



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA

---

---

UNIDAD IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

SOLUCIONES HOMOGRAFICAS  
DEL PROBLEMA DE LOS  $n$  CUERPOS  
EN ESPACIOS CURVADOS

Tesis que presenta  
ALMA ROCÍO SAGACETA MEJÍA  
Para obtener el grado de  
**Maestra en Ciencias (Matemáticas)**

Asesor de la tesis:  
DR. ERNESTO PÉREZ CHAVELA

Jurado calificador:  
Presidente: Dr. Carlos Villegas Blas  
Secretario: Dr. Ernesto Pérez Chavela  
Vocal: Dr. Antonio Hernández Garduño

2014



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

SOLUCIONES HOMOGRÁFICAS  
DEL PROBLEMA DE LOS  $n$  CUERPOS  
EN ESPACIOS CURVADOS

Tesis que presenta  
ALMA ROCÍO SAGACETA MEJÍA  
Para obtener el grado de  
Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Asesor de la tesis:  
DR. ERNESTO PÉREZ CHAVELA

Jurado calificador:  
Presidente: Dr. Carlos Villegas Blas  
Secretario: Dr. Ernesto Pérez Chavela  
Vocal: Dr. Antonio Hernández Garduño

2014



*"Birds flying high  
You know how I feel  
Sun in the sky  
You know how I feel  
Reeds driftin' on by  
You know how I feel  
It's a new dawn  
It's a new day  
It's a new life  
For me  
And I'm feeling good..."*

*(Fragmento de la canción  
"Feeling Good" versión de Muse)*



## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo representa la culminación de mis estudios de maestría, por lo que me gustaría agradecer a todas aquellas personas con quienes compartí todo este proceso:

Agradezco de manera especial al **Dr. Ernesto Pérez Chavela** por guiarme durante todo el trabajo de tesis; en especial por su orientación, apoyo, confianza y paciencia en mí para desarrollar y concluir este trabajo de tesis.

A mis sinodales: Dr. Florin Diacu, Dr. Antonio Hernández Garduño y Dr. Carlos Villegas por su tiempo y sus comentarios para mejorar este trabajo.

A mi familia por todo el apoyo desinteresado que me han brindado durante toda mi vida. Por estar siempre en mis metas pero sobre todo en mis fracasos.

Agradezco a Máx y Julián, mis mejores amigos, sin ustedes y sin su apoyo probablemente la dirección de mi vida sería totalmente distinta.

A mis profesores Dr. Alfredo Sandoval, Dra. Ana Laura García y Dr. Luis Franco por todo el apoyo que me dieron fuera de las aulas. Tengo una gran admiración y espero algún día llegar a ser como ustedes.

A mis amigos con quienes compartí penas, alegrías, locuras, tristezas dentro y fuera de la UAM.

A las personas que ya no se encuentran en mi vida, pero que fueron una parte fundamental para mi crecimiento en lo personal y en lo académico.

Agradezco el apoyo de CONACYT por la beca otorgada a lo largo del programa de maestría. Número de becario 386875



# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares y las ecuaciones de movimiento</b>	<b>5</b>
1.1. Geometría Diferencial . . . . .	5
1.2. Distancias . . . . .	9
1.3. Ecuaciones de movimiento . . . . .	13
1.3.1. Fórmula de Euler . . . . .	15
1.3.2. Las ecuaciones de movimiento . . . . .	17
1.3.3. Formulación Hamiltoniana . . . . .	20
1.3.4. Primeras integrales . . . . .	21
1.3.5. Singularidades . . . . .	23
1.4. Equilibrios relativos y soluciones homográficas . . . . .	26
<b>2. Equilibrios relativos en <math>\mathbb{S}_K^2</math></b>	<b>29</b>
2.1. Equilibrios relativos Lagrangianos . . . . .	36
2.2. Equilibrios relativos Eulerianos . . . . .	43
<b>3. Soluciones homográficas en <math>\mathbb{S}_K^2</math></b>	<b>47</b>
3.1. Existencia y unicidad de las soluciones Lagrangianas . . . . .	48
3.2. Órbitas Lagrangianas . . . . .	51
3.2.1. Clasificación de las soluciones Lagrangianas . . . . .	55
3.3. Existencia y unicidad de las soluciones Eulerianas . . . . .	62
3.4. Órbitas Eulerianas . . . . .	65
3.4.1. Clasificación de las soluciones Eulerianas . . . . .	67

<b>4. Equilibrios relativos en <math>\mathbb{H}_K^2</math></b>	<b>71</b>
4.1. Equilibrios relativos hiperbólicos de tipo elíptico . . . . .	73
4.1.1. Equilibrios relativos elípticos Lagrangianos . . . . .	77
4.1.2. Equilibrios relativos elípticos Eulerianos . . . . .	81
4.2. Equilibrios relativos hiperbólicos . . . . .	82
4.3. Equilibrios relativos parabólicos . . . . .	84
<b>5. Soluciones homográficas en <math>\mathbb{H}_K^2</math></b>	<b>87</b>
5.1. Soluciones homográficas elípticas . . . . .	88
5.1.1. Órbitas Lagrangianas . . . . .	88
5.1.2. Órbitas Eulerianas . . . . .	99
5.2. Soluciones homográficas hiperbólicas . . . . .	105
<b>6. Modelo Intrínseco para superficies con curvatura <math>K &gt; 0</math></b>	<b>109</b>
6.1. Proyección Estereográfica . . . . .	109
6.2. Singularidades en el espacio $M_K^2$ . . . . .	113
6.3. Ecuaciones de movimiento . . . . .	115
6.4. Equilibrios relativos en $M_K^2$ . . . . .	119
6.5. Equilibrios relativos para $n = 2$ . . . . .	126
6.5.1. Dos masas en el mismo círculo. . . . .	127
6.5.2. Dos masas en distintos círculos . . . . .	130
6.6. Equilibrios relativos para $n = 3$ . . . . .	133
6.6.1. Equilibrios relativos Eulerianos. . . . .	135
6.6.2. Equilibrios relativos Lagrangianos . . . . .	141
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>145</b>
<b>A. Equivalencia de los modelos <math>S_K^2</math> y <math>M_K^2</math></b>	<b>147</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Ejemplos de conjuntos conexos y/o simplemente conexos . . . . .	7
1.2. Distancia entre dos puntos de la esfera . . . . .	10
1.3. Hiperboloide de dos hojas . . . . .	10
1.4. Singularidades en la esfera . . . . .	24
1.5. Singularidad en el hiperboloide . . . . .	25
2.1. Ejemplo de un punto fijo . . . . .	31
2.2. Etiquetado para el polígono regular $n = 5$ . . . . .	33
2.3. Etiquetado para el polígono regular $n = 6$ . . . . .	35
2.4. Equilibrios relativos Lagrangianos . . . . .	36
2.5. Relación de $\omega$ y los equilibrios relativos Lagrangianos . . . . .	38
2.6. Soluciones Eulerianas . . . . .	44
2.7. Relación de $\omega$ y los equilibrios relativos Eulerianos . . . . .	45
3.1. Gráfica de un polinomio con tres raíces reales positivas . . . . .	54
3.2. Puntos Fijos para las soluciones Lagrangianas homográficas . . . . .	55
3.3. Ceroclinas de las soluciones Lagrangianas con un punto fijo. . . . .	58
3.4. Espacio fase de las soluciones Lagrangianas con un punto fijo . . . . .	59
3.5. Ceroclinas de las soluciones Lagrangianas para dos puntos fijos. . . . .	60
3.6. Espacio Fase de las soluciones Lagrangianas homográficas . . . . .	61
3.7. Ceroclinas de las soluciones Eulerianas. . . . .	69
3.8. Espacio Fase de las soluciones Eulerianas homográficas . . . . .	70
4.1. Relación de $\omega$ y los equilibrios relativos elípticos . . . . .	78
5.1. Gráfica de las funciones $g(r)$ , $g_1(r)$ y $g_2(r, \nu)$ . . . . .	94
5.2. Espacio fase del sistema con un punto fijo . . . . .	95
5.3. Espacio fase del sistema con dos puntos fijos . . . . .	98

5.4.	Espacio fase del sistema sin puntos fijos . . . . .	102
5.5.	Espacio fase del sistema con dos puntos fijos . . . . .	103
6.1.	Proyección Estereográfica . . . . .	110
6.2.	Singularidad $\Delta_{ij}^+$ en el espacio $M_{\mathbf{K}}^2$ . . . . .	114
6.3.	Singularidad $\Delta_{ij}^-$ en el espacio $M_{\mathbf{K}}^2$ . . . . .	114
6.4.	Representación del problema de dos cuerpos en $M_{\mathbf{K}}^2$ y en $S_{\mathbf{K}}^2$ . . . . .	126
6.5.	Equilibrios relativos en el hemisferio Norte y masas iguales . . . . .	129
6.6.	Equilibrios relativos en el hemisferio Norte y masas iguales . . . . .	129
6.7.	Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas iguales . . . . .	133
6.8.	Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas distintas . . . . .	134
6.9.	Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas distintas . . . . .	134
6.10.	Equilibrios relativos Eulerianos en el hemisferio Sur . . . . .	136
6.11.	Gráfica de las funciones $f_2(x)$ y $f_3(x)$ . . . . .	139
6.12.	Gráfica de las funciones $g_2(x)$ y $g_3(x)$ . . . . .	140
6.13.	Equilibrios relativos Eulerianos con masas distintas . . . . .	141
6.14.	Equilibrios relativos Lagrangianos . . . . .	142

## INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad, se han hecho observaciones al movimiento de los planetas para determinar el comportamiento de los cuerpos celestes. La Mecánica Celeste se encarga de estudiar el movimiento de los cuerpos celestes bajo las leyes físicas, el problema más sencillo de esta área es el problema de Kepler o problema de los dos cuerpos.

El problema de los  $n$  cuerpos consiste en encontrar la trayectoria de varios cuerpos que se mueven sujetos a las fuerzas que ejercen entre sí. La primera formulación matemática apareció en el año de 1687 con la obra de Issac Newton titulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [48], donde estudió el movimiento de la luna y dió un modelo para la dinámica de los cuerpos celestes bajo la ley de gravitación.

En 1764, Leonhard Euler publica un trabajo sobre el problema de los tres cuerpos, en éste Euler demuestra que si los tres cuerpos están inicialmente en una línea recta, de tal forma que la razón de sus distancias satisfagan una fórmula que depende de las masas con velocidades iniciales elegidas adecuadamente, entonces los cuerpos se moverán periódicamente sobre una elipse. Los cuerpos siempre se mantendrán en línea recta.

Años después, Lagrange descubre una nueva familia de órbitas periódicas, donde los cuerpos están posicionados sobre un triángulo equilátero para todo tiempo y con velocidades iniciales dadas adecuadamente. Cada uno de los cuerpos se mueve en una órbita periódica.

En 1835, Lobachevsky propuso estudiar el problema de Kepler en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  definiendo una fuerza proporcional al inverso del área de la esfera con radio igual a la distancia entre los dos cuerpos [46], de manera independiente Bolyai trabajo con la misma idea. La importancia de sus estudios fue la conexión que hicieron entre la geometría y las leyes físicas.

Gracias a estos descubrimientos, en 1860 Paul Joseph Serret extendió la fuerza gravitacional a la esfera  $\mathbb{S}^2$  y resolvió el problema de Kepler en dicha superficie [57]. Aproximadamente años después Ernst Schering hizo una revisión de la ley de gravitación de Lobachevsky's, quien obtuvo una expresión analítica para el potencial que usaremos en este trabajo, el potencial cotangente [55].

En 1873, Rudolph Lipschitz trabajó el problema en  $\mathbb{S}^3$  sin embargo usó un potencial proporcional a  $1/\sin \frac{r}{R}$ , donde  $r$  es la distancia entre los cuerpos y  $R$  es el radio de la curvatura [45]. Lipschitz obtuvo una solución general en términos de funciones elípticas [44].

Tiempo después, en 1902 Heinrich Liebmann mostró que las órbitas para el problema de Kepler son cónicas en los espacios  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$ , además generalizó las tres leyes de Kepler para superficies con curvatura  $\mathbf{K} \neq 0$ . Un año después, Liebmann probó que el teorema de Bertrand para  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2$ , dicho teorema es de gran importancia ya que nos permite hacer uso del potencial cotangente como una extensión del potencial gravitacional a superficies con curvatura distinta de cero. Lamentablemente con el descubrimiento de la relatividad se discontinuó por décadas el estudio del problema curvado de los  $n$  cuerpos hasta que José Cariñena, Manuel Rañada y Mariano Santander retomaron el estudio en superficies curvadas [8, 9]. Finalmente las ecuaciones de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  constante fueron obtenidas por Florin Diacu, Ernesto Pérez Chavela y Manuel Santoprete [26], estudiaron los equilibrios relativos y soluciones homográficas en las superficies  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2$ .

Este trabajo tiene como objetivo estudiar, entender y reproducir los resultados obtenidos para el problema de los tres cuerpos en superficies curvadas usando el potencial cotangente [22, 25, 52].

El estudio del problema de los  $n$  cuerpos en espacios con curvatura constante es equivalente a estudiar el problema en la esfera, para curvatura positiva, o en la hoja superior del hiperboloide para curvatura negativa. El manejo de las ecuaciones de movimiento para hallar la dinámica de los cuerpos en estos espacios es bastante compleja, por lo que imponemos una restricción sobre los cuerpos para encontrar una familia particular de soluciones. Sin embargo, cuando hacemos uso de la proyección estereográfica logramos estudiar de manera general los equilibrios relativos para superficies con curvatura positiva y negativa.

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 1 planteamos el problema de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  constante, introducimos y argumentamos el uso del potencial cotangente. Obtenemos las ecuaciones de movimiento para nuestro problema haciendo uso de la formulación Hamiltoniana. Damos las primeras integrales y analizamos las singularidades de las ecuaciones de

movimiento en las superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  y  $\mathbf{K} < 0$ . Por último se da la definición de los equilibrios relativos y las soluciones homográficas para cualquier superficie.

En los capítulos 2 y 4 estudiamos una familia particular de equilibrios relativos para el problema de los  $n$  cuerpos en superficies curvadas, para  $\mathbf{K} > 0$  y  $\mathbf{K} < 0$  respectivamente. Demostramos resultados importantes para la existencia equilibrios relativos Eulerianos y Lagrangianos.

En los capítulos 3 y 5 analizamos únicamente el problema de los tres cuerpos. En estos capítulos obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales que generan una familia particular de soluciones homográficas y damos una clasificación de los mismos para  $\mathbf{K} > 0$  y  $\mathbf{K} < 0$  respectivamente.

Finalmente en el capítulo 6 estudiamos los equilibrios relativos en el modelo intrínseco haciendo uso de la proyección estereográfica. Esto nos permite encontrar todas las familias de equilibrios relativos en superficies con curvatura positiva.



# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES Y LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En este capítulo definiremos lo qué es una superficie conexa y simplemente conexa con curvatura  $\mathbf{K}$  constante y mencionaremos varias de sus propiedades junto con algunos teoremas de Geometría Diferencial que resultarán útiles al trabajar con este tipo de superficies.

También definiremos el potencial cotangente para construir las ecuaciones de movimiento del problema de los  $n$  cuerpos restringido a superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  constante. Daremos su formulación hamiltoniana, sus primeras integrales y analizaremos las singularidades del sistema.

### 1.1. Geometría Diferencial

Para el problema que se plantea en este trabajo, tenemos  $n$  cuerpos en una superficie conexa y simplemente conexa con curvatura constante  $\mathbf{K}$  y, puesto que necesitamos la diferenciabilidad en todos los puntos de la superficie, trabajaremos con superficies regulares.

Es por esto que partiremos de la definición de *superficie regular*. Utilizaremos la terminología que viene en libro de Do Carmo [10].

**Definición 1.** *Un subconjunto no vacío  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para todo punto  $p$  de  $S$  existen un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , un entorno  $V$  de  $p$  en  $S$  (con la topología relativa de  $S \subset \mathbb{R}^3$ ) y una aplicación  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tales que*

1.  $X(U) = V$  es diferenciable en el sentido ordinario,
2.  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un homeomorfismo y
3. para todo  $q \in U$ , la diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

Como hemos venido mencionando, las superficies con las que trabajaremos son *conexas* y *simplemente conexas*. Para aclarar estos conceptos necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.** Un espacio  $X$  es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos  $U, V \subset X$  tales que:

1.  $U \neq \emptyset$  y  $V \neq \emptyset$ ,
2.  $U \cap V = \emptyset$ ,
3.  $U \cup V = X$ .

Un espacio  $X$  es llamado *conexo* si no es *disconexo* [65], mientras que una superficie es llamada *simplemente conexa* si toda curva cerrada en la superficie puede contraerse a un punto sin salir de ella.

Es fácil ver que la conexidad y la conexidad simple no son lo mismo, la conexidad simple implica conexidad pero no viceversa, en la Figura 1.1 podemos ver algunos ejemplos de superficies conexas y simplemente conexas.

Otra definición que usaremos en el presente trabajo es la de espacio tangente.

**Definición 3.** El espacio tangente a un punto  $p$  de una superficie  $S$ , denotado por  $T_p S$ , es el conjunto de vectores tangentes al punto  $p$  de todas las curvas en  $S$  que pasan por  $p$ .

Notemos que el espacio tangente a la superficie  $\mathbb{K}$  es un espacio vectorial de dimensión dos. Como las superficies que ocupamos en este trabajo son curvadas, nos es de primer interés definir qué es una *curva parametrizada diferenciable*.

