

**CONTROL NO LINEAL DE UN REACTOR
QUIMICO USANDO TECNICAS DE LINEALIZACION
ENTRADA/SALIDA**

TESIS QUE PRESENTA EL ING.

ERICK DAVID GAMAS CASTELLANOS,

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

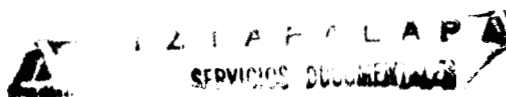
EN LA ESPECIALIDAD DE

MATEMATICAS APLICADAS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA**

AGOSTO

1988



079759

AGRADECIMIENTOS

A los Drs. Jaime Alvarez Gallegos y Rafael Castro Linares por su apoyo y atinada dirección en el desarrollo de este trabajo.

A los Drs. Rodolfo Suarez y Jesús Alvarez por sus valiosos comentarios sobre este trabajo y su participación en el jurado en que este fué defendido.

A la Profra. Ninive T. Castellanos Castillo, mi madre, quién con su sacrificio e inteligencia ha sabido dar a sus hijos la red y no los peces.

Al C.P. Claudio Gamas Ramos, mi padre, por enseñarme con el ejemplo el camino hacia la superación personal.

A tí Cathy, mi amada esposa, por el amor y la comprensión que me prodigas.

A tí mi niña, Tania, por darme la alegría de tu presencia.

A mis hermanos, todos, por la amistad y cariño que siempre me han tenido.

Y al CREADOR , a quién todos debemos nuestra existencia.

INDICE

CAPITULO

PAGINA

1. INTRODUCCION	1
2. LINEALIZACION E/S, DINAMICA CERO Y RECHAZO A PERTURBACIONES	6
2.1 Definiciones	6
2.2 Linealización E/S	9
2.3 Dinámica cero	17
2.4 Rechazo a perturbaciones	19
3. ANALISIS DEL REACTOR	25
3.1 Modelo del reactor	25
3.2 Linealización E/S y dinámica cero	27
3.2.1 Sistema con una entrada y una salida	27
a) Linealización E/S	27
b) Dinámica cero del RCTA	35
3.2.2 Sistema con dos entradas y dos salidas	37
3.3 Desacoplamiento a perturbaciones	45
a) Sistema con una entrada y una salida	45
b) Sistema con dos entradas y dos salidas	49

CAPITULO**PAGINA**

4. RESULTADOS. SIMULACION DEL REACTOR QUIMICO	53
4.1 Puntos de equilibrio del modelo del reactor	54
4.2 El sistema dinámico en lazo abierto	55
4.2.1 Ecuaciones de variaciones con respecto a los parámetros	55
4.2.2 Sensibilidad del sistema a los parámetros del modelo	59
4.3 Diseño de las entradas V	62
4.4 Rechazo a perturbaciones en el sistema con 1E/1S	64
4.4.1 Sensibilidad con respecto a los parámetros	67
4.5 Rechazo a perturbaciones en el sistema con 2E/2S	69
FIGURAS	72
5. CONCLUSIONES	95
REFERENCIAS	99

1. INTRODUCCION

Una de las operaciones unitarias más importantes en la industria química es aquella en que se lleva a cabo una reacción química para la producción de un compuesto determinado; la correcta operación de ésta, dadas las condiciones de diseño, determina frecuentemente la viabilidad del proceso, ya sea desde un punto de vista de operación o desde un punto de vista económico. Los reactores químicos presentan diferentes formas determinadas por las características del proceso y las propiedades de las sustancias involucradas en éste. Pueden ser de tanque agitado, tubulares, de lecho fluidizado, de suspensión y de lechada, y pueden operar en forma continua o por lotes [1,2].

Los modelos de la mayoría de los reactores químicos han sido objeto de estudios profundos por muchos años. Estos estudios han sido encaminados principalmente al análisis de la multiplicidad y estabilidad de puntos de equilibrio, así como al análisis de comportamientos oscilatorios [3-8,37,38]. Sin embargo, el diseño de sistemas de control que involucre al modelo de un reactor químico no ha sido abordado con igual profundidad sino hasta fechas recientes [9-16]. Dada la no linealidad que presentan los modelos de reactores químicos, la forma tradicional de diseñar un control del sistema es por medio de la aproximación lineal local del sistema no lineal (SNL) original, por truncamiento al primer orden de la expansión en series de Taylor, y la posterior aplicación de técnicas de análisis lineal para el diseño de un control lineal [17-19].

A pesar de su amplia aplicación en el estudio de la estabilidad, controlabilidad y observabilidad locales de SNL's, la aproximación lineal local presenta varios inconvenientes importantes [20]: La salida del sistema linealizado no es necesariamente la misma que la del SNL original por lo que la

descripción de la relación Entrada/Salida (E/S) no es adecuada, la linealización de no linealidades no acotadas inducen un error apreciable en la descripción del sistema original.

El diseño de un control para un SNL basado en su aproximación lineal local es adecuado cuando las no linealidades del sistema son tales que dicha aproximación es suficiente para describir al sistema, o bien las condiciones de operación de este hacen que las no linealidades hagan que el sistema tenga un comportamiento lineal al menos localmente. En general, los SNL's son muy sensibles a la presencia de perturbaciones tanto externas como internas (variaciones en los parámetros del modelo), por lo que un control diseñado en base a la aproximación lineal local del SNL muestra un comportamiento poco satisfactorio en algunos casos y en otros este comportamiento es definitivamente indeseable. Esto hace evidente la necesidad de desarrollar métodos que permitan el diseño de controladores para modelos no lineales.

Considerando que la teoría de control de sistemas lineales está bastante desarrollada, es natural pensar que para el diseño de un control no lineal se deba buscar una forma de reducir el control del SNL al control de un sistema lineal (SL) equivalente, sin que esto implique una linealización local. La linealización del SNL involucra entonces la transformación de su espacio de estados mediante un cambio de coordenadas, y la construcción de las entradas de tal forma que el SNL transformado en lazo cerrado (STLC) presente ciertas características lineales. El control del SNL podrá entonces diseñarse como un control lineal del SL equivalente. Dependiendo del sistema que se analice y de los objetivos de control se puede buscar que el STLC sea lineal en los estados o bien que la linealidad se presente en la relación E/S. Cuando es posible encontrar un SL equivalente AL SNL transformado en lazo cerrado se dice que el SNL es linealizabile.

Con el propósito de desarrollar una metodología que permi-

tiera construir una transformación y una retroalimentación para obtener un SL equivalente al SNL, se introdujo un nuevo enfoque de análisis para los SNL's [21-24]. Además de las herramientas de Análisis Funcional ya ampliamente aplicadas en el estudio de los SL's, es posible utilizar ahora las herramientas de la Geometría Diferencial que, aunque presentan un mayor grado de dificultad para su comprensión y su correcta aplicación, permiten una descripción de tipo cualitativo del espacio de estados y de los conceptos de Controlabilidad y Observabilidad. En [23-26] se presenta este último tipo de aproximación para el análisis y síntesis de estructuras de control de SNL's denominado Control Geométrico.

En este trabajo se presenta la aplicación de técnicas de Control Geométrico para el análisis del modelo de un Reactor Continuo de Tanque Agitado (RCTA) no isotérmico. El objetivo es construir una transformación de coordenadas y una retroalimentación estática de los estados que permitan linealizar E/S al SNL asociado a tal modelo. Se busca también que este esquema permita el rechazo de perturbaciones externas.

Ya se han hecho algunos estudios a diversos modelos del RCTA utilizando técnicas de control geométrico, obteniéndose resultados para un SNL dado por el modelo del RCTA con dos variables de estado utilizando una ley de control óptima [12]. Esta aproximación presenta la desventaja de ser aplicable a una clase muy particular de SNL's, pues se aproxima el SNL por medio de un sistema bilineal. La aplicación al RCTA del método presentado en [27] para la construcción de una transformación del espacio de estados y el diseño de una retroalimentación de estos que permite obtener un SL en los estados con una dinámica determinada, fue hecha en [14]. Esta aproximación permite la estabilización del SNL a través del control de su SL equivalente.

Por otro lado, en [16] se presenta la aplicación de técnicas

de control geométrico para el diseño de una retroalimentación no lineal de los estados que permite el seguimiento de trayectorias de operación en un reactor por lotes.

El análisis de un modelo de tres estados del RCTA por las técnicas de control geométrico se presenta en este trabajo. Se aplican las técnicas de construcción de una transformación y una retroalimentación de estados que permiten llevar a cabo, por un lado, una linealización E/S del SNL, y por el otro, hacen que, bajo ciertas condiciones, el STLC rechace perturbaciones externas. Estas técnicas fueron introducidas en [23 y 24].

Se analizaron dos casos de SNL's en el modelo del reactor, uno representa un sistema con una entrada y una salida (1E/1S) y el otro el sistema con dos entradas y dos salidas (2E/2S). En ambos casos las salidas se consideran dadas por los estados del sistema.

El análisis del sistema con 1E/1S se realizó considerando distintas salidas. Análogamente se hizo con el sistema con 2E/2S tomando diferentes pares de salidas.

El STLC con 1E/1S es linealizabile para una de las salidas y solo es lineal E/S para el resto de las salidas consideradas. El SNL con 2E/2S es lineal E/S.

En el análisis de rechazo a perturbaciones se obtuvo que el STLC con 1E/1S no rechaza perturbaciones no medibles. Sin embargo, una de las perturbaciones medibles si puede ser rechazada. El STLC con 2E/2S rechaza algunas perturbaciones no medibles y todas las perturbaciones medibles son rechazadas. Se obtuvieron resultados de simulación del STLC sujeto a perturbaciones. El objetivo de control es la regulación alrededor de un punto de operación.

El método presentado en [27] para obtener un sistema lineal en el espacio de estados no es aplicable al modelo del RCTA con 1E/1S pues no se satisfacen completamente las condiciones básicas de este método [16,29]. Por otro lado, la linealidad de los

estados no garantiza linealidad E/S. Esto constituye la mayor desventaja del método arriba mencionado. Se ha sugerido [28] que sobre la linealización en los estados, se podría redefinir la salida para además lograr linealidad entre ésta y los estados transformados ; el hacer esto complica el diseño de la ley de control y no se obtiene un esquema evidente para propósitos de rechazo a perturbaciones.

La distribución de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se presentan los resultados teóricos relacionados con la construcción de una transformación y una retroalimentación de los estados tanto para el problema de linealización E/S como para el problema de rechazo a perturbaciones. El capítulo 3 se dedica al análisis del modelo del RCTA en base a los conceptos del capítulo 2. En el capítulo 4 se presenta el análisis de sensibilidad del SNL con respecto a los parámetros del modelo del reactor para el sistema en lazo abierto y en lazo cerrado, y se presentan también los resultados obtenidos de la simulación en computadora digital del SNL transformado en lazo cerrado y las respuestas de este ante la presencia de perturbaciones. Las conclusiones de este trabajo se presentan en el capítulo 5.

2. LINEALIZACION E/S, DINAMICA CERO Y RECHAZO A PERTURBACIONES

En esta sección se presentan los resultados teóricos obtenidos en [23,24] en relación con el problema de Linealización E/S (PL) y el de Rechazo a Perturbaciones (PRP) en un sistema no lineal (SNL) con varias entradas y salidas. La exposición de estos resultados se limita a presentar los aspectos más relevantes con respecto a la solución del PL y del PRP. En primer lugar, se presentan algunas definiciones básicas relacionados con el control geométrico de SNL's y posteriormente se hace la presentación de los problemas mencionados así como su solución. Se presenta también el concepto de dinámica cero de un SNL y su relación con una dinámica interna del sistema cuando éste no es linealizabile .

2.1 Definiciones

La gran mayoría de los sistemas obtenidos al modelar procesos químicos, físicos, biológicos y sociales pueden ser descritos por [25]

$$\Sigma_o : \begin{aligned} \frac{d x}{d t} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^l$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ y f y h son funciones C^∞ definidas en D , un abierto de $\mathbb{R}^n$. La variable de control $u(t)$ representa a las entradas externas del sistema y la variable $y(t)$ representa las salidas del sistema. Las variables de estado x pueden ser o no medibles y representan a la memoria del sistema. El pasado de Σ_o determina la evolución futura del sistema a través de la información contenida en sus variables de estado.

El comportamiento dinámico de un sistema como Σ_0 puede ser visto geoméricamente en dos formas: para cada control $u(t)$, Σ_0 define a un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^n$; y para cada estado $x \in \mathbb{R}^n$, Σ_0 define a un subconjunto unidimensional del espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en x . La función $u(x)$ se supone satisface la condición de Lipschitz de tal forma que Σ_0 tiene una solución única $x(t)$ para cada condición inicial $x(0)$. El par $[x(t), u(t)]$ define la trayectoria Estado-Control del SNL Σ_0 .

Asociados a la descripción desde un punto de vista geométrico de Σ_0 , se encuentran los conceptos de derivada de Lie, paréntesis de Lie e involutividad de un conjunto de campos vectoriales. Estos juegan un papel importante en el análisis de SNL's de control. Véase por ejemplo [25] donde se muestra la importancia de estos conceptos en el estudio de la Controlabilidad y Observabilidad de SNL's. Su importancia en el estudio de la transformación de SNL's para propósitos de linealización se presenta más adelante en este mismo capítulo.

Sean f y g funciones C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, y $\theta(x)$ una función escalar también C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$. Se define la derivada de Lie de $\theta(x)$ con respecto a f como

$$L_f \theta(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} f(x) \quad (2.2)$$

donde $\partial \theta / \partial x$ es el gradiente de $\theta(x)$. La derivada de Lie $L_f \theta(x)$ es también una función C^∞ sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Así, por inducción, es posible definir derivadas de Lie de cualquier orden dadas por la fórmula de recursividad siguiente

$$L_f^k \theta(x) = L_f [L_f^{k-1} \theta(x)] = \langle dL_f^{k-1} \theta(x), f(x) \rangle \quad (2.3) \\ k=1, 2, 3, \dots$$

donde $\langle df, g \rangle$ denota lo siguiente

$$\langle df, g \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (2.4)$$

y $L_f^0 \theta(x) = \theta(x)$. El paréntesis de Lie (Paréntesis de Poisson) de las funciones f y g está definido por

$$[f, g](x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) \quad (2.5)$$

donde $\partial f / \partial x$ y $\partial g / \partial x$ son los Jacobianos de f y g , respectivamente. El paréntesis de Lie de f y g es también una función C^∞ por lo que se pueden también definir paréntesis de Lie de las funciones originales con la nueva función formada por $[f, g]$.

Si se denota

$$\text{ad}_f(g) = [f, g]$$

entonces,

$$\text{ad}_f^k(g) = [f, \text{ad}_f^{k-1}(g)], \quad k=1, 2, \dots \quad (2.6)$$

con $\text{ad}_f^0(g) = g$.

Definición 1. Se dice que un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es involutivo si hay escalares α_{ijk} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, n$; $k=1, 2, \dots, n$, tales que el paréntesis de Lie de los elementos del conjunto, tomados por pares, sean una combinación lineal de los elementos de éste, es decir, si

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_{ijk} f_k \quad (2.7)$$

2.2 Linealización E/S.

Considérese el SNL con varias entradas y salidas dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ \Sigma : \quad y_1 &= h_1(x) \\ y_2 &= h_2(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ y $h_1, h_2, \dots, h_m$ son funciones C^∞ definidas sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2. Sean $r_i, i=1,2,\dots,m$, los números enteros más pequeños tales que

$$\begin{aligned} i) L_{g_j} L_f^k h_i(x) &= 0 \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq m \\ &\quad \forall \quad k < r_i - 1 \\ &\quad \forall \quad x \in V(x^0) \end{aligned}$$

ii) la matriz $A(x)$ cuyas componentes están dadas por

$$a_{ij} = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad (2.9)$$

no es singular en $x=x^0$.

donde $V(x^0) \subseteq D$ es una vecindad del punto x^0 . Cada número $r_i, i=1,2,\dots,m$, define el grado relativo asociado a cada salida $h_i(x), i=1,2,\dots,m$, del SNL Σ . Al número r dado por

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_m \quad (2.10)$$

se le conoce como el grado relativo de Σ en el punto x^0 . En

general $r \leq n$ y a la matriz $A = [\alpha_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq m$, se le denomina matriz de desacoplamiento. ■

Definición 3. Considérese un SNL de la forma de Σ en (2.8), si es posible llevar a cabo una transformación de este sistema de forma que, bajo esta transformación, se presente una relación de equivalencia entre el sistema transformado y un sistema lineal, se dice que el SNL es linealizabile.

PROBLEMA DE LINEALIZACION E/S (PL): Considérese el SNL Σ dado en (2.8) con grado relativo $r \leq n$. El PL consiste en encontrar una transformación de coordenadas ϕ , del espacio de estados y una retroalimentación estática de los estados de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \quad (2.11)$$

con $v \in \mathbb{R}^m$ un nuevo vector de entradas, $\alpha(x) \in \mathbb{R}^m$ y $\beta(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tales que el SNL transformado en lazo cerrado (STLC) presente un comportamiento lineal Entrada/Salida (E/S). ■

Teorema 1 [23,24]. Suponga que el SNL Σ tiene un grado relativo r . Entonces, la transformación de coordenadas dada por

$$\phi_j^i = L_f^j h_i(x) \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=0,1,2,\dots, r_i-1 \end{matrix} \quad (2.12)$$

y la retroalimentación estática de estados de la forma (2.11) con

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -A^{-1}(x) b \\ \beta(x) &= A^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $A(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de desacoplamiento y $b(x) = [b_1(x),$

$\dots, b_m(x)]^T$ con $b_i = L_f^{r_i} h_i(x)$, linealiza E/S al SNL Σ ■

Demostración: Sean

$$z_j^i = \phi_{j,i}^i(x) \quad (2.14)$$

por la regla de la cadena se ve que

$$\dot{z}_j^i = \frac{d \phi_{j,i}^i(x)}{d t} = \frac{\partial \phi_{j,i}^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

es decir

$$\begin{aligned} \dot{z}_j^i &= \frac{\partial \phi_{j,i}^i}{\partial x} \left[f(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x) u_k \right] \\ &= \frac{\partial \phi_{j,i}^i}{\partial x} f(x) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_{j,i}^i}{\partial x} g_k(x) u_k \\ &= L_f \phi_{j,i}^i + \sum_{k=1}^m \left[L_{g_k} \phi_{j,i}^i u_k \right] \quad \begin{matrix} 1 < i < m \\ 0 \leq i < r_i - 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\dot{z}_j^i = L_f \phi_{j,i}^i + \sum_{k=1}^m \left[L_{g_k} \phi_{j,i}^i u_k \right] \quad \begin{matrix} 1 < i < m \\ 0 \leq i < r_i - 1 \end{matrix} \quad (2.15)$$

y de (2.12) y (2.14) se ve que (2.15) puede ser escrita como

$$\boxed{\dot{z}_j^i = z_{j+1}^i + \sum_{k=1}^m \left[L_{g_k} L_f^{r_i} h_i(x) u_k \right]} \quad \begin{matrix} 1 < i < m \\ 0 \leq i < r_i - 1 \end{matrix} \quad (2.16)$$

Si el sistema Σ tiene un grado relativo r se tiene que

$$L_{g_k} L_f^j h_i(x) u_k = 0, \quad \begin{array}{l} \forall \quad 1 \leq k \leq m \\ \forall \quad 1 \leq i \leq m \\ \forall \quad i < r_i - 1 \end{array}$$

Entonces, para $i=1,2,\dots,m$ y $i < r_i - 1$ se puede escribir (2.16) como

$$\dot{z}_j^i = z_{j+1}^i \quad (2.17)$$

y, para $i=1,2,\dots,m$ y $i = r_i - 1$ de (2.16) se obtiene que

$$\dot{z}_{r_i}^i = L_f^{r_i} h_i(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} + \sum_{k=1}^m [L_{g_k} L_f^{r_i-1} h_i(x) u_k] \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \quad (2.18) \quad 1 \leq i \leq m$$

De esta forma, el SNL Σ dado por (2.8) y transformado por (2.12) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1 \\ \dot{z}_2^1 &= z_3^1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1}^1 &= z_{r_1}^1 \\ \dot{z}_{r_1}^1 &= L_f^{r_1} h_1(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} u_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1^2 &= z_2^2 \\
z_2^2 &= z_3^2 \\
&\vdots \\
z_{r_2-1}^2 &= z_{r_2}^2 \\
z_{r_2}^2 &= \left. L_f^{r_2} h_2(x) \right|_{x = \Phi^{-1}(z)} + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_2-1} h_2(x) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} u_j \\
z_1^m &= z_2^m \\
z_2^m &= z_3^m \\
&\vdots \\
z_{r_m-1}^m &= z_{r_m}^m \\
z_{r_m}^m &= \left. L_f^{r_m} h_m(x) \right|_{x = \Phi^{-1}(z)} + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_m-1} h_m(x) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} u_j
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Cuando el SNL Σ transformado se le expresa en la forma (2.19) se dice que Σ está en su forma normal local.

Si se define

$$\begin{aligned}
z^* &= [z_{r_1}^1, z_{r_2}^2, \dots, z_{r_m}^m]^T, \\
b(z) &= [b_1(z), b_2(z), \dots, b_m(z)]^T
\end{aligned} \tag{2.20a}$$

donde

$$b_i(z) = \left. L_f^{r_i} h_i(x) \right|_{x = \Phi^{-1}(z)} \quad i=1, 2, \dots, m \tag{2.20b}$$

y se agrupan los términos de (2.19) dados por (2.18) se encuentra que

$$\dot{z}^* = b(z) + A(z) u \quad (2.21)$$

donde $A(z)$ es la matriz de desacoplamiento cuyas componentes, evaluadas en $x = \bar{x}^{-1}(z)$, están dadas por (2.9) y $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$.

Como $A(z)$ no es singular, es posible definir una retroalimentación estática de los estados dada por

$$u = A^{-1}(z) \cdot [-b(z) + v] \quad (2.22)$$

donde $v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ es un nuevo vector de entradas. De (2.21) y (2.22) se obtiene que

$$\dot{z}^* = v \quad (2.23)$$

por tanto, el STLC está dado ahora por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1 \\ \dot{z}_2^1 &= z_3^1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1}^1 &= z_{r_1}^1 \\ \dot{z}_{r_1}^1 &= v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_1^2 &= z_2^2 \\ \dot{z}_2^2 &= z_3^2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{r_2-1}^2 &= z_{r_2}^2 \\
\dot{z}_{r_2}^2 &= u_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_1^m &= z_2^m \\
\dot{z}_2^m &= z_3^m \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r_m-1}^m &= z_{r_m}^m \\
\dot{z}_{r_m}^m &= u_m
\end{aligned}$$

y las salidas están dadas por

$$y_i = z_0^i \quad i=1,2,\dots,m. \quad (2.25)$$

Por simple inspección se observa que el sistema dado por (2.24) y (2.25) es un sistema lineal. Este sistema es un sistema lineal controlable y observable [23].

Si el grado relativo del SNL Σ es igual a n , entonces Σ es un SNL linealizabile. Esto puede verse directamente de (2.24). La transformación de coordenadas $\bar{z}(x)$ está completamente definida por (2.12).

