(k_m-1)}]', \quad \dim x_y = k \leq n \quad (1.7b)$$

$$x_u = [u_1, \dots, u_1^{(n_1-1)}; \dots; u_p, \dots, u_p^{(n_p-1)}]', \quad \dim x_u = n_v \geq p, \quad n_v = n_1 + \dots + n_p, \quad \underline{n}_v = (n_1, \dots, n_p)' \quad (1.7c)$$

$$\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)', \quad k_o = \max(k_1, \dots, k_m), \quad k = k_1 + \dots + k_m, \quad k \leq n \quad (1.7d)$$

donde $L_g^{(i)} \alpha$ es la derivada de Lie, que se define como la i -ésima derivada direccional del campo escalar variante en tiempo $\alpha(x, t)$ a lo largo del campo vectorial variante en tiempo $g(x, t)$,

$$L_g^{(i+1)} \alpha = L_g[L_g^{(i)} \alpha], \quad i \geq 1, \quad L_g \alpha = (\partial_x \alpha)g + \partial_t \alpha, \quad L_g^{(0)} \alpha = \alpha$$

A los números enteros k_1, \dots, k_m se les llama grados de observabilidad y son únicos de una planta, lo cual se puede notar al ordenarlos en un orden decreciente; \underline{k} es el vector (o conjunto) de estos números; y al máximo de los grados de observabilidad (k_o) se le llama índice de observabilidad [Marino y Tomei, 1995]. Se puede notar que, el número entero n_i , que aquí se le llama grado de la i -ésima entrada, denota el número de derivadas requeridas $[u_i^{(0)}, \dots, u_i^{(n_i-1)}]$ de la i -ésima entrada para definir la superficie $X(t)$ y su valor depende del conjunto de grados de observabilidad (\underline{k}). Luego, a \underline{n}_v , aquí se le llama vector (o conjunto) de grados de las entradas.

Si a lo largo de la evolución de la planta $[E(t)]$ [Ec. (1.1d)], la condición de rango completo se satisface [Ec. (1.6b) con $k = n$], la solución del sistema algebraico (1.6a) (ϕ_I^{-1} es el mapa inverso del mapa ϕ_I con respecto a x),

$$x^*(t) = \phi_I^{-1}[x_y(t), x_u(t), r] = x(t), \quad X(t) = \{x^*(t)\}; \quad \phi_I^{-1}[\phi_I(x, x_u, r), x_u, r] = x$$

será el único elemento en la superficie $X(t)$ [Ec. (1.6c)], y será de dimensión cero. Desde otro punto de vista, este rasgo de solución única equivale a que el estado de la planta $x(t)$ se puede distinguir instantáneamente de sus puntos vecinos a partir de la tripleta $[u(t), y(t), r]$, en cualquier tiempo t , y ésto significa que, cada punto de la trayectoria de la planta [Ec. (1.1d)] es observable de forma local y débil [Hermann y Krener, 1977]. Se puede notar que, en este caso no está involucrada (no importa) la propiedad de estabilidad de la trayectoria de la planta [Ec. (1.1d)]. Por otro lado, dada la característica C^∞ de los mapas f y h , el mapa ϕ_I también lo es y su acotamiento es de tipo Lipschitz, lo cual implica que si surgen errores suficientemente pequeños en los datos de entrada-salida-parámetro $[\chi_u(t) - x_u(t), \chi_y(t) - x_y(t), \rho - r]$, se obtendrá un error pequeño $[\chi(t) - x(t)]$ en la solución del sistema (1.6a) de acuerdo a la siguiente desigualdad (M_u, M_y y M_r son constantes de Lipschitz):

$$|\chi(t) - x(t)| \leq M_u |\chi_u(t) - x_u(t)| + M_y |\chi_y(t) - x_y(t)| + M_r |\rho - r|, \quad \chi(t) = \phi_I^{-1}[\chi_y(t), \chi_u(t), \rho], \quad k = n \quad (1.8)$$

Entonces, se puede decir que el sistema (1.6a) es robusto con respecto a errores (suficientemente pequeños) en su tripleta de datos, lo que lleva a decir que la trayectoria de la planta es observable de forma local, débil y robusta.

Si a lo largo de la evolución de la planta $[E(t)]$ [Ec. (1.1d)], la condición de rango se satisface parcialmente [Ec. (1.6b) con $k < n$], la superficie $X(t)$ [Ec. (1.6c)] será de dimensión $n - k$, consistiendo (en el tiempo t) de un número infinito de puntos que son solución del sistema (1.6a). Este rasgo de soluciones múltiples equivale a que el estado de la planta $x(t)$ no se puede distinguir de sus puntos vecinos a partir de la tripleta $[u(t), y(t), r]$, en cualquier tiempo t . A estos puntos se les llama fuertemente indistinguibles (FI) [Hermann y Krener, 1977]. Luego, una misma tripleta de trayectorias de datos $[u(t), y(t), r]$ se puede llevar a cabo por un número infinito de trayectorias $\chi^*(t)$ [una para su correspondiente condición inicial $\chi^*(t_0) = \chi_0^* \in X(t_0)$] pertenecientes al conjunto X de trayectorias FI:

$$X[u(t), y(t), r] = \{\chi^*(t) = \theta_x[t, t_0, \chi_0^*, u(\cdot), r], t \geq t_0 \mid y(t) = h[\chi(t), r], \chi(t) \in X(t), \chi_0^* \in X(t_0)\} \quad (1.9)$$

Para salvar este problema, se recurre a la noción de observabilidad más débil de observabilidad local débil [Hermann y Krener, 1977], es decir, a la de observabilidad asintótica [Sontag, 1990] para ver la posibilidad de distinguir la trayectoria real de la planta $[x(t)]$ [Ec. (1.1d)] después de que haya transcurrido un cierto tiempo. Para lograrlo, se aumenta el sistema (1.6a), de k ecuaciones algebraicas, con $n - k$ ecuaciones diferenciales de la planta [Ec. (1.1a)] de tal forma que se obtenga un sistema algebraico-diferencial,

$$\dot{x}^* = f[x^*, u(t), r], \quad x^*(t_0) = x(t_0); \quad x^*(t) \in X(t) \quad (1.10a)$$

en el cual, si su trayectoria-solución única FI [se debe notar que el sistema parte de $x(t_0)$],

$$x^*(t) = \theta^*[t, t_0, x_0, x_u(t), x_y(t), r] = x(t) \quad (1.10b)$$

es estable, en el sentido que sea un atractor local asintótico del número infinito de trayectorias $\chi^*(t)$ FI, perteneciente al conjunto X [Ec. (1.9)], acorde a la desigualdad:

$$|\chi^*(t) - x(t)| \leq A_x |\chi_0^* - x_0| e^{-L_x(t-t_0)}, \quad \chi_0^* \in N(x_0) \subset X(t_0), \quad N(x_0) = \{\chi_0^* \in \mathbb{R}^n \mid |\chi_0^* - x_0| < \delta_0\}, \quad k < n$$

Entonces cualquier trayectoria $\chi^*(t) \in X$, pasado un cierto tiempo, se convergerá a $x(t)$. La amplitud (A_x) y la velocidad (L_x) de respuesta (de tipo exponencial) de esta convergencia [$\chi^*(t) \xrightarrow{E} x(t)$], estará determinada por la propiedad de estabilidad exponencial de la trayectoria $x^*(t)$ [restringida en $X(t)$], que coincide con la real. Además, dado que el mapa ϕ_1 es C^∞ , si la trayectoria $x^*(t)$ es estable de forma RE (Definición 1.1) entonces las trayectorias-solución FI,

$$\chi(t) = \theta^*[t, t_0, \chi_0, \chi_u(t), \chi_y(t), \rho], \quad \chi(t) \in \Xi(t), \quad \Xi(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid \phi_1[\chi(t), \chi_u(t), \rho] = \chi_y(t)\}, \quad k < n$$

del sistema algebraico-diferencial (1.10a) en su versión perturbada,

$$\dot{\chi} = f[\chi, u(t), \rho], \quad \chi(t_0) = \chi_0, \quad \chi(t) \in \Xi(t), \quad \chi_0 \in N(x_0), \quad k < n$$

convergerán de forma RE a la trayectoria real de la planta [$\chi(t) \xrightarrow{RE} x(t)$], acorde a la siguiente desigualdad:

$$|\chi(t) - x(t)| \leq A_x |\chi_0 - x_0| e^{-L_x(t-t_0)} + A_x [L_u \|\chi_u(t) - x_u(t)\| + L_y \|\chi_y(t) - x_y(t)\| + L_r |\rho - r|], \quad k < n \quad (1.11)$$

Por construcción, el conjunto FI $X(t)$ es invariante bajo el campo vectorial $f(x^*, u, r)$, es decir, cualquier trayectoria FI χ^* que nace en $X(t)$ permanece en $X(t)$; y de igual forma es $\Xi(t)$. Aunque la trayectoria-solución $x^*(t)$ coincida con $x(t)$ [$x^*(t) = x(t)$], sus propiedades de estabilidad no necesariamente coinciden, ya que $x^*(t)$ es la trayectoria restringida de $x(t)$ en $X(t)$: si $x(t)$ es estable de forma RE, $x^*(t)$ es estable de la misma forma; si $x(t)$ es estable de forma E, $x^*(t)$ puede ser estable de forma E o RE; y si $x(t)$ es inestable, $x^*(t)$ puede ser inestable, o estable de forma E o RE.

En resumen, si la condición de observabilidad de rango completo se satisface [Ec. (1.6b) con $k = n$], una perturbación pequeña en la tripleta entrada-salida-parámetro produce un error pequeño en el estado estimado [por medio del sistema algebraico (1.6)],

$$[v(t), \psi(t), \rho] = [u(t), y(t), r] \Rightarrow \chi(t) = x(t), \quad [v(t), \psi(t), \rho] \approx [u(t), y(t), r] \Rightarrow \chi(t) \approx x(t)$$

Si la condición de observabilidad de rango parcial se satisface [Ec. (1.6b) con $k < n$], con una trayectoria $x^*(t)$ [Ec. (1.10b)] estable de forma RE, una perturbación desvaneciente de forma RE en la tripleta entrada-salida-parámetro produce un error desvaneciente de forma RE en el estado [por medio del sistema algebraico-diferencial (1.10a)],

$$[v(t), \psi(t), \rho] = [u(t), y(t), r] \Rightarrow \chi(t) = x(t), \quad [v(t), \psi(t), \rho] \xrightarrow{RE} [u(t), y(t), r] \Rightarrow \chi(t) \xrightarrow{RE} x(t)$$

En otras palabras, la satisfacción de la condición de observabilidad con rango completo [Ec. (1.6b), $k = n$, $\dim X(t) = 0$], o parcial [Ec. (1.6b), $k < n$, $\dim X(t) > 0$], con una trayectoria FI $x^*(t) \in X(t)$ estable, es equivalente a la detectabilidad de la trayectoria de la planta [Ec. (1.1d)] con respecto a su tripleta (única) de datos de entrada-salida-parámetro $[u(t), y(t), r]$ [Sontag, 1990].

Lo expuesto arriba, se resume y concreta estableciéndose la siguiente definición de detectabilidad, base del presente trabajo.

Definición 1.3. La trayectoria $x(t)$ de la planta (1.1), con base en su tripleta (única) de datos entrada-salida-parámetro $[u(t), y(t), r]$, se dice que es detectable de forma RE si existe un vector de grados de observabilidad (único, en orden módulo),

$$\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)', \quad k_i \geq 1, \quad k = k_1 + \dots + k_m, \quad k \leq n, \quad k_0 = \max(k_1, \dots, k_m)$$

tal que, a lo largo de la evolución de la planta [E(t)] [Ec. (1.1d)] [el mapa ϕ_1 se define en la Ec. (1.7a)]:

(i) $\text{rank } \partial_x \phi_1[x(t), x_u(t), r] = k, \quad k \leq n.$

(ii) La trayectoria FI $x^*(t)$ [Ec. (1.10)] $\{x^*(t) \in X[u(t), y(t), r], \text{ [Ec. (1.9)]}\}$ es estable de forma RE.

(iii) El mapa

$$\varphi(x, x_u, v, r) = [L_f^{(k_1)} h_1, \dots, L_f^{(k_m)} h_m]', \quad v(t) = [u_1^{(n_1)}, \dots, u_p^{(n_p)}]', \quad \dim \varphi = m \quad (1.12)$$

es C^∞ .

Si $k = n$, la Condición (ii) se satisface trivialmente ya que $\dim X(t) = 0$; entonces, se dice que la trayectoria $x(t)$ de la planta (1.1) es observable de forma RE. De otra forma (si $k < n$), la trayectoria $x(t)$ de la planta (1.1) se dice que es detectable de forma RE con observabilidad parcial. ♦

Esta definición que se cumple para una trayectoria $x(t)$ particular, equivale a decir que se cumple para su tripleta única asociada $[u(t), y(t), r]$; correspondientemente, su conjunto \underline{k} [Ec. (1.7d)] de grados de observabilidad (único, en orden decreciente), su índice k_0 [Ec. (1.7d)] de observabilidad, su conjunto FI $X(t)$ [Ec. (1.6c)], y la estabilidad [Ec. (1.11)] de su trayectoria-solución $x^*(t)$ [Ec. (1.10)], son sus propiedades inherentes; las cuales son invariantes bajo cambios de coordenadas en estados y salidas, así como bajo retroalimentación de salidas [Besancon y Hammouri, 1996; Hermann y Krener, 1977; Isidori, 1995]. El estimador con mediciones diferenciales [Ec. (1.10a)], asociado a la definición precedente de detectabilidad, presenta el mas alto desempeño que se puede alcanzar con cualquier estimador que se construya y se sintonice apropiadamente. La propiedad C^∞ del mapa no-lineal φ [Ec. (1.12)] implica la robustez del mapa ϕ_1 [Ec. (1.7a)] y la del conjunto FI $X(t)$ [Ec. (1.6c)] con respecto a errores en la tripleta de datos de entrada-salida-parámetro, así como la posibilidad de asegurar la dominación de la retroalimentación no-lineal, potencialmente desestabilizante, que surge en el paso del precedente detector [Ec. (1.6a) o (1.10a)] a su contraparte implementable [Alvarez, 2000]. La

detectabilidad con observabilidad completa significa la posibilidad de diseñar un estimador con velocidad de convergencia ajustable, mientras que observabilidad parcial significa que la velocidad de convergencia sólo puede ser ajustada parcialmente [Besancon y Hammouri, 1996; Alvarez 2000]. En el último caso, la velocidad de aproximación hacia la superficie FI $X(t)$ [Ec. (1.6c)] se puede ajustar, y la evolución en esta superficie es fijada por sus dinámicas FI [Ec. (1.10)].

1.2.1 Planta en forma normal

A continuación, a la **planta no-lineal (1.1)**, considerada su trayectoria [Ec. (1.1d)] como detectable (Definición 1.3), se le lleva a una forma normal de dinámicas casi-lineales por medio de un cambio de coordenadas asociado a la propiedad de detectabilidad. En ello, se resalta la importancia y utilidad de la propiedad de detectabilidad de la planta en el diseño del estimador.

Para empezar, se considera a la entrada aumentada $x_u(t)$ [Ec. (1.7c)] como el estado dinámico de un sistema exógeno [Ec. (1.13a)] accionado por una entrada exógena acotada $[v(t)]$ [Ec. (1.1c), (1.12)]. Dicho sistema exógeno, añadido a la **planta (1.1)**, hace que ésta tome su siguiente versión aumentada (las matrices Γ_u , Π_u y Δ_u se definen en el Apéndice A):

$$\dot{x}_u = \Gamma_u x_u + \Pi_u v(t), \quad x_u(t_0) = x_{u0}; \quad y_u(t_k) = \Delta_u x_u(t_k), \quad u(t) = \Delta_u x_u(t) \quad (1.13a)$$

$$\dot{x} = f(x, \Delta_u x_u, r), \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_k) = h[x(t_k), r] \quad (1.13b)$$

Con base en argumentos de involutividad [Kravaris y Cantor, 1990; Alvarez, 2000], la condición de rango de la propiedad de detectabilidad (Definición 1.3, 1ª condición) garantiza la existencia de un mapa C^∞ (ϕ_Π), tal que, el cambio de coordenadas no-lineal C^∞

$$z = (z_u', z_I', z_{II}')' = [x_u', \phi_I'(x, x_u, r), \phi_{II}'(x, x_u, r)]', \quad \phi_\Pi(x, x_u, r) = [\phi_{k+1}, \dots, \phi_n]' \quad (1.14a)$$

$$\phi[x(t), x_u(t), r] = [\phi_I'(x, x_u, r), \phi_{II}'(x, x_u, r)]', \quad \text{rank } \partial_x \phi[x(t), x_u(t), r] = n, \quad (1.14b)$$

lleva a la **planta (1.1)** a la siguiente forma normal (ver Apéndice B):

$$\dot{z}_u = \Gamma_u z_u + \Pi_u v(t), \quad y_u(t_k) = \Delta_u z_u(t_k) \quad (1.15a)$$

$$\dot{z}_I = \Gamma_I z_I + \Pi_I \theta[z, v(t), r], \quad y(t_k) = \Delta_I z_I(t_k) \quad (1.15b)$$

$$\dot{z}_{II} = w[z, v(t), r], \quad \dim(z_u, z_I, z_{II}) = (n_v, k, n - k) \quad (1.15c)$$

Se puede notar que las **dinámicas (1.15a) y (1.15b)** son casi-lineales, con salidas no interactivas y lineales, en las cuales sus respectivos pares de matrices (Γ_u , Δ_u) y (Γ_I , Δ_I) son observables en un marco canónico de estimación lineal [Kwakernaak y Sivan, 1972]. En este sistema coordenado z , el conjunto

de puntos FI $X(t)$ [Ec. (1.6c)], la **dinámica** (1.10a) y la trayectoria-solución estable $x^*(t)$ [Ec. (1.10b)] están dados, respectivamente, por:

$$\Sigma(t) = \{z \in \mathbb{R}^{n+v} \mid [z_u(t), z_I(t)] = [x_u(t), x_y(t)]\} \quad (1.16a)$$

$$\dot{z}_{II}^* = w\{[z_u(t), z_I(t), z_{II}(t)], v(t), r\}, \quad z_{II}^*(t_0) = z_{II_0} \quad (1.16b)$$

$$z^*(t) = [z_u'(t), z_I'(t), z_{II}^*(t)]', \quad z^*(t) \in \Sigma(t) \quad (1.16c)$$

Las correspondientes desigualdades de error de estimación [Ecs. (1.8) y (1.11)] están dadas por:

$$|\zeta_u(t) - z_u(t)| \leq \delta_u, \quad |\zeta_I(t) - z_I(t)| \leq \delta_I, \quad |\rho - r| \leq \delta_r, \quad |\hat{v}(t) - v(t)| \leq \delta_v, \quad k \leq n \quad (1.17a)$$

$$|\zeta_{II}(t) - z_{II}^*(t)| \leq A_{II} e^{L_{II}(t-t_0)} + A_{II}(L_{z_u}^w \delta_u + L_{z_I}^w \delta_I + L_r^w \delta_r + L_v^w \delta_v), \quad k < n \quad (1.17b)$$

donde $\zeta_{II}(t)$ es cualquier trayectoria perturbada de $z_{II}^*(t)$,

$$z_{II}^*(t) = \theta_z^*[t, t_0, z_{II_0}, z_u(\cdot), z_I(\cdot), v(\cdot), r], \quad z_{II_0} = \phi_{II}(x_0, x_{u_0}, r)$$

$$\zeta_{II}(t) = \theta_z^*[t, t_0, \zeta_{II_0}, \zeta_u(\cdot), \zeta_I(\cdot), \hat{v}(\cdot), \rho], \quad \zeta_{II_0} = \phi_{II}(\chi_0, \chi_{u_0}, \rho), \quad |\chi_{u_0} - x_{u_0}| \leq \delta_{u_0}, \quad |\chi_0 - x_0| \leq \delta_{x_0}$$

A_{II} es la constante de amplitud, L_{II} es el parámetro de decaimiento exponencial, L_a^w es la constante de Lipschitz del mapa w [Ec (1.15c)] con respecto a su argumento 'a' ($= z_u, z_I, v, r$).

Luego, dados los pares de matrices observables $(\Gamma_{u/I}, \Delta_{u/I})$ y la no interactividad de las salidas lineales en las **dinámicas** casi-lineales (1.15a) y (1.15b), y la estabilidad de la **dinámica** no-lineal (1.15c), se puede vislumbrar un estimador por medio del cual la reconstrucción de z_u y z_I se podrá hacer con velocidad ajustada, y la de z_{II} se hará con una velocidad determinada por su propiedad de estabilidad RE [Ec. (1.17)].

1.3. Construcción del estimador

1.3.1 Vector de grados de estimación

Antes de diseñar el estimador, se debe tomar en cuenta el caso de que algunos renglones de la matriz de observabilidad $\partial_x \phi_I$ [Ec. (1.6b)] sean casi dependientes, lo que conlleva, como se podrá notar más adelante, a un mal condicionamiento numérico en la implementación del estimador. Por otro lado, se puede dar el caso de que los elementos de la matriz de observabilidad arrastren no-linealidades que la hagan compleja. Dado cualquiera o ambos de los casos, conviene hacer el diseño del estimador reteniendo únicamente los renglones bien condicionados y/o los menos complejos de dicha matriz [Alvarez y López, 1999]. Hacia el diseño del estimador, cabe hacer notar las siguientes dos puntos: (i) la utilización de todos los renglones de la matriz de observabilidad lleva a la construcción de un

estimador al que propiamente se le puede llamar detector, el cual, si existiese una aritmética perfecta, daría el óptimo desempeño; (ii) la utilización de algunos de los renglones de la matriz de observabilidad lleva a un juego en el diseño del estimador; donde el grado de libertad del que se parte es la elección de los renglones a utilizar, es decir, elegir los grados de observabilidad [Ec. (1.7d)] convenientes y admisibles bajo los cuales se satisfagan condiciones similares dadas en la **Definición 1.3**, de tal forma que posibiliten la reconstrucción del estado de la planta. Entonces, a continuación se introduce la definición de grados de observabilidad admisibles para la construcción de un estimador.

Definición 1.4. Sea la trayectoria $x(t)$ de la **planta (1.1)** detectable de forma RE (**Definición 1.3**), con base en su tripleta de datos $[u(t), y(t), r]$ y con un vector de grados de observabilidad $\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)'$. El conjunto $K(\underline{k})$, de vectores $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)'$ de grados de estimación (o grados de observabilidad admisibles), está dado por:

$$K(\underline{k}) = \{ \underline{\kappa} \mid \kappa_o = \max\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}, \quad \kappa_o \leq k_o, \quad \kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_m, \quad \kappa \leq k, \quad x^o(t) \in X^o(t) \supseteq X(t), \\ x^o(t) \text{ es estable de forma RE} \}$$

donde $X^o(t)$ y $x^o(t)$ se determinan a través de las **Ecs. (1.6), (1.7) y (1.10)**, reemplazando \underline{k} por $\underline{\kappa}$, y por terminología, $[X(t), x^*(t), \theta^*(\cdot)]$ por $[X^o(t), x^o(t), \theta^o(\cdot)]$ y $(\underline{n}_v, n_v, n_i)$ por (\underline{v}, v, v_i) . ♦

Luego, las **Ecs. (1.13) a (1.17)** valen para cualquier vector de grados de estimación $\underline{\kappa}$ y, por terminología, se agrega el superíndice o según corresponda; por ejemplo, las desigualdades correspondientes a la estabilidad RE de la trayectoria $x^o(t)$, en el sistema coordenado z , están dadas por la **expresión (1.17)** con \underline{k} reemplazando a \underline{k} ,

$$|\zeta_u(t) - z_u^o(t)| \leq \delta_u^o, \quad |\zeta_l(t) - z_l^o(t)| \leq \delta_l^o, \quad |p - r| \leq \delta_r, \quad |\hat{v}(t) - v^o(t)| \leq \delta_v^o, \quad \kappa \leq n \quad (1.18a)$$

$$|\zeta_{II}(t) - z_{II}^o(t)| \leq A_{II}^o |e_{II_0}^o| e^{-L_{II}^o(t-t_0)} + A_{II}^o (L_{z_u}^o \delta_u^o + L_{z_l}^o \delta_l^o + L_r^o \delta_r + L_v^o \delta_v^o), \quad \kappa < n \quad (1.18b)$$

El vector \underline{k} , de grados de observabilidad, está en el conjunto $K(\underline{k})$, y el vector \underline{v} , de grados de estimación de entradas, se determina por el vector $\underline{\kappa}$, de grados de estimación. De forma similar a la trayectoria-solución $x^*(t)$ [Ec. (1.10)], la trayectorias $x^o(t)$ y $x(t)$ coinciden [$x^o(t) = x^*(t)$] pero no sus propiedades de estabilidad. En **Alvarez (2000)**, la existencia de un vector $\underline{\kappa}$ de grados de estimación se denomina propiedad de estimabilidad, y abusando de la terminología, a $\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ se le llama conjunto de índices de observabilidad.

