

**EVOLUCIONES FINALES,
PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y
TOPOLÓGICAS EN PROBLEMAS
DE DOS Y TRES CUERPOS**

T E S I S

**QUE PRESENTA
ARTURO CRIOLLO PÉREZ
PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

BY ORDINANCE OF THE BOARD OF
PROPERTY AND ZONING
TOPOLONGA TOWNSHIP
LAURENCEVILLE, OHIO

1985

OFFICE OF THE
TOWNSHIP CLERK
100 WEST MAIN STREET
LAURENCEVILLE, OHIO 43040

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA



Casa abierta al tiempo

UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**EVOLUCIONES FINALES, PROPIEDADES
GEOMÉTRICAS Y TOPOLÓGICAS EN
PROBLEMAS DE DOS Y TRES CUERPOS**

T E S I S

QUE PRESENTA
ARTURO CRIOLLO PÉREZ
PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

-ASESOR: DR. ERNESTO PÉREZ CHAVELA
DICIEMBRE DE 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA



Casa abierta al mundo

UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EVOLUCIONES EN ALGEBRA, PRIORIDADES
GEOMÉTRICAS Y TOPOLOGÍAS EN
PROBLEMAS DE DOS Y TRES CUERPOS

T E S I S

QUE PRESENTA

ARTURO GABRIEL PEREZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

EN EL INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
EN MATEMÁTICAS

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento a Ernesto Pérez-Chavela, quién confió en mi y me enseñó Ecuaciones Diferenciales, a Roberto Quezada Batalla quién me mostro la belleza del Análisis Matemático y a Carlos Signoret Poillon de quién no sólo aprendí Algebra, sino también el lado divertido de las Matemáticas.

Deseo agradecer a los sinodales Ernesto Lacomba Zamora, Lidia Jiménez Lara, Manuel Falconi Magaña, Carlos Villegas Blas y Ernesto Pérez-Chavela por su dedicación e invaluable observaciones en la lectura de este trabajo.

Un agradecimiento a Carlos Signoret Poillon y Mario Pineda Ruelas, anterior y actual jefes del Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa, por su gran apoyo.

Finalmente, mi agradecimiento para el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (C O N A C Y T), por el financiamiento otorgado como parte de su Programa de Becas de Posgrado.

ACRABEFCIMBINTO

The first section of the report discusses the general situation of the country and the results of the survey. It also mentions the objectives of the study and the methodology used.

The second section describes the results of the survey, including the distribution of the population and the main characteristics of the different groups.

The third section discusses the conclusions of the study and the implications for the future. It also mentions the limitations of the study and the need for further research.

The fourth section contains the references and the appendix. The references list the sources used in the study, and the appendix contains the data collected during the survey.

A mis Padres, quienes me iniciaron en el camino de la vida.

A mi Esposa, quién decidió acompañarme a través de él.

A a mi Hijo, heredero de todo cuanto he aprendido al andar este difícil pero maravilloso camino.

La vida es un aprender constante y un sufrir perpetuo.

La Música es un arte del tiempo, pero para poder sentirla hay que olvidarse del tiempo mismo.

En ocasiones me pregunto ¿Que es la matemática? ¿Arte o Ciencia? Por momentos, es tal la emoción que produce el contemplar una teoría matemática, que parece arte, en otros momentos su exactitud nos invita a pensar en una ciencia.

Para mi es la más bella de las ciencias a la vez que la más exacta de las artes.

Arturo Criollo.

1. The first part of the paper is devoted to the study of the

2. The second part of the paper is devoted to the study of the

3. The third part of the paper is devoted to the study of the

4. The fourth part of the paper is devoted to the study of the

5. The fifth part of the paper is devoted to the study of the

6. The sixth part of the paper is devoted to the study of the

7. The seventh part of the paper is devoted to the study of the

8. The eighth part of the paper is devoted to the study of the

**EVOLUCIONES FINALES,
PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y
TOPOLÓGICAS
EN PROBLEMAS DE DOS Y TRES CUERPOS.**

TESIS DOCTORAL.

POR

ARTURO CRIOLLO PÉREZ.

Índice general

1. Introducción General	4
2. Problemas de Dos y de Tres Cuerpos	13
2.1. Problema de Dos Cuerpos	13
2.2. Problema Newtoniano de los Tres Cuerpos.	15
2.2.1. Evoluciones Finales.	20
2.2.2. Configuraciones Centrales.	30
2.3. Problema Cargado de los Tres Cuerpos.	34
2.3.1. Integrales Primeras	35
2.3.2. Análisis de la función Potencial	38
3. Foliación del espacio fase para el Problema de Kepler con perturbaciones anisotrópicas.	43
3.1. Problema de Kepler Perturbado.	45
3.2. Topología de Sistemas Hamiltonianos.	50
3.3. Foliación de R_θ por \bar{G}	51
3.4. Foliación de R_r por G y H	56
4. Ley de Áreas.	68
4.1. Valores Extremos.	72
4.2. Propiedades de la MAC.	75

5. Evoluciones Finales en el Problema Cargado.	87
5.1. Preliminares	87
5.2. Análisis de los Distintos Casos.	94
5.3. Evoluciones Finales en Configuración Central.	106
6. Conclusiones Generales.	117
6.1. Futuras Investigaciones.	119

Capítulo 1

Introducción General

El problema del movimiento de los planetas junto con las observaciones hechas desde la antigüedad hacen de la *Astronomía* la madre de las ciencias, y en este caso le corresponde a la *Mecánica Celeste* ser la primogénita. La etapa moderna de la *Mecánica Celeste* se remonta al siglo XVII cuando Isaac Newton, basado en los trabajos de Kepler y Galileo da una formulación matemática a toda una serie de observaciones astronómicas. De esta manera, con la invención del cálculo y la ley de gravitación universal, el problema de los dos cuerpos fue una primera aproximación de la *Mecánica Celeste* para describir la dinámica planetaria que gobierna a nuestro sistema solar.

Aunque la *Mecánica Celeste* moderna nace con Newton es con H. Poincaré con quien adquiere su forma actual y su reconocimiento como una de las ramas más importantes de las matemáticas.

La *Mecánica Celeste* estudia en general el *Problema de los n -cuerpos*, este problema es un modelo matemático que describe el movimiento de un sistema de n partículas puntuales sujetos a sus atracciones gravitacionales.

La existencia de una fuerza atractiva en proporción directa al producto de las masas y en proporción inversa al cuadrado de la distancia que las separa.

Esta famosa proposición enunciada por Newton en los *Principia* (1687), fue

un paso decisivo en nuestro entendimiento del universo, pero es importante notar que las ecuaciones diferenciales del movimiento planetario también necesitan del principio de igualdad de acción y reacción y la segunda Ley de Newton que relaciona fuerza y aceleración.

El problema de dos cuerpos o problema de Kepler es el más simple en la *Mecánica Celeste*, cuyas soluciones se conocen totalmente, y un corolario de esto establece que la órbita de un objeto celeste alrededor del Sol debe ser una elipse, un círculo, una parábola o una hipérbola dependiendo de las condiciones iniciales. Newton demostró que las leyes del movimiento planetario de Kepler corresponden al problema de dos cuerpos y proporcionó una solución geométrica de este problema para dos esferas moviéndose bajo la atracción gravitacional mutua. En 1710 Johann Bernoulli probó que el movimiento de una partícula con respecto a la otra está descrita por una sección cónica. Este problema tiene una gran importancia pues ha servido como base para plantear otros problemas de mayor complejidad e interés; ejemplos de ello los tenemos en los diferentes tipos de perturbaciones que se le han aplicado y que nos han permitido entender mucho mejor, entre otras cosas, el movimiento de la luna; en gran medida la teoría de satélites se basa en estos principios. Después del problema de dos cuerpos quien sigue en grado de complejidad es naturalmente el problema de tres cuerpos.

El problema de los tres cuerpos fue descrito por Whittaker como *El más célebre de todos los problemas dinámicos* [38]. Éste puede ser enunciado como sigue: *considérense tres partículas moviéndose en el espacio bajo su mutua atracción gravitacional; dadas sus condiciones iniciales, determinar su movimiento subsecuente.*

Puesto que los cuerpos en el sistema solar son aproximadamente esféricos y sus dimensiones extremadamente pequeñas comparadas con las distancias entre ellos, entonces estos pueden ser considerados como masas puntuales. Entonces el problema de los tres cuerpos puede ser visto como el fundamento

de la astronomía dinámica moderna, ésta parte de la *Mecánica Celeste* que conecta la mecánica y la física con los fenómenos observados.

En el problema de los tres cuerpos la dinámica es tan compleja que aún tres siglos después continúa su estudio; basta hacer notar que las únicas soluciones explícitas que se conocen hasta hoy día son aquellas que se generan por configuraciones centrales. Estas son soluciones particulares en las que la configuración geométrica de los tres cuerpos resulta invariante con respecto al tiempo, de este modo o bien la configuración simplemente rota en un plano alrededor del centro de masa, o contracciones y expansiones tienen lugar mientras que las distancias mutuas entre los tres cuerpos permanecen en razones fijas. En tiempos recientes (2000) apareció un brillante trabajo donde se demuestra la existencia de una nueva órbita periódica [7], sin embargo su solución no es explícita.

Las configuraciones centrales han sido estudiadas por muchos grandes matemáticos: en 1767 Euler publicó un trabajo sobre el problema de los tres cuerpos [19]. En él demuestra la existencia de una solución explícita que consiste en 3 masas cualesquiera alineadas sobre una recta en rotación, con un cociente de distancias que depende del valor de las masas. Lagrange en 1772, demostró la existencia de otra familia de órbitas periódicas [22], esto es una solución donde los tres cuerpos están colocados sobre los vértices de un triángulo equilátero. Estas soluciones son conocidas como Lagrangianas, y fueron halladas en la naturaleza a principios del siglo XX, pues se encontró que el Sol, Júpiter y los asteroides troyanos (ubicados entre Marte y Júpiter) se encuentran formando una configuración de triángulo equilátero. En las últimas tres centurias el problema de los tres cuerpos ha jugado un papel de gran trascendencia en el desarrollo de la ciencia. Muchos grandes matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Leverrier, Adams, Newcomb, Hamilton, Delaunay, Poincaré, Sundman han dejado huella en este problema con sus valiosas aportaciones.

Las dificultades del problema de los tres cuerpos han motivado la introducción de nuevos métodos cualitativos por matemáticos como Poincaré, Birkhoff, Sundman y estos métodos han sido extendidos a muchas otras ramas de la ciencia. Ejemplos de ello son: el meteorólogo E. N. Lorenz descubrió los llamados atractores fuertes haciendo uso de computadoras al analizar sistemas atmosféricos. El astrónomo Michel Hénon descubrió caos al aplicar computadoras al problema de los tres cuerpos.

El análisis teórico iniciado por Poincaré y Birkhoff ha llegado a un punto cúspide con Kolmogorov, Arnold y Moser en el estudio del comportamiento de órbitas cercanas a movimientos periódicos (Teoría KAM).

La teoría de perturbaciones, el enfoque analítico, y el análisis cuantitativo han alcanzado recientemente un alto grado de perfección. El extraordinario avance de las computadoras ha permitido grandes mejoras en el análisis cuantitativo y ha revelado la extraordinaria complejidad del conjunto de soluciones. Muchos son los aspectos que han sido abordados en el problema de los tres cuerpos, como escapes, singularidades, regularización, evoluciones finales, movimientos periódicos, movimientos asintóticos, movimientos acotados, movimientos oscilatorios, movimientos de cuasi-colisión, movimientos caóticos, etc.

Cuando en un problema se torna de gran complejidad el continuar avanzando en su estudio, es posible tomar dos direcciones, una de ellas consiste en tomar casos particulares del problema, o lo que es equivalente considerar subproblemas, la otra es sumergir a este problema en otro más general, naturalmente el problema original resultará ser un caso particular del problema más general. Ejemplos de la primera dirección los tenemos en los subproblemas del problema de tres cuerpos: problema de Hill, problema restringido de los tres cuerpos y el problema isósceles. Como el ejemplo más notable en la segunda dirección tenemos el problema cargado de los tres cuerpos.

El problema cargado de los tres cuerpos es una generalización del proble-

ma Newtoniano clásico en donde se agrega una carga electrostática a cada partícula, y se estudia el efecto producido al hacer actuar al mismo tiempo, la fuerza Newtoniana de atracción y la fuerza Coulombiana de atracción o repulsión.

Cuando Newton publicó sus *Principia* se creó la idea de que nuestro conocimiento del movimiento planetario era total y absoluto, pues con las tres leyes del movimiento junto con la ley de la gravitación universal podían ser explicados en su totalidad los fenómenos celestes. Sin embargo esta idea ha ido desvaneciéndose paulatinamente, pues si bien es cierto que las contribuciones de Newton hoy en día siguen vigentes en un sin número de casos prácticos, no podemos dejar de aceptar que cada día aparecen nuevos fenómenos que el potencial Newtoniano no puede explicar. Esto ha dado lugar al estudio de diferentes tipos de potenciales, algunos homogéneos y otros cuasihomogéneos (suma de dos potenciales homogéneos con distinto grado de homogeneidad). Quizá el primer ejemplo de esto sea la órbita irregular de Mercurio, la cual no puede ser explicada con el problema clásico de los 2 cuerpos; en cambio, con el potencial de Manev $U = 1/r + k/r^2$ se tiene una mejor descripción, donde $k \approx 1/c^2$ y c es la velocidad de la luz.

A otro nivel de escala como en iones y otras partículas subatómicas, la dinámica se desarrolla bajo la acción de una mayor diversidad de fuerzas, razón por la cual el potencial Newtoniano se queda lejos de poder explicar adecuadamente el movimiento de las partículas. En el contexto de la mecánica clásica, algunos potenciales propuestos para su estudio consideran principalmente la fuerza Coulombiana.

En el capítulo 2 son tratados algunos aspectos de los problemas que son abordados en este trabajo:

Al problema de dos cuerpos o Problema de Kepler se le sitúa históricamente, luego se da un breve bosquejo de su planteamiento. En el Problema Newtoniano de los tres cuerpos se enuncian las evoluciones finales y las configuraciones

centrales. Finalmente en el Problema Cargado de los tres cuerpos se muestran las integrales de movimiento y se lleva a cabo un análisis del potencial cargado. En el capítulo 3 se estudia un problema de dos cuerpos. El estudio del movimiento de dos cuerpos tiene una larga historia, cuyo inicio está marcado por J. Kepler con el problema que lleva su nombre, a partir de éste han surgido un gran número de variantes: tomando perturbaciones isotrópicas, anisotrópicas, potenciales cuasihomogéneos, cargados, etc. [12, 37, 23]. A pesar de ello, este problema es de una naturaleza tal que a la fecha sigue siendo objeto de estudio por un considerable número de investigadores alrededor del mundo. Muchos matemáticos, desde la época en que este problema se planteó, han dejado su nombre con alguna aportación hacia él. El caso anisotrópico fue iniciado por M. Gutzwiller [20] para lograr una conexión entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Una combinación de aspectos cuasihomogéneos y anisotrópicos se muestra en el problema anisotrópico de Manev cuya dinámica contiene características clásicas, cuánticas y relativistas [8, 17, 18].

Una de las aplicaciones de mayor interés que tiene el considerar potenciales mixtos se encuentra en los satélites artificiales [32], debido a que para los satélites terrestres, una de las principales perturbaciones de una órbita Kepleriana de dos cuerpos es causada por el achatamiento de la tierra. Es importante mencionar que dentro del objetivo principal del tercer capítulo no figuran las aplicaciones, pues estas serán abordadas en futuros trabajos.

Una idea de reciente aparición se encuentra en el trabajo de Diacu, Pérez-Chavela y Santoprete [16], en el que se plantea el introducir un potencial mixto, es decir perturbar el problema de Kepler tanto isotrópicamente como anisotrópicamente, y un caso muy particular y de enorme interés resulta cuando este problema resulta integrable. Ello ocurre para un valor muy peculiar de uno de los parámetros, y éste es precisamente el punto de partida del tercer capítulo, pues éste tiene como principal objetivo el estudio topológico

del espacio fase para este caso particular [10, 11]. En la primera sección se enuncia el problema y las ecuaciones de movimiento, en la segunda sección se aplica el Teorema de Liouville-Arnold a el problema, en la tercera sección se estudia la foliación de la región angular, finalmente la última sección contiene la foliación de la región radial y el resultado principal del capítulo.

En el capítulo 4 tratamos la ley de áreas. Como sabemos en el problema planar de los tres cuerpos las soluciones de Euler dependen de las masas, mientras que las soluciones de Lagrange no. Sin embargo a partir de la solución de figura 8 de Chenciner y Montgomery [7] (la cual se tiene en el caso de masas iguales), el tratar de generalizar todo lo conocido para el caso de masas iguales al caso de masas arbitrarias, o bien, decir qué se puede generalizar y qué no, es un tema de investigación actual en *Mecánica Celeste* conocido como restricciones en las masas. Este capítulo es una contribución en esa línea, pues relaciona las configuraciones con las masas, tanto colineales como triangulares, y aun más, se demuestra cómo muchas de las propiedades de simetría que tiene la solución de figura 8 se pueden generalizar a masas arbitrarias por medio de un nuevo tipo de configuraciones a las que se les llamó *configuraciones proporcionales*. Sin embargo también se muestra cómo existen simetrías que sólo se pueden alcanzar en el caso de masas iguales. De esta forma el caso de masas iguales presenta muchas ventajas que no posee el caso de masas arbitrarias, sin embargo un subcaso del caso de masas arbitrarias (cuando una de las masas es considerablemente mas grande que las otras dos) presenta estabilidad lineal en la solución de Lagrange, lo que no tiene el caso de masas iguales. En este capítulo comenzamos enunciando una propiedad geométrica referente a las áreas generadas por los vectores de posición a la cual llamamos la ley de áreas, a partir de la cual definimos una función área y analizamos el comportamiento de esta función área cuando se tienen movimientos acotados en configuración central. En la primera sección introducimos coordenadas polares generalizadas con el fin de estudiar

los valores extremos de la función área basándonos únicamente en las formas, es decir, como la función área es invariante bajo el grupo de rotaciones en el plano, el usar estas coordenadas corresponde a tomar un cociente en homotecias. Es por ello que estos valores extremos están basados sólo en la forma de la configuración. Después hallamos una configuración donde se tiene área máxima; a esta configuración la llamamos MAC; también hallamos las distancias entre las partículas en esta configuración, dichos valores extremos y distancias entre las partículas se encuentran en función de las masas. En la segunda sección estudiamos las propiedades de la configuración de área máxima, estas propiedades dan origen a ciertas configuraciones que definimos como *configuraciones proporcionales* (colineales y triangulares). Dos hechos relevantes de esta sección son: las configuraciones centrales colineales coinciden con las configuraciones proporcionales colineales sólo en el caso de tener masas iguales, y las configuraciones proporcionales triangulares coinciden con las configuraciones isosceles sólo en el caso de tener masas iguales.

En el capítulo 5 se hace una clasificación exhaustiva de las evoluciones finales en el problema cargado [9], para ello se recuerda la región de Hill y su principal propiedad: cualquier curva solución al llegar a la frontera de la región de Hill o permanecer en ella, tendrá velocidad cero; después se describe una nueva región que sólo es posible tener en el caso cargado: la región de potencial cero; se enuncia la existencia de dos nuevos tipos de evoluciones finales que solo existen en el caso cargado. Posteriormente con el fin de dar una descripción cualitativa de las regiones de Hill, de potencial cero y de las evoluciones finales se hace una descomposición de la función potencial que es en cierto modo equivalente a un cociente en rotaciones. Esto da origen a una nueva región a la que se le llamó la región rho; al observar las propiedades de esta región se puede ver la gran similitud que guarda con la esfera de configuración de Moeckel [27], sin embargo el trabajo de Moeckel es apropiado para estudiar aspectos cualitativos en el problema Newtoniano, en cambio la región rho

resulta más apropiada para el análisis tanto cuantitativo como cualitativo en el problema cargado. Después de esto se estudian todos los casos que ofrece el potencial cargado, este capítulo finaliza con el estudio de las evoluciones finales cuando se tienen configuraciones centrales.

El capítulo 6 contiene las conclusiones generales de este trabajo, así como las investigaciones que se abordarán en el futuro.

Capítulo 2

Problemas de Dos y de Tres Cuerpos

2.1. Problema de Dos Cuerpos

J. Kepler logró enunciar sus tres leyes del movimiento planetario gracias a que se dió a la tarea de organizar los datos que Tycho Brahe recopiló durante un largo periodo de su vida, a continuación enunciamos estas tres leyes:

Primera Ley: Las trayectorias de los planetas son elipses, con el Sol en uno de los focos.

Segunda Ley: Cada uno de los planetas se mueve en una curva plana alrededor del Sol, de tal manera que el radio vector trazado del Sol a los planetas describe áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera Ley: Los cuadrados de los períodos varían directamente a los cubos de los ejes mayores de las elipses.

A partir de estas tres leyes, Newton fué capaz de deducir la ley del cuadrado inverso para planetas y posteriormente su ley de gravitación universal para todos los objetos. La manera en que lo hizo fue suponiendo que un objeto se mueve a lo largo de la elipse $r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$ bajo la influencia de una

fuerza central $F(r)$ localizada en el origen. Entonces la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir $F(r) \propto \frac{1}{r^2}$.

Ahora daremos un breve bosquejo del problema de dos cuerpos. El problema de dos cuerpos es el más simple en *Mecánica Celeste* y considera dos partículas con masas $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$ y posiciones $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ó 3 . Usando la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (x_1 - x_2),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1),$$

G es la constante de gravitación universal. Es posible escoger adecuadamente las unidades para tener $G = 1$; la distancia entre los cuerpos viene dada por $r_{12} = |x_1 - x_2|$. Este sistema de ecuaciones es equivalente al problema de fuerza central:

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{|r|^3} r,$$

donde $r = x_2 - x_1$, $\mu = m_1 + m_2$ y $r \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\dot{r} \in \mathbb{R}^d$, en este caso el centro de atracción es el origen, con intensidad μ . Las soluciones a este problema son totalmente conocidas, y son: círculos, elipses, parábolas o hipérbolas dependiendo de las condiciones iniciales. Una de las características más sobresalientes de este problema es que ha servido de inspiración para plantear, a partir de él, muchos otros problemas, algunos integrables como el que estudiamos en este trabajo y otros no integrables.

El carácter Newtoniano de la fuerza de atracción origina dos formas típicas de comportamiento asintótico para escapes al infinito; el hiperbólico $O(t)$ y el parabólico $O(t^{2/3})$. Del problema de fuerza central en una dimensión, con $\mu = 1$ [2] esto es evidente: de la integral de la energía.

$$\frac{|\dot{r}|^2}{2} - \frac{1}{r} = h,$$

hallamos que:

$$r = \sqrt{2h} \cdot t + O(\ln t) \quad \text{para } h > 0,$$

$$r = \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3} \quad \text{para } h = 0,$$

$$r \leq \frac{1}{|h|} \quad \text{para } h < 0.$$

Como consecuencia tenemos:

$$\text{movimiento hiperbólico } r \rightarrow \infty, \frac{r}{t} \rightarrow c > 0, |\dot{r}| \rightarrow c > 0,$$

$$\text{movimiento parabólico } r \rightarrow \infty, \frac{t}{r^{3/2}} \rightarrow 0, |\dot{r}| \rightarrow 0,$$

$$\text{movimiento elíptico o acotado } r \leq c < \infty,$$

donde c es una constante, no necesariamente la misma en todas las fórmulas.

2.2. Problema Newtoniano de los Tres Cuerpos.

El problema Newtoniano de los tres cuerpos se refiere al movimiento de tres partículas con masas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$ y posiciones $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^d$, ($d = 2$ o 3) que interactúan únicamente bajo sus atracciones gravitacionales. Usando la Ley de Gravitación Universal y la segunda Ley de Newton tenemos que las soluciones a este problema son las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \quad i = 1, 2, 3,$$

donde G es la constante de gravitación universal, la cual depende de las unidades de longitud, masa y tiempo que se tomen. Basta entonces escoger adecuadamente estas unidades para tener $G = 1$. De este modo el anterior sistema de ecuaciones es equivalente a:

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

A lo largo de este trabajo supondremos que el centro de masa permanece fijo en el origen, es decir:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0,$$

donde

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i.$$

Sean

$$\Delta_{ij} = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^{3d} | r_i = r_j\},$$

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij},$$

$$\tilde{X} = \left\{ (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^{3d} \mid \sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0 \right\}.$$

El espacio de configuración es

$$X = \tilde{X} - \Delta.$$

Una manera equivalente de escribir el sistema (2.1) es

$$m_i \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

donde la función potencial U está dada por:

$$U: X \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad U = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|r_j - r_i|}.$$

Sean $r = (r_1, r_2, r_3) \in X$ y $[M] = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_3, m_3, m_3)$, el vector de posición y la matriz de masas respectivamente, entonces el sistema (2.1) puede ser escrito como:

$$[M] \ddot{r} = \frac{\partial U}{\partial r} = \nabla U(r). \quad (2.3)$$

Este sistema de ecuaciones puede también ser visto como un sistema Hamiltoniano, para ello definimos $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^{3d}$, $p = [M]\dot{r}$, así $p_i = m_i \dot{r}_i$ es el momento conjugado de r_i correspondiente al i -ésimo cuerpo y el sistema (2.1) resulta ser:

$$\dot{r}_i = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} = -\frac{\partial H}{\partial r_i},$$

donde el Hamiltoniano es :

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U.$$

Las variables r y p son tradicionalmente llamadas variables conjugadas y se dice que p está conjugada con r .