Cuando el grado relativo de Σ es menor que n el sistema solo es lineal E/S. Sin embargo, la transformación $\bar{z}(x)$ no está completamente definida por (2.12), y es necesario definir $n-r$ coordenadas $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$, de tal manera que $\bar{z}(x) = [\phi^1(x) \phi^2(x) \dots \phi^r(x) \eta_1(x) \eta_2(x) \dots \eta_{n-r}(x)]$, donde $\phi^i(x) = [\phi_0^i(x)$

$\phi_1^i(x) \dots \phi_{r_i-1}^i(x)]^T$, sea un difeomorfismo. El STLC está formado entonces por una parte lineal dada por (2.24) para las primeras r coordenadas, y una parte no lineal dada por

$$\dot{\eta} = q(z, \eta) + \sum_{j=1}^m \rho_j(z, \eta) u_j \quad (2.26)$$

para las $n-r$ coordenadas restantes, donde

$$\eta(z, \eta) = [\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_{n-r}(x)]^T \Big|_{x = \Phi^{-1}(z, \eta)} \quad (2.27a)$$

$$q(z, \eta) = [L_f \eta_1(x), L_f \eta_2(x), \dots, L_f \eta_{n-r}(x)]^T \Big|_{x = \Phi^{-1}(z, \eta)} \quad (2.27b)$$

$$\rho_j(z, \eta) = [L_{g_j} \eta_1(x), L_{g_j} \eta_2(x), \dots, L_{g_j} \eta_{n-r}(x)]^T \Big|_{x = \Phi^{-1}(z, \eta)}, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2.27c)$$

Observación: Se puede demostrar [23,24,29] que si el conjunto $\{g_j\}$, $i=1, 2, \dots, m$, es involutivo, es posible encontrar $n-r$ funciones que complementan a (2.12) para las cuales se satisface que

$$L_{g_j} \eta_i(x) = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, m, \quad (2.28)$$

$$\forall i=1, 2, \dots, n-r$$

y las funciones η_i , $i=1, 2, \dots, n-r$, se encuentran al resolver el sistema de $n-r$ ecuaciones diferenciales parciales dadas por (2.28). De esta manera, la parte no lineal del STLC está dada por

$$\dot{\eta} = q(z, \eta) \quad (2.29)$$

2.3 Dinámica Cero

Como resultado de una linealización E/S de Σ y para $r < n$ se encontró que el STLC es descompuesto en una parte lineal y otra no lineal. La presencia de esta parte no lineal refleja la existencia de una dinámica no observable (dinámica interna) en el STLC.

Se ha encontrado [30] que se presentan tres tipos de dinámica interna en los SNL's. La primera está asociada con la máxima pérdida de observabilidad en un SNL en lazo cerrado al utilizar una retroalimentación que resuelve el problema de rechazo a perturbaciones. La segunda dinámica, la dinámica cero, es aquella en la que las salidas del sistema en lazo cerrado son identicamente cero, y la tercera dinámica interna es aquella asociada con la existencia de un sistema inverso (aquel sistema para el cual, dado un SNL de la forma (2.1), es posible construir la retroalimentación $u(t)$ a partir del conocimiento de las salidas $y(t)$ y de una condición inicial para el vector de estados, x^0).

Cada una de estas dinámicas presentan interés para su estudio en función de los objetivos de control fijados para un determinado SNL. En general, el estudio de ellas está determinado por la necesidad de saber si el sistema en lazo cerrado es estable o no.

En este trabajo se considera el estudio de la dinámica cero de los SNL's que se analizan, pues el interés radica en el diseño de una retroalimentación estática de los estados que estabilice al menos localmente a estos sistemas.

Afirmación [24]. Considérese el sistema transformado en lazo

cerrado (STLC) dado por las ecuaciones (2.17) y (2.21). La retroalimentación de los estados que fuerza a las salidas del sistema a tomar un valor de cero para todo $t \geq 0$ está dada por

$$u = -A^{-1}(0) b(0) \quad (2.30)$$

y la dinámica interna resultante, la dinámica cero, está dada por

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) + \sum_{j=1}^m \rho_j(0, \eta) u_j \quad (2.31)$$

cuando el conjunto $\{q_j\}$, $i=1, 2, \dots, m$, no es involutivo, y por

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad (2.32)$$

cuando dicho conjunto sí es involutivo. ■

Demostración. Si $h_i \equiv 0$, $i=1, 2, \dots, m$, entonces de las ecuaciones (2.12), (2.14) y (2.17) se puede ver que

$$\begin{aligned} z_1^1 &= z_2^1 = \dots = z_{r-1}^1 = z_r^1 \equiv 0 \\ z_1^2 &= z_2^2 = \dots = z_{r-1}^2 = z_r^2 \equiv 0 \\ &\vdots \\ z_1^m &= z_2^m = \dots = z_{r-1}^m = z_r^m \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es decir, $z \equiv 0$. De las ecuaciones (2.20) y (2.21) y dadas las igualdades en (2.33) se obtiene que

$$A(0) u + b(0) = 0, \quad (2.34)$$

y al despejar u se obtiene (2.30).

Si el conjunto $\{g_i\}$, $i=1,2,\dots,m$, NO es involutivo, de (2.26) y (2.33) se obtiene (2.31); de (2.29) y (2.33) se obtiene (2.32) para cuando $\{g_i\}$, $i=1,2,\dots,m$, es involutivo. ■

2.4 Rechazo a Perturbaciones

Considérese ahora al SNL dado por

$$\Sigma^* : \frac{d x}{d t} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i + \sum_{j=1}^p p_j(x) w_j \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned}$$

donde $f, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x), h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)$ están dados como antes; $p_1(x), p_2(x), \dots, p_p(x)$ son funciones C^∞ sobre un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $w_1, w_2, \dots, w_p \in W \subseteq \mathbb{R}^p$ son perturbaciones externas que alteran el comportamiento del sistema.

El problema que aquí se aborda se refiere al diseño de una retroalimentación estática de estados que permite que las salidas del sistema no se vean alteradas por la presencia de perturbaciones externas que entran al sistema. Por otro lado, se espera que el sistema en lazo cerrado presente un comportamiento estable.

Definición 4. Se dice que un SNL con grado relativo r presenta desacoolamiento entre sus salidas y las perturbaciones externas

cuando en la r_i -ésima derivada de la salida $y_i = h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ las perturbaciones w_j , $j = 1, 2, \dots, p$, no aparecen en forma explícita. ■

PROBLEMA DE RECHAZO (DESACOPLAMIENTO) A PERTURBACIONES (PRP)

Supongase que el SNL Σ^* tiene grado relativo $r \leq n$. El PRP consiste en encontrar una retroalimentación estática de los estados de la forma (2.11) tal que las salidas del STLC estén desacopladas de las perturbaciones que entran al sistema. ■

Teorema 2 [23.24]. Si entre los vectores $\{p_j\}$, $j = 1, 2, \dots, p$ en Σ^* y las funciones $d L_f^k h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, r_i - 1$ existe una relación de ortogonalidad, es decir, si

$$\begin{aligned} \langle d L_f^k h_i(x), p_j \rangle &= 0 \quad \forall \quad i=1, 2, \dots, p \\ &\quad \forall \quad i=1, 2, \dots, m \\ &\quad \forall \quad k=0, 1, 2, \dots, r_i - 1 \\ &\quad \forall \quad x \in V(x^0), \end{aligned} \quad (2.36)$$

entonces, la retroalimentación dada por (2.11) y (2.13) resuelve también el PRP para el SNL dado por (2.35) cuyo grado relativo es r . ■

La condición de desacoplamiento (2.36) puede también ser escrita (ver ecuaciones (2.2) y (2.4)) como

$$\begin{aligned} L_{p_j} L_f^k h_i(x) &= 0 \quad , \forall \quad i=1, 2, \dots, p, \\ &\quad , \forall \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (2.37) \\ &\quad , \forall \quad k=0, 1, 2, \dots, r_i - 1, \\ &\quad , \forall \quad x \in V(x^0). \end{aligned}$$

o de la siguiente manera, al definir la matriz $\Omega_i(x) \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$ como

$$\Omega_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial L_f^1 h_i}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{k_i} h_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad k_i' = r_i - 1, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.38)$$

se puede escribir a (2.37) como

$$\Omega_i(x) p_j(x) = 0 \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,p. \quad (2.39)$$

Se ve entonces que el PRP puede ser resuelto de acuerdo al teorema 2 si los vectores $\{p_j\}$, $j=1,2,\dots,p$ son tales que

$$p_j(x) \in \bigcap_{i=1}^{r_i} [\text{Nucleo}(\Omega_i(x))], \quad j=1,2,\dots,p. \quad (2.40)$$

Demostración: (Teorema 2) Sean $z_j^i = \phi_j^i(x)$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,r_i-1$, ($z = \Phi(x)$ en notación matricial), en forma similar a la solución del PL (ver la demostración del teorema 1) es posible encontrar que

$$z_j^i = z_{j+1}^i + \sum_{k=1}^m [L_{g_k}^j L_f^j h_i u_k] + \quad (2.41)$$

$$\sum_{k=1}^p [L_{p_k}^j L_f^j h_i w_k] \quad 1 < i < m, \quad 0 < j < (r_i - 1).$$

Como el sistema tiene grado relativo r , y al cumplirse la

condición (2.37) para $i=1,2,\dots,m$ y $i < r_i - 1$ se obtiene que (2.41) es equivalente a

$$\dot{z}_j^i = z_{j+1}^i \quad (2.42)$$

y, para $i=1,2,\dots,m$ y $i = r_i - 1$ la misma ecuación es equivalente a

$$\dot{z}_j^i = z_{r_i}^i + \sum_{k=1}^m [L_{g_k} L_f^{r_i-1} h_i u_k] \quad (2.43)$$

Con la retroalimentación definida por (2.11) y (2.13) el sistema transformado en lazo cerrado (STLC) resultante de resolver el PRP presenta la misma forma que (2.24) en la cual las perturbaciones $w_1, w_2, \dots, w_p$ no están presentes. Un ejercicio simple muestra que al diferenciar las salidas del sistema se presenta desacoplamiento entre las salidas y las perturbaciones. Se dice entonces que en el STLC existe desacoplamiento entre las salidas y las perturbaciones o simplemente que en el STLC se rechazan perturbaciones.

Cabe mencionar que al resolver el PRP, cuando esto es posible, por construcción el problema de linealización E/S queda también resuelto.

Si el SNL Σ^* tiene un grado relativo menor que n , al resolver el PRP las perturbaciones afectan la dinámica interna resultante de la linealización E/S. La expresión correspondiente a esta dinámica es

$$\dot{\eta} = a(z, \eta) + \sum_{j=1}^m \rho_j(z, \eta) u_j + \sum_{j=1}^p \delta_j(z, \eta) w_j \quad (2.44)$$

donde

$$\delta_j(z, \eta) = [L_{p_j} \eta_1, L_{p_j} \eta_2, \dots, L_{p_j} \eta_{n-r}]^T$$

y η y $p_j(z)$, $i=1,2,\dots,m$ están dadas como antes. ■

Es común que en los modelos de procesos químicos no se satisfaga la condición (2.36). Sin embargo, si algunas de las señales de perturbación son medibles, es posible definir una retroalimentación estática de estados de la forma [24]

$$u = \alpha(x) + \beta(x) V + \Gamma(x) w \quad (2.45)$$

donde $\alpha(x)$, $\beta(x)$ y V están definidos como antes, $w = [w_1, w_2, \dots, w_q]^T$ es el vector de perturbaciones y $\Gamma(x) = [\gamma_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times p$ cuyas componentes son funciones C^∞ definidas en $B \subseteq \mathbb{R}^n$. La j -ésima columna de la matriz $\Gamma(x)$ está asociada a la perturbación w_j .

Supongase que de p perturbaciones las q primeras corresponden a perturbaciones medibles y las $p-q$ restantes no son medibles, las columnas $(p-q)+1, (p-q)+2, \dots, p$ de la matriz $\Gamma(x)$ son entonces cero.

Con la retroalimentación (2.45) se definen los vectores $p_j^*(x)$ como

$$p_j^* = \sum_{i=1}^m g_i(x) \gamma_{ij} + p_j \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.46)$$

Si p_j^* , $i=1,2,\dots,p$, satisfacen la condición de desacoplamiento dada en el teorema 2, con p_j^* en vez de p_j , $i=1,2,\dots,p$, la transformación de coordenadas (2.12) y la retroalimentación (2.45) resuelven el PRP. En caso contrario se dice que el PRP no tiene solución.

Hasta este punto se puede observar que cuando se transforma

un sistema no lineal de la forma general (2.8), o (2.35) cuando se considera la presencia de perturbaciones, siempre es posible obtener que el sistema transformado en lazo cerrado con la retroalimentación que linealiza, y que además permite el rechazo a perturbaciones, es un sistema lineal E/S. Sin embargo, el punto medular en el análisis es la selección de una salida que permita que el sistema transformado en lazo cerrado sea lineal o, al menos, que la diferencia entre la dimensión del espacio de estados y el grado relativo del sistema no lineal original $(n-r)$ sea mínima.

Como ejemplo de aplicación de las técnicas aquí presentadas se escogió el sistema no lineal dado por el modelo de un reactor químico de tanque agitado, el análisis de este se realiza en el capítulo siguiente.

3.- ANALISIS DEL REACTOR QUIMICO

En esta sección se presenta el análisis del modelo de un reactor continuo de tanque agitado (RCTA) hecho con el propósito de establecer si es posible resolver para este modelo los problemas de linealización Entrada/Salida (E/S) y rechazo a perturbaciones expuestos en el capítulo anterior.

Se analizaron dos casos con el modelo del reactor, el sistema con una entrada y una salida (1E/1S), y el sistema con dos entradas y dos salidas (2E/2S). Se consideró, para propósitos de análisis, que las salidas del sistema están dadas por los estados de éste, y que todos los estados del sistema pueden ser medidos. El análisis se realizó, tanto para el sistema con (1E/1S) como para el sistema con (2E/2S), tomando todas las posibles combinaciones de salidas y variables de control. El objetivo es determinar la factibilidad del diseño de un sistema de control para un RCTA basándose en las técnicas de linealización (E/S) descritas antes.

3.1 Modelo del reactor

Un esquema del RCTA está dado en la figura 3.1, y su representación en variables de estado para la operación no isotérmica está dada en forma explícita por [19]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{F}{V} (C_0 - x_1) - A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F}{V} (T_0 - x_2) + \beta A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 - \gamma (x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= \frac{F_j}{V_j} (T_{j0} - x_3) + \omega (x_2 - x_3)\end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $\dot{\#} = d\#/dt$ y los estados son x_1 (concentración de reactivo en el reactor, mol/l), x_2 (temperatura en el interior del reactor, °K) y x_3 (temperatura en el interior de la chaqueta de enfriamiento, °K); las entradas manipulables son F (flujo de reactivo que entra al reactor, l/min) y F_j (flujo de fluido de enfriamiento, l/min); los parámetros del modelo son A_0 , β , δ , γ y ω y están definidos en su caso por $\delta = Ea/R$, $\beta = -\lambda/\rho C_p$, $\gamma = UA_c/\rho V C_p$ y $\omega = UA_c/\rho_j V_j C_j$ (la notación puede ser consultada en [19]). Las constantes C_0 (concentración de reactivo en F , mol/l), T_0 (temperatura de F , °K) y T_{j0} (temperatura de F_j , °K) toman valores nominales en algún punto de equilibrio de (3.1). Los valores de los parámetros del modelo del reactor, las constantes C_0 , T_0 y T_{j0} , así como los puntos de equilibrio del sistema para este conjunto de parámetros se dan mas adelante en el capítulo 4. Sin embargo, cabe mencionar que el análisis del modelo del reactor se hizo aquí tomando un punto de equilibrio $x^0 \neq 0$ pues es indiferente hacerlo de esta manera o para $\hat{x}^0 = 0$, donde $\hat{x}$ representa una variable de desviación ($\hat{x} = x - x^0$), siempre y cuando al transformar al sistema original la transformación correspondiente mapee al punto x^0 en el origen del nuevo espacio de estados [24]. Esto ultimo sucede con las transformaciones que se encontraron en este trabajo.

Se realizó el análisis del RCTA considerando como las salidas posibles del sistema a $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$, $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h(x) = x_3 - \bar{x}_3$ donde $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$ son los valores de los estados en un punto de equilibrio del sistema.

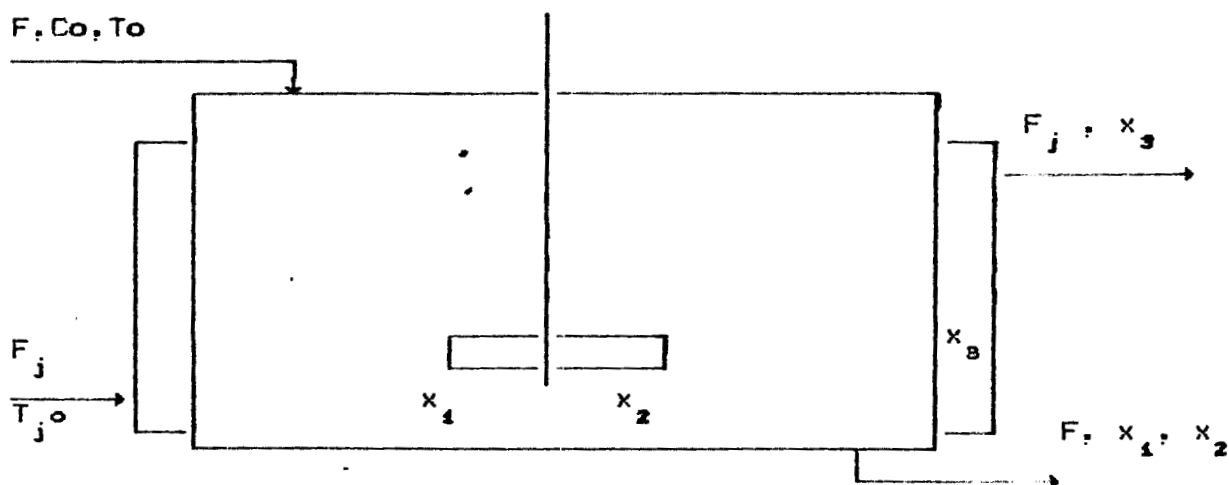


Figura 3.1 Esquema de un reactor continuo de tanque agitado (RCTA).

3.2 Linealización E/S v dinámica cero.

3.2.1 Sistema con una entrada v una salida .

Linealización E/S

Por las características de diseño del proceso para el sistema con 1E/1S la entrada manipulable para el control del sistema es el flujo del fluido de enfriamiento, F_j , y las salidas del sistema están dadas por $h(x)=x_1-\bar{x}_1$, $h(x)=x_2-\bar{x}_2$ o $h(x)=x_3-\bar{x}_3$. De esta manera, el modelo del reactor con 1E/1S queda representado por el SNL

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, con $n=3$ y

$$f(x) = \begin{bmatrix} \theta (C_0 - x_1) - A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 \\ \theta (T_0 - x_2) + \beta A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 - \gamma (x_2 - x_3) \\ \omega (x_2 - x_3) \end{bmatrix} \quad (3.3a)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{T_j \phi - x_3}{V_j} \end{bmatrix}, \quad u = F_j \quad y \quad \theta = F/V. \quad (3.3b)$$

El cálculo del grado relativo del SNL (3.2) para las diferentes salidas permite ver, Tabla 3.1, que es posible hacer que el sistema sea linealizabile tomando como la salida del sistema a $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$. En este punto es necesario mencionar que existe un resultado que permite verificar si es posible, para un SNL determinado, encontrar una salida para la cual se puede lograr que el sistema sea linealizabile. Este resultado se cita a continuación.

Teorema [23,24]. Considerese el SNL (3.3). Existe una salida $h^*(x)$ para la cual el SNL tiene un grado relativo, r , igual a n y el

sistema transformado por (3.4), con $h(x) = h^*(x)$, en lazo cerrado con la retroalimentación de estados dada por (2.11) y (2.13) (en su forma escalar), será lineal y controlable alrededor de un punto x^0 si y solo si

i) La matriz

$$[g(x^0) | \text{ad}_f g(x^0) | \dots | \text{ad}_f^{n-2} g(x^0) | \text{ad}_f^{n-1} g(x^0)] \quad (3.4)$$

tiene rango n ,

ii) Las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x) - \frac{L_f^r h^*(x)}{L_g L_f^{r-1} h^*(x)} g(x) \\ \tilde{g}(x) &= \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h^*(x)} g(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

son tales que

$$[\text{ad}_{\tilde{f}}^i \tilde{g}, \text{ad}_{\tilde{f}}^j \tilde{g}] = 0 \quad \forall 0 \leq i, j \leq n. \quad (3.6)$$

Un ejercicio simple permite comprobar que para $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$ y x^0 un punto de equilibrio de (3.2) se satisfacen las condiciones del teorema.

Tabla 3.1 Grado relativo del SNL con 1E/1S

$h(x)$	r
$x_1 - \bar{x}_1$	3
$x_2 - \bar{x}_2$	2
$x_3 - \bar{x}_3$	1

Al tenerse un grado relativo igual a n , la transformación de coordenadas queda completamente definida. Esta transformación está dada por

$$\phi_j(x) = L_f^j h(x), \quad i=0,1,2 \quad (3.7)$$

De (3.3) y (3.7) se ve que en particular la transformación $\Phi(x) = \{ \phi_1, \phi_2, \phi_3 \}$ está dada, con $z = \Phi(x)$, por

$$z_1 = x_1 - \bar{x}_1$$

$$z_2 = \theta(C_0 - x_1) - A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 \quad (3.8)$$

$$z_3 = (-\theta - A_0 e^{-\delta/x_2}) (\theta(C_0 - x_1) - A_0 e^{-\delta/x_2} x_1) + \\ (-A_0 e^{-\delta/x_2} \delta x_1 / x_2^2) (\theta(T_0 - x_2) + \beta A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 - \gamma(x_2 - x_3))$$

y es un difeomorfismo.

Para $r=n$ la forma normal local del SNL (3.1) está dada por

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = b(z) + a(z) u$$

donde $a(z) = L_g L_f^2 h(z)$ y $b(z) = L_f^3 h(z)$. Si se define a la retroalimentación u como

$$u = \frac{1}{a(z)} [-b(z) + v] \quad (3.9)$$

el STLC está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F z + E v \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

el sistema (3.10) es un sistema lineal.

En la figura 3.2 se muestra una realización del sistema (3.10) dado por una cadena de integradores.

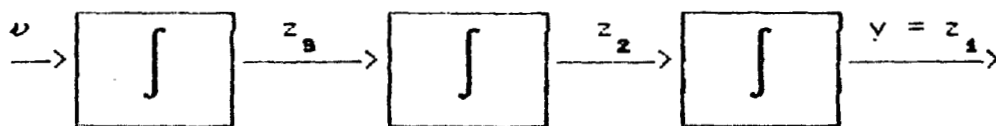


Figura 3.2 Esquema de un SNL linealizabile con grado relativo 3.

Cuando la salida del sistema es $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ el grado relativo del sistema es dos. La transformación está entonces parcialmente definida por (3.7) ($i=0,1$). Se sabe ya que es posible escoger arbitrariamente a la tercera coordenada de tal forma que $\Phi(x)$ sea

un difeomorfismo.

En particular se puede escoger ϕ_g tal que

$$L_g \phi_g = 0 \quad (3.11)$$

(la condición de involutividad de $\{g_j\}$, $i=1,2,\dots,m$ se satisface trivialmente cuando $m=1$). De la definición de $g(x)$ en (3.3) se ve que

$$\phi_g = x_1 - \bar{x}_1 \quad (3.12)$$

satisface (3.11) y $\Phi(x)$ está dada entonces por

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ z_2 &= \theta(T_0 - x_1) + \beta A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 - \gamma(x_2 - x_g) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$z_3 = x_1 - \bar{x}_1$$

y es también un difeomorfismo.