Por otro lado, una vez que se haya escogido el vector $\underline{\kappa}$, el mapa ϕ_{II} , que se requiere para completar el cambio de coordenadas, se puede obtener resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que involucran la matriz de estimabilidad $\partial_x \phi_I$ [Ec (1.6) con $\underline{\kappa}$ reemplazando a \underline{k}]; sin embargo, este procedimiento es tedioso o complicado o intratable [**Alvarez, 2000**]. El desarrollo de

procedimientos sistemáticos para encontrar el par $(\underline{\kappa}, \phi_{II})$ es una tema abierto de investigación que va más allá de los alcances del presente trabajo; aquí sólo es suficiente decir que, el escoger el par $(\underline{\kappa}, \phi_{II})$ es un grado de libertad en el diseño del estimador, da la posibilidad de alcanzar un mejor funcionamiento del estimador, y, en algunos casos de interés práctico, se facilita intuitivamente por el conocimiento y experiencia que se tenga del proceso en particular.

1.3.2 Estimador candidato en coordenadas z

Considerando que $\underline{\kappa}$ es un vector de grados de estimación en el sentido de la **Definición 1.4**, y que se tiene un mapa ϕ_{II} apropiado, a continuación se presenta la construcción del estimador. Luego, con $\underline{\kappa}$ reemplazando a \underline{k} , se toma la **planta aumentada Ec. (1.13)**, se aplica el **cambio de coordenadas (1.14)**, y se obtiene la planta aumentada **(1.15)**, en coordenadas z , con las siguientes dimensiones:

$$\dim(z_u, z_I, z_{II}) = (v, \kappa, n - \kappa), \quad \kappa \leq k, \quad z = (z_u', z_I', z_{II}')', \quad \dim z = n + v$$

Es importante notar que, por terminología, el vector z debería ser escrito como z° , pero esto no se hace por comodidad ya que, de aquí en adelante, se debe tener en cuenta que se está trabajando con un vector $\underline{\kappa}$ (el cual también puede ser \underline{k}).

Para tomar en cuenta la naturaleza discreta de las mediciones y tener un marco en el cual éstas puedan ser manejadas, se discretiza la **planta aumentada (1.15)** (con $\underline{\kappa}$ reemplazando a \underline{k}) por medio de su integración de t_k a t_{k+1} [las matrices de transición $\Omega_u(T)$ y $\Omega_I(T)$ se dan en el **Apéndice A**],

$$z_u(t_{k+1}) = \Omega_u(T)z_u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_u(t_{k+1}-\tau)\Pi_u v(\tau)d\tau, \quad y_u(t_k) = \Delta_u z_u(t_k) \quad (1.19a)$$

$$z_I(t_{k+1}) = \Omega_I(T)z_I(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_I(t_{k+1}-\tau)\Pi_I \theta[z(\tau), v(\tau), r]d\tau, \quad y(t_k) = \Delta_I z_I(t_k) \quad (1.19b)$$

$$z_{II}(t_{k+1}) = z_{II}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} w[z(\tau), v(\tau), r]d\tau, \quad \dim(z_u, z_I, z_{II}) = (v, \kappa, n-\kappa) \quad (1.19c)$$

Por el momento, se describe la **ecuación (1.19b)** en términos de un parámetro aproximado ρ de r :

$$z_I(t_{k+1}) = \Omega_I(T)z_I(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_I(t_{k+1}-\tau)\Pi_I \{\theta[z(\tau), v(\tau), \rho] + q_r[z(\tau), v(\tau), r, e_r]\}d\tau, \quad q_r[z, v, r, 0] = 0 \quad (1.20a)$$

donde $e_r = \rho - r$ y el mapa q_r se define en el **Apéndice A**. Si el error de modelado q_r (causado por el error paramétrico e_r) se aproxima por una constante en cada intervalo de tiempo,

$$q_r[z(t), v(t), r, e_r] \approx q_r(t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

la **ecuación discreta (1.20a)** toma la siguiente versión aproximada (la matriz P_I se da en el **Apéndice A**):

$$z_I(t_{k+1}) \approx \Omega_I(T)z_I(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_I(t_{k+1}-\tau)\Pi_I \theta[z(\tau), v(\tau), \rho] d\tau + P_I(T)z_m(t_k), \quad z_m(t_k) = q_r(t_k) \quad (1.20b)$$

El tercer término de la derecha de esta expresión sugiere la forma de introducir una acción de tipo integral para lograr un ajuste asintótico de estimación de la salida. En este trabajo, a dicha acción se le llama sumatorial.

La observabilidad de las parejas de matrices (Ω_u, Δ_u) y (Ω_I, Δ_I) de las **dinámicas (1.19a) y (1.19b)**, respectivamente, el esquema de compensación de errores persistentes de modelado sugerido por la **Ec. (1.20)**, y la estabilidad RE [vía **Ec. (1.18)**] de la **dinámica (1.19c)** sugieren considerar al siguiente procesador dinámico de datos:

$$\zeta_u(t_{k+1}) = \Omega_u(T)\zeta_u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_u(t_{k+1}-\tau)\Pi_u\hat{v}(\tau)d\tau + K_u[y_u(t_k) - \Delta_u\zeta_u(t_k)], \quad \psi_u(t_k) = \Delta_u\zeta_u(t_k) \quad (1.21a)$$

$$\zeta_I(t_{k+1}) = \Omega_I(T)\zeta_I(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_I(t_{k+1}-\tau)\Pi_I\theta[\zeta(\tau), \hat{v}(\tau), \rho]d\tau + K_p[y(t_k) - \Delta_I\zeta_I(t_k)] + P_I(T)\zeta_m(t_k) \quad (1.21b)$$

$$\zeta_{II}(t_{k+1}) = \zeta_{II}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} w[\zeta(\tau), \hat{v}(\tau), \rho]d\tau, \quad \psi(t_k) = \Delta_I\zeta_I(t_k), \quad \zeta = (\zeta_u', \zeta_I', \zeta_{II}') \quad (1.21c)$$

$$\zeta_m(t_{k+1}) = \zeta_m(t_k) + K_m[y(t_k) - \Delta_I\zeta_I(t_k)], \quad \dim(\zeta_u, \zeta_I, \zeta_{II}, \zeta_m) = (v, \kappa, m, n - \kappa) \quad (1.21d)$$

como un estimador candidato para la **planta aumentada (1.19)**, la cual es la versión discreta en coordenadas z , de la **planta aumentada (1.13)** (con $\underline{\kappa}$ reemplazando a \underline{k}) en coordenadas originales x . ρ es una aproximación de r , $\hat{v}(t)$ es una aproximación de $v(t)$, $(\zeta_u, \zeta_I, \zeta_{II}, \zeta_m)'$ es el vector de estados estimados (en-línea) de $(z_u, z_I, z_{II}, z_m)'$, ψ y ψ_u son los estimados de las señales de medición de la entrada (y_u) y de la salida (y), respectivamente. K_u, K_p y K_m son matrices de ganancias,

$$K_u = \text{bd}[k_1^u, \dots, k_p^u], \quad k_i^u = (k_{1,i}^u, \dots, k_{v,i}^u)' \quad (1.22a)$$

$$K_p = \text{bd}[k_1^p, \dots, k_m^p], \quad k_i^p = (k_{1,i}^p, \dots, k_{\kappa,i}^p)', \quad K_m = \text{bd}[k_{\kappa+1,1}^o, \dots, k_{\kappa+m,1}^o] \quad (1.22b, c)$$

cuya estructura de bloque diagonal (bd) se adopta de **Alvarez (2000)**, y sus elementos o ganancias se determinan en la siguiente subsección. Este estimador está conformado de dos observadores tipo Luenberger [**Ecs. (1.21a) y (1.21b, d)**], y un observador a lazo abierto [**Ec. (1.21c)**]. La función de los dos primeros es la de reconstruir a los estados z_u y z_I , con velocidad ajustable, a través de la inyección de errores de estimación de salida; y la del tercero, reconstruir el estado z_{II} . A este último no se le puede retroalimentar información; por lo tanto, su velocidad de estimación está determinada por la estabilidad de la trayectoria z_{II} [**Ec. (1.18b)**].

1.3.3 Parametrización de ganancias

Se puede observar que, la sintonización del estimador requiere de un procedimiento para obtener v ganancias [**Ec. (1.22a)**] que corresponden al observador de la entrada [**Ec. (1.21a)**], y $\kappa + m$ ganancias

[Ec. (1.22b, c)] que corresponden al observador de estados de la planta [Ec. (1.21b, d)]. Aprovechando la no interactividad de las señales de entrada (y_u) y salida (y), y la parte lineal de los observadores, en esta subsección se presenta un procedimiento sistemático para obtener el conjunto de matrices de ganancias $\{K_u, K_p, K_m\}$. Se hace en una forma parametrizada para que la sintonización sólo requiera mover un parámetro s_u para el observador de entrada, y un sólo parámetro s_o para el observador de estados, y que permitirá establecer, en la siguiente sección, las condiciones de convergencia del estimador.

Primero se introduce la matriz aumentada de estructura bd

$$K_o = \text{bd}[k_1^o, \dots, k_m^o], \quad k_i^o = [k_{1,i}^o, \dots, k_{\kappa_i+1,i}^o]' \quad (1.23)$$

que consiste de los elementos de las matrices de ganancias proporcional e integral [Ec. (1.22b, c)]. La observabilidad y la estructura bd de los pares de matrices (Ω_u, Δ_u) y (Ω_o, Δ_o) garantizan, respectivamente, la existencia de matrices de ganancias K_u y K_o tal que las matrices [las matrices $\Omega_u(T), \Omega_o(T), \Delta_u$ y Δ_o se dan en el Apéndice A]

$$A_u = \Omega_u(T) - K_u \Delta_u = \text{bd}[A_1^u, \dots, A_p^u], \quad A_i^u = \Omega_i^u(T) - k_i^u \delta_i^u \quad (1.24a)$$

$$A_o = \Omega_o(T) - K_o \Delta_o = \text{bd}[A_1^o, \dots, A_m^o], \quad A_i^o = \Omega_i^o(T) - k_i^o \delta_i^o \quad (1.24b)$$

son estables y cuyos conjuntos de polos $\{\gamma_{1,i}^u, \dots, \gamma_{v_i,i}^u\}$ y $\{\gamma_{1,i}^o, \dots, \gamma_{\kappa_i+1,i}^o\}$ pueden ser, independiente y arbitrariamente, asignados vía una selección conveniente de la ganancia k_i^u y k_i^o . Esto se puede hacer usando cualquier técnica estándar para filtros discretos de una salida [Kuo, 1992; Ogata, 1995]. De aquí que, el procedimiento directo de ajuste de coeficientes de polinomios característicos [Ogata, 1995] será empleado a continuación.

Siguiendo la construcción de las formas polinomiales característicos estándares (ITAE, binomial, Butterworth, etc) [D'Azzo y Houpis, 1981], basada en optimización (ITSE, ISTAE, ISTSE, etc), se escoge una frecuencia características de referencia ω_i^u para la i -ésima entrada, y una ω_i^o para la i -ésima salida, se escogen sus correspondientes factores de amortiguamiento $\{\xi_{1,i}^u, \dots, \xi_{v_i/2,i}^u\}$ y $\{\xi_{1,i}^o, \dots, \xi_{(\kappa_i+1)/2,i}^o\}$ (un factor de amortiguamiento para un par de polos complejos conjugados), se introducen un parámetro de escalamiento en tiempo s_u para las entradas, y uno s_o para las salidas ($s_u, s_o > 0$), para luego, asignar conjuntos de polos $\{\lambda_{1,i}^u, \dots, \lambda_{v_i,i}^u\}$ y $\{\lambda_{1,i}^o, \dots, \lambda_{\kappa_i+1,i}^o\}$ en el plano complejo s (propio de sistemas continuos) de la siguiente forma:

$$\lambda_{j \text{ y } j+1,i}^u = -s_u \omega_i^u [\xi_{j,i}^u \pm \sqrt{1 - (\xi_{j,i}^u)^2} i], \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, v_i/2 \quad \text{si } v_i \text{ es par}$$

$$\lambda_{v_i}^u = -s_u \omega_i^u \quad \text{si } v_i \text{ es impar} \quad (1.25a)$$

$$\lambda_{j \text{ y } j+1,i}^o = -s_o \omega_i^o [\xi_{j,i}^o \pm \sqrt{1 - (\xi_{j,i}^o)^2} i], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, (\kappa_i+1)/2 \quad \text{si } \kappa_i+1 \text{ es par,}$$

$$\lambda_{\kappa_i+1}^o = -s_o \omega_i^o \quad \text{si } \kappa_i+1 \text{ es impar} \quad (1.25b)$$

Dichos polos están en correspondencia con los discretos $\{\gamma_{1,i}^u, \dots, \gamma_{v_i,i}^u\}$ y $\{\gamma_{1,i}^o, \dots, \gamma_{\kappa_i+1,i}^o\}$. Luego, estos polos se mapean, involucrándose el tiempo de muestreo T , al interior del círculo unitario del plano complejo z (propio de sistemas discretos) [Kuo, 1992] por medio de:

$$Y_{j,i}^u = \exp(\lambda_{j,i}^u T), \quad j = 1, \dots, v_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (1.26a)$$

$$Y_{j,i}^o = \exp(\lambda_{j,i}^o T), \quad j = 1, \dots, \kappa_i+1, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.26b)$$

A partir de estos polos discretos, se obtienen los siguientes polinomios característicos:

$$\prod_{j=1}^{v_i} (Y - Y_{j,i}^u) = Y^{v_i} + c_{1,i}^u(s_u T) Y^{v_i-1} + \dots + c_{v_i,i}^u(s_u T) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\prod_{j=1}^{v_i/\kappa_i+1} (Y - Y_{j,i}^o) = Y^{\kappa_i+1} + c_{1,i}^o(s_o T) Y^{\kappa_i} + \dots + c_{\kappa_i+1,i}^o(s_o T) = 0, \quad i = 1, \dots, p/m$$

Por otro lado, los polinomios característicos de las matrices $A_i^{u/o}$ y $A_i^{u/o}$ [Ec. (1.24)] están dados por:

$$|I - A_i^u| = \gamma^{v_i} + d_{1,i}^u(k_i^u, T) \gamma^{v_i-1} + \dots + d_{v_i,i}^u(k_i^u, T) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$|I - A_i^o| = \gamma^{\kappa_i+1} + d_{1,i}^o(k_i^o, T) \gamma^{\kappa_i} + \dots + d_{\kappa_i+1,i}^o(k_i^o, T) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Igualando, de forma respectiva, los coeficientes de ambos polinomios característicos,

$$d_{1,i}^u(k_i^u, T) = c_{1,i}^u(s_u T), \dots, d_{v_i,i}^u(k_i^u, T) = c_{v_i,i}^u(s_u T)$$

$$d_{1,i}^o(k_i^o, T) = c_{1,i}^o(s_o T), \dots, d_{\kappa_i+1,i}^o(k_i^o, T) = c_{\kappa_i+1,i}^o(s_o T)$$

se obtienen, como la única solución de estas ecuaciones [Ogata, 1995], los v_i elementos del vector de ganancias k_i^u , y los κ_i+1 elementos del vector de ganancias k_i^o .

Una vez que los patrones de polos [Ec. (1.25)], uno para cada entrada y uno para cada salida, asociados respectivamente a las matrices A_u y A_o [Ec. (1.24)], se han asignado al plano complejo s [vía Ec. (1.25)], y mapeados [vía Ec. (1.26)] al plano complejo z , las ganancias k_i^u y k_i^o adquieren formas parametrizadas $k_i^u(s_u T)$ y $k_i^o(s_o T)$. Entonces, las matrices de ganancias K_u y K_o , y sus respectivas matrices compañeras A_u y A_o , también la adquieren [$K_u(s_u T)$, $A_u(s_u T)$; $K_o(s_o T)$, $A_o(s_o T)$]. Además, como consecuencia de la forma parametrizada de K_o , las matrices de ganancias K_p y K_m también son de forma parametrizada [$K_p(s_o T)$, $K_m(s_o T)$].

Luego, dada la estabilidad de las matrices $A_u(s_u T)$ y $A_o(s_o T)$, existen, respectivamente, para cada i -ésima entrada y para cada i -ésima salida, pares de números positivos (a_i^u, γ_i^u) y (a_i^o, γ_i^o) tales que, la k -ésima potencia de las matrices estables parametrizadas $A_i^u(s_u T)$ y $A_i^o(s_o T)$ [Ec. (1.24)] están acotadas de la siguiente manera [Rugh, 1996]:

$$|A_i^u(s_u T)|^k \leq a_i^u [\gamma_i^u(s_u T)]^k, \quad 0 < \gamma_i^u(s_u T) < 1, \quad \partial_{s_u T} \gamma_i^u < 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$[A_i^o(s_o T)]^k \leq a_i^o [\gamma_i^o(s_{u/o} T)]^k, \quad 0 < \gamma_i^o(s_{u/o} T) < 1, \quad \partial_{s_o T} \gamma_i^o < 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Consecuentemente, la k -ésima potencia de A_u y A_o se acotan como sigue:

$$[A_u(s_u T)]^k \leq a_u [\gamma_u(s_u T)]^k, \quad 0 < \gamma_u(s_u T) < 1, \quad \partial_{s_u T} \gamma_u < 0 \quad (1.27a)$$

$$[A_o(s_o T)]^k \leq a_o [\gamma_o(s_o T)]^k, \quad 0 < \gamma_o(s_o T) < 1, \quad \partial_{s_o T} \gamma_o < 0 \quad (1.27b)$$

donde

$$\gamma_u = \max(\gamma_1^u, \dots, \gamma_p^u), \quad a_u = \max(a_1^u, \dots, a_p^u); \quad \gamma_o = \max(\gamma_1^o, \dots, \gamma_m^o), \quad a_o = \max(a_1^o, \dots, a_m^o).$$

1.3.4 Estimador candidato en coordenadas originales χ

Como se muestra en el **Apéndice B**, cuando la aproximación $\hat{v}(t)$ de la entrada desconocida $v(t)$ se hace cero [$\hat{v}(t) = 0$], el **estimador candidato (1.21)** toma la siguiente forma en coordenadas originales χ :

$$\chi_u(t_{k+1}) = [\Omega_u(T)]\chi_u(t_k) + [K_u(s_u T)][y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)], \quad \psi_u(t_k) = \Delta_u \chi_u(t_k) \quad (1.28a)$$

$$\begin{aligned} \chi(t_{k+1}) = & \tau[t_{k+1}, t_k, \chi(t_k), v(\cdot), \rho] + G[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho]\{y(t_k) - h[\chi(t_k), \rho]\} \\ & + H[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho]\chi_m(t_k) + U[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho][y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)], \quad \psi(t_k) = h[\chi(t_k), \rho] \end{aligned} \quad (1.28b)$$

$$\chi_m(t_{k+1}) = \chi_m(t_k) + [K_m(s_o T)][y(t_k) - h(\chi(t_k), \rho)] \quad (1.28c)$$

donde τ es el mapa de transición con base en el modelo de la planta **[Ec. (1.1a)]**, es decir, proviene de la trayectoria solución

$$\chi^-(t) = \tau[t, t_k, \chi(t_k), v(\cdot), \rho], \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

de la ecuación diferencial

$$\dot{\chi}^- = f[\chi^-, v(\cdot), \rho], \quad \chi^-(t_k) = \chi(t_k), \quad v(t) = [\Delta_u \Omega_u(t-t_k)]\{\chi_u(t_k) + [\Omega_u(T)]^{-1}[K_u(s_u T)][y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)]\}$$

sobre el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1}]$, accionada por el estimado continuo en tiempo $v(t)$ de la entrada $u(t)$. G , H y U son matrices de ganancias no-lineales,

$$G(\chi, \chi_u, \rho) = [\Theta_I(\chi, \chi_u, \rho)][\Omega_I(T)]^{-1}K_p(s_o T), \quad [\Theta_I(\chi, \chi_u, \rho), \Theta_{II}(\chi, \chi_u, \rho)] = (\partial_x \phi)^{-1}$$

$$H(\chi, \chi_u, \rho) = [\Theta_I(\chi, \chi_u, \rho)][\Omega_I(T)]^{-1}P_I(T), \quad \dim G = n \times \kappa, \quad \dim H = n \times (n - \kappa)$$

$$U(\chi, \chi_u, \rho) = (\partial_x \phi)^{-1}(\partial_{x_u} \phi)[\Omega_u(T)]^{-1}K_u(s_u T), \quad \dim U = n \times p$$

Sólo para recalcar, el mapa no-lineal ϕ está dado por la **Ec. (1.14b)** con el vector $\underline{\kappa}$, de grados de estimación (**Definición 1.4**), reemplazando al vector \underline{k} , de grados de observabilidad (**Definición 1.3**); las matrices $\Omega_u(T)$, $\Omega_I(T)$ y $P_I(T)$ están dadas en el **Apéndice A**, las matrices de ganancias parametrizadas $K_u(s_u T)$, $K_p(s_o T)$ y $K_m(s_o T)$ están dadas por la **Ec. (1.27)** y por el esquema de asignación de polos de la subsección anterior. Por otra parte, en la **Ec. (1.28a)**, el estimado $\hat{v}(t)$ se hace cero con base en que

$lv(t)| \leq \varepsilon_v$ [Ec. (1.1c)]; mientras que, la dependencia de θ y w en \hat{v} [Ecs. (1.21b, c)], inducida por el cambio de coordenadas de x-a-z de la planta, desaparece cuando el **estimador (1.21)**, en coordenadas ζ , se lleva a las coordenadas originales χ [Ec. (1.28b)] (ver **Apéndice B**). Más aún, el cuarto término en el lado derecho de la **Ec. (1.28b)** se desvanece rápidamente, permitiendo que dicho término se pueda despreñar (en un sentido práctico) para la implementación del estimador.

Este estimador tiene los siguientes grados de libertad: el vector $\underline{\kappa}$ (**Definición 1.4**) de grados de estimación, el mapa complementario ϕ_{Π} [Ec. (1.14)] implicado en la construcción de las matrices no-lineales de ganancias (G, H, U), los patrones de polos [Ec. (1.25)] para cada matriz A_i^u y A_i^o . A_i^u y A_i^o son las matrices compañeras de los i-ésimos operadores L_i^u y L_i^o [Ec. (1.4)], respectivamente, de las **dinámicas en diferencias (1.5)** de los errores de estimación de las señales de entrada y de salida. Esto es,

$$\sigma[L_i^u] = \sigma[A_i^u(s_u T)], \quad i = 1, \dots, p; \quad \sigma[L_i^o] = \sigma[A_i^o(s_o T)], \quad i = 1, \dots, m$$

y consecuentemente, escoger el vector $\underline{\kappa}$ equivale a escoger los órdenes ($\kappa_1+1, \dots, \kappa_m+1$) de los operadores L_1^o, \dots, L_m^o [Eq. (1.4b)].

En formato estándar de predicción-corrección [Gelb, 1974], empleado en el diseño de filtros de Kalman para plantas continuas con mediciones discretas, el estimador [Ec. (1.28)] toma la siguiente forma

- Inicialización

$$\chi_u(t_0) = \chi_{u_0}, \quad \chi(t_0) = \chi_0, \quad \chi_m(t_0) = 0$$

- Predicción, con base en el modelo sobre el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1}]$

$$\dot{\chi}_u^- = \Gamma_u \chi_u^-, \quad \chi_u^-(t_k) = \chi_u(t_k)$$

$$\dot{\chi}^- = f[\chi^-, v(t), \rho], \quad \chi^-(t_k) = \chi(t_k), \quad v(t) = \Delta_u \chi_u^-(t)$$

- Corrección, con base en las mediciones hechas en el instante de tiempo $t = t_{k+1}$

$$\chi_u(t_{k+1}) = \chi_u^-(t_{k+1}) + K_u [y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)], \quad \psi_u(t_k) = \Delta_u \chi_u(t_k)$$

$$\chi(t_{k+1}) = \chi^-(t_{k+1}) + G[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho, K_p] \{y(t_k) - h[\chi(t_k), \rho]\} + H[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho] \chi_m(t_k)$$

$$\chi_m(t_{k+1}) = \chi_m(t_k) + K_m \{y(t_k) - h[\chi(t_k), \rho]\}, \quad \psi(t_k) = h[\chi(t_k), \rho]$$

1.4. Convergencia del estimador

En un marco local y robusto, en esta sección se analiza la estabilidad de la trayectoria correspondiente al error de estimación del **estimador (1.28)**, o lo que es lo mismo, pero en coordenadas

z, del **estimador (1.21)**. Esto es de utilidad para caracterizar la interacción que existe entre el tamaño del intervalo de muestreo, la magnitud de las ganancias y el funcionamiento del estimador.