En el caso del problema planar ($d = 2$) tenemos que $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, en lo que sigue nos restringiremos a este problema.

Si definimos $\rho_k = |r_i - r_j|$, donde (i, j, k) son las permutaciones cíclicas de $(1, 2, 3)$, la función potencial toma la forma:

$$U = \frac{m_1 m_2}{\rho_3} + \frac{m_1 m_3}{\rho_2} + \frac{m_2 m_3}{\rho_1}. \quad (2.4)$$

A lo largo de este trabajo usaremos $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$ para denotar que (i, j, k) permutan cíclicamente en $(1, 2, 3)$.

La energía cinética T , es una forma cuadrática positiva definida que viene dada por:

$$T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{r}_i|^2. \quad (2.5)$$

La energía total del sistema resulta ser:

$$h = T - U. \quad (2.6)$$

El momento de inercia del sistema viene dado por:

$$I : X \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |r_i|^2. \quad (2.7)$$

El momento de inercia se puede también caracterizar en terminos de los ρ_i 's.

Para ver esto consideremos la siguiente igualdad para r_3

$$m_1|r_1 - r_3|^2 + m_2|r_2 - r_3|^2 + m_3|r_3 - r_3|^2 = m_1\rho_2^2 + m_2\rho_1^2,$$

desarrollando cuadrados

$$m_1(|r_1|^2 + |r_3|^2 - 2r_1 \cdot r_3) + m_2(|r_2|^2 + |r_3|^2 - 2r_2 \cdot r_3) + m_3(|r_3|^2 + |r_3|^2 - 2r_3 \cdot r_3),$$

reordenando y agrupando

$$m_1|r_1|^2 + m_2|r_2|^2 + m_3|r_3|^2 + |r_3|^2(m_1 + m_2 + m_3) - 2r_3 \cdot (m_1r_1 + m_2r_2 + m_3r_3),$$

usando el hecho de que el centro de masa está en el origen y las definiciones de I y M obtenemos

$$m_1|r_1 - r_3|^2 + m_2|r_2 - r_3|^2 = 2I + |r_3|^2M,$$

multiplicando por m_3

$$m_1m_3|r_1 - r_3|^2 + m_2m_3|r_2 - r_3|^2 = 2m_3I + m_3|r_3|^2M,$$

de manera análoga para r_2 y r_1

$$m_1m_2|r_1 - r_2|^2 + m_2m_3|r_2 - r_3|^2 = 2m_2I + m_2|r_2|^2M,$$

$$m_1m_3|r_1 - r_3|^2 + m_1m_2|r_1 - r_2|^2 = 2m_1I + m_1|r_1|^2M,$$

sumando las tres últimas ecuaciones tenemos

$$2(m_1m_2|r_1 - r_2|^2 + m_1m_3|r_1 - r_3|^2 + m_2m_3|r_2 - r_3|^2) = 2MI + 2MI = 4MI,$$

finalmente

$$I = \frac{1}{2M}(m_1m_2\rho_3^2 + m_1m_3\rho_2^2 + m_2m_3\rho_1^2). \quad (2.8)$$

A continuación deduciremos la identidad de Lagrange-Jacobi, para ello necesitaremos una definición y un teorema de análisis.

Definición 1 Sea f una función de valores reales definida en un conjunto abierto O de \mathbb{R}^n , $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado p sobre O si $f(\lambda r) = \lambda^p f(r)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall r \in O$ para el que $\lambda r \in O$.

Recordemos el Teorema de Euler para funciones homogéneas.

Teorema 1 Si f es homogénea de grado p sobre O y si además f es diferenciable en r , entonces

$$r \cdot \nabla f(r) = pf(r).$$

Recíprocamente si $r \cdot \nabla f(r) = pf(r)$, $\forall r \in O$, O abierto en \mathbb{R}^n , entonces f es homogénea de grado p sobre O .

Consideremos

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |r_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i r_i \cdot r_i,$$

diferenciando con respecto al tiempo

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^3 m_i r_i \cdot \dot{r}_i,$$

diferenciando una vez más

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^3 m_i (r_i \cdot \ddot{r}_i + \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i) = 2T + \sum_{i=1}^3 m_i r_i \cdot \ddot{r}_i,$$

usando (2.2) y (2.3) tenemos que

$$\ddot{I} = 2T + \sum_{i=1}^3 r_i \cdot \frac{\partial U}{\partial r_i} = 2T + r \cdot \nabla U(r),$$

como U es homogénea de grado -1 , por el teorema de Euler (Teorema 1) se tiene

$$\ddot{I} = 2T - U. \quad (2.9)$$

La igualdad (2.9) se conoce como la identidad de Lagrange-Jacobi, usando la relación de la energía (2.6) podemos caracterizar (2.9) de otras dos maneras:

$$\ddot{I} = U + 2h. \quad (2.10)$$

$$\ddot{I} = T + h. \quad (2.11)$$

El espacio fase, es decir la variedad que contiene las posiciones y las velocidades es el haz tangente a X :

$$TX = \{ (r, p) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \mid r \in X, p \in T_r X \},$$

donde $T_r X = \mathbb{R}^6$ es el espacio tangente a X en r .

2.2.1. Evoluciones Finales.

Las Evoluciones Finales en este problema se refieren al estudio del comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$.

Si permitimos que $t \rightarrow \infty$ observamos que una partícula puede tener tres evoluciones distintas, la primera consiste en que llegue a infinito con velocidad distinta de cero (movimiento hiperbólico), la segunda que llegue a infinito con velocidad cero (movimiento parabólico) y la tercera que no llegue a infinito (movimiento acotado).

Ahora si en lugar de tener una partícula tenemos tres partículas podemos tener diferentes combinaciones de estos tipos de movimientos, Chazy encontró [6] que todas las soluciones $r_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ de el problema de los tres cuerpos se pueden dividir en siete clases cuando $t \rightarrow \infty$.

A continuación damos algunas definiciones que se usarán a lo largo de esta sección:

La máxima de las distancias entre las partículas

$$\Psi(t) = \max_i \rho_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

La mínima de las distancias entre las partículas

$$\psi(t) = \underset{i}{\text{mín}} \rho_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

La más grande de las magnitudes de los vectores de posición

$$\xi(t) = \underset{i}{\text{máx}} |r_i(t)|, \quad i = 1, 2, 3.$$

La más pequeña de las masas

$$m = \underset{i}{\text{mín}} m_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

La masa total

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i.$$

Es posible caracterizar las evoluciones finales de dos maneras, una en términos de las magnitudes de los vectores de posición [5] ($|r_i|$, $i = 1, 2, 3$), y la otra en términos de las distancias entre las partículas [2] (ρ_i , $i = 1, 2, 3$). A continuación se muestran las dos caracterizaciones en paralelo y después se lleva a cabo un análisis de la geometría del problema para mostrar la equivalencia entre ambas caracterizaciones.

1. H Evolución Final Hiperbólica

$$\begin{array}{ll} |r_i| \rightarrow \infty, & i = 1, 2, 3, \\ |\dot{r}_i| \rightarrow a_i > 0, & i = 1, 2, 3, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \rho_i \rightarrow \infty, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\rho_i}{t} \rightarrow c_i > 0, & i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Las tres partículas llegan a infinito con velocidad distinta de cero, ó de manera equivalente, las distancias entre las partículas son del orden de t , combinando ambas caracterizaciones observamos que:

$$\rho_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow U \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow h$$

y

$$|\dot{r}_i| \rightarrow a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow T \rightarrow c > 0,$$

por igualdad de límites tenemos que la energía h debe necesariamente ser positiva.

Las a_i , c y c_i representan constantes, tanto en este caso como en los subsecuentes.

2. HP_k Evolución Final Hiperbólica-Parabólica k

$$\begin{array}{lll} |r_i| \rightarrow \infty, & |\dot{r}_i| \rightarrow a_i > 0, & \rho_i \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_i}{t} \rightarrow c_i > 0, \\ |r_j| \rightarrow \infty, & |\dot{r}_j| \rightarrow a_j > 0, & \rho_j \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_j}{t} \rightarrow c_j > 0, \\ |r_k| \rightarrow \infty, & |\dot{r}_k| \rightarrow 0, & \rho_k \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_k}{t^{2/3}} \rightarrow c_k > 0, \end{array}$$

Las tres partículas llegan a infinito, dos con velocidad distinta de cero y una con velocidad cero, las dos partículas que llegan con velocidad distinta de cero se separan en un orden de $t^{2/3}$, como en el caso anterior este tipo de movimiento sólo es posible para energía h positiva, la justificación es análoga.

3. P Evolución Final Parabólica

$$\begin{array}{lll} |r_i| \rightarrow \infty, & i = 1, 2, 3, & \rho_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3, \\ |\dot{r}_i| \rightarrow 0, & i = 1, 2, 3, & \frac{\rho_i}{t^{2/3}} \rightarrow c_i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Las tres partículas llegan a infinito con velocidad cero ó equivalentemente las distancias entre las partículas son del orden de $t^{2/3}$, combinando ambas caracterizaciones observamos que:

$$\rho_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow U \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow h$$

y

$$|\dot{r}_i| \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow T \rightarrow 0,$$

por igualdad de límites tenemos que este tipo de movimiento sólo es posible para energía $h = 0$.

4. HE_k Evolución Final Hiperbólica-Elíptica k

$$\begin{array}{lll} |r_i| \rightarrow \infty, & |\dot{r}_i| \rightarrow a_i > 0, & \rho_i \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_i}{t} \rightarrow c_i > 0, \\ |r_j| \rightarrow \infty, & |\dot{r}_j| \rightarrow a_j > 0, & \rho_j \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_j}{t} \rightarrow c_j > 0, \\ \sup_{t \geq t_0} |r_k| < \infty, & & \rho_k < \infty. \end{array}$$

Dos partículas llegan a infinito con velocidad distinta de cero y una se mantiene acotada, la distancia entre las dos partículas que se escapan se mantiene acotada.

En este caso si

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \frac{m_i m_j}{\rho_k} \Rightarrow T \rightarrow h + \frac{m_i m_j}{\rho_k},$$

y

$$|\dot{r}_i| \rightarrow a_i > 0, |\dot{r}_j| \rightarrow a_j > 0 \Rightarrow T \rightarrow c > 0,$$

por igualdad de límites tenemos

$$h + \frac{m_i m_j}{\rho_k} = c > 0,$$

entonces $\forall h \in \mathbb{R}$ se puede escoger ρ_k , tal que $h + \frac{m_i m_j}{\rho_k} > 0$, pues si $h \geq 0$ cualquier valor de ρ_k sirve, y si $h < 0$, basta escoger ρ_k suficientemente pequeño $\left(\rho_k < \frac{m_i m_j}{-h}\right)$ para que la desigualdad se cumpla.

5. PE_k Evolución Final Parabólica-Elíptica k

$$\begin{aligned} |\tau_i| \rightarrow \infty, & & |\dot{r}_i| \rightarrow 0, & & \rho_i \rightarrow \infty, & & \frac{\rho_i}{t^{2/3}} \rightarrow c_i > 0, \\ |\tau_j| \rightarrow \infty, & & |\dot{r}_j| \rightarrow 0, & & \rho_j \rightarrow \infty, & & \frac{\rho_j}{t^{2/3}} \rightarrow c_j > 0, \\ \sup_{t \geq t_0} |\tau_k| < \infty, & & & & \rho_k < \infty. & & \end{aligned}$$

Dos partículas llegan a infinito con velocidad cero y una se mantiene acotada, la distancia entre las dos partículas que se escapan se mantiene acotada.

Si

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \frac{m_i m_j}{\rho_k} \Rightarrow T \rightarrow h + \frac{m_i m_j}{\rho_k}.$$

Por otro lado usando el hecho de que el centro de masa está en el origen

$$\sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 m_i \dot{r}_i = 0,$$

y que

$$|\dot{r}_i| \rightarrow 0 \iff \dot{r}_i \rightarrow 0,$$

tenemos que si

$$|\dot{r}_i|, |\dot{r}_j| \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{r}_i, \dot{r}_j \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{r}_k \rightarrow 0 \Rightarrow |\dot{r}_k| \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow 0,$$

entonces por igualdad de límites tenemos que

$$h + \frac{m_i m_j}{\rho_k} = 0,$$

pero

$$\frac{m_i m_j}{\rho_k} > 0 \Rightarrow h < 0,$$

es decir este movimiento sólo es posible para valores de energía h negativos.

6. B Evolución Final Acotada

$$\sup_{t \geq t_0} |r_i| < \infty, \quad i = 1, 2, 3, \quad \rho_i < \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Este tipo de evolución es posible sólo para valores de energía h negativos, veamos esto con dos proposiciones.

Proposición 1 Si $h > 0$, entonces $\Psi \geq ct$, donde $c \in \mathbb{R}^+$ es una constante positiva.

Demostración. Usando la identidad de Lagrange-Jacobi (2.11)

$$\ddot{I} = T + h \geq h > 0,$$

integrando dos veces obtenemos

$$I \geq c't^2,$$

con $c' > 0$, entonces de (2.8) tenemos que

$$\Psi \geq ct.$$

■

Es decir con $h > 0$ no es posible tener la evolución final acotada.

Proposición 2 *La evolución final acotada ($\rho_i < \infty$, $i = 1, 2, 3$, $t \rightarrow \infty$), no es posible si $h = 0$.*

Demostración. Supongamos lo contrario.

Si $\rho_i < \infty$, $i = 1, 2, 3 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+$, c constante tal que $U \geq c > 0$, por otro lado si $h = 0 \Rightarrow U = T$, con estos dos argumentos y la identidad de Lagrange-Jacobi (2.9) tenemos

$$\ddot{I} = 2T - U = 2U - U = U \Rightarrow$$

$$\ddot{I} = U \geq c > 0,$$

integrando dos veces obtenemos

$$I \geq a't^2,$$

con $a' > 0$, entonces de (2.8) tenemos que

$$\Psi \geq at,$$

con $a > 0$, la última desigualdad contradice el que $\rho_i < \infty$, $i = 1, 2, 3$, con $t \rightarrow \infty$. ■

Para describir el último tipo de evolución necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 2 *Límite superior de una función $f(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \inf_{N > 0} \sup_{t > N} f(t).$$

Definición 3 *Límite inferior de una función $f(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sup_{N > 0} \inf_{t > N} f(t).$$

7. OS Evolución Final Oscilatoria

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = \infty,$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) = \infty,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |r_i(t)| < \infty, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) < \infty,$$

$$\psi < \infty.$$

Este tipo de evolución es posible sólo para valores de energía h negativos. Ejemplos de evoluciones de las seis primeras clases fueron dadas en 1930 por Chazy [6]. La existencia de evoluciones oscilatorias fue probada en 1954 por K. A. Sitnikov [36].

De acuerdo al valor que tome la energía h (positivo, negativo o cero) tenemos que las evoluciones finales se pueden clasificar de la siguiente manera:

Tabla 1

Clasificación de las evoluciones finales de acuerdo al valor de la energía

$h > 0$	H, HP_k, HE_k
$h = 0$	P, HE_k
$h < 0$	B, OS, PE_k, HE_k

Analicemos ahora la geometría del problema. Por simplicidad consideraremos que el escape de la partícula ocurre en una dimensión.

Teorema 2 Si $r_i(t) \rightarrow \infty$ con $t \rightarrow \infty$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) = \infty$) entonces la velocidad de la i -ésima partícula en infinito viene dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_i(t)}{t}.$$

Demostración. Si $r_i(t) \rightarrow \infty$ con $t \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_i(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty},$$

aplicando la regla de l' Hôpital tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_i(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}_i(t).$$

■

Es importante mencionar que a pesar de una búsqueda exhaustiva, este resultado no fue hallado en la literatura, se encontraron una gran cantidad de resultados similares, por ello se tomo la decisión de incluir la demostración en este trabajo.

Recordemos que por definición dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial E son equivalentes si existen $a, b > 0$ tales que

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \forall x \in E.$$

Por definición tenemos que

$$m\xi^2 \leq m \sum_{i=1}^3 |r_i|^2 \leq 2I = \sum_{i=1}^3 m_i |r_i|^2 \leq \sum_{i=1}^3 m_i \xi^2 = M\xi^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2}\xi^2 \leq I \leq \frac{M}{2}\xi^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\xi \leq \sqrt{I} \leq \sqrt{\frac{M}{2}}\xi.$$

La última desigualdad nos muestra que $\xi(t)$ y \sqrt{I} tienen el mismo orden y que pueden ser consideradas como normas equivalentes en \mathbb{R}^6 , lo cual se denota como $\xi \sim \sqrt{I}$.

De manera análoga usando la caracterización del momento de inercia en términos de los ρ_i 's (2.8) tenemos

$$\frac{m^2}{2M}\Psi^2 \leq \frac{m^2}{2M} \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 \leq I \leq \frac{\Psi^2}{2M} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) \leq \frac{\Psi^2 M^2}{2M} = \frac{M}{2}\Psi^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m^2}{2M}\Psi^2 \leq I \leq \frac{M}{2}\Psi^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m}{\sqrt{2M}}\Psi \leq \sqrt{I} \leq \sqrt{\frac{M}{2}}\Psi,$$

como en el caso anterior tenemos que Ψ y \sqrt{I} pueden ser consideradas como normas equivalentes en \mathbb{R}^6 , $\Psi \sim \sqrt{I}$.

Sabemos que el momento de inercia mide el tamaño del sistema, sin embargo este también puede ser medido en términos de Ψ ó ξ ; pues hemos mostrado que Ψ , \sqrt{I} y ξ son todas ellas normas equivalentes, $\xi \sim \sqrt{I} \sim \Psi$.

Si $\Psi \sim \xi$ entonces cuando $t \rightarrow \infty$ se tienen las siguientes equivalencias

$$\Psi \rightarrow \infty \iff \xi \rightarrow \infty,$$

$$\Psi < \infty \iff \xi < \infty,$$

$$\Psi \sim t \iff \xi \sim t,$$

$$\Psi \sim t^{2/3} \iff \xi \sim t^{2/3}.$$

Por el Teorema 2 tenemos que si $r_i(t) \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_i(t)}{t} = v_i(\infty) = \dot{r}_i(\infty),$$

esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|r_i(t)|}{t} = |v_i(\infty)| = |\dot{r}_i(\infty)|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|r_i(t)|}{t} = c \geq 0 &\iff \\ |v_i(t)| \rightarrow c \geq 0, \text{ con } t \rightarrow \infty &\iff \\ |\dot{r}_i(t)| \rightarrow c \geq 0, \text{ con } t \rightarrow \infty, & \end{aligned}$$

donde c es una constante. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\rho_j = \Psi$ y $|\dot{r}_i| = \xi$ (Ver Figura 1), tenemos entonces que

$$\frac{\rho_j}{t} \rightarrow c > 0 \text{ con } t \rightarrow \infty \iff$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_j}{t} = c > 0 &\iff \\ \rho_j \sim t &\iff |\dot{r}_i| \sim t \iff \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|r_i|}{t} = a > 0 &\iff \\ |r_i| \rightarrow a > 0 \text{ con } t \rightarrow \infty & \end{aligned}$$

con a y c constantes, de manera análoga

$$\begin{aligned} \rho_j \rightarrow \infty, \frac{\rho_j}{t^{2/3}} \rightarrow c > 0 \text{ con } t \rightarrow \infty &\iff \\ \rho_j \rightarrow \infty, \frac{\rho_j}{t} \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty &\iff \\ |r_i| \rightarrow \infty, |\dot{r}_i| \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty. & \end{aligned}$$

Tenemos de este modo la equivalencia entre ambas caracterizaciones.

Resulta interesante observar cómo la ecuación de la energía combina ambas caracterizaciones:

$$U + h = T \geq 0 \iff \frac{m_1 m_2}{\rho_3} + \frac{m_1 m_3}{\rho_2} + \frac{m_2 m_3}{\rho_1} + h = \frac{1}{2} (m_1 |\dot{r}_1|^2 + m_2 |\dot{r}_2|^2 + m_3 |\dot{r}_3|^2) \geq 0$$

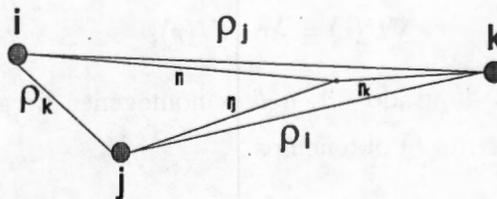


Fig 1 Escape de las partículas i y j

2.2.2. Configuraciones Centrales.

Definición 4 Una configuración central CC es una configuración en la que el vector aceleración es un múltiplo escalar de el vector posición, es decir

$$\ddot{r}_i = \lambda r_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si ahora multiplicamos la ecuación anterior por m_i resulta

$$m_i \ddot{r}_i = \lambda m_i r_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

usando (2.2) y (2.7) tenemos

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = m_i \ddot{r}_i = \lambda m_i r_i = \lambda \frac{\partial I}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

en notación vectorial se puede escribir como

$$\nabla U(r) = \lambda \nabla I(r). \quad (2.12)$$

La constante λ puede ser considerada como un multiplicador de Lagrange, de este modo una configuración central es un punto crítico del potencial U restringido a la variedad que se obtiene fijando el momento de inercia, $I = I_0 = \text{constante}$.

Si en (2.12) efectuamos el producto punto con r , obtenemos

$$r \cdot \nabla U(r) = \lambda r \cdot \nabla I(r),$$

como U es homogénea de grado -1 , e I es homogénea de grado 2, por el teorema de Euler (Teorema 1) obtenemos

$$\begin{aligned} -U = 2\lambda I &\implies \\ \lambda &= \frac{-U}{2I}. \end{aligned}$$

En el conjunto de las configuraciones centrales inducimos la siguiente relación: Dos configuraciones centrales están relacionadas si una puede ser llevada a la otra mediante una rotación ó una homotecia.

Claramente esta es una relación de equivalencia que induce de manera natural una partición. En este sentido cuando contemos configuraciones centrales será modulo esta relación de equivalencia. Una propiedad importante de las configuraciones centrales es que las colisiones totales en los sistemas Newtonianos de partículas se llevan a cabo de manera asintótica por configuraciones centrales [24].

Es bien sabido que en el Problema Newtoniano de los Tres Cuerpos existen exactamente 5 configuraciones centrales, 3 colineales ó de Euler y 2 de triángulo equilátero ó de Lagrange [24]. A continuación damos una breve descripción de ellas.

Configuraciones Centrales Eulerianas.

Las tres configuraciones centrales Eulerianas [19, 24] corresponden a las tres diferentes maneras de ordenar tres puntos en una línea recta.

Recordemos que $\rho_k = |r_i - r_j|$, $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$, si ahora colocamos tres partículas en una línea recta de tal manera que

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = x,$$

donde x es la raíz real positiva del polinomio

$$(m_1 + m_2)x^5 + (3m_1 + 2m_2)x^4 + (3m_1 + m_2)x^3 = \\ (m_2 + 3m_3)x^2 + (2m_2 + 3m_3)x + (m_2 + m_3),$$

y donde las velocidades se han asignado de manera apropiada, entonces las partículas se mueven periódicamente en elipses manteniendo la configuración colineal y donde la razón x también se mantiene constante (Ver Figura 2).

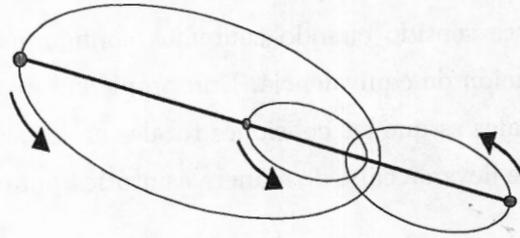


Fig 2 Movimiento elíptico Euleriano de los tres cuerpos

Este tipo de movimiento se conoce como Movimiento elíptico Euleriano de los tres cuerpos y es posible sólo para valores de energía negativos.