**Definición 4.** Una *curva parametrizada diferenciable* es una aplicación diferenciable  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Además diremos que es *regular* si  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Sea  $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización de una superficie regular  $S$ . Si  $\gamma(t) = \Gamma(u(t), v(t))$  es una curva en una superficie parametrizada  $\Gamma$ , la *longitud de arco* partiendo de un punto  $\gamma(t_0)$  hasta  $\gamma(t)$  está dada por

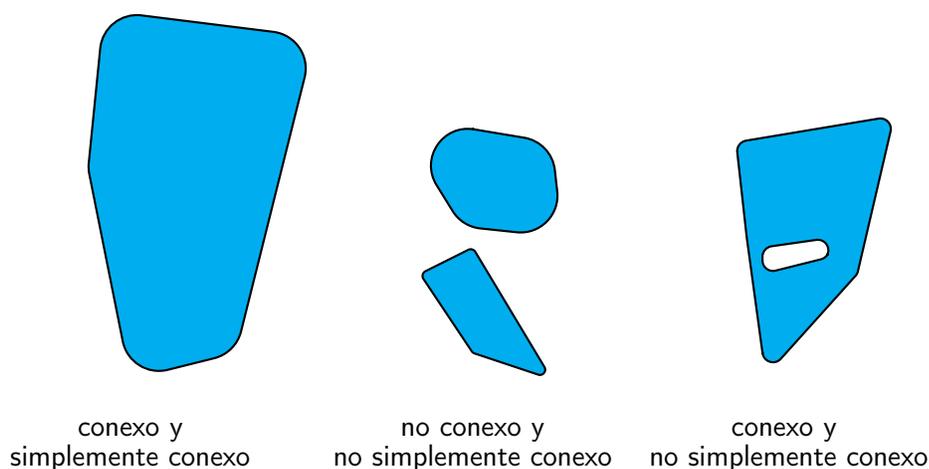


Figura 1.1: Ejemplos de conjuntos conexos y/o simplemente conexos

$$s = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Por la regla de la cadena, tenemos que  $\gamma' = \Gamma_u u' + \Gamma_v v'$ . Entonces

$$\|\gamma'\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \tag{1.1}$$

donde

$$E = \|\Gamma_u\|^2, \quad F = \Gamma_u \cdot \Gamma_v, \quad G = \|\Gamma_v\|^2. \tag{1.2}$$

La forma cuadrática definida por la ecuación (1.1) se denomina *Primera Forma Fundamental* de la superficie y a las funciones definidas en (1.2) les denominamos *coeficientes de la Primera Forma Fundamental*.

Dada una parametrización  $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de una superficie regular  $S$ , un *vector normal unitario* a un punto de  $\Gamma(U)$  está dado por

$$\vec{N} = \frac{\Gamma_u \times \Gamma_v}{\|\Gamma_u \times \Gamma_v\|}.$$

La expresión

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

donde

$$e = \vec{N} \cdot \Gamma_{uu}, \quad f = \vec{N} \cdot \Gamma_{uv}, \quad g = \vec{N} \cdot \Gamma_{vv}, \quad (1.3)$$

es llamada *Segunda Forma Fundamental* de  $\Gamma$  y denominamos a las funciones (1.3) como *coeficientes de la Segunda Forma Fundamental*.

Una curva parametrizada  $\gamma$  es llamada *arco-parametrizada* si  $\gamma'(t)$  es un vector unitario para todo  $t \in (a, b)$ . Si  $\gamma(t) = \Gamma(u(t), v(t))$  es una curva arco-parametrizada en una superficie parametrizada  $\Gamma$ , entonces  $\gamma'$  es un vector unitario tangente a  $\Gamma$ . Además, como  $\Gamma'$  es perpendicular al vector normal unitario  $\vec{N}$  de  $\Gamma$ , se sigue que  $\gamma'$  está parametrizado por la longitud de arco. Por otro lado,  $\gamma''$  es perpendicular a  $\gamma'$  y, por lo tanto, tenemos que  $\gamma''$  es una combinación lineal de  $\vec{N}$  y  $\vec{N} \times \gamma'$ . Es decir,

$$\gamma'' = \kappa_n \vec{N} + \kappa_g \vec{N} \times \gamma', \quad (1.4)$$

donde los escalares  $\kappa_n$  y  $\kappa_g$  son conocidos como *curvatura normal* y *curvatura geodésica* de  $\gamma$  respectivamente.

Por la ecuación (1.4), los vectores  $\vec{N}$  y  $\vec{N} \times \gamma'$  son perpendiculares a  $\gamma''$ , por lo cual

$$\kappa_n = \gamma'' \cdot \vec{N}, \quad \kappa_g = \gamma'' \cdot (\vec{N} \times \gamma'),$$

y

$$\kappa^2 = \|\gamma''\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2,$$

de donde se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Si  $\gamma(t) = \Gamma(u(t), v(t))$  es una curva arco-parametrizada sobre una superficie parametrizada  $\Gamma$ , entonces la curvatura normal está dada por

$$\kappa_n = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2.$$

Sean  $F_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  y  $F_{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$  las matrices asociadas a las formas fundamentales, donde  $E, F$  y  $G$  son los coeficientes de la Primera Forma Fundamental, mientras que  $e, f$  y  $g$  son los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental dados por (1.2) y (1.3), respectivamente. Con ayuda de estas matrices definiremos las *curvaturas principales* de una superficie parametrizada.

**Definición 5.** Las curvaturas principales de una superficie parametrizada son las raíces de la ecuación

$$\det(F_{II} - kF_I) = \begin{vmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

y son denotadas por  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ .

Las curvaturas principales  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  nos sirven para calcular la *curvatura gaussiana* de la superficie como se muestra a continuación.

**Definición 6.** Sean  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  las curvaturas principales de una superficie parametrizada. Entonces la curvatura gaussiana de una superficie parametrizada es

$$\mathbf{K} = \kappa_1 \kappa_2.$$

Para efectos de este trabajo nos fijaremos en superficies tales que la curvatura gaussiana es constante. Estas superficies cumplen con el Teorema de Isometría Local o Teorema de Minding [66] que citaremos a continuación.

**Teorema 1 (Minding).** Una superficie diferenciable con curvatura constante  $\mathbf{K}$  es localmente isométrica:

- al plano si  $\mathbf{K} = 0$ ,
- a la esfera si  $\mathbf{K} > 0$ ,
- al hiperboloide si  $\mathbf{K} < 0$ .

## 1.2. Distancias

Por el Teorema de Minding, una superficie  $S$  con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  es isomorfa a la esfera de radio  $R = \mathbf{K}^{-1/2}$ , la cual denotaremos como  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Por otra parte, cuando  $\mathbf{K} < 0$  la superficie es isomorfa al hiperboloide que denotaremos como  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  [50].

Debido a las isometrías que tenemos para  $\mathbf{K} > 0$  y  $\mathbf{K} < 0$ , encontrar la distancia entre cualesquiera dos puntos sobre la superficie es equivalente a encontrar la distancia entre cualesquiera dos puntos sobre la esfera o sobre el hiperboloide, según corresponda.

Para definir las ecuaciones de las superficies necesitamos extender las definiciones de los productos vectoriales usuales. Sean  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  y  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  dos vectores sobre la superficie, definimos su producto interno como

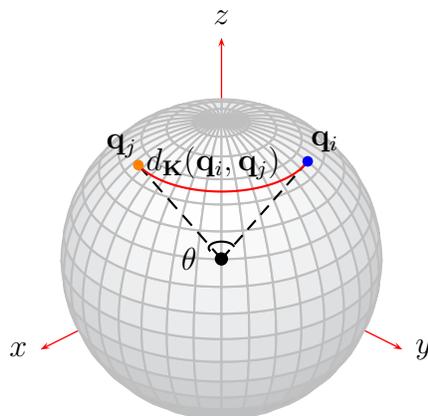


Figura 1.2: Distancia entre dos puntos de la esfera

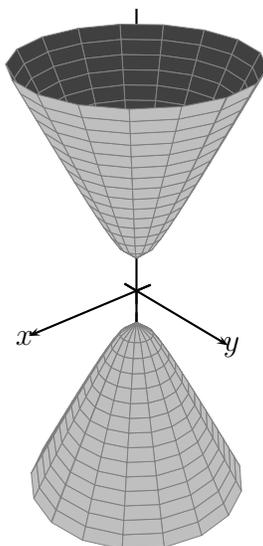


Figura 1.3: Hiperboloide de dos hojas

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + \sigma a_z b_z, \quad (1.6)$$

y su producto cruz como

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, \sigma (a_x b_y - a_y b_x)), \quad (1.7)$$

donde  $\sigma$  es una función de signo

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{para } \mathbf{K} > 0 \\ -1 & \text{para } \mathbf{K} < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Sea  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  un punto sobre la superficie con curvatura  $\mathbf{K}$ , definimos el operador gradiente de la forma

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} = (\partial_{x_i}, \partial_{y_i}, \sigma \partial_{z_i}).$$

Usando la notación anterior, la ecuación de la esfera y del hiperboloide de dos hojas es:

$$\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = x_i^2 + y_i^2 + \sigma z_i^2 = \mathbf{K}^{-1}, \quad \mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = 1. \quad (1.9)$$

Por la simetría del hiperboloide tomaremos la parte superior del hiperboloide, esto es para valores positivos en la variable  $z$ .

Debido a que estamos en superficies curvadas, la distancia no es la misma a la que conocemos. Empezaremos definiendo la distancia en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  o la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Sabemos que la distancia entre dos puntos  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  se encuentra dada por la longitud de arco

$$d_+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = R\theta = \mathbf{K}^{-1/2}\theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por el origen y los puntos  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  (ver Figura 1.2). Usando la definición del producto punto  $\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j = |\mathbf{q}_i| |\mathbf{q}_j| \cos \theta$  y el hecho de ser  $|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_j| = R$ , obtenemos el valor de  $\theta$  en términos de sus coordenadas

$$d_+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \mathbf{K}^{-1/2} \cos^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j), \quad \text{para } \mathbf{K} > 0, \quad (1.10)$$

donde  $d_+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$  es el camino de mínima longitud que une dos puntos de la superficie dada y que llamaremos *línea geodésica*. Por otro lado, para una superficie con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ ,

la distancia entre dos puntos en el hiperboloide se calcula de manera análoga al de la esfera. Por lo tanto, para cualesquiera dos puntos en el hiperboloide la distancia está dada por

$$d_{-}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = (-\mathbf{K})^{-1/2} \cosh^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j), \quad \text{para } \mathbf{K} < 0. \quad (1.11)$$

Finalmente la distancia  $d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$  en superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  es

$$d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \begin{cases} \mathbf{K}^{-1/2} \cos^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) & \text{para } \mathbf{K} > 0 \\ |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| & \text{para } \mathbf{K} = 0 \\ (-\mathbf{K})^{-1/2} \cosh^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) & \text{para } \mathbf{K} < 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Notemos que las distancias (1.10) y (1.11) difieren de la euclidiana debido a las curvaturas de la superficies. Por esta razón las funciones trigonométricas que conocemos en el plano son distintas [8], éstas se definen como

$$\cos_{\mathbf{K}}(x) = \begin{cases} \cos \mathbf{K}^{1/2}x, & \mathbf{K} > 0 \\ \cosh(-\mathbf{K})^{1/2}x, & \mathbf{K} < 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\sin_{\mathbf{K}}(x) = \begin{cases} \mathbf{K}^{-1/2} \sin \mathbf{K}^{1/2}x, & \mathbf{K} > 0 \\ (-\mathbf{K})^{-1/2} \sinh(-\mathbf{K})^{1/2}x, & \mathbf{K} < 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

por lo que la identidad fundamental se convierte en

$$1 = \mathbf{K} \sin_{\mathbf{K}}^2 x + \cos_{\mathbf{K}}^2 x, \quad (1.15)$$

mientras que las funciones tangente y cotangente conservan su definición usual:

$$\tan x = \frac{\sin_{\mathbf{K}} x}{\cos_{\mathbf{K}} x}, \quad \cot x = \frac{\cos_{\mathbf{K}} x}{\sin_{\mathbf{K}} x}.$$

Estas funciones trigonométricas serán de utilidad para calcular la función de fuerza que definiremos en la siguiente sección. A continuación calcularemos las ecuaciones de movimiento del problema de los  $n$  cuerpos para así estudiar su dinámica en las superficies con curvatura  $\mathbf{K}$ .

### 1.3. Ecuaciones de movimiento

Para estudiar el movimientos de los cuerpos en las superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  es conveniente partir desde su versión clásica, es decir en superficies con curvatura  $\mathbf{K} = 0$ . Este problema ha sido ampliamente estudiado [34, 49, 61] y deseamos generalizar toda la teoría a superficies curvadas.

Supongamos que tenemos  $n$  cuerpos con masas puntuales  $m_1, \dots, m_n$  en la superficie, donde sus posiciones son  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$  y deseamos estudiar la dinámica de los cuerpos bajo la ley gravitatoria. Recordemos que para el estudio clásico de este problema se utilizan las ecuaciones de Newton que definen el movimiento de los cuerpos en el espacio, las cuales se expresan en términos de la energía cinética de los cuerpos y del potencial newtoniano. Para nuestro estudio necesitamos extender este potencial clásico a superficies curvadas, permitiéndonos construir las ecuaciones de movimiento en dichas superficies.

La idea de extender el potencial de Newton a otras superficies surge alrededor de 1835 cuando Nikolai Lobachevski propuso estudiar el problema de Kepler en el hiperboloide  $\mathbb{H}^2$  [46]. Autores como Paul Joseph Serret, Ernest Scherin, Rudolph Lipschitz, Wilhelm Killing y Heinrich Liebmann continuaron trabajando en el problema para  $n = 2$  conocido como el *problema de Kepler* sobre  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$ ,  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$  [40, 44, 45, 55, 56, 57]. Desafortunadamente, con el descubrimiento de la Teoría de la Relatividad General se discontinuó la investigación de este problema. En 2006, se retomó el interés de extender el potencial a otras superficies con el trabajo de J. Cariñena, M.F. Rañada y M. Santander [8].

No existe una forma única de extender el potencial gravitatorio a una superficie con curvatura constante  $\mathbf{K}$ , un ejemplo sencillo sería tomar la distancia euclídeana de cualesquiera dos puntos de la superficies curvada para después restringirla a la esfera o al hiperboloide. Pero Shchepetilov en [61] demostró que el potencial cotangente  $U_{\mathbf{K}}$  es el único potencial que cumple las mismas propiedades que el potencial de Newton en  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$ . Por lo tanto, usando el potencial cotangente  $U_{\mathbf{K}}$ , el problema de Kepler escrito en forma Hamiltoniana es una función armónica, es decir satisface la ecuación de Laplace. Este potencial también satisface el *Teorema de Bertrand*, el cual establece que todas las órbitas acotadas del problema de Kepler son periódicas [34].

Además, el potencial cotangente es continuo con respecto a la curvatura, lo cual nos permite recuperar la ley de gravitación universal para  $\mathbf{K} = 0$ . Es por estas propiedades que elegiremos el potencial cotangente para construir las ecuaciones de movimiento en superficies con curvatura constante  $\mathbf{K}$ .

Sea  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$  la configuración del sistema, donde la posición de cada uno de los cuerpos se encuentra dado por los vectores  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Definimos el *potencial cotangente* para el problema de los  $n$  cuerpos como la función  $-U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  dada por

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \cot_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)). \quad (1.16)$$

Como deseamos expresar la función  $\cot_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j))$  en términos de las posiciones de los cuerpos, usaremos las distancias (1.10) y (1.11) para obtener explícitamente las funciones  $\cos_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j))$  y  $\sin_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j))$ . Para la primera se tiene

$$\cos_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)) = \mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j.$$

Estamos definiendo un potencial en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , por lo que necesitamos los términos  $\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} = 1$  y  $\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j} = 1$  en el denominador para obtener la forma Hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento al momento de calcular el gradiente del potencial  $\nabla U_{\mathbf{K}}$ . Debido a esto, reemplazamos el uno del denominador como sigue

$$\cos_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)) = \frac{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}},$$

y usando las ecuaciones (1.13-1.15) calculamos  $\sin_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j))$  en términos de la posición de los cuerpos  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$ . De manera similar a la ecuación anterior, obtenemos

$$\sin_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)) = (\sigma \mathbf{K})^{-1/2} \left[ \sigma - \sigma \left( \frac{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

por lo tanto la función  $\cot_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j))$  es de la forma

$$\cot_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)) = \frac{(\sigma \mathbf{K})^{1/2} \frac{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}}}{\left[ \frac{\sigma(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j) - \sigma(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2}{(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j)} \right]^{1/2}}. \quad (1.17)$$

Es importante enfatizar que usaremos la ecuación anterior para calcular las ecuaciones de movimiento en superficies curvadas. La forma reducida de la expresión anterior es

$$\cot_{\mathbf{K}}(d_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)) = \frac{(\sigma \mathbf{K})^{1/2} (\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{[\sigma (\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i) (\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j) - \sigma (\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{1/2}}.$$

Notemos que los términos  $\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j$  son iguales a uno pero el cálculo del gradiente del potencial difiere si usamos la ecuación (1.17) o la forma reducida. Además, si

los cuerpos están sobre la superficie curvada satisfacen la ecuación anterior, en cambio la ecuación (1.17) nos permite trabajar con los cuerpos que se encuentran en  $\mathbb{R}^3$ . Finalmente, el potencial cotangente es

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{1/2} \frac{(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{\sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}}}{\left[ \frac{\sigma(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j) - \sigma(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2}{(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j)} \right]^{1/2}}, \quad (1.18)$$

que en su forma reducida es

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{1/2} (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{[\sigma - \sigma(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2 (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j)]^{1/2}}. \quad (1.19)$$

Este es el potencial que rige el movimiento de los cuerpos en espacios curvados, lo usaremos para calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange restringidas a la superficie con curvatura  $\mathbf{K}$  y con ellas las ecuaciones de movimiento.

### 1.3.1. Fórmula de Euler

A continuación veremos que el potencial  $U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  es una función homogénea, esto nos servirá para construir las ecuaciones de movimiento. Para ello, usaremos la caracterización de las funciones homogéneas dada por la fórmula de Euler.

**Definición 7.** Una función  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  si, para todo  $\eta \in \mathbb{R} \setminus 0$  y  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ , tenemos

$$F(\eta \mathbf{q}) = \eta^\alpha F(\mathbf{q}).$$

El matemático Leonhard Euler demostró el siguiente teorema respecto a las funciones homogéneas de grado  $\alpha$  [11].