1.4.1 Dinámicas de error de estimación

En coordenadas z, al restarle la planta aumentada [Ec. (1.19) con $\underline{\kappa}$ reemplazando a \underline{k}] al estimador candidato [Ec. (1.21)] se obtienen las siguientes dinámicas de error de estimación (la matriz I_o y los mapas no-lineales q_I, q_{II} y ω se definen en el **Apéndice A**):

$$e_u(t_{k+1}) = A_u e_u(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_u(t_{k+1}-\tau) \Pi_u e_v(\tau) d\tau, \quad t_{k+1} = t_k + T, \quad \mu(t_k) = \Delta_u e_u(t_k) \quad (1.29a)$$

$$e_a(t_{k+1}) = A_o e_a(t_k) + I_o \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega_I(t_{k+1}-\tau) \Pi_I q_I[z(\tau), v(\tau), r, e(\tau), e_v(\tau), e_r] d\tau, \quad \eta(t_k) = \Delta_o e_a(t_k) \quad (1.29b)$$

$$e_{II}(t_{k+1}) = e_{II}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega[z(\tau), e_{II}(\tau), v(\tau), r] d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} q_{II}[z(\tau), v(\tau), r, e(\tau), e_v(\tau), e_r] d\tau \quad (1.29c)$$

donde $[e = (e_u', e_I', e_{II}')]$ y la matriz de permutación P está definida en el **Apéndice A**,

$$e_u = \zeta_u - z_u, \quad e_a = P(e_I', \zeta_m')', \quad e_I = \zeta_I - z_I, \quad e_{II} = \zeta_{II} - z_{II}, \quad e_v = \hat{v} - v, \quad e_r = \rho - r, \quad \mu = \upsilon - u, \quad \eta = \psi - y.$$

Si $\hat{v}(t) = 0$, e_v tiene la misma cota de $v(t)$ [Ec. (1.1c)]. A consecuencia de la propiedad C^∞ del mapa ϕ [Ec. (1.12)], las perturbaciones q_I y q_{II} están acotadas, a lo largo de la trayectoria de la planta, de la siguiente manera (tipo Lipschitz):

$$|q_I(z, v, r, e, e_v, e_r)| \leq M_u |e_u| + M_I |e_I| + M_{II} |e_{II}| + M_v |e_v| + M_r |e_r|, \quad |e_v| \leq \varepsilon_v \quad (1.30a)$$

$$|q_{II}(z, v, r, e, e_v, e_r)| \leq N_u |e_u| + N_I |e_I| + N_v |e_v| + N_r |e_r|, \quad |e_r| \leq \varepsilon_r \quad (1.30b)$$

Al igual que en el caso de estimación con mediciones continuas [Alvarez, 2000], se considera a M,

$$M = M_I \text{ (si } \kappa = n), \quad M = M_I + M_R \text{ (si } \kappa < n), \quad M_R = (A_{II}^o / L_{II}^o) M_{II} N_I \quad (1.31)$$

como una medida del potencial efecto desestabilizante causado por la presencia del par de perturbaciones (q_I, q_{II}) en las dinámicas de error de estimación [Ecs. (1.29b, c)]. (A_{II}^o, L_{II}^o) es el par de factores de amplitud y decaimiento, respectivamente, correspondiente a la propiedad de estabilidad RE [Ec. (1.18)] de la trayectoria $x^\circ(t)$ [Ec. (1.22a)], restringida en la superficie $X^\circ(t)$ en coordenadas z° [Ec. (1.20) con \underline{k} reemplazado por $\underline{\kappa}$].

Cuando $(e_v', q_I', q_{II}') = 0$, las dinámicas de error de estimación [Ec. (1.29)] son estables de forma RG, y consecuentemente, la cuestión sobre la convergencia robusta de estimación radica en determinar si existen valores para $\{T, s_u, s_o\}$ y cómo sintonizarlos de tal forma que, la parte lineal estable RE pueda dominar a la parte no-lineal potencialmente desestabilizante.

1.4.2 Condiciones de convergencia

En el siguiente lema se dan condiciones suficientes para la convergencia robusta del estimador candidato [Ec. (1.28)].

Lema 1 (Prueba en el Apéndice C). Sea la trayectoria $x(t)$, de la planta no-lineal (1.1), detectable de forma RE (Definición 1.3), con un vector \underline{k} de grados de observabilidad. Entonces, el estimador (1.28) accionado por mediciones discretas, con un vector $\underline{\kappa} \in K(\underline{k})$ de grados de estimación (Definición 1.4), produce una secuencia $\{\chi(t_k)\}$ convergente de forma RG, con dinámicas cLNPA de error de estimación de salidas [Ec. (1.4)], siempre que el conjunto $\{T, s_u, s_o\}$ sea escogido de tal manera que $[\gamma_u$ y γ_o se definen en la Ec. (1.27)]:

$$\gamma_u(s_u T) < \gamma(a_o, s_o, M, T) < 1$$

donde

$$\gamma(a_o, s_o, M, T) = \gamma_o(s_o T) \gamma_p[a_o, \gamma_o(s_o T), M, T], \quad \gamma_p(a_o, \gamma_o, T, M) = e^{(a_o/\gamma_o)MTe^T}. \blacklozenge$$

Como se puede ver en la prueba del lema (Apéndice C), γ es la base G (ver Definición 1.2) de la desigualdad de la convergencia RG de las dinámicas de error de estimación [Ec. (1.29)]. La condición $\gamma = \gamma_o \gamma_p$ dice que, la velocidad de convergencia de la dinámica de error de salida (γ) consiste del producto de dos términos: uno convergente, $\gamma_o < 1$ que se puede hacer arbitrariamente pequeño sintonizando $s_o T$ suficientemente grande [ver Ec. (1.27b) y su parametrización de ganancias]; y uno potencialmente divergente, γ_p que crece con s_o dependiendo de los tamaños de T y M. La condición $\gamma_u < \gamma$ simplemente dice que, el observador de entradas [Ec. (1.28a)] debe ser sintonizado de tal forma que su convergencia sea más rápida que la del estimador de estados [Ec. (1.28b, c)]. Ya que $\gamma_p \rightarrow 1$ cuando $T \rightarrow 0$, la convergencia del estimador (1.28b, c) se puede alcanzar con valores suficientemente pequeños de T y suficientemente grandes de s_o . En el siguiente teorema se presenta la cuestión de qué tan grande puede ser el intervalo de tiempo de muestreo T, y cómo su elección afecta a la de s_o . Para establecer el teorema, algunas nociones se deben de introducir primero.

Sea $T^+(a_o M)$ la solución de la Ec (1.32a) que, acorde al Apéndice D, debe satisfacerse para γ de tal forma que ésta alcanza un valor máximo estrictamente positivo γ^* con un valor $s_o = s_o^*$ estrictamente positivo; y sea el par (s_o^-, s_o^+) de soluciones de la versión de igualdad de la desigualdad $\gamma < 1$ del Lema 1 [Ec. (1.32b): $\gamma = 1$]:

$$T^+ = \alpha_T(a_o M): \quad (a_o M)T^+ e^{T^+} = 1 \quad (1.32a)$$

$$s_o^{-/+} = \alpha^{-/+}(a_o M, T): \quad \gamma_o(s_o^{-/+} T) e^{[a_o M/\gamma_o(s_o^{-/+} T)]Te^T} = 1, \quad T \in (0, T^+) \quad (1.32b)$$

donde

$$\partial_M T^+ < 0, \quad \partial_T \alpha^- > 0, \quad \partial_T \alpha^+ < 0, \quad \partial_M \alpha^- > 0, \quad \partial_M \alpha^+ < 0 \quad (1.32c)$$

De estas expresiones uno obtiene los siguiente comportamientos límite de T^+ y $s_0^{-/+}$:

$$\lim_{M \rightarrow 0} T^+ = \infty, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} T^+ = 0; \quad \lim_{T \rightarrow T^+} s_0^{-/+} = s_0^*, \quad \lim_{T \rightarrow 0} s_0^- = s_0 > 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} s_0^{+/*} = \infty \quad (1.33)$$

Como consecuencia del **Lema 1** y de la precedente caracterización del par (T, s_0) , en el siguiente teorema se presentan los principales resultados de esta tesis doctoral: un conjunto de condiciones suficientes de convergencia robusta del estimador candidato [Ec. (1.28)], y la caracterización de la interacción que existe en la elección del tamaño del intervalo de muestreo y de las ganancias del estimador. Además de las condiciones del **Lema 1**, la limitación práctica del tiempo de cómputo (T_c) se incluye en el entendido que en la mayoría de los procesos químicos este periodo es considerablemente menor que el dominante (T_p) del proceso (p.ej., $T_c \ll T < T_p$).

Teorema 1 (Prueba en el **Apéndice D**). Sea la trayectoria $x(t)$, de la **planta no-lineal (1.1)**, detectable de forma RE (**Definición 1.3**), con un vector \underline{k} de grados de observabilidad. El **estimador (1.28)** accionado por mediciones discretas, con un vector $\underline{\kappa} \in K(\underline{k})$ de grados de estimación (**Definición 1.4**), produce una secuencia $\{\chi(t_k)\}$ convergente de forma RG, con dinámicas cLNPA de error de estimación de salidas [Ec. (1.4)], siempre que el conjunto $\{T, s_u, s_0\}$ sea escogido de tal manera que $[\gamma$ se define en el **Lema 1**]:

- (i) $T_c < T < T^+$, $T^+ = \alpha_T(a_0 M)$
- (ii) $s_0^- < s_0 < s_0^+$, $s_0^{-/+} = \alpha^{-/+}(a_0 M, T)$
- (iii) $\gamma_u(s_u T) < \gamma(a_0, s_0, M, T) \blacklozenge$

De acuerdo a la **Condición (i)**, existe un límite máximo (T^+) en la selección del tiempo de muestreo (T), y tal límite decrece con el tamaño M [Ec. (1.31)] del efecto desestabilizante inducido por las perturbaciones q_I y q_{II} en las dinámicas de error de estimación [Ec. (1.29)]. La **Condición (ii)** y las **Ecs. (1.32) y (1.33)** dicen que existe un intervalo (s_0^-, s_0^+) de valores admisibles para s_0 que dan estados estimados convergentes a los reales; que hay un valor de s_0 [$s_0 = s_0^* \in (s_0^-, s_0^+)$] para el cual la velocidad de convergencia es máxima, es decir, γ alcanza un mínimo γ^* ; que el tamaño del intervalo (s_0^-, s_0^+) decrece con el incremento del tamaño del intervalo de muestreo (T) y con el tamaño de M , y que, cuando T es igual a su límite máximo (T^+), el intervalo se colapsa en el punto s_0^* . Este último enunciado significa que, el tamaño del tiempo de muestreo (T) se debe escoger suficientemente menor a su límite T^+ a fin de tener un grado de robustez adecuado con respecto al esquema de sintonización. La **Condición (iii)** dice que las dinámicas de error de estimación de entradas se deben hacer más

rápidas que las de error de estimación de salidas. Comparando con el caso de mediciones continuas [Alvarez, 2000], la propiedad de alta ganancia se estropea debido a la pérdida de información entre intervalos de muestreo.

Una discusión formal en la forma de hacer cuantitativo el procedimiento de sintonizar el conjunto $\{T, s_u, s_o\}$ va más allá del alcance de este trabajo. Aquí, es suficiente mencionar que, una combinación de las desigualdades del **Lema 1** y **Teorema 1** con medidas de propagación de error y de detectabilidad RE presentadas en López y Alvarez (2002) debería llevar a un procedimiento numérico para determinar cuantitativamente el conjunto de límites $\{T^+, s_o^-, s_o^+\}$, sintonizar el conjunto $\{T, s_u, s_o\}$, y determinar la ganancia óptima s_o^* que produciría la convergencia más rápida (γ^*). La misma técnica debería permitir el diseño de un estimador con tiempos de muestreo adaptables o con diferentes frecuencias de muestreo, una para cada medición.

CAPITULO 2

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1:

ESTIMACIÓN DE UN REACTOR DE POLIMERIZACIÓN POR RADICALES LIBRES

En esta capítulo, se aplica la estrategia desarrollada en el primer capítulo, para diseñar un estimador de estados para una clase de reactores de homopolimerización por radicales libres en solución. Se toma el caso en el que, esta clase de reactores, de tipo tanque agitado y de operación en lote, sólo cuenta con mediciones discretas de densidad, y requiere de la estimación de la conversión y los pesos moleculares promedio para el monitoreo, en línea, de la velocidad de producción y de la calidad del polímero. De manera preliminar, como lo marca la estrategia, se muestra cómo se establece la posibilidad de construir un estimador a partir del análisis de detectabilidad de esta clase de reactores; luego, se muestra cómo se construye y se sintoniza el estimador. El funcionamiento del estimador se ilustra usando datos experimentales tomados de un estudio de estimación [Ellis y col., 1994] en el cual se usó el Filtro Extendido de Kalman.

2.1 La polimerización por radicales libres

Muchos polímeros comerciales son manufacturados con base en reacciones de polimerización por radicales libres; por ejemplo, polietileno de baja densidad, polimetilmetacrilato, poliestireno, polícloruro de vinilo, entre otros. Esto va aunado a que, de la industria petroquímica se obtienen grandes cantidades de monómeros para este tipo de reacciones.

Una polimerización por radicales libre es una reacción en cadena que, como su nombre lo indica, se inicia por radicales libres, los cuales son moléculas o partes de moléculas sin carga electrónica en donde uno o varios átomos tienen electrones de valencia dispares. Los electrones π del doble enlace de una molécula de monómero se juntan con los electrones π del doble enlace de otra molécula de monómero. Luego, todos los monómeros utilizados tienen al menos un doble enlace, por ejemplo, el metil metacrilato (MMA) cuya fórmula es $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)\text{COOCH}_3$.

Los reactores de polimerización por radicales han sido objeto de estudio en el desarrollo de técnicas de diseño de procesos, controles y estimadores. Esto es por sus características no-lineales que dificultan su control, el cual se complica, en la mayoría de los casos, por no contar con sistemas de monitoreo adecuados.

2.2 El reactor de polimerización y su problema de estimación

En vista del sistema experimental de [Ellis y col. \(1994\)](#), se considera una clase de reactores de tanque agitado, en operación lote e isotérmica, donde se lleva a cabo una homopolimerización vía radicales libres en solución. Este tipo de sistema presenta casi todas las características y peculiaridades de los reactores de polimerización:

- (i) la reacción es altamente exotérmica
- (ii) la conversión de monómero a polímero reduce el volumen libre de la mezcla reaccionante incrementándose su densidad y viscosidad, causando problemas de bombeo y mezclado.
- (iii) puede presentarse el efecto gel debido al incremento de la viscosidad.

Con base en mecanismos cinéticos de polimerización estándares [[Ellis y col., 1994](#), [Schuler y Sushen, 1985](#), [Alvarez y col., 1994](#), ver [Apéndice E](#)], las dinámicas del reactor están dadas por:

$$\dot{I} = -r_I(I, s, m) + I r_\varepsilon(I, s, m), \quad I(t_0) = I_0 \quad (2.1a)$$

$$\dot{s} = -r_s(I, s, m) + s r_\varepsilon(I, s, m), \quad s(t_0) = s_0 \quad (2.1b)$$

$$\dot{m} = -r_m(I, s, m) + m r_\varepsilon(I, s, m), \quad m(t_0) = m_0, \quad y_\rho(t_k) = \rho[m(t_k), W_T], \quad t_{k+1} = t_k + T \quad (2.1c)$$

$$\dot{\mu}_i = r_{\mu_i}(I, s, m) + \mu_i r_\varepsilon(I, s, m), \quad \mu_i(t_0) = \mu_i^0, \quad 0 \leq i \leq 2 \quad (2.1d)$$

donde

$$r_\varepsilon(I, s, m) = \varepsilon_m r_m(I, s, m) + \varepsilon_s r_s(I, s, m)$$

$$\rho(m, W_T) = \frac{W_T \rho_m^0}{W_T(1 - \varepsilon_m) + \rho_m^0(\varepsilon_s W_s / \rho_s^0 - \varepsilon_I W_I / \rho_I^0)} (1 - \varepsilon_m m), \quad W_T = W_I + W_s + W_m$$

donde I es la concentración del iniciador, s es la concentración adimensional del solvente, m es la concentración adimensional del monómero, μ_i es el i -ésimo momento de la distribución de longitud de cadena del polímero (DLC), $\rho_{I/s/m/p}^0$ es la densidad del iniciador/solvente/monómero/polímero, $\varepsilon_{I/s/m}$ ($\varepsilon_{I/s/m} = 1 - \rho_{I/s/m/p}^0 / \rho_p^0$) es el factor de contracción del iniciador/monómero/solvente, $W_{T/I/s/m}$ es la carga másica total/iniciador/solvente/monómero, r_I y r_s son las velocidades de descomposición de iniciador y de consumo de solvente, respectivamente, r_m es la velocidad de polimerización, r_{μ_i} es la velocidad de cambio del i -ésimo momento de la DLC, r_ε es la velocidad de cambio de la concentración de las especies debido al cambio en la densidad de la mezcla reaccionante, y_ρ es la medición de densidad, y las funcionalidades de r_I , r_m y r_{μ_i} se definen en el [Apéndice E](#).

El problema de estimación consiste en inferir la conversión de monómero a polímero (c) y los pesos moleculares promedio en número (M_n) y en peso (M_w) del polímero,

$$c(m, W_T) = [W_T/\rho(m, W_T) - W_m/\rho_m^0 - W_m/\rho_s^0 - W_I/\rho_I^0]/(W_m/\rho_p^0 - W_m/\rho_m^0) \quad (2.2a)$$

$$M_n(\mu_0, \mu_1) = M_m(\mu_1/\mu_0), \quad M_w(\mu_1, \mu_2) = M_m(\mu_2/\mu_1) \quad (2.2b, c)$$

Dichas variables a inferir son claves en el monitoreo de la velocidad de producción y de la calidad del producto. Ya que la conversión depende de la concentración del monómero (m), cuya dinámica está acoplada a la del iniciador (I) y a la del solvente (s), y ya que los pesos moleculares son una función de los momentos de la DLC (μ_0, μ_1, μ_2), el problema de estimación se traduce a estimar el conjunto completo de estados del reactor (I, s, m, μ_0, μ_1, μ_2).

En notación vectorial (compacta), el modelo del reactor (con su medición) toma la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x, r), \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_k) = \rho[x(t_k), r], \quad t_{k+1} = t_k + T \quad (2.3)$$

$$x = (I, s, m, \mu_0, \mu_1, \mu_2)', \quad r = (\rho_m^0, \rho_s^0, \rho_I^0, M_m, \dots)', \quad f(x, r) = (f_I, f_s, f_m, f_{\mu_0}, f_{\mu_1}, f_{\mu_2})'$$

2.3 Vector de grados admisibles de estimación

Del estudio de [Cervantes \(2000\)](#), para la misma clase de reactores pero con mediciones continuas, se tiene que:

- (i) cualquier trayectoria del reactor es RE-detectable con observabilidad parcial con un índice de observabilidad $k = 2$;
- (ii) Las trayectorias de los momentos de la DLC [$\mu_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)$] se encuentran en la superficie FI $X(t)$ [[Ec. \(1.6\), con base en el modelo \(2.1\) y con \$k = 2\$](#)];
- (iii) el mejor funcionamiento robusto se obtiene con grado de estimación igual a uno ($\kappa = 1$).

El mapa ϕ_I [[Ec. \(1.7\), con base en el modelo \(2.1\) y con \$\kappa = 1\$](#)] está dado por $\phi_I = \rho(m, W_T)$, cuya inversa para m es única ya que la densidad es una función estrictamente creciente o decreciente con respecto a m (p.ej., $\partial_m \rho < 0$ ó $\partial_m \rho > 0$). Si se escoge el mapa complementario $\phi_{II} = [I, s, \mu_0, \mu_1, \mu_2]'$, las dinámicas restringidas a la superficie $X^\circ(t)$ [[ver Definición 1.4: Ec. \(1.6\), con base en el modelo \(2.1\) y con \$\kappa = 1\$](#)] son:

$$[\dot{I}^*, \dot{s}^*, \dot{\mu}_0^*, \dot{\mu}_1^*, \dot{\mu}_2^*]' = [f_I, f_s, f_{\mu_0}, f_{\mu_1}, f_{\mu_2}]' [I^*, s^*, m = \rho^{-1}(y_\rho), \mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*]$$

En términos físicos, estas dinámicas son estables ya que no contienen la dinámica del monómero, la cual es la única fuente de inestabilidad debido al efecto gel; esto significa que la condición de estabilidad de la [Definición 4](#) siempre se satisface. La propiedad C^∞ del mapa $\varphi = (\partial_m \rho) f_m$ es consecuencia de los mapas C^∞ de las cinética; entonces, si $\partial_m \rho < 0$ ó $\partial_m \rho > 0$, cualquier trayectoria del reactor tiene a $\kappa = 1$ como un grado de estimación ([Definición 4](#)).

2.4 Construcción-sintonización del estimador

La construcción del estimador resulta de la aplicación directa de la Ec. (1.28), con base en el modelo del reactor [Ec. (2.1)] con $\underline{\kappa} = \kappa = 1$,

$$\chi(t_{k+1}) = \tau[t_{k+1}, t_k, \chi(t_k), \hat{r}] + \delta \{ [\partial_m \rho[\chi(t_k), \hat{r}]] [k_1^p(T, s_o)] [y_p(t_k) - \rho[\chi(t_k), \hat{r}]] + [\partial_m \rho[\chi(t_k), \hat{r}]] T \chi_m \} \quad (2.4a)$$

$$\chi_m(t_{k+1}) = \chi_m(t_k) + [k_1^p(T, s_o)] [y_p(t_k) - \rho[\chi(t_k), \hat{r}]], \quad \delta = (0, 0, 1, 0, 0)' \quad (2.4b)$$

Con las siguientes ganancias [Ecs. (1.22b, c) con $\kappa = 1$]

$$k_1^p = 2 \{ [1 - e^{-T \xi_p(s_o, \omega_o)}] \cos[T(s_o \omega_o)(1 - \xi^2)^{1/2}] \} \quad (2.5a)$$

$$k_2^p = \{ 1 + e^{-2T \xi(s_o, \omega_o)} - 2e^{-2T \xi(s_o, \omega_o)} \cos[T(s_o \omega_o)(1 - \xi^2)^{1/2}] \} \quad (2.5b)$$

resultantes de la sección de parametrización de ganancias del capítulo anterior. τ es el mapa de transición con base en el sistema diferencial (2.3), del modelo del reactor,

$$\dot{x}(t) = \tau(t, t_k, x_k, r): \quad \dot{x} = f(x, r), \quad x(t_k) = x_k$$

χ es el vector de estados estimados de \hat{x} , y \hat{r} es el conjunto de parámetros aproximados de r .

Considerando diseños recientes, de estimadores para reactores de polimerización con mediciones continuas [Alvarez y López, 1999], la frecuencia normalizada $\omega_o = 1/\tau_b$ se fija de acuerdo al tiempo característico τ_b de la respuesta de la densidad. La anterior condición de detectabilidad RE, el estimador (2.4) y su esquema de sintonización [Ec. (2.5)] valen para toda una clase de reactores de homopolimerización por radicales libres en operación en lote e isotérmica, sin importar el tamaño del reactor, el sistema monómero-iniciador-solvente y las condiciones iniciales. El caso de operación isotérmica y continua se puede abordar como una extensión directa de la presente estrategia [Alvarez y López, 1999; Cervantes, 2000].

2.5 Desempeño y funcionamiento del estimador

A continuación, se muestra la prueba a la que se sometió el estimador obtenido con datos experimentales extraídos del trabajo de Ellis y col. (1994). El sistema experimental consistió de una polimerización isotérmica (a 333 K), en lote, de metil-metacrilato, en el cual se utiliza etil acetato como solvente y azobis-iso-butiro-nitrilo (AIBN) como iniciador. Este sistema tuvo disponibles mediciones continuas de densidad, y discretas-retardadas de los pesos moleculares (con un intervalo de retardo-

muestreo de 25 min). Estas mediciones se muestran en la **Figura 1 (trayectorias-o)**. La construcción y sintonización del FEK de **Ellis y col. (1994)** se describe en un primer trabajo [**Ellis y col., 1988**], y el reporte del funcionamiento del FEK con la corrida experimental descrita arriba se puede ver en su segundo trabajo [**Ellis y col., 1994**]. Este FEK consistió de un modelo de 47 ecuaciones dinámicas que incluyen la DPM; fue implementado con mediciones discretas de densidad, con alta frecuencia de muestreo ($T_p = 0.5$ min), y de DPM, con bajas frecuencias de muestreo ($T_M = 25$ min); sus ganancias fueron ajustadas con una técnica usual de prueba y error; y su desempeño fue bueno. Para someter a una prueba más severa al estimador aquí propuesto, sólo se utiliza la medición de densidad con frecuencias menores de muestreo; las mediciones asociadas a los pesos moleculares sólo se usan para propósitos de comparación. Los datos de densidad para diferentes intervalos de muestreo fueron generados por medio de la interpolación de la secuencia de datos experimentales reportados en el trabajo de Ellis. De esta forma, en realidad uno debería comparar con el FEK de Ellis, de 27 ecuaciones dinámicas, que resultaría si sólo fuese usada la medición de densidad y el modelo no incluyese más que los momentos de la DPM.