Observaciones:

1. De $\frac{\rho_1}{\rho_3} = x$ se sigue que $\rho_1 = x\rho_3$.
2. En esta configuración central colineal siempre se cumple que $\rho_2 = \rho_1 + \rho_3$, podemos entonces sustituir el valor de ρ_1 de la observación anterior para obtener $\rho_2 = \rho_3(x + 1)$.
3. De la ecuación de la energía tenemos $h = T - U \implies U + h = T \geq 0 \implies U \geq -h > 0$.
4. De las observaciones anteriores se sigue que

$$\frac{m_1 m_2}{\rho_3} + \frac{m_1 m_3}{\rho_3(x + 1)} + \frac{m_2 m_3}{x \rho_3} \geq -h > 0 \implies$$

$$-\frac{1}{h} \left\{ m_1 m_2 + \frac{m_1 m_3}{x + 1} + \frac{m_2 m_3}{x} \right\} \geq \rho_3.$$

5. La última desigualdad junto con las observaciones 1 y 2 nos muestran que en este movimiento existe una cota para la distancia máxima que puede existir entre las partículas y que ésta depende de la razón x , de las masas y del valor de energía h .

Configuraciones Centrales Lagrangianas.

Las dos configuraciones centrales Lagrangianas [22, 24] corresponden a los dos diferentes tipos de orientaciones del triángulo.

Si se colocan las tres partículas en los vértices de un triángulo equilátero y se asignan de manera apropiada las velocidades iniciales, entonces las partículas se moverán en elipses manteniendo siempre la configuración de triángulo equilátero (Ver Figura 3). Naturalmente dicho triángulo cambia de tamaño y rota.

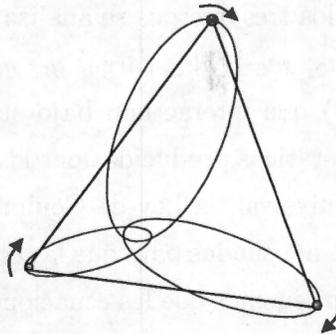


Fig 3 Movimiento elíptico Lagrangiano de los tres cuerpos

Este tipo de movimiento se conoce como Movimiento elíptico Lagrangiano de los tres cuerpos y es posible sólo para valores de energía negativos.

De la configuración de triángulo equilátero se sigue que

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3,$$

combinando este hecho con la observación 3 tenemos que

$$\frac{m_1 m_2}{\rho_1} + \frac{m_1 m_3}{\rho_1} + \frac{m_2 m_3}{\rho_1} \geq -h > 0 \implies$$

$$-\frac{1}{h} \{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3\} \geq \rho_1.$$

Observación:

6. Resulta interesante contemplar que en este movimiento el valor de las masas es irrelevante en cuanto a la forma de triángulo equilátero pero sí es relevante en cuanto al tamaño del triángulo, pues la desigualdad anterior muestra que el tamaño máximo del triángulo depende de las masas y del valor de energía h .

2.3. Problema Cargado de los Tres Cuerpos.

En el problema cargado de los tres cuerpos se analiza el movimiento de tres partículas con masas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$, cargas $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ y posiciones $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^d$, ($d=2$ ó 3) que interactúan bajo sus atracciones gravitacionales y las fuerzas electrostáticas producidas por las cargas. Haciendo uso de la Ley de Gravitación Universal, la Ley de Coulomb, la segunda Ley de Newton y tomando unidades adecuadas para que las constantes gravitacional y eléctrica sean iguales a uno tenemos que las ecuaciones de movimiento para este problema son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= \frac{m_1 m_2 - q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3} (r_2 - r_1) + \frac{m_1 m_3 - q_1 q_3}{|r_1 - r_3|^3} (r_3 - r_1), \\ m_2 \ddot{r}_2 &= \frac{m_2 m_3 - q_2 q_3}{|r_2 - r_3|^3} (r_3 - r_2) - \frac{m_2 m_1 - q_2 q_1}{|r_1 - r_2|^3} (r_2 - r_1), \\ m_3 \ddot{r}_3 &= -\frac{m_3 m_2 - q_3 q_2}{|r_2 - r_3|^3} (r_3 - r_2) - \frac{m_3 m_1 - q_3 q_1}{|r_1 - r_3|^3} (r_3 - r_1). \end{aligned}$$

Si ahora definimos $\lambda_k = m_i m_j - q_i q_j$ y $\rho_k = |r_i - r_j|$ con $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$ obtenemos que las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{r}_1 &= \frac{\lambda_3}{\rho_3^3} (r_2 - r_1) + \frac{\lambda_2}{\rho_2^3} (r_3 - r_1), \\
m_2 \ddot{r}_2 &= \frac{\lambda_1}{\rho_1^3} (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_3}{\rho_3^3} (r_2 - r_1), \\
m_3 \ddot{r}_3 &= -\frac{\lambda_1}{\rho_1^3} (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_2}{\rho_2^3} (r_3 - r_1).
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden que es equivalente a un sistema de 12 ó 18 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, dependiendo de si $r_i \in \mathbb{R}^2$ ó \mathbb{R}^3 .

El espacio de configuración y el espacio fase son los mismos que en el problema Newtoniano.

2.3.1. Integrales Primeras

Para hallar las integrales primeras consideraremos que $r_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$.

Sumando vectorialmente las tres ecuaciones del sistema (2.13) obtenemos:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \ddot{r}_i = 0.$$

Integrando ahora con respecto al tiempo:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{r}_i = l \in \mathbb{R}^3.$$

Esta última ecuación significa que el momento lineal es constante y por lo tanto tenemos que se cumple el Teorema de Conservación del Momento Lineal. Hemos obtenido así tres integrales primeras conocidas como Integrales del Momento Lineal.

Integrando nuevamente con respecto al tiempo obtenemos:

$$\sum_{i=1}^3 m_i r_i = c_1 t + c_2.$$

Por definición el centro de masa es:

$$CM = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i r_i}{M}.$$

Donde $M = \sum_{i=1}^3 m_i$, ahora colocamos el centro de masa en el origen, es decir hacemos $CM = 0$ obteniendo:

$$\sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0,$$

Hemos obtenido así las tres Integrales del Centro de Masa.

Efectuando ahora el producto cruz de r_i con la i -ésima ecuación correspondiente obtenemos:

$$\begin{aligned} r_1 \times m_1 \ddot{r}_1 &= \frac{\lambda_3}{\rho_3^3} r_1 \times (r_2 - r_1) + \frac{\lambda_2}{\rho_2^3} r_1 \times (r_3 - r_1), \\ r_2 \times m_2 \ddot{r}_2 &= \frac{\lambda_1}{\rho_1^3} r_2 \times (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_3}{\rho_3^3} r_2 \times (r_2 - r_1), \\ r_3 \times m_3 \ddot{r}_3 &= -\frac{\lambda_1}{\rho_1^3} r_3 \times (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_2}{\rho_2^3} r_3 \times (r_3 - r_1). \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y usando el hecho de que el producto cruz es anticonmutativo obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 r_i \times m_i \ddot{r}_i = 0.$$

Observación:

$$\frac{d}{dt}(r \times \dot{r}) = r \times \ddot{r} + \dot{r} \times \dot{r} = r \times \ddot{r}, \text{ pues } \dot{r} \times \dot{r} = 0.$$

Esto nos permite escribir la última ecuación como:

$$\sum_{i=1}^3 r_i \times m_i \ddot{r}_i = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^3 r_i \times m_i \dot{r}_i \right\} = 0,$$

entonces:

$$\frac{d}{dt}c = 0,$$

es decir el vector momento angular c es constante. Obteniendo así que se cumple el Teorema de Conservación del Momento Angular. Hemos obtenido de esta manera las tres Integrales del Momento Angular.

De manera análoga al caso anterior efectuamos el producto punto (\cdot) de \dot{r}_i con la i -ésima ecuación correspondiente obteniendo:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 \cdot m_1 \ddot{r}_1 &= \frac{\lambda_3}{\rho_3} \dot{r}_1 \cdot (r_2 - r_1) + \frac{\lambda_2}{\rho_2} \dot{r}_1 \cdot (r_3 - r_1), \\ \dot{r}_2 \cdot m_2 \ddot{r}_2 &= \frac{\lambda_1}{\rho_1} \dot{r}_2 \cdot (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_3}{\rho_3} \dot{r}_2 \cdot (r_2 - r_1), \\ \dot{r}_3 \cdot m_3 \ddot{r}_3 &= -\frac{\lambda_1}{\rho_1} \dot{r}_3 \cdot (r_3 - r_2) - \frac{\lambda_2}{\rho_2} \dot{r}_3 \cdot (r_3 - r_1).\end{aligned}$$

Sumando las tres ecuaciones y reorganizando obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 m_i \dot{r}_i \cdot \ddot{r}_i &= \\ \frac{\lambda_3}{\rho_3} (r_2 - r_1) (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) + \frac{\lambda_2}{\rho_2} (r_3 - r_1) (\dot{r}_1 - \dot{r}_3) + \frac{\lambda_1}{\rho_1} (r_3 - r_2) (\dot{r}_2 - \dot{r}_3) &= \\ - \left\{ \frac{\lambda_3}{\rho_3} (\dot{r}_1 - \dot{r}_2) + \frac{\lambda_2}{\rho_2} (\dot{r}_1 - \dot{r}_3) + \frac{\lambda_1}{\rho_1} (\dot{r}_2 - \dot{r}_3) \right\},\end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{r}_i \cdot \ddot{r}_i = - \left\{ \frac{\lambda_3}{\rho_3} (r_1 - r_2) \dot{r}_1 + \frac{\lambda_2}{\rho_2} (r_1 - r_3) \dot{r}_1 + \frac{\lambda_1}{\rho_1} (r_2 - r_3) \dot{r}_2 \right\}.$$

Observación: ya que

$$\frac{d}{dt} |\dot{r}|^2 = \frac{d}{dt} \dot{r} \cdot \dot{r} = 2\dot{r} \cdot \ddot{r} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r},$$

tenemos que la última ecuación puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{r}_i|^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\lambda_3}{|r_1 - r_2|} + \frac{\lambda_2}{|r_1 - r_3|} + \frac{\lambda_1}{|r_2 - r_3|} \right\}.$$

Entonces integrando con respecto al tiempo tenemos en el lado izquierdo la energía cinética y en el lado derecho la energía potencial, es decir :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{r}_i|^2.$$

$$U = \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1}.$$

Si denotamos por h a la energía total del sistema tenemos que ésta es constante, cumpliéndose la Conservación de la Energía, es decir:

$$h = T - U. \quad (2.14)$$

Hemos completado las diez integrales primeras para el problema cargado. Estas integrales no son independientes y son consecuencia de que tenemos un sistema aislado.

El Hamiltoniano ó energía produce una foliación del espacio fase en conjuntos invariantes llamados niveles de energía, donde H toma un valor constante h , esto permite simplificar el análisis a cada uno de estos niveles de energía .

2.3.2. Análisis de la función Potencial

En el caso Newtoniano vemos que la función potencial es siempre positiva, y más aún, los tres sumandos que la integran son positivos. Para el caso cargado tenemos que la función potencial puede tomar valores positivo, cero y negativo, todo ello con distintas combinaciones de los λ_i s. En la Tabla 2 se muestra toda la gama de posibilidades que ofrece dicha función. A lo largo de este trabajo los signos $+, 0, -$, asociados a U, h, λ_i , representan valores positivo, cero y negativo respectivamente.

La función potencial en el caso cargado viene dada por :

$$U : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad U = \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1},$$

claramente el signo de $\frac{\lambda_k}{\rho_k}$ depende del signo de λ_k .

Tabla 2

Potenciales en el problema cargado

Caso	U	λ_i	λ_j	λ_k
1	+	+	+	+
2	+	+	+	-
3	+	+	+	0
4	+	-	-	+
5	+	+	-	0
6	+	+	0	0
7	0	0	0	0
8	0	+	+	-
9	0	-	-	+
10	0	+	-	0
11	-	-	-	-
12	-	-	-	+
13	-	-	-	0
14	-	+	+	-
15	-	+	-	0
16	-	-	0	0

donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$. Los casos 2, 8 y 14 presentan la misma distribución de λ_i 's pero con potenciales positivo, cero y negativo respectivamente. De manera analoga los casos 4, 9 y 12 y los casos 5, 10 y 15.

Podemos tener distintas combinaciones de signos entre potencial y energía, pero de la integral de la energía $h = T - U$, se sigue que $h + U = T \geq 0$, y si ahora fijamos un valor de energía observamos que sólo las siguientes combinaciones son posibles:

Tabla 3

Relaciones entre potencial y energía

U	h
+	+
+	0
+	-
0	+
0	0
-	+

Las fuerzas repulsivas son producidas únicamente por las cargas, en cambio las fuerzas atractivas son producidas por las masas y por las cargas, cuando estas tienen el signo adecuado.

Con el fin de mostrar que los casos exhibidos para la función potencial son posibles a continuación se dan condiciones iniciales para cada caso.

Los vectores de posición son:

$$r_1 = (0, 0, 0), \quad r_2 = (1, 0, 0), \quad r_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right),$$

es decir hemos colocado las tres partículas en el plano xy de modo tal que

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$$

formando un triángulo equilátero, estos vectores son los mismos para todos los casos.

Casos donde el potencial toma valores siempre positivos (Ver Tabla 2):

Caso 1. $U > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$.

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Caso 3. $U > 0$, $\lambda_i, \lambda_j > 0$, $\lambda_k = 0$.

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = -1.$$

Caso 6. $U > 0$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j, \lambda_k = 0$.

$$m_1 = 3, m_2 = 6, m_3 = 1, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3.$$

Casos donde el potencial toma valores siempre negativos (Ver Tabla 2):

Caso 11. $U < 0$, $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k < 0$.

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, q_1 = 2, q_2 = 2, q_3 = 2.$$

Caso 13. $U < 0$, $\lambda_i, \lambda_j < 0$, $\lambda_k = 0$.

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 2.$$

Caso 16. $U < 0$, $\lambda_i < 0$, $\lambda_j, \lambda_k = 0$.

$$m_1 = 3, m_2 = 6, m_3 = 1, q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 1.$$

Casos donde el potencial toma valores positivos, negativos y cero (Ver Tabla 2):

Casos 2, 8 y 14. $\lambda_i, \lambda_j > 0$, $\lambda_k < 0$.

$$U > 0 : m_1 = 2, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{3}{5}, q_2 = \frac{3}{5}, q_3 = \frac{3}{5},$$

$$U = 0 : m_1 = 2, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, q_3 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$U < 0 : m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = \frac{1}{2}, q_1 = 2, q_2 = 2, q_3 = \frac{1}{10}.$$

Casos 4, 9 y 12. $\lambda_i, \lambda_j < 0$, $\lambda_k > 0$.

$$U > 0 : m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = \frac{1}{10}, q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{2},$$

$$U = 0 : m_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, m_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{2},$$

$$U < 0 : m_1 = \frac{3}{5}, m_2 = \frac{3}{5}, m_3 = \frac{3}{5}, q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{2}.$$

Casos 5, 10, y 15. $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$, $\lambda_k = 0$.

$$U > 0 : m_1 = 2, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = 1, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1,$$

$$U = 0 : m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 1, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 2,$$

$$U < 0 : m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = 1.$$

Caso 7 donde el potencial toma siempre el valor cero (Ver Tabla 2)

$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k = 0$.

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1.$$

Este caso posee importancia debido a que, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 = 0$ y basta escoger $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = \dot{r}_3 = 0$ para tener un equilibrio permanente en el sistema (2.13).

Podemos interpretar físicamente el signo de los λ_i s como sigue:

Si $\lambda_i > 0$ entonces la fuerza entre las partículas j y k es atractiva.

Si $\lambda_i < 0$ entonces la fuerza entre las partículas j y k es repulsiva.

Si $\lambda_i = 0$ entonces la fuerza entre las partículas j y k se encuentra en equilibrio. Donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$.

Capítulo 3

Foliación del espacio fase para el Problema de Kepler con perturbaciones anisotrópicas.

El estudio del movimiento de dos cuerpos tiene una larga historia, cuyo inicio está marcado por J. Kepler con el problema que lleva su nombre. A partir de este han surgido un gran número de variantes: tomando perturbaciones isotrópicas, anisotrópicas, potenciales cuasihomogéneos, cargados, etc. [12, 37, 23]. A pesar de ello, este problema es de una naturaleza tal que a la fecha sigue siendo objeto de estudio por un considerable número de investigadores alrededor del mundo. Desde la época en que este problema se planteó, muchos matemáticos han dejado su nombre con alguna aportación hacia él. El caso anisotrópico fue iniciado por M. Gutzwiller [20] para lograr una conexión entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Una combinación de aspectos cuasihomogéneos y anisotrópicos se muestra en el problema anisotrópico de Manev cuya dinámica contiene características clásicas, cuánticas y relativistas [8, 17, 18].

Una de las aplicaciones de mayor interés que tiene el considerar poten-

ciales mixtos se encuentra en los satélites artificiales [32], debido a que para los satélites terrestres una de las principales perturbaciones de una órbita Kepleriana de dos cuerpos es causada por el achatamiento de la tierra.

Una idea de reciente aparición se encuentra en el trabajo de Diacu, Pérez-Chavela y Santoprete [16], en el que se plantea la introducción de un potencial mixto, es decir perturbar el problema de Kepler tanto isotrópica como anisotrópicamente, y un caso muy particular y de enorme interés resulta cuando este problema es integrable, ello ocurre para un valor muy peculiar de uno de los parámetros y es aquí donde inicia este capítulo, pues su principal objetivo es el estudio topológico del espacio fase para este caso particular.

El estudio de los sistemas Hamiltonianos está fuertemente ligado a los problemas de la *Mecánica Celeste*, es bien sabido que un sistema Hamiltoniano tiene al menos una integral primera, el Hamiltoniano H . Cada integral primera F define a través de su imagen inversa $F^{-1}(f)$ conjuntos que son invariantes por el flujo del sistema. Si el sistema Hamiltoniano tiene más de una integral primera independiente y en involución con H , entonces estudiamos la topología de las intersecciones de los conjuntos definidos por la imagen inversa de las integrales primeras y la foliación del espacio fase por estos conjuntos, para ello usamos el famoso Teorema de Liouville-Arnold, el cual se enuncia mas adelante. En este capítulo estudiamos un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y dos integrales primeras independientes y en involución (que es por lo tanto integrable). La forma tradicional de trabajar estos problemas con dos grados de libertad es: a partir de una integral primera F_1 , la cual define por medio de su imagen inversa $F_1^{-1}(f_1)$ una subvariedad de dimensión tres en el espacio fase, si contamos con otra integral primera F_2 tendremos análogamente otra subvariedad de dimensión tres en el espacio fase $F_2^{-1}(f_2)$, ambos tipos de subvariedades resultan invariantes por el flujo del sistema Hamiltoniano al igual que las intersecciones entre estas subvariedades, naturalmente la intersección de dos variedades de di-

mensión tres es genéricamente una variedad de dimensión dos (en sistemas Hamiltonianos generalmente toros o cilindros), y en condiciones apropiadas el flujo sobre esta variedad es conjugado con el flujo lineal (en el toro o en el cilindro). Sin embargo en este capítulo tomamos un camino nuevo: primero se lleva el problema a coordenadas polares (r, θ) , se descompone al espacio fase en dos partes: una que contiene posición y velocidad angulares, llamada región angular y la otra que contiene posición y velocidad radiales, llamada región radial, después usando una de las integrales primeras y una adecuada proyección logramos encontrar una foliación en la región angular, luego mediante manipulaciones algebraicas apropiadas y usando las dos integrales primeras encontramos la foliación sobre la región radial. Finalmente para encontrar las variedades de dimensión dos en el espacio fase es suficiente con tomar el producto de las curvas de ambas regiones.

3.1. Problema de Kepler Perturbado.

Consideremos el siguiente Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + U(q), \quad (3.1)$$

donde $q = (x, y)$ es el vector de posición, $p = (p_x, p_y)$ es el vector momento, $\frac{p^2}{2}$ es la energía cinética y la función potencial viene dada por

$$U(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{b}{\mu x^2 + y^2},$$

donde las constantes $b > 0$ y $\mu \geq 1$ son los parámetros de la perturbación (el análisis para los valores $0 < \mu < 1$ se hace en forma similar). El sistema Hamiltoniano asociado viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\nabla U(q).\end{aligned}$$

Pasando el Hamiltoniano (3.1) a coordenadas polares $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ [26] tenemos

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{b}{\mu x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} - \frac{b}{\mu r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} - \frac{b}{r^2 (\mu \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}.\end{aligned}$$

Si ahora definimos $\epsilon = \mu - 1$, $\epsilon \geq 0$ tenemos

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} - \frac{b}{r^2 (1 + \epsilon \cos^2 \theta)}. \quad (3.2)$$

El sistema Hamiltoniano correspondiente a (3.2) viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= p_r, \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{r^2}, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{b\epsilon \sin 2\theta}{r^2 (1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2}, \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \frac{2b}{r^3 (1 + \epsilon \cos^2 \theta)}.\end{aligned} \quad (3.3)$$

El espacio fase E está dado por

$$E = \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2,$$

donde $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in S^1$, $p_r \in \mathbb{R}$, $p_\theta \in \mathbb{R}$. Debido a la naturaleza de este problema vamos a reagrupar el espacio fase de la siguiente manera

$$E = (S^1 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}),$$

de este modo definimos las regiones: angular R_θ y radial R_r como

$$\begin{aligned} R_\theta &= \{(\theta, p_\theta) \mid \theta \in S^1, p_\theta \in \mathbb{R}\}, \\ R_r &= \{(r, p_r) \mid r \in \mathbb{R}^+, p_r \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

y el espacio fase resulta

$$E = R_\theta \times R_r.$$

Sabemos que el Hamiltoniano o energía total es una integral primera y ahora mostraremos que nuestro sistema Hamiltoniano (3.3) tiene otra integral primera. Sea la función G dada por

$$G : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\theta, p_\theta, r, p_r) = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta}.$$

Esta función G está en involución con el Hamiltoniano. Para ver esto tomemos el paréntesis de Poisson de H y G

$$\begin{aligned} \{H, G\} &= \left(\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^t \left(\frac{\partial G}{\partial p_r}, \frac{\partial G}{\partial p_\theta} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}, \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \right)^t \left(\frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial p_\theta} - \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= \left(\frac{-b\epsilon \sin 2\theta}{r^2(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} \right) (p_\theta) - \left(\frac{p_\theta}{r^2} \right) \left(\frac{-b\epsilon \sin 2\theta}{(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

tenemos entonces que $\{H, G\} = 0$ y como H y G son independientes del tiempo t se sigue que G es una integral primera [26, 16].

Verifiquemos ahora la independencia lineal. Sea

$$\begin{pmatrix} dH \\ dG \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dp_r \\ dp_\theta \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} - \frac{2g}{r^3} & \frac{-b\epsilon \operatorname{sen} 2\theta}{r^2(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} & p_r & \frac{p_\theta}{r^2} \\ 0 & \frac{-b\epsilon \operatorname{sen} 2\theta}{(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} & 0 & p_\theta \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz A debe ser dos en un conjunto de medida de Lebesgue positiva en el espacio fase, o de manera equivalente, los renglones de la matriz A deben ser linealmente independientes salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero. La matriz A es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} - \frac{2g}{r^3} & 0 & p_r & 0 \\ 0 & \frac{-b\epsilon \operatorname{sen} 2\theta}{(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} & 0 & p_\theta \end{pmatrix}.$$

Para que el primer renglón se anule se necesita que $r = 2g$ y $p_r = 0$, estas condiciones se cumplen en la variedad

$$\{(r, \theta, p_r, p_\theta) \mid r = 2g, \theta \in S^1, p_r = 0, p_\theta \in \mathbb{R}\}.$$

Para que el segundo renglón se anule se necesita que $p_\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, estas condiciones se cumplen en las variedades

$$\left\{ (r, \theta, p_r, p_\theta) \mid r \in (0, \infty), \theta = \frac{\pi}{2}, p_r \in \mathbb{R}, p_\theta = 0 \right\},$$

$$\left\{ (r, \theta, p_r, p_\theta) \mid r \in (0, \infty), \theta = \frac{3\pi}{2}, p_r \in \mathbb{R}, p_\theta = 0 \right\}.$$

Todas estas variedades tienen dimensión dos en el espacio fase, por lo tanto H y G son linealmente independientes salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Tenemos un sistema Hamiltoniano (3.3) con dos grados de libertad (r, θ) , y con dos integrales de movimiento H y G , independientes y en involución, por lo tanto nuestro sistema es integrable.