**Teorema 2** (Fórmula de Euler). Decimos que  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una función homogénea de grado  $\alpha$  si y solo si

$$\mathbf{q} \cdot \nabla F(\mathbf{q}) = \alpha F(\mathbf{q}), \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3.$$

En nuestra notación, la fórmula de Euler se reescribe de la siguiente manera

$$\mathbf{q} \odot \tilde{\nabla} F(\mathbf{q}) = \alpha F(\mathbf{q}).$$

Es fácil ver que el potencial cotangente  $U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  satisface la definición de función homogénea de grado cero; es decir

$$U_{\mathbf{K}}(\eta\mathbf{q}) = U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \eta^0 U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}), \quad \forall \eta \neq 0,$$

y por el Teorema 2 tenemos

$$\mathbf{q} \odot \tilde{\nabla} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = 0. \quad (1.20)$$

Además podemos expresar el potencial  $U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  como la suma de los potenciales de cada uno de los cuerpos

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n U_{\mathbf{K}}^i(\mathbf{q}_i),$$

donde el potencial para el  $i$ -ésimo cuerpo es

$$U_{\mathbf{K}}^i(\mathbf{q}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{1/2} \frac{(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{\sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}}}{\sigma \left[ \frac{(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j) - \sigma(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2}{(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i)(\mathbf{K}\mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j)} \right]^{1/2}}, \quad (1.21)$$

y en la que cada  $U_{\mathbf{K}}^i(\mathbf{q}_i)$  también es una función homogénea de grado cero. De manera similar usaremos la fórmula de Euler para obtener

$$\mathbf{q}_i \odot \tilde{\nabla} U_{\mathbf{K}}^i(\mathbf{q}_i) = 0. \quad (1.22)$$

Si igualamos las ecuaciones (1.20) y (1.22), tenemos la siguiente relación

$$\tilde{\nabla} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \tilde{\nabla} U_{\mathbf{K}}^i(\mathbf{q}_i),$$

por lo que

$$\mathbf{q}_i \odot \tilde{\nabla} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = 0,$$

o bien

$$\mathbf{q}_i \odot \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (1.23)$$

Esta última relación se usará en la siguiente subsección y será de gran utilidad para establecer las ecuaciones de movimiento en superficies curvadas.

### 1.3.2. Las ecuaciones de movimiento

Calcularemos las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica de los  $n$  cuerpos sobre la superficie curvada usando la formulación Lagrangiana [2] y haremos uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange con constricciones. El Lagrangiano del sistema se define como

$$L_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}),$$

donde  $U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  es la energía potencial definida en la ecuación (1.19) y  $T_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es la energía cinética dada por

$$T_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^{-1} (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) (\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i). \quad (1.24)$$

De manera análoga al potencial  $U_{\mathbf{K}}$ , necesitamos el término  $\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = 1$  en la definición de  $T_{\mathbf{K}}$  para obtener la formulación Hamiltoniana del problema.

Las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange con constricciones [34] se describen como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{\mathbf{K}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L_{\mathbf{K}}}{\partial \mathbf{q}_i} - \lambda_{\mathbf{K}}^i(t) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.25)$$

donde

$$f_i = \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i - \mathbf{K}^{-1},$$

es la función que mantiene al  $i$ -ésimo cuerpo sobre la superficie y  $\lambda_{\mathbf{K}}^i$  es el multiplicador de Lagrange para dicho cuerpo. Notemos que, si el cuerpo con masa  $m_i$  está sobre la superficie (esto es  $\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = 1$ ), entonces la función de restricción es cero y por lo tanto  $\dot{\mathbf{q}}_i \odot \mathbf{q}_i = 0$ . Calculando el primer término de la ecuación (1.25) y tomando en cuenta las relaciones anteriores tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{\mathbf{K}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = m_i \ddot{\mathbf{q}}_i (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i) + 2m_i (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \mathbf{q}_i) = m_i \ddot{\mathbf{q}}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

En la ecuación anterior, la igualdad  $\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = 1$  no afecta el cálculo de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, es primordial mantener  $\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i$  cuando derivamos con respecto a la variable  $\mathbf{q}_i$ , lo cual nos permitirá hacer simplificaciones. Calculando el segundo término de la ecuación (1.25) obtenemos

$$\frac{\partial L_{\mathbf{K}}}{\partial \mathbf{q}_i} = m_i \mathbf{K} (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i + \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.27)$$

Derivando la función  $f_i$  con respecto a  $\mathbf{q}_i$  y sustituyendo las ecuaciones anteriores en (1.25), resulta que la ecuación (1.25) es de la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i - m_i \mathbf{K} (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i - \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) - 2\lambda_{\mathbf{K}}^i(t) \mathbf{q}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.28)$$

Posteriormente, para obtener las ecuaciones de movimiento para el  $i$ -ésimo cuerpo necesitamos expresar el multiplicador de Lagrange en términos de la posición ( $\mathbf{q}_i$ ) y de la velocidad ( $\dot{\mathbf{q}}_i$ ). Para esto calculamos la segunda derivada de  $f_i$  dada por

$$\ddot{f}_i = 2\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i + 2(\mathbf{q}_i \odot \ddot{\mathbf{q}}_i).$$

Debido a que el cuerpo  $\mathbf{q}_i$  está sobre la superficie se cumple  $\ddot{f}_i = 0$ . Por lo tanto tenemos la siguiente relación

$$\mathbf{q}_i \odot \ddot{\mathbf{q}}_i = -\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (1.29)$$

Por otro lado, calculamos el producto punto de  $\mathbf{q}_i$  con la ecuación (1.28) y, usando el hecho de que  $\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = \mathbf{K}^{-1}$  tenemos

$$m_i (\mathbf{q}_i \odot \ddot{\mathbf{q}}_i) - m_i (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) - \mathbf{q}_i \odot \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{K}^{-1} \lambda_{\mathbf{K}}^i = 0. \quad (1.30)$$

Trabajando con la relación (1.29) en el primer término y la ecuación (1.23) que obtuvimos en la subsección anterior, la expresión (1.30) toma la forma

$$-2m_i (\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) = 2\mathbf{K}^{-1} \lambda_{\mathbf{K}}^i.$$

Hemos obtenido el valor del multiplicador de Lagrange en términos de  $\mathbf{q}_i$  y de  $\dot{\mathbf{q}}_i$

$$\lambda_{\mathbf{K}}^i = -\mathbf{K}m_i(\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i.$$

Finalmente, la ecuación de movimiento (1.28) para el problema de los  $n$  cuerpos en una superficie con curvatura  $\mathbf{K}$  constante es

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) - m_i \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.31)$$

donde el gradiente con respecto al cuerpo  $\mathbf{q}_i$  se obtiene de la ecuación (1.21), y se encuentra dado por

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{1/2} \left( \sigma \mathbf{K} \mathbf{q}_j - \sigma \frac{\mathbf{K}^2 \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j}{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i \right)}{\left[ \sigma - \sigma \left( \frac{(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{\sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i} \sqrt{\mathbf{K} \mathbf{q}_j \odot \mathbf{q}_j}} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.32)$$

o bien, en su forma reducida

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[\sigma - \sigma (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.33)$$

En general se utilizará la forma (1.32) del gradiente, pues con ella podemos hacer uso de la homogeneidad de la función. Cuando esto no sea necesario emplearemos la forma reducida (1.33).

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[\sigma - \sigma (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.34)$$

Así, a través de la formulación Lagrangiana, hemos obtenido el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de los  $n$  cuerpos en superficies curvadas, con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . A continuación obtendremos la formulación Hamiltoniana de las mismas para reducir el orden del sistema de ecuaciones diferenciales.

### 1.3.3. Formulación Hamiltoniana

La formulación Hamiltoniana sigue un enfoque similar a la Lagrangiana. La diferencia consiste en que el Hamiltoniano reduce a primer orden el sistema de ecuaciones (1.34). Las ecuaciones de movimiento se escriben en función de un Hamiltoniano que depende de la posición  $\mathbf{q}$  y del momento  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$  de los cuerpos, y vienen dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= -\frac{\partial H_{\mathbf{K}}}{\partial \mathbf{q}_i}, \\ \dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\partial H_{\mathbf{K}}}{\partial \mathbf{p}_i},\end{aligned}$$

la función Hamiltoniana es la resta de la energía cinética  $T_{\mathbf{K}}$  y la energía potencial  $U_{\mathbf{K}}$  dadas por (1.24) y (1.19), respectivamente:

$$H_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (1.35)$$

El sistema diferencial de primer orden se encuentra dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = m_i^{-1} \mathbf{p}_i, \\ \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[\sigma - \sigma (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - m_i^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{p}_i \odot \mathbf{p}_i) \mathbf{q}_i, \\ \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = \mathbf{K}^{-1}, \quad \mathbf{q}_i \odot \mathbf{p}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.36)$$

Recordemos que el movimiento de los cuerpos se da sobre una superficie con curvatura  $\mathbf{K}$  constante; es decir  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{T}^*(\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2)^n$  donde  $\mathbf{T}^*(\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2)^n$  es el espacio fase de  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  que se define como

$$\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \sigma z^2 = \mathbf{K}^{-1}\}.$$

Además las ecuaciones  $\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_i = \mathbf{K}^{-1}$  y  $\mathbf{q}_i \odot \mathbf{p}_i = 0$  mantienen los cuerpos sobre la superficie y nos muestra que la posición de los vectores y su momento son ortogonales para cada uno de los cuerpos. Notemos el sistema de  $6N$  dimensiones se reduce a  $4N$  dimensiones.

En particular, denotamos las superficies con curvatura positiva como  $\mathbb{M}_{+}^2 = \mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y para superficies con curvatura negativa  $\mathbb{M}_{-}^2 = H_{\mathbf{K}}$ . Dado que  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , las ecuaciones de movimiento en términos de sus coordenadas se pueden escribir como

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial x_i} - \sigma m_i \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) x_i, \\ m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial y_i} - \sigma m_i \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) y_i, \\ m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial z_i} - \sigma m_i \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) z_i, \\ x_i^2 + y_i^2 + \sigma z_i^2 = \mathbf{K}^{-1}, \\ x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + \sigma z_i \dot{z}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1.37)$$

con los respectivos gradientes

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j |\sigma \mathbf{K}|^{3/2} [x_j - \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j) x_i]}{[\sigma - \sigma \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j)]^{3/2}} - \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) x_i, \\ \ddot{y}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j |\sigma \mathbf{K}|^{3/2} [y_j - \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j) y_i]}{[\sigma - \sigma \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j)]^{3/2}} - \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) y_i, \\ \ddot{z}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j |\sigma \mathbf{K}|^{3/2} [z_j - \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j) z_i]}{[\sigma - \sigma \mathbf{K} (x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j)]^{3/2}} - \mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \sigma \dot{z}_i^2) z_i, \\ x_i^2 + y_i^2 + \sigma z_i^2 = \mathbf{K}^{-1}, \quad x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + \sigma z_i \dot{z}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.38)$$

Notemos que el sistema de ecuaciones es bastante complejo, por lo que estamos interesados en encontrar “constantes” o primeras integrales que nos permitan reducir el sistema.

### 1.3.4. Primeras integrales

En esta subsección determinaremos las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento, estas integrales juegan un papel importante en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales ya que nos permiten reducir el orden del sistema de ecuaciones. En el problema de los  $n$  cuerpos en el espacio euclideo ( $\mathbf{K}=0$ ) sabemos que existen diez primeras integrales [68]. Una de las primeras integrales de nuestro problema es la energía del sistema y está dada por el Hamiltoniano.

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h, \quad (1.39)$$

donde  $h$  es una constante de energía. Para comprobar este hecho hacemos el producto punto de las ecuaciones (1.31) con  $\dot{\mathbf{q}}_i$

$$\sum_i^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i = \tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) \odot \dot{\mathbf{q}}_i - \sum_i^n m_i \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{d}{dt} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}(t)), \quad (1.40)$$

integrando el primer término y último término de la ecuación anterior, obtenemos la integral de energía (1.39).

Por otro lado definimos el momento angular como

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{p}_i = \mathbf{c}, \quad (1.41)$$

donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante. La integral anterior se sigue de integrar la ecuación (1.40) formada por el primer término de la ecuación (1.39) y el último de la ecuación (1.41)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i \otimes \mathbf{q}_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_j}{[\sigma - \sigma(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\sigma \mathbf{K})^{3/2} (\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)}{[\sigma - \sigma(\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - m_i \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \right] \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación también se obtiene al realizar el producto cruz de  $\mathbf{q}_i$  con las ecuación de movimiento(1.34). Notemos, en término de las componentes se tienen tres integrales en el momento angular:

$$\sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i) = c_{zz}, \quad (1.42)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{z}_i - \dot{x}_i z_i) = c_{xz}, \quad (1.43)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = c_{xy}. \quad (1.44)$$

Por lo tanto, por las integrales de movimiento la dimensión del espacio fase de nuestro problema se reduce a  $4N - 4$ .

### 1.3.5. Singularidades

En esta subsección analizaremos las singularidades de las ecuaciones de movimiento generadas por el denominador del primer término de la ecuación (1.34). A los ceros en el denominador los llamamos singularidades y estos surgen por la elección del potencial cotangente  $U_{\mathbf{K}}$ . El término que contiene la ecuación (1.21) se indetermina cuando  $(\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2 = 1$ , o bien cuando

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j = 1, \quad \mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j = -1, \quad \text{para algún } i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

o

$$\mathbf{K}(x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j) = 1, \quad \mathbf{K}(x_i x_j + y_i y_j + \sigma z_i z_j) = -1. \quad (1.45)$$

Analizaremos las singularidades de la esfera y del hiperboloide por separado. Sean  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^3$  dos cuerpos sobre la superficie curvada donde  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Para hallar las posiciones que indeterminan las ecuaciones de movimiento en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , debemos encontrar la relación entre  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  usando las ecuaciones (1.45). Tomando la primera restricción  $\mathbf{K}(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = 1$  y el hecho de que  $\mathbf{K}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 1 = \mathbf{K}(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)$  tenemos

$$(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2).$$

La ecuación anterior es un caso especial en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, donde la igualdad se tiene si  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  son proporcionales. Así, existe una constante  $\tau \neq 0$  tal que  $x_i = \tau x_j$ ,  $y_i = \tau y_j$  y  $z_i = \tau z_j$ .

Sustituyendo esto en la ecuación (1.45) y usando el hecho de que  $\mathbf{K}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 1$  hallamos  $\tau = 1$ , teniendo así  $x_i = x_j$ ,  $y_i = y_j$  y  $z_i = z_j$ . Por lo tanto los cuerpos con masas  $m_i$  y  $m_j$  colisionan como se muestra en la Figura 1.4 (a).

Para encontrar la otra singularidad el procedimiento es similar al anterior. Tomando la segunda restricción  $\mathbf{K}(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = -1$  hallamos el valor de  $\tau = -1$ . Las relaciones entre las posiciones de los cuerpos son  $x_i = -x_j$ ,  $y_i = -y_j$  y  $z_i = -z_j$ , y por lo tanto los cuerpos con masas  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  son antipodales como se muestra en la Figura 1.4(b).

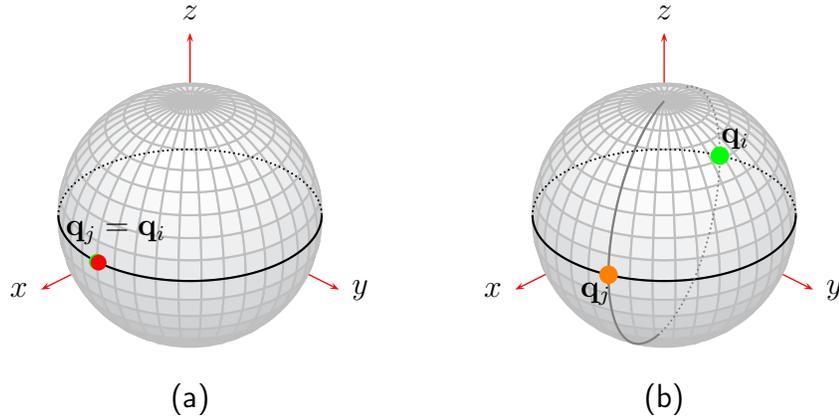


Figura 1.4: Singularidades en la esfera

Hemos obtenido todas las singularidades para la esfera. Ahora, para las superficies con curvatura constante  $\mathbf{K} < 0$  las singularidades del sistema ocurren cuando los cuerpos satisfacen las ecuaciones (1.45). Reescribiéndolas, tenemos

$$x_i x_j + y_i y_j - \mathbf{K}^{-1} = z_i z_j, \quad x_i x_j + y_i y_j + \mathbf{K}^{-1} = z_i z_j. \quad (1.46)$$

Para la primera tenemos que cualesquiera dos cuerpos  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  satisfacen

$$\mathbf{K}(x_i^2 + y_i^2 - z_i^2) = -1, \quad \mathbf{K}(x_j^2 + y_j^2 - z_j^2) = -1.$$

Reformulando las ecuaciones anteriores se sigue que

$$x_i^2 + y_i^2 + \mathbf{K}^{-1} = z_i^2, \quad x_j^2 + y_j^2 + \mathbf{K}^{-1} = z_j^2,$$

y, por lo tanto,

$$(x_i x_j + y_i y_j + \mathbf{K}^{-1})^2 = (x_i^2 + y_i^2 + \mathbf{K}^{-1})(x_j^2 + y_j^2 + \mathbf{K}^{-1}),$$

o bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(x_i - \tau x_j)^2 + (y_i - \tau y_j)^2 = 0.$$

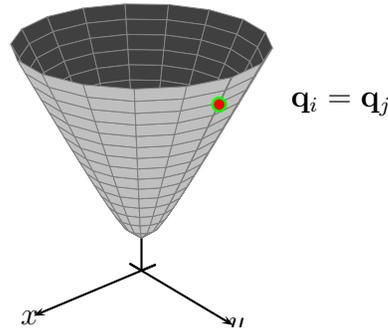


Figura 1.5: Singularidad en el hiperboloide

El valor de  $\tau$  es 1, por lo que las relaciones entre las coordenadas de los cuerpos son  $x_i = x_j$ ,  $y_i = y_j$  y  $z_i = z_j$ . Así, los cuerpos  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$  colisionan en el hiperboloide como se muestra en la Figura 1.5.

Para la segunda restricción (1.46), los cuerpos  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$  satisfacen

$$\mathbf{K}(x_i^2 + y_i^2 - z_i^2) = 1, \quad \mathbf{K}(x_j^2 + y_j^2 - z_j^2) = 1.$$

Reescribiendo, tenemos

$$x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 - \mathbf{K}^{-1}, \quad x_j^2 + y_j^2 = z_j^2 - \mathbf{K}^{-1}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se satisface

$$(x_i x_j + y_i y_j)^2 \leq (x_i^2 + y_i^2)(x_j^2 + y_j^2),$$

o bien,

$$(z_i z_j + \mathbf{K}^{-1})^2 = (z_i^2 + \mathbf{K}^{-1} - (z_j^2 - \mathbf{K}^{-1})),$$

obteniendo finalmente

$$(z_i + z_j)^2 \leq 0.$$

La relación anterior se cumple si y solo si  $z_i = -z_j$ . Pero el valor de las coordenadas  $z_i$  y  $z_j$  es positivo, por lo que con la condición  $x_i x_j + y_i y_j = \mathbf{K}^{-1} + z_i z_j$  no obtenemos

singularidades en el hiperboloide.

En resumen, para configuraciones que involucran colisiones (en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ ) o configuraciones donde los cuerpos son antipodales (solo en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ ), las ecuaciones de movimiento se indeterminan.