El modelo del reactor fue equipado con constantes estándares de polimerización en masa, con constantes correspondientes a mecanismos de transferencia reportados por **Ellis y col. (1994)**, con parámetros de la expresión de densidad vs. conversión de la misma referencia, y no se hizo un ajuste adicional de parámetros. Estos parámetros se incluyen en el **Apéndice E**. En la **Figura 1** se presentan las predicciones del modelo (**trayectorias continuas**) (p.ej., estimador con ganancia cero), y su comparación con los datos experimentales (**trayectorias-o**). Se puede notar que el modelo sigue bien los pesos moleculares experimentales, significando que, en este caso, el modelo es suficientemente bueno de tal manera que usar mediciones de peso molecular no es tan necesario.

Empezando con la prueba del estimador, para fijar un primer tiempo de muestreo (T) razonable a utilizar, se observa la trayectoria experimental de densidad en la **Figura 1 (trayectoria-o)** identificándola con una respuesta exponencial de la cual se puede obtener un valor $\tau_b = 400\text{min}/4 = 100$ min de tiempo característico; considerando el criterio basado en el teorema de muestreo [**Kuo, 1992**], que dice “escoja el tiempo de muestreo de 1/10 a 1/20 del tiempo característico del proceso” [**Sthephanopoulos, 1984**], se escoge la opción de muestreo más frecuente: $T = \tau_b/20 = 5$ min. De acuerdo a esto, la frecuencia característica de referencia ω_o [**Ec. (2.2)**] se fija en $\omega_o = 1/\tau_b = 0.01$ min^{-1} , y el factor de amortiguamiento se fija en $\xi = 0.71$; de esta forma se sigue un patrón de polos tipo Butterworth asociado al observador estocástico óptimo limitante [**Alvarez y López, 1999**]. Con base en el diseño de estimadores lineales *dead-beat* de segundo orden [**Kwakernaak, 1972**], en los cuales la convergencia

puede ser alcanzada en tres etapas de muestreo, se fija a s_o de tal forma que $s_o\omega_o = 4/T \approx 1$ min, o equivalentemente, $s_o = 10$; esto concuerda con la heurística de estimación “el tiempo de convergencia del observador debe ser alrededor de diez veces menor que el del proceso” [Alvarez y López, 1999; Soroush, 1997]. En la Figura 1 se muestra el funcionamiento del estimador con la precedente selección $(T, s_o) = (5 \text{ min}, 10)$ (trayectorias- Δ) y, en la Figura 2 (trayectorias- Δ), con el tiempo de muestreo triplicado [p.ej., $(T, s_o) = (30 \text{ min}, 10)$]. Como era de esperarse, el estimador con el tiempo de muestreo más grande ($T = 30$ min) exhibe una menor velocidad de convergencia con mayor respuesta de error y un sesgo más grande. De todos modos, estas diferencias son pequeñas. Como puede verse en las trayectorias- Δ de las Figuras 1 y 2, la densidad y la conversión, ligadas a los estados de velocidad de reconstrucción ajustable $z_I = \rho(m)$, convergen rápidamente casi en dos etapas de muestreo; y como era de esperarse, los pesos moleculares promedio en número y en peso, ligados a los estados de velocidad de reconstrucción asintótico $z_{II} = (I, s, \mu_0, \mu_1, \mu_2)'$, no son afectados significativamente por el parámetro de sintonización s_o , pero el sesgo decrece con el tiempo de muestreo. Estas características de convergencia robusta concuerdan cualitativamente con las reportadas en un estudio reciente [Alvarez y López, 1999] de estimación, en una clase de reactores de polimerización continua con mediciones continuas. Con el criterio tipo *dead-beat* [p.ej., $(T, s_o) = (T, 4/\omega_o T)$], $\omega_o = 1/\tau_b = 0.01 \text{ min}^{-1}$], el estimador fue probado para varios tiempos de muestreo (T), que van desde 1 a 60 min; se encuentra que: (i) con $T=1$ min, el desempeño del estimador básicamente coincidió con el del caso de mediciones continuas; (ii) el incremento de T redujo la velocidad de convergencia e incrementó el sesgo; y (iii) todos los casos exhibieron una velocidad de convergencia tipo *dead-beat* (p.ej. en casi tres etapas de muestreo se observa convergencia).

Para probar el estimador en una situación más drástica (es decir con errores de modelado), la medición de densidad fue corrompida (trayectorias- \bullet en las Figuras 2 y 3) adicionando ruido uniformemente aleatorio, con una amplitud de ± 10 gr/l; esto significa cerca de 10 veces más que la desviación estándar de un densímetro comercial de baja resolución. El estimador se probó de nuevo con los dos tiempos de muestreo ($T = 5$ y 30 min) de la prueba anterior. Con $T = 5$ min, el estimador solamente convergió con valores de s_o en el intervalo ($s_o^- \approx 1, 5 \approx s_o^+$) (ver Teorema 1.1), y la convergencia más rápida con el sesgo más pequeño se obtuvo con $s_o = s_o^* \approx 4$, significando que éste es la ganancia óptima. Como se deduce del Teorema 1, esto corrobora la existencia de un intervalo- s_o [$(s_o^-, s_o^+) \approx (1, 5)$], con un valor óptimo ($s_o^* \approx 4$) que da la convergencia más rápida y, como era de esperarse, con el decremento de T , el valor de s_o^* se incrementa, al igual que el tamaño del intervalo (s_o^-, s_o^+). En la

Figura 3 se muestra el funcionamiento del estimador para $(T, s_0) = (5 \text{ min}, 4 \approx s_0^*)$ (**trayectorias- ∇**) y para $(T, s_0) = (5 \text{ min}, 6 > s_0^+)$ (**trayectorias-***). En el primer caso, las variables ligadas a los estados de reconstrucción con velocidad ajustable, convergen en unos 90 min (p.ej., nueve veces más lento que en el caso sin ruido de medición), y las variables ligadas a los estados de reconstrucción con velocidad asintótica convergen en alrededor de 120 min, o equivalentemente, en el mismo tiempo que en el caso de mediciones sin ruido. Esto es debido a que el ruido de medición no entra directamente en las dinámicas asintóticamente reconstruidas, y éstas filtran el ruido de las dinámicas rápidamente reconstruidas. En el segundo caso (p.ej., con $s_0 = 6$, arriba del límite superior $s_0^+ \approx 5$ para $T = 5 \text{ min}$), las variables reconstruidas asintóticamente convergen pero las reconstruidas rápidamente divergen. Esto es porque, con una alta ganancia, el ruido de medición afecta, gravemente, el estado reconstruido rápidamente, pero no los asintóticamente reconstruidos. Cuando el tiempo de muestro es $T = 30 \text{ min}$, los estados del estimador divergen para cualquier parámetro de sintonización s_0 , implicando que el intervalo (s_0^-, s_0^+) de ganancias admisibles es un conjunto vacío, corroborando el resultado mostrado en el **Teorema 1**. En la **Figura 2**, se muestra el funcionamiento del estimador con $(T, s_0) = (30 \text{ min}, 2)$ con ruido en las mediciones (**trayectorias- ∇**). En este caso, no hay RE-convergencia porque el tiempo de muestreo ($T = 30 \text{ min}$) rebasa su límite superior T^+ .

Resumiendo, la aplicación de la estrategia propuesta de estimación dio condiciones de resolubilidad con significado físico del problema de estimación, y procedimientos sistemáticos de construcción y sintonización del estimador deseado. Este problema de estimación incluye toda una clase de reactores de homopolimerización con mediciones discretas de densidad, operados en lote e isotérmicamente, y puede ser extendido fácilmente a reactores no isotérmicos, en operación semi-lote o continua. Los resultados de la implementación y del marco teórico concuerdan muy bien con las características y resultados de implementaciones recientes, en particular de observadores no-lineales con mediciones discretas [Mutha y col., 1997; Ellis y col., 1994] y, en general, de filtros y controles de plantas discretas [Nesic y col., 1999; Kuo, 1992; Palmor y Shinnar, 1979]. En comparación con los resultados de Ellis y col. (1994), el estimador que aquí se propone requiere considerablemente menos esfuerzo de construcción-sintonización, obteniéndose resultados de desempeño similares a cuando no se usan mediciones de peso molecular promedio. Como se menciona anteriormente, la estrategia propuesta debe ser tomada como un punto de partida para que el procedimiento de selección del tiempo de muestreo y de las ganancias sea cuantitativo y sistemático.

2.6 Figuras

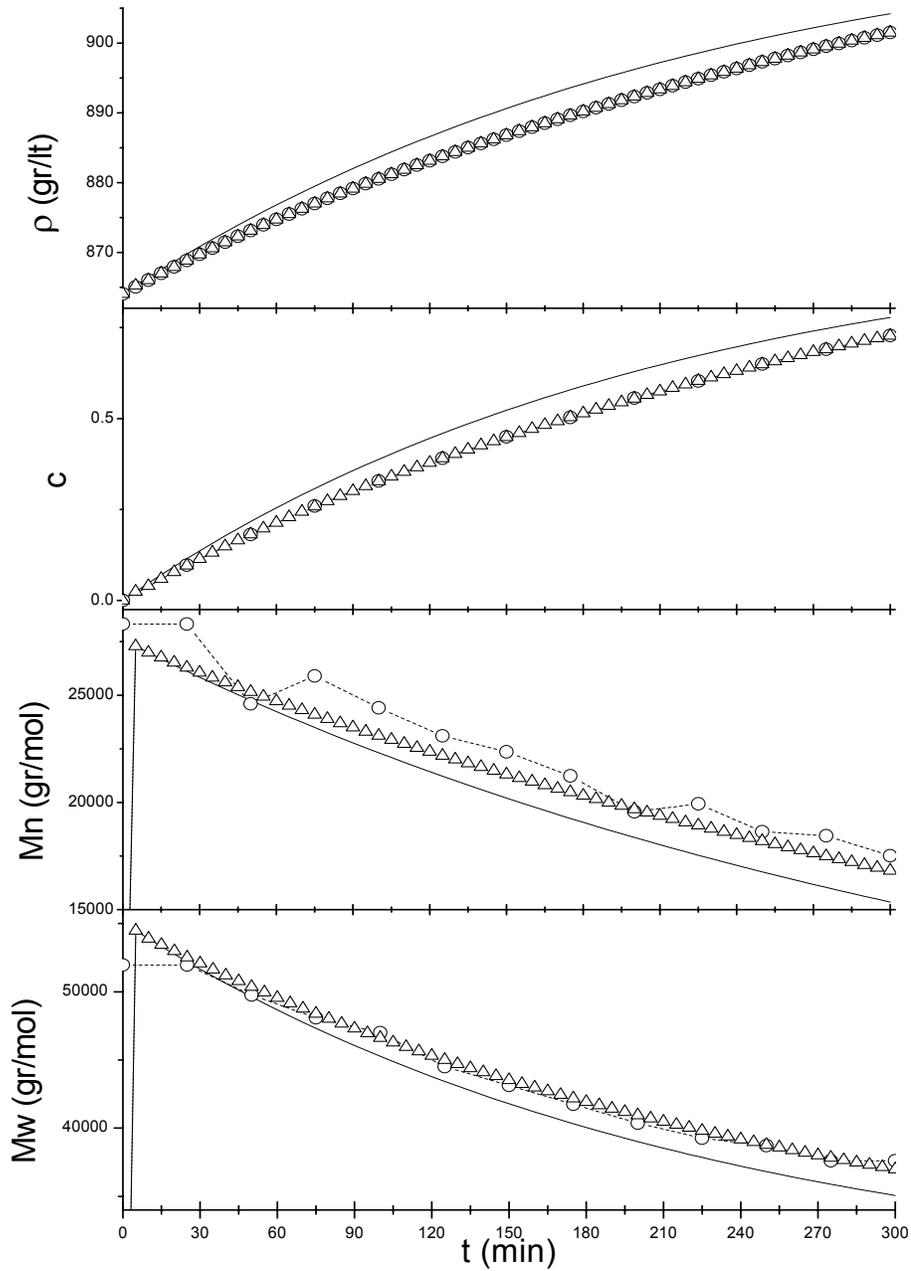


Figure 2.1. Desempeño del estimador con $(T, s_o)=(5 \text{ min}, 10)$:
(—) Predicción del modelo, (---○---) Datos experimentales [Ellis y col., 1994],
(---△---) Estimaciones

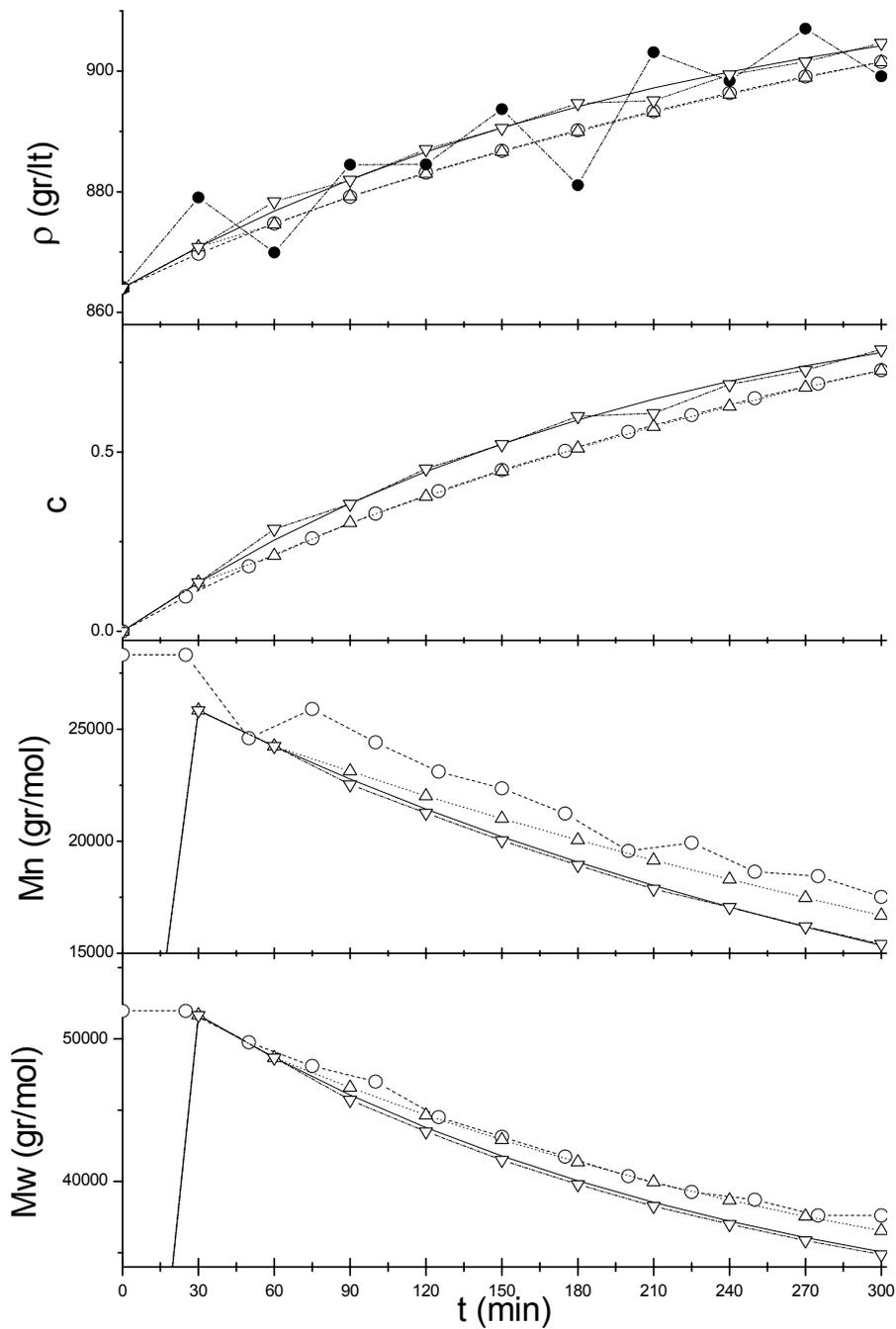


Figure 2.2. Desempeño del estimador con $T = 30$ min:
 (—) Predicción del modelo, (---○---) Datos experimentales [Ellis y col., 1994],
 (---△---) Estimaciones con $s_0 = 10$,
 (---●---) Mediciones con ruido, y (---▽---) Estimaciones con mediciones ruidosas ($s_0 = 2$).

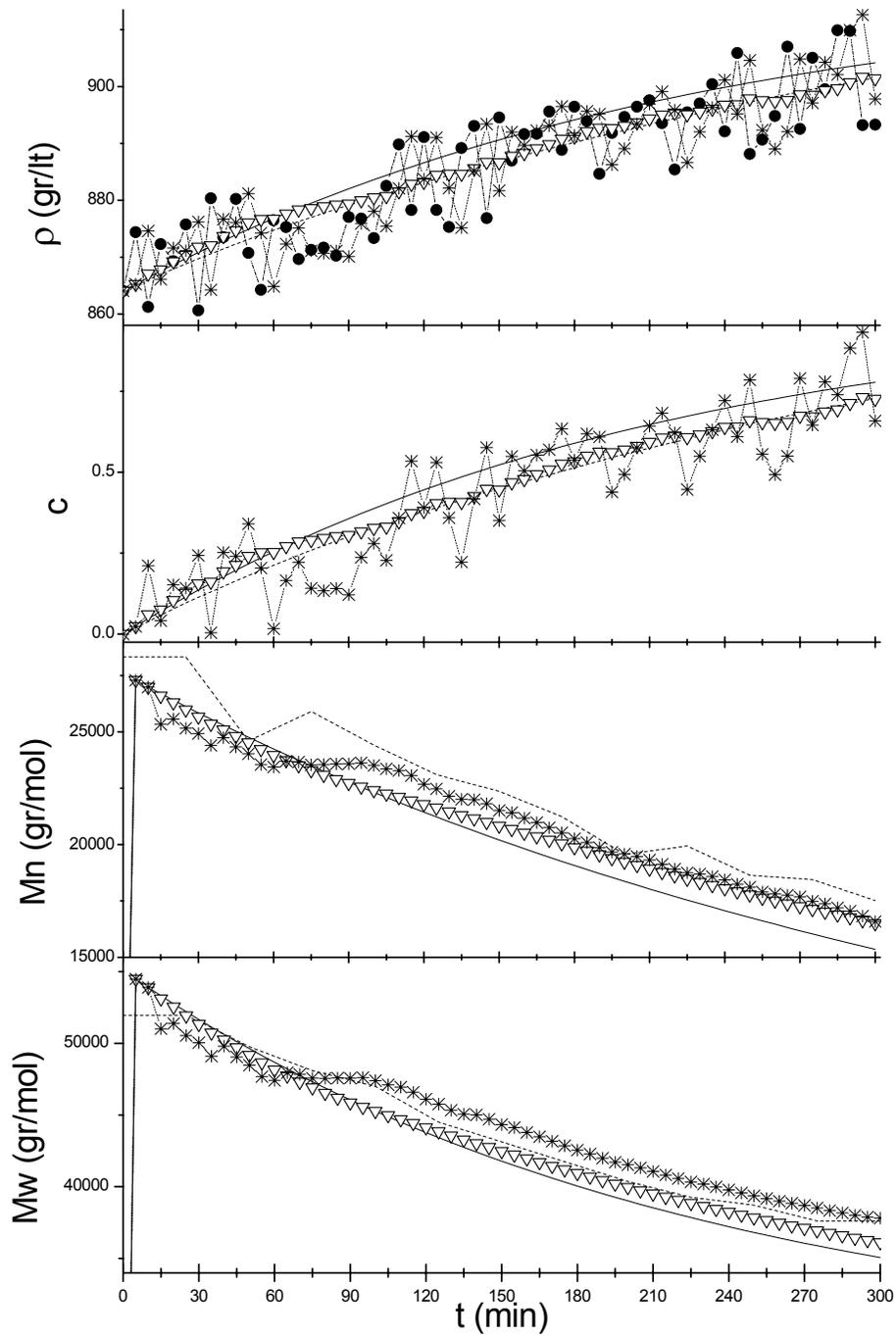


Figure 2.3. Desempeño del estimador con mediciones ruidosas (\bullet) y $T = 5$ min:
 (—) Predicción del modelo, (·····) Mediciones sin ruido,
 (▽) Estimaciones con $s_0 = 4$, (*) Estimaciones con $s_0 = 6$

CAPITULO 3
EJEMPLO DE APLICACION 2:
ESTIMACION EN UN REACTOR DE ALQUIDALES
CON MEDICIONES DISCRETAS-RETARDADAS

En este capítulo se presenta el diseño de un estimador de estados para un reactor de alquidales en el que se cuenta con mediciones discretas retardadas de viscosidad. El objetivo del estimador es el de estimar y predecir en línea conversión, viscosidad y peso molecular. La estimación y predicción de estas variables es importante en la supervisión, control y paro de la operación del reactor, de tal forma que se obtenga un máximo rendimiento y un producto con sus mejores propiedades de utilidad. Ya que la polimerización alquidámica implica una de polimerización compleja de ácidos grasos, el estimador se diseña con base en un modelo cinético simple, cuya constante cinética se asume como un parámetro variante a lo largo de la reacción y que refleja el efecto de dinámicas no modeladas y desconocidas. Se prueba que el parámetro es observable y entonces se ajusta en línea. Se muestra que la construcción y sintonización del estimador resulta de una extensión directa de la estrategia de estimación presentada en el [Capítulo 1](#), al igual que los criterios de convergencia. El funcionamiento y desempeño del estimador se ilustra con datos experimentales obtenidos de un reactor a escala industrial.

3.1 Los reactores de alquidales.

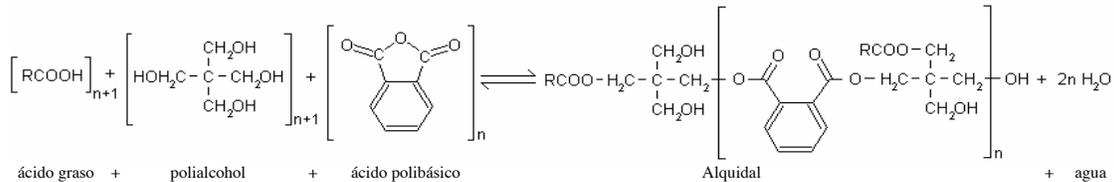
En la industria de las pinturas y recubrimientos arquitectónicos, las resinas alquidáticas son de gran importancia debido a que, además de poseer propiedades convenientemente útiles, tienen un bajo costo de producción. Con respecto a las propiedades útiles se puede decir que, estas resinas dan a las pinturas/recubrimientos buena resistencia mecánica y química, adherencia, retención de color y brillo. La producción industrial de las resinas alquidáticas se lleva a cabo en reactores de tanque agitado, operados en lote a temperatura constante, donde se lleva a cabo una polimerización de ácidos grasos. A lo largo de la reacción, el rendimiento y la calidad del producto se monitorean por medio de mediciones discretas-retardadas de conversión y viscosidad. Con base en estas mediciones, en conjunción con la experiencia del operador, la operación se corrige y se va previendo el momento de pararla. Particularmente, la previsión del momento de paro es importante para obtener conversión y viscosidad alta sin alcanzar, en un margen conveniente de seguridad, un punto crítico asociado con la gelación del producto polimérico frío. Aunque este esquema manual de monitoreo-control se emplea en muchos reactores industriales [[Ricardo, 2001 \(tesis de maestría\)](#)], una mejor operación requiere, entre otras

cosas: (i) mejorar y automatizar los esquemas manuales existentes de monitoreo-control, (ii) el desarrollo de nuevos sensores implementables en línea y de señales continuas que puedan ser correlacionadas con la conversión, viscosidad y peso molecular, y (iii) el desarrollo de esquemas de control robusto multivariable para seguir una trayectoria nominal de reacción (p.ej., viscosidad vs. conversión). En este capítulo, se aborda un problema relacionado al primer punto: la estimación y predicción en línea de conversión, viscosidad y peso molecular a partir de la medición discreta-retardada de viscosidad. De aquí en adelante, se distingue que el uso del término *estimación* se refiere exclusivamente a *estimación a tiempo presente* y el uso del término *predicción* se refiere exclusivamente a *estimación a tiempo futuro*.