Observemos ahora que la función de valores reales G solamente depende de las variables angulares (θ, p_θ) , por lo tanto podemos considerar la proyección sobre la región angular π y una función \bar{G} definida en la región angular R_θ , es decir:

$$\pi : E \rightarrow R_\theta, \quad \pi(\theta, p_\theta, r, p_r) = (\theta, p_\theta)$$

$$\bar{G} : R_\theta \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{G}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta},$$

de este modo $G = \bar{G} \circ \pi$, y la función \bar{G} produce una foliación en la región angular en curvas donde g es constante, i.e. si g es un valor regular de \bar{G} , entonces $(\bar{G})^{-1}(g)$ es una subvariedad de R_θ . Esto nos permite definir los conjuntos

$$I_g = \{(\theta, p_\theta, r, p_r) \in E \mid G(\theta, p_\theta, r, p_r) = g\},$$

$$\bar{I}_g = \{(\theta, p_\theta) \in R_\theta \mid \bar{G}(\theta, p_\theta) = g\},$$

$$I_g = \bar{I}_g \times R_r,$$

cada \bar{I}_g representa una curva en la región angular R_θ , mientras que cada I_g es una subvariedad de dimensión 3 en el espacio fase E . Por otro lado como el Hamiltoniano es una integral primera, tenemos que para una h fija

$$h = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{1}{r} - \frac{b}{r^2(1 + \epsilon \cos^2 \theta)},$$

reordenando esta ecuación obtenemos

$$h = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} \right),$$

usando la definición de la función G , para un valor fijo g resulta

$$h = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{g}{r^2},$$

la última ecuación nos permite definir el conjunto

$$I_{gh} = \left\{ (r, p_r) \in R_r \mid \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{g}{r^2} = h \right\}.$$

De la definición de I_{gh} tenemos que para cada g fija, al variar h se tiene una foliación de la región radial R_r por las I_{gh} .

3.2. Topología de Sistemas Hamiltonianos.

En esta sección aplicamos el Teorema de Liouville-Arnold a nuestro sistema Hamiltoniano integrable (3.3), definido por el problema de Kepler con perturbaciones anisotrópicas. Recordamos que un flujo definido en un subespacio del espacio fase es llamado completo si sus soluciones están definidas para todo tiempo.

Teorema 3 (Teorema de Liouville-Arnold) (Arnold 1963). *El sistema Hamiltoniano (3.3) con dos grados de libertad definido en el espacio fase E tiene al Hamiltoniano H y a G como integrales primeras independientes y en involución. Si $H^{-1}(h) \cap G^{-1}(g) \neq \emptyset$ y (h, g) es un valor regular del mapeo (H, G) entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

1. $H^{-1}(h) \cap G^{-1}(g)$ es una subvariedad de E de dimensión 2 invariante bajo el flujo de (3.3).
2. Si el flujo en una componente conexa Ω de $H^{-1}(h) \cap G^{-1}(g)$ es completo, entonces Ω es difeomorfo a el toro $S^1 \times S^1$, o bien al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.
3. El flujo en Ω es conjugado al flujo lineal en $S^1 \times S^1$ o en $S^1 \times \mathbb{R}$.

Para más detalles sobre sistemas Hamiltonianos y la demostración de este teorema ver Abraham y Marsden [1] o bien Arnold [3, 4]. Es importante

observar que en el caso general Ω puede ser difeomorfo al plano \mathbb{R}^2 , pero este no es nuestro caso debido a que tenemos simetría con respecto a la variable θ , y consecuentemente la variedad Ω debe tener un factor S^1 .

3.3. Foliación de R_θ por \bar{G} .

Para estudiar cómo la región angular R_θ se encuentra foliada por las curvas \bar{I}_g es necesario hallar los puntos críticos de \bar{G} . Un punto $(\theta, p_\theta) \in R_\theta$ es un punto crítico de

$$\bar{G} : R_\theta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{G}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta},$$

si es una solución del sistema

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_\theta} = 0, \quad (3.4)$$

el valor $g \in \mathbb{R}$ es un valor crítico de \bar{G} si existe un punto crítico $(\theta, p_\theta) \in R_\theta$ tal que $\bar{G}(\theta, p_\theta) = g$. Si $g \in \mathbb{R}$ no es un valor crítico entonces es un valor regular, y entonces $(\bar{G})^{-1}(g) = \bar{I}_g$ es una subvariedad de codimensión uno con respecto a la dimensión de R_θ , es decir \bar{I}_g es una curva en R_θ . Del sistema (3.4) tenemos

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \theta} = \frac{-b\epsilon \sin 2\theta}{(1 + \epsilon \cos^2 \theta)^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_\theta} = p_\theta = 0,$$

los puntos críticos de \bar{G} son $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, y los valores críticos de \bar{G} son $\bar{G}(\frac{\pi}{2}, 0) = \bar{G}(\frac{3\pi}{2}, 0) = -b$ y $\bar{G}(0, 0) = \bar{G}(\pi, 0) = -\frac{b}{1 + \epsilon} < 0$, ahora bien como $b > 0$ entonces $-b < 0$, debemos estudiar la foliación de R_θ por las $\bar{I}_g = (\bar{G})^{-1}(g)$ para los casos:

$g < -b$, $g = -b$, $-b < g < -\frac{b}{1+\epsilon}$, $g = -\frac{b}{1+\epsilon}$ y $-\frac{b}{1+\epsilon} < g$, para ello recordemos que

$$\bar{I}_g = \left\{ (\theta, p_\theta) \in R_\theta \mid \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} = g \right\}.$$

De la ecuación

$$\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} = g$$

se sigue que

$$\frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} + g = \frac{p_\theta^2}{2} \geq 0. \quad (3.5)$$

Caso $g < -b$.

De la definición de \bar{I}_g , tenemos que

$$\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} = g < -b,$$

y esto implica que

$$0 \leq \frac{p_\theta^2}{2} < \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} - b$$

de donde se sigue

$$0 < \frac{-b\epsilon \cos^2 \theta}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} < 0,$$

la última desigualdad es una contradicción y significa que para $g < -b$ no existe movimiento, o de manera equivalente no existe ninguna curva en R_θ con $g < -b$.

Caso $g = -b$.

Ahora tenemos que

$$\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} = -b,$$

lo cual nos lleva a

$$0 \leq \frac{p_\theta^2}{2} = \frac{-b\epsilon \cos^2 \theta}{1 + \epsilon \cos^2 \theta} \leq 0,$$

y entonces

$$p_\theta = 0, \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

sin embargo como $\theta \in S^1$ es suficiente con tomar $k = 0, 1$, es decir para $g = -b$ tenemos sólo dos puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ en R_θ .

Caso $-b < g < \frac{-b}{1+\epsilon}$.

Nuestra atención se centrará en probar la desigualdad $|\cos \theta| \leq \sqrt{\frac{b+g}{-g\epsilon}} < 1$, ello naturalmente implica que el ángulo θ se encuentra en dos vecindades alrededor de los puntos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, luego haremos algunas observaciones sobre la velocidad angular p_θ . Con todo esto se sigue que la \bar{I}_g correspondiente es equivalente a la unión de dos círculos con intersección vacía, es decir $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$.

De (3.5) se sigue que

$$\frac{b}{1+\epsilon \cos^2 \theta} \geq -g,$$

y esto implica que

$$\cos^2 \theta \leq \frac{(b+g)}{-g\epsilon},$$

de donde se sigue la primera parte de la desigualdad

$$|\cos \theta| \leq \sqrt{\frac{b+g}{-g\epsilon}}. \quad (3.6)$$

Como $b+g > 0$, $-g > 0$ y $\epsilon > 0$ entonces $\frac{b+g}{-g\epsilon} > 0$, y la condición $g < \frac{-b}{1+\epsilon}$

nos lleva a $\sqrt{\frac{b+g}{-g\epsilon}} < 1$

De este modo tenemos que $|\cos \theta| < 1$.

Ahora haremos algunas observaciones sobre la velocidad angular p_θ , a partir de la ecuación $0 \leq \frac{p_\theta^2}{2} = \frac{b}{1+\epsilon \cos^2 \theta} + g$ se sigue que:

1. Tenemos una función implícita en las variables (θ, p_θ) , continua y simétrica respecto al eje θ .

2. p_θ se encuentra acotada para valores de b , g y ϵ dados.

3. p_θ se anula cuando $\cos^2 \theta = \frac{b+g}{-g\epsilon}$

4. p_θ alcanza su valor máximo $2(b+g)$ cuando $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

De todo esto se sigue que la \bar{I}_g está formada por dos curvas cerradas simples con intersección vacía, es decir $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$

Caso $g = -\frac{b}{1+\epsilon}$.

De la ecuación (3.5) y esta condición obtenemos

$$0 \leq \frac{p_\theta^2}{2} = \frac{b\epsilon \operatorname{sen}^2 \theta}{(1+\epsilon \cos^2 \theta)(1+\epsilon)}, \quad (3.7)$$

y esto implica $\theta \in [0, 2\pi]$, además p_θ se anula cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por lo tanto \bar{I}_g está formada por la unión de dos curvas cerradas simples que se intersectan en dos puntos, por lo tanto $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$ pero ahora $S^1 \cap S^1 \approx \{\text{dos puntos}\} \approx S^0$ (Ver Figura 4).

Caso $-\frac{b}{1+\epsilon} < g$.

De la ecuación (3.5) y esta condición obtenemos

$$\frac{p_\theta^2}{2} = \frac{b}{1+\epsilon \cos^2 \theta} + g > \frac{b\epsilon \operatorname{sen}^2 \theta}{(1+\epsilon \cos^2 \theta)(1+\epsilon)} \geq 0 \quad (3.8)$$

De la expresión anterior tenemos

1. $\theta \in [0, 2\pi]$
2. p_θ no se anula.
3. p_θ toma sus valores en dos intervalos cerrados

Por lo que \bar{I}_g es equivalente a dos sinusoides y $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$ (Ver la Figura 4).

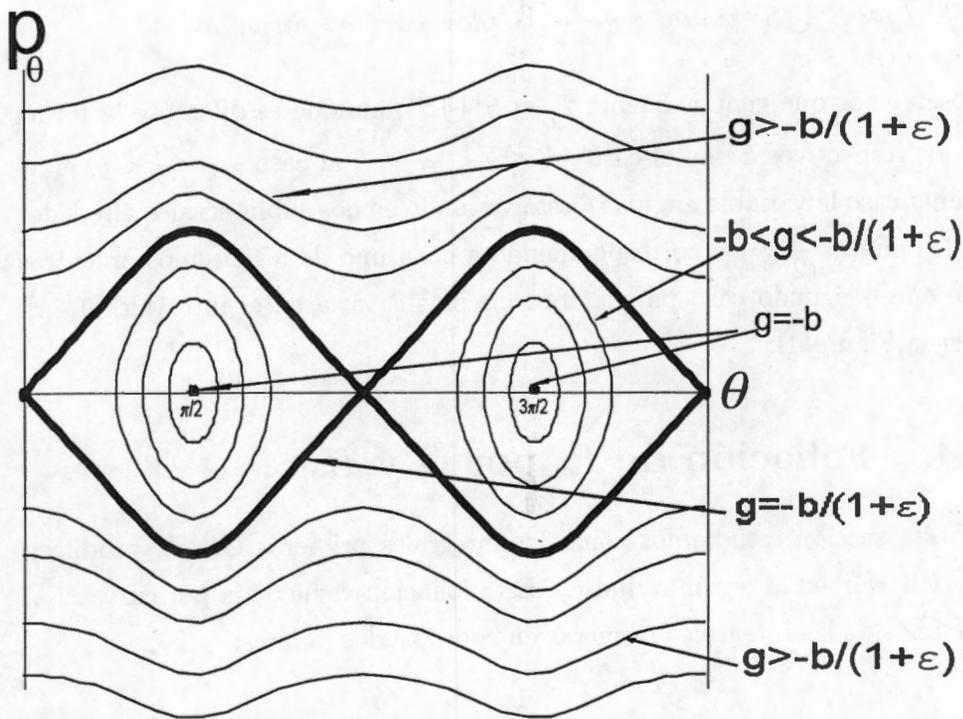


Fig 4 Foliación de la región angular R_θ por las \bar{I}_g

Podemos resumir los resultados de esta sección en el siguiente

Teorema 4 La región R_θ se encuentra foliada por los conjuntos \bar{I}_g , donde

1. $\bar{I}_g = \emptyset$ para $g < -b$.
2. $\bar{I}_g \approx S^0$ para $g = -b$.
3. $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$ para $-b < g < \frac{-b}{1+\epsilon}$. (dos círculos disjuntos)
4. $\bar{I}_g \approx \{S^1 \cup S^1, S^1 \cap S^1 \approx S^0\}$ para $g = \frac{-b}{1+\epsilon}$.
(dos círculos que se intersectan en dos puntos)

5. $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$ para $g > \frac{-b}{1+\epsilon}$. (dos círculos disjuntos)

Observemos que genéricamente $\bar{I}_g \approx S^1 \cup S^1$, aunque es diferente la forma de los respectivos S^1 en el caso $-b < g < -\frac{b}{1+\epsilon}$ al caso $-\frac{b}{1+\epsilon} < g$, en el primer caso la variable angular θ esta variando en dos subintervalos alrededor de los puntos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ correspondiendo a cada uno de los círculos, mientras que en el segundo caso para ambos círculos θ varía en el intervalo $[0, 2\pi]$. (Ver la Figura 4).

3.4. Foliación de R_r por G y H .

En esta sección estudiamos cómo las integrales primeras G y H producen una foliación en la región radial R_r . Esta foliación viene dada por curvas I_{hg} . Partimos de las integrales primeras en coordenadas polares:

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{1}{r} - \frac{b}{r^2(1+\epsilon \cos^2 \theta)},$$

$$G = \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1+\epsilon \cos^2 \theta},$$

es posible ver el Hamiltoniano como

$$H = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_\theta^2}{2} - \frac{b}{1+\epsilon \cos^2 \theta} \right),$$

lo cual combinado con G produce

$$H = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{G}{r^2},$$

la última ecuación nos permite definir el conjunto I_{hg} para $h, g \in \mathbb{R}$ como

$$I_{hg} = \left\{ (r, p_r) \in R_r \mid h = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{g}{r^2} \right\}.$$

De este modo los conjuntos I_{hg} producen una foliación en la región radial R_r en curvas donde h y g son constantes. La ecuación

$$h = \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{g}{r^2},$$

es equivalente a

$$p_r^2 = 2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right), \quad (3.9)$$

la cual es una función implícita en dos variables (r, p_r) , con los parámetros g y h . De la ecuación (3.9) se sigue que

$$0 \leq p_r^2 = 2 \left(\frac{hr^2 + r - g}{r^2} \right), \quad (3.10)$$

y esto nos dice que el polinomio de segundo grado en r dado por $f(r) = hr^2 + r - g$ debe ser no negativo, es decir $hr^2 + r - g \geq 0$. Nuestro objetivo es estudiar como son las curvas I_{gh} para los diferentes valores de h y g .

En primer lugar analizaremos las condiciones para que $hr^2 + r - g$ tenga raíces reales, para ello consideremos la ecuación $hr^2 + r - g = 0$, la cual despejada en r produce

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4hg}}{2h}, \quad (3.11)$$

y naturalmente tenemos la condición $1 + 4hg \geq 0$ si $h \neq 0$, para el caso $h = 0$ la raíz es $r = g$, por otro lado tenemos tres casos inmediatos:

$g < 0$, $h < 0$ implica $hg > 0$ y $1 + 4hg \geq 0$,

$g = 0$, $h < 0$ implica $hg = 0$ y $1 + 4hg \geq 0$,

$g > 0$, $h > 0$ implica $hg > 0$ y $1 + 4hg \geq 0$.

Para el caso $g > 0$, $h < 0$ tenemos que dada $g > 0$ entonces $-\frac{1}{4g} \leq h < 0$ y

dada $h < 0$ entonces $0 < g \leq -\frac{1}{4h}$.

Para el caso $g < 0$, $h > 0$ tenemos que dada $g < 0$ entonces $0 < h \leq -\frac{1}{4g}$ y

dada $h > 0$ entonces $-\frac{1}{4h} \leq g < 0$.

Ahora analizaremos las curvas I_{gh} para los distintos valores de g y h , el orden del análisis será como sigue

$g < 0$	$h < 0$
	$h = 0$
	$h > 0$

$g = 0$	$h < 0$
	$h = 0$
	$h > 0$

$g > 0$	$h < 0$
	$h = 0$
	$h > 0$

Caso $g < 0$.

Este análisis depende del signo de h , por lo tanto tenemos

- $h < 0$.

Tenemos que $f(r) = hr^2 + r - g = 0$ tiene dos raíces reales, pero como $1 + 4hg \geq 1$ entonces $\frac{-1 + \sqrt{1 + 4hg}}{2h} \leq 0$, es decir una de esas raíces es negativa y la otra es positiva (Ver la Figura 5), lo cual implica que $0 < r \leq \frac{-1 - \sqrt{1 + 4hg}}{2h}$. La última desigualdad nos confirma que en una órbita elíptica ($h < 0$) el movimiento es acotado, además de (3.9) tenemos que $p_r = \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)}$ y al tomar r pequeño (Ver la Figura 9)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = \pm \infty$$

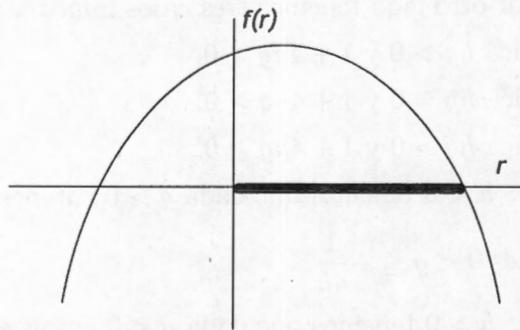


Fig 5 $f(r) = hr^2 + r - g$, para $g < 0$ y $h < 0$

- $h = 0$.

De la ecuación (3.9) tenemos que $\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \geq 0$ esto implica $r \geq g$, y como $g < 0$ entonces $r > 0$, por otro lado la ecuación (3.9) en este caso es equivalente a las dos ecuaciones $p_r = \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)}$ y resulta interesante observar que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = \pm \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = 0,$$

el último límite nos confirma que en la órbita parabólica ($h = 0$) tenemos que r se hace infinito y $p_r \rightarrow 0$ (Ver la Figura 9).

- $h > 0$.

Esta condición nos lleva a $-\frac{1}{4h} \leq g < 0$ y esto implica $\frac{-1}{2h} \leq \frac{-1 + \sqrt{4hg + 1}}{2h} < 0$, es decir tenemos dos raíces reales negativas (Ver la Figura 6), pero como r es la coordenada radial, esto implica que no existen restricciones para r por lo tanto $r > 0$.

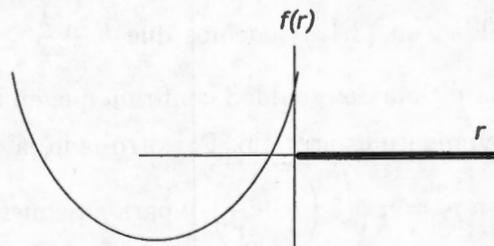


Fig 6 $f(r) = hr^2 + r - g$, para $g < 0$ y $h > 0$

Es interesante observar que en este caso la ecuación en (3.10) es equivalente a

$$p_r = \pm \sqrt{2 \left(\frac{hr^2 + r - g}{r^2} \right)},$$

y al tomar los límites para r pequeño tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{2 \left(\frac{hr^2 + r - g}{r^2} \right)} = \pm \infty,$$

y para r grande de la ecuación (3.9) tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = \pm \sqrt{2h},$$

es decir en una órbita hiperbólica ($h > 0$) tenemos que $r \rightarrow \infty$ con $p_r \rightarrow c \neq 0$ (Ver la Figura 9).

Caso $g = 0$.

Para los subcasos donde $g = 0$ tenemos de la ecuación (3.9) que

$$p_r^2 = 2 \left(h + \frac{1}{r} \right) \geq 0, \quad (3.12)$$

Este análisis depende sólo del signo de h por lo tanto tenemos

- $h < 0$.

De la desigualdad en (3.12) tenemos que $h + \frac{1}{r} \geq 0$ y esto implica $\frac{1}{-h} \geq r > 0$, la última desigualdad confirma que en una órbita elíptica ($h < 0$) el movimiento es acotado. Por otro lado la ecuación en (3.12) es equivalente a $p_r = \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} \right)}$ y para r pequeño tenemos (Ver la Figura 9)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} \right)} = \pm \infty.$$

- $h = 0$.

De la ecuación en (3.12) tenemos que $p_r^2 = \frac{2}{r}$, implica $r > 0$ y para r pequeño tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{\frac{2}{r}} = \pm \infty,$$

mientras que para r grande

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{\frac{2}{r}} = 0,$$

este último límite confirma que en una órbita parabólica ($h = 0$) tenemos que r se hace infinito con p_r tendiendo a cero (Ver la Figura 9).

- $h > 0$.

De la desigualdad en (3.12) tenemos que $h + \frac{1}{r} \geq 0$ implica $r > 0$, de manera análoga al caso anterior tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} \right)} = \pm \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} \right)} = \pm \sqrt{2h},$$

este último límite confirma que en una órbita hiperbólica ($h > 0$) tenemos que $r \rightarrow \infty$ con velocidad p_r distinta de cero (Ver la Figura 9).

Caso $g > 0$.

Este estudio depende sólo del signo de h , tenemos entonces que

- $h < 0$.

Para este caso tenemos que $0 < g \leq -\frac{1}{4h}$ implica $0 < \frac{-1 + \sqrt{4hg + 1}}{2h}$, esta desigualdad nos dice que la ecuación polinomial

$f(r) = hr^2 + r - g = 0$ tiene dos raíces reales positivas (Ver la Figura 7), de esto y $h < 0$ tenemos que $\frac{-1 + \sqrt{4hg + 1}}{2h} \leq r \leq \frac{-1 - \sqrt{4hg + 1}}{2h}$, lo cual nos indica que tenemos movimientos acotados y sin colisión, los movimientos acotados son naturales debido a que tenemos energía negativa (órbitas elípticas), sin embargo la inexistencia de colisiones resulta altamente relevante (Ver la Figura 10).

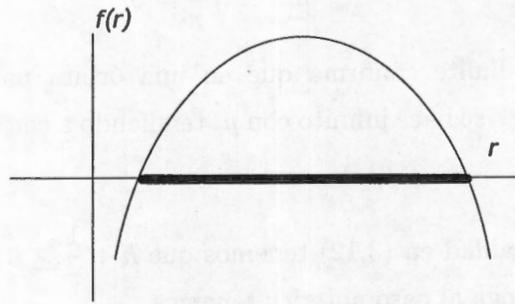


Fig 7 $f(r) = hr^2 + r - g$, para $g > 0$ y $h < 0$

- $h = 0$.

Estas condiciones combinadas con (3.9) producen $0 \leq p_r^2 = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)$ y esto implica $r \geq g > 0$. La última desigualdad nos indica que tenemos movimientos sin colisión, además en el límite se observa que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = 0,$$

y esto dice que para una órbita parabólica ($h = 0$) tenemos que r se hace infinito con p_r tendiendo a cero (Ver la Figura 10).

- $h > 0$.

Estas condiciones implican que $\frac{-1 + \sqrt{4hg + 1}}{2h} > 0$, y esto nos lleva a que $f(r) = hr^2 + r - g = 0$ tiene dos raíces reales, una positiva y la otra

negativa (Ver la Figura 8), por lo tanto $0 < \frac{-1 + \sqrt{4hg + 1}}{2h} \leq r$, esta desigualdad nos dice que tenemos movimientos sin colisión, además en el límite tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2 \left(h + \frac{1}{r} - \frac{g}{r^2} \right)} = \pm \sqrt{2h}.$$

El último límite confirma que en una órbita hiperbólica ($h > 0$) r tiende a infinito con velocidad p_r distinta de cero (Ver la Figura 10).

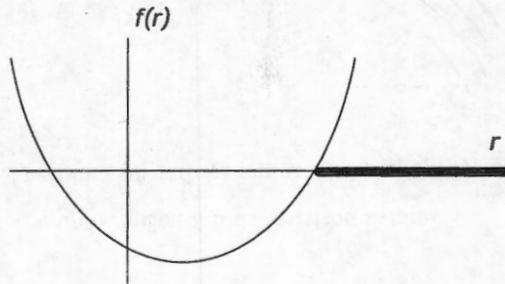


Fig 8 $f(r) = hr^2 + r - g$, para $g > 0$ y $h > 0$

OBS: Para $g > 0$ no tenemos colisiones.

En las figuras 9 y 10 se resume como la región radial R_r está foliada por las curvas I_{gh} , para los distintos valores de g y h .