En conclusión, obtuvimos las ecuaciones de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos en una superficie con curvatura constante; calculamos sus primeras integrales y las configuraciones donde el potencial  $U_{\mathbf{K}}$  se indetermina. En el siguiente capítulo usaremos estas ecuaciones para estudiar el movimiento de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura constante.

## 1.4. Equilibrios relativos y soluciones homográficas

Ya hemos establecido las ecuaciones de movimiento para superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  constante. El objetivo de este trabajo es estudiar los equilibrios relativos y las soluciones homográficas en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  y  $\mathbf{K} < 0$ . Para ello empezaremos definiendo ambos conceptos.

**Definición 8.** *Un equilibrio relativo es una solución de las ecuaciones de movimiento (1.38) donde la distancia mutua (1.12) entre las masas permanece constante durante todo el movimiento.*

Los equilibrios relativos varían dependiendo del valor de la curvatura de la superficie, por lo que estudiaremos estas soluciones en superficies con curvatura positiva y negativa por separado.

Por otro lado, definiremos las soluciones homográficas para el problema de los  $n$  cuerpos en superficies curvadas como sigue

**Definición 9.** *Una solución homográfica es una solución de las ecuaciones de movimiento (1.38) donde la forma de la configuración nunca cambia para cualquier tiempo  $t$ .*

En la definición anterior es preciso aclarar lo que queremos decir con “la forma de la configuración nunca cambia”. Por ejemplo, para el caso de las soluciones homográficas de Lagrange, la definición anterior implica que la distancia (medida sobre la respectiva línea geodésica que contiene a cualesquiera par de cuerpos) es la misma para todo tiempo  $t$ . Dado que estamos trabajando en espacios con curvatura constante, no necesariamente las configuraciones en cada instante permanecerán congruentes debido a que los ángulos entre las aristas que forman las masas no se mantiene constante.

El significado de la palabra *homográfico* no corresponde al movimiento de los cuerpos en las superficies curvadas. El origen de *homográficas* proviene de la raíz etimológica griega *homos* (igual) y *graphos* (lo que está escrito). Para el caso de curvatura cero, correspondiente al problema clásico newtoniano, esto se ha entendido como que las configuraciones en las soluciones *homográficas* son congruentes para todo tiempo  $t$  [1], [68]. Por esta razón F. Diacu [19] introduce el término de *órbitas rotopulsadoras*, argumentando que con este concepto es claro diferenciar si se está trabajando con las *órbitas homográficas* en superficies con curvatura cero o bien en superficies con curvatura distinta de cero.

A partir de este escrito otros autores como S. Kordlou, P. Tibboel y B. Thorn han utilizado el nombre de *órbitas rotopulsadoras* en varios de sus artículos [19],[20],[63]. Los autores introdujeron este nuevo término “rotopulsadores” para extender el concepto de soluciones *homográficas* en superficies curvadas, es decir que las soluciones admitan expansiones, contracciones y rotaciones en las mismas.

Recordemos que el estudio de este tipo de *órbitas* en espacios curvados es reciente, el cual inició con los autores Diacu F., Pérez-Chavela E. y Santoprete M. en su artículo “The  $N$ -body problem in spaces of constant curvature” [25] y posteriormente continuaron otros estudios usando el término de *órbitas homográficas* [13],[15],[16],[18],[22],[23],[25],[26]. Aunque para las superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  constante distinta de cero el término de soluciones *homográficas* puede no ser el más apropiado para varios autores, nosotros mantendremos este nombre con el objetivo de que los lectores comprendan y reconozcan que estamos extendiendo el estudio de las *órbitas*, que conocemos en el espacio euclideo, sobre las superficies curvadas. Por lo tanto, “nuestras” soluciones *homográficas* y las *soluciones rotopulsadoras* que aparecen en la literatura corresponden exactamente al mismo concepto.

De manera similar a los equilibrios relativos, las soluciones *homográficas* no son necesariamente las mismas para ambas superficies, por lo tanto necesitamos hacer el análisis para superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  y para  $\mathbf{K} < 0$ .



## CAPÍTULO 2

# EQUILIBRIOS RELATIVOS EN $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$

En el capítulo anterior definimos los equilibrios relativos para cualquier superficie, en este capítulo supondremos que los cuerpos están sobre la esfera. En consecuencia para superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$ , los equilibrios son aquellas soluciones del sistema de ecuaciones (1.37) que permanecen invariantes ante cualquier isometría.

Recordemos que una isometría es un mapeo que preserva la distancia entre cualesquiera dos puntos de la superficie. La esfera tiene un grupo de transformaciones tales que preserva la métrica o la distancia, el grupo de rotaciones  $SO(3)$ . Por otro lado, el *Teorema del Eje Principal de Euler* establece que cualquier rotación en la esfera se puede expresar como una rotación alrededor de un única dirección o eje de rotación [3]. Este teorema nos permite fijar un eje de rotación, que sin pérdida de generalidad supondremos que es el eje  $z$ . Por lo que estudiaremos aquellas configuraciones que giran alrededor del eje  $z$ .

Como los cuerpos se pueden localizar en cualquier parte de la esfera, estudiaremos una familia particular de equilibrios relativos, para esto vamos a trabajar primeramente con configuraciones donde restringiremos la posición de los cuerpos. Para las soluciones poligonales estudiaremos aquellas configuraciones donde los cuerpos están en el mismo plano ortogonal al eje de rotación situados en un polígono regular.

Daremos una definición formal de los puntos fijos del sistema y usaremos el hecho de que si la configuración del sistema es un polígono regular y las masas de los cuerpos son iguales, entonces la configuración es un punto fijo. Esto nos permitirá encontrar las condiciones necesarias para la existencia de la familia de equilibrios relativos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

Además, para los equilibrios relativos obtendremos una relación entre las masas y la velocidad angular de los cuerpos. Por último, para  $n = 3$  daremos las condiciones necesarias para la existencia de la familia de soluciones particulares.

Sea  $\{G(A(t))\}$  la familia de todas las rotaciones de  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  compuesta por subgrupos de un parámetro  $SO(3)$ . Si  $A(t)$  es una matriz de rotación, entonces  $A(t)$  es de la forma:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

De acuerdo a la definición 8 y el Teorema del Eje Principal de Euler podemos definir formalmente los equilibrios relativos para las superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$ .

**Definición 10.** *Un equilibrio relativo en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  es una solución  $\mathbf{q}(t)$  de las ecuaciones de movimiento (1.34) invariante bajo el grupo de rotaciones  $G(A(t))$ . Es decir, para  $g(t) \in G(A(t))$ , la función  $w(t) = g(t)\mathbf{q}(t)$  es una solución del sistema de ecuaciones (1.34).*

Como mencionamos anteriormente, estudiaremos una familia particular de equilibrios relativos, donde los cuerpos están en un mismo plano ortogonal al eje de rotación. Así, las soluciones  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  son de la forma

$$x_i = r \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = r \sin(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = z, \quad (2.2)$$

donde  $z$  es una constante,  $\omega$  es la velocidad angular y el ángulo  $\alpha_i$  determina la posición inicial del  $i$ -ésimo cuerpo.

Los puntos fijos son las soluciones más inmediatas del sistema de ecuaciones (1.34) y estamos interesados en saber si dichos puntos son equilibrios relativos.

**Definición 11.** *La solución del sistema (1.36) es un punto fijo si*

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}(t)) = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_i(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Los autores F. Diacu, E. Pérez-Chavela y M. Santoprete encontraron algunas familias de puntos fijos (para mayor detalle ver [25]). A continuación citamos su resultado.

**Teorema 3.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , donde las masas son iguales y el número de cuerpos es impar, supongamos que los cuerpos forman un polígono regular y este, está inscrito en cualquier geodésica de la esfera. Entonces la configuración es un punto fijo.*

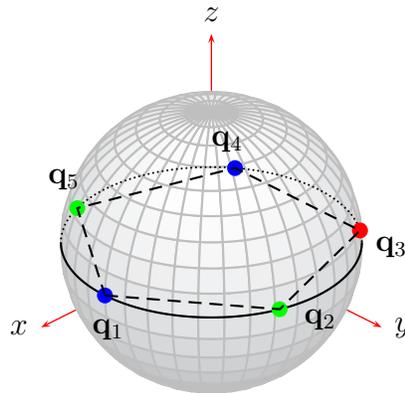


Figura 2.1: El pentágono inscrito en el círculo geodésico es un punto fijo.

En consecuencia, cualquier polígono regular inscrito en una geodésica de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  es un punto fijo del sistema como se puede apreciar en la Figura 2.1 para  $n = 5$ . Del teorema anterior se sigue el siguiente resultado.

**Corolario 1.** *Considere un número impar de cuerpos con masas iguales inscritos en un círculo máximo de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  donde la configuración es un polígono regular, supongamos que la solución generada para estas condiciones iniciales permanece invariante para cualquier tiempo  $t$ . Entonces esta solución satisface  $\nabla_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}(t)) = 0$  con  $i = 1, \dots, n$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

A continuación mostraremos que los puntos fijos sobre las geodésicas de la esfera pueden generar equilibrios relativos.

**Teorema 4.** *Supongamos que para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , donde las masas de los cuerpos son iguales con  $n$  impar, los cuerpos están posicionados en el círculo máximo formando un polígono regular. Entonces el polígono regular es un equilibrio relativo para cualquier velocidad angular  $\omega \neq 0$ .*

*Demostración.*

Sin pérdida de generalidad, supondremos que el polígono regular de  $n$  lados se encuentra en el ecuador (en  $z = 0$ ). Por el Teorema anterior sabemos que el polígono regular con  $n$  impar es un punto fijo. En consecuencia las coordenadas para el  $i$ -ésimo cuerpo  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, 0)$  están dadas por

$$x_i = \mathbf{K}^{-1/2} \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = \mathbf{K}^{-1/2} \sin(\omega t + \alpha_i), \quad (2.4)$$

donde  $\alpha_i = 2i\pi/n$ . Como el polígono regular de  $n$  lados es un punto fijo se sigue que  $\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}(t)) = 0$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Usando la ecuación anterior y la solución  $\mathbf{q}$  en el tiempo  $t = 0$  con  $\omega \neq 0$  concluimos que las ecuaciones de movimiento (1.37) se reducen a

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = -\mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) x_i, & i = 1, \dots, n, \\ \ddot{y}_i = -\mathbf{K} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) y_i, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.5)$$

Calculando la primera y segunda derivada de (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\mathbf{K}^{-1/2} \omega \sin(\omega t + \alpha_i), & \dot{y}_i &= \mathbf{K}^{-1/2} \omega \cos(\omega t + \alpha_i), \\ \ddot{x}_i &= -\mathbf{K}^{-1/2} \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i), & \ddot{y}_i &= -\mathbf{K}^{-1/2} \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_i). \end{aligned}$$

Además, observemos que

$$\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 = \mathbf{K}^{-1} \omega^2.$$

Reescribiendo las segundas derivadas de las coordenadas  $x_i, y_i$  y usando la ecuación anterior se sigue que las soluciones (2.4) satisfacen el sistema de ecuaciones de movimiento (2.5).

Así, hemos mostrado que la configuración  $\mathbf{q}$  dada por (2.4) satisface las ecuaciones de movimiento (1.37), esto significa que es un equilibrio relativo. ■

Ya demostramos que si los cuerpos forman un polígono regular con  $n$  impar en el círculo máximo y además las masas de los cuerpos son iguales, entonces al rotar la configuración obtenemos un equilibrio relativo. El siguiente resultado nos muestra la relación entre los equilibrios relativos y la velocidad angular de los cuerpos  $\omega$ .

**Teorema 5.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos con masas iguales en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que los cuerpos están en los vértices del polígono regular de  $n$  lados ortogonal al eje  $z$ . Entonces, existen un valor positivo y un valor negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos, exceptuando el caso para  $n$  par en  $z = 0$ .*

*Demostración.*

La demostración se dividirá en dos casos: (i) cuando  $n$  es impar y (ii) cuando  $n$  es par.

**Caso (i)**

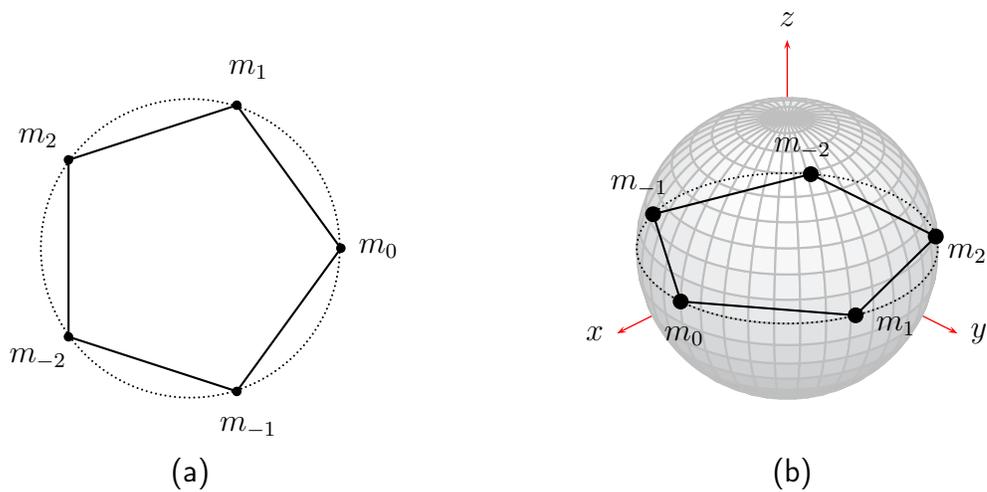


Figura 2.2: Un ejemplo del etiquetado para el polígono regular  $n = 5$ .

Para simplificar la notación, etiquetaremos a cada uno de los cuerpos como  $\mathbf{q}_i$ , donde  $i = -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s-1, s$ . En la Figura 2.2 (a) se muestra un ejemplo del etiquetado para el pentágono.

Además, los cuerpos están en los vértices de un polígono regular de  $n$  lados, por lo que el valor de  $\alpha_i$  es

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{2s+1}i, \quad \forall i = -s, \dots, s.$$

Por hipótesis, las masas de los  $n$  cuerpos son iguales y, sin pérdida de generalidad, haremos  $\mathbf{K} = 1$ . Sustituimos en las ecuaciones de movimiento (1.38), con  $2s+1 = n$ , una solución de la forma  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , donde

$$x_i = r_i \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = r_i \sin(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = \pm(1 - r_i^2)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Consideremos el cuerpo de la posición  $\mathbf{q}_0$ . Realizando un poco de álgebra, obtenemos la ecuación correspondiente a la coordenada  $z_0$ .

$$\sum_{j=-s, j \neq 0}^s \frac{m(z - k_{0j}z)}{(1 - k_{0j}^2)^{3/2}} - r^2 \omega^2 z = 0,$$

donde  $k_{0j} = x_0x_j + y_0y_j + z_0z_j = \cos \alpha_j - z^2 \cos \alpha_j + z^2$ . Para evitar perdernos en los cálculos de las ecuaciones, supondremos que  $\mathbf{K} = 1$ . Usando la paridad de la función coseno  $k_{0(-j)} = k_{0j}$  y el hecho de que  $r^2 + z^2 = 1$ , la ecuación anterior es

$$\sum_{j=1}^s \frac{2(1 - \cos \alpha_j)}{(1 - k_{0j}^2)^{3/2}} = \frac{\omega^2}{m}. \quad (2.7)$$

Para obtener las ecuaciones correspondientes a  $x_0$  y  $y_0$  se realiza el mismo procedimiento. Sustituyendo (2.7) en la primera ecuación del sistema (1.38), se sigue que

$$(r^2 - 1)\omega^2 \cos \omega t = \sum_{j=-s, j \neq 0}^s \frac{m[\cos(\omega t + \alpha_j) - k_{0j} \cos \omega t]}{(1 - k_{0j}^2)^{3/2}}.$$

Haciendo algunos cálculos sencillos, concluimos que

$$\frac{\omega^2}{m} = \sum_{j=1}^s \frac{2}{(1 - \cos \alpha_j)^{1/2} (1 - z^2)^{3/2} [2 - (1 - \cos \alpha_j)(1 - z^2)]^{3/2}}.$$

Hemos demostrado la ida, ahora probemos el regreso. Notemos que el lado derecho de la ecuación anterior es positivo para cualquier valor fijo de  $z \in (-1, 1)$ . Por lo tanto, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que satisfacen la ecuación anterior.

En conclusión, el polígono regular con un número impar de cuerpos es un equilibrio relativo.

### Caso (ii)

De manera similar al caso anterior, etiquetaremos los cuerpos como  $\mathbf{q}_i$  donde  $i = -s + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s - 1, s$ . Un ejemplo del etiquetado para el hexágono se muestra en la Figura 2.3 (b).

La posición de los cuerpos en un polígono regular con  $n$  par está determinado por el valor de

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{s}i, \quad \forall i = -s + 1, \dots, s - 1, s.$$

Sin pérdida de generalidad, sustituimos una solución de la forma (2.6) en las ecuaciones de movimiento (1.38), donde  $s = n/2$ . Análogamente al caso impar, usaremos las ecuaciones correspondientes para el cuerpo  $\mathbf{q}_0$ .

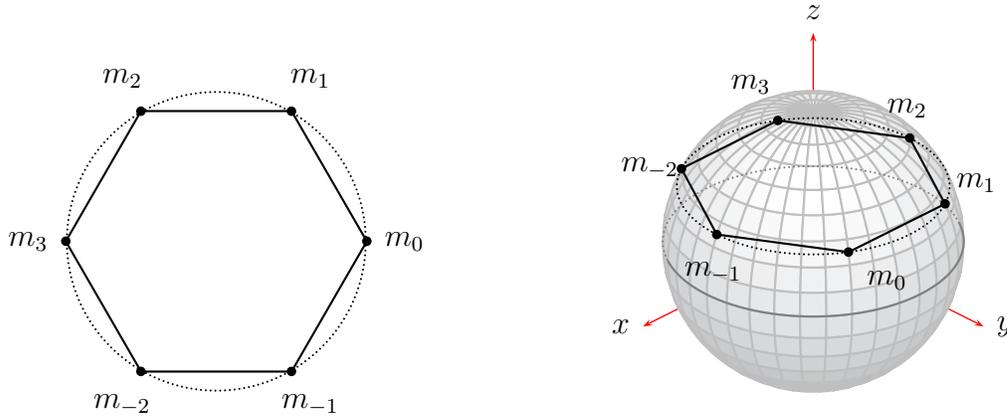


Figura 2.3: Un ejemplo del etiquetado para el polígono regular  $n = 6$ ,

De nuevo, utilizaremos la paridad de la función coseno para obtener la ecuación correspondiente a la coordenada  $z_0$ :

$$\sum_{j=1}^{s-1} \frac{2(1 - \cos \alpha_j)}{(1 - k_{0j}^2)^{3/2}} + \frac{2}{(1 - k_{0s}^2)^{3/2}} = \frac{\omega^2}{m}.$$

Haciendo un poco de álgebra y el hecho de que  $\sin \alpha_j = -\sin \alpha_{-j}$ , obtenemos la ecuación correspondiente a la coordenada  $x_0$ , con esta ecuación tenemos la relación entre la velocidad angular y la masa.