A diferencia de los reactores de polimerización por radicales libres, que cuentan con esquemas avanzados (basados en modelos) de diseño de control [Alvarez, 1996, y sus referencias] y estimación [Alvarez, 2000, y sus referencias], y su modelación es un problema bastante estudiado [Ray, 1990], los reactores de alquidales parecen carecer de modelos apropiados y, más aún, de cualquier tipo de esquema avanzado de estimación y control. Ello se debe, principalmente, a que los problemas de entendimiento, tratabilidad y medición relacionados al desarrollo de un modelo apropiado de la cinética de la polimerización alquidálica no son sencillos. De hecho, los estudios cinéticos existentes [Flory, 1953; Lin and Hsieh, 1977; Aigbodion and Oikieimen, 1996] consisten en trabajos de laboratorio que dan por resultado modelos cinéticos simplificados y globales, no válidos en toda la reacción (sólo a bajas conversiones). Esto, a su vez, significa que el diseño industrial del proceso, del monitoreo y del control, y sus respectivas implementaciones, recae en una intensa actividad en pruebas de laboratorio, escalamiento y calibración en línea de modelos disponibles. Aparte de la inherente dificultad en tratar con mediciones discretas retardadas, la falta de modelos adecuados obstaculiza la aplicación directa de técnicas avanzadas de control [Alvarez, 1996] y estimación de estados [Alvarez, 2000] que se han probado en reactores de polimerización por radicales libres.

3.2 El problema de estimación

En un reactor alquidálico (Figura 3.1), ácidos grasos, ácidos polibásicos (varios grupos funcionales básicos) y polialcoholes, son polimerizados vía reacciones reversibles y endotérmicas de poliesterificación,



El reactor, de tanque agitado y operado en lote, está equipado con un sistema de condensación-decantación para remover el agua producida y así evitar el equilibrio de la reacción, favoreciendo el avance hacia el producto polimérico. A la carga del reactor se le adiciona una pequeña cantidad de solvente, que ayuda a la separación del agua arrastrándola en un vapor azeotrópico hacia el sistema de condensación-decantación en donde el agua se tira y el solvente se regresa al reactor. Al reactor se le suministra calor por medio de una chaqueta de calentamiento y la temperatura se mantiene constante a lo largo de la reacción por medio de un control convencional.

Las variables que determinan el avance de la reacción y la calidad del producto polimérico son la conversión de los grupos funcionales ácidos (**c**), conformados por los ácidos grasos y polibásicos, la viscosidad del producto polimérico frío y diluido (**v**) y el peso molecular promedio del producto polimérico (**m**). **c** y **v** se miden en una muestra de la mezcla reaccionante que se extrae en ciertos instantes de muestreo (t_j), y **m** se correlaciona con **c**. Sin embargo, a partir del momento de muestreo, la medición se obtiene después de un tiempo de inhibición, enfriamiento, dilución y análisis de la muestra (**D**); esto significa que las mediciones de **c**, **v** (y **m**) [denotadas por y_c , y_v (y y_m)], respectivamente], además de ser discretas, son retardadas,

$$y_c(t_j + D) = c(t_j), \quad y_v(t_j + D) = v(t_j), \quad y_m(t_j + D) = m(t_j), \quad t_j = t_{j-1} + D$$

A diferencia de la temperatura (**T**), cuya medición (y_T) se hace de forma continua [$y_T(t) = T(t)$] por medio de un termopar. Es necesario decir que la muestra de la mezcla reaccionante se enfría porque, a la temperatura del reactor, su viscosidad apenas cambia con la conversión, y se diluye porque su viscosidad es excesivamente grande para un viscosímetro industrial estándar. Por otra parte, en realidad la **v** que se mide es la de la mezcla reaccionante fría y diluida, pero en un sentido práctico se dice que **v** es la del polímero.

Los objetivos de operación consisten en seguir una trayectoria nominal de **v** vs. **c** y en parar la reacción a una **c** y **v** (**m**) lo más altas posibles sin llegar a sus puntos críticos asociados a la gelación del producto polimérico frío, cerca de la **c** total. Por lo tanto, en el transcurso del proceso, se va trazando una gráfica log-log de y_v vs. y_c y su tendencia, típicamente lineal, se va extrapolando para estimar y predecir, intuitivamente, con base en la experiencia de los operadores, la trayectoria real de **v** vs. **c**. De esta forma, se toman decisiones importantes en la operación del reactor: (i) corregir la

trayectoria del reactor adicionando ácidos grasos (pequeñas cantidades bastan) o manipulando el calor neto intercambiado; (ii) parar la reacción a una y_c y y_v suficientemente altas en un margen de seguridad, prevenido por el operador, debajo de sus valores críticos asociados al punto gel del producto polimérico frío. Es necesario recalcar que y_c y y_v van reflejando el estado del reactor en momentos de muestreo pasados. De este modo, el objetivo de la operación de lote-a-lote consiste en obtener un haz suficientemente delgado de trayectorias v vs. c que, alrededor de una nominal, son generadas por la inevitable presencia de perturbaciones en la carga y operación del reactor. Entonces, se puede decir que el radio del haz de trayectorias determina la variabilidad de las propiedades del producto final.

Aunque el monitoreo descrito arriba se usa y funciona, su dependencia en la experiencia del operador obstaculiza la posibilidad de su automatización y, en consecuencia, de implementar un control automático por retroalimentación de mediciones; todo esto en aras de una mejor operación del lote que produzca un mayor rendimiento y calidad de producto. De esta forma, se establece la necesidad de un esquema de monitoreo que no se base en la experiencia del operador.

Entonces, surge el problema de diseñar un procesador dinámico de las secuencias de mediciones discretas-retardadas de c y v ,

$$\{y_c(t_i)\} = \{y_c(t_1), y_c(t_2), \dots, y_c(t_i)\}, \quad \{y_v(t_i)\} = \{y_v(t_1), y_v(t_2), \dots, y_v(t_i)\}, \quad t_i = t_{i-1} + D$$

que produzca en línea, en cada instante de muestreo (t_i),

(i) estimaciones de $c(t_i)$, $v(t_i)$ y $m(t_i)$.

(ii) predicciones de $c(t_i+\tau)$, $v(t_i+\tau)$ y $m(t_i+\tau)$ sobre un horizonte de tiempo futuro ($t_i+\tau$, $\tau \geq 0$), alrededor del tiempo final (t_F) programado de la reacción.

En el planteamiento de este problema, se considera que el intervalo de tiempo que existe entre los instantes de muestreo es igual al tiempo D , de análisis de la muestra, es decir, en el mismo instante en que se obtiene y_c y y_v , de los correspondientes análisis de una muestra extraída en un instante de muestreo anterior, se extrae una nueva muestra para su análisis.

La estrategia a seguir en el diseño del procesador es recurrir a la técnica de estimación de estados con mediciones discretas presentada en el **Capítulo 1** la cual, al basarse en un modelo apropiado del reactor, prescinde de la experiencia del operador. Al procesador deseado de mediciones se le llama estimador.

3.3 Modelo del reactor

Antes de pensar en el diseño del estimador, se tiene la primera tarea de encontrar o desarrollar un modelo del reactor conveniente para ello. Tarea no fácil, ya que se carece de modelos cinéticos detallados debido a la complejidad de las materias primas y del mecanismo de polimerización, y en estudios cinéticos [Flory, 1953; Lin and Hsieh, 1977; Aigbodion and Okieimen, 1996], sólo se han propuesto modelos de velocidad de reacción simples, semiempíricos, de aparente segundo o tercer orden. En estas propuestas, se supone, idealmente, que todos los grupos funcionales del mismo tipo (ya sea ácidos o básicos, pero de diferente materia prima) son igualmente reactivos, que todos los grupos funcionales reaccionan independientemente de la longitud de cadena, que no hay reacciones laterales, y que las velocidades de reacción de reacciones elementales se pueden sumar en una sola velocidad global de reacción. Sin embargo, ninguna de las propuestas describe una trayectoria completa de reacción y sólo describen razonablemente bien trayectorias de reacción a bajas conversiones, lejos del punto crítico asociado a la gelación del polímero. Por otra parte, como puede verse en Ricardo (2001), algunas propiedades físico-químicas de las sustancias que intervienen en el proceso no son fáciles de determinar (p.ej., la capacidad calorífica del vapor solvente-agua), o como el reactor no es un sistema convencional de reacción, algunos flujos no son fáciles de medir (p.ej., el flujo de vapor-solvente en el sistema de condensación-decantación).

En este trabajo se adoptan las siguientes relaciones empíricas:

(i) un modelo de tercer orden de velocidad de reacción de grupos ácidos [Lin and Hsieh, 1977],

$$r(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e) = \mathbf{k}(1 - \mathbf{c})(c_e - \mathbf{c})^2 \quad (3.1a)$$

donde \mathbf{r} es la velocidad de reacción, \mathbf{c} es la conversión de los grupos funcionales ácidos, \mathbf{k} es la constante cinética y c_e es un parámetro constante.

(ii) una expresión de ν vs. \mathbf{c} [Fujita and Kishimoto, 1961], en una forma sugerida por la teoría de volumen libre,

$$\mu(\mathbf{c}, p_\mu) = a_\mu e^{b_\mu/(c_\mu - \mathbf{c})}, \quad p_\mu = (a_\mu, b_\mu, c_\mu)' \quad (3.1b)$$

donde p_μ es el conjunto de parámetros de la funcionalidad de viscosidad (μ).

(iii) una relación de \mathbf{m} vs. \mathbf{c} [Patton, 1962],

$$\eta(\mathbf{c}, p_\eta) = \frac{1 + a_\eta \mathbf{c}}{b_\eta + c_\eta \mathbf{c} + d_\eta \mathbf{c}^2}, \quad p_\eta = (a_\eta, b_\eta, c_\eta, d_\eta)' \quad (3.1c)$$

donde p_η es el conjunto de parámetros de la funcionalidad de peso molecular (η).

Como ya se mencionó, el modelo de velocidad de reacción adoptado [Eq. (3.1a)] no describe la trayectoria total de reacción; para forzar a que éste lo haga adecuadamente, se podría suponer que \mathbf{k} es un parámetro cambiante con el tiempo (t),

$$\mathbf{k}(t) = \kappa[\mathbf{c}(t), T(t), \mathbf{w}(t), p_k] \quad (3.2)$$

cuya variación depende, de alguna forma desconocida (κ es una función desconocida posiblemente no-lineal), en variables del reactor tales como la conversión (\mathbf{c}), la temperatura (T), así como de un número desconocido (n_w) de variables desconocidas (\mathbf{w}) (p.ej., relacionadas con la arquitectura del polímero, con fenómenos de difusión, etc.), y de parámetros desconocidos (p_k).

Considerando a \mathbf{k} como un nuevo y adicional estado del reactor, con base en la expresión (3.2), y combinando un balance de grupos funcionales ácidos con las expresiones (3.1) y con dinámicas desconocidas de \mathbf{k} , T y \mathbf{w} , se tiene el siguiente modelo del reactor y su procedimiento de medición:

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e), \quad \mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}_0; \quad \mathbf{y}_v(t_i) = \mu[\mathbf{c}(t_{i-1}), p_\mu], \quad t_i = t_{i-1} + D \quad (3.3a)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{f}_k[\mathbf{c}, \mathbf{k}, T, \mathbf{w}, \mathbf{u}(t), p_k], \quad \mathbf{k}(t_0) = \mathbf{k}_0 \quad \mathbf{y}_c(t_i) = \mathbf{c}(t_{i-1}) \quad (3.3b)$$

$$\dot{T} = f_T[\mathbf{c}, T, \mathbf{k}, \mathbf{u}(t), p_T], \quad T(t_0) = T_0; \quad \mathbf{y}_T(t) = T(t) \quad (3.3c)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{f}_w[\mathbf{c}, \mathbf{k}, T, \mathbf{w}, \mathbf{u}(t), p_w], \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0, \quad \dim \mathbf{w} = n_w \text{ (desconocido)} \quad (3.3d)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mu[\mathbf{c}(t), p_\mu], \quad \mathbf{m}(t) = \eta[\mathbf{c}(t), p_\eta]; \quad t \in [t_0, t_F] \quad (3.3e)$$

donde \mathbf{y}_v y \mathbf{y}_c son las mediciones discretas-retardadas de \mathbf{v} y \mathbf{c} , respectivamente, que se obtienen en cada instante de muestreo (t_i), con un periodo de análisis-retardo D , y que reflejan el estado del reactor en el instante de muestreo anterior (t_{i-1}). \mathbf{y}_T es la medición continua de la temperatura. t_0 es el tiempo inicial de reacción y t_F es el tiempo final programado del lote. f_k , f_T y f_w , al igual que κ [Ec. (3.2)], son funciones desconocidas posiblemente no-lineales donde p_k , p_T , y p_w representan sus correspondientes conjuntos de parámetros desconocidos, y \mathbf{u} representa el conjunto de entradas al reactor (p.ej., flujo de agua removida, flujo de calor suministrado, adición de ácidos grasos, etc.)

Como puede verse en Ricardo (2001), de un balance de energía, f_T tiene la siguiente forma:

$$f_T = \delta(p_T) \mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e) + Q[T, \mathbf{u}(t), p_T] \quad (3.4)$$

donde δ es la velocidad de decremento adiabático de temperatura (la reacción es endotérmica), la cual depende de un conjunto de parámetros térmicos (p_T) (p.ej., calor de reacción por unidad de conversión); y Q es la velocidad de cambio de temperatura por el calor neto intercambiado vía chaqueta de calentamiento y sistema de condensación-decantación, dependiente de la propia temperatura del reactor, un conjunto de entradas conocidas (p.ej., flujo de agua removida), y un conjunto de parámetros térmicos (p.ej., capacidad calorífica del vapor solvente-agua). Sin embargo, algunos de los parámetros

térmicos no son fáciles de determinar y, para no entrar en más complicaciones, se prefiere incluir la dinámica de T , identificada pero no-modelada, en el conjunto de dinámicas desconocidas. Por otra parte, la dinámica de \mathbf{k} [Ec. (3.3b)] se obtiene de la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (3.2),

$$\dot{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, T, \mathbf{w}, \mathbf{u}, p_{\mathbf{k}}) := L\kappa(\mathbf{c}, T, \mathbf{w}) = [\partial_{\mathbf{c}}\kappa][\mathbf{r}] + [\partial_T\kappa][f_T] + [\partial_{\mathbf{w}}\kappa][f_{\mathbf{w}}]$$

donde la derivada de Lie (L) se define en la Ec. (1.7).

Es necesario mencionar que la dinámica de \mathbf{c} [Ec. (3.3b)] no incluye los términos correspondientes a la adición (en una cantidad muy pequeña) de reactivos y a la remoción de agua para, respectivamente, corregir trayectoria de operación y evitar el equilibrio de la reacción [Ricardo (2001)]. Ello se debe a que estas entradas se pueden ver como perturbaciones, cuyos efectos están reflejados en \mathbf{k} y en su dinámica [Ec. (3.3b)]. De esta forma, se puede notar una conexión en cascada entre \mathbf{c} y los demás estados, excepto con \mathbf{k} .

3.4 Diseño del estimador

3.4.1 Resolubilidad del problema de estimación

Como paso obligado, que significa una condición necesaria hacia el diseño del estimador, se identifica la propiedad de detectabilidad [Definición 1.3] de las trayectorias de los estados del reactor $[\mathbf{c}(t), \mathbf{k}(t), T(t), \mathbf{w}(t)]$ con base en el modelo del reactor [Ec. (3.3)] y en las mediciones disponibles $[\mathbf{y}_{\mathbf{c}}, \mathbf{y}_{\mathbf{v}}, \mathbf{y}_T]$, las cuales se suponen continuas para este propósito.

Siguiendo el problema auxiliar de detectabilidad de la Sección 1.3, en este caso específico, se considera el problema auxiliar de determinar los estados del reactor, con base en su modelo, de las mediciones y sus derivadas temporales. Entonces, tomando derivadas de las ecuaciones de medición [Ecs. (3.3a, b, c)] se llega hasta el siguiente sistema algebraico variante en tiempo

$$\phi_{\mathbf{c}}[\mathbf{c}(t), p_{\mu}] = \mathbf{y}_{\mathbf{v}}(t), \quad \phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}, p_{\mu}) = \mu(\mathbf{c}, p_{\mu}) \quad (3.5a)$$

$$\phi_{\mathbf{k}}[\mathbf{c}(t), \mathbf{k}(t), c_e, p_{\mu}] = \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{v}}(t), \quad \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e, p_{\mu}) = [\partial_{\mathbf{c}}\mu(\mathbf{c}, p_{\mu})][\mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e)] \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{y}_{\mathbf{c}}(t_i) \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e) = \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{c}}(t) \quad (3.6b)$$

$$T = \mathbf{y}_T(t) \quad (3.7a)$$

Se puede notar que la temperatura se determina trivialmente, y como consecuencia de la relación \mathbf{v} vs. \mathbf{c} [Ec. (3.1b)], se puede observar que \mathbf{c} y \mathbf{k} se pueden determinar fácilmente tanto del sistema (3.5),

$$\mathbf{c}(t) = \sigma_c[\mathbf{y}_v(t), p_\mu], \quad \sigma_c(\mathbf{y}_v, p_\mu) = c_\mu - \frac{b_\mu}{y_v^*}, \quad y_v^* = \ln(\mathbf{y}_v/a_\mu) \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{c}(t) = \sigma_k[\mathbf{y}_v(t), \dot{\mathbf{y}}_v(t), c_e, p_\mu], \quad \sigma_k(\mathbf{y}_v, \dot{\mathbf{y}}_v, c_e, p_\mu) = \frac{\dot{\mathbf{y}}_v b_\mu y_v^*}{\mathbf{y}_v[(1-c_\mu)y_v^*+b_\mu][(c_e-c_\mu)y_v^*+b_\mu]^2} \quad (3.8b)$$

como del (3.6),

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{y}_c(t), \quad \mathbf{k}(t) = \dot{\mathbf{y}}_c(t)[1 - \mathbf{y}_c(t)]^{-1}[c_e - \mathbf{y}_c(t)]^{-2} \quad (3.9)$$

Esto significa que, sólo una medición puede ser usada (\mathbf{y}_v o \mathbf{y}_c) y que, cualquiera de los dos sistemas [Ec. (3.5) o (3.6)] prescinde de las dinámicas desconocidas T y w [Ec. (3.3c), (3.3d)] en la determinación de \mathbf{c} y \mathbf{k} , las cuales son las variables de interés. Por otra parte, se puede reconocer que existe una superficie no-observable,

$$W(t) = \{w \mid \phi[\mathbf{c}, \mathbf{k} = \kappa(\mathbf{c}, T, \mathbf{w}), p] = y_v(t)\}, \quad \phi = (\phi_c, \phi_k)', \quad y_v = (\mathbf{y}_v, \dot{\mathbf{y}}_v)', \quad p = (c_e, p_\mu)' \quad (3.10a)$$

ó

$$W(t) = \{w \mid [\mathbf{c}, \mathbf{r}[\mathbf{c}, \mathbf{k} = \kappa(\mathbf{c}, T, \mathbf{w}), c_e]]' = y_c(t)\}, \quad y_c = (\mathbf{y}_c, \dot{\mathbf{y}}_c)' \quad (3.10b)$$

donde se desenvuelven las dinámicas w desconocidas [sustituyendo Ec. (3.8) o (3.9) en la Ec. (3.3d)],

$$\dot{\mathbf{w}} = f_w[\mathbf{w}, \sigma_c(\cdot), \sigma_k(\cdot), T, \mathbf{u}(t), p_w], \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0, \quad \dim \mathbf{w} = n_w \text{ (desconocido)}$$

ó

$$\dot{\mathbf{w}} = f_w^*[\mathbf{w}, \mathbf{y}_c(t), \dot{\mathbf{y}}_c(t), T, \mathbf{u}(t), p_w], \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0, \quad \dim \mathbf{w} = n_w \text{ (desconocido)}$$

Ya que los mapas σ_c y σ_k son continuamente diferenciables con respecto a sus argumentos (es decir, son C^∞), las soluciones para \mathbf{c} y \mathbf{k} desde el sistema (3.8) se dice que son robustas en el sentido que, desviaciones suficientemente pequeñas en las mediciones $y_v = (\mathbf{y}_v, \dot{\mathbf{y}}_v)'$ y en los parámetros $p = (c_e, p_\mu)'$ producen errores pequeños en las soluciones de \mathbf{c} y \mathbf{k} . Estos errores están acotados de la siguiente forma:

$$\|\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}\| \leq L_{y_v^c}^c |y_v - \bar{y}_v| + L_p^c |p - \bar{p}|, \quad \|\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}\| \leq L_{y_v^k}^k |y_v - \bar{y}_v| + L_p^k |p - \bar{p}|; \quad y_v = (\mathbf{y}_v, \dot{\mathbf{y}}_v)', \quad p = (c_e, p_\mu)' \quad (3.11)$$

donde la barra superpuesta en las variables señala sus valores reales y $L_{y_v^c}^c, L_p^c, L_{y_v^k}^k$ y L_p^k son constantes de Lipschitz cuyas magnitudes, en un sentido local ($\mathbf{c} \approx \bar{\mathbf{c}}, \mathbf{k} \approx \bar{\mathbf{k}}$), están dadas por las derivadas parciales $\partial_{y_v^c} \sigma_c, \partial_p \sigma_c, \partial_{y_v^k} \sigma_k$ y $\partial_p \sigma_k$, respectivamente. Se puede notar que cuando $\mathbf{y}_v \rightarrow \mathbf{y}_v^\infty \ll \infty$ $\{\mathbf{y}_v^\infty = \mu(\mathbf{c} = 1, p_\mu)\}$, entonces $L_{y_v^c}^c, L_p^c \rightarrow 0$ y $L_{y_v^k}^k, L_p^k \rightarrow \infty$, y consecuentemente $\|\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}\| \rightarrow \infty$. Sin embargo, en un análisis más cuidadoso, se puede observar que cuando $\mathbf{y}_v \rightarrow \mathbf{y}_v^* \ll \mathbf{y}_v^\infty$, entonces $L_{y_v^k}^k, L_p^k \rightarrow 0$, y $\|\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}\| \rightarrow 0$. Al punto \mathbf{y}_v^* se le puede asociar el punto gel, pudiéndose concluir que cuando $\mathbf{y}_v < \mathbf{y}_v^*$, las soluciones \mathbf{c} y \mathbf{k}

son muy robustas, pero la robustez de la solución de \mathbf{k} se estropea cuando la viscosidad llega a dicho punto gel y se va más allá de él.

Con respecto a la robustez de las soluciones de \mathbf{c} y \mathbf{k} del sistema (3.6),

$$\|\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}\| \leq L_{y_c^c} |y_c - \bar{y}_c|, \quad \|\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}\| \leq L_{y_c^k} |y_c - \bar{y}_c| + L_c^k |c_e - \bar{c}_e|; \quad y_c = (\mathbf{y}_c, \dot{y}_c)' \quad (3.12)$$

se puede ver fácilmente que para \mathbf{c} siempre será robusta, sin embargo la robustez de \mathbf{k} , dominada por $\partial_c(r^{-1})$, es buena al principio y se va estropeando a lo largo de la reacción, de hecho, más rápido que para el caso del sistema (3.5). Más aún, la robustez de la predicción de viscosidad desde \mathbf{c} , a partir de la expresión (3.1b), se comporta de la misma manera,

$$\|v - \bar{v}\| \leq L_{\mu^c} \|\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}\| + L_{\mu^p} |p_{\mu} - \bar{p}_{\mu}|, \quad L_{\mu^c}, L_{\mu^p} \rightarrow \infty \text{ cuando } \mathbf{c} \rightarrow 1 \quad (3.13)$$

Por otra parte, debido a la naturaleza de la operación en lote o semilote del reactor, se puede decir que los errores que existen entre la trayectoria nominal $\bar{\mathbf{w}}$ de cualquier variable y sus perturbadas \mathbf{w} , en presencia de errores en sus dependencias, pueden crecer a lo largo de la reacción, a lo más, en la siguiente forma exponencial:

$$\|\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)\| \leq A_w e^{L_w(t-t_0)} \|\mathbf{w}(t_0) - \bar{\mathbf{w}}(t_0)\| + L_c \|\mathbf{c}(t) - \bar{\mathbf{c}}(t)\| + L_k \|\mathbf{k}(t) - \bar{\mathbf{k}}(t)\| + \dots \quad t \in [t_0, t_F] \quad (3.14a)$$

pero permanecen acotados, dependiendo de la duración del proceso,

$$\|\mathbf{w}(t) - \bar{\mathbf{w}}(t)\| \leq \varepsilon_w, \quad \varepsilon_w = A_w e^{L_w(t-t_0)} \|\mathbf{w}(t_0) - \bar{\mathbf{w}}(t_0)\| + L_c \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq t_F} \|\mathbf{c}(t) - \bar{\mathbf{c}}(t)\| \right\} + \dots \quad (3.14b)$$

En un sentido práctico, esto se puede equiparar al requerimiento de estabilidad de las dinámicas no-observables (ver Sección 1.3).