Al SNL transformado por (3.13) y cuya salida es $y = z_1$ se le asocia una dinámica interna no lineal dada por

$$\dot{\eta} = q(z, \eta) \quad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \eta &= \phi_g = z_g \\ q(z, \eta) &= L_f \phi_g = \begin{bmatrix} \theta(C_0 - x_1) - A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 \end{bmatrix} \bigg|_{x = \Phi^{-1}(z, \eta)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

La forma normal local del sistema está entonces dada por

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= b(z) + a(z) u \\
\dot{z}_3 &= q(z) \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{3.16}$$

con

$$a(z) = L_g L_f h(x) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} = \frac{\gamma}{V_j} (T_{j0} - x_3) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned}
b(z) = L_f^2 h(x) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} &= [(\beta A_0 e^{-\delta/x_2^2} f_1(x) + (-\theta + \beta A_0 e^{-\delta/x_2^2} \frac{x_1 \delta}{x_2^2} \\
&\quad - \gamma) f_2(x) + \gamma f_3(x)] \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \tag{3.17b}
\end{aligned}$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son las componentes de $f(x)$.

Al usar la retroalimentación dada (3.9) donde $a(z)$ y $b(z)$ dadas por (3.17), el STLC queda como

$$\begin{aligned}
\dot{z}^* &= F z^* + E v \\
\dot{\eta} &= q(z^*, \eta) \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde

$$z^* = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este último sistema solo es lineal E/S y el término no lineal está dado por $\dot{\eta} = q(z, \eta)$. En la figura 3.3 se muestra una realización de (3.18).

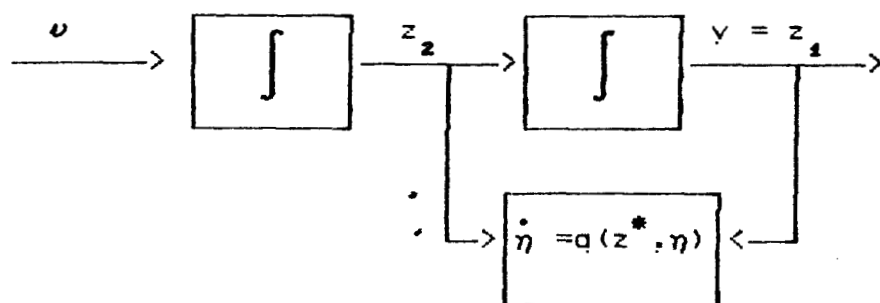


Figura 3.3 Esquema de un SNL lineal E/S con grado relativo dos.

Con respecto a la salida $h(x) = x_3 - \bar{x}_3$, ésta no es de interés como variable a controlar por las características del RCTA (x_3 es la temperatura en la chaqueta de enfriamiento). Su análisis implica definir arbitrariamente dos coordenadas complementarias, de tres en total, y podrían ser escogidas resolviendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales si se quiere que se satisfaga

$$L_g \phi_i = 0, \quad i=1,2. \quad (3.19)$$

La forma normal local del sistema quedaría como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= L_f h(x) + L_g h(x) u \\ \dot{\eta}_1 &= q_1(z_1, \eta_1) \\ \dot{\eta}_2 &= q_2(z_1, \eta_2) \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

y una realización del STLC con el control dado por (3.9) con $r = 1$ se muestra en la figura 3.4.

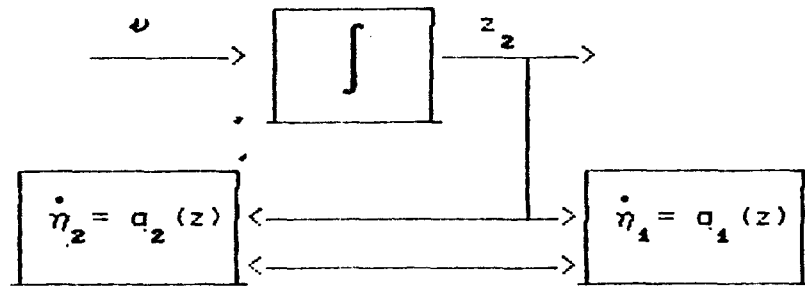


Figura 3.4 Esquema de un SNL lineal E/S con grado relativo uno.

Dinámica cero del RCTA

Una vez establecida la equivalencia lineal o lineal E/S, del modelo del RCTA para las diferentes salidas del sistema, es de interés observar si el comportamiento interno del sistema es o no estable para poder así asegurar la estabilidad del sistema transformado en lazo cerrado (STLC). En este trabajo la estabilidad interna del sistema se verifica a través de la dinámica cero del sistema.

Cuando la salida del sistema es $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$, se encontró que el modelo del RCTA es linealizabile. El control diseñado linealiza y el STLC no presenta dinámica interna. El caso $h(x) = x_3 - \bar{x}_3$ no se analizó por carecer de interés práctico.

Cuando la salida del sistema es $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ se encontró que el sistema solo es lineal E/S con un grado relativo $r=2$. De esta manera el hacer $h(x) \equiv 0$ permite encontrar que la dinámica cero correspondiente está dada, de (3.18), por

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad (3.21)$$

y de (3.15) se ve que en particular la dinámica cero está dada por

$$\dot{\eta} = \theta C_0 - (\theta + A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2}) \eta \quad (3.22)$$

La solución de la ecuación (3.22) está dada por

$$\eta = \eta_0 \exp(-\theta - A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2}) t \quad (3.23)$$

donde $\eta_0 = \eta(0)$ y $\exp(*)$ denota a la función exponencial. La ecuación (3.23) muestra que $\eta(t)$ presenta un comportamiento asintóticamente estable para $t \geq 0$.

El control que hace que la salida $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ sea cero está dado, en general para 1E/1S, por

$$u = \frac{-b(0, 0, z_s)}{a(0, 0, z_s)} \quad (3.24)$$

y en particular, de (3.17) y (3.24), por

$$u = \left[\beta A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} f_1(x_1, \bar{x}_2, x_3) + (-\theta + \beta A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} x_1 \delta/\bar{x}_2^2 - \gamma) f_2(x_1, \bar{x}_2, x_3) + \gamma f_3(x_1, \bar{x}_2, x_3) \right] / \frac{\gamma}{V_j} (T_{j0} - x_3) \quad (3.25)$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son las componentes de $f(x)$.

3.2.2 Sistema con dos entradas y dos salidas

En el caso del sistema con dos entradas y dos salidas (2E/2S) el proceso permite que se tengan como variables de control al fluio en la chaqueta de enfriamiento, F_j , y al fluio de reactivo que entra al reactor, F . Con esta selección, el modelo del RCTA tiene una representación en variables de estado dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x) u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ y_2 &= h_2(x)\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\delta/x_2 \\ -A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 \\ \beta A_0 e^{-\delta/x_2} x_1 - \gamma(x_2 - x_3) \\ \omega(x_2 - x_3) \end{bmatrix} \quad (3.27a)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{C_0 - x_1}{V} \\ \frac{T_0 - x_2}{V} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{T_{j0} - x_3}{V_j} \end{bmatrix} \quad y \quad (3.27b)$$

$$u_1 = F \quad y \quad u_2 = F_j.$$

Las salidas consideradas están dadas por $h_1(x) = x_1 - \bar{x}_1$ y $h_2(x) = x_2 - \bar{x}_2$, $h_1(x) = x_1 - \bar{x}_1$ y $h_2(x) = x_3 - \bar{x}_3$ o $h_1(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h_2(x) = x_3 - \bar{x}_3$. Cabe mencionar que el uso de F como variable de control tiene en este trabajo un interés meramente académico pues desde un punto de vista práctico, y debido al diseño del proceso, la variable F no debe moverse de su valor nominal pues este valor permite que se satisfagan los requisitos mínimos de producción del material que se obtiene del reactor.

El cálculo del grado relativo del SNL (3.26) y (3.27) para los diferentes pares de salidas permite ver, Tabla 3.2, que solo es posible lograr una linealización E/S ($r_1 + r_2 < n$).

Tabla 3.2 Grado relativo del SNL.

$h_1(x)$	$h_2(x)$	r_1	r_2	$A(z)$	r
$x_1 - \bar{x}_1$	$x_2 - \bar{x}_2$	1	1	SINGULAR	*
$x_1 - \bar{x}_1$	$x_3 - \bar{x}_3$	1	1	NO SINGULAR	2
$x_2 - \bar{x}_2$	$x_3 - \bar{x}_3$	1	1	NO SINGULAR	2

* No está definido

Se observa que la únicas combinaciones de salidas elegibles para propósitos de linealización E/S son $[h_1(x)=x_1-\bar{x}_1, h_2(x)=x_2-\bar{x}_2]$ v $[h_1(x)=x_2-\bar{x}_2, h_2(x)=x_3-\bar{x}_3]$, pues son las hacen que el sistema tenga definido un grado relativo.

A partir de (2.22) se puede ver que las primeras dos componentes de la transformación $\Phi(x)$ están dadas por

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= h_1(x) \\ \phi_2(x) &= h_2(x)\end{aligned}\tag{3.28}$$

Al buscar la tercera componente de la transformación se puede verificar si se satisface

$$L_{g_i} \phi_3(x) = 0 \quad i=1,2 \tag{3.29}$$

Sin embargo, la existencia se asegura si y sólo si $\{g_i\}, i=1,2$ es un conjunto involutivo. De la definición de involutividad de un conjunto de funciones y de (3.27b) se encuentra que $\{g_i\}, i=1,2$ no es involutivo y no es posible encontrar $\phi_3(x)$ tal que se satisfaga (3.29).

Para la combinación de salidas $[h_1(x)=x_1-\bar{x}_1, h_2(x)=x_2-\bar{x}_2]$ con ϕ_3 escogida arbitrariamente como $\phi_3 = x_2^2$, la transformación $\Phi(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ z_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ z_3 &= x_2^2 - \bar{x}_2^2\end{aligned}\tag{3.30}$$

y la forma normal local del SNL transformado está dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= b_1(z) + a_1(z) u_1 \\
 \dot{z}_2 &= b_2(z) + a_2(z) u_2 \\
 \dot{\eta} &= q(z) + \rho_1(z) u_1
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_1(z) &= - \frac{\delta/x}{A_0 e^{x_2^2}} x_1 \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \\
 b_2(z) &= \omega (x_2 - x_s) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \\
 a_1(z) &= \frac{C_0 - x_1}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \\
 a_2(z) &= \frac{T_{j0} - x_s}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \\
 q(z) &= [\beta A_0 \frac{\delta/x}{e^{x_2^2}} x_1 - \gamma (x_2 - x_s)] 2 x_2 \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \\
 \rho_1(z) &= 2 x_2 \frac{T_0 - x_2}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

El sistema 3.31 puede entonces ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1(z) \\ b_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1(z) & 0 \\ 0 & a_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
 \dot{\eta} &= q(z) + \rho_1(z) u_1
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

y si se define la retroalimentación $u = [u_1 \ u_2]^T$ como

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a_1(z) & 0 \\ 0 & 1/a_2(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -b_1(z) \\ -b_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

se tiene entonces que el STLC está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \ddot{\eta} &= q(z) + \rho_1(z) u_1 \\ y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

El sistema (3.34) es un sistema lineal E/S.

En el caso en que las salidas son $h_1(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h_2(x) = x_3 - \bar{x}_3$ la transformación de coordenadas está definida por

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ z_2 &= x_3 - \bar{x}_3 \\ z_3 &= x_1^2 - \bar{x}_1^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

y la forma normal local correspondiente está dada por (3.31) con

$$b_1(z) = \begin{bmatrix} -\delta/x_2 \\ \beta\alpha_0 e^{z_2} \end{bmatrix} x_1 - \gamma(x_2 - x_3) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}$$

$$b_2(z) = \omega(x_2 - x_3) \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)} \quad (3.36)$$

$$a_1(z) = \frac{T_0 - x_2}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}$$

$$a_2(z) = \frac{T_{j0} - x_3}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}$$

$$q(z) = -2x_1 A_0 e^{-\delta/x_2} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}$$

$$\rho_1(z) = 2x_1 \frac{C_0 - x_1}{V} \Big|_{x = \Phi^{-1}(z)}$$

En forma análoga al caso anterior, el STLC dado por (3.34), con la retrolimentación dada como en (3.33), es solo lineal E/S.

Con respecto a la dinámica cero del sistema con 2E/2S, se vio que en el caso general de varias entradas y salidas la dinámica cero está dada por (2.31) cuando $\{q_i\}, i=1,2,\dots,m$ no es involutivo. Entonces, en el caso particular que aquí se trata, cuando $h_1(x)=x_1-\bar{x}_1$ y $h_2(x)=x_3-\bar{x}_3$ la dinámica cero del sistema está dada por

$$\dot{\eta} = q(0,0,\eta) + \rho_1(0,0,\eta) u_1 \quad (3.37)$$

y en particular, de (3.32), por

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -\delta/\eta^{1/2} \\ \beta A_0 e^{-\delta/\eta^{1/2}} \bar{x}_1 - \gamma(\eta^{1/2} - \bar{x}_3) \end{bmatrix} 2\eta^{1/2} + 2\eta^{1/2} \frac{T_0 - \eta^{1/2}}{V} u_1 \quad (3.38)$$

Los controles que hacen que las salidas sean cero están dados, de (2.30) y (2.32), por

$$u_1 = \frac{A_0 e^{-\delta/x_2} \bar{x}_1}{1/V (C_0 - \bar{x}_1)} \quad (3.39)$$

$$u_2 = \frac{\omega (x_2 - \bar{x}_s)}{1/V (T_{j0} - \bar{x}_s)} \quad (3.40)$$

La ecuación (3.38) es una ecuación diferencial no lineal cuya solución deberá obtenerse en forma numérica para observar su comportamiento cuando $t \geq 0$. Cabe mencionar que si se eligiera la tercera coordenada como $z_3 = x_2 - \bar{x}_2$ (con lo que solo se define una rotación de ejes) la expresión de la dinámica cero aparentemente resulta más simple, solo basta sustituir $\eta^{1/2}$ por η en la ecuación (3.38), sin embargo, sigue siendo una ecuación diferencial no lineal que precisa una solución numérica. El análisis local alrededor del punto de equilibrio inestable (ver Capítulo 4) mostró que se tiene un comportamiento asintóticamente estable.

La dinámica cero del sistema con salidas $h_1(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h_2(x) = x_3 - \bar{x}_3$ está dada, de (3.36), por

$$\dot{\eta} = -2 \eta^{1/2} A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} + 2 \eta^{1/2} \frac{C_0 - \eta^{1/2}}{V} u_1 \quad (3.41)$$

Los controles correspondientes están dados por

$$u_1 = \frac{-\beta A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} x_1 + \gamma (\bar{x}_2 - \bar{x}_g)}{1/V (T_0 - \bar{x}_2)} \quad (3.42)$$

$$u_2 = \frac{\omega (\bar{x}_2 - \bar{x}_g)}{1/V (T_{j0} - \bar{x}_g)} \quad (3.43)$$

En forma análoga al caso anterior la ecuación de la dinámica cero deberá ser resuelta en forma numérica para observar si hay estabilidad asintótica para $t \geq 0$. Como se verá en el capítulo 4 el comportamiento de la dinámica interna del sistema es efectivamente asintóticamente estable. La elección de $z_g = x_1 - \bar{x}_1$ permite obtener una expresión para la dinámica cero dada por

$$\dot{\eta} - k_3 \eta^3 - k_2 \eta^2 - k_1 \eta = 0$$

donde

$$k_1 = -2 \left[A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} + C_0/V \right]$$

$$k_2 = 2 \left[\beta A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2} /V + 2\gamma/V (\bar{x}_2 - \bar{x}_g) \right]$$

$$k_3 = -2 \beta A_0 e^{-\delta/\bar{x}_2}$$

cuya solución, por la técnica de fracciones parciales, presenta un comportamiento asintóticamente estable. Esto puede ser visto fácilmente observando el término lineal de esta ecuación pues $k_1 \leq 0$.

3.3 Desacoplamiento a perturbaciones.

Sistema con una entrada y una salida

Considérese ahora al RCTA cuyo comportamiento es alterado por la presencia de perturbaciones en los parámetros de las entradas. El modelo del proceso puede ahora ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) u + \sum_{i=1}^3 p_i(x) w_i \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son como en (3.3) con $C_0 = \bar{C}_0$, $T_0 = \bar{T}_0$ y $T_{j,0} = \bar{T}_{j,0}$ donde $\bar{C}_0$, $\bar{T}_0$ y $\bar{T}_{j,0}$ son los valores nominales de C_0 , T_0 y $T_{j,0}$; $h(x)$ es como antes; $w_1 = \Delta C_0$, $w_2 = \Delta T_0$ y $w_3 = \Delta T_{j,0}$ u son las perturbaciones en las entradas al RCTA y entonces

$$p_1(x) = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad p_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/V_j \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

La definición de la perturbación $w_3 = \Delta T_{j,0}$ u permite darle al modelo del RCTA la representación de estado (3.44), y el grado relativo del sistema $^*\Sigma$ está dado en la tabla 3.1 para las diferentes salidas consideradas.

Al verificar la condición de desacoplamiento a perturbaciones dada en el teorema 2 del capítulo 2 se encuentra que, Tabla 3.3, el STLC rechaza solamente las perturbaciones no medibles que entran al sistema a través de C_0 y T_0 cuando la salida es $h(x) = x_s - \bar{x}_s$.

Tabla 3.3 Desacoplamiento a perturbaciones no medibles en el modelo del RCTA con 1E/1S.

a) En la concentración de entrada (C_0)

CASO	$h(x)$	i	$L_p L_f^i h(x)$	PERTURBACION
1	$x_1 - \bar{x}_1$	0	$* \neq 0$	ΔC_0
		1	$* \neq 0$	
		2	$* \neq 0$	
	$x_2 - \bar{x}_2$	0	0	
		1	$* \neq 0$	
	$x_3 - \bar{x}_3$	0	0	

b) En la temperatura de entrada al reactor (T_0)

CASO	$h(x)$	i	$L_p L_f^i h(x)$	PERTURBACION
2	$x_1 - \bar{x}_1$	0	0	ΔT_0
		1	$* \neq 0$	
		2	$* \neq 0$	
	$x_2 - \bar{x}_2$	0	$* \neq 0$	
		1	$* \neq 0$	
	$x_3 - \bar{x}_3$	0	0	

c) En la temperatura de entrada a la chaqueta (T_{j0})

CASO	$h(x)$	i	$L_p L_f^i h(x)$	PERTURBACION
3	$x_1 - \bar{x}_1$	0	0	ΔT_{j0}
		1	0	
		2	* $\neq 0$	
	$x_2 - \bar{x}_2$	0	0	
		1	* $\neq 0$	
	$x_3 - \bar{x}_3$	0	* $\neq 0$	

* Valor de $L_p L_f^i h(x)$

La transformación de coordenadas y la retroalimentación que linealizan y hacen que el STLC rechace perturbaciones son las mismas usadas para resolver el problema de linealización (ver capítulo 2).

El considerar que todas las perturbaciones son medibles permite encontrar, Tabla 3.4, que el STLC presenta desacoplamiento entre las perturbaciones en T_{j0} y la salida $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$, entre las perturbaciones en C_0 y T_{j0} y la salida $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$, y entre las perturbaciones en T_{j0} y la salida $h(x) = x_3 - \bar{x}_3$.

En el caso de perturbaciones medibles, el STLC se obtiene usando la retroalimentación dada por (2.46); las funciones de medición están dadas en la tabla 3.4 .

Tabla 3.4 . Desacoplamiento a perturbaciones medibles en el sistema con 1E/1S .

$h(x)$	Perturbación Medible	Desacoplamiento	Funciones de medición γ_j
$x_1 - \bar{x}_1$	ΔC_o	NO	----
	ΔT_o	NO	----
	$\Delta T_{j,o}$	SI	$-1 / (T_{j,o} - x_3)$
$x_2 - \bar{x}_2$	ΔC_o	SI	$\frac{-\theta\beta A_o e^{-\delta/x_2} V_j}{(T_{j,o} - x_3)}$
	ΔT_o	NO	----
	$\Delta T_{j,o}$	SI	$-1 / (T_{j,o} - x_3)$
$x_3 - \bar{x}_3$	ΔC_o	*	----
	ΔT_o	*	----
	$\Delta T_{j,o}$	SI	$-1 / (T_{j,o} - x_3)$

---- Son perturbaciones que no se rechazan

* No son casos de interés (ver capítulo 4)

Al definir a la perturbación w_3 como

$$w_3 = \Delta T_{j,o} u \quad (3.46)$$

se tiene que la ley de control de la forma (2.45) que resuelve el PRP está dada por

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v + \gamma_3 w_3 \quad (3.47)$$

donde $\alpha(x) = -b(x)/a(x)$ y $\beta(x) = 1/a(x)$ con $a(x)$ y $b(x)$ dadas en 3.17

y γ_s está dada en la tabla 3.4 para $h(x)=x_2-\bar{x}_2$ y la perturbación ΔT_{j0} . Sustituyendo w_s de (3.46) en (3.47) y despejando a u , el control está dado por:

$$u = \frac{1}{1 + \gamma_s(x) \Delta T_{j0}} [\alpha(x) + \beta(x) v] \quad (3.48)$$

Sistema con dos entradas y dos salidas

Considérese ahora al modelo del RCTA para el caso con 2E/2S. Cuando se presentan perturbaciones, el SNL correspondiente tiene la forma de Σ^* en (2.35) con $m = 2$ y $p = 3$ con $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ como en (3.27) con $C_0=\bar{C}_0$, $T_0=\bar{T}_0$ y $T_{j0}=\bar{T}_{j0}$ donde $\bar{C}_0$, $\bar{T}_0$ y $\bar{T}_{j0}$ son los valores nominales de C_0 , T_0 y T_{j0} . Las variables controlables son $u_1 = F$ y $u_2 = F_j$, las perturbaciones están dadas por $w_1 = \Delta C_0 u_1$, $w_2 = \Delta T_0 u_1$ y $w_3 = \Delta T_{j0} u_2$, y los vectores $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ asociados a las perturbaciones están dados por (3.45).

El grado relativo del SNL para los diferentes pares de salidas está dado en la tabla 3.2. Al verificar la condición de desacoplamiento en el caso de perturbaciones no medibles se obtiene que, Tabla 3.5, el STLC rechaza perturbaciones en T_0 sobre las salidas $h_1(x)=x_1-\bar{x}_1$ y $h_2(x)=x_3-\bar{x}_3$, y perturbaciones en C_0 sobre las salidas $h_1(x)=x_2-\bar{x}_2$ y $h_2(x)=x_3-\bar{x}_3$.

Tabla 3.5 . Desacoplamiento a perturbaciones no medibles en el sistema con 2E/2S .

CASO	$h_1(x)$	$h_2(x)$	w_1	w_2	Desacoplamiento de w_1	Desacoplamiento de w_2
1	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_2 - \bar{x}_2$	T_o	T_{j^o}	SI	NO
	$x_2 - \bar{x}_2$	$x_3 - \bar{x}_3$			NO	NO
2	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_3 - \bar{x}_3$	C_o	T_o	NO	SI
	$x_2 - \bar{x}_2$	$x_3 - \bar{x}_3$			SI	NO
3	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_3 - \bar{x}_3$	C_o	T_{j^o}	NO	NO
	$x_2 - \bar{x}_2$	$x_3 - \bar{x}_3$			SI	NO

Cuando se considera que las perturbaciones que no se rechazan son medibles, el introducir las funciones de medición correspondientes, Tabla 3.6, en la retroalimentación dada por (2.45), permite que haya desacoplamiento entre las perturbaciones y las salidas en todos los casos.

Tabla 3.6. Funciones de medición de perturbaciones en el SNL con $n = 2E/2S$.