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{m} &= \frac{1}{4z^2|z|(1 - z^2)^{3/2}} \\ &+ \sum_{j=1}^{s-1} \frac{2}{(1 - \cos \alpha_j)^{1/2}(1 - z^2)^{3/2}[2 - (1 - \cos \alpha_j)(1 - z^2)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Notemos que el lado izquierdo de la ecuación anterior es positivo para cualquier valor de  $z \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ . Así, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que satisfacen la ecuación anterior.

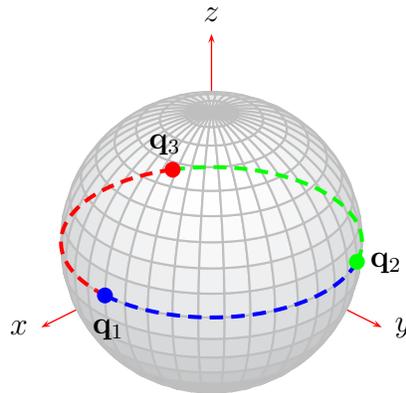


Figura 2.4: Equilibrios relativos Lagrangianos

Recordemos que estamos quitando el polígono regular en el ecuador, debido a que los puntos del polígono son antipodales por ser  $n$  par y generan singularidades en las ecuaciones de movimiento.

Así, hemos mostrado que el polígono regular de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  es un equilibrio relativo, excepto para  $n$  par en el ecuador. ■

A continuación estudiaremos dos tipos de soluciones para tres cuerpos en la esfera, las soluciones Lagrangianas y las soluciones Eulerianas.

## 2.1. Equilibrios relativos Lagrangianos

En 1772, en su libro *“Essay on the three-body problem”*, el matemático y físico francés Joseph Lagrange estudió el problema de los tres cuerpos con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  donde cada uno está en los vértices de un triángulo equilátero. En un principio su trabajo fue teórico, hasta que en el año de 1906, el astrónomo alemán Max Wolf descubrió una configuración triangular que satisface las condiciones que Lagrange encontró. Una prueba de ello, son los asteroides 588 y el 617 y, junto con el planeta Tierra y el Sol forman un triángulo equilátero respectivamente. Estos trabajos se realizaron en el espacio euclideo, por lo que en esta sección buscaremos este tipo de configuraciones y las condiciones para la existencia de equilibrios relativos en superficies con curvatura constante.

Para el estudio de la familia de equilibrios relativos Lagrangianos, reescribiremos las ecuaciones de movimiento (1.34) para tres cuerpos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j \mathbf{K}^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

En esta y la siguiente sección estudiaremos las soluciones particulares de equilibrios relativos para  $n = 3$ , es decir para el problema de los tres cuerpos sobre  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Comenzaremos con el caso poligonal para  $n = 3$ , o bien para las soluciones Lagrangianas que definimos a continuación.

**Definición 12.** Una solución  $\mathbf{q}(t)$  de las ecuaciones (2.8) es una solución Lagrangiana si las distancias geodésicas entre los tres cuerpos son iguales para cualquier tiempo  $t$ .

Por la definición 10, se sigue la definición formal para los equilibrios relativos Lagrangianos en la esfera.

**Definición 13.** Una solución Lagrangiana de las ecuaciones de movimiento (2.8) se le denomina equilibrio relativo Lagrangiano si la solución es invariante bajo la familia de rotaciones  $\{G(A(t))\}$ , donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Recordemos que en este capítulo estamos estudiando una familia particular de configuraciones, los cuerpos se encuentran en el mismo plano ortogonal al eje  $z$  (ver Figura 2.4). Debido a esto, los cuerpos de las soluciones Lagrangianas para el problema curvado de los tres cuerpos están posicionados en los vértices de un triángulo equilátero. La configuración del sistema se encuentra dado por:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \quad \text{con } \mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \omega t, & y_1 &= r_1 \sin \omega t, & z_1 &= z, \\ x_2 &= r_2 \cos(\omega t + 2\pi/3), & y_2 &= r_2 \sin(\omega t + 2\pi/3), & z_2 &= z, \\ x_3 &= r_3 \cos(\omega t + 4\pi/3), & y_3 &= r_3 \sin(\omega t + 4\pi/3), & z_3 &= z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $z = \sqrt{\mathbf{K}^{-1} - r^2}$ , la velocidad angular  $\omega$  y el radio  $r := r_1 = r_2 = r_3$  no varían con respecto al tiempo. El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema 5 para tres cuerpos.

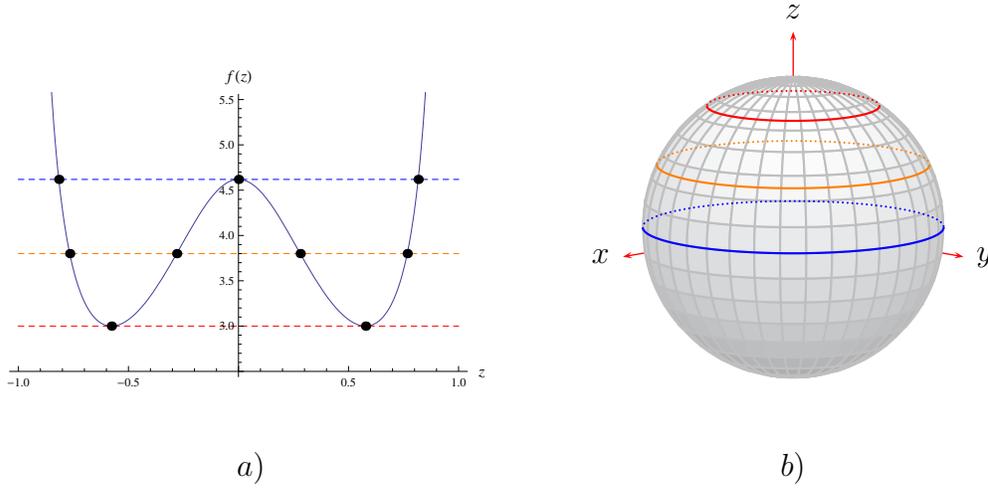


Figura 2.5: a) Gráfica de la función  $f(z)$  con  $\mathbf{K} = 1$ , b) equilibrios relativos correspondientes a cada una de las líneas.

**Corolario 2.** *Consideremos el problema de los tres cuerpos en la esfera con masas iguales  $m := m_1 = m_2 = m_3$ . Entonces, para cualquier valor de  $z \in (-\mathbf{K}^{-1/2}, \mathbf{K}^{-1/2})$  existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos Lagrangianos. Además, si  $\omega^2/m \in (8\mathbf{K}^{3/2}/\sqrt{3}, \infty) \cup \{3\mathbf{K}^{3/2}\}$ , existen dos valores de  $z$  que generan equilibrios relativos Lagrangianos; si  $\omega^2/m = 8\mathbf{K}^{3/2}/\sqrt{3}$ , existen tres valores de  $z$  que generan equilibrios relativos Lagrangianos y finalmente si  $\omega^2/m \in (3\mathbf{K}^{3/2}, 8\mathbf{K}^{3/2}/\sqrt{3})$ , existen cuatro valores de  $z$  que generan equilibrios relativos Lagrangianos.*

*Demostración.*

Usando el Teorema 5 para  $n = 3$  mostramos la primera parte del resultado. Para demostrar la segunda parte, usaremos la siguiente relación

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j = 1 - \frac{3\mathbf{K}r^2}{2}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

Calculando las derivadas de las ecuaciones (2.10) y sustituyéndolas en el sistema (2.8) obtenemos

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{8\mathbf{K}^{3/2}}{\sqrt{3}r^3(4\mathbf{K} - 3\mathbf{K}^2r^2)^{3/2}}.$$

En términos de  $z = (\mathbf{K}^{-1} - r^2)^{1/2}$ , la ecuación anterior es de la forma

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{8\mathbf{K}^{3/2}}{\sqrt{3}(1 + 2\mathbf{K}z^2 - 3\mathbf{K}^2z^4)^{3/2}}.$$

Notemos que para cualquier valor de  $z \in (-\mathbf{K}^{-1/2}, \mathbf{K}^{-1/2})$  existe un equilibrio relativo Lagrangiano. A continuación estudiaremos la relación entre la velocidad angular  $\omega$  y la masa  $m$ . Sea

$$f(z) = \frac{8\mathbf{K}^{3/2}}{\sqrt{3}(1 + 2\mathbf{K}z^2 - 3\mathbf{K}^2z^4)^{3/2}}.$$

Observemos que la función  $f(z)$  es positiva en el intervalo  $z \in (-\mathbf{K}^{-1/2}, \mathbf{K}^{-1/2})$  y tiende al infinito cuando  $z \rightarrow \pm\mathbf{K}^{-1/2}$ . Además, valores muy pequeños de  $\omega^2/m$  no generan equilibrios relativos Lagrangianos.

Por otro lado si la configuración se encuentra en el ecuador, es decir en el plano  $z = 0$ , entonces se sigue la relación

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{8\mathbf{K}^{3/2}}{\sqrt{3}}.$$

La configuración es un equilibrio relativo Lagrangiano si se cumple la ecuación anterior.

En la Figura 2.5 graficamos la función  $f(z)$  para  $\mathbf{K} = 1$ , notemos que existen dos valores de  $z$  que satisfacen  $f(z) = 3$  y para  $f(z) \in (8/\sqrt{3}, \infty)$ . Por otro lado para  $f(z) = 8/\sqrt{3}$  existen tres valores de  $z$  y finalmente para la región  $f(z) \in [3, 8/\sqrt{3}]$  existen cuatro valores de  $z$ . Además para valores muy pequeños de  $\omega^2/m$ , menores que tres, no existen equilibrios relativos Lagrangianos.

Hemos mostrado los equilibrios relativos Lagrangianos para  $\mathbf{K} = 1$ , para  $\mathbf{K} \neq 0$  el análisis es similar. Con lo que queda terminada la demostración del teorema. ■

El resultado anterior es de gran importancia ya que el valor de la relación entre la velocidad angular  $\omega$  y el valor de la masa  $m$  generan equilibrios relativos Lagrangianos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

En el siguiente resultado demostramos la relación de las masas de los cuerpos para la existencia de equilibrios relativos Lagrangianos.

**Proposición 2.** Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que los cuerpos con masas  $m_1, m_2, m_3$  se encuentran inicialmente en los vértices de un triángulo equilátero ortogonal al eje  $z$ . Entonces existen equilibrios relativos Lagrangianos si y solo si las masas son iguales; es decir  $m_1 = m_2 = m_3$ .

*Demostración.*

Para realizar la demostración, sustituimos las soluciones de la forma (2.10) en las ecuaciones de movimiento (1.38). Las ecuaciones de movimiento para cada una de las coordenadas son:

$$\ddot{z}_1 = -\frac{z}{3+9\mathbf{K}z^2} \left[ 3\omega^2 (1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4) - \frac{4\sqrt{3}\mathbf{K}^{3/2}(m_2+m_3)}{(1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4)^{1/2}} \right], \quad (2.11)$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{z}{3+9\mathbf{K}z^2} \left[ 3\omega^2 (1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4) - \frac{4\sqrt{3}\mathbf{K}^{3/2}(m_1+m_3)}{(1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4)^{1/2}} \right], \quad (2.12)$$

$$\ddot{z}_3 = -\frac{z}{3+9\mathbf{K}z^2} \left[ 3\omega^2 (1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4) - \frac{4\sqrt{3}\mathbf{K}^{3/2}(m_1+m_2)}{(1+2\mathbf{K}z^2-3\mathbf{K}^2z^4)^{1/2}} \right]. \quad (2.13)$$

Recordemos que la variable  $z := z_1 = z_2 = z_3$  es una constante, es decir  $\ddot{z} = 0$ . Por lo tanto, despejando  $(m_2 + m_3)$  de la ecuación (2.11) se sigue

$$(m_2 + m_3) = \frac{3\omega^2 (1 + 2\mathbf{K}r^2 - 3\mathbf{K}^2r^4)}{4\sqrt{3}\mathbf{K}^{3/2}},$$

En conclusión, despejando los términos  $(m_1 + m_3)$  y  $(m_1 + m_2)$  de las ecuaciones (2.12) y (2.13) respectivamente, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = \gamma\omega^2, \\ m_2 + m_3 = \gamma\omega^2, \\ m_3 + m_1 = \gamma\omega^2, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde  $\gamma = \sqrt{3}(1 + 2\mathbf{K}z^2 - 3\mathbf{K}^2z^4)/4\mathbf{K}^{3/2}$ . Notemos que la única solución para el sistema (2.14) es que se cumpla la siguiente expresión

$$m_1 = m_2 = m_3 = \gamma\omega^2/2.$$

Por lo tanto, las masas de los cuerpos posicionados en un triángulo equilátero ortogonal al eje  $z$  deben ser iguales para la existencia de equilibrios relativos Lagrangianos. Hemos demostrado la ida.

La demostración del regreso es inmediata, suponemos que las masas son iguales  $m_1 = m_2 = m_3$  y usando el Teorema 5 para  $n = 3$  obtenemos la existencia de los equilibrios relativos.

Por lo tanto, existen equilibrios relativos si las masas de los cuerpos son iguales. Recordemos que los cuerpos están en el mismo plano ortogonal al eje  $z$ , de esto se sigue que las distancias geodésicas son iguales. Hemos demostrado el Teorema. ■

En el siguiente resultado encontramos la condiciones necesarias para que una solución Lagrangiana dada, sea un equilibrio relativo Lagrangiano.

**Teorema 6.** *Supongamos que tenemos tres cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  y rotan en el mismo círculo ortogonal al eje  $z$ . Entonces existen soluciones Lagrangianas si las masas son iguales; es decir  $m_1 = m_2 = m_3$ .*

*Demostración.*

Consideremos una solución Lagrangiana donde las masas de los tres cuerpos son  $m_1, m_2$ , y  $m_3$  respectivamente, y supongamos que están en el mismo círculo; es decir  $r = r_1 = r_2 = r_3$ , por lo que la solución Lagrangiana es de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \omega t, & y_1 &= r \sin \omega t, & z_1 &= (\mathbf{K}^{-1} - r^2)^{1/2}, \\ x_2 &= r \cos(\omega t + a), & y_2 &= r \sin(\omega t + a), & z_2 &= (\mathbf{K}^{-1} - r^2)^{1/2}, \\ x_3 &= r \cos(\omega t + b), & y_3 &= r \sin(\omega t + b), & z_3 &= (\mathbf{K}^{-1} - r^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde  $b > a > 0$ . Como los tres cuerpos forman un triángulo equilátero en el plano ortogonal, entonces el ángulo que se forma entre el triángulo y el eje de rotación  $z$  es constante. Para garantizar que la solución Lagrangiana existe necesitamos que el momento angular sea cero o bien, sea un vector paralelo al eje  $z$ .

Por otro lado, si este vector gira alrededor del eje  $z$ , entonces viola las integrales del momento angular. Debemos probar que las primeras dos componentes del vector  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i$  sean igual a cero. Es decir, para la primer componente tenemos

$$m_1 r z_1 \cos \omega t + m_2 r z_2 \cos (\omega t + a) + m_3 r z_3 \cos (\omega t + b) = 0,$$

y para la segunda componente

$$m_1 r z_1 \sin \omega t + m_2 r z_2 \sin (\omega t + a) + m_3 r z_3 \sin (\omega t + b) = 0. \quad (2.15)$$

Supongamos que  $\omega \neq 0$  en la ecuación anterior, entonces para el tiempo  $t = 0$  se cumple

$$m_2 r z_2 \sin (a) = -m_3 r z_3 \sin (b). \quad (2.16)$$

Además, como los tres cuerpos están en los vértices del triángulo equilátero, entonces la distancia de cada uno de sus lados es una constante la cual denotaremos como  $\delta$  dada por

$$\delta = \mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 \odot \mathbf{q}_3.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento para la coordenada  $\ddot{y}_1$  es:

$$\ell r (r^2 - 1) \omega^2 \sin \omega t = m_2 r \sin (\omega t + a) + m_3 r \sin (\omega t + b),$$

donde  $\ell$  es una constante distinta de cero y para el tiempo  $t = 0$  se cumple

$$m_2 r \sin a = -m_3 r \sin b. \quad (2.17)$$

Por la ecuación anterior y la ecuación (2.16) se sigue que  $z_2 = z_3$ . De manera similar se puede demostrar que  $z_1 = z_2 = z_3$ , por lo tanto los tres cuerpos están a la misma altura  $z$ .

Finalmente usando la Proposición 2, concluimos que las masas de los tres cuerpos son iguales. ■

Para terminar esta sección, concluimos que no existen equilibrios relativos Lagrangianos si las masas de los cuerpos son distintas. En la siguiente sección trabajaremos con las soluciones colineales de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

## 2.2. Equilibrios relativos Eulerianos

Las soluciones colineales Eulerianas han sido estudiadas en el plano, por lo que es natural preguntarnos sobre la existencia de estas configuraciones en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . En la esfera, las soluciones colineales son aquellas configuraciones donde los cuerpos están situados sobre la misma línea geodésica.

Usaremos, sin pérdida de generalidad el Teorema del Eje Principal de Euler para rotar adecuadamente la esfera, de tal forma que la masa  $m_1$  se encuentre en el Polo Norte y las dos restantes se encuentran sobre la misma línea geodésica. (Ver Figura 2.6).

**Definición 14.** Una solución de las ecuaciones (2.8) es llamada Euleriana si los cuerpos están sobre la misma línea geodésica.

Como hemos mencionado estudiaremos una familia particular de equilibrios relativos Eulerianos, donde los cuerpos con masas  $m_2$  y  $m_3$  se encuentran en el mismo plano  $xy$  y la masa  $m_1$  está posicionada en el Polo Norte como se muestra en la Figura 2.6. Por lo tanto, una solución Euleriana  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$  es de la forma

$$\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & z_1 &= \mathbf{K}^{-1/2}, \\ x_2 &= r \cos \omega t, & y_2 &= r \sin \omega t, & z_2 &= z, \\ x_3 &= -r \cos \omega t, & y_3 &= -r \sin \omega t, & z_3 &= z, \end{aligned} \quad (2.18)$$

con  $z, r$  y  $\omega$  constantes.