De las soluciones de los sistemas algebraicos (3.5), (3.6) y (3.7) y de su caracterización, aunada con la correspondiente caracterización de las variables desconocidas \mathbf{w} , se puede decir que existe la posibilidad de reconstrucción del estado del reactor (inclusive \mathbf{w} si éste fuese identificado); esto equivale a que, las trayectorias $[\mathbf{c}(t), \mathbf{k}(t), T(t), \mathbf{w}(t)]$ del reactor son detectables con observabilidad parcial (ver Definición 1.3) desde las mediciones \mathbf{y}_v o \mathbf{y}_c y \mathbf{y}_T . Se puede ver que la reconstrucción de las variables de interés (\mathbf{c} y \mathbf{k}) se puede hacer con una sola medición (\mathbf{y}_v o \mathbf{y}_c), prescindiendo de las dinámicas desconocidas de \mathbf{w} y aún mismo de T . De la caracterización de la robustez se puede ver que, la medición más conveniente a utilizar es la de viscosidad (\mathbf{y}_v). Lo anterior conlleva a una considerable reducción de trabajo en el análisis de las muestras de la mezcla reaccionante y a la eliminación de un esquema de estimación con información redundante.

3.4.2 Modelo del estimador

La propiedad de detectabilidad de las trayectorias del reactor permite reconstruir las variables de interés (\mathbf{c} y \mathbf{k}), y más aún, sus tendencias (derivadas temporales), despreciando las dinámicas desconocidas [Ec. (3.3d)] y no-modeladas [Ec. (3.3c)]. Entonces, con base en la propiedad de detectabilidad del reactor, se obtiene el siguiente modelo del reactor-medición factible a utilizar:

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e), \quad \mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}_0; \quad \mathbf{y}_v(t_i) = \mu[\mathbf{c}(t_{i-1}), p_\mu]; \quad t \in [t_0, t_F] \quad (3.15a)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{k}(t_0) = \mathbf{k}_0; \quad \mathbf{v}(t) = \mu[\mathbf{c}(t), p_\mu] \quad (3.15b)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = 0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{m}(t) = \eta[\mathbf{c}(t), p_\eta] \quad (3.15c)$$

en el cual se han ignorado las dinámicas no-modelada [Ec. (3.3c)] y desconocidas [Ec. (3.3d)] y se agrega la velocidad de cambio \mathbf{v} del parámetro \mathbf{k} (ahora estado), el cual es reconstruible desde la medición de viscosidad. Para reforzar este punto, note que el error entre el comportamiento descrito de \mathbf{k} , por este modelo y el real, con base en la Ec. (3.14), estará acotado a lo largo de la reacción,

$$|\mathbf{v}(t) - \bar{\mathbf{v}}(t)| \leq \varepsilon_v(t_F), \quad |\mathbf{k}(t) - \bar{\mathbf{k}}(t)| \leq \varepsilon_k(t_F); \quad t \in [t_0, t_F] \quad (3.16)$$

Por otro lado, la dinámica de la velocidad de cambio \mathbf{v} de \mathbf{k} se modela como constante por tramos, en el entendido que, en cada pequeñísimo intervalo de tiempo, a lo largo del proceso, esa constante será reconstruida.

Por conveniencia, el modelo del reactor [Ec. (3.15)] se rescribe en notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, c_e), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad t \in [t_0, t_F]; \quad \mathbf{x} = (\mathbf{c}, \mathbf{k}, \mathbf{v})', \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, c_e) = [\mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e), \mathbf{k}, 0]' \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_v(t_i) = \mu[\mathbf{x}(t_{i-1}), p_\mu], \quad t_i = t_{i-1} + D, \quad \mathbf{v}(t) = \mu[\mathbf{x}(t), p_\mu], \quad \mathbf{m}(t) = \eta[\mathbf{x}(t), p_\eta] \quad (3.17b)$$

3.4.3 Estimador

Una vez que la propiedad de detectabilidad del reactor se ha identificado y un modelo *utilizable* del reactor se ha establecido, se sigue con la construcción del estimador. Para tal efecto, primero se supone que la medición de viscosidad (ahora que se ha decidido como única medición) no es retardada y se procede con la aplicación directa de la Ec. (1.28), sin la acción sumatoria [Ec. (1.28c)]. De esta forma se obtiene un observador que funcionaría como un predictor a una etapa futura, cuyo término de corrección es accionado proporcionalmente por el error de estimación de salida $\{y(t_i) - \mu[\chi(t_i), \rho_\mu]\}$, donde χ es la estimación de \mathbf{x} y ρ_μ es el conjunto de aproximaciones de los parámetros p_μ . Luego, para que funcione como un predictor a etapa presente lo que se hace es retardar la secuencia de predicción

en una etapa, es decir, el intervalo de interés es $[t_{i-1}, t_i]$ y no $[t_i, t_{i+1}]$ y se modifica el término de corrección, reemplazando el error de estimación de salida instantáneo $\{y(t_i) - \mu[\chi(t_i), \rho_\mu]\}$ por el error de estimación de salida retardado $\{y(t_i) - \mu[\chi(t_{i-1}), \rho_\mu]\}$, equivalente a $\{v(t_{i-1}) - \mu[\chi(t_{i-1}), \rho_\mu]\}$. Una vez obtenido el observador, el cual produce una secuencia de estimaciones (a etapa presente), éste se extiende con el modelo del reactor [Ec. (3.17)] cuyas condiciones iniciales para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, en cada instante de muestreo, serán las estimaciones producidas por el observador. Entonces, el modelo se corre en cada instante de muestreo, desde ese mismo instante de muestreo sobre un horizonte de tiempo alrededor del tiempo programado de terminación del lote. De este modo, el estimador deseado toma la siguiente forma:

$$\chi(t_i) = \theta[t_i, t_{i-1}, \chi(t_{i-1}), \rho_e] + G[\chi(t_{i-1}), \rho_e, \rho_\mu, D, g]\{y(t_i) - \mu[\chi(t_{i-1}), \rho_\mu]\}, \quad t_i = t_{i-1} + D \quad (3.18a)$$

$$\chi(t_i + \tau) = \theta[t_i + \tau, t_i, \chi(t_i), c_e], \quad t_i + \tau \in [t_i, t_F^*], \quad t_F^* > t_F \quad (3.18b)$$

$$v(t) = \mu[\chi(t), \rho_\mu], \quad m(t) = \eta[\chi(t), \rho_\eta], \quad t \in [t_i, t_F^*] \quad (3.18c)$$

donde $\chi(t)$, $v(t)$ y $m(t)$ son, respectivamente, las estimaciones (con $t = t_i$)/predicciones (con $t = t_i + \tau$) del estado real del reactor (x), de la viscosidad del polímero (v) y del peso molecular promedio (m); ρ_e , ρ_μ y ρ_η son aproximados de los parámetros reales c_e , p_μ y p_η , respectivamente. θ es el mapa de transición del conjunto de ecuaciones diferenciales [Ec. (3.17a)] del modelo del reactor,

$$\dot{x} = f(x, c_e), \quad x(t_0) = x_0; \quad x(t) = \theta(t, t_0, x_0, c_e), \quad t \in [t_0, t_F^*]$$

G es la matriz de ganancias no-lineales y g es el vector de ganancias constantes, ambos dados por:

$$G(\chi, \rho_e, \rho_\mu, D, g) = [O(\chi, \rho_e, \rho_\mu)]^{-1} \Omega(D) g(D, \xi, \omega), \quad g = (g_1, g_2, g_3)'$$

donde

$$O(c, k, v, c_e, p_\mu) = \begin{bmatrix} \partial_c \phi_c & 0 & 0 \\ \partial_c \phi_k & \partial_k \phi_k & 0 \\ \partial_c \phi_v & \partial_k \phi_v & \partial_v \phi_v \end{bmatrix}, \quad \Omega(D) = \begin{bmatrix} 1 & D & D^2/2 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_c, \phi_k \text{ están definidas en Ec. (3.5),} \quad \phi_v = [\partial_c \phi_k(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e, p_\mu)][r(\mathbf{c}, \mathbf{k}, c_e)] + [\partial_k \phi_k(\mathbf{c}, c_e, p_\mu)]v$$

$$g_1(D, \xi, \omega) = 3 - 2e^{\xi\omega} \cos(\zeta\omega) - e^\omega, \quad \zeta = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \omega = -D\omega$$

$$g_2(D, \xi, \omega) = (1/2D)[3g_1(D, \xi, \omega) - 4 + e^{2\xi\omega} + 2e^{(\xi+1)\omega} \cos(\zeta\omega) + e^{(2\xi+1)\omega}]$$

$$g_3(D, \xi, \omega) = (1/D^2)[g_1(D, \xi, \omega) - 2 + e^{2\xi\omega} + 2e^{(\xi+1)\omega} \cos(\zeta\omega) - e^{(2\xi+1)\omega}]$$

donde ξ es el factor de amortiguamiento y ω es la frecuencia característica que determinan un patrón de polos estables (ver Sección 1.4.3).

De esta forma el estimador puede ser visualizado como un observador a lazo-cerrado [Ec. (3.18a)+(3.18c)], que produce las secuencias de estimaciones $\{\chi(t_i)\}$, $\{v(t_i)\}$ y $\{m(t_i)\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)

RG-convergentes (ver Definición 1.2) a las reales $\{x(t_i)\}$, $\{v(t_i)\}$ y $\{m(t_i)\}$; y como un observador a lazo abierto [Ec. (3.18a)+(3.18c)] que produce, en cada instante de muestreo (t_i), predicciones $\chi(t_i+\tau)$, $v(t_i+\tau)$ y $m(t_i+\tau)$ que se aproximan a las reales $x(t_i+\tau)$, $v(t_i+\tau)$ y $m(t_i+\tau)$. Los grados de libertad en el diseño del estimador son el tamaño del intervalo de muestreo-retardo (D) y los parámetros de sintonización (ξ , ω).

3.4.4 Convergencia

La convergencia del observador a lazo cerrado [Ec. (3.18a)+(3.18c)] se garantiza por una aplicación directa del Teorema 1.1 (en el Capítulo 1).

Con respecto al observador a lazo abierto [Ec. (3.18b)+(3.18c)], acerca del modelo del reactor [Ec. (3.15)] se puede deducir lo siguiente:

- (i) la trayectoria de \mathbf{c} es uniformemente estable [Slotine, 1993] ya que $\partial_{\mathbf{c}}\mathbf{r} < 0$ para todo el curso de la reacción, y se puede ver a \mathbf{k} y a \mathbf{v} como entradas exógenas a la dinámica de \mathbf{c} ,
- (ii) aunque las trayectorias de \mathbf{k} y \mathbf{v} crecen y no son estables, con base en la Ec. (3.16), se puede decir que estas trayectorias están acotadas y, por consecuencia, el error de predicción de estos estados también lo estará.

De cualquier forma, a pesar de la divergencia de las predicciones de \mathbf{k} y \mathbf{v} , la predicción de \mathbf{c} sí lo es y, ya que \mathbf{v} únicamente depende de \mathbf{c} [ver Ec. (3.1b)], se puede decir que las predicciones de las variables de interés son convergentes. Se debe mencionar que, el desempeño de las predicciones depende de su condición inicial, en cada instante de muestreo, es decir, el buen desempeño del predictor va ligado con el buen desempeño del estimador. Finalmente, es necesario recalcar que la relación \mathbf{v} vs. \mathbf{c} [Ec. (3.1b)] es demasiado sensitiva (en una forma más que exponencial) a los errores en la predicción de \mathbf{c} [ver Ec. (3.13)].

3.5 Implementación

3.5.1 Sistema experimental

Para probar el funcionamiento del estimador [Ec. (3.18)], se tomaron datos de una corrida de un reactor industrial en el cual se polimerizó, en lote a temperatura constante, ácidos grasos, anhídrido ftálico, glicerina y pentaeritritol. Por razones de confidencialidad, la composición detallada de la carga

inicial del reactor no se puede revelar (de todas formas no es necesario tal dato), y únicamente el curso final de la reacción se presenta, desde una conversión de 0.794. En este sistema de reacción, cada 20 min se extraía, se enfriaba, se diluía y se analizaba una muestra; obteniéndose viscosidad, conversión y peso molecular promedio con un retardo de 20 min. La medición (discreta-retardada) de viscosidad se alimentó, fuera de línea, al estimador [Ec. (3.18)], y las otras mediciones de conversión y peso molecular sólo se utilizaron para propósitos de comparación. De regresiones no-lineales previas, con base en datos experimentales de corridas pasadas de esta misma formulación de resina, los siguientes parámetros para las relaciones ν vs. c [Ec. (3.1b)] y m vs. c [Ec. (3.1c)] se obtuvieron:

$$\rho_{\mu} = (a_{\mu}, b_{\mu}, c_{\mu})' = (16.00433, 0.10493, 1.01388)'$$

$$\rho_{\eta} = (a_{\eta}, b_{\eta}, c_{\eta}, d_{\eta})' = (-0.32481, 0.00536, -0.00561, 0.00032)'$$

La aproximación del parámetro cinético c_e que se tiene es de $\rho_e = 1.1358$.

3.5.2 Funcionamiento del estimador

La conversión inicial del estimador se fijó igual a la experimental ($c_0 = 0.794$), el valor inicial de la constante cinética se fija igual a un valor típico de literatura ($k_0 = 0.0367 \text{ min}^{-1}$) [Lin y Hsieh, 1962], y el correspondiente a la velocidad de cambio de k se fija en cero ($v_0 = 0$). Se probó el estimador para diferentes valores de ξ y ω ; encontrándose que, para un $\xi = 0.71$ se obtiene un buen desempeño y que con $\omega = 4.5/200$ se obtiene el mejor desempeño.

En la Figura 3.2 se muestran los datos experimentales (trayectorias- \ominus), las predicciones del modelo (trayectorias continuas) sin ajuste y las estimaciones (trayectoria- \diamond). Suponiendo una medición frecuente de viscosidad ($D = 0.5 \text{ min}$), obtenida por interpolación de datos experimentales, se obtiene un desempeño de estimación (trayectorias---) que podría equipararse a uno con mediciones continuas. Retomando $D = 20 \text{ min}$, se puede observar que los estimados convergen adecuadamente en alrededor de tres etapas (60 min), y su desempeño no es muy diferente con el de la estimación con mediciones frecuentes, el cual sigue casi exactamente las trayectorias experimentales de conversión, viscosidad y peso molecular. Con respecto a k y a ν , se puede ver que sus estimaciones no siguen a las correspondientes con mediciones continuas; sin embargo, se puede decir que k se ha ajustado convenientemente para dar un buen desempeño, aunque al final falla. Sus efectos se pueden notar al final de la trayectoria de viscosidad, cuando se acerca al punto gel, donde las estimaciones parecen desviarse un poco. Con respecto a la conversión, se puede observar que el error de estimación de la estimación con mediciones frecuentes y el de mediciones discretas-retardadas no se pueden distinguir a

simple vista, sin embargo en la viscosidad esta imperceptible diferencia se amplifica, porque, como se mencionó, pequeñas variaciones en la conversión producen grandes variaciones de viscosidad, y esta variación crece cuando uno se acerca del punto gel, al final de la trayectoria.

Para obtener las mejores estimaciones, se hicieron varias corridas para diferentes valores de ξ y ω . Primero se puede decir que varios valores de ξ dan un desempeño similar. Para ω_{x200} , el rango de valores fue de 1 a 8. En la **Figura 3.3**, estimaciones para $\omega_{x200} = 3$ (trayectorias- ∇), 4.5 (trayectorias- \diamond) y 6 (trayectorias- \triangle), se muestran y se comparan con los datos experimentales (trayectorias- \otimes). El primer valor corresponde al umbral inferior de convergencia, en el sentido que para menores valores de ω no existe convergencia. Cuando el valor de ω_{x200} fue incrementado, a partir de 3, el desempeño del estimador fue bueno hasta con un valor de 4.5, después de este valor, el desempeño se deteriora. Cuando se llega a un valor de 6, se puede decir que corresponde al umbral superior de convergencia, en el sentido que para valores de ω mayores de 6 no existe convergencia. Esto corrobora los límites inferior y superior del parámetro de sintonización ω predichos por el **Teorema 1.1**.

En las **Figuras 3.4, 3.5 y 3.6**, se muestran las predicciones asociadas a una estimación con $\xi = 0.71$ y $\omega_{x200} = 4.5$. En la **Figura 3.4**, se muestran las predicciones que nacen desde los primeros cuatro instantes de muestreo ($t_i = 0, 20, 40, 60$ min). Para $t_i = 0, 20$ y 40 min el desempeño de predicción no es adecuado, así como el de estimación. Sin embargo, una vez que las estimaciones empiezan a converger (en $t_i = 60$ min), es decir, ya la conversión empieza a ser adecuadamente actualizada y los parámetros cinéticos k y v empiezan a ser ajustados, el desempeño de predicción es bueno. En la **Figura 3.5** se muestran las predicciones que nacen en los instantes de muestreo intermedios ($t_i = 80, 100, 120, 140$ min). Se puede observar que estas predicciones dan suficiente información para predecir el tiempo en el cual se alcanzará cierta viscosidad, conversión y peso molecular, o equivalentemente, para predecir el punto gel o para empezar a programar el tiempo de paro de la reacción. Finalmente, en la **Figura 3.6** se muestran las predicciones que nacen de los instantes de muestreo finales ($t_i = 160, 180, 200, 220$ min). En estos tiempos, las estimaciones tienen buena convergencia, aunque empieza a deteriorarse por su acercamiento al punto gel, implicando que las predicciones son suficientemente buenas.

3.6 Figuras

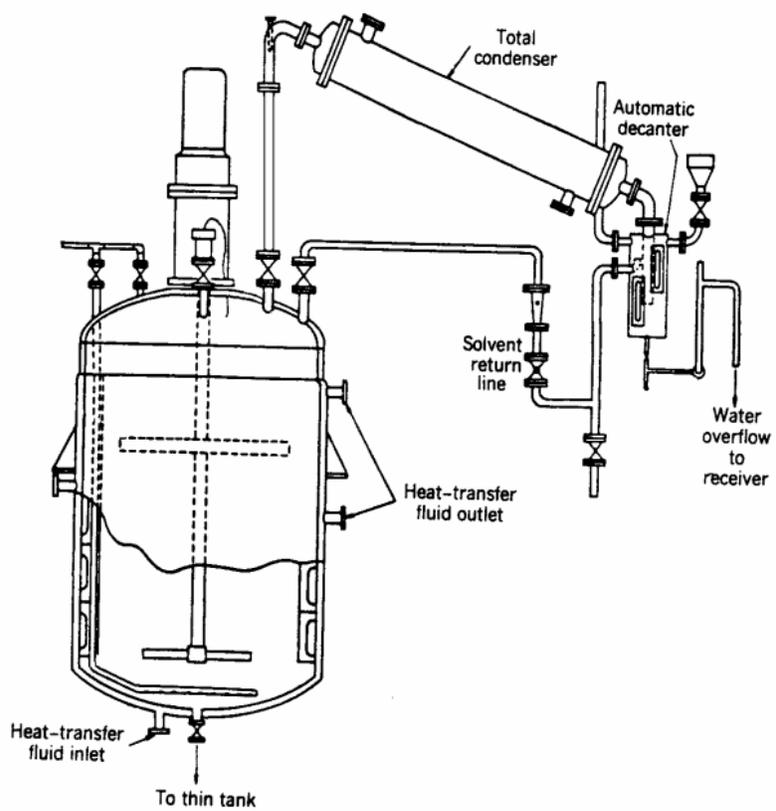


Figura 3.1. Reactor de alquidales

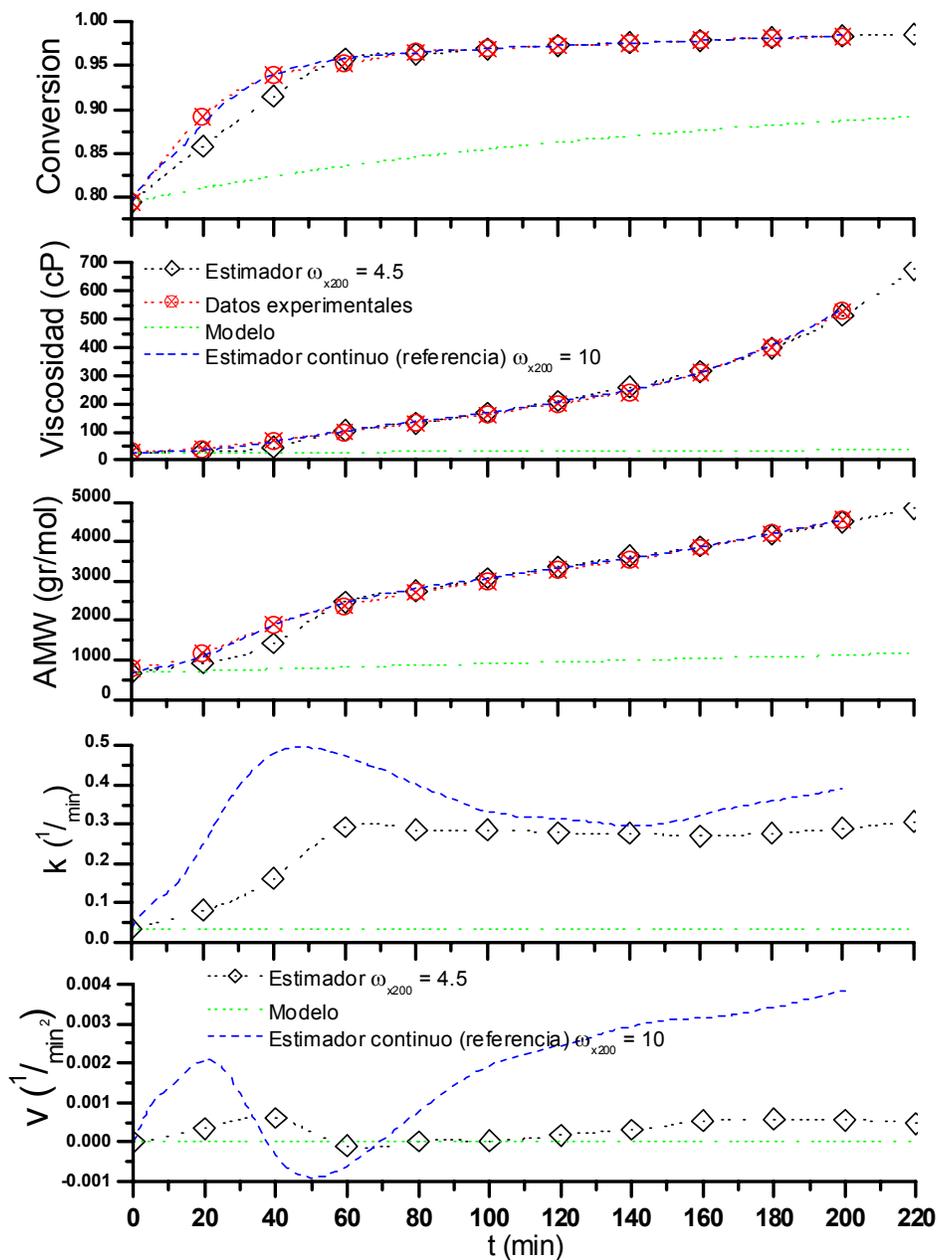


Figura 3.2. Desempeño del estimador para estimaciones a tiempo presente con $(D, \omega_{x200}) = (20 \text{ min}, 4.5)$