CASO	$h_1(x)$	$h_2(x)$	w_1	w_2	$\gamma_1(x)$	$\gamma_2(x)$
1	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$	T_o	$T_{j o}$	--	$- 1/(T_{j o} - x_3)$
	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$			$- 1/(T_o - x_2)$	--
2	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$	C_o	T_o	$- 1/(C_o - x_1)$	--
	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$			--	$- 1/(T_o - x_2)$
3	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$	C_o	$T_{j o}$	$- 1/(C_o - x_1)$	$- 1/(T_{j o} - x_3)$
	$\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_2 - \bar{x}_2}$	$\frac{x_3 - \bar{x}_3}{x_3 - \bar{x}_3}$			--	$- 1/(T_{j o} - x_3)$

-- Estas perturbaciones se rechazan sin necesidad de medirlas (ver Tabla 3.5)

Con las perturbaciones definidas como

$$w_1 = \Delta C_o u_1, \quad (3.49)$$

$$w_2 = \Delta T_o u_1, \quad (3.50)$$

y

$$w_3 = \Delta T_{j o} u_2, \quad (3.51)$$

la retroalimentación dada por

$$u_i = \alpha_i(x) + (\beta(x) v)_i + \sum_{j=1}^2 \gamma_j(x) w_j, \quad i=1,2 \quad (3.52)$$

resuelve el PRP.

Se observa que en forma similar al caso con 1E/1S se puede tener a las variables de control en forma explícita, es decir

$$u_i = \frac{1}{1 + \gamma_i(x) \Delta x_i} [\alpha(x) + \beta(x) v] \quad (3.53)$$

$$i=1,2$$

donde $\Delta x_1 = \Delta C_o$, $\Delta x_2 = \Delta T_o$ y $\Delta x_3 = \Delta T_{j,o}$ y $\alpha(x) = A^{-1}(x)b(x)$ y $\beta(x) = A^{-1}(x)$ con $A(x)$ y $b(x)$ como antes, y las funciones γ_i dadas en la tabla 3.6.

En este capítulo se realizó el análisis del modelo del RCTA para los sistemas con 1E/1S y con 2E/2S tomando diferentes combinaciones de entradas y salidas. En el siguiente capítulo se presentan los resultados de simular al RCTA considerando algunos de los casos aquí analizados para los cuales las salidas tienen un significado físico.

4. RESULTADOS. SIMULACION DEL REACTOR QUIMICO

Con el propósito de complementar el análisis del modelo del reactor llevado a cabo en el capítulo 3 al estudiar el problema de linealización (PL) y el problema de rechazo a perturbaciones (PRP), se muestran en el presente capítulo los resultados obtenidos en simulación en computadora digital al utilizar los esquemas de control propuestos para resolver tales problemas en el modelo del reactor continuo de tanque agitado (RCTA).

El sistema no lineal (SNL) original operando en un punto de equilibrio inestable es sometido a perturbaciones tanto en las entradas como en los parámetros del modelo. Se simularon los casos en que se tienen sistemas con una entrada y una salida (1E/1S) y con dos entradas y dos salidas (2E/2S) teniendo en cuenta que estas últimas tenían un significado real desde el punto de vista de la operación del proceso. Se presenta también el análisis del sistema transformado en lazo cerrado (STLC) cuando se elige una estructura especial del vector de nuevas entradas $V=[v_1 v_2 \dots v_m]^T$. La estructura que se obtiene permite llevar a cabo regulación alrededor de un punto de operación, aunque también es posible hacer seguimiento de una determinada trayectoria de operación. Sin embargo, esto último no se hace aquí por no tener sentido en relación con el tipo de proceso que se simula. En todas las pruebas las perturbaciones fueron introducidas al tiempo $t=0.5$ min.

Se presenta también el análisis, tanto teórico como en simulación, del comportamiento con respecto a los parámetros del sistema no lineal representado por el modelo del reactor. Esto se hace para el sistema en lazo abierto y para el STLC con la retroalimentación que resuelve el problema de rechazo a perturbaciones.

Los resultados en simulación fueron obtenidos en un sistema

HP-1000 de Hewlet-Packard, en la Sección de Control Automático del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, y los programas están escritos en Fortrán 77.

4.1 Puntos de Equilibrio del modelo del RCTA

Siempre que se proponen nuevas alternativas de control de un determinado sistema, lineal o no, para mostrar la bondad del control diseñado se hace que el sistema opere en condiciones difíciles o críticas bajo las cuales el control diseñado por métodos convencionales no presenta un comportamiento adecuado.

En este trabajo se escogió un conjunto de parámetros de las entradas y del modelo para el cual este último presenta tres puntos de equilibrio [3] (vease la tabla 4.1). De estos puntos de equilibrio dos son estables y uno es inestable. Una representación del espacio de fase del RCTA está dada en la figura 4.1.

Tabla 4.1 Puntos de Equilibrio del RCTA

ESTADOS :		x_1 [mol/l]	x_2 [grad K]	x_3 [grad K]
1	ESTABLE	0.9838	343.5547	333.8728
2	INESTABLE	0.5000	400.0000	350.0000
3	ESTABLE	0.0530	452.1636	364.9010

PARAMETROS :			
$\gamma = 1.0 \text{ min}^{-1}$		$\beta = 200.0 \text{ }^\circ\text{K-l/mol}$	
$\delta = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$		$F_j = 1.47 \text{ l/min}$	
$F = 10.0 \text{ l/min}$		$V = 10.0 \text{ l}$	
$V_j = 3.5 \text{ l}$		$\omega = 0.168 \text{ min}^{-1}$	
		$A_0 = e^{25} \text{ min}^{-1}$	
$\bar{C}_0 = 1.0 \text{ mol/l}$	$\bar{T}_0 = 350^\circ\text{K}$	$\bar{T}_j = 330^\circ\text{K}$	

$\bar{*}$ = valor nominal de *

Es común que los puntos de operación inestables sean evitados en la operación de reactores químicos por la gran sensibilidad que estos presentan ante la presencia de perturbaciones. Sin embargo, es también frecuente que tales puntos de operación representen tasas de producción mayores que la de los puntos estables, o bien que representen condiciones bajo las cuales el proceso presenta una producción mas selectiva hacia el producto que se desea producir en el reactor, lo cual hace que los puntos inestables sean atractivos desde un punto de vista de la operación del reactor. Por otro lado, debido a la sensibilidad que presenta un reactor operando en un punto inestable, un sistema convencional de control no presenta un comportamiento adecuado [15,17-19].

De esta manera, con el propósito de probar la efectividad de la retroalimentación que linealiza al SNL y que además permite que

el STLC correspondiente rechace perturbaciones, se escogió como punto de operación del proceso al punto de equilibrio inestable.

4.2 El sistema dinámico en lazo abierto.

Se mencionó en el capítulo 1 que el SNL dado por el modelo del RCTA es un sistema muy sensible a la presencia de perturbaciones externas. Para hacer esto evidente se hicieron pruebas introduciendo perturbaciones de tipo escalón a un tiempo $t=0.5$ min en las entradas del sistema cuando este operaba, en lazo abierto, en el punto de equilibrio inestable.

El efecto de las perturbaciones sobre las salidas, dadas por los estados, se describe a continuación: Al introducir perturbaciones de 0.5%, 1% y 10% del valor nominal de C_0 (1 mol/l) se encontró, figura 4.2, que para un escalón del 0.5% y del 1% la perturbación provoca que el sistema evolucione hacia el punto de operación estable de baja concentración (punto 3 en la tabla 4.1) y cuando el escalón es del 10% el sistema evoluciona hacia un punto de equilibrio distinto a los puntos originales. Este punto de equilibrio es estable.

El efecto de perturbaciones del mismo orden que en C_0 pero ahora sobre T_0 es similar al anterior, figura 4.3; el nuevo punto de estabilización cuando $\Delta T_0 = 10\%$ también es estable. El efecto de las perturbaciones de 0.5%, 1.0%, 5.0% y 10.0% del valor nominal en T_0 se muestra en la figura 4.4.

4.2.1 Ecuaciones de variaciones con respecto a los parámetros

Considérese un sistema no lineal representado por

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (4.1)$$

donde f es una función C^∞ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}^p$. Es posible conocer el comportamiento de la solución $\phi(t, \mu)$ de la ecuación (4.1) con respecto al vector de parámetros μ mediante el conocimiento de $\partial \phi / \partial \mu^k$, $k=1, 2, \dots, p$. Sin embargo, no es necesario resolver (4.1) y luego calcular su derivada parcial con respecto a cada una de los parámetros. El conocimiento de $\partial \phi / \partial \mu^k$, $k=1, 2, \dots, p$ puede obtenerse mediante las ecuaciones de variación de (4.1). Este procedimiento se presenta a continuación:

Proposición: Sea $\phi(t, \mu) = [\phi_1(t, \mu) \dots \phi_n(t, \mu)]$ una solución de la ecuación (4.1), correspondiente a los valores iniciales t_0 y x_0 , definida en un dominio (a, b) para un valor dado de los parámetros $\mu = \mu^*$. Si las derivadas parciales $\partial f^i / \partial \mu^k$ de los segundos miembros de (4.1) son continuas en su dominio, donde $f^i(t, x, \mu)$ $i=1, 2, \dots, n$ son las funciones componentes de $f(t, x, \mu)$, las derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi^i(t, \mu^*)}{\partial \mu^k} = \psi_k^i(t) \quad (4.2)$$

calculadas para $\mu = \mu^*$ están definidas como funciones de t sobre todo (a, b) y son además continuas ahí [teorema 16, sección 4.5 de [39]].

Si se definen

$$f_j^i(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial x^j} : f_j^i(t) = f_j^i(t, \phi(t, \mu^*), \mu^*) \quad (4.3a)$$

$$g_k^i(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial \mu^k} : g_k^i(t) = g_k^i(t, \phi(t, \mu^*), \mu^*) \quad (4.3b)$$

las funciones $f_j^i(t)$ y $g_k^i(t)$, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq k \leq p$, están definidas y son continuas sobre todo el intervalo (a, b) [teorema 13, sección 4.4 de 39] y las funciones

$$\begin{aligned} y^1 &= \psi_k^1 \\ &\vdots \\ y^n &= \psi_k^n \end{aligned} \quad k=1, 2, \dots, p \quad (4.4)$$

son solución del sistema de ecuaciones dado por

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^n f_j^i(t) y^j + g_k^i(y) \quad (4.5)$$

el cual está definido sobre el intervalo (a, b) . Al sistema de ecuaciones lineales dado por (4.5) se le conoce como sistema de ecuaciones en variaciones (respecto a los parámetros) del sistema (4.1) para $\mu = \mu^*$. Las condiciones iniciales de (4.5) están dadas por

$$\begin{aligned} \psi_k^i(t_0) &= 0 \\ k &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (4.6)$$

Demostración: Si se sustituye $x = \phi(t, \mu)$ en (4.1) se obtiene la identidad

$$\frac{\partial \phi^i(t, \mu)}{\partial t} = f^i(t, \phi(t, \mu), \mu) \quad (4.7)$$

Los dos miembros de esta última ecuación son diferenciables [39] con respecto a μ^k para $\mu = \mu^*$, con derivada definida en el intervalo (a, b) , por lo que es posible obtener que

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \frac{\partial \phi^i(t, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k} \quad (4.8)$$

Diferenciando (4.7) con respecto a μ^k para $\mu = \mu^*$, por la regla de la cadena se encuentra que las funciones dadas en (4.4) son soluciones del sistema (4.5). Para obtener la condición inicial (4.6) basta diferenciar con respecto a μ^k a las condiciones iniciales

$$\phi^i(t_0, \mu) = x^i_0 \quad (4.9)$$

4.2.2 Sensibilidad del sistema a los parámetros del modelo

Es un hecho conocido que en todo sistema real algunos de los parámetros del modelo del sistema tienen que ser determinados por métodos experimentales y que este procedimiento conlleva la introducción de incertidumbre respecto a los valores de dichos parámetros. Debido a esto y para observar la sensibilidad que el sistema no lineal (SNL) representado por el modelo del reactor (ecuación 3.1) presenta ante sus parámetros, se obtuvieron las ecuaciones de variación del sistema cuando este se encuentra operando en lazo abierto. El mismo análisis se realiza mas adelante para el sistema en lazo cerrado.

En un reactor químico del tipo que aquí se presentó existen dos parámetros que presentan incertidumbre de hasta un 10% respecto de sus valores, estos son δ y γ [1,2]. De esta manera, el cálculo de las componentes del sistema lineal que define a las ecuaciones de variación con respecto a estos parámetros, tal y como se presentó en la subsección anterior, permite encontrar que dicho sistema lineal de ecuaciones puede ser escrito como

$$\dot{y} = A y + b_k \quad (4.10)$$

con $k = \delta$ o $k = \gamma$ y donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -0.03125 & 0 \\ 200 & 4.250 & 1 \\ 0 & 0.168 & -0.42 \end{bmatrix}, \quad b_\delta = \begin{bmatrix} 0.00125 \\ -0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -50.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

que se obtienen cuando se evalúan las ecuaciones de variaciones en $\bar{x}$ y μ^* dados por el punto de equilibrio inestable y los valores nominales correspondientes al vector de parámetros, respectivamente; estos valores están dados en la tabla 4.1.

Es claro que definiendo a los vectores z_δ y z_γ como

$$z_k = y + A^{-1}b_k \quad (4.12)$$

con $k = \delta$ o $k = \gamma$,

se puede representar a los sistemas dados en (4.10) como los sistemas lineales siguientes

$$\dot{z}_k = A z_k \quad (4.13)$$

con $k = \delta$ o $k = \gamma$.

Por otro lado, se sabe [39] que la solución de un sistema lineal como (4.13) puede ser expresada como

$$z_k = \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t} \quad (4.14)$$

donde λ_i son los valores propios de la matriz A , v_i son los

vectores propios asociados a cada valor propio λ_i y c_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema, $i=1,2,\dots,n$.

Entonces, con el conocimiento de los valores propios de la matriz A y de la ecuación (4.14) se puede determinar si el sistema en lazo abierto mostrará un comportamiento estable o no ante cambios en los parámetros δ o γ del modelo del reactor. Al resolver la ecuación

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4.15)$$

donde $\det(\cdot)$ denota el determinante e I representa a la matriz identidad, se puede comprobar que la matriz A en (4.11) tiene los siguientes valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3.064 \\ \lambda_2 &= -0.617 + 0.1931i \\ \lambda_3 &= -0.617 - 0.1931i \end{aligned} \quad (4.16)$$

y por tanto, se puede concluir que el sistema presentará un comportamiento inestable (determinado por el valor propio λ_1) cuando $t \geq 0$, pues en este caso las condiciones iniciales correspondientes hacen que $c_1 \neq 0$ tanto para δ como para γ .

Al llevar a cabo la simulación del sistema en lazo abierto, los problemas de identificación introducidos en el modelamiento del proceso se hacen presentes al perturbar los parámetros del modelo del RCTA con diferentes magnitudes, (vease la tabla 4.2; la respuesta del sistema se muestra en la figuras 4.5 y 4.6. La alta sensibilidad del SNL dado por el modelo del reactor, ante la presencia de este tipo de perturbaciones es clara.

Tabla 4.2 Magnitud de las perturbaciones en los parámetros del modelo del RCTA y el punto de del sistema en lazo abierto a $t=20$ min.

		Puntos Finales del sistema					
		$t = 10 \text{ min}$			$t = 20 \text{ min}$		
	Δ (%)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
θ	0.1	0.9834	344.1157	334.3862	0.9843	343.7779	333.7271
A_0	0.1	0.0500	452.4002	364.8340	0.0497	452.5327	365.0042
δ	0.01	0.9834	344.1157	334.3862	0.9834	344.1157	334.3862
	0.1	0.9879	343.2551	334.0340	0.9884	343.0265	333.7271
β	0.1	0.0532	452.0719	364.6443	0.0526	452.3037	364.9387
γ	0.1	0.9818	344.1725	334.6652	0.9838	343.5546	333.8792
ω	0.1	0.0541	451.7128	364.3459	0.529	452.1694	364.9253

Δ es el cambio porcentual del parámetro correspondiente

$$\theta = F/V$$

4.3. Diseño de las entradas V

Como se mostró en el capítulo 3, al definir una retroalimentación de la forma (2.11) que linealiza E/S al SNL transformado por (2.12), se obtiene un STLC equivalente a un sistema lineal controlable. El STLC tiene como salidas las mismas salidas que el SNL original y como entradas a las componentes del vector V , $V = [v_1, \dots, v_m]^T$.

Se ha encontrado [33] que el problema de seguimiento en la salida de una trayectoria de operación queda resuelto si el vector de entradas está dado por

$$A(x)\beta(x) V(t) = y_A^{(n)}(t) + \delta \theta(t) \quad (4.17)$$

donde $y_R^r = [y_{R_1}^{r_1} y_{R_2}^{r_2} \dots y_{R_m}^{r_m}]^T$ y $(\#)^{(k)}$ indica la derivada de orden k de $\#$, $A(x)$ es la matriz de desacoplamiento, $\beta(x)$ es una matriz tal que

$$A(x) \beta(x) = C \quad (4.18)$$

y $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz constante, $y_R = [y_{R_1} y_{R_2} \dots y_{R_m}]^T$ es el vector de señales de referencia de las salidas del sistema, $y = [y_1 y_2 \dots y_m]^T$; el error está dado por $e(t) = y_R - y$; δ_{ij} , $i=0,1,2,\dots,r_i-1$, $i=1,2,\dots,m$ son constantes arbitrarias que definen la dinámica de seguimiento y r es el grado relativo del SNL considerado. El término $\delta e(t)$ está dado por

$$\delta e(t) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-1} \delta_{1k} e_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_m-1} \delta_{mk} e_m^{(k)}(t) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Para el caso que aquí se estudia, la matriz C en (4.18) es la matriz identidad, $I_{m \times m}$. Así, el vector de nuevas entradas está dado por

$$V(t) = y_R^{(r)}(t) + \delta e(t) \quad (4.20)$$

Es importante mencionar que el cálculo numérico de las derivadas de orden mayor a 1 de cualquier función continua es generalmente un procedimiento poco preciso [34]. Sin embargo, se han diseñado técnicas eficientes para el cálculo preciso de derivadas de orden mayor a uno de alguna función continua, usando técnicas de

interpolación polinomial de la función por medio de polinomios ortogonales [35].

Cuando el problema de control es la regulación de la operación del proceso alrededor de un punto de referencia, se tiene que $y_R = [y_{R_1} \ y_{R_2} \ \dots \ y_{R_m}]^T$ son funciones que toman valores constantes. De esta manera, para el problema de regulación, las entradas del STLC están dadas por

$$v(t) = \begin{bmatrix} y_{R_1} \\ \vdots \\ y_{R_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-1} \delta_{1k} y_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_m-1} \delta_{mk} y_m^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Por otro lado, se puede demostrar [33] que para el problema general de seguimiento, con el vector de entradas dado por (4.20), el error $e(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$e_i^{(r_i)}(t) + \delta_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)}(t) + \dots + \delta_{i,1} e_i^{(1)}(t) + \delta_{i,0} e_i(t) = 0 \\ \forall \ 1 \leq i \leq m \quad (4.22)$$

La colocación de las raíces de la ecuación característica de (4.22), fijando el valor de δ_{ij} , $i=1,2,\dots,m$, $j=0,1,2,\dots,r_i$, define la dinámica de seguimiento en el STLC.

4.4 Rechazo a perturbaciones en el sistema con 1E/1S

Para simular el efecto de las perturbaciones sobre las

salidas del SNL con 1E/1S fué necesario tomar en cuenta que no todas las salidas consideradas en el análisis podían ser tomadas como salidas reales. Los estados x_2 y x_3 representan temperaturas y son fácilmente medibles; estos estados pueden ser las salidas del sistema. Por otro lado, el estado dado por x_1 representa a una concentración de material en una corriente de fluido. Esta magnitud, aunque fácilmente medible, presenta una dinámica de medición demasiado lenta (del orden de minutos) comparada con la dinámica de evolución del sistema ante la presencia de perturbaciones. El estado x_1 no es una buena elección para la salida de un sistema de control.

Por lo arriba mencionado, y a pesar de que el sistema es completamente linealizabile cuando la salida es $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$, se tomó como salida del sistema a $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$. En este caso, el SNL solo es lineal E/S con grado relativo dos. La temperatura de la chaqueta de enfriamiento, x_3 , no es importante como salida desde el punto de vista de control del proceso.

De las ecuaciones (4.19) y (4.20) se puede ver que la nueva entrada del sistema con 1E/1S está dada por

$$v(t) = y_R^{(r)}(t) - \sum_{k=0}^{r-1} \delta_k e^{(k)}(t) \quad (4.23)$$

Como $r=2$ cuando $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$, de (4.23), se tiene que

$$v(t) = y_R^{(2)}(t) - (\delta_0 e(t) + \delta_1 e^{(1)}(t)) \quad (4.24)$$

dado que $e(t) = y_R(t) - y(t)$ y que $y_R(t)$ es constante para $t \geq 0$, se obtiene que

$$v(t) = \delta_0 (y_R - y(t)) - \delta_1 y^{(1)}(t) \quad (4.25)$$

Y la ecuación característica del STLC está dada, por

$$\lambda^2 + \delta_1 \lambda + \delta_0 = 0 \quad (4.26)$$

cuyas raíces están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - 4\delta_0}}{2} \quad (4.27)$$

Las constantes δ_0 y δ_1 deberán escogerse de tal manera que no se introduzcan modos inestables en el STLC.

Diferentes pruebas en simulación mostraron que si se elige $\delta_0 = 4 \text{ min}^{-2}$ y $\delta_1 = 4 \text{ min}^{-1}$ la entrada $v(t)$ correspondiente permite que la salida del sistema, $y(t)$ se mantenga cercana a su valor de referencia, y_R ; la dinámica de regulación es la misma que la de un sistema lineal de segundo orden con sus polos colocados en -2 , (ver ecuación (4.27)). La derivada de la salida se calculó numericamente usando una aproximación de Euler,

$$\dot{y} \cong \frac{y(t) - y(t-h)}{h} \quad (4.28)$$

donde $h=0.01 \text{ min}$.

El control del proceso se realizó tomando como referencia para la salida el valor inicial de x_2 (operación en estado estacionario), es decir $y_R = 400^\circ\text{K}$ (ver tabla 4.1).

En el capítulo anterior se encontró que el STLC con la salida dada por $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ no presentaba desacoplamiento entre su salida y las perturbaciones en C_0 y T_0 . Cuando se introducen las perturbaciones (en $t=0.5 \text{ min}$) con 5.0% de $\bar{C}_0$ y 1.0% de $\bar{T}_0$ la salida del sistema es visiblemente alterada y el esfuerzo de control no es suficiente para poder mantener al sistema en su punto inicial, figuras 4.7 y 4.8 respectivamente. El efecto de las perturbaciones en T_0 , para perturbaciones positivas mayores que un 5% del valor nominal de T_0 , la variable controlable (el flujo de enfriamiento) toma valores negativos. Esto no tiene sentido

desde el punto de vista de operación del proceso. En la figura 4.9. se muestran la salida y el control del sistema cuando la perturbación es de 5% de $\bar{T}_{j0}$. Para perturbaciones de magnitud negativa de hasta un 35% del valor nominal de T_{j0} la señal de control no toma valores negativos, figura 4.10 .