Por la Definición 10, la familia de equilibrios relativos Eulerianos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  se definen como

**Definición 15.** Una solución Euleriana de las ecuaciones de movimiento (2.8) se le llama equilibrio relativo Euleriano si la configuración del sistema es invariante bajo la familia de rotaciones  $G(A(t))$ , donde  $A(t)$  se definió en (2.1).

El siguiente resultado nos muestra la relación entre la velocidad angular y la masa para tener equilibrios relativos Eulerianos.

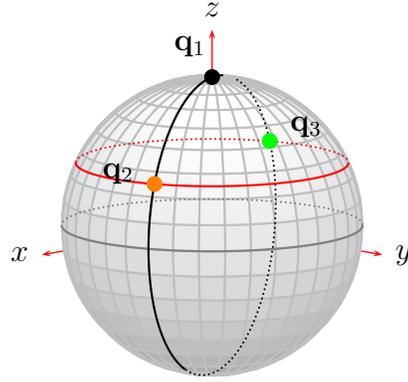


Figura 2.6: Soluciones Eulerianas

**Teorema 7.** Consideremos el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Supongamos que las masas de los cuerpos son iguales  $m := m_1 = m_2 = m_3$ . Si fijamos el cuerpo con masa  $m_1$  en  $(0, 0, \mathbf{K}^{-1/2})$  y los cuerpos restantes equidistan del cuerpo con masa  $m_1$ , entonces para  $z \in (-\mathbf{K}^{-1/2}/2, 0) \cup (0, \mathbf{K}^{-1/2})$  existen un valor positivo y un valor negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos Eulerianos.

*Demostración.*

Revisaremos que una solución de la forma (2.18) satisface las ecuaciones de movimiento. Realizando un poco de álgebra tenemos

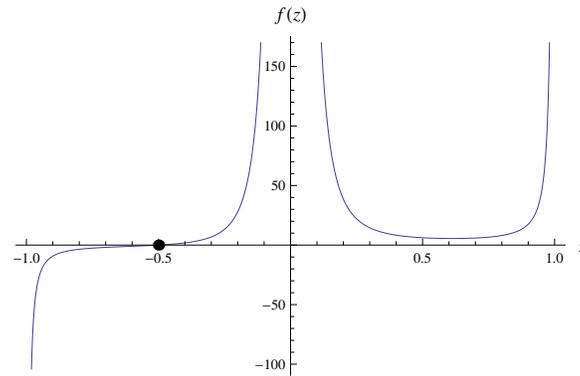
$$\mathbf{K}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3 = (1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}, \quad \mathbf{K}\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = 1 - 2\mathbf{K}r^2.$$

Derivando las ecuaciones (2.18) y sustituimos los cálculos en las ecuaciones de movimiento (2.8) obtenemos la siguiente relación en términos de  $z$ :

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{\mathbf{K}^{5/2}}{z(1 - \mathbf{K}^4 z^2)^{3/2}} + \frac{(\mathbf{K}z^2 - \mathbf{K}^2 z^4)^{1/2}}{4\mathbf{K}^{1/2} z^4 (\mathbf{K}^{1/2} z - 1)^2 (\mathbf{K}^{1/2} z + 1)^2}. \quad (2.19)$$

De forma similar que en el caso Lagrangiano analizaremos la siguiente función

$$f(z) = \frac{\mathbf{K}^{5/2}}{z(1 - \mathbf{K}^4 z^2)^{3/2}} + \frac{(\mathbf{K}z^2 - \mathbf{K}^2 z^4)^{1/2}}{4\mathbf{K}^{1/2} z^4 (\mathbf{K}^{1/2} z - 1)^2 (\mathbf{K}^{1/2} z + 1)^2}. \quad (2.20)$$


 Figura 2.7: Gráfica de la función  $f(z)$  con  $\mathbf{K} = 1$ .

Observemos que  $f(z)$  es negativa en el intervalo  $z \in \mathbf{K}^{-1/2}(-1, -1/2)$  y positiva para  $z \in \mathbf{K}^{-1/2}(-1/2, 1)$ , como se observa en la Figura (2.7).

Además, la función evaluada en  $z = 0$  se indetermina. Esto se debe a que los cuerpos  $z_2$  y  $z_3$  son antipodales en el ecuador, dando lugar a singularidades en las ecuaciones de movimiento. El signo de  $\omega$  determina la dirección de la rotación de la solución Euleriana.

Hemos mostrado la relación entre la velocidad angular y la masa para obtener equilibrios relativos en el intervalo  $z \in (\mathbf{K}^{-1/2}, 0) \cup (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ . ■

Una consecuencia del resultado anterior, donde  $m_1 = M$  y  $m_2 = m_3 = m$  es la relación

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{M}{m} \frac{\mathbf{K}^{5/2}}{z(1 - \mathbf{K}^4 z^2)^{3/2}} + \frac{(\mathbf{K}z^2 - \mathbf{K}^2 z^4)^{1/2}}{4\mathbf{K}^{1/2} z^4 (\mathbf{K}^{1/2} z - 1)^2 (\mathbf{K}^{1/2} z + 1)^2}. \quad (2.21)$$

Dado un equilibrio relativo, encontramos una expresión algebraica que relaciona la masa o las masas de los cuerpos con su velocidad angular. Consecuentemente el valor de la velocidad angular y las masas de los cuerpos son de importancia para encontrar equilibrios relativos. Recordemos, que probamos la existencia de estas soluciones restringido a que los tres cuerpos pertenecían al mismo plano o dos de ellos están en el plano ortogonal a  $z$ .

Ahora que tenemos una mejor noción del comportamiento de la familia particular de equilibrios relativos, clasificaremos en el siguiente capítulo una familia particular de soluciones homográficas.



## CAPÍTULO 3

# SOLUCIONES HOMOGRÁFICAS EN $S_{\mathbf{K}}^2$

Las soluciones homográficas en Mecánica Celeste son órbitas muy particulares, esto es, cuando la forma de la configuración no cambia a lo largo del movimiento. En la esfera, las soluciones homográficas siempre mantienen la misma configuración bajo rotaciones o dilataciones. Como vimos en el capítulo anterior, si la solución es invariante ante rotaciones entonces se le llama equilibrio relativo. En cambio si sólo es invariante bajo la expansión o contracción de las posiciones de los cuerpos, entonces la solución es homotética.

Recordemos que estamos estudiando una familia particular de soluciones homográficas, donde los cuerpos están en un mismo plano ortogonal al eje de rotación, esto para el caso de las soluciones Lagrangianas. Y para las Eulerianas, la familia de soluciones homográficas que estudiaremos son aquellas donde un cuerpo está en el Polo Norte y las dos restantes en el mismo plano.

En este capítulo construiremos los sistemas de ecuaciones diferenciales para tres cuerpos, que generan una familia de soluciones homográficas Lagrangianas y Eulerianas en superficies curvadas. Además, mostraremos la existencia de las órbitas y la unicidad de las mismas.

En la subsección 1.3.2 obtuvimos las ecuaciones de movimiento (1.34) para  $n$  cuerpos. Supongamos que tenemos tres cuerpos en la superficie curvada, la ecuación que define el movimiento de los cuerpos es

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j \mathbf{K}^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

La deducción del sistema de ecuaciones que generan órbitas Lagrangianas y Eulerianas en superficies curvadas se obtendrá por separado.

### 3.1. Existencia y unicidad de las soluciones Lagrangianas

En esta sección definiremos la familia de soluciones homográficas Lagrangianas para el problema de los tres cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  y mostraremos la existencia local y unicidad para masas iguales y con ciertas condiciones.

De la Definición 9, se sigue la definición de la familia de soluciones homográficas Lagrangianas que estudiaremos en esta sección.

**Definición 16.** *Una solución Lagrangiana de las ecuaciones de movimiento (2.8) es una solución homográfica Lagrangiana si el triángulo equilátero se expande o contrae y gira alrededor del eje  $z$ .*

Antes de obtener el sistema de ecuaciones que generan las órbitas homográficas Lagrangianas, recordemos que los equilibrios relativos son soluciones invariantes bajo rotaciones. En consecuencia, para generar soluciones homográficas Lagrangianas basta con variar el término  $r$  con respecto al tiempo de las soluciones (2.10). Por lo tanto, las soluciones son de la forma  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ , donde sus coordenadas están dadas por

$$\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \omega, & y_1 &= r \sin \omega, & z_1 &= (\mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{1/2}, \\ x_2 &= r \cos(\omega + 2\pi/3), & y_2 &= r \sin(\omega + 2\pi/3), & z_2 &= (\mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{1/2}, \\ x_3 &= r \cos(\omega + 4\pi/3), & y_3 &= r \sin(\omega + 4\pi/3), & z_3 &= (\mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $r = r(t)$  es la función del cambio de tamaño y  $\omega = \omega(t)$  es la función angular. El siguiente teorema nos muestra la unicidad y la existencia de las soluciones homográficas Lagrangianas.

**Teorema 8.** *Para el problema de los tres cuerpos en una superficie con curvatura  $\mathbf{K}$  constante, supongamos que las masas de los cuerpos son iguales, es decir  $m_1 = m_2 = m_3 = m > 0$ . Entonces las soluciones homográficas Lagrangianas existen localmente y son únicas para un conjunto dado de condiciones iniciales.*

*Demostración.*

Mostraremos que las ecuaciones de movimiento (2.8) tienen soluciones de la forma (3.1). Para la demostración usaremos las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} 2 \cos x \cos y &= [\cos(x+y) + \cos(x-y)], \\ 2 \sin x \sin y &= [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \end{aligned}$$

además tenemos que para cada par  $i \neq j$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , se cumple

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j = 1 - \frac{3\mathbf{K}r^2}{2}, \quad (3.3)$$

donde

$$x_i^2 + y_i^2 + \sigma z_i^2 = \mathbf{K}^{-1}, \quad x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Derivando las ecuaciones (3.1) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \omega - r \dot{\omega} \sin \omega, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) - r \dot{\omega} \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \dot{x}_3 &= \dot{r} \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) - r \dot{\omega} \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\ \dot{y}_1 &= \dot{r} \sin \omega + r \dot{\omega} \cos \omega, \\ \dot{y}_2 &= \dot{r} \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) + r \dot{\omega} \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \dot{y}_3 &= \dot{r} \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) + r \dot{\omega} \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\ \dot{z}_1 &= \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = -\sigma r \dot{r} (\sigma \mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{K}r^2 \dot{\omega}^2 + \frac{\mathbf{K}\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Calculando la segunda derivada obtenemos

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \cos \omega - (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sin \omega, \\
\ddot{y}_1 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \sin \omega + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cos \omega, \\
\ddot{x}_2 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) - (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\
\ddot{y}_2 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\
\ddot{x}_3 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) - (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\
\ddot{y}_3 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\
\ddot{z}_1 &= \ddot{z}_2 = \ddot{z}_3 = -\sigma r \ddot{r} (\sigma \mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{-1/2} - \mathbf{K}^{-1} \dot{r}^2 (\sigma \mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{-3/2} = 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los cálculos anteriores en las ecuaciones de movimiento

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial x_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) x_i, \\ m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial y_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) y_i, \\ m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U_{\mathbf{K}}}{\partial z_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) z_i, \end{cases} \quad (3.4)$$

obtenemos la siguiente relación para cada una de las componentes

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &: A \cos \omega - B \sin \omega, \\ \ddot{y}_1 &: A \sin \omega + B \cos \omega, \\ \ddot{x}_2 &: A \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) - B \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \ddot{y}_2 &: A \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) + B \cos \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \ddot{x}_3 &: A \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) - B \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\ \ddot{y}_3 &: A \sin \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right) + B \cos \left( \omega + \frac{4\pi}{3} \right), \\ \ddot{z} &: A = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde  $\ddot{z} = \ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = \ddot{z}_3$  y

$$A := A(t) = \ddot{r} - r(1 - \mathbf{K}r^2)\dot{\omega}^2 + \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2} + \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}},$$

$$B := B(t) = r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}.$$

Observemos que el sistema de ecuaciones (3.5) que obtuvimos para cada una de las componentes son combinaciones lineales de las funciones seno y coseno. Debido al comportamiento de estas funciones tenemos que el sistema sólo tiene solución si  $A = 0$  y  $B = 0$ .

Hagamos  $\nu = \dot{r}$  y  $s = \dot{\omega}$ , entonces la existencia local y unicidad de las órbitas Lagrangianas con masas iguales es equivalente a demostrar la existencia de soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{s} &= -\frac{2\nu s}{r}, \\ \dot{\nu} &= r(1 - \mathbf{K}r^2)s^2 - \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde  $s = \dot{\omega}$  y las condiciones iniciales del sistema son  $r(0) = r_0$ ,  $s(0) = s_0$  y  $\nu(0) = \nu_0$ . Por resultados clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales [38] se sigue la existencia y unicidad del sistema (3.6).

Recordemos que en el Corolario 2 mostramos la existencia de equilibrios relativos Lagrangianos para ciertos valores de  $\dot{\omega}/m$ , por lo que estamos restringidos al valor de la velocidad angular para obtener soluciones homográficas.

Hemos mostrado la existencia local y la unicidad de las soluciones homográficas Lagrangianas (3.5). ■

En la siguiente sección haremos una clasificación de la familia de soluciones homográficas Lagrangianas en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$ .

## 3.2. Órbitas Lagrangianas

Para dar una clasificación analizaremos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.6) que generan soluciones homográficas Lagrangianas.

Recordemos que  $s = \dot{\omega}$ , por lo que es posible simplificar en una ecuación el sistema (3.6). Combinando la primera y segunda ecuación llegamos a la expresión

$$\dot{s} = -\frac{2\dot{r}s}{r},$$

usando el método de separación de variables obtenemos el valor de la velocidad angular

$$s = \dot{\omega} = \frac{c}{r^2},$$

donde  $c$  es una constante de integración. Notemos que hemos reducido el sistema de ecuaciones (3.6) en una ecuación, resultando el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{(1-\mathbf{K}r^2)c^2}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1-\mathbf{K}r^2)}{r^2(12-9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $c \neq 0$ . Probaremos un resultado útil para la clasificación de las soluciones Lagrangianas.

**Lema 1.** *Supongamos que  $\mathbf{K} > 0$ ,  $m > 0$  y  $c \neq 0$ ,*

a) *si  $\mathbf{K}^{1/2}c^2 - (8/\sqrt{3})m < 0$ , entonces el sistema (3.7) tiene dos puntos fijos;*

b) *si  $\mathbf{K}^{1/2}c^2 - (8/\sqrt{3})m \geq 0$ , entonces el sistema (3.7) tiene un punto fijo.*

*Demostración.*

Para encontrar los puntos fijos del sistema (3.7) haremos  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{\nu} = 0$ , por lo que debemos encontrar las soluciones de la siguiente ecuación

$$\left( \frac{1-\mathbf{K}r^2}{r^2} \right) \left[ \frac{c^2}{r} - \frac{24m}{(12-9\mathbf{K}r^2)^{3/2}} \right] = 0. \quad (3.8)$$

La expresión anterior nunca se indetermina debido a que los cuerpos están restringidos a la esfera, es decir  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2}]$ . Igualando el primer término a cero obtenemos el primer punto fijo  $(r_0, \nu_0) = (\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$ . Por otra parte, si el segundo término es igual a cero, entonces se debe satisfacer

$$c^2 (12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2} = 24mr,$$

y necesitamos obtener el valor de  $r$  de la ecuación anterior. Para ello quitamos la raíz elevando al cuadrado toda la ecuación y desarrollamos el binomio al cubo, resultando el polinomio

$$729c^4\mathbf{K}^3r^6 - 2916c^4\mathbf{K}^2r^4 + 144(27c^4\mathbf{K} + 4m^2)r^2 - 1728c^4 = 0.$$

Los puntos fijos del sistema (3.7) restantes son las raíces del polinomio anterior. Para simplificar la notación hacemos el cambio de variable  $x = r^2$ , teniendo así

$$p(x) = 729c^4\mathbf{K}^3x^3 - 2916c^4\mathbf{K}^2x^2 + 144(27c^4\mathbf{K} + 4m^2)x - 1728c^4. \quad (3.9)$$

Para hallar el número de raíces reales del polinomio  $p(x)$  usaremos la regla de los signos de Descartes, la cual relaciona el número de cambios de signo de los coeficientes del polinomio con el número de raíces positivas de dicha ecuación. Desgraciadamente no nos da una cantidad exacta de soluciones sino una cota.

**Regla de los signos de Descartes.** Sea  $p(x)$  un polinomio escrito en orden descendente y con término independiente distinto de cero. Entonces

- El número de *raíces positivas* de  $p(x)$  es igual al número de variaciones en el signo de  $p(x)$  o es menor que ese número módulo dos.
- El número de *raíces negativas* de  $p(x)$  es igual al número de variaciones en el signo de  $p(-x)$  o es menor que ese número módulo dos [35].

Observemos que nuestro polinomio  $p(x)$  tiene tres cambios de signos, de tal manera que, por la regla,  $p(x)$  tiene una o tres raíces reales positivas.

Para determinar el número exacto de raíces calcularemos la derivada del polinomio, la cual es

$$p'(x) = 2187c^4\mathbf{K}^3x^2 - 5832c^4\mathbf{K}^2x + 144(27c^4\mathbf{K} + 4m^2).$$

Recordemos que si un polinomio  $q(x)$  tiene tres raíces reales positivas, entonces existen al menos un mínimo y un máximo local. Si calculamos su derivada  $q'(x)$  observamos que tiene dos raíces reales positivas y un máximo o un mínimo local (ver Figura 3.1).

Por otro lado, notemos que el discriminante de la derivada del polinomio  $D(p'(x)) = -5038848c^4\mathbf{K}^3m^2$  es un número negativo, lo cual implica que  $p'(x)$  no tiene dos raíces reales positivas.