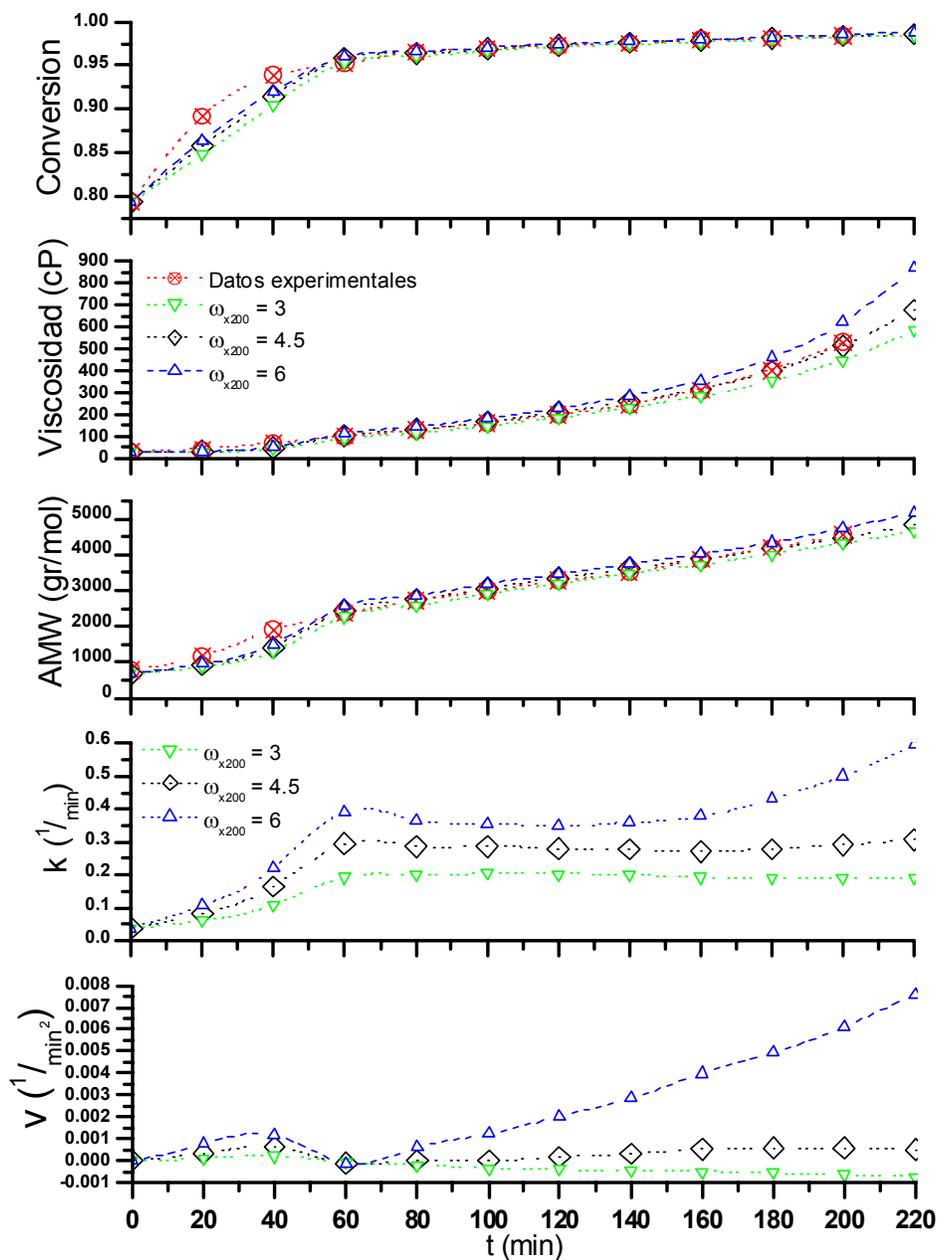


Figura 3.3. Desempeño del estimador para estimaciones a tiempo presente con ($D = 20$ min):
 $\omega_{x200} = 3$, $\omega_{x200} = 4.5$, $\omega_{x200} = 6$

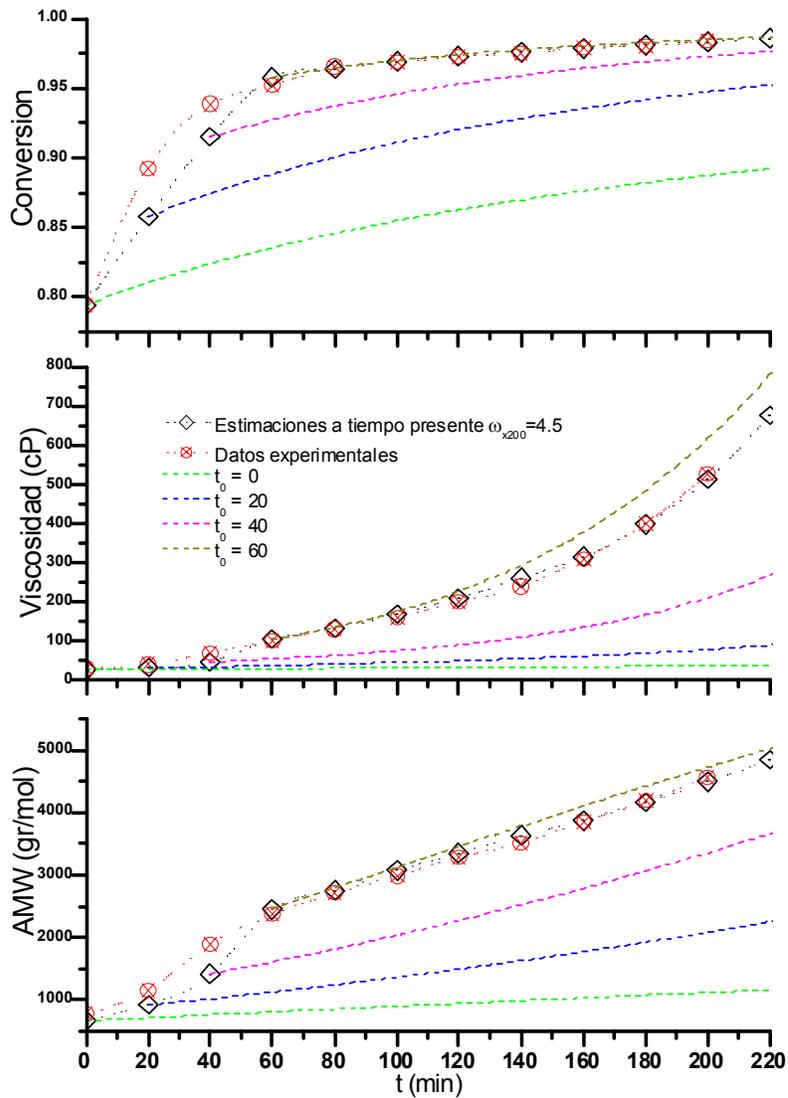


Figura 3.4. Desempeño del estimador para estimaciones a tiempo futuro (Primeras etapas de medición) $t_0 = 0, 20, 40, 60$ min

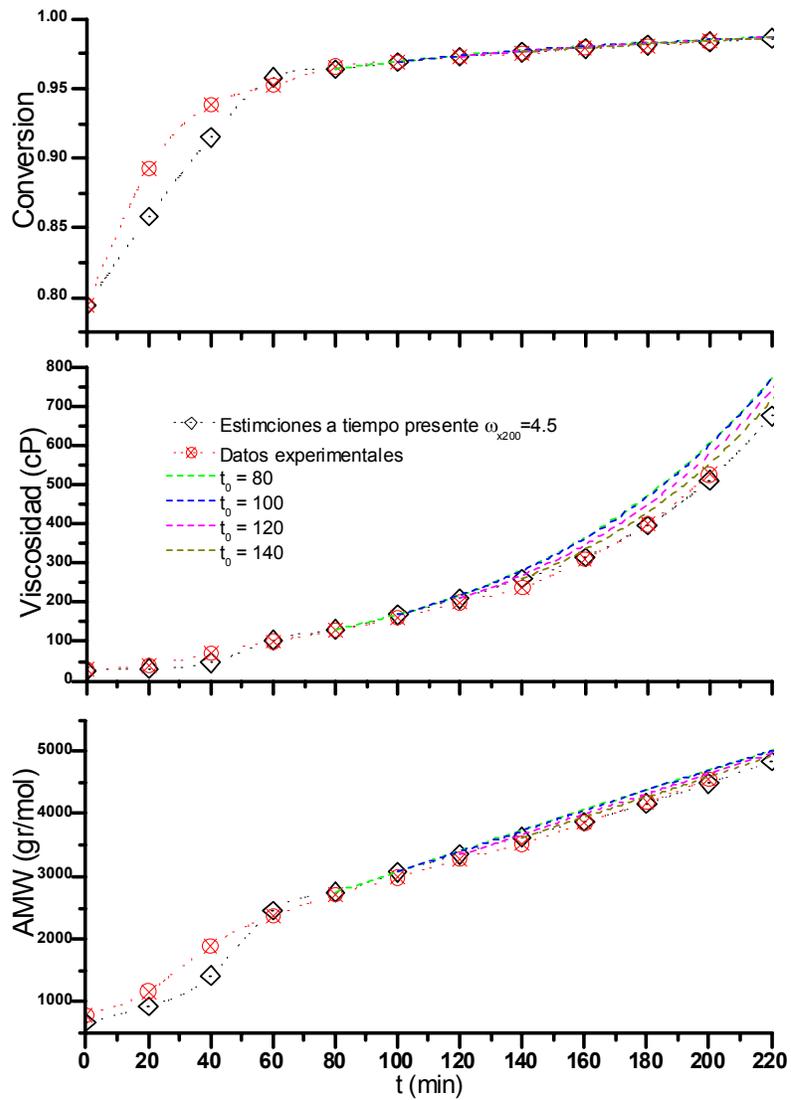


Figura 3.5. Desempeño del estimador para estimaciones a tiempo futuro (Etapas intermedias de medición) $t_0 = 80, 100, 120, 140$ min

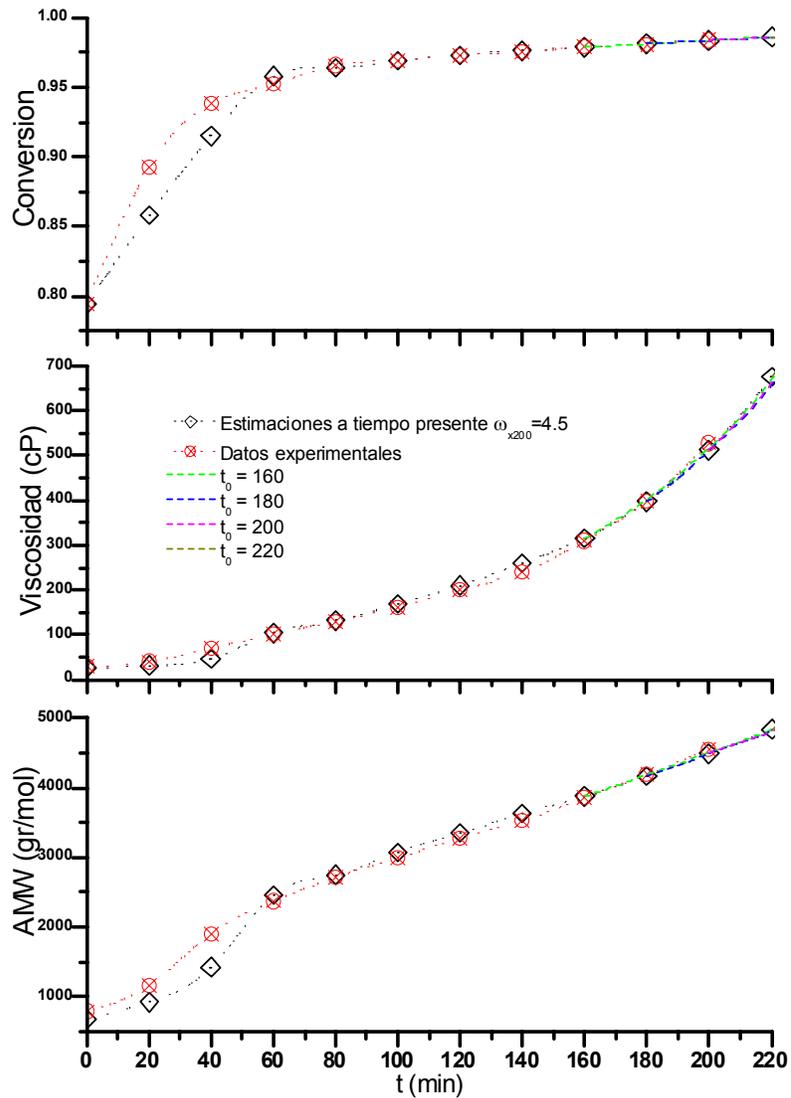


Figure 3.6. Desempeño del estimador para estimaciones a tiempo futuro (Etapas finales de medición) $t_0 = 160, 180, 200, 220$ min

CONCLUSIONES

El problema de estimación de estados de plantas no-lineales continuas con mediciones discretas se trató combinando una estrategia geométrica con un análisis de estabilidad, acorde a la idea del método de control constructivo no-lineal [Kristic y col., 1995]. Por una parte, la estrategia geométrica permitió la identificación de la condición de detectabilidad no-lineal que fundamenta la solubilidad del problema de estimación, dio una construcción sistemática del estimador, y proveyó una interpretación del funcionamiento del estimador. Por otra parte, el análisis de estabilidad permitió la derivación de condiciones de convergencia robusta acopladas con un esquema sencillo de sintonización. En particular, la existencia de un límite superior en el tiempo de muestreo y de límites superior e inferior en las ganancias se establecieron, al igual que la interacción que existe entre ellos, con expresiones analíticas que conllevan un significado físico, y que pueden ser el punto de partida para desarrollar esquemas numéricos para escoger el tiempo de muestreo y las ganancias del estimador.

La aplicación de la metodología de estimación a reactores de polimerización (uno de radicales libres, y el otro de alquidales) con datos experimentales, verificaron los resultados teóricos encontrados sobre la existencia de los límites en el tiempo de muestreo y en las ganancias del estimador, y en su interrelación. También mostraron cómo el grado de sistematización en el diseño de un estimador se beneficia del empleo de herramientas avanzadas para sistemas no-lineales; esto, en conjunto con el conocimiento que se tenga de los procesos, y con nociones y herramientas convencionales para el diseño de controles y filtros. La metodología propuesta tiene un fundamento que explica los hechos bien conocidos en los reportes existentes de implementaciones de estimadores no-lineales con mediciones discretas en plantas químicas, y abre la posibilidad de diseñarlos con técnicas más confiables y sistemáticas.

Para el futuro, se podría considerar un marco de estabilidad semiglobal para una estrategia de control no-lineal constructiva [Kristic y col., 1995] con el propósito de extender la presente estrategia, local robusta con respecto a errores de modelado paramétrico, a una de convergencia semiglobal robusta con respecto a errores en el modelado de funciones y por el no-modelado de dinámicas; esto, a la luz del problema de estimación del reactor de alquidales. La combinación del esquema propuesto de estimación con un control geométrico no-lineal, podría llevar a la versión con mediciones discretas del control geométrico basado en un estimador de Alvarez (1996).

APÉNDICE A

Matrices, Vectores y Mapas No-Lineales

bd M:= matriz M de bloque diagonal

cuando α es u: $n_o = p$, $n_d = n_i$ o v_i ;

cuando α es I: $n_o = m$, $n_d = \kappa_i$ o κ_i ;

cuando α es o: $n_o = m$, $n_d = \kappa_i + 1$

$$\Gamma_\alpha = \text{bd}[\Gamma_1^\alpha, \dots, \Gamma_{n_o}^\alpha], \quad \Gamma_i^\alpha (n_d \times n_d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_\alpha(T) = e^{\Gamma_\alpha T} = \text{bd}[\Omega_1^\alpha, \dots, \Omega_{n_o}^\alpha], \quad \Omega_i^\alpha(T) (n_d \times n_d) = e^{\Gamma_i^\alpha T} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 & \dots & \frac{T^{n_d-1}}{(n_d-1)!} \\ 0 & 1 & T & \dots & \frac{T^{n_d-2}}{(n_d-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_o = \text{bd}[I_1^o, \dots, I_m^o], \quad I_i^o ((\kappa_i+1) \times (\kappa_i+1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_\alpha = \text{bd}[\delta_1^\alpha, \dots, \delta_{n_o}^\alpha], \quad \delta_i^\alpha (1 \times n_d) = [1, 0, \dots, 0]$$

$$\Pi_\alpha = \text{bd}[\pi_1^\alpha, \dots, \pi_{n_o}^\alpha], \quad \pi_i^\alpha (n_d \times 1) = [0, \dots, 1]'$$

$$P_i(T) = \text{bd}[p_1(T), \dots, p_m(T)], \quad p_i(T) = [T^{\kappa_i}/\kappa_i, T^{\kappa_i-1}/(\kappa_i-1), \dots, T]'$$

$$\theta(z, v, r) = \{\varphi(x, x_u, \dot{x}_u)\}_{[x = \phi^{-1}(z, r), x_u = z_u, \dot{x}_u = \Gamma_u z_u + \pi_u v]}, \quad z = [z_u', z_I', z_{II}']'$$

$$w(z, v, r) = [(\partial_x \phi_{II})f + (\partial_u \phi_{II})\dot{x}_u]_{[x = \phi^{-1}(z, r), x_u = z_u, \dot{x}_u = \Gamma_u z_u + \pi_u v]}$$

$$q_r[z, v, r, e_r] = \theta(z, v, r) - \theta(z, v, r + e_r)$$

$$q_l(z, v, r, e, e_v, e_r) = \theta(z + e, v + e_v, r + e_r) - \theta(z, v, r), \quad e = [e_u', e_I', e_{II}']'$$

$$\omega[z, e_{II}, v, r] = w[(z_u', z_I', z_{II}' + e_{II}')', v, r] - w(z, v, r)$$

$$q_{II}(z, v, r, e, e_v, e_r) = w(z + e, v + e_v, r + e_r) - w[(z_u', z_I', z_{II}' + e_{II}')', v, r]$$

APÉNDICE B

Forma Normal de la Planta y Cambio de Coordenadas

Planta en Forma Normal

Lema B1. Sea $\underline{\kappa} \in K(\underline{\kappa})$ un vector de grados admisibles de estimación (Definición 1.4), para la trayectoria $x(t)$ RE-detectable de la planta (1.1) (o equivalentemente, para la tripleta $[u(t), y(t), r]$). Entonces, el cambio de coordenadas (1.14) (con $\underline{\kappa}$), de x a z , lleva a la planta (1.1) a la forma normal (1.15) (con $\underline{\kappa}$). Equivalentemente,

$$\dot{z}_u = \Gamma_u z_u + \Pi_u v(t), \quad \dot{z}_a = \begin{bmatrix} \Gamma_I z_I + \Pi_I \theta(z, v, r) \\ w(z, v, r) \end{bmatrix} := g[z, v(t), r], \quad \dim(z_u, z_a) = (v, n) \quad (\text{B1a, b})$$

y los mapas no-lineales $f(x, u, r)$ [Ec. (1.1a)] y $g(z, v, r)$, se relacionan entre sí de la siguiente forma:

$$f(x, u, r) = A(z, r) [g(z, v, r) - b(z, v, r)], \quad z = (z_u', z_a')', \quad z_a = (z_I', z_{II}')' \quad (\text{B2})$$

donde

$$A(z, r) = \{[\partial_x \phi(x, x_u, r)]^{-1}\}_{[x = \phi^{-1}(z, r), x_u = z_u]}, \quad b(z, v, r) = [\partial_{x_u} \phi(x, x_u, r)]_{[x = \phi^{-1}(z, r), x_u = z_u]} [\Gamma_u z_u + \Pi_u v]. \blacklozenge$$

Prueba. De la construcción de (ϕ_I, φ) [ver Ecs. (1.6), (1.7) y (1.12) con $\underline{\kappa}$] y de la C^∞ de ϕ_{II} [Ec. (14b)], se tiene que $(\theta$ y w se definen en el Apéndice A)

$$\dot{z}_I = \dot{\phi}_I(x, x_u, r) = \Gamma_I \phi_I(x, x_u, r) + \Pi_I \varphi(x, x_u, v, r) = \Gamma_I z_I + \Pi_I \theta(z, v, r)$$

$$\dot{z}_{II} = (\partial_x \phi_{II})_{[x, x_u, r]} f(x, u, r) + (\partial_{x_u} \phi_{II})_{[x, x_u, r]} [\Gamma_u x_u + \Pi_u v] = w(z, v, r)$$

Esto significa que el cambio de coordenadas (14) (con $\underline{\kappa}$), de x a z , lleva a la planta (1.1) a la forma normal (B1). En ello, se toma la derivada con respecto al tiempo del cambio de coordenadas (1.14) (con $\underline{\kappa}$),

$$\dot{z}_u = \dot{x}_u, \quad \dot{z}_a = [\partial_x \phi(x, x_u, r)] \dot{x} + [\partial_{x_u} \phi(x, x_u, r)] \dot{x}_u \quad (\text{B3a, b})$$

luego, considerando que $\text{rgo } \partial_x \phi = n$ [Ec. (1.14)], se sustituye las Ecs. (B1b) y (1.1) en la Ec. (B3b), se resuelve para f , y se obtiene la Ec. (B2). **QED**

Cambio de coordenadas del estimador

Proposición B1. Sea $\underline{\kappa} \in K(\underline{\kappa})$ un vector de grados admisibles de estimación (Definición 4), para la trayectoria $x(t)$ RE-detectable de la planta (1.1) (o equivalentemente, para la tripleta $[u(t), y(t), r]$).

Entonces, el estimador (1.28) (en coordenadas χ) y el estimador (1.21) (en coordenadas ζ) son equivalentes bajo el siguiente cambio de coordenadas [Ec. (1.14) con κ]:

$$\zeta = (\zeta_u', \zeta_I', \zeta_{II}') = [\chi_u', \phi_I(\chi, \chi_u, \rho), \phi_{II}(\chi, \chi_u, \rho)]'. \quad (B4)$$

Prueba. Se describe la Ec. (1.21) en forma continua [Kuo, 1992; Ogata, 1995]:

$$\dot{\zeta}_u = \Gamma_u \zeta_u + \Pi_u \hat{v}(t) + [\Omega_u(T)]^{-1} K_u [y_u(t) - \Delta_u \zeta_u(t)] \delta^*(t), \quad \zeta_u(t_0) = \zeta_{u_0} \quad (B5a)$$

$$\dot{\zeta}_a = g[\zeta, \hat{v}(t), \rho] + \iota[\zeta_I, \zeta_m, y(t)] \delta^*(t), \quad \zeta_a(t_0) = \zeta_{a_0} \quad (B5b)$$

$$\dot{\zeta}_m = K_m [y(t) - \Delta_I \zeta_I(t)] \delta^*(t), \quad \zeta_m(t_0) = 0 \quad (B5c)$$

donde g está dada en la Ec. (B2), $\delta^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-t_k)$ es el tren de pulsos unitarios, y

$$\iota(\zeta_I, \zeta_m, y) = [\iota_1(\zeta_I, \zeta_m, y), 0]', \quad \iota_1(\zeta_I, \zeta_m, y) = [\Omega_I(T)]^{-1} [K_p(y - \Delta_I \zeta_I) + P_I(T) \zeta_m], \quad \dim \iota_1 = \kappa$$

Se toma la derivada con respecto al tiempo del cambio de coordenadas (B4),

$$\dot{\zeta}_u = \dot{\chi}_u, \quad \dot{\zeta}_a = [\partial_x \phi(\chi, \chi_u, \rho)] \dot{\chi} + [\partial_{\chi_u} \phi(\chi, \chi_u, \rho)] \dot{\chi}_u, \quad \dot{\zeta}_m = \dot{\chi}_m \quad (B6a, b, c)$$

Se elimina $\dot{\zeta}_a$ en el par de Ecs. (B5b) y (B6b), se resuelve para $\dot{\chi}$ y se obtiene:

$$\dot{\chi} = [\partial_x \phi(\chi, \chi_u, \rho)]^{-1} \{g[\zeta, \hat{v}(t), \rho] - [\partial_{\chi_u} \phi(\chi, \chi_u, \rho)] \dot{\chi}_u\} + [\partial_x \phi(\chi, \chi_u, \rho)]^{-1} \iota_1(\zeta_I, \zeta_m, y) \delta^*(t)$$