4.4.1 Sensibilidad con respecto a los parámetros

Cuando se tiene un SNL de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, \mu) + g(t, x, \mu) u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.29}$$

con f, g y h definidas como en secciones anteriores, el análisis de sensibilidad con respecto a los parámetros puede ser hecho según el procedimiento presentado en la sección 4.2 si se representa al sistema (4.29) en la forma (4.1). Esto se logra fácilmente definiendo una nueva función $\hat{f}(t, x, \mu)$ como

$$\hat{f}(t, x, \mu) = f(t, x, \mu) + g(t, x, \mu) u .\tag{4.30}$$

Es evidente que para el sistema en lazo cerrado con la alimentación que linealiza y permite el rechazo a perturbaciones, ecuación (3.48), las ecuaciones de variaciones de $\hat{f}$ en función de la perturbación ΔT_{j0} y de la nueva entrada $u(t)$. Sin embargo, puesto que el análisis debe de llevarse a cabo sin cualquier otra influencia que no sea la propia de los parámetros [39] se consideró $\Delta T_{j0} = 0$. Por otro lado, la nueva entrada $u(t)$ está dada, ecuación (4.25), por

$$u(t) = \delta_0 (y_R - y(t)) - \delta_1 \dot{y}^{(1)}$$

y es fácil ver que cuando el sistema no sufre de perturbaciones externas y con el sistema operando en un punto de equilibrio (el inestable, tabla 4.1) para el vector de parámetros $\mu = \mu^*$ se tiene que $y(t) = y_R$ y entonces $\dot{y}(t) = 0$.

Con estas condiciones, el cálculo de la matriz del sistema lineal dado por las ecuaciones de variaciones, muestra que esta matriz está dada por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -0.03125 & 0 \\ 200 & 4.25 & 1 \\ 78.75 & -11.6445 & 4.25 \end{bmatrix}, \quad b_\delta = \begin{bmatrix} 0.00125 \\ -0.25 \\ -0.8125 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -50.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Esta matriz tiene los siguientes valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.2376 \\ \lambda_2 &= 3.8688 + 3.6831i \\ \lambda_3 &= 3.8688 - 3.6831i \end{aligned} \quad (4.32)$$

y, por otro lado, las condiciones iniciales del sistema (4.13) con A , b_δ y b_γ dadas por (4.31) hacen que c_2 y c_3 en (4.14) sean distintas de cero. De esta manera, el STLC presentará un comportamiento inestable (determinado por la parte real de los valores propios λ_2 y λ_3) ante variaciones en los parámetros δ o γ .

Al llevar a cabo la simulación del STLC se consideró que los parámetros del modelo por donde se puede introducir incertidumbre en el modelamiento son δ y γ . Como se mencionó anteriormente el grado de incertidumbre del valor de estos parámetros en un sistema real puede ser hasta del 10%, aquí se supuso que este grado de incertidumbre en los valores de δ y γ era de 0.05% y 1.0%, respectivamente. De esta manera, cuando las perturbaciones representan problemas de identificación de los parámetros del

modelo del RCTA el control no es robusto, figuras 4.11 y 4.12.

4.5 Rechazo a perturbaciones en el sistema con 2E/2S.

En forma similar al caso con 1E/1S, se realizó la simulación del proceso cuando las salidas consideradas tenían un significado físico. Estas salidas son $h_1(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h_2(x) = x_3 - \bar{x}_3$ (Temperaturas en el reactor y en la chaqueta de enfriamiento, respectivamente). Las variables controlables fueron $u_1 = F_2$ y $u_2 = F_j$ (fluídos a través del reactor y de la chaqueta de enfriamiento, respectivamente). Los valores de referencia de las salidas del sistema están dados por los valores iniciales de x_2 y x_3 , es decir, $y_{R1} = 400^\circ\text{K}$ y $y_{R2} = 350^\circ\text{K}$.

El vector de nuevas entradas del STLC fué calculado como sigue:

De las ecuaciones (4.19) y (4.20) con las salidas $y_{R1} = \text{constante}$ y $y_{R2} = \text{constante}$ y dado que el grado relativo del sistema es dos ($r_1 = 1$ y $r_2 = 1$), se tiene que

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_{10} \theta_1(t) \\ v_2 &= \delta_{20} \theta_2(t) \end{aligned} \quad (4.33)$$

es decir,

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta_{10} (y_{R1} - y_1(t)) \\ v_2 &= \delta_{20} (y_{R2} - y_2(t)) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Las constantes δ_{10} y δ_{20} se escogen de tal manera que las raíces λ_1 y λ_2 de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \delta_{1_0} &= 0 \\ \lambda_2 + \delta_{2_0} &= 0\end{aligned}\tag{4.35}$$

tengan parte real negativa. Los valores absolutos de δ_{1_0} y δ_{2_0} determinan la dinámica del STLC.

Escogiendo a $\delta_{1_0} = 2.0 \text{ min}^{-1}$ y $\delta_{2_0} = 1.0 \text{ min}^{-1}$, el vector de entradas $v(t)$ correspondiente permite que se realice una regulación adecuada: la dinámica de regulación es la misma dinámica que la de dos sistema lineales de orden uno, cuyos polos están colocados en -2 y -1 , respectivamente.

Con el vector de nuevas entradas $v = [v_1 \ v_2]^T$ dado por (4.34), se observó la respuesta del STLC correspondiente ante perturbaciones en las entradas y en los parámetros δ y γ del modelo del reactor. Cuando las perturbaciones se presentan en C_0 con un 5%, un 15% y un 40% de $\bar{C}_0$ el control se comporta adecuadamente tomando valores reales, figuras 4.13 y 4.14. Analogamente sucede cuando se presentan perturbaciones menores o iguales a un 5% de $\bar{T}_0$, figuras 4.15 y 4.16. Cuando la perturbación es mayor que 5% de $\bar{T}_0$, el control u_2 (F_j) toma valores negativos. Si las perturbaciones se presentan en T_{j0} y son menores o iguales a un 5% de $\bar{T}_{j0}$, el control toma valores reales, figuras 4.17 y 4.18. Perturbaciones de orden mayor que el 5% del valor nominal de T_{j0} provocan que la regulación se haga en base a valores negativos de u_2 . Esto no representa una situación real.

El control aquí diseñado para el sistema con 2E/2S no es robusto ante perturbaciones en los parámetros δ y γ del modelo del reactor, figuras 4.19 a 4.22. El máximo de cambio permitido en el valor del parámetro δ es de 0.01% y de 1% en el valor del parámetro γ . Las variaciones reales en los valores de estos

parámetros puede ser hasta de 10% .

Lo que en este capítulo se encontró permite observar que un control para el RCTA diseñado por técnicas de linealización es aplicable en un rango limitado de situaciones. Esto sucede tanto para el sistema con 1E/1S como para el sistema con 2E/2S . Sin embargo, para un proceso que no tuviese restricciones fuertes en cuanto a los valores del flujo F el control diseñado para el sistema con 2E/2S funciona adecuadamente ante la presencia de perturbaciones externas al sistema, esto no sucede cuando se presentan perturbaciones en los parámetros del modelo del reactor.

F I G U R A S

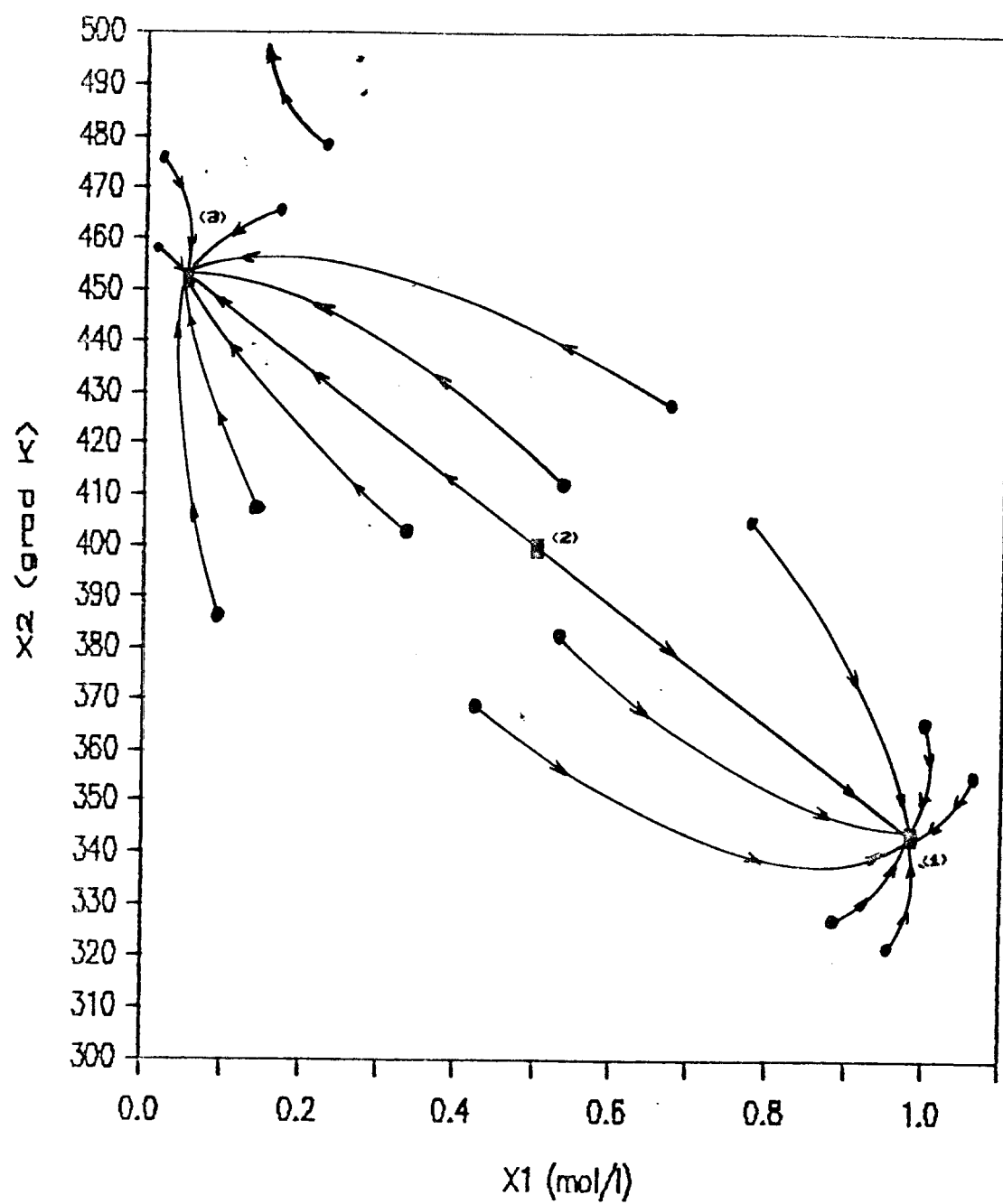


Figura 4.1 Espacio fase del RCTA.

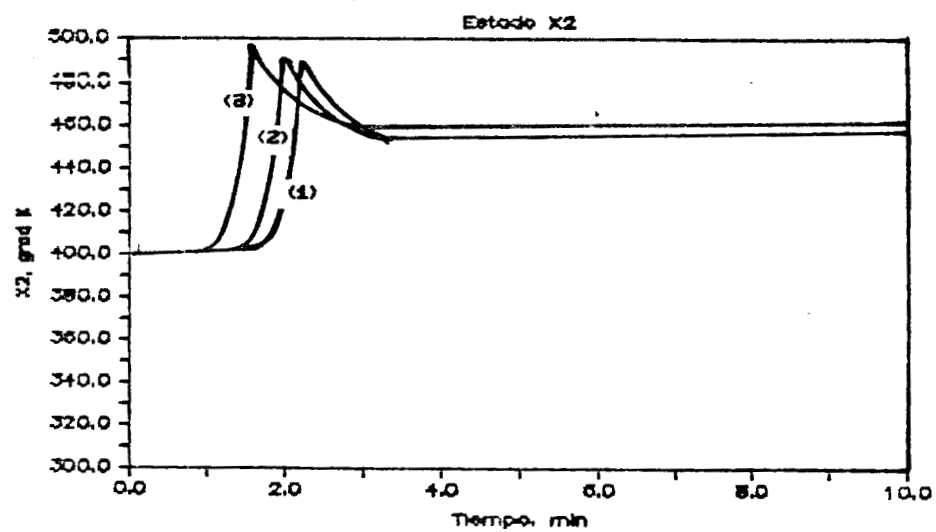
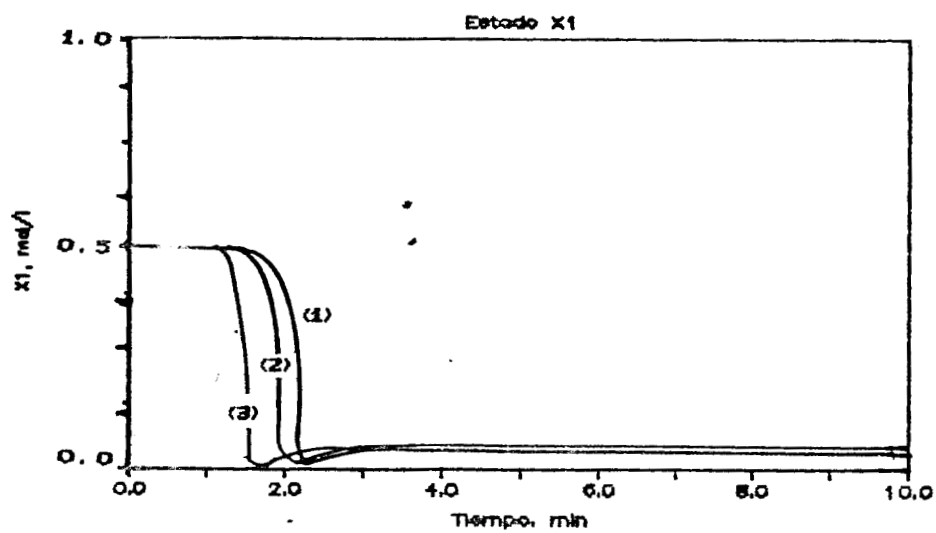


Figura 4.2 Efecto de las perturbaciones en C_o sobre el comportamiento del RCTA en lazo abierto ((1) - $\Delta C_o = 0.005 C_o$, (2) $\Delta C_o = 0.01 C_o$, (3) $\Delta C_o = 0.10 C_o$).

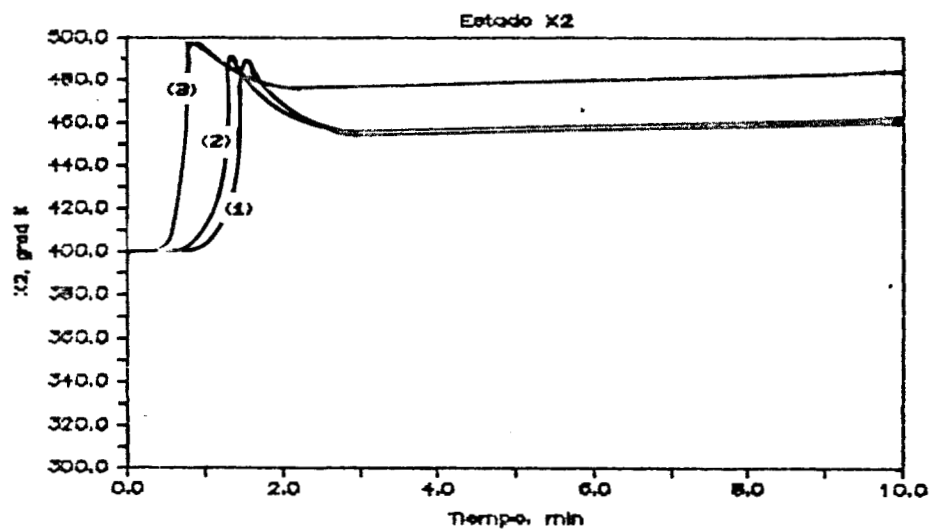
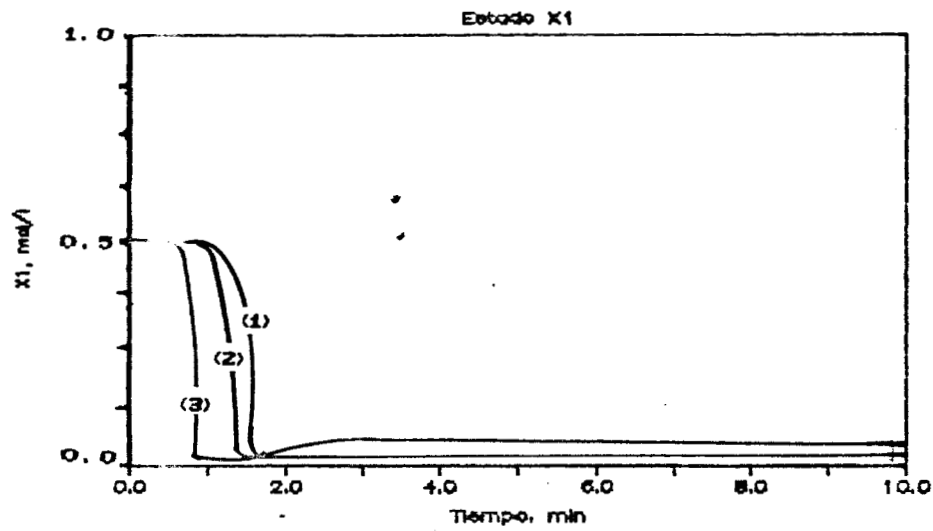


Figura 4.3 Efecto de las perturbaciones en T_o sobre el comportamiento del RCTA en lazo abierto ((1) $\Delta T_o = 0.005 T_o$, (2) $\Delta T_o = 0.01 T_o$, (3) $\Delta T_o = 0.10 T_o$).

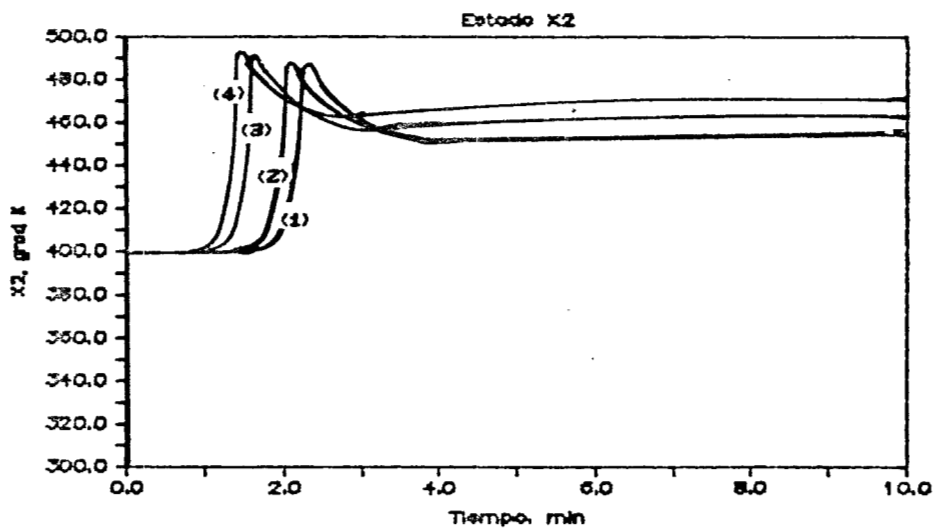
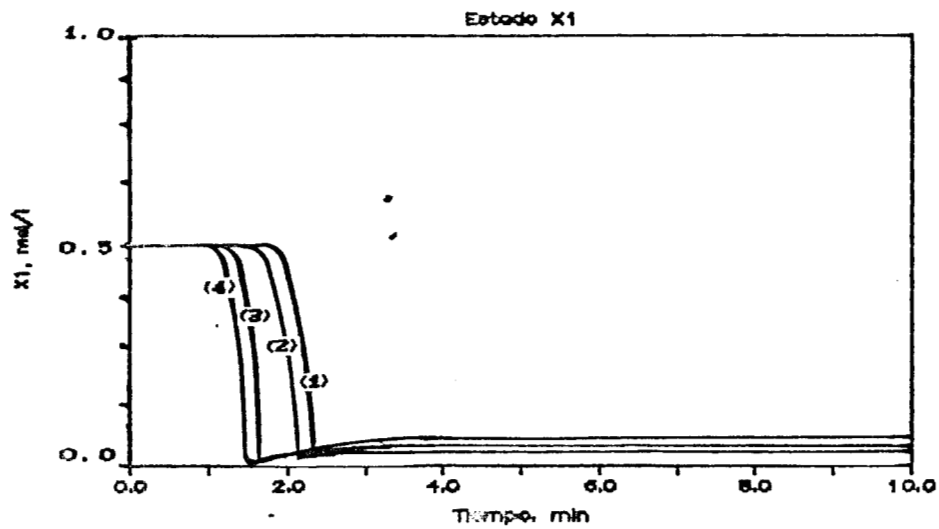


Figura 4.4 Efecto de las perturbaciones en T_{j0} sobre el comportamiento del RCTA en lazo abierto ((1) $\Delta T_{j0} = 0.005T_{j0}$, (2) $\Delta T_{j0} = 0.01T_{j0}$, (3) $\Delta T_{j0} = 0.05T_{j0}$, (4) $\Delta T_{j0} = 0.10T_{j0}$).

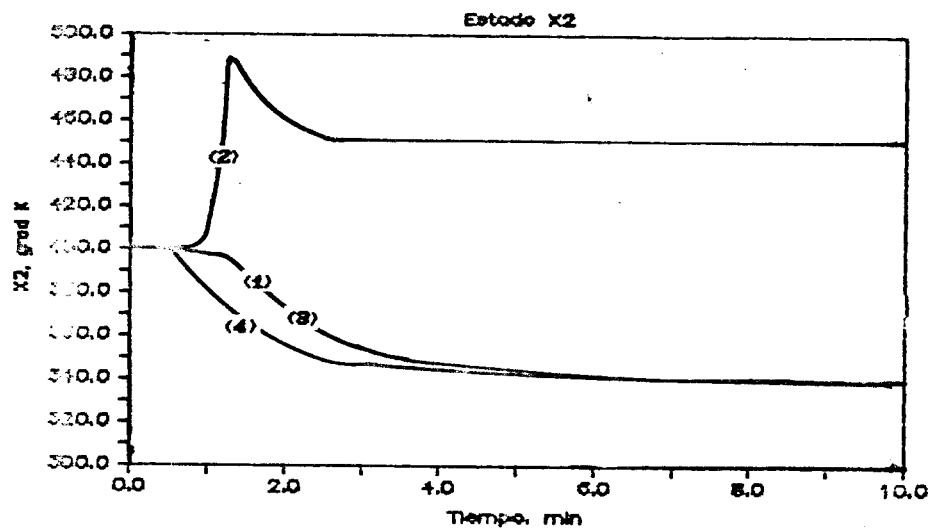
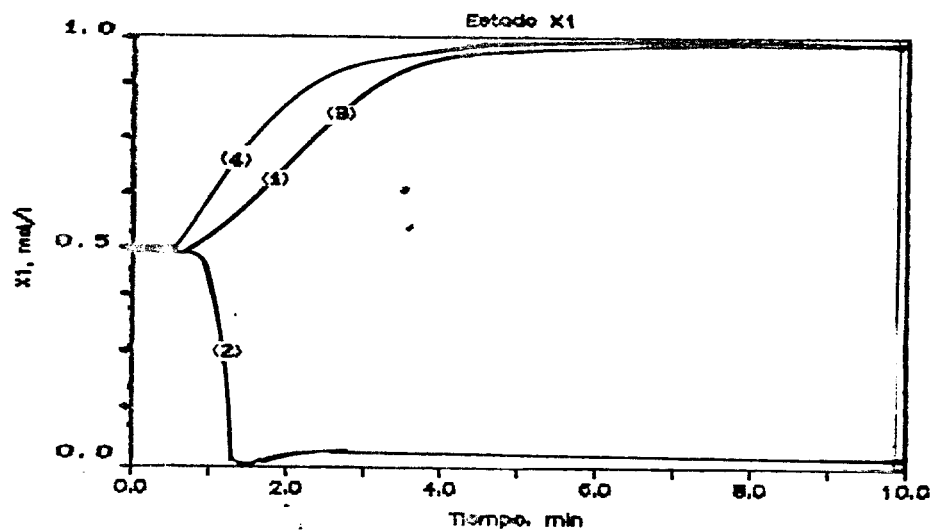


Figura 4.5 Efecto de las perturbaciones en los parámetros θ , A_0 y δ sobre el comportamiento del RCTA en lazo abierto
 ((1) $\Delta\theta = 0.001\theta$, (2) $\Delta A_0 = 0.001A_0$, (3) $\Delta\delta = 0.0001\delta$,
 (4) $\Delta\delta = 0.001\delta$).