Denotemos como  $r_0$  a la raíz positiva de  $p(x)$ . Para determinar si  $r_0$  es un punto fijo del sistema (3.7), se debe cumplir que  $0 < r_0 \leq \mathbf{K}^{-1/2}$ . Del segundo término de la ecuación (3.8) hacemos

$$g(r) = \frac{c^2}{r} - \frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

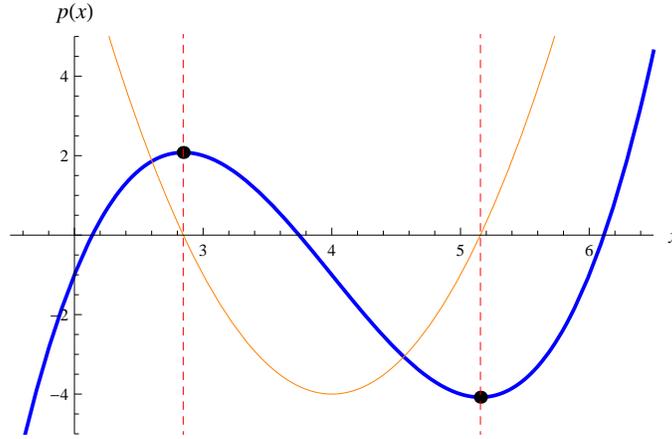


Figura 3.1: La gráfica de un polinomio  $q(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 49$  con tres raíces reales positivas y su derivada.

Calculando los límites por los extremos de la función  $g(r)$  obtenemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}} g(r) = \mathbf{K}^{1/2}c^2 - \frac{8m}{\sqrt{3}}. \quad (3.11)$$

La función  $g$  es decreciente, lo cual implica que puede cortar el eje  $r$ . Estamos interesados en el intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ , por lo que basta analizar el segundo límite. Tenemos dos casos.

- (a) Si  $\mathbf{K}^{1/2}c^2 - \frac{8m}{\sqrt{3}} > 0$ , entonces  $r_0 > \mathbf{K}^{-1/2}$ . Es decir, la solución está fuera de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y por lo tanto no es un punto fijo del sistema (3.7).
- (b) Si  $\mathbf{K}^{1/2}c^2 - \frac{8m}{\sqrt{3}} < 0$ , entonces  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$ . Por lo tanto  $(r_0, 0)$  es un punto fijo del sistema (3.7).

En la Figura 3.2 graficamos la función (3.10) para ciertos valores dados y encontramos los puntos fijos para ambas desigualdades.

Por lo tanto hemos mostrado que si se tiene la desigualdad (a), el sistema tiene un solo punto fijo  $(\mathbf{K}^{-1/2})$ . Si tenemos la desigualdad (b), entonces tenemos dos puntos fijos:  $(\mathbf{K}^{-1/2})$  y  $(r_0, 0)$  para  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$ .

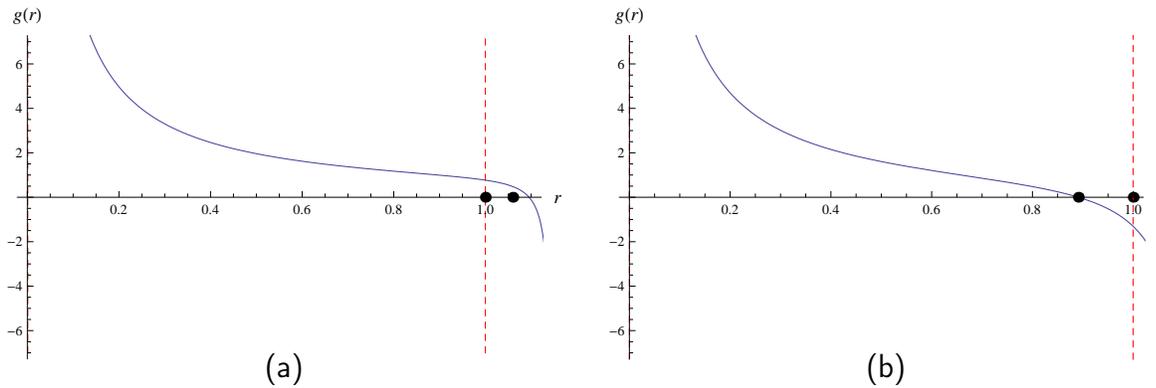


Figura 3.2: La gráfica de la función (3.10), para el caso (a) tomamos los valores  $\mathbf{K} = 1, c = 1, m = 0.15$  y para el caso (b) tomamos  $\mathbf{K} = 1, c = 1, m = 2$ .

■

Encontramos los puntos fijos del sistema (3.7) y hemos demostrado algunos lemas útiles, a continuación haremos una clasificación de la familia de soluciones que generan el sistema de ecuaciones.

### 3.2.1. Clasificación de las soluciones Lagrangianas

**Teorema 9.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  con masas iguales existen cinco clases de soluciones Lagrangianas:*

- I) *órbitas Lagrangianas homotéticas que empiezan y terminan en colisión total para un tiempo finito;*
- II) *equilibrios relativos Lagrangianos que se mueven sobre un círculo;*
- III) *órbitas cuasiperiódicas Lagrangianas homográficas;*
- IV) *órbitas Lagrangianas homográficas no periódicas que van desde el ecuador hasta una distancia máxima con velocidad cero para  $t = -\infty$  y regresan al ecuador con velocidad cero para  $t = \infty$ . La distancia máxima depende de las condiciones iniciales.*

v) puntos fijos Lagrangianos donde los cuerpos están sobre el ecuador y las masas de los mismos son iguales.

*Demostración.*

Para demostrar el inciso (I) usaremos el valor de la velocidad angular que obtuvimos de nuestro sistema de ecuaciones (3.6), dado por

$$\dot{\omega} = \frac{c}{r^2}.$$

Recordemos que  $c$  es una constante, en particular si  $c = 0$  se sigue que la velocidad angular  $\dot{\omega}$  es cero. Esto implica que los tres cuerpos colisionan en el Polo Norte ( $z = |\mathbf{K}|^{-1/2}$ ).

Por otra parte, por el criterio de estabilidad de Lyapunov tenemos que un punto de equilibrio implica que las soluciones de un problema con valores iniciales tiende al punto de equilibrio cuando convergen uniformemente en el intervalo  $[0, +\infty)$  a una solución constante [38].

En nuestro caso, la colisión ocurre en un tiempo finito, debido a que el punto de colisión no es un punto de equilibrio. A estas órbitas las denominamos órbitas Lagrangianas homotéticas, por lo tanto hemos demostrado la existencia de las órbitas de la clase (I).

La existencia de los equilibrios relativos Lagrangianos donde todas los cuerpos están en un plano ortogonal al eje de rotación se probó en la sección 2.1, por lo que ya está demostrado el inciso (II). La clase de soluciones (v) es un caso particular del Teorema 4 para tres cuerpos, en consecuencia los puntos fijos Lagrangianos situados en el ecuador generan un equilibrio relativo.

Por la segunda ecuación del sistema (3.12), se tiene que ninguna de las órbitas puede cruzar el ecuador. Esto se debe a que en  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$  se indetermina dicha ecuación.

Para el resto de la demostración asumiremos que la velocidad angular es distinta de cero. El sistema diferencial que estudiaremos es el siguiente

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{(1-\mathbf{K}r^2)c^2}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1-\mathbf{K}r^2)}{r^2(12-9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Analizaremos el flujo del sistema anterior para encontrar las órbitas restantes del teorema. Para cada punto  $\nu \neq 0$ , las pendientes del campo vectorial se encuentran dadas por la función

$$h(r, \nu) = \frac{d\nu}{dr} = \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{\nu r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{\nu r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \quad (3.13)$$

notemos que  $h(r, -\nu) = -h(r, \nu)$ , por lo que las pendientes del flujo son simétricas con respecto al eje  $r$  en el intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ . El eje  $r$  no es un invariante del sistema debido a que  $\dot{r} = \nu$  y por la simetría del flujo tenemos que el flujo cruza perpendicularmente el eje  $r$  excepto en los puntos fijos.

El lado derecho de la segunda ecuación del sistema (3.12) lo podemos reescribir como

$$G(r, \nu) = g_1(r)g(r) + g_2(r, \nu), \quad (3.14)$$

donde

$$g_1(r) = \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{r^2}, \quad g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2}, \quad g(r) = \frac{c^2}{r} - \frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}.$$

El valor de  $g_1(r)$  siempre es positivo, y  $g_2(r, \nu) < 0$  para  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ .

Observemos que el sistema se indefinire en los puntos  $r = 0$  y  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$ , por lo que el flujo existe solo en los puntos  $(r, \nu)$  que pertenecen a la banda  $(0, \mathbf{K}^{-1/2}) \times \mathbb{R}$ , y el punto fijo  $(\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$ .

Recordemos, en el Lema 1 mostramos la existencia de uno o dos puntos fijos, donde la existencia de los mismos dependen del valor de  $\mathbf{K}^{-1/2}c^2 - 8m/\sqrt{3}$ . Por lo tanto, continuaremos la demostración en dos casos.

### Caso 1) Para un punto fijo

Para  $\mathbf{K}^{-1/2}c^2 - 8m/\sqrt{3} > 0$ , las ceroclinas del sistema diferencial (3.12) están dadas por

$$0 = \nu, \quad (3.15)$$

$$0 = \frac{(1 - \mathbf{K}r^2)c^2}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}} = G(r, \nu). \quad (3.16)$$

Como  $\nu = 0$ , basta analizar la función  $g(r)$ . Anteriormente mostramos que  $g(r)$  es decreciente y no tiene raíces en el intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ , ver Figura 3.2. Por lo tanto  $g(r) > 0$ , esto implica que flujo siempre cruza el eje real hacia arriba perpendicularmente.

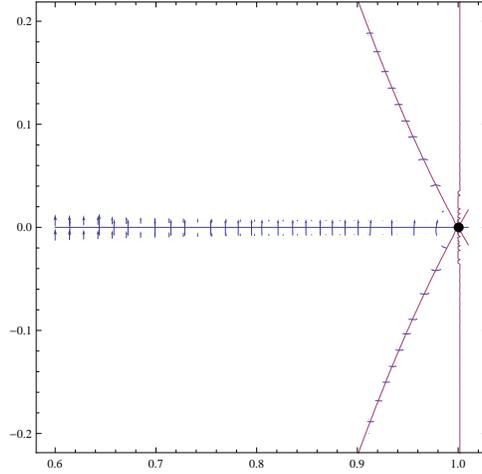


Figura 3.3: Ceroclinas de las soluciones Lagrangianas con un punto fijo.

Además, la función  $G(r, \nu)$  es simétrica con respecto al eje  $r$ ; esto es  $G(r, \nu) = G(r, -\nu)$ .

Si  $r \rightarrow 0$ , las pendientes del campo vectorial, dadas por (3.13), tienden a  $+\infty$ , mientras que si  $r \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}$ , las pendientes del campo vectorial tienden a  $-\infty$ . Es decir, en algún punto las pendientes del campo vectorial son igual a cero.

Por otro lado, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial r} g_1(r) = -\frac{2}{r} \left( \mathbf{K} + \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{r^2} \right) < 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dr} g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}\nu^2 (1 + \mathbf{K}r^2)}{(1 - \mathbf{K}r^2)^2} < 0, \quad (3.18)$$

y por lo tanto  $G$  también es una función decreciente. En la Figura 3.3 se muestra la gráfica de las ceroclinas del sistema.

En el punto fijo  $(r_0, \nu_0) = (\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$  las órbitas tienen una velocidad inicial de cero para un tiempo  $t = \infty$ , y las fuerzas de las mismas son tangentes a la recta  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$  y siempre tienden hacia abajo. Después, cruzan la ceroclina (3.16) donde las pendientes del flujo se hacen cero para posteriormente cruzar el eje  $r$  perpendicularmente hacia arriba.

Como la ceroclina (3.16) es simétrica el flujo se comporta simétricamente, por lo que regresa al punto fijo con una velocidad final igual a cero para un tiempo  $t = +\infty$ . En la Figura 3.4 podemos observar el flujo del campo vectorial.

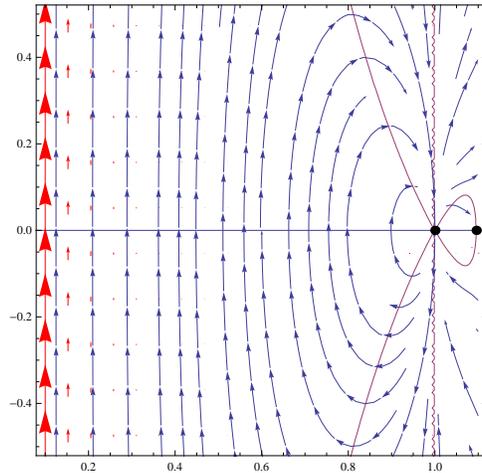


Figura 3.4: El flujo del sistema (3.7) con un punto fijo dando valores a las variables  $\mathbf{K} = 1$ ,  $c = 1$ ,  $m = 0.15$ .

Las órbitas que obtenemos no son periódicas. Por lo tanto hemos mostrado la existencia de las soluciones homográficas que van del punto fijo  $(\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$  hasta una órbita máxima. Para ciertas condiciones iniciales, es posible calcular la órbita máxima de la órbita que se encuentra a una altura máxima que depende del valor de la curvatura  $\mathbf{K}$ . Por lo tanto hemos demostrado el inciso (IV) del teorema.

Recordemos que las líneas  $r = 0$  y  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$  nos generan singularidades en el sistema, excepto para el punto fijo, por lo que ninguna de nuestras órbitas puede empezar o terminar en estas líneas.

Hemos terminado el análisis del flujo para el sistema de ecuaciones diferenciales (3.12) con un punto fijo. Ahora pasaremos al segundo caso.

### ***Caso 2) Para dos puntos fijos.***

Para el valor de  $\mathbf{K}^{-1/2}c^2 - 8n/\sqrt{3} < 0$  tenemos dos puntos fijos para el sistema (3.12), los cuales son  $(\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$  y  $(r_0, 0)$  con  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$ .

De manera similar al caso anterior analizaremos las ceroclinas del sistema dadas por (3.15 y 3.16).

En este caso las ceroclinas son un conjunto discontinuo formado por el punto fijo  $(\mathbf{K}^{-1/2}, 0)$  y una curva continua, simétrica con respecto al eje  $r$ .

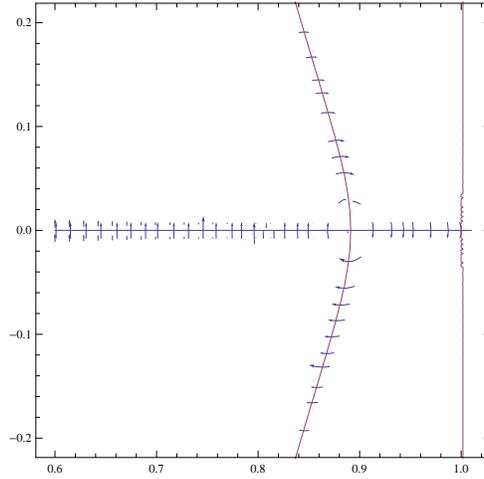


Figura 3.5: Ceroclina del sistema (3.12) para dos puntos fijos.

Para  $\nu = 0$ , recuperamos de igual forma la función  $g(r)$  que es una función decreciente pero tiene una raíz en el intervalo  $r_0 \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$  por lo que  $g(x) > 0$  para  $x \in (0, r_0)$  y  $g(x) < 0$  para  $x \in (r_0, \mathbf{K}^{-1/2})$ . Entonces el flujo del sistema cruza el eje  $r$  hacia arriba cuando  $r < r_0$  y hacia abajo para  $r > r_0$ . (Ver Figura 3.5).

La función  $G(r, \nu)$  definida en (3.14) conserva las propiedades que encontramos en el caso anterior.

Haremos un análisis del punto fijo  $(r_0, 0)$ . La parte lineal del campo vectorial del sistema (3.12) es

$$A(r, \nu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial G(r, \nu)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluándola en el punto de equilibrio  $(r_0, 0)$  para  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$  tenemos

$$A(r_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial G(r_0, 0)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivando la función  $G(r, \nu)$  y evaluándola en su punto fijo se tiene

$$\frac{\partial G(r_0, 0)}{\partial r} = g_1(r_0) \frac{\partial g(r_0)}{\partial r} + g(r_0) \frac{\partial g_1(r_0)}{\partial r}.$$

La función  $g_1(r_0, 0)$  es positiva y decreciente (3.17). Demostramos en el Lema a que la función  $g(r)$  es decreciente en el intervalo  $r_0 \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ . Por lo tanto  $\frac{\partial G(r_0, 0)}{\partial r}$  es negativo.

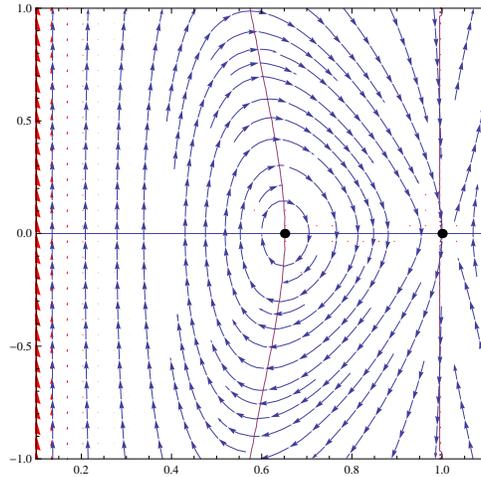


Figura 3.6: El flujo del sistema (3.7) con dos puntos fijos y valores  $\mathbf{K} = 1$ ,  $c = 1$ ,  $m = 1.5$ .

El discriminante de la matriz  $A$  se define como  $\Delta = \text{Tr}A - 4 \text{Det}A$ . El valor del discriminante es negativo y por lo tanto sus valores propios son imaginarios puros. Por la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, el punto fijo puede ser un centro o una espiral para el sistema lineal [38].

Las simetrías que tenemos en el sistema son:

$$h(r, -\nu) = -h(r, \nu), \quad G(r, -\nu) = G(r, \nu),$$

donde la función  $h(r, \nu)$  representa las pendientes del campo vectorial  $G(r, \nu)$ .

Las pendientes son antisimétricas con respecto al eje  $r$ , y el flujo con respecto a la ceroclina es simétrico. Debido a la simetría del campo vectorial con respecto al eje  $r$ , alrededor del punto fijo  $(r_0, 0)$ . Por lo tanto existen órbitas cerradas en el plano  $(r - \nu)$ , no olvidemos que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.6) que generan soluciones homográficas Lagrangianas dependen de tres variables  $(r, \nu, s)$  por lo que las órbitas cerradas en  $(r - \nu)$  son órbitas cuasiperiódicas por la ecuación  $\dot{s} = -\frac{2\dot{r}s}{r}$  del sistema (3.6).

Hemos demostrado la existencia de las órbitas homográficas Lagrangianas cuasiperiódicas descritas en el inciso (III), en la Figura 3.6 se muestran las órbitas cerradas en el plano  $(r - \nu)$ .