Se sustituye la Ec. (B5a) [con ζ_u remplazado por χ_u , y se toma la Ec. (B6a)] y la Ec. (B2) [con (x, u, z, v, r) remplazado por $(\chi, v, \zeta, \hat{v}, \rho)$], se remplace $\Delta_I \zeta_I$ por $h(\chi, \rho)$ y se obtiene:

$$\dot{\chi} = f(\chi, v, \rho) + \{G(\chi, \chi_u, \rho)[y - h(\chi, \rho)] + H(\chi, \chi_u, \rho) \chi_m + U(\chi, \chi_u, \rho)[y_u - \Delta_u \chi_u]\} \delta^*(t) \quad (B7)$$

donde las matrices G , H y U están definidas después de la Ec. (1.28). Se puede notar que la dependencia de g en \hat{v} [Ec. (B5b)] ha desaparecido en las coordenadas χ . Se aumenta esta ecuación con las Ecs. (B5a) y (B5b), considerando las Ecs. (B6a) y (B6c), y se obtiene el estimador en coordenadas χ en forma continua,

$$\dot{\chi}_u = \Gamma_u \chi_u + \Pi_u \hat{v}(t) + [\Omega_u(T)]^{-1} K_u [y_u(t) - \Delta_u \chi_u(t)] \delta^*(t), \quad \chi_u(t_0) = \chi_{u_0}$$

$$\dot{\chi} = f(\chi, \Delta_u \chi_u, \rho) + \{G(\chi, \chi_u, \rho)[y - h(\chi, \rho)] + H(\chi, \chi_u, \rho) \chi_m + U(\chi, \chi_u, \rho)[y_u - \Delta_u \chi_u]\} \delta^*(t), \quad \chi(t_0) = \chi_0$$

$$\dot{\chi}_m = K_m [y - h(\chi, \rho)] \delta^*(t), \quad \chi_m(t_0) = 0$$

De su integración de t_k a t_{k+1} , se obtiene:

$$\chi_u(t) = \Omega_u(t-t_k) \{ \chi_u(t_k) + \int_{t_k}^t \Omega_u(t-\tau) \Pi_u \hat{v}(\tau) d\tau + [\Omega_u(T)]^{-1} K_u [y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)] \}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\begin{aligned} \chi(t) = & \tau[t, t_k, \chi(t_k), \Delta_u \chi_u(\cdot), \rho] + G[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho] \{y(t_k) - h[\chi(t_k), \rho]\} + H[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho] \chi_m(t_k) \\ & + U[\chi(t_k), \chi_u(t_k), \rho] [y_u(t_k) - \Delta_u \chi_u(t_k)] \end{aligned}$$

$$\chi_m(t) = \chi_m(t_k) + K_m[y(t_k) - h(\chi(t_k), \rho)]$$

donde τ está definido después de la [Ec. \(1.28\)](#). Esta ecuación con $t = t_{k+1}$ y $\hat{v}(t) = 0$ es el estimador discreto en coordenadas χ [\[Ec. \(1.28\)\]](#). **QED**

APÉNDICE C

Prueba del Lema 1.1

De aplicaciones recursivas de las Ecs. (1.29a) y (1.29b), se obtienen las Ecs. (C1a) y (C1b), respectivamente:

$$e_u(t_k) = A_u^k e_u(t_0) - \sum_{i=0}^{k-1} A_u^{k-i-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Omega_u(t_{i+1}-\tau) \Pi_u e_v(\tau) d\tau \quad (C1a)$$

$$e_a(t_k) = A_a^k e_a(t_0) + I_o \sum_{i=0}^{k-1} A_a^{k-i-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Omega_o(t_{i+1}-\tau) \Pi_o q_{II}[z(\tau), v(\tau), r, e(\tau), e_v(\tau), e_r] d\tau \quad (C1b)$$

Sea $\alpha(t)$ cualquier función continua acotada, y se verifica (por contradicción) que:

$$\sigma^{k-i-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha(\tau) d\tau \leq \sigma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^{(t_k-\tau)/T} \alpha(\tau) d\tau, \quad \sigma \in (0, 1) \quad (C2)$$

Se toman normas en la Ec. (C1a), se sustituyen las desigualdades (1.27a) y (C2) con $\alpha(t) = |e_v(t)| \leq \varepsilon_v$ [Ec. (1.30a)] y $\sigma = \gamma_u$, se verifica que $|\Omega_u(T) \Pi_u| \leq e^T$, obteniéndose la desigualdad (C3a). Se toman normas en la Ec. (C1b), se sustituyen las desigualdades (1.27b) y (C2) con $\alpha(t) = |q_{II}|$ [Ec. (1.30a)] y $\sigma = \gamma_o$, se verifica que $|\Omega_I(T) \Pi_I| \leq e^T$, obteniéndose la desigualdad (C3d),

$$|e_u(t_k)| \leq a_u \gamma_u^k |e_u(t_0)| + \alpha_u \int_{t_0}^{t_k} \gamma_u^{(t_k-\tau)/T} \varepsilon_v d\tau, \quad \alpha_u = a_u \gamma_u^{-1} e^T, \quad \alpha_o = a_o \gamma_o^{-1} e^T \quad (C3a, b, c)$$

$$|e_a(t_k)| \leq a_o \gamma_o^k |e_a(t_0)| + \alpha_o \int_{t_0}^{t_k} \gamma_o^{(t_k-\tau)/T} [M_u |e_u(\tau)| + M_I |e_I(\tau)| + M_{II} |e_{II}(\tau)| + M_v |e_v(\tau)| + M_r |e_r|] d\tau \quad (C3d)$$

donde γ_u y γ_o están definidas en la Ec. (1.27). Considerando que $|e_v| \leq \varepsilon_v$ [Ec. (1.30a)], $|e_r| \leq \varepsilon_r$ [Ec. (1.30b)], se aplica el Lema Generalizado de Gronwall [Vidyasagar, 1993] a la desigualdad (C3d), luego se integra por partes, obteniéndose:

$$|e_a(t_k)| \leq a_o \gamma_I^k |e_a(t_0)| + \alpha_o \int_{t_0}^{t_k} \gamma_I^{(t_k-\tau)/T} [M_u |e_u(\tau)| + M_{II} |e_{II}(\tau)| + M_v \varepsilon_v + M_r \varepsilon_r] d\tau, \quad \gamma_I = \gamma_o e^{\alpha_o M_I T} \quad (C4a, b)$$

Se describen las Ecs. (C3a) y (C4a) en términos de l_u y l_I , obteniéndose en la siguiente forma:

$$|e_u(t_k)| \leq a_u e^{-l_u(t_k-t_0)} |e_u(t_0)| + \alpha_u \varepsilon_v \int_{t_0}^{t_k} e^{-l_u(t_k-\tau)} d\tau, \quad l_u = -T^{-1} \ln \gamma_u \quad (C5a)$$

$$|e_a(t_k)| \leq a_o e^{-l_I(t_k-t_0)} |e_a(t_0)| + \alpha_o \int_{t_0}^{t_k} e^{-l_I(t_k-\tau)} [M_u |e_u(\tau)| + M_{II} |e_{II}(\tau)| + M_v \varepsilon_v + M_r \varepsilon_r] d\tau, \quad l_I = -T^{-1} \ln \gamma_I \quad (C5b)$$

Se escribe la Ec. (1.29c) en su versión continua, $\dot{e}_{II} = \omega(e_{II}, t) + q_{II}[z(\tau), v(\tau), r, e(\tau), e_v(\tau), e_r]$; considerando la estabilidad E [Ec. (1.18b)] de la trayectoria $z^\circ(t)$ (Definición 1.4), se sustituye la desigualdad (1.30b), y se aplica el Teorema Recíproco de Lyapunov [Vidyasagar, 1993], obteniéndose [ver detalles en Alvarez (2000)]:

$$|e_{II}(t)| \leq A_{II}^o |e_{II_0}| e^{-L_{II}^o(t-t_0)} + A_{II}^o \int_{t_0}^t e^{-L_{II}^o(t-\tau)} [N_u |e_u(\tau)| + N_I |e_I(\tau)| + N_v \varepsilon_v + N_r \varepsilon_r] d\tau \quad (C5c)$$

Se escriben las **desigualdades (C5a), (C5b) y (C5c)** en su versión de igualdad (con t remplazado por t_k), se reemplaza $[|e_u(t)|, |e_a(t)|, |e_{II}(t)|]$ por $[\sigma_u(t), \sigma_a(t), \sigma_{II}(t)]$, se toma el Principio de Comparación [Vidyasagar, 1993], y se concluye que las secuencias $\{e_u(t_k)\}$ y $\{e_a(t_k)\}$ y la trayectoria $e_{II}(t)$ de errores de estimación se acotan como sigue:

$$|e_u(t_k)| \leq \sigma_u(t = t_k): \quad \dot{\sigma}_u = -l_u \sigma_u + \alpha_u \varepsilon_v, \quad \sigma_u(t_0) = a_u |e_u(t_0)| \quad (\text{C6a})$$

$$|e_a(t_k)| \leq \sigma_a(t = t_k): \quad \dot{\sigma}_a = -l_I \sigma_a + \alpha_o (M_u \sigma_u + M_{II} \sigma_{II} + M_v \varepsilon_v + M_r \varepsilon_r), \quad \sigma_a(t_0) = a_o |e_a(t_0)| \quad (\text{C6b})$$

$$|e_{II}(t_k)| \leq \sigma_{II}(t = t_k): \quad \dot{\sigma}_{II} = -L_{II}^o \sigma_{II} + A_{II}^o (N_u \sigma_u + N_I \sigma_I + N_v \varepsilon_v + N_r \varepsilon_r), \quad \sigma_{II}(t_0) = A_{II}^o |e_{II}(t_0)| \quad (\text{C6c})$$

En la desigualdad $\gamma < 1$ del **Lema 1** se sustituye las **Ecs. (C3c) y (C4b)**, se toma logaritmo, se multiplica por $-T^{-1}$ para obtener:

$$-T^{-1} [\ln \gamma_I - (a_o / \gamma_o) M_R] > 0 \quad \gamma_I \text{ está definida en la Ec. (C4b)}$$

Luego, se sustituyen las **Ecs. (C5a) y (36)**, obteniéndose:

$$l_I L_{II}^o > a_o A_{II}^o M_{II} N_I$$

De esta manera se satisface el criterio de estabilidad (local) de Hurwitz para el **sistema (C6b, c)**, o equivalentemente, la estabilidad RE local de las dinámicas de error de estimación [Ec. (1.29)]. La condición $\gamma_u < \gamma$ es un mero requerimiento de desempeño. **QED**

APÉNDICE D
Prueba del Teorema 1.1

Se rescribe la desigualdad $\gamma < 1$ del **Lema 1.1**, como sigue:

$$f(s) = s - b(a, T) e^s > 0: \quad s = -\ln \gamma_0(s_0 T), \quad b(a, T) = a T e^T, \quad a = a_0 M \quad (D1)$$

De esta forma, se tiene que existe un valor de s [$s^* = -\ln b(a, T) > 0$] que maximiza a $f(s)$

[$f(s^*) = -\ln b(a, T) - 1 > 0$], si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:

$$f'(s^*) = 1 - b(a, T) e^{s^*} = 0, \quad f''(s^*) = -b(a, T) e^{s^*} < 0 \quad (D2a, b)$$

Equivalentemente, si y sólo si:

$$b(a, T) e < 1 \quad (D3)$$

determinándose el límite máximo $T^+ = \alpha(a) \ni b(a, T^+) = e^{-1}$ del tamaño del intervalo de muestreo, el cual es la **Condición (i) del Teorema 1.1**.

Se escribe la **desigualdad (D1)** en su versión de igualdad:

$$s - b(a, T) e^s = 0, \quad s > 0 \quad (D4)$$

Esta ecuación puede tener:

- (i) ninguna solución cuando $b > 1/e$,
- (ii) una solución, $s = s^*$, cuando $b = 1/e$,
- (iii) dos soluciones, $s^- (< s^*)$ y $s^+ (> s^*)$, cuando $b < 1/e$.

Entonces, dado un intervalo de muestreo $T < T^+$, el cumplimiento de la **desigualdad (D3)** implica que $\gamma < 1$ (**Lema 1.1**) para $s \in (s^-, s^+) \neq \emptyset$, o equivalentemente, implica la existencia de un conjunto no vacío,

$$(s_0^-, s_0^+), \quad s_0^{-/+} = T^{-1} \gamma_0^{-1}(e^{-s^{-/+}}) \quad \text{ver Ec. (D1)}$$

donde s_0 puede tomar valores para que la condición $\gamma < 1$, de RG-convergencia del **Lema 1**, se satisfaga. Esto prueba la **Condición (ii) del Teorema 1**, y la **Condición (iii)** es un mero requerimiento de desempeño el cual no afecta las **Condiciones (i) y (ii)**.

Ahora se prueba la dependencia y los comportamientos límite de T^+ y $s_0^{-/+}$. Se toma de nuevo la **Ec. (D4)** y se rescribe como una función implícita de s que depende de T y a :

$$g(s, a, T) = s - a T e^T e^s = 0$$

Se hace la derivación implícita de s con respecto a T y a :

$$\partial_T s = -\partial_T g(s, a, T) / \partial_s g(s, a, T), \quad \partial_a s = -\partial_a g(s, a, T) / \partial_s g(s, a, T)$$

y se verifica que, para $T > 0$ y $s > 0$,

$$\partial_T g(s, a, T) < 0, \quad \partial_a g(s, a, T) < 0 \quad (D5a, b)$$

El cumplimiento de la **condición (D2)** garantiza que

$$[\partial_s g](s^{-+}, a, T) \geq 0$$

(D6a, b)

Con base en las **desigualdades (D5) y (D6)** se tiene que

$$[\partial_T s](s^{-+}, a, T) \geq 0, \quad [\partial_a s](s^{-+}, a, T) \geq 0$$

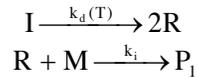
De aquí, se obtienen las **desigualdades (1.32c)** y las **expresiones (1.33)**. **QED**

APENDICE E

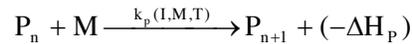
Funcionalidades y Parámetros del Modelo del Reactor de Polimerización por Radicales Libres

MECANISMO CINETICO.

- Iniciación

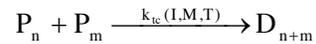


- Propagación

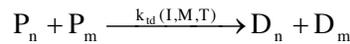


- Terminación

- Combinación



- Desproporción



VELOCIDADES DE REACCION DE LAS ESPECIES

- Iniciador

$$r_I = -k_d I$$

- Monómero

$$r_M = -2fk_d I - k_p M \lambda_0$$

- Polímero Desactivado

$$r_{D_n} = k_{tc} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} + k_{td} (\lambda_0 + P_n) \quad \forall n \text{ impar}$$

$$r_{D_n} = k_{tc} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} + P_{\frac{n}{2}}^2 \right) + k_{td} (\lambda_0 + P_n) \quad \forall n \text{ par}$$

BALANCES DE MATERIA

- Iniciador

$$\frac{d(VI)}{dt} = Vr_I + q_e I_e - qI$$

$$\frac{d(I)}{dt} = -r_I + \varepsilon r_{pol} + \frac{W_I - q_e I}{V}$$

- Monómero

$$\frac{d(VM)}{dt} = Vr_M + q_e M_e - qM$$

$$\frac{d(m)}{dt} = -r_{pol} + \varepsilon m r_{pol} + (m_e - m)Pe$$

- Masa Total y/o Volumen

$$\frac{d(V\rho)}{dt} = q_e \rho_e - q\rho$$

$$\frac{d(V)}{dt} = -\varepsilon r_{\text{pol}} V + q_e - q$$

- Polímero Inactivo

$$\frac{d(VD_n)}{dt} = Vr_{D_n} + q_e D_{n_e} - qD_n$$

$$\frac{d(D_1)}{dt} = \varepsilon r_{\text{pol}} D_1 + k_{\text{td}} \lambda_0 P_1 + (D_{1_e} - D_1) Pe$$

$$\frac{d(D_n)}{dt} = \varepsilon r_{\text{pol}} D_n + k_{\text{tc}} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} + k_{\text{td}} \lambda_0 P_n + (D_{1_e} - D_1) Pe \quad \forall n \text{ impar}$$

$$\frac{d(D_n)}{dt} = \varepsilon r_{\text{pol}} D_n + k_{\text{tc}} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} + P_{\frac{n}{2}}^2 \right) + k_{\text{td}} \lambda_0 P_n + (D_{1_e} - D_1) Pe \quad \forall n \text{ par}$$

Donde:

$$r_{\text{pol}} = k_p m \lambda_0, \quad Pe = \frac{q_e}{V}, \quad m = \frac{M}{M^0}$$

MOMENTOS DE LAS DISTRIBUCIONES DE LONGITUD DE CADENA

- Polímero Activo: $\lambda_i = \sum_{n=1}^{\infty} n^i P_n$

- $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2fk_d I}{k_T}}$

- $\lambda_1 = \frac{2fk_d I + k_p \lambda_0}{k_T \lambda_0}$

- $\lambda_2 = \left(1 + \frac{2k_p M}{k_T \lambda_0} \right) \lambda_1$

- Polímero Inactivo: $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n^i D_n$

- $\frac{d(\mu_0)}{dt} = \varepsilon_m \kappa_{\text{pol}} \mu_0 + \left(\frac{1}{2} k_{\text{tc}} + k_{\text{td}} \right) \lambda_0^2 + (\mu_{0_e} - \mu_0) Pe$

- $\frac{d(\mu_1)}{dt} = \varepsilon_m \kappa_{\text{pol}} \mu_1 + (k_{\text{tc}} + k_{\text{td}}) \lambda_0 \lambda_1 + (\mu_{1_e} - \mu_1) Pe$

- $\frac{d(\mu_2)}{dt} = \varepsilon_m \kappa_{\text{pol}} \mu_2 + (k_{\text{tc}} + k_{\text{td}}) \lambda_0 \lambda_2 + k_{\text{tc}} \lambda_1^2 + (\mu_{2_e} - \mu_2) Pe$

VARIABLES IMPORTANTES

* Densidades y factor de contracción

$$\rho = \frac{\rho_M^0}{1 - \varepsilon} (1 - \varepsilon m), \quad \rho_c = \frac{\rho_M^0}{1 - \varepsilon} (1 - \varepsilon m_c), \quad \varepsilon = 1 - \frac{\rho_M^0}{\rho_D^0}$$

* Concentraciones adimensionales del monómero y del polímero

$$m = \frac{M}{M^0} = \frac{\rho_M}{\rho_M^0}, \quad d = \frac{D}{D^0} = \frac{\rho_D}{\rho_D^0}, \quad m + d = 1$$

* Conversión, y fracciones libres en masa y en volumen

$$x = \frac{1 - m}{1 - \varepsilon_M m}, \quad \phi_m = \frac{1 - m}{1 - \varepsilon_M m}, \quad \phi_v = m$$

FUNCIONES CINÉTICAS

- Constantes Cinéticas

$$k_d = \exp\left(a_d - \frac{b_d}{T}\right), \quad k_p^0 = \exp\left(a_p - \frac{b_p}{T}\right), \quad k_T^0 = \exp\left(a_T - \frac{b_T}{T}\right)$$

- Efecto Gel

$$\frac{1}{k_p} = \frac{1}{k_p^0(T)} + \theta_p(T)E(m, s, T)\lambda_0, \quad \frac{1}{k_T} = \frac{1}{k_T^0(T)} + \theta_T(I, W, T)E(m, s, T)\lambda_0$$

donde

$$\theta_p = \exp\left(a_{\theta_p} - \frac{b_{\theta_p}}{T}\right), \quad \theta_T = \exp\left(a_{\theta_T} - b_{\theta_T}I - \frac{d_{\theta_T}}{T}\right), \quad E = \exp\left(\frac{-2.3\phi_v}{A(T) + B(T)\phi_v}\right),$$

$$A(T) = a_A + b_A\left(1 - \frac{T}{T_g}\right) + c_A\left(1 - \frac{T}{T_g}\right)^2, \quad B(T) = a_B + b_B\left(1 - \frac{T}{T_g}\right)$$

PARAMETROS

- Propiedades básicas

peso molecular del monómero (metilmetacrilato)

$$PM = 100.12$$

peso molecular del iniciador (AIBN)

$$PMI = 164.21$$

densidad del polímero (gr/dm³)

$$\rho_D^0 = 1200.0$$

densidad del monómero (gr/dm³)

$$\rho_M^0 = 891.6$$

- Constantes de reacción

disociación

$$a_d = 38.685, \quad b_d = 15430.29, f = 0.58$$

propagación sin gel

$a_p = 17.1999,$ $b_p = 2190.74$
terminación sin gel
 $a_T = 22.4948,$ $b_T = 352.793$
función A (gel)
 $a_A = 0.1678,$ $b_A = 0.0,$ $c_A = 1.23517,$ $T_g = 387.15$
función B (gel)
 $a_B = 0.03,$ $b_B = 0.0$
 θ_p
 $a_{\theta p} = 35.11094,$ $b_{\theta p} = 13964.0$
 θ_T
 $a_{\theta t} = 47.03,$ $b_{\theta t} = 48.85,$ $c_{\theta t} = 637.19,$ $d_{\theta t} = 17956.0$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarez, J., Output-feedback control of nonlinear plants, *AIChEJ* 42 (9) (1996).
- Alvarez, J. y Lopez, T., Dynamic robust state estimation of nonlinear plants, *AIChEJ* 45 (1) (1999).
- Alvarez, J., Nonlinear state estimation with robust convergence, *Journal of Process Control* 10 (2000).
- Alvarez, J., Lopez, T. y Hernández, E., Robust estimation of free-radical homopolymer reactors, *Journal of Process Control* 10 (2000).
- Bequette, B. W., Nonlinear control of chemical processes: A review, *Ind. Eng. Chem. Res.* 30 (7) (1991).
- Besançon, G. y Hammouri, H., On uniform observation of non-uniformly observable systems, *Systems and Control Letters* 29 (1996).
- Cervantes, P., Estimación de reactores de homopolimerización en solución: efecto de la estructura de observabilidad, Tesis de Maestría en Ciencias, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (2000).
- Ciccarella, G., Dalla Mora, M. y Germani, A., A Luenberger-like observer for nonlinear systems, *Int. J. Control* 57 (3) (1993).
- Ciccarella, G., Dalla Mora, M. y Germani, A., A robust observer for discrete time nonlinear systems, *Systems and Control Letters* 24 (1995).
- D'Azzo, J. y Houpis, C. H., *Linear control system analysis and design*, McGraw Hill, Japan (1981).
- Deza, F., Busvelle, E., Gauthier, J. P. y Rakotopara, D., High gain estimation for nonlinear systems, *Systems and Control Letters* 18 (1992).
- Ellis, M., Taylor, T. W. y Jensen, K., On-line molecular weight distribution estimation and control in a batch polymerization, *AIChEJ* 40 (3) (1994).
- Ellis, M. F., Taylor, T.W., Gonzalez, V. y Jensen, K., Estimation of the molecular weight distribution in batch polymerization, *AIChEJ*, 34(8) (1988).
- Hermann, R. y Krener, A. J., Nonlinear controllability and observability, *IEEE TAC AC-22* (5) (1977).
- Hernández, H., Estimación de un reactor de homopolimerización por radicales libres usando mediciones discretas-retardadas, Tesis de Maestría en Ingeniería Química, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (1998).
- Hernández, H. y Alvarez, J., Estimation of a polymer reactor with continuous and discrete measurements, *Control and Applications-IASTED International Conference, Banff, Canadá* (1999).
- Isidori, A., *Nonlinear control systems*, Springer-Verlag, New York (1995).
- Kristic, M., Kanellakopoulos, I. y Kokotovic, P., *Nonlinear and adaptive control design*, Wiley, New York (1995).

- Kuo, B. C., Digital control systems, Saunders College Publishing (1992).
- Kwakernaak, H. y Sivan, R., Linear optimal control systems, Wiley, New York (1972).
- Lopez, T. y Alvarez, J., The effect of the detectability structure in the functioning of a nonlinear geometric estimator, submitted to Journal of Process Control (2002).
- Marino, R. y Tomei, P., Nonlinear control design, Prentice Hall, UK (1995).
- Moraal, P. E. y Grizzle, J. W., Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements, IEEE TAC 40 (3) (1995).
- Mutha, R. K., Cluett, W. R. y Penlidis, A., On-line nonlinear model-based estimation and control of a polymer reactor, AIChEJ 43 (11) (1997).
- Nesic, D., Teel, A. R. y Kokotovic, P. V., Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations, Systems and Control Letters 38 (1999).
- Ogata, K., Discrete-time control systems, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- Palmor, Z. J. y Shinnar, R., Design of sampled data controllers, Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. 18 (1), 1979.
- Phani, B. S. y Bequette, W., Nonlinear model-predictive control: closed-loop stability analysis, AIChEJ 42 (12) (1996).
- Ray, W. H., Polymerization reactor control, IEEE Control Systems Magazine 6 (4) (1986).
- Rugh, W. J., Linear system theory, Prentice Hall, New Jersey (1996).
- Schuler, H. y Sushen, Z., Real-time estimation of the chain length distribution in a polymerization reactor, Chem. Engng. Sci. 40 (1985).
- Sontag, E. D., Mathematical control theory, deterministic finite dimensional systems, Springer Verlag, New York (1990).
- Soroush, M., Nonlinear state-observer design with application to reactors, Chem. Eng. Sci. 52 (5) (1997).
- Sthephanopoulos, G., Chemical Process Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1984).
- Tatiraju, S., Soroush, M. y Ogunnaike, B., Multirate nonlinear state estimation with application to a polymerization reactor, AIChEJ 45 (4) (1999).
- Vidyasagar, M., Nonlinear systems analysis, Prentice-Hall, New York (1993).
- Wang, G. B., Peng, S. S. y Huang, H. P., A sliding observer for nonlinear process control, Chem. Eng. Sci. 52 (5) (1997).
- Wonham, M., Linear multivariable control: A geometric approach, Springer-Verlag, New York (1985).