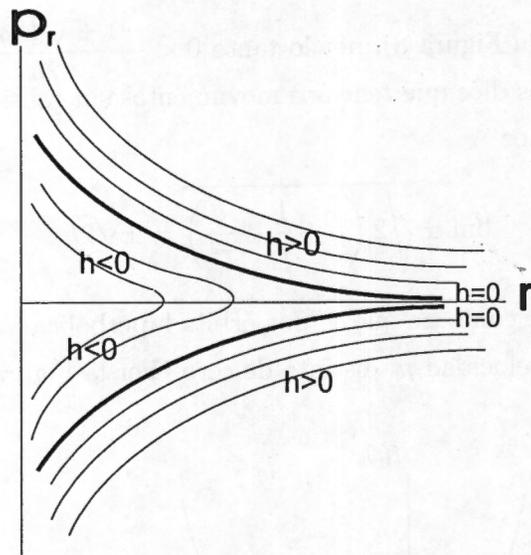


Fig 9 Foliación de la región radial R_r por las curvas I_{gh} , para $g \leq 0$
y valores positivo, cero y negativo de h

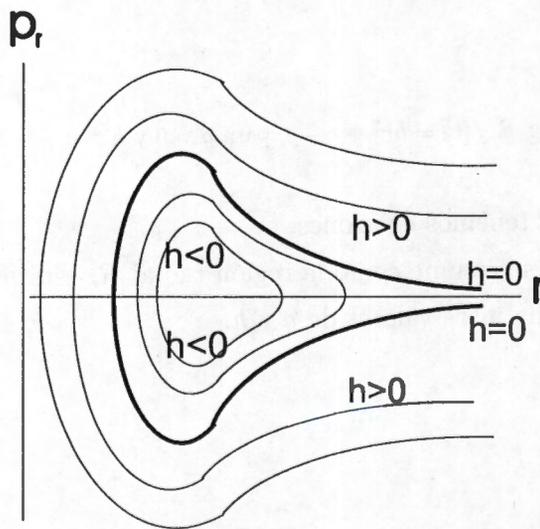


Fig 10 Foliación de la región radial R_r por las curvas I_{gh} , para $g > 0$
y valores positivo, cero y negativo de h

Es interesante observar que para la foliación de R_θ , los casos $g = -b$ y $g = -\frac{b}{1+\epsilon}$ son muy importantes, y no es importante el signo de g . Contrariamente a la foliación de R_r , donde lo importante es considerar además del signo de h y del signo de g , los valores para los que $\bar{I}_g \neq \emptyset$, es decir $-b \leq g < 0$, $g = 0$, $g > 0$.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente

Teorema 5 *La región radial R_r está foliada por los conjuntos I_{gh} , donde*

1. $I_{gh} \approx \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ para $-b \leq g \leq 0$ y $h \geq 0$.
2. $I_{gh} \approx \mathbb{R}$ para $-b \leq g \leq 0$ y $h < 0$.
3. $I_{gh} \approx \mathbb{R}$ para $g > 0$ y $h \geq 0$.
4. $I_{gh} \approx S^1$ para $g > 0$ y $h < 0$.

Los resultados de este capítulo se encuentran contenidos en el siguiente

Teorema 6 *El espacio fase para el sistema Hamiltoniano dado por (3.3), con sus integrales primeras H y G se encuentra foliado para los distintos valores de g y h de la siguiente manera:*

1. Para $g = -b$ y $h \geq 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ está formada por dos puntos, I_{gh} en la región radial R_r es topológicamente equivalente a dos rectas, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E es topológicamente equivalente a cuatro rectas.
2. Para $g = -b$ y $h < 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ está formada por dos puntos, I_{gh} en la región radial R_r es topológicamente equivalente a una recta, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E es topológicamente equivalente a dos rectas.

3. Para $-b < g \leq 0$, $g \neq \frac{-b}{1+\epsilon}$ y $h \geq 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a dos círculos, I_{gh} en la región radial R_r a dos rectas, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a cuatro cilindros.
4. Para $-b < g \leq 0$, $g \neq \frac{-b}{1+\epsilon}$ y $h < 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a dos círculos, I_{gh} en la región radial R_r a una recta, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a dos cilindros.
5. Para $g = \frac{-b}{1+\epsilon}$ y $h \geq 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a la unión de dos círculos que se intersectan en dos puntos, I_{gh} en la región radial R_r a dos rectas, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a cuatro cilindros que se intersectan en cuatro rectas.
6. Para $g = \frac{-b}{1+\epsilon}$ y $h < 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a dos círculos que se intersectan en dos puntos, I_{gh} en la región radial R_r a una recta, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a dos cilindros que se intersectan en dos rectas.
7. Para $g > 0$ y $h \geq 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a dos círculos, I_{gh} en la región radial R_r a una recta, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a dos cilindros.
8. Para $g > 0$ y $h < 0$, \bar{I}_g en la región angular R_θ es topológicamente equivalente a dos círculos, I_{gh} en la región radial R_r a un círculo, $\bar{I}_g \times I_{gh}$ en el espacio fase E a dos toros.

Podemos observar que

1. Si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $G \rightarrow \frac{c^2}{2} - b$, donde c es el momento angular en el problema de Kepler no perturbado.
2. Para $g > 0$ no tenemos colisiones.
3. Para $g \leq 0$ la región radial R_r tiene una foliación muy similar a la que presenta el Problema de Kepler.

En la Tabla 4 tenemos resumidos los resultados de este capítulo.

Tabla 4

Foliación de $E = R_\theta \times R_r$ por \bar{G}, G y H

Condiciones	$R_\theta : \bar{I}_g$	$R_r : I_{gh}$	$E : \bar{I}_g \times I_{gh}$
$g = -b, h \geq 0$	S^0	$\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$	$\cup_4 \mathbb{R}$
$g = -b, h < 0$	S^0	\mathbb{R}	$\cup_2 \mathbb{R}$
$-b < g \leq 0, g \neq \frac{-b}{1+\epsilon}, h \geq 0$	$S^1 \cup S^1$	$\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$	$\cup_4(S^1 \times \mathbb{R})$
$-b < g \leq 0, g \neq \frac{-b}{1+\epsilon}, h < 0$	$S^1 \cup S^1$	\mathbb{R}	$\cup_2(S^1 \times \mathbb{R})$
$g = \frac{-b}{1+\epsilon}, h \geq 0$	$S^1 \cup S^1,$ $S^1 \cap S^1$ $\approx S^0$	$\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$	$\cup_4(S^1 \times \mathbb{R}),$ $\cap_4(S^1 \times \mathbb{R})$ $\approx \cup_4 \mathbb{R}$
$g = \frac{-b}{1+\epsilon}, h < 0$	$S^1 \cup S^1,$ $S^1 \cap S^1$ $\approx S^0$	\mathbb{R}	$\cup_2(S^1 \times \mathbb{R}),$ $\cap_2(S^1 \times \mathbb{R})$ $\approx \cup_2 \mathbb{R}$
$g > 0, h \geq 0$	$S^1 \cup S^1$	\mathbb{R}	$\cup_2(S^1 \times \mathbb{R})$
$g > 0, h < 0$	$S^1 \cup S^1$	S^1	$\cup_2 T^2$

Los índices 2 y 4 en los símbolos \cap y \cup indican el número de copias en el espacio fase.

Capítulo 4

Ley de Áreas.

En este capítulo se enuncia y demuestra un resultado geométrico referente a las áreas generadas por los vectores de posición de las partículas en el problema planar de los tres cuerpos y se define una función con respecto a dichas áreas. Para estudiar las propiedades de la función área se normaliza el tamaño del sistema usando coordenadas polares generalizadas [25]; salen entonces a la luz muchos resultados que involucran masas con configuraciones, en el caso de masas iguales se recuperan muchas de las simetrías que posee la solución en forma de figura 8 [7]. Si $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^2$, $r_i = (r_{ix}, r_{iy})$ son los vectores de posición de las partículas 1, 2 y 3, entonces las áreas generadas por estos vectores están dadas por los determinantes (Ver Figura 11).

$$A_1 = \begin{vmatrix} r_3 & r_2 \end{vmatrix} = r_{3x}r_{2y} - r_{2x}r_{3y}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} r_1 & r_3 \end{vmatrix} = r_{1x}r_{3y} - r_{3x}r_{1y}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} r_2 & r_1 \end{vmatrix} = r_{2x}r_{1y} - r_{1x}r_{2y}$$

De acuerdo con la Figura 11 y las ecuaciones anteriores, las áreas han sido escogidas de modo tal que las tres tengan el mismo signo.

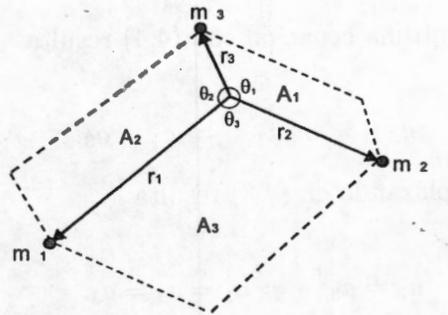


Fig 11 Ley de Áreas.

Proposición 3 (Ley de Áreas para el Problema Planar de los Tres Cuerpos)

Sea A_i el área generada por los vectores de posición r_j y r_k , donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$, y supongamos que el centro de masa se encuentra fijo en el origen ($\sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0$), entonces

$$\frac{A_1}{m_1} = \frac{A_2}{m_2} = \frac{A_3}{m_3}. \quad (4.1)$$

Demostración. Si r es el vector de posición, entonces $r = (r_{1x}, r_{1y}, r_{2x}, r_{2y}, r_{3x}, r_{3y})$, si $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$A_1 = |r_3 \ r_2| = r_{3x}r_{2y} - r_{2x}r_{3y} = m_1 a_1, \quad (4.2)$$

$$A_2 = |r_1 \ r_3| = r_{1x}r_{3y} - r_{3x}r_{1y} = m_2 a_2, \quad (4.3)$$

$$A_3 = |r_2 \ r_1| = r_{2x}r_{1y} - r_{1x}r_{2y} = m_3 a_3, \quad (4.4)$$

$$m_1 r_{1x} + m_2 r_{2x} + m_3 r_{3x} = 0, \quad (4.5)$$

$$m_1 r_{1y} + m_2 r_{2y} + m_3 r_{3y} = 0. \quad (4.6)$$

Ahora debemos probar que $a_1 = a_2 = a_3$.

Resolviendo para r_{3x} en (4.5) y resolviendo para r_{3y} en (4.6) y reemplazando en (4.2) resulta

$$r_{2x}r_{1y} - r_{1x}r_{2y} = m_3 a_1 \Rightarrow$$

$$|r_2 - r_1| = m_3 a_1.$$

Ahora comparando la última ecuación con (4.4) resulta

$$m_3 a_1 = m_3 a_3 \Rightarrow a_1 = a_3.$$

De modo similar reemplazando en (4.3) resulta

$$a_2 = a_3 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3.$$

■

Corolario 1 (Ley de Senos para el Problema Planar de los Tres Cuerpos)

Bajo las mismas hipótesis de la proposición 3, si θ_i es el ángulo entre los vectores r_j y r_k (Ver Figura 11), donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$, entonces

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{|r_1| m_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{|r_2| m_2} = \frac{\text{sen } \theta_3}{|r_3| m_3}.$$

Demostración. La demostración de este corolario se sigue de un simple cálculo. ■

Con el fin de estudiar algunas propiedades de la ley de áreas definimos la función área.

Definición 5 Sea la función Área dada por

$$A : X \rightarrow \mathbb{R}, A(r) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{r_{3x} r_{2y} - r_{2x} r_{3y}}{m_1} + \frac{r_{1x} r_{3y} - r_{3x} r_{1y}}{m_2} + \frac{r_{2x} r_{1y} - r_{1x} r_{2y}}{m_3} \right\},$$

con las restricciones (4.5) y (4.6) dadas por tomar el centro de masa en el origen.

De la proposición 3 observamos que para definir la función área pudimos igualmente haber escogido cualquier $\frac{A_i}{m_i}$, $i = 1, 2, 3$. Esta función Área es suave, homogénea de grado 2 ($A(\lambda r) = \lambda^2 A(r)$) e invariante bajo el grupo $SO(2)$ de rotaciones en el plano ($A(Br) = A(r)$), $\forall B \in SO(2)$.

Sabemos que las configuraciones centrales generan soluciones explícitas al problema de n -cuerpos, por lo que tienen una gran importancia en *Mecánica Celeste*, ello hace que resulte interesante observar la relación que existe entre las configuraciones centrales y la ley de áreas. Primero observamos que para toda configuración de triángulo con orientación (1,2,3) en dirección contraria a las agujas del reloj tenemos $A_i < 0$, $i = 1, 2, 3$, para toda configuración de triángulo con la otra orientación $A_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, y para toda configuración colineal $A_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto en las soluciones homográficas generadas por las configuraciones centrales de Euler tenemos $A(\tau(t)) = 0$, $\forall t$. En las soluciones homográficas generadas por las configuraciones centrales de Lagrange sabemos que los vectores de posición son de la forma $r_i = \phi(t)b_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $\phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución al problema colineal de Kepler y los $b_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, forman una configuración central de Lagrange (triángulo equilátero) [26], para conocer el comportamiento de la función área en el caso en que $\phi(t)$ es un equilibrio relativo, (movimiento circular) observamos que el determinante $|r_i \quad r_j|$ es independiente del tiempo, y esto implica que la función área $A(t)$ es constante para todo tiempo (Ver Figura 12 a)). En el caso en que $\phi(t)$ es un movimiento elíptico el determinante $|r_i \quad r_j|$ es dependiente del tiempo, sin embargo toma un comportamiento sinusoidal, los valores máximo y mínimo son alcanzados cuando las partículas se hallan en los extremos del eje mayor de las elipses. El comportamiento de la función área en este caso es mostrado en la Figura 12 b).

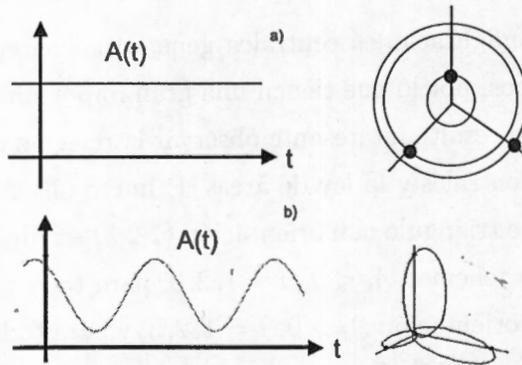


Fig 12 Función área en a) equilibrio relativo. b) movimiento elíptico.

4.1. Valores Extremos.

Observamos que las áreas pueden hacerse infinitas, lo cual no resulta provechoso. Esto nos lleva a utilizar la descomposición del vector posición en coordenadas polares generalizadas [25]. Sean

$$\begin{aligned} r &= Rs, \\ R &= \sqrt{2I}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde I es el momento de inercia. Si $[\overline{M}] = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$ es la matriz de masas, de (4.7) se sigue que $2I = r[\overline{M}]r^t = \sqrt{2I}s[\overline{M}]\sqrt{2I}s^t = 2Is[\overline{M}]s^t$ y entonces $s[\overline{M}]s^t = 1$, por lo que esta descomposición normaliza el tamaño del sistema, pues la variable R mide el tamaño del sistema, mientras que el vector de posición normalizado s mide la forma del sistema, y ello nos permite obtener valores máximo y mínimo (basados únicamente en la forma) distintos de infinito para la función área.

Teorema 7 Consideremos la función área (definición 5, (4.5), (4.6)), junto con la condición de normalización de tamaño (4.7), entonces la función área

alcanza un valor máximo y un mínimo que vienen dados por

$$A_{max} = \frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2 m_3 M}},$$

$$A_{min} = -\frac{1}{2\sqrt{m_1 m_2 m_3 M}},$$

con $M = \sum_{i=1}^3 m_i$.

Demostración. Tenemos un problema de multiplicadores de Lagrange en donde queremos encontrar los extremos de la función área sujeta a las restricciones impuestas por la normalización del tamaño (g_1) y centro de masa en el origen (g_2, g_3), es decir:

$$A(s) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{s_{3x}s_{2y} - s_{2x}s_{3y}}{m_1} + \frac{s_{1x}s_{3y} - s_{3x}s_{1y}}{m_2} + \frac{s_{2x}s_{1y} - s_{1x}s_{2y}}{m_3} \right\},$$

$$g_1 : m_1(s_{1x}^2 + s_{1y}^2) + m_2(s_{2x}^2 + s_{2y}^2) + m_3(s_{3x}^2 + s_{3y}^2) = 1,$$

$$g_2 : m_1s_{1x} + m_2s_{2x} + m_3s_{3x} = 0,$$

$$g_3 : m_1s_{1y} + m_2s_{2y} + m_3s_{3y} = 0.$$

Resolviendo obtenemos los valores extremos para la función área, y una configuración donde se alcanzan estos extremos es

$$(s_{1x}, s_{1y}) = \left(\sqrt{\frac{m_3}{m_1 + m_2}} \frac{1}{\sqrt{2M}}, \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{1}{\sqrt{2(m_1 + m_2)}} \right),$$

$$(s_{2x}, s_{2y}) = \left(\sqrt{\frac{m_3}{m_1 + m_2}} \frac{1}{\sqrt{2M}}, -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \frac{1}{\sqrt{2(m_1 + m_2)}} \right), \quad (4.8)$$

$$(s_{3x}, s_{3y}) = \left(-\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_3}} \frac{1}{\sqrt{2M}}, 0 \right).$$

■

Definición 6 Definimos la configuración dada por (4.8) como Configuración de Área Máxima (MAC).

Calculando las distancias entre partículas en la MAC (4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} |s_1 - s_2| &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_3}}, \\ |s_1 - s_3| &= \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{2m_1m_3}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}}, \\ |s_3 - s_2| &= \sqrt{\frac{m_3 + m_2}{2m_3m_2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}}, \end{aligned}$$

donde μ_i es la masa reducida de las partículas j y k , con $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$. Tendremos una configuración de triángulo equilátero únicamente en el caso $m_1 = m_2 = m_3$, pues las distancias entre partículas dependen de las masas reducidas, quienes a su vez dependen de las masas.

El problema planar de los tres cuerpos tiene un espacio de configuración que puede ser reducido tomando el cociente con respecto a homotecias (\mathbb{R}) y rotaciones ($SO(2)$), siendo la variedad resultante homeomorfa a S^2 y conocida como la esfera de configuración [7, 27, 28], esta variedad de configuración contiene sólo a las formas, es decir es un espacio de triángulos orientados en el plano y representa los triángulos orientados cuyo momento de inercia es 1. Para poder aplicar la función área a la esfera de configuración es necesario definir el dominio de A como la esfera de configuración y la imagen resultante será el intervalo $[A_{min}, A_{max}]$, de esta manera los únicos valores críticos de A son los extremos, y $A^{-1}(A_{min}) \approx A^{-1}(A_{max}) \approx \{\text{un punto}\}$, y para todo $a \in (A_{min}, A_{max})$, a es un valor regular de A entonces $A^{-1}(a)$ es una subvariedad de la esfera de configuración y es homeomorfa a S^1 , de este modo la función área produce una foliación en la esfera de configuración en curvas cerradas simples que corresponden a triángulos con la misma área.

4.2. Propiedades de la MAC.

En esta sección estudiamos algunas propiedades geométricas de la configuración de área máxima y se hace énfasis en las diferencias que existen entre los casos de masas iguales y masas arbitrarias. Empezamos el estudio con una definición.

Definición 7 En la MAC (4.8), sea L_i la línea que une a los vectores s_j y s_k , $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$ (Ver Figura 13).

Lema 1 En la MAC (4.8) tenemos que la línea L_i es ortogonal al vector s_i , $\forall i = 1, 2, 3$; i.e.

$$s_i \cdot (s_j - s_k) = 0,$$

$(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$ (Ver Figura 13).

Demostración. Se sigue de un simple cálculo. ■

Como una consecuencia del lema anterior tenemos el

Corolario 2 En la MAC (4.8) las alturas del triángulo formado por las tres masas se intersectan simultáneamente en el origen (Ver Figura 13).

El corolario 2 proporciona una división natural de cada una de las alturas del triángulo en dos partes con respecto al origen, la primera parte es la norma del vector s_i ($|s_i|$) y la segunda parte es la distancia del origen a la línea L_i ($d(0, L_i)$, $i = 1, 2, 3$.) el cociente de estas dos distancias se encuentra relacionado con las masas de acuerdo con el siguiente resultado

Proposición 4 En la MAC (4.8) se cumple

$$\frac{|s_k|}{d(0, L_k)} = \frac{m_i + m_j}{m_k},$$

donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$ (Ver Figura 13).

Demostración. Se sigue de un simple cálculo ■

En la MAC (4.8), si tomamos la proyección ortogonal del vector s_i , sobre la línea L_i formada por los vectores s_j y s_k , y colocamos ahí la partícula con masa m_i , obtenemos una configuración colineal en la que coinciden el centro de masa de las partículas j y k , y el centro de masa de las tres partículas. Definimos esta configuración como la i -ésima configuración proporcional colineal (CPC_i); observamos que en esta configuración el cociente de las distancias entre las partículas i, j e i, k , es igual al cociente entre las masas m_k y m_j , (Ver Figura 13). Esta configuración es única salvo homotecias y coincide con la configuración central sólo en el caso en que las masas de los extremos sean iguales, es decir $m_j = m_k$, donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$.

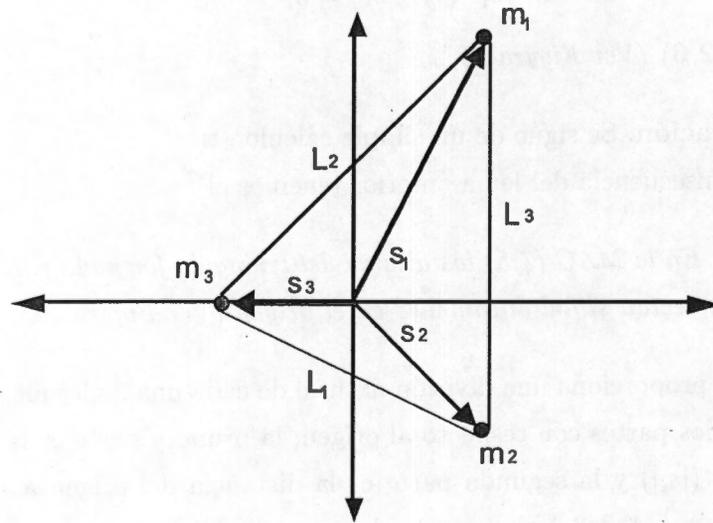


Fig 13 Propiedades de MAC, caso $m_i = i$, $i = 1, 2, 3$.

La propiedad enunciada en la proposición 4 se conserva al tomar homotecias, es decir si en la MAC (4.8) multiplicamos uno de los vectores s_k por un escalar $\alpha > 0$, y definimos $\tilde{s}_k = \alpha s_k$, en esta nueva configuración la altura que corresponde al respectivo \tilde{s}_k resulta nuevamente dividido en forma natural en

dos partes con respecto al origen, bajo estas condiciones tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5 *En la MAC (4.8) se cumple*

$$\frac{|\tilde{s}_k|}{d(0, L_k)} = \frac{m_i + m_j}{m_k}, \quad (4.9)$$

donde $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$.

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata de la definición de configuración colineal proporcional y que el centro de masa de dos partículas se encuentre en el origen. ■

Gracias a la discusión anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3 *Para toda configuración isósceles con masas iguales se cumple que la altura correspondiente al lado distinto se encuentra dividido en dos partes con respecto al centro de masa en proporción de dos a uno, que corresponde a la suma de las dos masas entre la tercera.*

Consideremos ahora las tres CPC_i , observamos que no importa la longitud del segmento que une a las partículas j y k , es decir podemos expandirlo o contraerlo y siempre se encontrará dividido con respecto al origen ($CM = 0$), en dos partes cuya razón es el cociente de las masas que se encuentran en los extremos, gracias a esta característica tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6 *Supongamos que al tiempo t_i tenemos la i -ésima configuración proporcional colineal CPC_i , $i = 1, 2, 3$, de modo que cada vector de posición toma valores positivo, negativo y cero en cada uno de los tres tiempos (Ver Figura 14), entonces existen homotecias de estas configuraciones de modo que se cumple*

$$s_1(t_1) + s_1(t_2) + s_1(t_3) = 0, \quad (4.10)$$

$$s_2(t_1) + s_2(t_2) + s_2(t_3) = 0, \quad (4.11)$$

$$s_3(t_1) + s_3(t_2) + s_3(t_3) = 0. \quad (4.12)$$

Demostración. Del centro de masa en el origen tenemos

$$m_1 s_1(t_1) + m_2 s_2(t_1) + m_3 s_3(t_1) = 0,$$

$$m_1 s_1(t_2) + m_2 s_2(t_2) + m_3 s_3(t_2) = 0,$$

$$m_1 s_1(t_3) + m_2 s_2(t_3) + m_3 s_3(t_3) = 0.$$

De la definición de configuración proporcional colineal se sigue que $s_i(t_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, y por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_3 s_3(t_1) + m_2 s_2(t_1) = 0$$

$$m_1 s_1(t_2) + m_3 s_3(t_2) = 0$$

$$m_2 s_2(t_3) + m_1 s_1(t_3) = 0$$

Podemos suponer sin perder generalidad que al tiempo t_1 mantenemos fija la longitud del segmento, i.e.

$$m_3 s_3(t_1) + m_2 s_2(t_1) = 0. \quad (4.13)$$

Para t_2 existe $\alpha > 0$ tal que $m_3 s_3(t_1) + m_3 \alpha s_3(t_2) = 0$, y dividiendo entre m_3 se cumple (4.12), entonces

$$m_1 \alpha s_1(t_2) + m_3 \alpha s_3(t_2) = 0. \quad (4.14)$$

Para t_3 existe $\beta > 0$ tal que $m_2 s_2(t_1) + m_2 \beta s_2(t_3) = 0$ y dividiendo entre m_2 se cumple (4.11), lo cual implica

$$m_2\beta s_2(t_3) + m_1\beta s_1(t_3) = 0. \quad (4.15)$$

Tomando la suma de (4.13), (4.14) y (4.15) y reorganizando tenemos que

$$m_1\alpha s_1(t_2) + m_1\beta s_1(t_3) = 0,$$

y dividiendo entre m_1 se cumple (4.10). ■

En el caso de masas iguales (Ver Figura 14 b)) podemos observar que con tomar los tres segmentos con la misma longitud se obtiene el resultado. Es de interés mencionar que esta propiedad la tiene la famosa solución en forma de figura de 8 [7](Figura 14 b)).