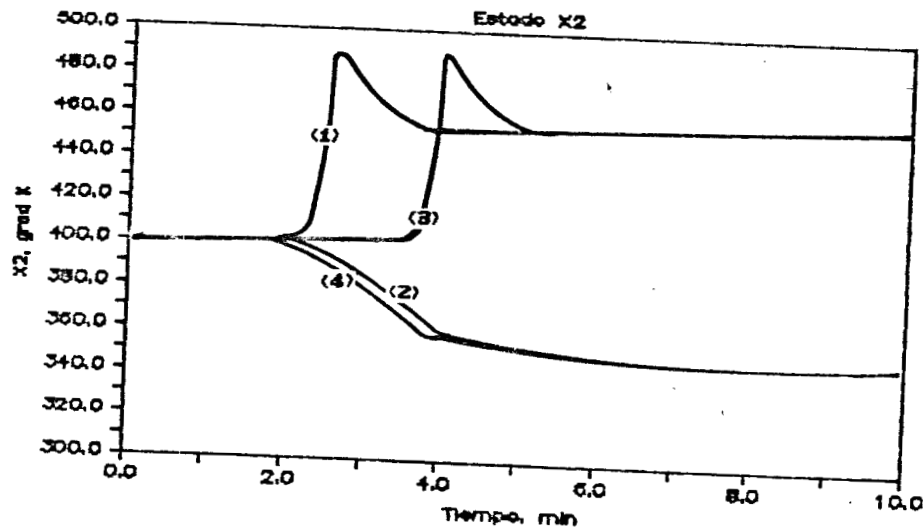
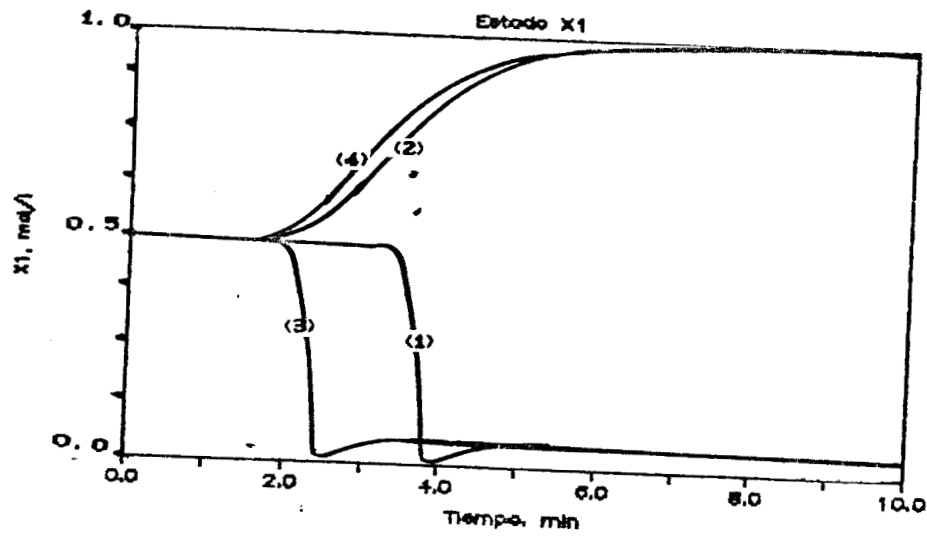


Figura 4.6 Efecto de la incertidumbre en los parámetros β , γ y ω sobre el comportamiento del RCTA en lazo abierto
 (1) $\Delta\beta = 0.001\beta$, (2) $\Delta\gamma = 0.001\gamma$, (3) $\Delta\omega = 0.001\omega$,
 (4) $\Delta\theta = 0.001\theta$, $\Delta A_0 = 0.001A_0$, $\Delta\beta = 0.001\beta$, $\Delta\gamma = 0.001\gamma$,
 $\Delta\omega = 0.001\omega$, $\Delta\delta = 0.0001\delta$).

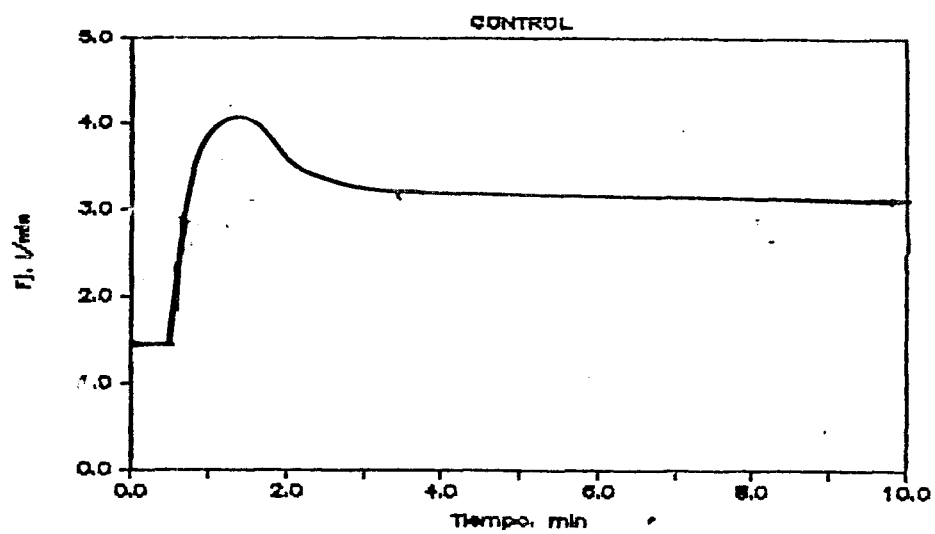
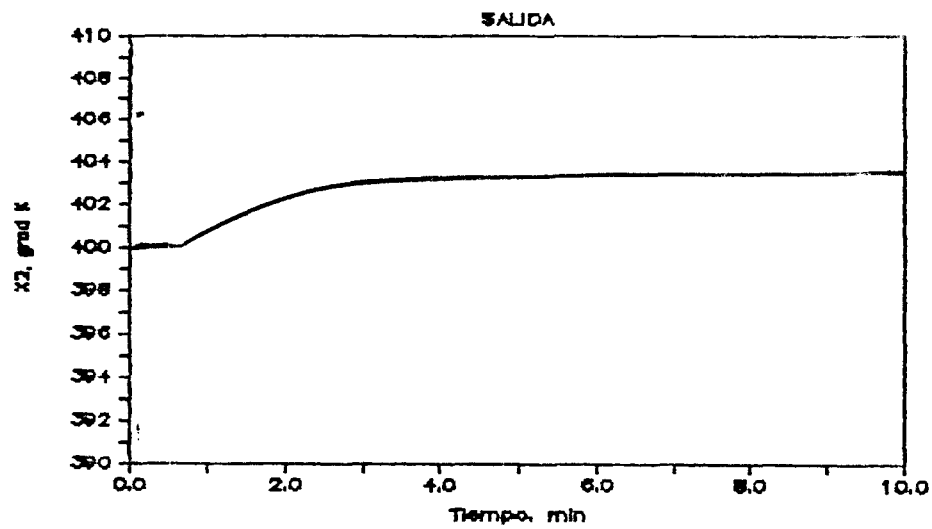


Figura 4.7 Efecto de las perturbaciones en C_0 sobre la salida del STLC en lazo cerrado con la retroalimentación que resuelve el PRP.

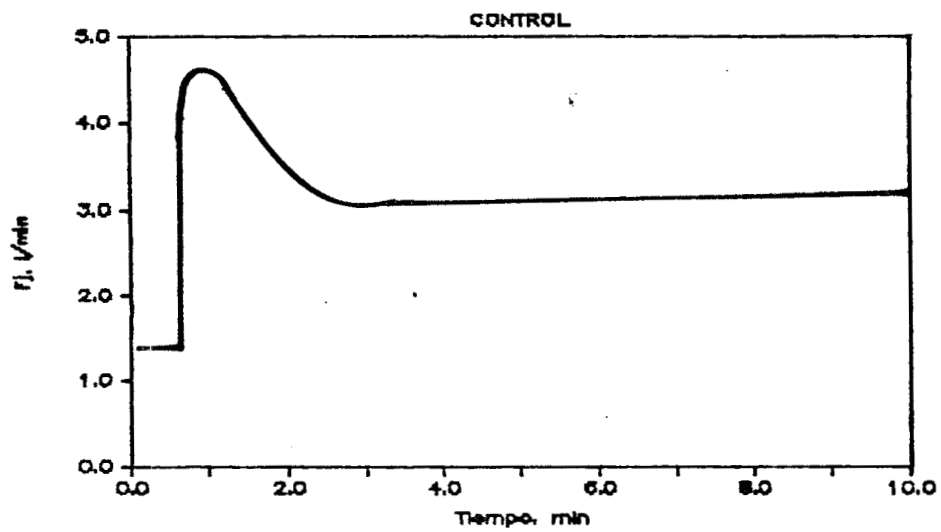
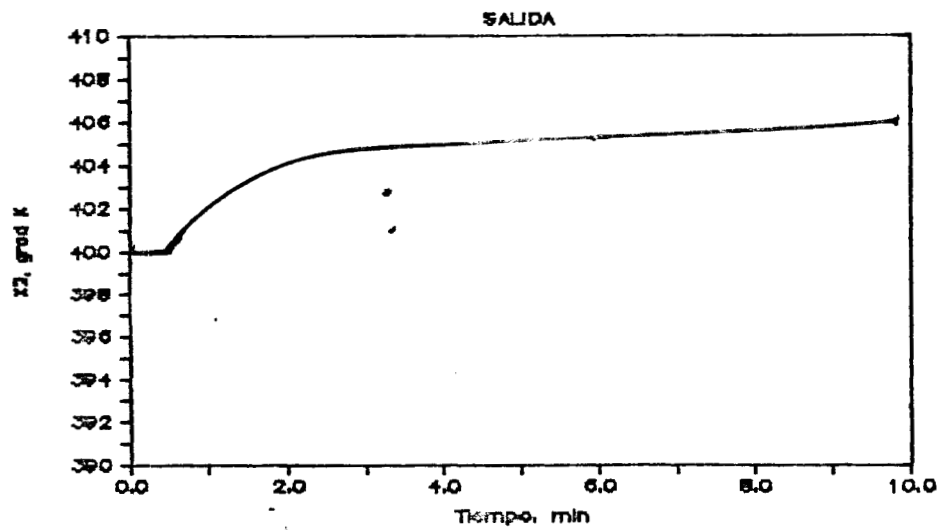


Figura 4.8 Efecto de las perturbaciones en T_0 sobre la salida del STLC en lazo cerrado con la retroalimentación que resuelve el PRP.

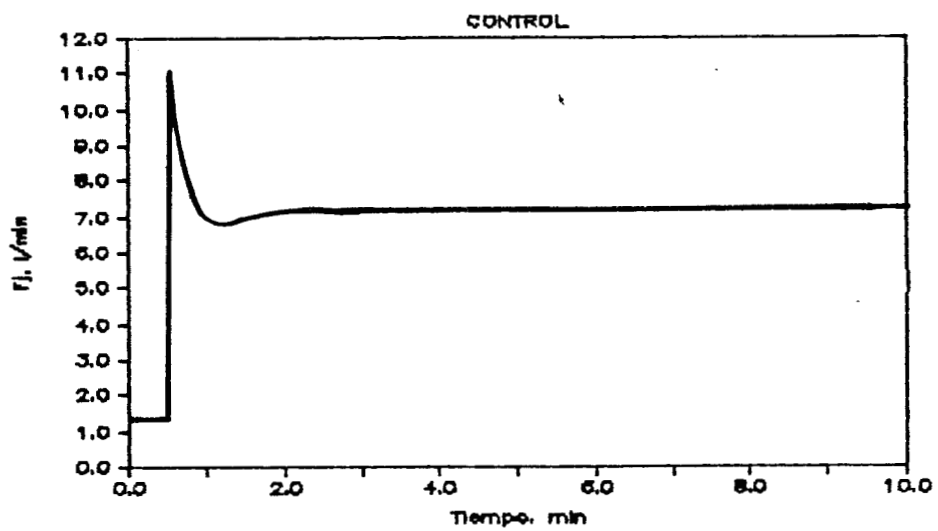
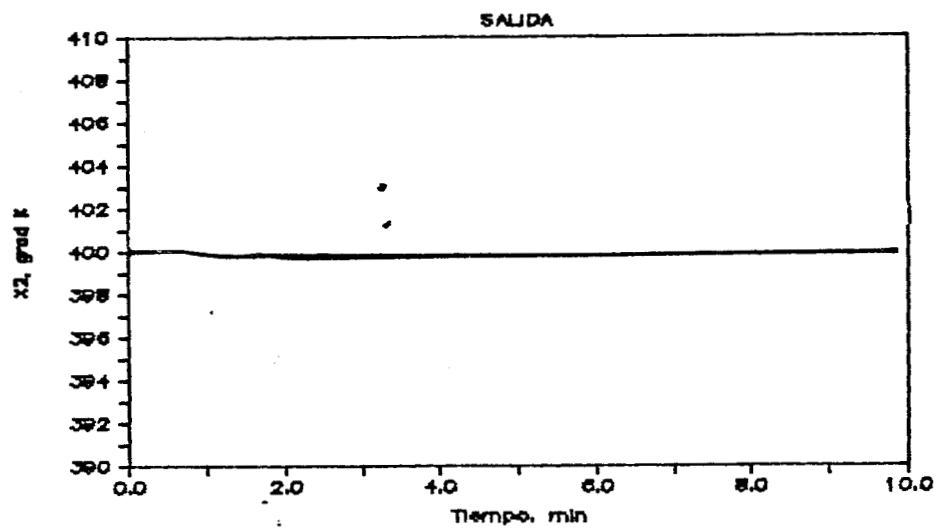


Figura 4.9 Salida y control del STLC con 1E/1S cuando se presenta desacoplamiento entre la salida y las perturbaciones con perturbación positiva.

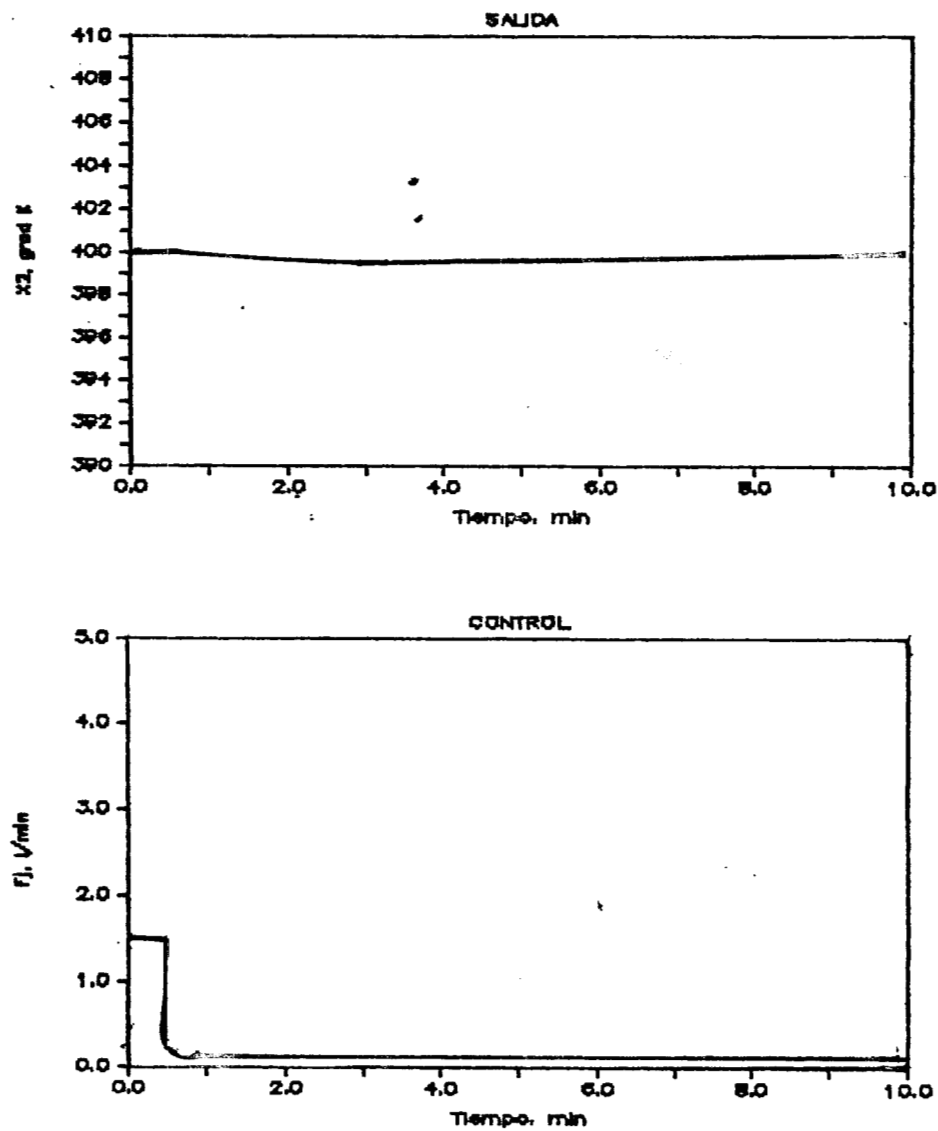


Figura 4.10 Salida y control del STLC con 1E/1S cuando se presenta desacoplamiento entre la salida y las perturbaciones con perturbación negativa.

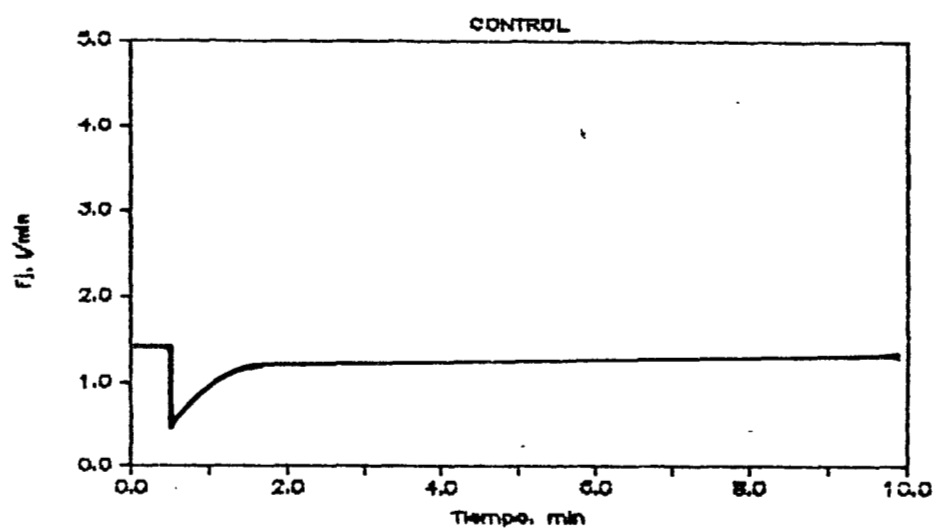
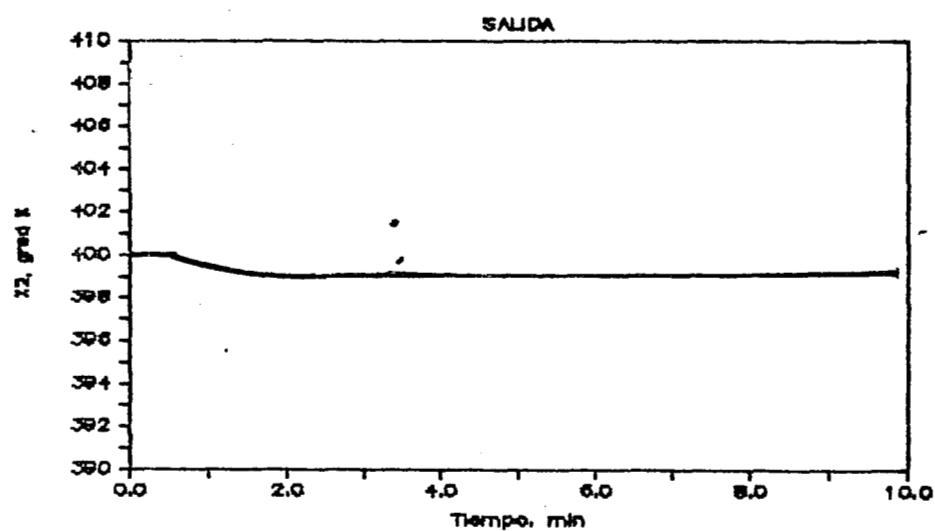


Figura 4.11 Efecto de la incertidumbre en el parámetro δ del modelo del RCTA sobre la salida del STLC con $1E/1S$.

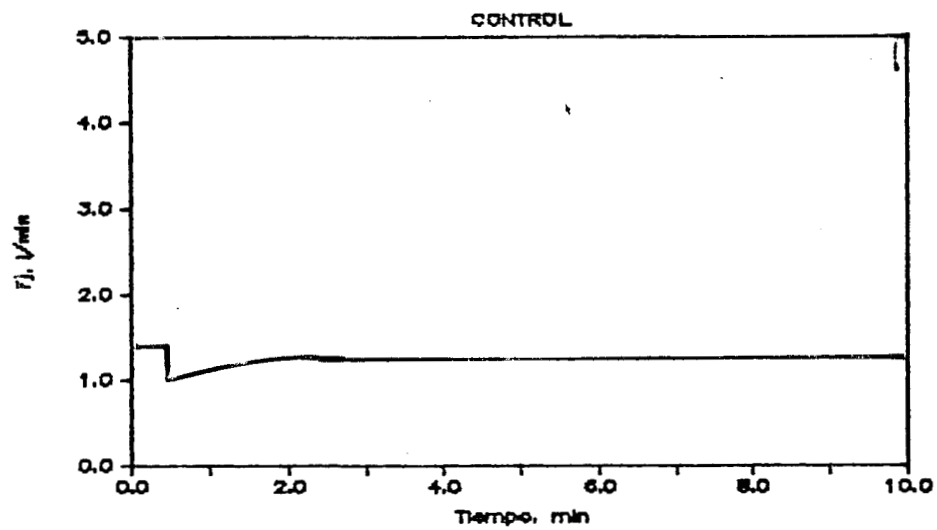
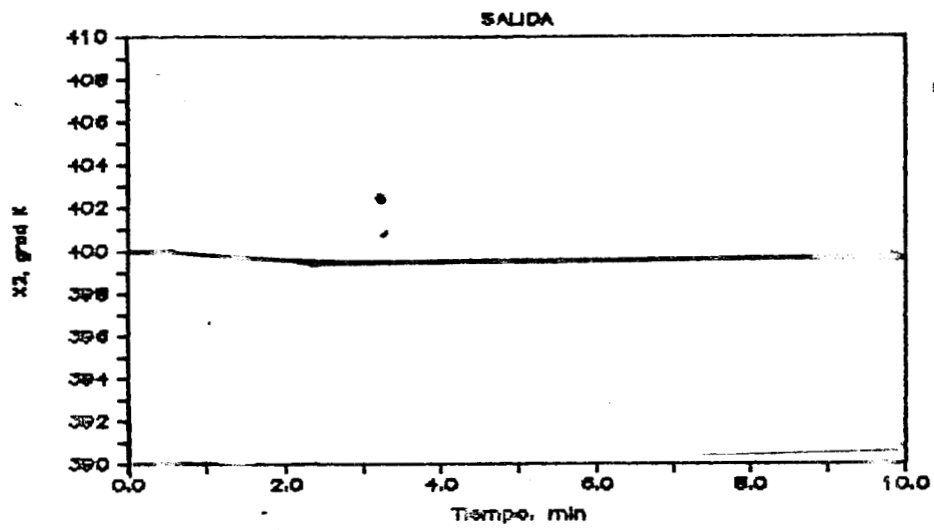


Figura 6.12 Efecto de la incertidumbre en el parámetro y del modelo del RCTA sobre la salida del STLC con $1E/1S$.