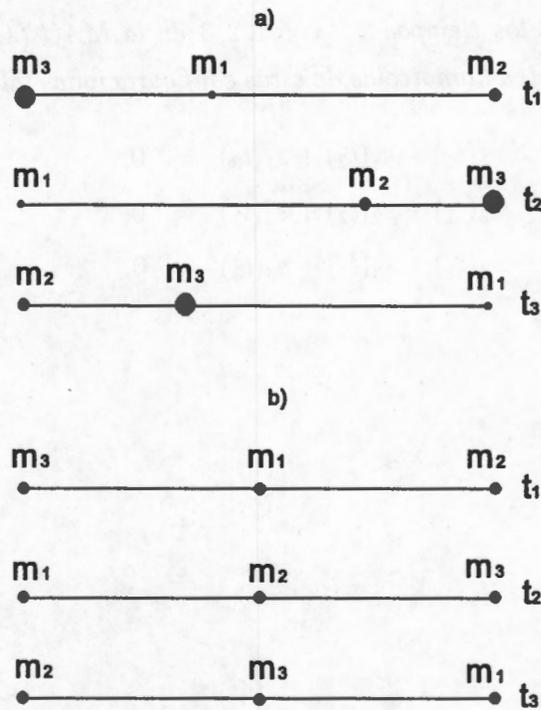


Fig 14 Configuraciones proporcionales colineales.

a) caso $m_i = i$, $i = 1, 2, 3$ b) caso $m_i = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Tomando como base la proposición 5 y la definición de CPC definimos la i -ésima configuración proporcional triangular (TPC_i) como aquella en la cual se satisfacen simultáneamente:

1. Al tomar la proyección ortogonal del vector s_i sobre la línea L_i se obtiene la CPC_i y
2. Se satisface la condición (4.9) de la proposición 5.

Se concluye esta sección generalizando la proposición 6 y haciendo algunas observaciones.

Proposición 7 *Consideremos las tres TPC_i , tomando permutaciones cíclicas de las masas en los tiempos t_i , $i = 1, 2, 3$ en la MAC (4.8) (Ver Figura 15), entonces existen homotecias de estas configuraciones tal que se cumple*

$$s_1(t_1) + s_1(t_2) + s_1(t_3) = 0, \quad (4.16)$$

$$s_2(t_1) + s_2(t_2) + s_2(t_3) = 0, \quad (4.17)$$

$$s_3(t_1) + s_3(t_2) + s_3(t_3) = 0. \quad (4.18)$$

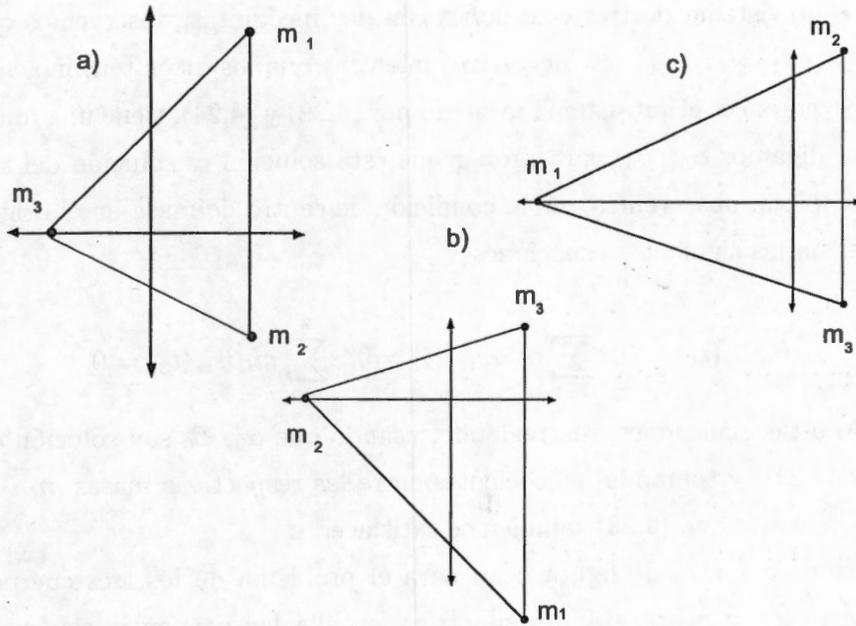


Fig 15 Configuraciones proporcionales triangulares CPT_i , caso $m_i = i$.

Demostración. Podemos observar que de la proposición 6 existen homotecias tal que

$$s_{1y}(t_1) + s_{1y}(t_2) + s_{1y}(t_3) = 0, \quad (4.19)$$

$$s_{2y}(t_1) + s_{2y}(t_2) + s_{2y}(t_3) = 0, \quad (4.20)$$

$$s_{3y}(t_1) + s_{3y}(t_2) + s_{3y}(t_3) = 0. \quad (4.21)$$

Consideremos fija la configuración al tiempo t_1 , debemos hallar α y β tal que el siguiente sistema de ecuaciones se cumpla

$$s_{1x}(t_1) + \alpha s_{1x}(t_2) + \beta s_{1x}(t_3) = 0, \quad (4.22)$$

$$s_{2x}(t_1) + \alpha s_{2x}(t_2) + \beta s_{2x}(t_3) = 0, \quad (4.23)$$

$$s_{3x}(t_1) + \alpha s_{3x}(t_2) + \beta s_{3x}(t_3) = 0. \quad (4.24)$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, observemos que $s_{1x}(t_3)$, $s_{2x}(t_2)$ y $s_{3x}(t_1)$ son negativos, mientras que los otros términos son positivos, entonces el subsistema formado por (4.22) y (4.24), tiene una única solución, digamos α_0 , β_0 , para probar que esta solución es solución del sistema completo, observemos que la condición de centro de masa en el origen proporciona las siguientes ecuaciones

$$\sum_{i=1}^3 m_i s_{ix}(t_1) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 m_i \alpha s_{ix}(t_2) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 m_i \beta s_{ix}(t_3) = 0,$$

sumando estas ecuaciones, reorganizando, usando que α_0 , β_0 son solución de (4.22) y (4.24), y tomando los cocientes entre las respectivas masas m_i $i = 1, 2, 3$ obtenemos que (4.23) también se satisface. ■

La solución en forma de figura ocho para el problema de los tres cuerpos [7] es periódica y posee grandes simetrías, en ella las partículas siguen la misma trayectoria alternando entre configuraciones colineales y triangulares isósceles.

Para resaltar algunas de sus propiedades tomemos $T \in \mathbb{R}^+$, consideremos $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, en este espacio definiremos $t_j = \frac{jT}{12}$, $\forall j = 0, 1, 2, \dots, 11$, a cada uno de estos t_j le asociamos cada una de las configuraciones que van alternándose en la solución en forma de figura de 8, agrupemos en cuatro clases estos t_j de la siguiente manera (Ver Figura 16)

$$[t_0] = \{t_0, t_4, t_8\} = \left\{ t_0, t_0 + \frac{T}{3}, t_0 + \frac{2T}{3} \right\},$$

$$[t_1] = \{t_1, t_5, t_9\} = \left\{ t_1, t_1 + \frac{T}{3}, t_1 + \frac{2T}{3} \right\},$$

$$[t_2] = \{t_2, t_6, t_{10}\} = \left\{ t_2, t_2 + \frac{T}{3}, t_2 + \frac{2T}{3} \right\},$$

$$[t_3] = \{t_3, t_7, t_{11}\} = \left\{ t_3, t_3 + \frac{T}{3}, t_3 + \frac{2T}{3} \right\}.$$

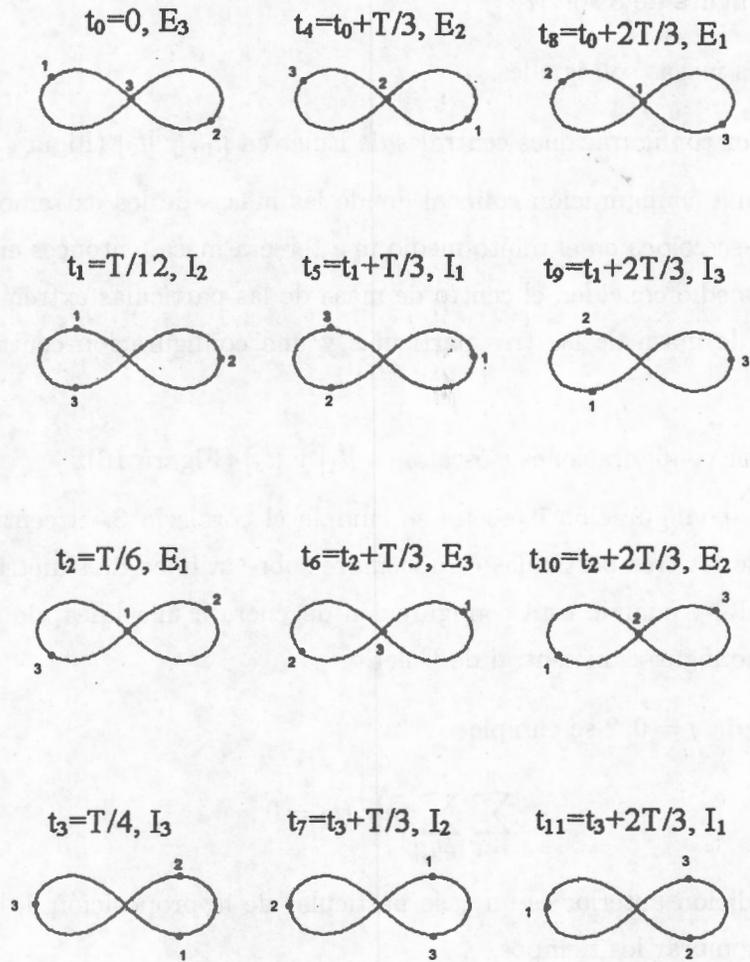


Fig 16 Geometría del 8

Si $m_i \in \mathbb{R}^+$, $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ son las masas y posiciones, entonces por lo anterior vemos que algunas de las propiedades con las que cuenta la solución en forma de figura de 8 son [7]:

1. Las tres masas son iguales.
2. Pasa por configuraciones centrales de Euler en $[t_0]$ y $[t_2]$ (Figura 16).
Si en una configuración colineal donde las masas de los extremos son iguales se coloca en el punto medio una tercera masa, entonces en este punto medio conciden el centro de masa de las partículas extremas, el centro de masa de las tres partículas y una configuración central de Euler.
3. Pasa por configuraciones isósceles en $[t_1]$ y $[t_3]$ (Figura 16).
En una configuración isósceles se cumple el corolario 3, el centro de masa de las tres partículas esta siempre sobre la línea de simetría del triángulo, y cuando esta configuración degenera a una línea, da lugar a una configuración central de Euler.
4. Para cada $j = 0, 2$ se cumple

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{t \in [t_j]} m_i r_i(t) = 0$$

La condición anterior es un caso particular de la proposición 6, basta con renombrar los tiempos.

5. Para cada $j = 1, 3$ se cumple

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{t \in [t_j]} m_i r_i(t) = 0$$

La condición anterior es un caso particular de la proposición 7, basta con renombrar los tiempos.

Por lo anterior una manera de generalizar estas propiedades es:

1. Tomando masas arbitrarias.
2. La configuración isósceles se convierte en una configuración proporcional triangular (Figura 17 c)) y se cumple: la proposición 5 que generaliza al corolario 3, el centro de masa de las tres partículas esta siempre sobre la línea de simetría, cuando esta configuración degenera a una línea da lugar a una configuración proporcional colineal (Figura 17 d)).
3. La configuración central de Euler se convierte en una configuración proporcional colineal (Figura 17 d)) donde conciden: el centro de masa de las partículas extremas y el centro de masa de las tres partículas, sin embargo ya no coincide con la configuración central de Euler.
4. La condición $\sum_{i=1}^3 \sum_{t \in [t_j]} m_i r_i(t) = 0$ para $j = 0, 2$ evoluciona a la generalización dada por la proposición 6.
5. La condición $\sum_{i=1}^3 \sum_{t \in [t_j]} m_i r_i(t) = 0$ para $j = 1, 3$ evoluciona a la generalización dada por la proposición 7.

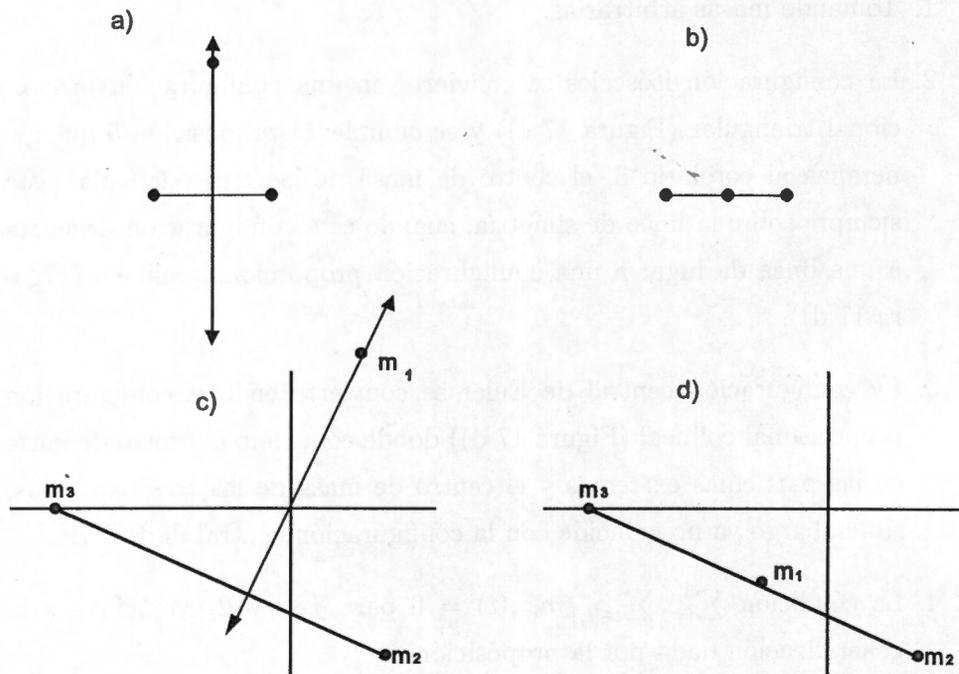


Fig 17 Masas iguales

a) Configuración isósceles b) Configuración Euleriana

Masas $m_i = i$, $i = 1, 2, 3$.

c) Configuración proporcional triangular d) Configuración proporcional colineal

Capítulo 5

Evoluciones Finales en el Problema Cargado.

En este capítulo se lleva a cabo un estudio del Problema Cargado de los Tres Cuerpos. Fijando un nivel de energía ($h > 0$, $h = 0$, $h < 0$), junto con la Tabla 2 de la sección 2.3 se analizan las posibilidades para la función potencial, produciendo de este modo un desglose de casos, donde figuran las distintas combinaciones para la energía, el potencial y los λ_i . A partir de esta clasificación se estudia cada caso.

Dicho estudio incluye: Regiones de Hill, Regiones de Potencial Cero y Evoluciones Finales. Primero se definen estos conceptos, luego se lleva a cabo una descomposición de la función potencial con el fin de introducir un artificio geométrico al que se le llamó la Región Rho, para iniciar entonces el análisis.

5.1. Preliminares

Región de Hill.

De la ecuación de la energía $h = T - U$ y usando el hecho de que la energía

cinética T es una forma cuadrática positiva definida se sigue que

$$U + h = T \geq 0. \quad (5.1)$$

Para un valor de energía fijo, de (5.1) observamos que pueden existir restricciones para la función potencial, las cuales se traducen en restricciones para las configuraciones, la Región de Hill (\overline{RH}) es la región de posibles configuraciones, es decir

$$\overline{RH} = \{r \in X : U(r) + h \geq 0\},$$

y su frontera es

$$\partial(\overline{RH}) = \{r \in X : U(r) + h = 0\}.$$

Esta frontera es conocida como curva de velocidad cero y tiene una gran importancia pues

$$U(r) + h = 0 \iff T = 0 \iff |\dot{r}_i| = 0, \forall i = 1, 2, 3,$$

es decir cualquier curva solución al llegar a esta frontera o permanecer en ella tendrá velocidad cero.

Región de Potencial Cero.

De acuerdo con el análisis que se llevo a cabo sobre la función potencial en la sección 2.3, observamos que existen configuraciones para las cuales el potencial se anula. Esto nos permite definir la Región de Potencial Cero ($\overline{R}(U = 0)$) como

$$\overline{R}(U = 0) = \{r \in X : U(r) = 0\}$$

De (5.1) se sigue que sólo es posible tener la Región de Potencial Cero para valores de energía $h \geq 0$. En el caso $h = 0$ la Región de Potencial Cero coincide con la frontera de la Región de Hill, y sólo para el caso $h > 0$ es distinguible esta región.

Evoluciones Finales de Doble y Triple Estrella.

Las evoluciones finales de doble estrella son aquellas en las que tenemos escape de dos partículas (HE_k , PE_k), es decir

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty \implies$$
$$U \rightarrow \frac{\lambda_k}{\rho_k} \implies T \rightarrow h + \frac{\lambda_k}{\rho_k},$$

y dependiendo el tipo de evolución

$$HE_k, \quad T \rightarrow c > 0,$$

$$PE_k, \quad T \rightarrow 0.$$

En el caso cargado tenemos un nuevo tipo de evolución de doble estrella:

$HE_k\bar{P}$ Evolución Final Hiperbólica-Elíptica k Perpetua

$$\begin{aligned} |r_i| \rightarrow \infty, \quad |\dot{r}_i| = a_i > 0, & \quad \rho_i \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_i}{t} = c_i > 0, \\ |r_j| \rightarrow \infty, \quad |\dot{r}_j| = a_j > 0, & \quad \rho_j \rightarrow \infty, \quad \frac{\rho_j}{t} = c_j > 0, \\ |r_k| = c_k, \quad |\dot{r}_k| = 0, & \quad \rho_k = c_k. \end{aligned}$$

Más adelante se dan ejemplos de este tipo de evolución final.

Las evoluciones finales de triple estrella son aquellas en las que se tiene escape de las tres partículas (H , HP_k , P), es decir:

$$\rho_i \rightarrow \infty, \quad \forall i = 1, 2, 3 \implies$$

$$U \rightarrow 0 \implies T \rightarrow h,$$

y dependiendo del tipo de evolución

$$H, \quad T \rightarrow c > 0.$$

$$HP_k, \quad T \rightarrow c > 0.$$

$$P, \quad T \rightarrow 0.$$

Al igual que en las evoluciones de doble estrella el caso cargado ofrece una nueva evolución de triple estrella:

$H\bar{P}$ Evolución Final Hiperbólica-Perpetua

$$\begin{aligned} |r_i| &\rightarrow \infty, & i &= 1, 2, 3, & \rho_i &\rightarrow \infty, & i &= 1, 2, 3, \\ |\dot{r}_i| &= a_i > 0, & i &= 1, 2, 3, & \frac{\rho_i}{t} &= c_i > 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Podemos observar que en las evoluciones finales perpetuas se tiene que las magnitudes de las velocidades son iguales a constantes positivas ó cero, en cambio en las evoluciones finales clásicas las magnitudes de las velocidades convergen a constantes positivas ó cero.

A lo largo de este trabajo usaremos \bar{P} para distinguir el término perpetuo del término parabólico P

Más adelante se dan ejemplos de evoluciones finales perpetuas.

Descomposición de la Función Potencial y Región Rho.

Definimos la región rho (R_ρ) de distancias mutuas como

$$R_\rho = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid \rho_1 \leq \rho_2 + \rho_3, \rho_2 \leq \rho_1 + \rho_3, \rho_3 \leq \rho_1 + \rho_2\}.$$

De este modo si la función potencial viene dada por:

$$U : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r_1, r_2, r_3) \mapsto U(r_1, r_2, r_3),$$

descomponemos a U de la siguiente manera, sean U_1 y U_2 dadas por

$$U_1 : X \longrightarrow R_\rho$$

$$(r_1, r_2, r_3) \mapsto (|r_2 - r_3|, |r_1 - r_3|, |r_1 - r_2|) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

$$U_2 : R_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \mapsto \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1},$$

entonces la función potencial es simplemente

$$U = U_2 \circ U_1.$$

Podemos ver a R_ρ como un subconjunto de \mathbb{R}^3 , localizado en el primer octante (Ver Figura 18).

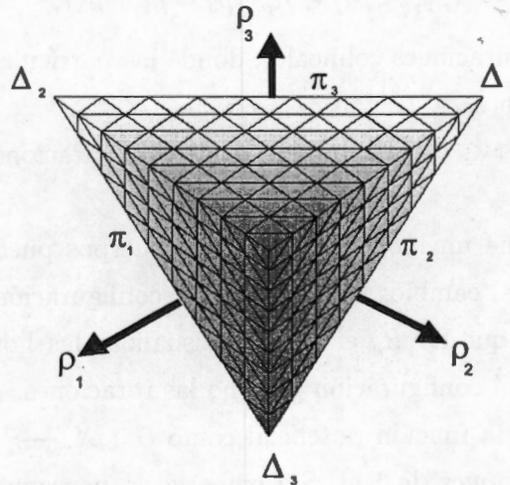


Fig 18 Región Rho (R_ρ)

Las principales características de R_ρ son:

1. Cada punto $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho$, representa una configuración.
2. Las diagonales

$$\Delta_3 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^3 \mid \rho_1 = \rho_2, \rho_3 = 0\},$$

$$\Delta_2 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^3 \mid \rho_1 = \rho_3, \rho_2 = 0\},$$

$$\Delta_1 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^3 \mid \rho_2 = \rho_3, \rho_1 = 0\},$$

que por definición no pertenecen a R_ρ ; contienen a las colisiones dobles entre las partículas 1 y 2, 1 y 3, y 2 y 3 respectivamente.

3. El origen $(0, 0, 0)$ que también por definición no pertenece a R_ρ contiene a la colisión triple.

4. Los planos

$$\pi_1 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \rho_1 = \rho_2 + \rho_3\},$$

$$\pi_2 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \rho_2 = \rho_1 + \rho_3\},$$

$$\pi_3 = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \rho_3 = \rho_1 + \rho_2\},$$

contienen a las configuraciones colineales, donde las partículas centrales son 1, 2 y 3 respectivamente.

5. La recta $t(1, 1, 1)$, $t \in (0, \infty)$ contiene a las configuraciones de triángulo equilátero.

6. Si consideramos que un movimiento de tres cuerpos puede ser descompuesto en: homotecias, cambios de forma en la configuración y rotaciones, entonces observamos que en R_ρ es posible visualizar las homotecias y los cambios de forma en la configuración pero no las rotaciones.

7. Si consideramos a la función potencial como $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ resulta imposible visualizar Regiones de Hill. Sin embargo si pensamos a la función potencial como $U_2 : R_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ y fijamos un valor de energía h , entonces es posible visualizar a la Región de Hill como:

$$RH = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + h \geq 0 \right\},$$

a la frontera de la Región de Hill como:

$$\partial(RH) = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + h = 0 \right\},$$

y a la Región de Potencial Cero como:

$$R(U = 0) = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} = 0 \right\}.$$

8. Debido a que en un movimiento hiperbólico se tiene que las distancias entre las partículas ρ_i son del orden de t ($\rho_i \sim t$), en un movimiento parabólico son

$\rho_i \sim t^{2/3}$ y en un movimiento elíptico $\rho_i \sim cte$, es posible tener una visualización cualitativa de las evoluciones finales en R_p como curvas paramétricas dadas de la siguiente manera:

Tabla 5

Comportamiento cualitativo de las evoluciones finales en R_p .