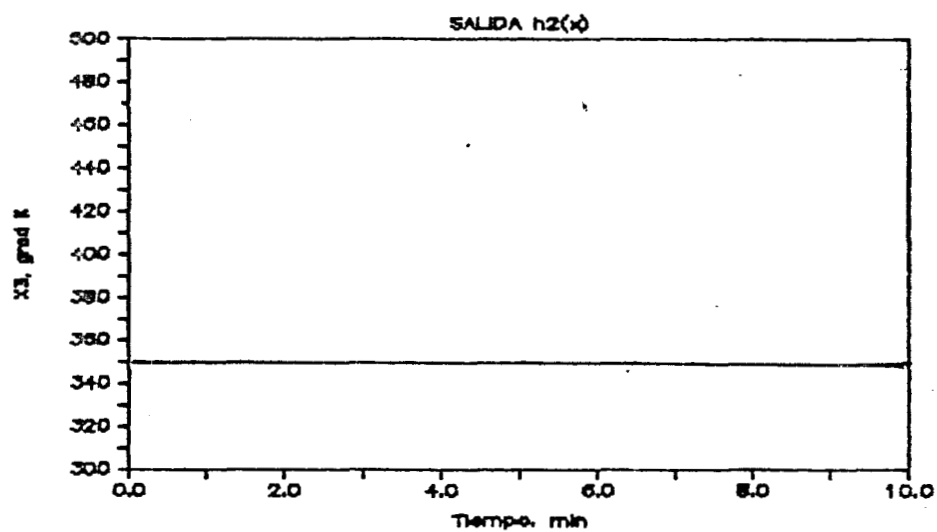
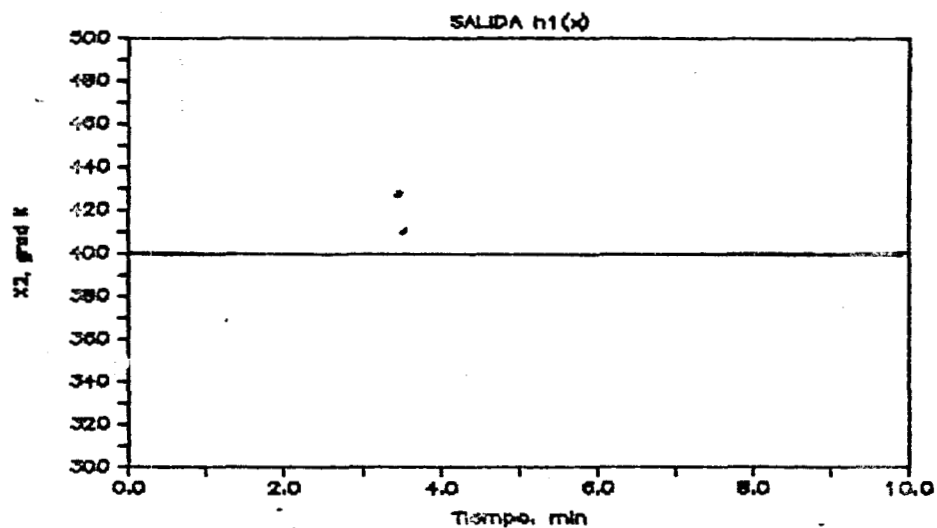


Figura 4.13 Salidas del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en C_o ((1) $\Delta C_o = 0.05 \bar{C}_o$, (2) $\Delta C_o = 0.15 \bar{C}_o$ y (3) $\Delta C_o = 0.40 \bar{C}_o$).

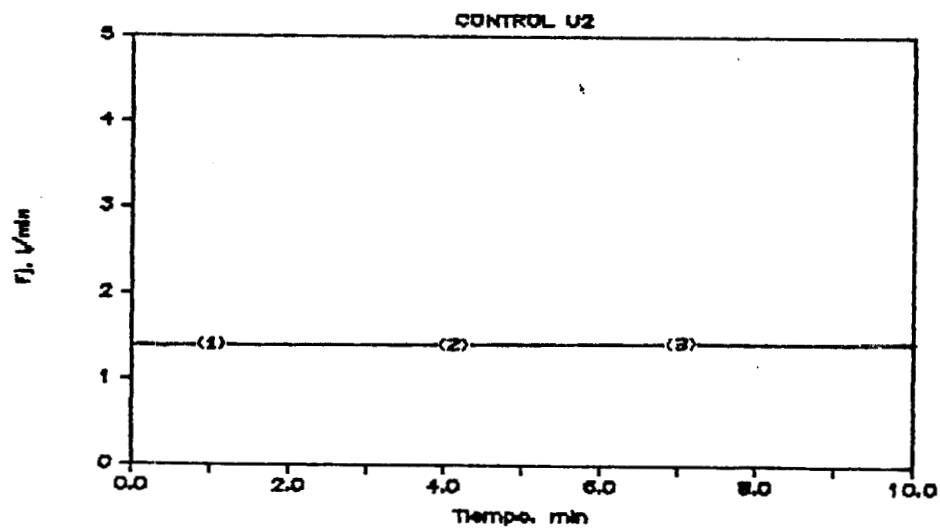
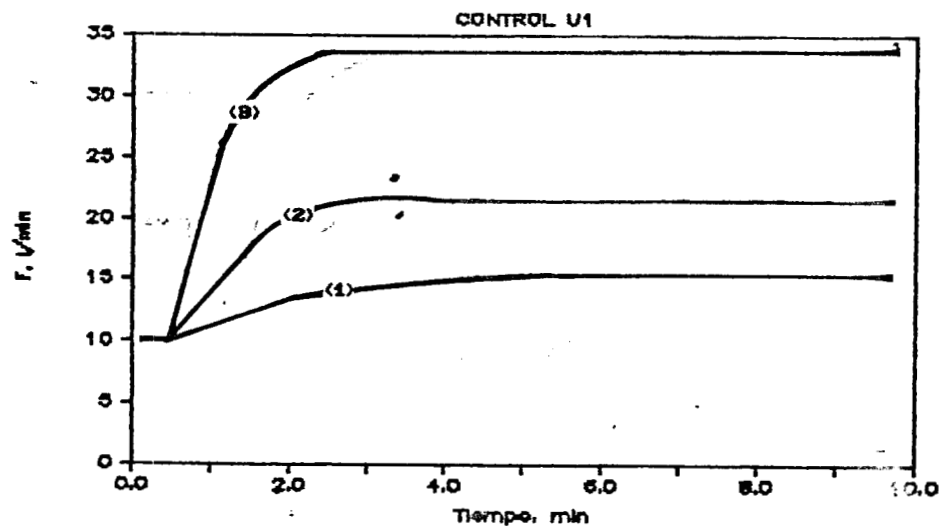


Figura 4.14 Controles del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en C_o ((1) $\Delta C_o = 0.05 \bar{C}_o$, (2) $\Delta C_o = 0.15 \bar{C}_o$ y (3) $\Delta C_o = 0.40 \bar{C}_o$).

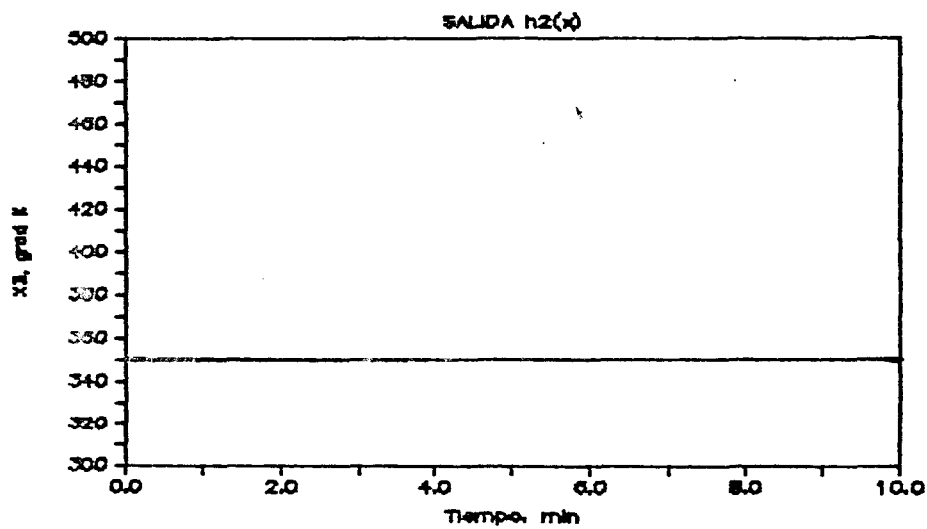
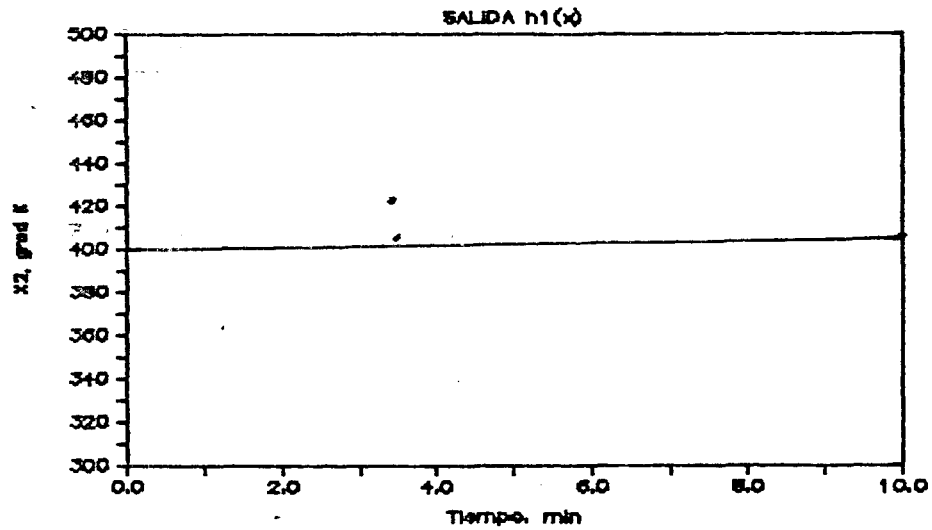


Figura 4.15 Salidas del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en T_o ((1) $\Delta T_o = 0.01 \bar{T}_o$, (2) $\Delta T_o = 0.05 \bar{T}_o$).

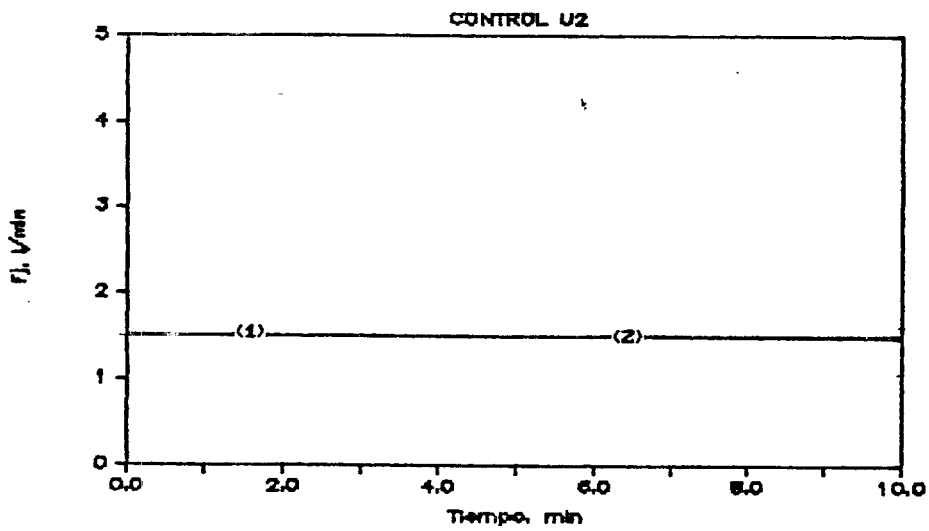
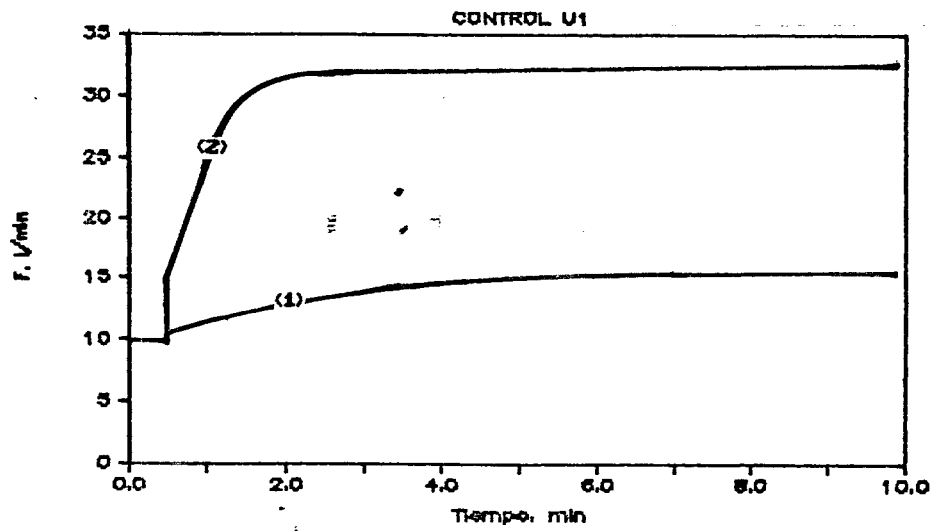


Figura 4.16 Controles del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en T_o ((1) $\Delta T_o = 0.01 \bar{T}_o$, (2) $\Delta T_o = 0.05 \bar{T}_o$).

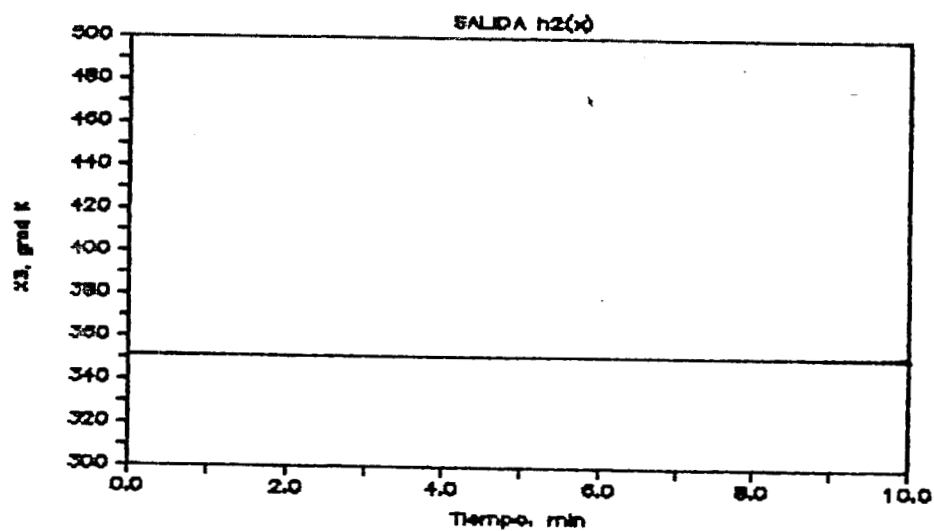
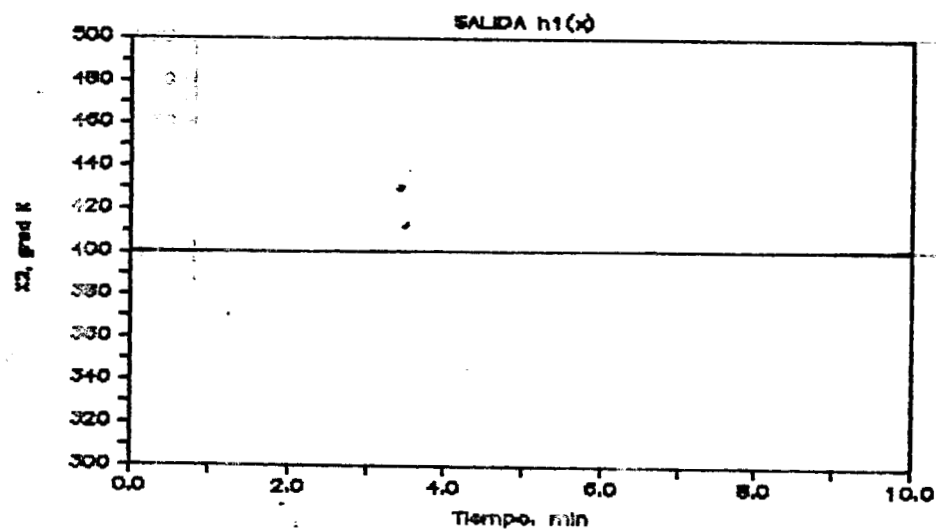


Figura 4.17 Salidas del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en T_{j0} ((1) $\Delta T_{j0} = 0.01 \bar{T}_{j0}$, (2) $\Delta T_{j0} = 0.05 \bar{T}_{j0}$).

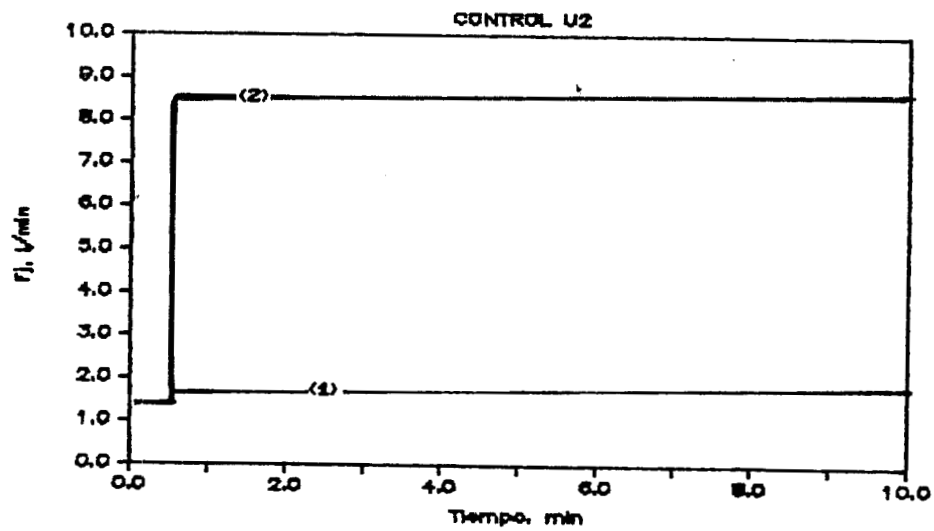
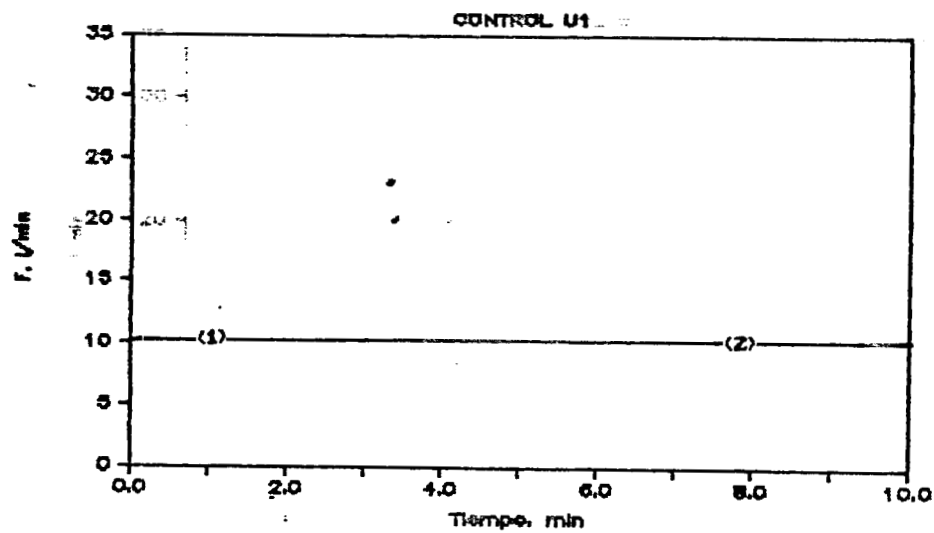


Figura 4.18 Controles del STLC con 2E/2S cuando se presentan perturbaciones en T_{j0} ((1) $\Delta T_{j0} = 0.01 \bar{T}_{j0}$, (2) $\Delta T_{j0} = 0.05 \bar{T}_{j0}$).

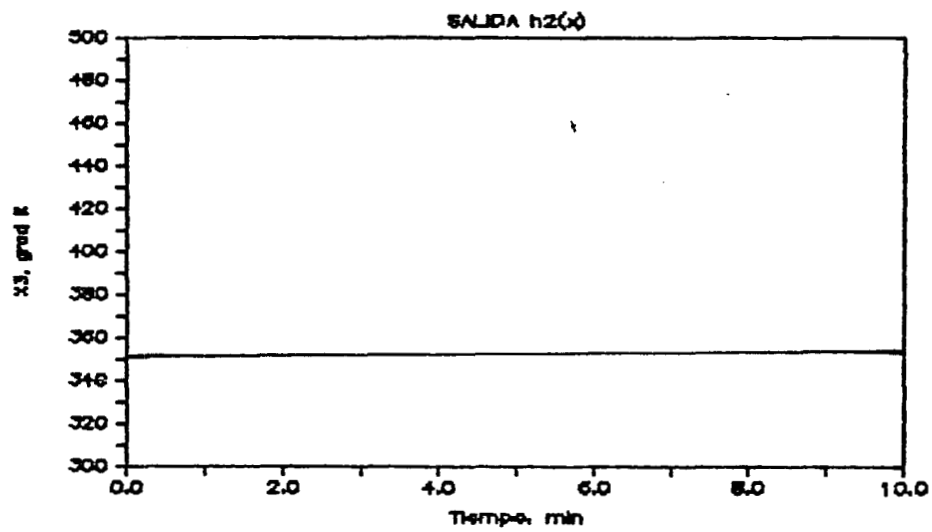
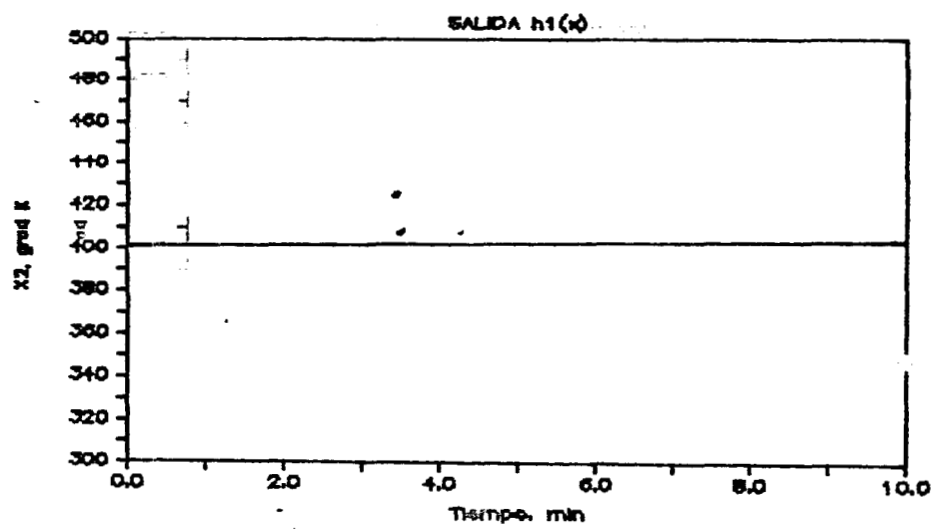


Figura 4.19 Salidas del STLC con 2E/2S ante la incertidumbre en el parámetro δ ($\Delta\delta = 0.0001 \bar{\delta}$).

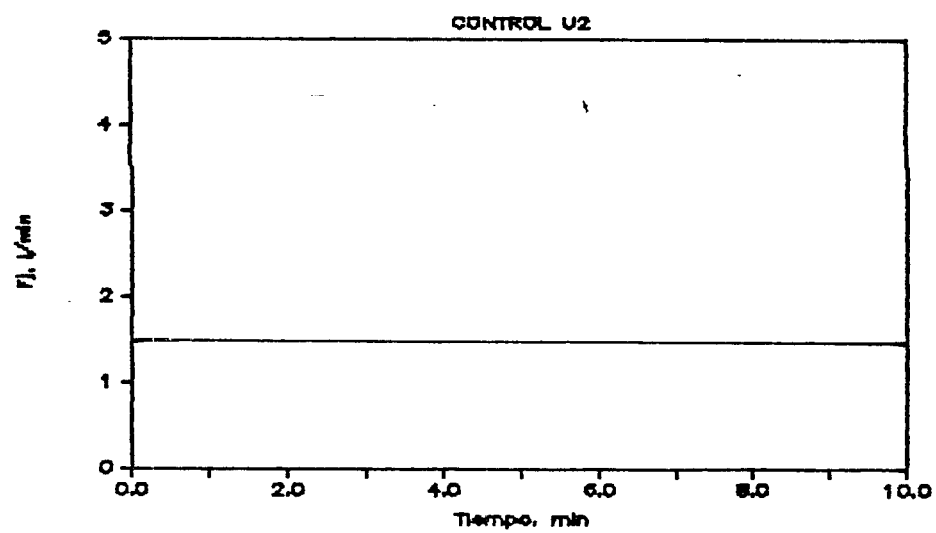
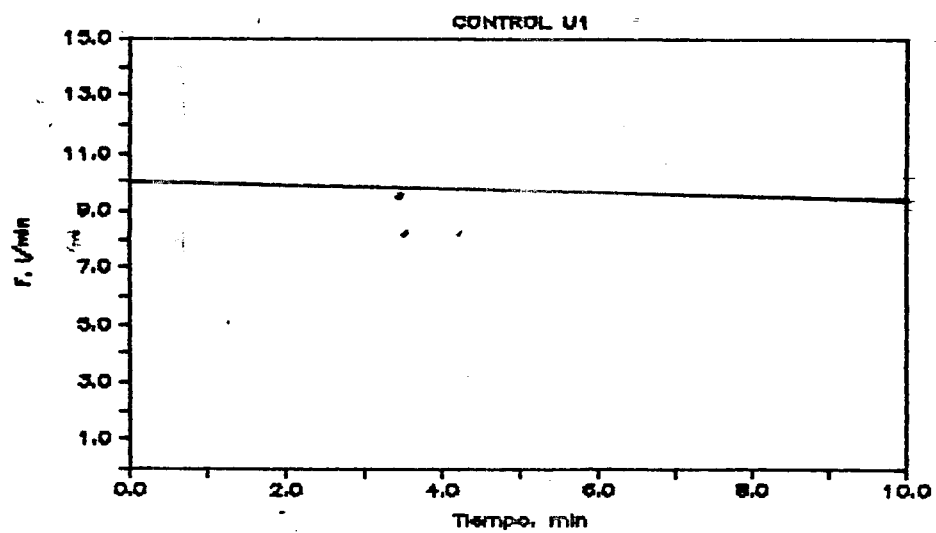


Figura 4.20 Controles del STLC con 2E/2S ante la incertidumbre en el parámetro δ ($\Delta\delta = 0.0001 \bar{\delta}$).

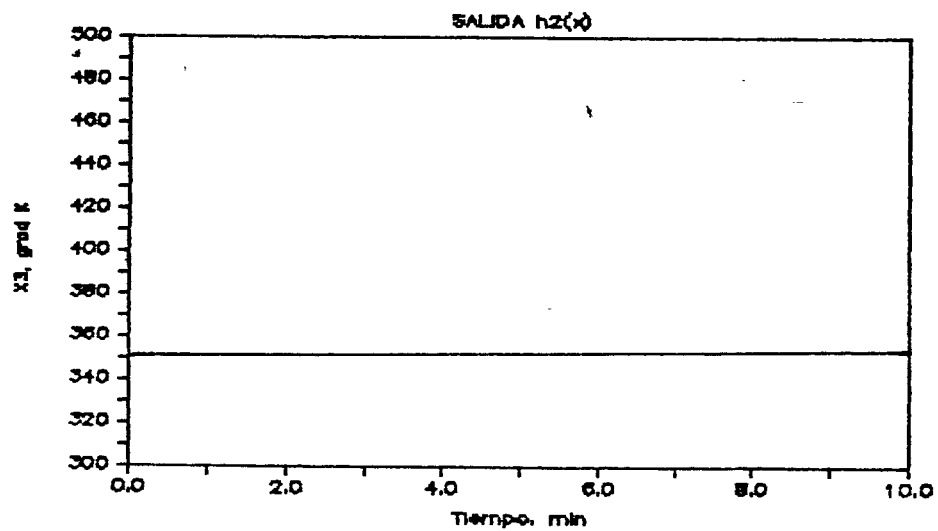
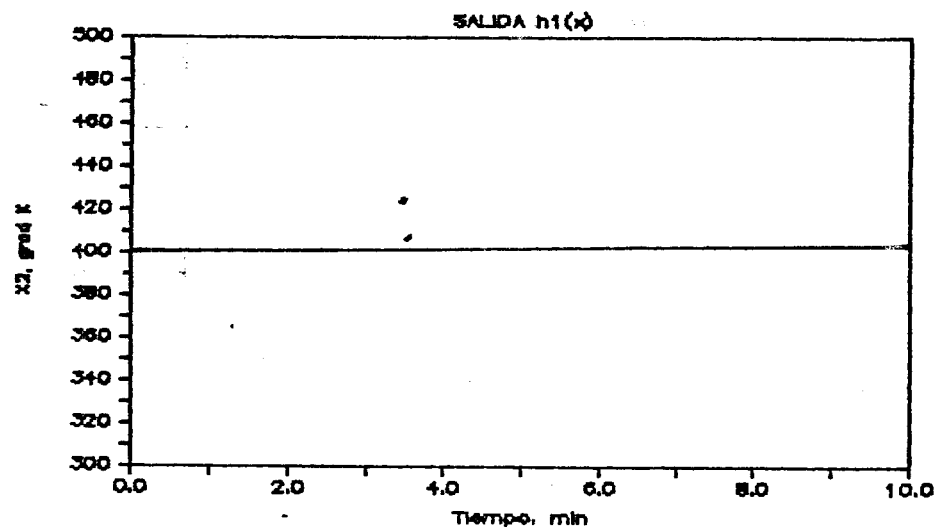


Figura 4.21 Salidas del STLC con 2E/2S ante la incertidumbre en el parámetro γ ($\Delta\gamma = 0.01 \bar{\gamma}$).

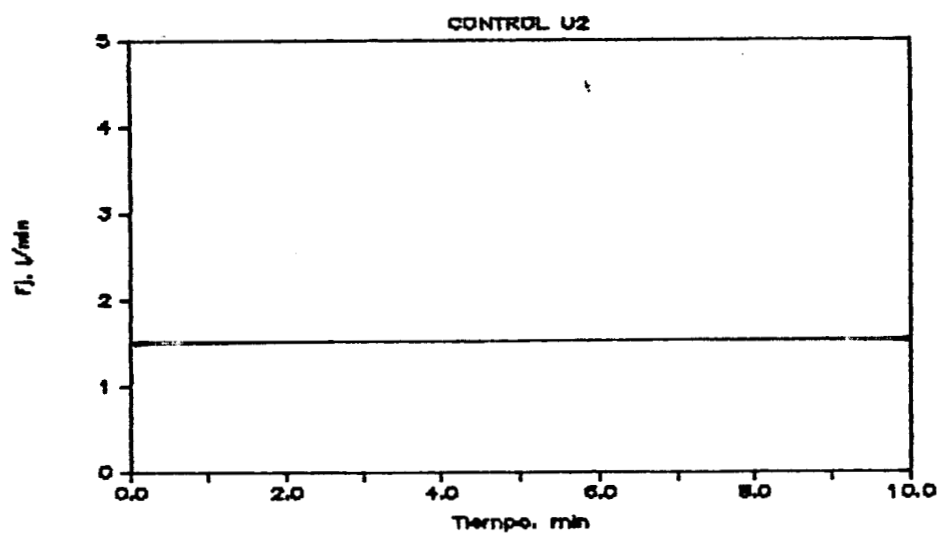
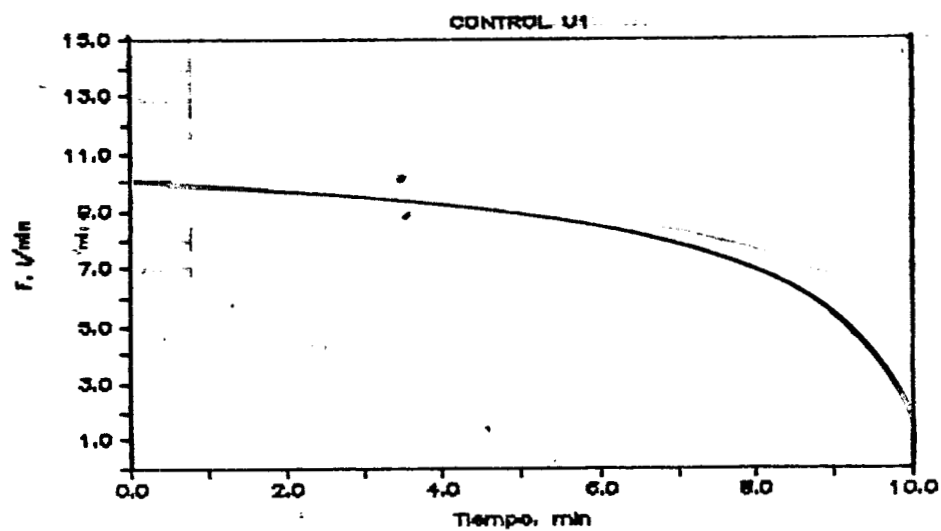


Figura 4.22 Controles del STLC con 2E/2S ante la incertidumbre en el parámetro γ ($\Delta\gamma = 0.01 \bar{\gamma}$).

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó el análisis del modelo de un reactor continuo de tanque agitado con tres estados utilizando las herramientas relacionadas con el control geométrico. En particular, se buscaba saber si era posible linealizar Entrada/Salida (E/S) al sistema no lineal (SNL) asociado al modelo del reactor, con el propósito de diseñar una retroalimentación estática de estados que permitiera que el sistema transformado en lazo cerrado (STLC) no se viese alterado en su vector de salidas ante la presencia de perturbaciones externas. Se analizaron los sistemas con una entrada y una salida (1E/1S) y con dos entradas y dos salidas (2E/2S).

El SNL con 1E/1S es linealizabile cuando la salida del sistema es $h(x) = x_1 - \bar{x}_1$. Sin embargo, el estado x_1 no es elegible como salida pues presenta una dinámica de medición lenta comparada con la dinámica de evolución del sistema. Puesto que el sistema es linealizabile el STLC resultante no presenta una dinámica interna. Cabe mencionar que desde el punto de vista de Kravaris en [29] lo que realmente sucede cuando el SNL es linealizabile, es que la retroalimentación que resuelve el problema de linealización (PL) anula a la dinámica interna. Esto podría ser cierto si se considera que al construir al STLC con una retroalimentación diferente que la que resuelve el PL el sistema resultante sí presentaría una dinámica interna. Sin embargo, dado que la dinámica interna de un SNL es una propiedad invariante ante una retroalimentación [24], el hecho de que el sistema sea linealizabile para la salida escogida permite concluir que efectivamente no existe una dinámica interna del sistema.

Por otro lado, el hecho de que el SNL cuya salida es el estado x_1 sea linealizabile, permite ver que un problema a resolver es la construcción de un observador de este estado. De esta manera

es posible tomar ventaja de la completa equivalencia del STLC correspondiente, con un sistema lineal.

Cuando la salida del sistema es $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$, el sistema es lineal E/S con un grado relativo dos. El STLC solo puede rechazar perturbaciones medibles presentes en la temperatura de entrada a la chaqueta de enfriamiento del reactor, T_{j0} . Si se considera que las perturbaciones en un sistema real alcanzan hasta el 15% , en valor absoluto, del valor nominal de C_0 , T_0 y T_{j0} y que la incertidumbre en los parámetros δ y γ puede ser hasta de un 10% , desde un punto de vista práctico el rechazo de perturbaciones positivas mayores de 5% del valor nominal de T_{j0} no es posible dado que la variable de control toma valores sin sentido físico. Análogamente sucede con las perturbaciones negativas menores de 35% de T_{j0} . El control diseñado no es robusto cuando existen problemas de identificación del modelo del proceso dado por el RCTA, en particular cuando la incertidumbre está dada en los parámetros δ y γ . Esto se predijo mediante el cálculo de las ecuaciones de variaciones asociadas al sistema y se corroboró en la simulación del proceso.

El sistema con 1E/1S con su salida dada por $h(x) = x_2 - \bar{x}_2$ presentó una dinámica interna, caracterizada aquí mediante la dinámica cero, que es asintóticamente estable. De esta forma el sistema en lazo cerrado debía presentar un comportamiento estable, esto fue confirmado en la simulación del proceso.

El caso del sistema con 2E/2S se tiene linealidad E/S con un grado relativo dos. Con las salidas dadas por $h_1(x) = x_2 - \bar{x}_2$ y $h_2(x) = x_2 - \bar{x}_2$, el STLC rechaza todas las perturbaciones medibles. De las perturbaciones no medibles el STLC correspondiente rechaza

perturbaciones en la concentración de reactivo que entra al reactor, C_0 . Cabe mencionar que el control del reactor se lleva a cabo en este caso fundamentalmente a costa de la variable controlable F y no F_j , esto compromete las tasas de producción de material en el reactor.

Con respecto a la dinámica cero del sistema con 2E/2S, este mostró un comportamiento asintóticamente estable para los dos pares de salidas considerados. La estabilidad del sistema fué caracterizada en la simulación del proceso, pues la dinámica cero estaba dada por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales cuya solución analítica no era evidente; esto sucedió para ambos pares de salidas.

Se puede observar entonces que desde el punto de vista del proceso que aquí se analizó, el control diseñado por medio de las técnicas de linealización E/S y de rechazo a perturbaciones solo es aplicable para el control del reactor en condiciones muy restringidas para las cuales este control presenta un comportamiento adecuado. Por otro lado, se ha encontrado también [28] que una linealización con respecto a los estados como la presentada en [27] tampoco es aplicable para el diseño de un control del reactor que aquí se estudió. Queda entonces por explorar la aplicación de otro tipo de técnicas como el Control Adaptable [32], el Control Optimo, las técnicas de Filtraie No Lineal para la estimación de estados no medibles, el Control Predictivo [40] y el Control Inferencial [41], que permitan el diseño de un sistema de control del reactor que presente una regulación aceptable tanto ante la presencia de perturbaciones externas, como cuando se presenta incertidumbre en los parámetros del modelo.

Por otro lado, existen las técnicas de la Teoría de Bifurcaciones [42] como alternativa para el análisis de sistemas no lineales que presentan dependencia paramétrica, estas podrían ser aplicadas con el objeto de desarrollar una teoría mas general para el diseño de controles mas eficientes cuando se tienen modelos de sistemas reales, los cuales presentan incertidumbre en los valores de sus parámetros. Es posible que la aplicación de las técnicas antes mencionadas en combinación con las propias del control geométrico, permitan un mayor entendimiento de los sistemas no lineales y que se obtenga como resultado una clase de controladores que sean robustos en condiciones mas amplias que las que aquí se encontraron para el control de un reactor químico de tanque agitado. □

REFERENCIAS

1. J.J. Carberry, " Chemical and Catalytic Reaction Engineering", McGraw-Hill, 1976.
2. O. Levenspiel, " Ingenieria de las reacciones quimicas", Ed. Reverté, 1979.
3. R. Aris, "Introduction to the Analysis of Chemical Reactors", Prentice-Hall, 1965
4. A. Uppal, W.H. Ray and A.B. Poore, " On the Dynamic Behavior of Continuous Stirred-Tank Reactors", Chem. Eng. Sci. Vol. 29, pp. 967-985, 1974.
5. V. Hlavacek and P. Van Rompay, " Current Problems of Multiplicity, Stability and Sensitivity of States in Chemically Reacting Systems", Chem. Eng. Sci. Vol. 36, No. 10, pp. 1587-1597, 1981.
6. R. Heinemann and B. Poore, " Multiplicity, Stability and Oscillatory Dynamics of the Tubular Reactors", Chem. Eng. Sci. Vol. 36, pp. 1411-1419, 1981.
7. V. Balakotaiah and D. Luss, " Analysis of the Multiplicity Patterns of a CSTR", Chem. Eng. Sci. Vol. 13, pp. 111-132, 1981.
8. _____, " Structure of the Steady-State Solutions of Lumped-Parameters Chemically Reacting Systems" Chem. Eng. Sci. Vol. 37, No. 11, pp. 1611-1623, 1982.
9. E. B. Lynch and W. F. Ramirez, " Real Time-Optimal Control of

a Stirred-Tank Reactor using Kalman Filtering for State Estimation ", AICHE J. Vol. 21 , No. 4, pp. 799 , July, 1975.

10. M. Matsubara and K. Onogi, " Stabilized Suboptimal Periodic Control of a Chemical Reactor", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-23, No. 6, pp.1005, Dec. 1978.
11. L.H. Chen and H.C. Chang , " Global Stabilization of a Biological Reactor by Linear Feedback Control", Chem. Eng. Comm. Vol.27, pp.231-254,1984.
12. W.A. Cebuhar and V. Costanza, "Non linear Control of a CSTR" Chem. Eng. Sci. Vol.39, No.12, pp.1715-1722,1984.
13. Jm. Alvarez, E. Gonzalez and Jq. Alvarez, " Estimation and Control Algorithms for Nonlinear Systems Applied to a Continuous Chemical Reactor", Proc. Am. Contr.Conf.,Minneapolis, Minnesota, 1987.
14. Jm. Alvarezy E. Gonzalez , " Aplicación de la teoría de transformaciones en el diseño de un controlador para un reactor químico", Memorias del 2o. Congreso Latinoamericano de Control Automático, Buenos Aires, Rep. de Argentina, 1986.
15. B.G. Lipták, " Controlling and Optimizing Chemical Reactors" Chemical Engineering, May 26, pp. 69-81,1986.
16. C. Kravaris and C.B. Chung, " Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization", AICHE J. Vol.33, No. 4, pp.592-603 , April, 1987.

17. P.S. Buckley, " Techniques of Process Control", John Wiley & Sons, Inc., 1964.
18. D.R. Coughanowr and L.B. Koppel, " Process System Analysis and Control" McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1965.
19. W.L. Luyben " Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers", McGraw-Hill, 1973.
20. J. Levine, " Un Aperçu Élémentaire de la Théorie Moderne des Systemes non Linearies", R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analysis and Control. Vol. 27, No.4, pp. 277-321, 1983.
21. R.W. Brockett, " Nonlinear Systems and Differential Geometry" Proc. IEEE, Vol.64, No. 1, p. 61, January, 1976.
22. J.L. Casti, " Recent Developments and Future Perspectives in Nonlinear Systems Theory", SIAM Review, Vol. 24, No. 3, pp. 301-33, July, 1982.
23. A. Isidori, " Nonlinear Control Systems, An Introduction", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 72 Springer-Verlag, 1985.
24. A. Isidori, " Lectures on Nonlinear Control", Notes prepared for a course at the Carl Gesellschaft (3-6 August, 1987) (Notas del curso "Temas avanzados en sistemas no lineales" , 9-25 de Septiembre de 1987, Depto. Ing. Eléctrica, Sección de Control Automático, CIEA-IPN).
25. R. Hermann and A. Krener, " Nonlinear Controllability and

- Observability", IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. AC-22, No. 5, pp. 728-740, October, 1977.
26. C. Lobry, "Controllabilite des Systemes Non Lineaires", SIAM J. of Control, Vol. 8., No. 4, p. 573, November, 1970.
 27. L.R. Hunt, R. Su and G. Meyer, "Global Transformations of Nonlinear Systems" IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. AC-28, No. 1, p. 24, January, 1983.
 28. J.C. Kantor, "Stability of the State Feedback Transformations for Nonlinear Systems. Some Practical Considerations", Proc. Am. Contr.Conf., Seattle, p. 1014, 1986. (Citado en [16])
 29. C. Kravaris, "On the Internal Stability and Robust Design of Globally Linearizing Control Systems" Proc. Am. Contr. Conf., Minneapolis, Minnesota, 1987.
 30. A. Isidori and C.H. Moog, "On the Nonlinear Equivalent of the Notion of Transmission Zeroes", Proc. IIASA, Conference Model Adaptive Control, Sopron, Hongrie, 1986.
 31. K.A. Hoo and J.C. Kantor, "An Exothermic Continuous Stirred Tank Reactor is Feedback Equivalent to a Linear System", Chem. Eng. Commun. V37, pp.1-10, 1985.
 32. W.R. Cluett, S.L. Shah and D.G. Fisher, "Adaptive Control of a Batch Reactor", Chem. Eng. Commun. V38, pp. 677-78, 1985.
 33. R. Castro, Jm. Alvarez and Jq. Alvarez, "Disturbance Decoupling with Asymptotic Tracking for Nonlinear Systems", Reporte

Interno CINVESTAV-IPN, Depto. Ing. Eléctrica, Sección de Control Automático, Mexico, D.F., 1988.

34. W. Allen Smith. "Elementary Numerical Analysis", Harper & Row, Publishers, 1979.
35. J. Villadsen and M.L. Michelsen, "Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation", Prentice-Hall, Inc., 1978.
36. Z. Kubičková, M. Kubiček and M. Marek, "Fed-batch Operations of Stirred Reactors", Chem. Eng. Sci. V42, No.2, pp. 327-333, 1987.
37. K.F. Lin, "Multiplicity, Stability and Dynamics for Isothermal Autocatalytic Reactions in CSTR", Chem. Eng. Sci. V36, No.9, pp. 1447-1452, 1981.
38. S. Svoronos, R. Aris and G. Stephanopoulos, "On the Behaviour of Two Stirred Tanks in Series", Chem. Eng. Sci. V37, No.3, pp.357-366, 1982.
39. L.S. Pontriaguin, "Ecuaciones diferenciales ordinarias", Colección Ciencia y Técnica, Ed. Aguilar, 1969.
40. Y.K. Yeo and D.C. Williams, "Bilinear Model Predictive Control", Industrial and Engineering Chemistry Research V26, No. 11, Nov. 1987.
41. J.R. Parrish and C.B. Brosilov, "Nonlinear Inferential Control", AIChE Journal V34, No.4, pp.633-644, April, 1988.

42. T.T. Tsotsis, R.C. Sane and T.H. Lindstrom, "Bifurcation Behavior of a Catalytic Reaction Due to a Slowly Varying Parameter."