$H, H\bar{P}$	$t(c_1, c_2, c_3)$	$t \in (0, \infty)$
HP_3	$(tc_1, tc_2, t^{2/3}c_3)$	$t \in (0, \infty)$
P	$t^{2/3}(c_1, c_2, c_3)$	$t \in (0, \infty)$
$HE_3, HE_3\bar{P}$	(tc_1, tc_2, c_3)	$t \in (0, \infty)$
PE_3	$(t^{2/3}c_1, t^{2/3}c_2, c_3)$	$t \in (0, \infty)$

En todos los casos las constantes son positivas.

CUADRO GENERAL DEL ANÁLISIS EN NIVELES DE ENERGÍA.

	h	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	U		h	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	U
1	-	+++	+	13	0	000	0
2	-	++0	+	14	+	+++	+
3	-	+00	+	15	+	++0	+
4	-	+-+	+	16	+	+00	+
5	-	--+	+	17	+	000	0
6	-	+ - 0	+	18	+	---	-
7	0	+++	+	19	+	--0	-
8	0	++0	+	20	+	-00	-
9	0	+00	+	21	+	+-+	+0-
10	0	+-+	+0	22	+	--+	+0-
11	0	--+	+0	23	+	+ - 0	+0-
12	0	+ - 0	+0				

Los casos 3, 9, 16 y 20 no se analizan por que son problemas de Kepler. Debido a la semejanza que presentan los casos se analizan en el siguiente orden:

1-18, 2-19, 4-22, 5-21, 6-12-23, 7, 8, 13, 17, 14, 15, 10-11.

5.2. Análisis de los Distintos Casos.

1. $h < 0$, $U > 0$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j > 0$, $\lambda_k > 0$.

Región de Hill (ver la figura 19):

$$RH = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} \geq -h > 0 \right\}.$$

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \geq 1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \not\rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \quad \rho_k < \infty, \quad (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

Evoluciones Finales

$$HE_k, PE_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad B, \quad OS.$$

18. $h > 0$, $U < 0$, $\lambda_i < 0$, $\lambda_j < 0$, $\lambda_k < 0$.

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \leq 1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \quad \rho_k < \infty, \quad \Rightarrow -U \rightarrow \frac{\lambda_k}{\rho_k} \Rightarrow \frac{\lambda_k}{\rho_k} \leq h \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_k}{h} \leq \rho_k < \infty, \quad (i, j, k) \sim (1, 2, 3),$$

es decir las dos partículas que se escapan no pueden estar muy cerca, pues existe una cota para la mínima distancia entre ellas (ver la figura 19).

Evoluciones Finales

$H, HP_k, PE_k, HE_k, k = 1, 2, 3.$

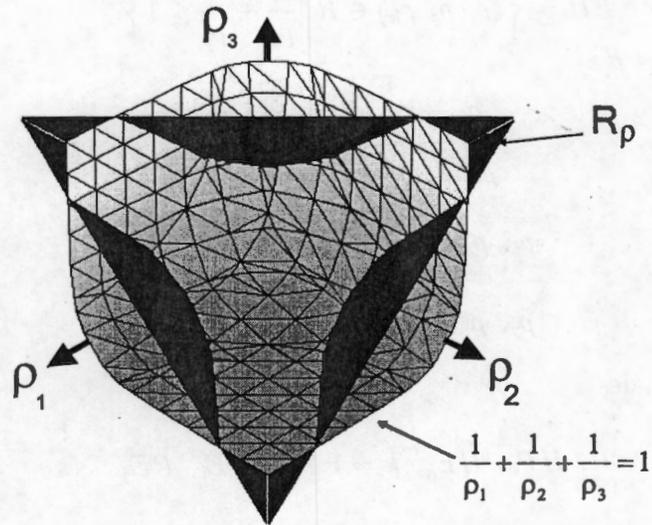


Fig 19 Frontera de la Región de Hill para los casos 1 y 18.

2. $h < 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0.$

Cualitativamente $RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_i} \geq 1 \right\}.$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \not\rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \not\rightarrow \infty, \rho_k < \infty.$$

Evoluciones Finales

$HE_i, HE_j, PE_i, PE_j, B, OS.$

A pesar de tener energía negativa no son posibles las evoluciones HE_k y PE_k , ver la figura 20.

19. $h > 0, U < 0, \lambda_i < 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$.

Cualitativamente $RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_i} \leq 1 \right\}$.

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \frac{\lambda_j}{h} \leq \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \frac{\lambda_i}{h} \leq \rho_i < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_i, PE_j.$$

No se tiene la evolución PE_k , ver la figura 20.

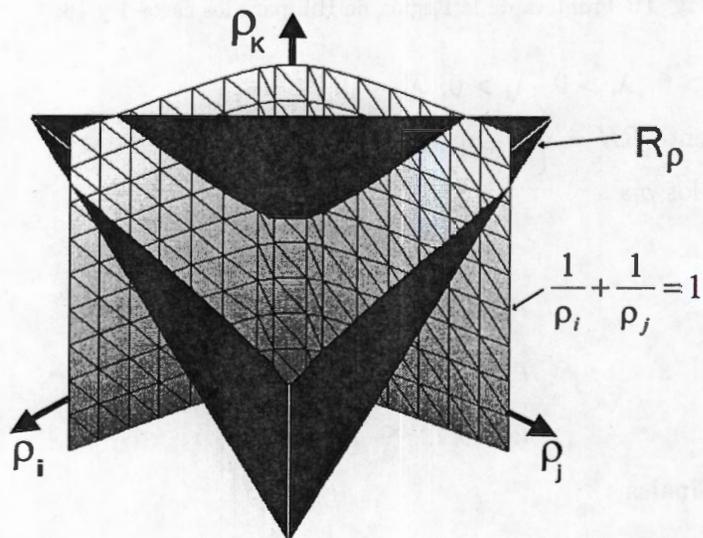


Fig 20 Frontera de la Región de Hill para los casos 2 y 19.

4. $h < 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$.

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_k} \geq 1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \not\rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \not\rightarrow \infty, \rho_k < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$HE_i, HE_j, PE_i, PE_j, B, OS.$$

No son posibles las evoluciones HE_k y PE_k , ver la figura 21.

22. $h > 0, U > 0, U = 0, U < 0, \lambda_i < 0, \lambda_j < 0, \lambda_k > 0$.

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid -\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_k} \geq -1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty, \Rightarrow U \rightarrow \frac{-\lambda_i}{\rho_i} \Rightarrow T \rightarrow \frac{-\lambda_i}{\rho_i} + h \geq 0 \Rightarrow$$

$$h \geq \frac{\lambda_i}{\rho_i} \Rightarrow \rho_i \geq \frac{\lambda_i}{h} \Rightarrow$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \frac{\lambda_i}{h} \leq \rho_i < \infty.$$

Análogamente

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \frac{\lambda_j}{h} \leq \rho_j < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_i, PE_j.$$

No se tiene la evolución PE_k , ver la figura 21.

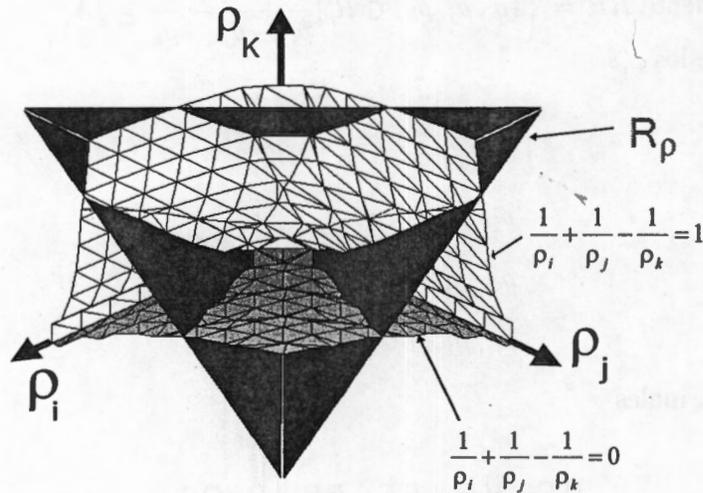


Fig 21 Frontera de la Región de Hill para los casos 4 y 22,
y Región de Potencial Cero para el caso 22.

5. $h < 0, U > 0, \lambda_i < 0, \lambda_j < 0, \lambda_k > 0$.

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid -\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_k} \geq 1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \nearrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k \leq \frac{\lambda_k}{-h} < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \nearrow \infty, \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \nearrow \infty, \rho_i < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$HE_k, PE_k, B, OS.$$

No se tienen las evoluciones HE_j, HE_i, PE_j, PE_i , ver la figura 22.

21. $h > 0, U > 0, U = 0, U < 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$.

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_k} \geq -1 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \quad \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \quad \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \quad \rho_k < \infty, \Rightarrow U \rightarrow -\frac{\lambda_k}{\rho_k} < 0, \Rightarrow T \rightarrow -\frac{\lambda_k}{\rho_k} + h \geq 0 \Rightarrow$$

$$h \geq \frac{\lambda_k}{\rho_k} \Rightarrow \rho_k \geq \frac{\lambda_k}{h},$$

es decir existe una cota inferior para ρ_k , a la vez que tenemos dos posibilidades:

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{h}, \Rightarrow T \rightarrow 0,$$

$$\rho_k > \frac{\lambda_k}{h}, \Rightarrow T \rightarrow c > 0.$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k \quad k = 1, 2, 3, PE_k.$$

No se tienen las evoluciones PE_i y PE_j , ver la figura 22.

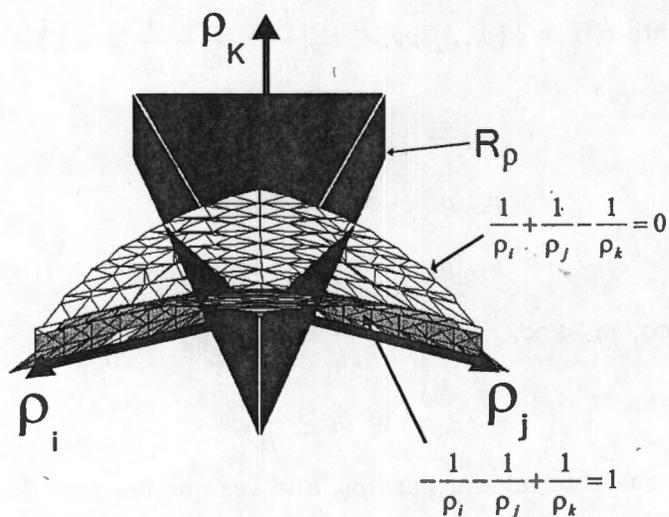


Fig 22 Frontera de la Región de Hill para los casos 5 y 21,
y Región de Potencial Cero para el caso 21.

6. $h < 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$.

Cualitativamente $RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} \geq 1 \right\}$.

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \not\rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \not\rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \not\rightarrow \infty, \rho_j < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$HE_i, PE_i, B, OS.$$

No se tienen las evoluciones HE_j, HE_k, PE_j, PE_k , ver la figura 23.

12. $h = 0, U > 0, U = 0, \lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$.

Cualitativamente $RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} \geq 0 \right\}$.

Evolución de los ρ'_i s

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_j < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$P, HE_i, PE_k.$$

No se tienen las evoluciones HE_j y HE_k , ver la figura 23.

23. $h > 0, U > 0, U = 0, U < 0, \lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0.$

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} \geq -1 \right\}.$$

Evolución de los ρ'_i s

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_j < \infty, \Rightarrow U \rightarrow \frac{-\lambda_j}{\rho_j} \Rightarrow T \rightarrow \frac{-\lambda_j}{\rho_j} + h \geq 0 \Rightarrow$$

$$h \geq \frac{\lambda_j}{\rho_j} \Rightarrow \rho_j \geq \frac{\lambda_j}{h} \Rightarrow$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \frac{\lambda_j}{h} \leq \rho_j < \infty.$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_j.$$

No se tienen las evoluciones PE_i y PE_k , ver la figura 23.

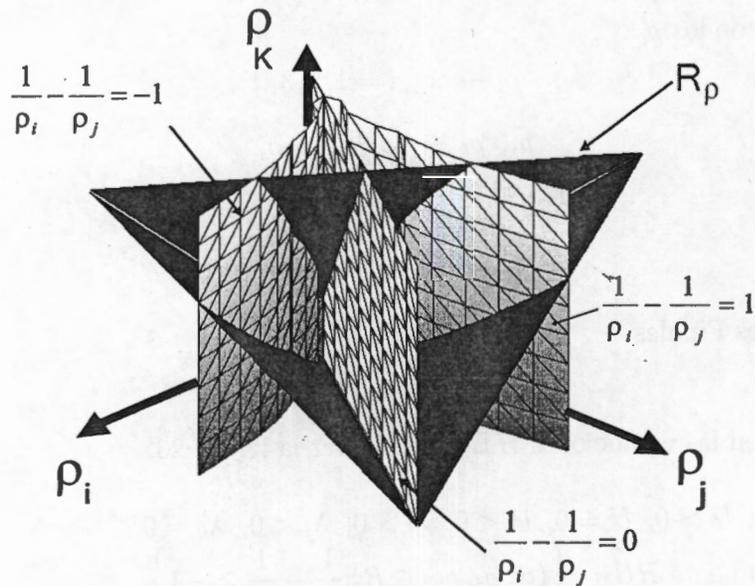


Fig 23 Frontera de la Región de Hill para los casos 6, 12 y 23, y Región de Potencial Cero para el caso 23.

7. $h = 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k > 0.$

Ecuación de energía:

$$\frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} = T \geq 0.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty, (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

Evoluciones Finales

$$P, HE_k, k = 1, 2, 3.$$

8. $h = 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0.$

Ecuación de energía:

$$\frac{\lambda_i}{\rho_i} + \frac{\lambda_j}{\rho_j} = T \geq 0.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty, (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

Evoluciones Finales

$$P, HE_i, HE_j, PE_k.$$

No se tiene la evolución HE_k .

$$13. h = 0, U = 0, \lambda_i = 0, \lambda_j = 0, \lambda_k = 0.$$

Este es un caso de completo equilibrio pues si

$$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \ddot{r}_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

a la vez que

$$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3 \Rightarrow U = 0 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow \dot{r}_i = 0, i = 1, 2, 3.$$

De este modo todo punto es punto de equilibrio, la única evolución final posible es la evolución acotada B , a diferencia del caso Newtoniano donde las evoluciones acotadas son posibles solo para valores de energía negativos, aquí es posible con energía cero.

$$17. h > 0, U < 0, \lambda_i = 0, \lambda_j = 0, \lambda_k = 0.$$

Ecuación de energía:

$$T = h > 0.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3.$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty, (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

De

$$\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \ddot{r}_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

integrando se sigue

$$\dot{r}_i = c_i, i = 1, 2, 3.$$

Evoluciones Finales

$$H\bar{P}, HE_k\bar{P}, k = 1, 2, 3.$$

Resulta interesante observar que en este caso solo se tienen evoluciones perpetuas.

14. $h > 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k > 0.$

Ecuación de energía:

$$\frac{\lambda_3}{\rho_3} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} + h = T \geq 0.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3.$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty, (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3.$$

15. $h > 0, U > 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0.$

Ecuación de energía:

$$\frac{\lambda_i}{\rho_i} + \frac{\lambda_j}{\rho_j} + h = T \geq 0.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3.$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty, (i, j, k) \sim (1, 2, 3).$$

Evoluciones Finales

$$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3.$$

10. $h = 0, U > 0, U = 0, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0.$

Cualitativamente $RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_k} \geq 0 \right\}.$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_j < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_j \not\rightarrow \infty, \rho_k < \infty.$$

Evoluciones Finales:

$$P, HE_i, HE_j.$$

No se tiene la evolución HE_k , ver la figura 24.

$$11. h = 0, U > 0, U = 0, \lambda_i < 0, \lambda_j < 0, \lambda_k > 0.$$

$$\text{Cualitativamente } RH = \left\{ (\rho_i, \rho_j, \rho_k) \in R_\rho \mid -\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_k} \geq 0 \right\}.$$

Evolución de los ρ_i 's

$$\rho_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_i, \rho_j \rightarrow \infty, \rho_k < \infty,$$

$$\rho_j, \rho_k \not\rightarrow \infty, \rho_i < \infty,$$

$$\rho_i, \rho_k \not\rightarrow \infty, \rho_j < \infty.$$

Evoluciones Finales P, HE_k .

No se tienen las evoluciones HE_j y HE_i , ver la figura 24.

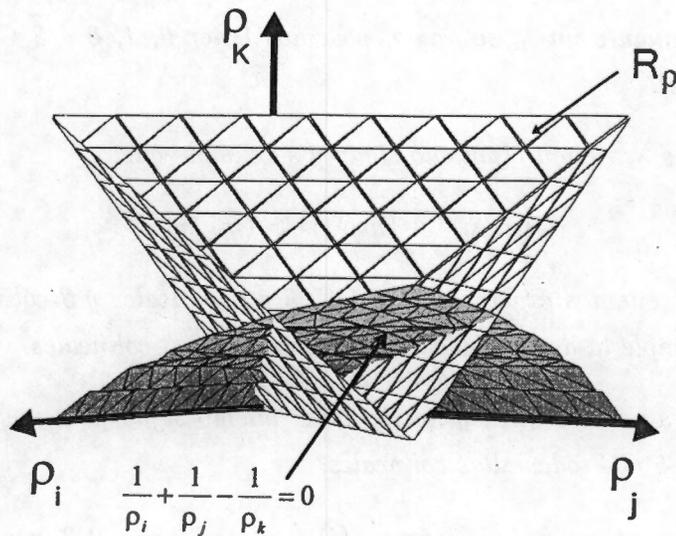


Fig 24 Frontera de la Región de Hill para los casos 10 y 11.

5.3. Evoluciones Finales en Configuración Central.

En esta sección estudiamos las evoluciones finales en el caso en el que las partículas forman configuraciones centrales.

La definición 4 nos dice que una configuración central CC es una configuración en la que el vector aceleración es proporcional al vector posición, y la constante de proporcionalidad es la misma para todas las partículas.

En el Problema Newtoniano de los Tres Cuerpos existen exactamente 5 configuraciones centrales, 3 colineales ó de Euler y 2 de triángulo equilátero ó de Lagrange, en el Problema Cargado de los Tres Cuerpos tenemos el siguiente resultado [29]:

Teorema 8 Dadas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$ y $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, se calculan los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tenemos entonces que:

1. Si al menos dos λ_i se anulan, no tenemos CC .
2. Si exactamente un λ_i se anula, podemos tener 0, 1, 2 ó 3 CC (todas colineales).
3. Si los tres λ_i tienen el mismo signo y se cumple que:

$$(m_i \lambda_i)^{\frac{1}{3}} + (m_j \lambda_j)^{\frac{1}{3}} > (m_k \lambda_k)^{\frac{1}{3}}$$

entonces tenemos exactamente 5 CC , 2 no colineales y 3 colineales, si no se cumple la desigualdad solo tendremos las 3 colineales.

4. Si los λ_i 's no se anulan y no tienen el mismo signo podemos tener 1, 2, 3, 4 ó 5 CC todas ellas colineales.

Proponemos una solución de la forma $r_i(t) = \phi(t)a_i$, $i = 1, 2, 3$, con $a_i \in \mathbb{R}^2$ y $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones (2.13) obtenemos

$$|\phi|^3 \phi^{-1} \ddot{\phi} m_i a_i = \frac{\lambda_k}{a_{ji}^3} (a_j - a_i) + \frac{\lambda_j}{a_{ki}^3} (a_k - a_i),$$

con $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$.

El lado derecho de las últimas ecuaciones es constante y por lo tanto el lado izquierdo debe también serlo, de donde se sigue que existe un λ tal que se tiene

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda \phi}{|\phi|^3}, \quad (5.2)$$

junto con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\lambda m_i a_i = \frac{\lambda_k}{a_{ji}^3} (a_j - a_i) + \frac{\lambda_j}{a_{ki}^3} (a_k - a_i), \quad (i, j, k) \sim (1, 2, 3). \quad (5.3)$$

Toda configuración $a = (a_1, a_2, a_3) \in X$ que resuelva el sistema (5.3) se llama configuración central (CC).

Una deducción indica que $\lambda = \frac{U(a)}{2I(a)}$, la cual tomará valores positivo, negativo o cero dependiendo respectivamente del valor que tome $U(a)$.

Sea a una CC y $\lambda \neq 0$, resolveremos el siguiente problema de fuerza central con intensidad λ (Para $\lambda = 0$ lo resolveremos más adelante).

$$\ddot{\phi} + \frac{\lambda \phi}{|\phi|^3} = 0. \quad (5.4)$$

Tenemos la integral del momento angular $c^* = \phi \times \dot{\phi}$, y la integral de la energía $h^* = T^* - U^*$, donde las energías cinética y potencial son respectivamente $T^* = \frac{1}{2} |\dot{\phi}|^2$ y $U^* = \frac{\lambda}{|\phi|}$.

El * denota al problema de fuerza central en términos de ϕ con intensidad λ . Sea $\phi = (x, y)$, $\dot{\phi} = (X, Y)$, introduciendo coordenadas polares (r, θ) , (R, Θ) , tenemos

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad X = R \cos \theta - \left(\frac{\Theta}{r}\right) \sin \theta, \quad Y = R \sin \theta + \left(\frac{\Theta}{r}\right) \cos \theta$$

$$R = \frac{xX + yY}{r}, \quad \Theta = xY - yX.$$

La ecuación de la energía toma la forma

$$h^* = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - \frac{\lambda}{|\phi|} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\lambda}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) - \frac{\lambda}{r}. \quad (5.5)$$

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$\dot{r} = R, \quad \dot{\theta} = \frac{\Theta}{r^2}, \quad \dot{R} = -\frac{\Theta^2}{r^3} + \frac{\lambda}{r^2}, \quad \dot{\Theta} = 0.$$

Resolviendo el sistema anterior [26] obtenemos

$$r = \frac{\frac{c^{*2}}{\lambda}}{1 + e \cos(\theta - w)}, \quad (5.6)$$

donde w es una constante de integración y e es la excentricidad, observemos que (5.6) es la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares.

Haremos ahora un estudio cualitativo del tipo de cónicas que se obtienen como soluciones de acuerdo a los valores de λ , h^* , y c^* . Partimos de la ecuación de la energía

$$h^* = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) - \frac{\lambda}{r},$$

que podemos escribir como

$$h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2} = \frac{1}{2}r^2\dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2} \geq 0.$$

Sea

$$p(r) = h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2} \geq 0. \quad (5.7)$$

De la ecuación de la energía $h^* = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - \frac{\lambda}{|\phi|}$ observamos que:

a) Si $\lambda > 0$ entonces h^* puede tomar valores positivo, cero y negativo.

b) Si $\lambda < 0$ entonces h^* solo puede tomar valores positivos.

Supongamos $U(a) > 0 \Rightarrow \frac{U(a)}{2I(a)} = \lambda > 0$.

El discriminante del polinomio $p(r)$ dado en (5.7) es $\lambda^2 + 2h^*c^{*2}$ y es no negativo si existe movimiento, lo que proporciona raíces reales.

Si $h^* < 0$ tenemos una o dos raíces positivas (Ver Figura 27):

$$-\frac{\lambda}{2h^*} \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2h^*c^{*2}}}{2h^*} = \frac{-\lambda \pm \lambda e}{2h^*}$$

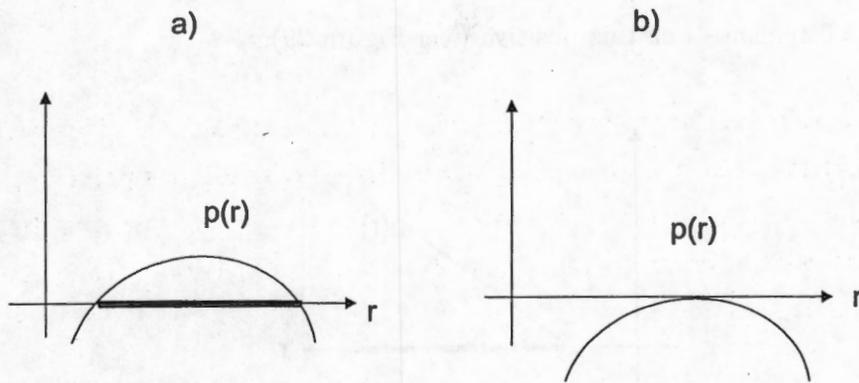


Fig 25 $h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2}$ como función de r para $h^* < 0$ y $\lambda > 0$,

a) Elipses, b) Círculos

Si $h^* > 0$ tenemos una raíz positiva (Ver Figura 28).

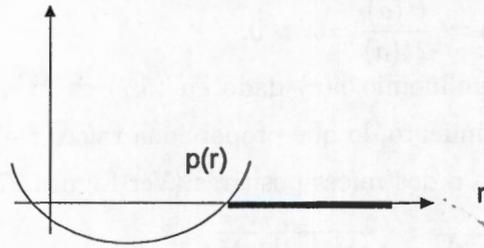


Fig 26 $h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2}$ como función de r para $h^* > 0$ y $\lambda > 0$.

Sí $h^* = 0$ tenemos una raíz positiva (Ver Figura 29).

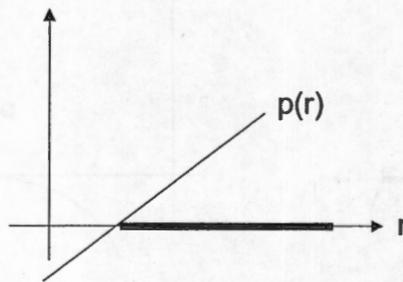


Fig 27 $h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^{*2}}{2}$ como función de r para $h^* = 0$ y $\lambda > 0$.

Para $\lambda > 0$ tenemos el espacio energía - momento angular en la Figura 30.

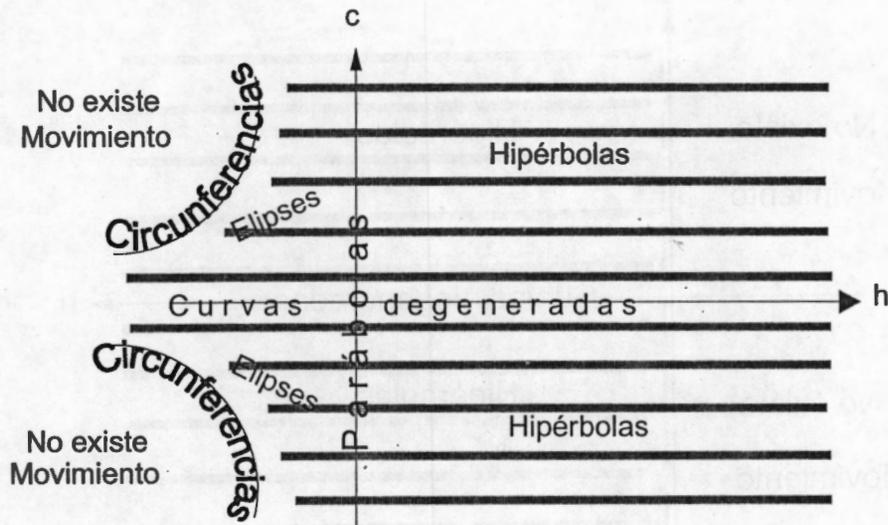


Fig 28 Espacio de energía - momento angular hc para $\lambda > 0$.

Supongamos $U(a) < 0 \Rightarrow \frac{U(a)}{2I(a)} = \lambda < 0$, y esto solo es posible con $h^* > 0$, tenemos una sola raíz positiva (Ver Figura 31).

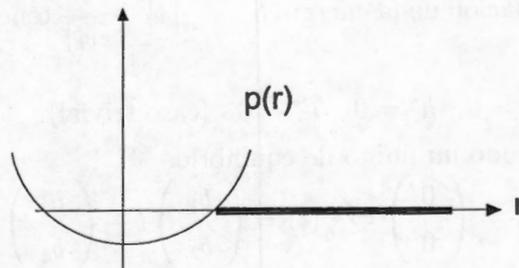


Fig 29 $h^*r^2 + \lambda r - \frac{c^*2}{2}$ como función de r para $h^* > 0$ y $\lambda < 0$.

Para $\lambda < 0$ tenemos el espacio energía - momento angular en la Figura 32.

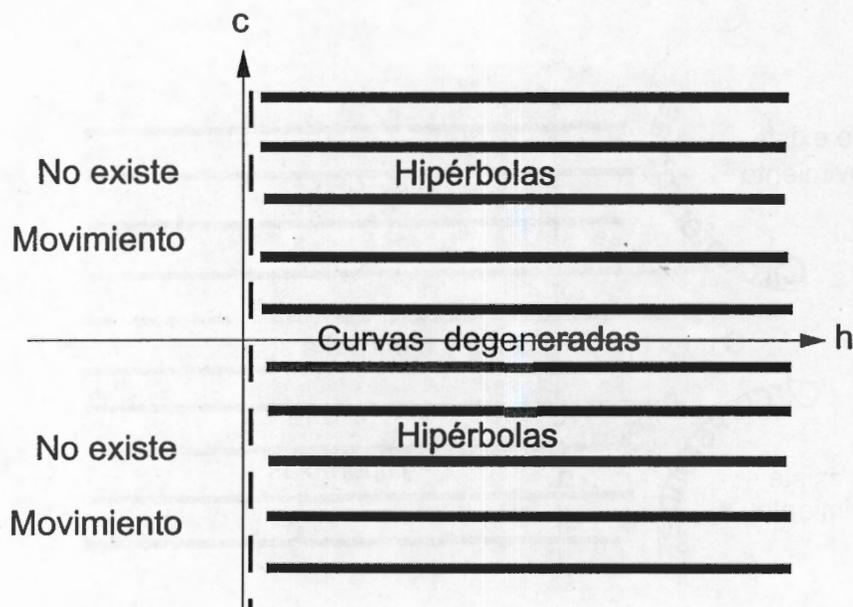


Fig 30 Espacio de energía - momento angular hc para $\lambda < 0$.

Estudiaremos ahora el caso $U(a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Observamos que el sistema de ecuaciones (5.3) se anula y

$$\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{r}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

De acuerdo con la ecuación de la energía $h^* = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - \frac{\lambda}{|\phi|}$ tenemos dos casos para h^* :

1 $\ddot{\phi} = 0$ y $\dot{\phi} = 0 \Rightarrow c^* = 0, \quad h^* = 0, \quad T^* = 0$ (caso trivial).

Obteniendo de este modo un punto de equilibrio.

2 $\ddot{\phi} = 0$ y $\dot{\phi} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ y $h^* > 0$.

Donde las $b_i, \quad i = 1, \dots, 4$ son constantes.

Tomando el producto vectorial de ϕ con $\dot{\phi}$ obtenemos

$$\phi \times \dot{\phi} = (b_3 b_2 - b_1 b_4)k,$$

en dirección ortogonal al plano de movimiento.

Si $b_3b_2 - b_1b_4 = 0$ tenemos rectas que pasan por el origen, con $c^* = 0$ y el movimiento es siempre colineal.

Si $b_3b_2 - b_1b_4 \neq 0$ tenemos rectas que no pasan por el origen, con $c^* \neq 0$.

Este tipo de soluciones solo son posibles cuando dos de los λ_i son positivos y el otro negativo, o bien cuando dos de los λ_i son negativos y el otro positivo, y se encuentran permanentemente en la región de potencial cero.

Movimientos con $h^* = 0$ y $c^* \neq 0$ no son posibles pues $h^* = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 = 0 \iff \dot{\phi} = 0$.

Para $\lambda = 0$ tenemos el espacio energía - momento angular en la Figura 33.

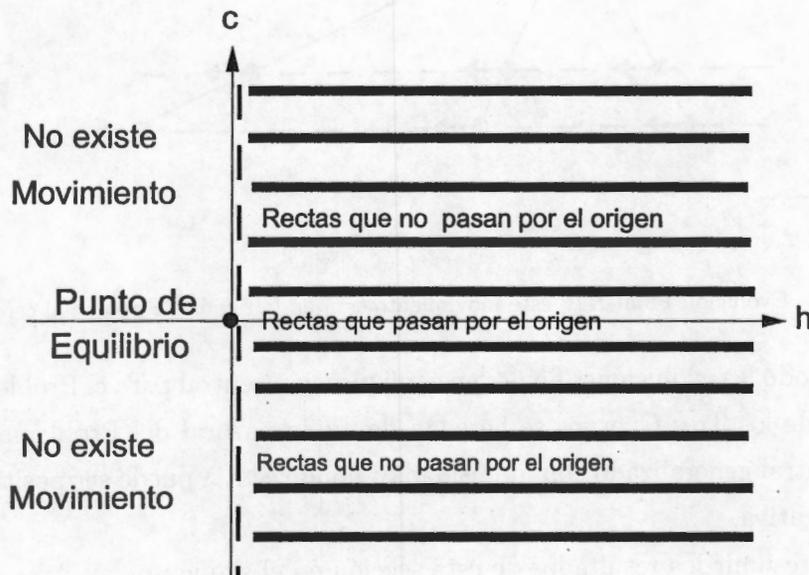


Fig 31 Espacio de energía - momento angular hc para $\lambda = 0$.

En particular en este último caso con $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{b_3}{b_4}$ tenemos que las soluciones

vienen dadas por

$$r_i(t) = a_i \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right], \quad \dot{r}_i(t) = a_i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Una solución de este tipo se muestra en la Figura 34, y solo es posible tenerlo en el problema cargado y nunca en el problema clásico Newtoniano.

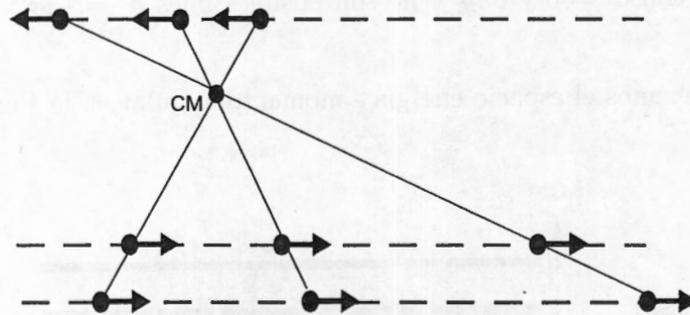


Fig 32 Evolución Final $H\bar{P}$, este movimiento está en la región de potencial cero.

De este modo las evoluciones finales en configuración central para el Problema Cargado de los Tres Cuerpos se heredan de modo natural del Problema de fuerza central generalizado con intensidad λ , donde esta λ puede ser positiva, cero o negativa.

Podemos resumir los resultados de esta sección en el siguiente

Teorema 9 *Sea a una CC en el Problema Cargado de los Tres Cuerpos, tenemos entonces que:*

1. Si $U(a) > 0$ y $h < 0$ tenemos evoluciones acotadas B (elíptica y circular).

2. Si $U(a) > 0$ y $h = 0$ tenemos evoluciones parabólicas P .
3. Si $U(a) > 0$ y $h > 0$ tenemos evoluciones hiperbólicas H .
4. Si $U(a) = 0$ y $h = 0$ tenemos evoluciones acotadas B (punto de equilibrio).
5. Si $U(a) = 0$ y $h > 0$ tenemos evoluciones hiperbólico-perpetuas $H\bar{P}$.
6. Si $U(a) < 0$ y $h > 0$ tenemos evoluciones hiperbólicas H .

Los resultados correspondientes a las Evoluciones Finales en el Problema Cargado de los Tres Cuerpos se encuentran resumidos en la Tabla 6.

Tabla 6

Evoluciones Finales para el
Problema Cargado de los Tres Cuerpos

λ_i	λ_j	λ_k	$h < 0$	$h = 0$
+	+	+	$HE_k, PE_k, B, OS, k = 1, 2, 3$	$P, HE_k, k = 1, 2, 3$
+	+	0	$HE_i, HE_j, PE_i, PE_j, B, OS$	P, HE_i, HE_j, PE_k
-	-	-	\emptyset	\emptyset
-	-	0	\emptyset	\emptyset
+	+	-	$HE_i, HE_j, PE_i, PE_j, B, OS$	$P, HE_i, HE_j, B(EQ)$
-	-	+	HE_k, PE_k, B, OS	$P, HE_k, B(EQ)$
+	-	0	HE_i, PE_i, B, OS	P, HE_i, PE_k
0	0	0	\emptyset	$B(EQ)$

λ_i	λ_j	λ_k	$h > 0$
+	+	+	$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3$
+	+	0	$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3$
-	-	-	$H, HP_k, PE_k, HE_k, k = 1, 2, 3$
-	-	0	$H, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_i, PE_j$
+	+	-	$H, H\bar{P}, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_k$
-	-	+	$H, H\bar{P}, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_i, PE_j$
+	-	0	$H, H\bar{P}, HP_k, HE_k, k = 1, 2, 3, PE_j$
0	0	0	$H\bar{P}, HE_k\bar{P}, k = 1, 2, 3$

Capítulo 6

Conclusiones Generales.

Como ya hemos mencionado la *Mecánica Celeste* se encarga primeramente de estudiar el problema Newtoniano de los n -cuerpos, sin embargo debido a que este problema presenta una enorme complejidad, la *Mecánica Celeste* ha tomado otros caminos, tanto para entender la dinámica que gobierna a nuestro sistema solar como para avanzar en el conocimiento del problema de los n -cuerpos. Podemos afirmar que este trabajo es una contribución a la *Mecánica Celeste* en tres líneas distintas.

Cuando se tiene un sistema Hamiltoniano integrable siempre resulta un reto el estudiar como las integrales primeras producen su foliación en el espacio fase. En la literatura se encuentran diversas ideas con respecto a esto. En cuanto a la parte de la foliación del espacio fase para el problema de Kepler perturbado, resulta importante mencionar que esto se pudo lograr gracias a que se encontró un sistema coordenado apropiado, en el cual se consiguió un desacoplamiento en la dependencia de integrales y variables. No todos los problemas integrables poseen esta característica. Además es de interés mencionar que en el caso $g > 0$ no se tienen colisiones.

Sabemos que el decir algo nuevo sobre el problema de los n -cuerpos es hoy en día un logro considerable, en particular la ley de áreas y sus consecuencias

son una contribución al problema Newtoniano de los tres cuerpos. Entre los resultados más sobresalientes del capítulo 4 se cuentan los valores extremos de la función área, la configuración de área máxima MAC, las distancias entre las partículas en la MAC, las configuraciones proporcionales y las proposiciones 6 y 7, ello es debido a que si en todos estos tomamos masas iguales recuperamos muchas de las propiedades y simetrías que posee la solución en forma de figura de 8 [7]. Sabemos que dicha solución se tiene sólo en el caso de masas iguales, surge entonces la interrogante de si es posible tener una solución equivalente a ésta para el caso de masas arbitrarias, estos resultados pueden ser considerados como una primera aproximación a resolver esta interesante pregunta.

Al considerar el problema cargado de los tres cuerpos, hemos sumergido al problema Newtoniano de los tres cuerpos en un problema más general, por lo que los resultados más sobresalientes del capítulo 5 son:

1. Un $\lambda_k < 0$ produce una evolución PE_k con $h > 0$, la inexistencia de la evolución HE_k con $h = 0$ y la inexistencia de las evoluciones PE_k , HE_k con $h < 0$.
2. Un $\lambda_k = 0$ cambia la evolución HE_k por PE_k con $h = 0$ y produce la inexistencia de las evoluciones PE_k , HE_k con $h < 0$, con $h > 0$ no hay cambios.
3. Existen dos tipos nuevos de evoluciones finales, se les ha dado el nombre de evoluciones perpetuas:
 - $H\bar{P}$ Hiperbólica Perpetua.
 - $HE_k\bar{P}$ Hiperbólica Elíptica k Perpetua.
4. Existen puntos de equilibrio, los cuales pueden ser considerados como un nuevo tipo de evolución final acotada, en el caso Newtoniano no existen puntos de equilibrio.

5. Es posible tener la evolución Parabólica Elíptica k , PE_k , para todos los valores de energía, en el caso Newtoniano este tipo de evolución solo es posible con $h < 0$.
6. Existen regiones de Hill para todos los valores de energía, en el caso Newtoniano estas regiones solo existen con $h < 0$.
7. Existen regiones de potencial cero y soluciones que se encuentran $\forall t$ en dicha región.

La investigación de las propiedades cualitativas de las soluciones en el problema de los tres y en general de los n cuerpos por un tiempo se ha enfocado al estudio de las evoluciones finales. El conocimiento de las posiciones y velocidades finales ayudan a dar una explicación a algunos de los fenómenos observados en *Mecánica Celeste*, como es el caso de la edad y formación de sistemas planetarios, estrellas binarias, cometas, grupos de estrellas y galaxias, etc. Y quizá el objetivo más ambicioso del conocimiento de las evoluciones finales es el poder resolver una de las interrogantes más grandes de todos los tiempos en donde convergen matemáticos, físicos, astrónomos, filósofos y otros tantos intelectuales *el origen y evolución del sistema solar*.

Es importante hacer presente que el problema cargado de los tres cuerpos y en general de los n -cuerpos es una línea de investigación de reciente aparición [29], sin embargo ha despertado interés entre los astrónomos, en particular los resultados referentes a las evoluciones finales [9] fueron bien recibidos.

6.1. Futuras Investigaciones.

Debido a que este trabajo es una contribución multifacética a la *Mecánica Celeste*, pues contempla primeramente una perturbación al problema de Kepler, después se analizan conexiones entre configuraciones y masas en el problema

clásico Newtoniano de los tres cuerpos, para finalmente hacer una clasificación exhaustiva de las evoluciones finales en el problema cargado de los tres cuerpos, las futuras investigaciones están orientadas en tres facetas.

Futuras investigaciones en el problema de Kepler.

1. Búsqueda de aplicaciones del problema de Kepler perturbado que estudiamos en este trabajo.
2. Estudiar el problema de Kepler con perturbaciones mixtas, combinando distintos tipos de potenciales: Newtoniano, cargado, homogéneo, cuasihomogéneo, isotrópico, anisotrópico, etc.

Futuras investigaciones en el problema clásico Newtoniano de los tres cuerpos.

1. Este problema en sí mismo sigue siendo una gran interrogante, sin embargo la continuación natural de este trabajo son las restricciones en masas: qué tanto se puede generalizar del caso de masas iguales a masas arbitrarias, pasando por el caso de dos masas iguales y una distinta.
2. Establecer nuevas conexiones entre masas y configuraciones.

Futuras investigaciones en el problema cargado de los tres cuerpos.

1. Debido a la enorme riqueza que presenta el potencial en el problema cargado de los tres cuerpos la investigación llevada a cabo en este trabajo se concentra en la posible existencia de las evoluciones finales. Por lo tanto la continuación natural es buscar condiciones iniciales para cada caso. Las configuraciones centrales, al generar soluciones explícitas,

proporcionan ejemplos de un considerable número de evoluciones finales. A pesar de ello, la tarea de mostrar la existencia de todas las evoluciones aquí enunciadas, está pendiente.

2. Es bien sabido que el potencial Newtoniano resulta insuficiente para explicar los innumerables comportamientos de los fenómenos celestes. Una alternativa a esta cuestión es la relatividad. Sin embargo considerando que existen múltiples fenómenos de naturaleza repulsiva en el universo, otra opción lo forma el potencial mixto, en este caso integrado por la suma de un potencial Newtoniano y un potencial cargado.
3. Si el problema Newtoniano de los tres cuerpos ha generado una considerable cantidad de sub-problemas (problema isósceles, restringido circular, restringido elíptico, problema de Sitnikov, problema de Hill), entonces una línea de investigación natural en el problema cargado de los tres cuerpos es considerar casos particulares, en este caso debido a la enorme gama de posibilidades que ofrece el potencial cargado, tenemos un sub-problema por cada caso de potencial cargado.

Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Reading, MA; Benjamin. (1978).
- [2] V. M. Alekseev. *Quasirandom Oscillations and Qualitative Questions in Celestial Mechanics*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 116. (1981).
- [3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Berlin: Springer Verlag (1978).
- [4] V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt. *Dynamical Systems III. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences.)* Berlin: Springer (1978).
- [5] V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. (1997).
- [6] J. Chazy. *Sur L'allure du Mouvement dans le Problème des Trois Corps quand le temps croit indéfiniment*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)39, 29-130, (1922).
- [7] A. Chenciner, R. Montgomery. *A Remarkable Solution of the Three Body Problem in the case of equal masses*. Annals of Math., 152, 881-901, (2000).

- [8] S. Craig, F. Diacu, E. Lacomba, E. Pérez-Chavela. *On the Anisotropic Manev Problem*. J. Math Phys. 40, 1359-1375, (1999).
- [9] A. Criollo and E. Pérez-Chavela. *Final Evolutions in the Charged Three-Body Problem*. Romanian Astronomical Journal, Vol. 12, No. 2, 147-165, (2002).
- [10] A. Criollo and E. Pérez-Chavela. *Foliación del Espacio Fase para el Problema de Kepler con Perturbaciones Anisotrópicas*. Universidad Autónoma Metropolitana. U. Iztapalapa. Depto. de Matemáticas. Reporte de Investigación, número de reporte 04.0404.01.001.2006. (2006).
- [11] A. Criollo and E. Pérez-Chavela. *Foliation of the Phase Space for the Kepler Problem with Anisotropic Perturbations*. Qualitative Theory of Dynamical Systems (Por aparecer).
- [12] J. Delgado, F. Diacu, E. Lacomba, A. Mingarelli, V. Mioc, E. Pérez-Chavela and C. Stoica. *The global flow of the Manev problem*. J. Math Phys. 37, 2748-61, (1996).
- [13] J. Delgado, E. Lacomba, J. Llibre and E. Pérez-Chavela. *Poincaré Compactification of the Collinear Three Body Problem*. Hamiltonian systems and celestial mechanics. World Sci Publishing, River Edge. 85-100, (1993).
- [14] J. Delgado and E. Pérez Chavela. *Singularidades en Mecánica Celeste*. Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 5. 155-172, (1986).
- [15] R. Devaney. *Singularities in Classical Mechanical Systems*. Proceedings special year Maryland. ed Katok. (1979-1980).
- [16] F. Diacu, E. Pérez-Chavela and M. Santoprete. *The Kepler Problem with Anisotropic Perturbations*. J. Math Phys. 46 No 7 (2005).

- [17] F. Diacu and M. Santoprete. *Nonintegrability and Chaos in the Anisotropic Manev Problem*. *Physica D* 156, 39-52, (2001).
- [18] F. Diacu and M. Santoprete. *On the Global Dynamics of the Anisotropic Manev Problem*. *Physica D* 194, 75-94, (2004).
- [19] L. Euler. *De Motu Rectilineo Trium Corporum se Mutuo Attahentium*. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 11, 144-151, (1767) 194 (2004).
- [20] M. Gutzwiller. *The Anisotropic Kepler Problem in two dimensions*. *J. Math Phys.* 14, 139-152, (1973).
- [21] Hulkower. *The Zero Energy Three Body Problem*. *Indiana Univ. Math. J.* 27, 409-448, (1978).
- [22] J. Lagrange. *Essai sur le Probleme des Trois Corps*. *Euvres*, vol 6, Paris, 272-292, (1872).
- [23] J. Llibre, A. Teruel, C. Valls, A. de la Fuente. *Phase Portraits of the Two-Body Problem with Manev Potential*. *J. Phys. A: Math Gen* 34, 1919-1934, (2001).
- [24] C. Marchal. *The Three-Body Problem*. Elsevier Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo. (1990).
- [25] R. McGehee. *Triple Collision in the Collinear Three Body Problem*. *Inventions Math.* 27, 191-227, (1974).
- [26] K. Meyer and G. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Applied Mathematical Sciences 90, Springer-Verlag (1992).
- [27] R. Moeckel. *Some Qualitative Features of the Three-Body Problem*. *Contemporary Mathematics*, vol. 81, 1-21, (1988).

- [28] R. Montgomery, *The Geometric Phase of the Three Body Problem*. Non-linearity, v. 9, 1341-1360, (1996).
- [29] E. Pérez-Chavela, D. Saari, A. Susin and Z. Yan. *Central Configurations in the Charged Three Body Problem*. Contemporary Mathematics 198. Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, 137-155, (1996).
- [30] E. Pérez-Chavela. *Different Kinds of Potentials in Celestial Mechanics*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems vol 5, 545-560, (1999).
- [31] H. Pollard. *Qualitative Methods in the n-Body Problem*. Space Mathematics, Part 1. Lectures in Applied Mathematics, Vol. 5-Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1966).
- [32] A. Roy. *Orbital Motion*. Adam Hilger, Bristol (1968).
- [33] D. Saari. *On Bounded Solutions of the n-Body Problem*. in G. E. O. Giacaglia, ed., *Periodic Orbits Stability and Resonances*, D. Reidel, Dordrecht (1970).
- [34] D. Saari. *Expanding Gravitational Systems*. Trans. Amer. Math. Soc. 156, 219-240, (1971).
- [35] D. Saari. *Symmetry in n-Particle Systems*. Comtemp. Math. Vol 81, 23-42, (1988).
- [36] K. A. Sitnikov. *Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problem*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), English transl. in Soviet Phys. Dokl. 5, 303-306, (1960/61).
- [37] F. Szenkovits, C. Stoica, V. Mioc. *The Manev-Type Problems: A Topological View*. Mathematica 41 (64) No 1, 105-120, (1999).

- [38] E.T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4th edition, Cambridge University Press. (1937).
- [39] A. Wintner. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton Univ. Press, Princeton N.J. (1941).