Finalmente, el comportamiento asintótico de  $G(r, \nu)$  cerca del punto fijo  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$  produce órbitas homográficas no periódicas, que se estudiaron en el caso anterior.



A continuación obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales que generan soluciones homográficas Eulerianas.

### 3.3. Existencia y unicidad de las soluciones Eulerianas

En esta sección construiremos el sistema de ecuaciones que generan las soluciones homográficas Eulerianas para el problema curvado de los tres cuerpos en una superficie curvada. Mostraremos la existencia local y unicidad de este tipo de soluciones para masas iguales con ciertas condiciones.

Denominaremos como una *solución Euleriana homotética* si la solución Euleriana se expande o contrae. Recordemos que los equilibrios relativos Eulerianos los definimos en el capítulo anterior, por lo que podemos definir las soluciones homográficas Eulerianas.

**Definición 17.** *Decimos que una solución Euleriana es una solución homográfica Euleriana si la configuración del sistema no cambia para cualquier tiempo  $t$ .*

Representamos una solución homográfica Euleriana del problema de los tres cuerpos como:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \quad \text{con } \mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & z_1 &= (\sigma \mathbf{K})^{-1/2}, \\ x_2 &= r \cos \omega, & y_2 &= r \sin \omega, & z_2 &= z, \\ x_3 &= -r \cos \omega, & y_3 &= -r \sin \omega, & z_3 &= z, \end{aligned}$$

donde  $r = r(t)$  es la función del tamaño y  $\omega = \omega(t)$  la función angular. El siguiente teorema nos muestra la unicidad y la existencia de las soluciones homográficas Eulerianas.

**Teorema 10.** *Para el problema de los tres cuerpos en la superficie curvada, supongamos que las masas son iguales, es decir  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  entonces las soluciones Eulerianas homográficas existen localmente y son únicas para un conjunto de condiciones iniciales dado.*

*Demostración.*

Mostraremos si las ecuaciones de movimiento (2.8) admiten soluciones de la forma (3.19). Realizando los cálculos tenemos que

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_3 = (1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}, \quad \text{y} \quad \mathbf{K}\mathbf{q}_2 \odot \mathbf{q}_3 = 1 - 2\mathbf{K}r^2, \quad (3.20)$$

donde

$$x_i^2 + y_i^2 + \sigma z_i^2 = \mathbf{K}^{-1}, \quad x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Derivando las ecuaciones (3.19) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0, & \dot{y}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \cos \omega - r\dot{\omega} \sin \omega, & \dot{y}_2 &= \dot{r} \sin \omega + r\dot{\omega} \cos \omega, \\ \dot{x}_3 &= -\dot{r} \cos \omega + r\dot{\omega} \sin \omega, & \dot{y}_3 &= -\dot{r} \sin \omega - r\dot{\omega} \cos \omega, \\ \dot{z}_1 &= 0, & \dot{z}_2 &= \dot{z}_3 = -\frac{\sigma r \dot{r}}{(\sigma \mathbf{K})^{-1/2} (1 - \mathbf{K}r^2)^{-1/2}}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_1 \odot \dot{\mathbf{q}}_1 = 0,$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_2 \odot \dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_3 \odot \dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{K}r^2 \dot{\omega}^2 + \frac{\mathbf{K}\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2},$$

calculando su segunda derivada obtenemos

$$\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = \ddot{z}_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \cos \omega - (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sin \omega, \\ \ddot{y}_2 &= (\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \sin \omega + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cos \omega, \\ \ddot{x}_3 &= -(\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \cos \omega + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sin \omega, \\ \ddot{y}_3 &= -(\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) \sin \omega - (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cos \omega. \end{aligned}$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{z}_3 = -\sigma r \dot{r} (\sigma \mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{-1/2} - \mathbf{K}^{-1} \dot{r}^2 (\sigma \mathbf{K}^{-1} - \sigma r^2)^{-3/2}.$$

Sustituyendo los cálculos anteriores en las ecuaciones de movimiento

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) x_i, \\ m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U_1}{\partial y_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) y_i, \\ m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U_1}{\partial z_i} - m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) z_i, \end{cases} \quad (3.21)$$

obtenemos la siguiente relación para cada una de las componentes

$$\begin{cases} \ddot{x}_2, \ddot{x}_3 : & C \cos \omega - D \sin \omega, \\ \ddot{y}_2, \ddot{y}_3 : & C \sin \omega + D \cos \omega, \\ \ddot{z}_2, \ddot{z}_3 : & C, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde

$$C := C(t) = \ddot{r} - r(1 - \mathbf{K}r^2)\dot{\omega}^2 + \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2} + \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}},$$

$$D := D(t) = r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}.$$

El sistema de ecuaciones (3.22) está compuesto por una combinación lineal de las funciones seno y coseno. Por la naturaleza de las mismas, la única solución del sistema es para  $C = 0$  y  $B = 0$ .

La existencia y unicidad local de las órbitas homográficas Eulerianas con masas iguales es equivalente a demostrar la existencia de las soluciones del sistema diferencial (3.22).

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{s} &= -\frac{2\nu s}{r}, \\ \dot{\nu} &= r(1 - \mathbf{K}r^2)s^2 - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}}, \end{cases} \quad (3.23)$$

donde  $s = \dot{\omega}$  y sus condiciones iniciales son  $r(0) = r_0$ ,  $s(0) = s_0$  y  $\nu(0) = \nu_0$ . Por resultados clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales tenemos la existencia y la unicidad de las soluciones  $(r, s, \nu)$ .

En el capítulo anterior mostramos que para ciertos valores de la velocidad angular no existen equilibrios relativos Eulerianos, por lo que estamos restringidos al valor de  $\omega$  para tener soluciones homográficas Eulerianas. Por lo tanto hemos mostrado la existencia local y unicidad de las órbitas homográficas Eulerianas. ■

### 3.4. Órbitas Eulerianas

En la sección anterior mostramos la existencia de las soluciones homográficas Eulerianas. Estamos interesados en saber qué tipo de órbitas generan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{s} &= -\frac{2\nu s}{r}, \\ \dot{\nu} &= r(1 - \mathbf{K}r^2)s^2 - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Para ello, usando las dos primeras ecuaciones del sistema obtenemos

$$\dot{s} = -\frac{2\dot{r}s}{r}$$

mediante el método de separación de variables se tiene el valor de la velocidad angular

$$s = \frac{c}{r^2}, \quad (3.25)$$

donde  $c$  es constante de integración y  $s = \dot{\omega}$ . Si  $c \neq 0$ , el sistema (3.24) se reduce a

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Probaremos el siguiente lema que nos será útil para dar una clasificación de las soluciones Eulerianas.

**Lema 2.** *Supongamos que  $\mathbf{K} > 0$ ,  $m, > 0$  y  $c \neq 0$ . Entonces el sistema (3.26) solo tiene un punto fijo  $(r_0, 0)$  con  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$ .*

*Demostración.*

Para hallar los puntos fijos del sistema (3.26), hacemos  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{\nu} = 0$ , por lo que debemos encontrar los ceros de la siguiente función

$$u(r) = \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{r} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}}. \quad (3.27)$$

Lo anterior es equivalente a encontrar las raíces del polinomio

$$q(r) = 16\mathbf{K}^2 (c^4\mathbf{K} + m^2) r^6 - 8\mathbf{K} (6c^4\mathbf{K} + 5m^2) r^4 + (48c^4\mathbf{K} + 25m^2) r^2 - 16c^4.$$

Para simplificar los cálculos hacemos  $x = r^2$

$$q(x) = 16\mathbf{K}^2 (c^4\mathbf{K} + m^2) x^3 - 8\mathbf{K} (6c^4\mathbf{K} + 5m^2) x^2 + (48c^4\mathbf{K} + 25m^2) x - 16c^4.$$

Queremos determinar el número de raíces positivas del polinomio  $q(x)$ . Para ello usaremos el discriminante del polinomio cúbico.

**Definición 18.** El discriminante  $\Delta$  de un polinomio cúbico  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  es

$$\Delta = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2.$$

El siguiente resultado nos permite saber el número de raíces reales e imaginarias para un polinomio cúbico.

**Teorema 11.** Sea  $\Delta$  el discriminante del polinomio cúbico  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  con coeficientes reales. Entonces:

1. Si  $\Delta = 0$ , todas sus raíces son reales y al menos dos de ellas son iguales.
2. Si  $\Delta < 0$ , la ecuación tiene una raíz real y dos raíces imaginarias.
3. Si  $\Delta > 0$ , la ecuación tiene tres raíces reales simples [43].

Usaremos el Teorema anterior para el siguiente polinomio

$$\bar{q}(x) = x^3 - \frac{8\mathbf{K} (6c^4\mathbf{K} + 5m^2)}{16\mathbf{K}^2 (c^4\mathbf{K} + m^2)} x^2 + \frac{(48c^4\mathbf{K} + 25m^2)}{16\mathbf{K}^2 (c^4\mathbf{K} + m^2)} x - \frac{16c^4}{16\mathbf{K}^2 (c^4\mathbf{K} + m^2)}.$$

El discriminante del polinomio  $\bar{q}(x)$  es

$$\Delta = -64\mathbf{K}^3 (108c^8m^4\mathbf{K} + 125c^4m^6),$$

donde  $\mathbf{K} > 0$  y  $m > 0$ . Por el Teorema anterior, el polinomio  $\bar{q}(x)$  tiene una raíz real.

El polinomio podría tener tres raíces reales si variamos continuamente los valores de  $\mathbf{K}$ ,  $m$ , y  $c$ , resultando así raíces dobles. Sin embargo, por la existencia y unicidad del punto  $(r_0, 0)$  no es posible obtener raíces dobles. Finalmente tenemos que el punto fijo satisface  $r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$  para  $m > 0$ ,  $\mathbf{K} > 0$  y  $c \neq 0$ , y el comportamiento en los extremos del intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$  son  $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = +\infty$  y  $\lim_{r \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}} u(r) = -\infty$ . Hemos completado la demostración del lema. ■

En la siguiente subsección daremos la clasificación de las soluciones Eulerianas en la esfera.

### 3.4.1. Clasificación de las soluciones Eulerianas

**Teorema 12.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  con masas iguales existen tres clases de soluciones Eulerianas:*

- I) *Órbitas Eulerianas homotéticas que empiezan o terminan en una colisión total en un tiempo finito;*
- II) *Equilibrios relativos Eulerianos donde el cuerpo con masa  $m_1$  se encuentra fijo en uno de los polos de  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , mientras que los cuerpos restantes se mueven sobre un círculo paralelo al plano  $xy$ ;*
- III) *Órbitas homográficas Eulerianas cuasiperiódicas.*

*Ninguna de las órbitas anteriores puede cruzar el ecuador, definido como el círculo máximo ortogonal al eje  $z$ .*

*Demostración.*

Para demostrar el inciso (I) utilizaremos el valor de la velocidad angular que obtuvimos por separación de variables del sistema de ecuaciones (3.23), dado por

$$\dot{\omega} = \frac{c}{r^2},$$

Si el valor de  $c = 0$ , entonces la velocidad angular *omega* es cero, por lo que la órbita es homotética con una colisión triple en el Polo Norte. De manera similar a las órbitas Lagrangianas la colisión sucede en un tiempo finito, en caso de no ser así, por el criterio de

estabilidad de Lyapunov el punto  $r = 0$  tendría que ser un punto de equilibrio, pero no lo es. Por lo tanto, hemos demostrado el primer tipo de órbitas.

La existencia de los equilibrios relativos Eulerianos se probó en la sección 2.2, teniendo así el inciso (II), que dependen del valor de  $\omega$ .

Además, por la segunda ecuación del sistema (3.28), ninguna de las órbitas puede cruzar el ecuador debido a que en el punto  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$  tendríamos singularidades antipodales.

Para el resto de la demostración asumiremos que  $c \neq 0$ . Analizaremos el flujo del sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{c^2(1-\mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{m(5-4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1-\mathbf{K}r^2)^{1/2}} = F(r, \nu). \end{cases} \quad (3.28)$$

El flujo del sistema (3.28) se indetermina en los puntos  $r = 0$  y  $r = \mathbf{K}^{-1/2}$ . Es decir, el flujo está bien definido en la banda  $(0, \mathbf{K}^{-1/2}) \times \mathbb{R}$ . Las pendientes del mismo se encuentran dadas por la función

$$w(r, \nu) = \frac{d\nu}{dr} = \frac{c^2(1-\mathbf{K}r^2)}{\nu r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{m(5-4\mathbf{K}r^2)}{4\nu r^2(1-\mathbf{K}r^2)^{1/2}},$$

donde la función  $w(r, -\nu) = -w(r, \nu)$  es impar con respecto al eje  $r$  en el intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$ . El eje  $r$  no es invariante, debido a que  $\dot{r} = \nu$ . Por lo tanto el flujo cruza perpendicularmente el eje  $r$ , excepto en el punto fijo.

Además tenemos que si  $r \rightarrow 0$ , las pendientes del sistema tienden a  $\infty$ , mientras que si  $r \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}$ , las pendientes del sistema tienden a  $-\infty$ . Esto implica que en algún punto las pendientes serán cero.

Reescribiendo el lado derecho de la segunda ecuación del sistema diferencial (3.28) tenemos

$$F(r, \nu) = u(r)/r^2 + g_2(r, \nu),$$

donde  $g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2}$  y  $u(r)$  se definió en (3.27).

Las ceroclinas del sistema diferencial se encuentran dadas por

$$0 = \nu, \quad (3.29)$$

$$0 = \frac{c^2(1-\mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{m(5-4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1-\mathbf{K}r^2)^{1/2}} = F(r, \nu). \quad (3.30)$$

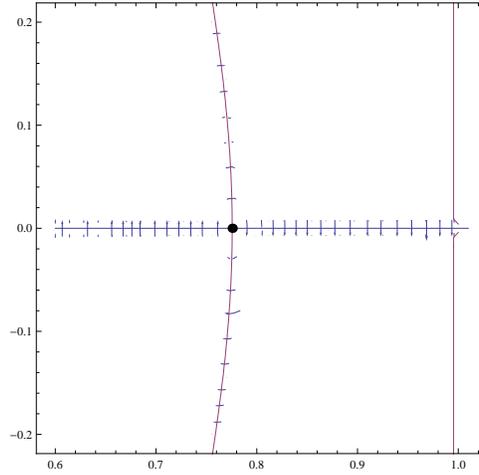


Figura 3.7: Ceroclinas de las soluciones Eulerianas.

Como  $\nu = 0$ , es suficiente con analizar la función  $u(r)$ . En el Lema 2 mostramos que la función  $u(r)$  corta el eje  $r$  en el punto fijo. Es decir, para  $x \in (0, r_0)$  tenemos  $u(x) > 0$ , y para  $x \in (r_0, 0)$  la función  $u(x)$  es negativa. Esto implica que el flujo cruza al eje  $r$  perpendicularmente hacia arriba cuando  $r < r_0$ , y hacia abajo para  $r > r_0$  (ver Figura 3.7).

La función  $F(r, \nu)$  no tiene singularidades en el intervalo  $r \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$  y además  $F(r_0, 0) = 0$ , por lo que la pendiente del flujo se anula.

Analizaremos el punto fijo  $(r_0, 0)$  para  $0 < r_0 < \mathbf{K}^{-1/2}$ . La parte lineal del campo vectorial del sistema (3.28) evaluada en el punto fijo es

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial F(r_0, 0)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Derivando la función  $F(r, \nu)$  y evaluándola en su punto fijo

$$\frac{\partial F(r_0, 0)}{\partial r} = \frac{1}{r_0^2} \left[ \frac{\partial u(r_0)}{\partial r} - \frac{u(r_0)}{r_0} \right],$$

donde

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r} = -c^2 \left( \frac{1 + \mathbf{K}^{1/2}}{r^2} \right) - \frac{mr\mathbf{K}}{2(\mathbf{K}r^2 - 1)^2}.$$

Notemos que  $u(r)$  es una función decreciente y  $u(r_0) = 0$ . Por lo tanto  $\frac{\partial F(r_0, 0)}{\partial r} < 0$ . El valor del discriminante  $\Delta = \text{Tr}B - 4\text{Det}B$  es negativo, lo cual implica que los valores

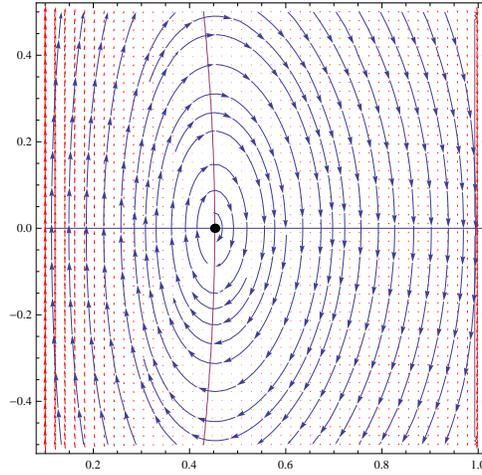


Figura 3.8: El flujo del sistema (3.26) tomando los valores  $\mathbf{K} = 1, c = 1, m = 1.5$  con un punto fijo.

propios son imaginarios puros. En consecuencia, el punto fijo puede ser un centro o una espiral para el sistema lineal.

Por otro lado tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \nu) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}} F(r, \nu) = -\infty, \quad (3.32)$$

Además la función  $F$  no tiene singularidades en el intervalo  $r_0 \in (0, \mathbf{K}^{-1/2})$  y  $F(r_0, 0) = 0$ . Esto implica que el flujo entra del lado izquierdo de  $r_0$  para  $\nu > 0$ , después cruza la ceroclina y finalmente cruza el eje  $r$  del lado derecho del punto fijo. Por la simetría del campo vectorial con respecto al eje  $r$  tenemos órbitas cerradas en el plano  $(r - \nu)$ . Recordemos que el sistema de ecuaciones diferenciales depende de tres variables  $(r, \nu, s)$ , por lo que estas órbitas corresponden a órbitas cuasiperiódicas. Por lo tanto hemos demostrado la existencia de las órbitas homográficas Eulerianas del inciso (III). En la Figura 3.8 se muestra el espacio fase de las variables  $r$  y  $\nu$ . ■

Dimos una clasificación para una familia de soluciones homográficas Lagrangianas y Eulerianas en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Para las soluciones Lagrangianas los cuerpos están en un plano ortogonal al eje de rotación  $z$  y para las soluciones Eulerianas, la masa  $m_1$  está en el Polo Norte mientras que las dos restantes equidistan de la masa  $m_1$  y están en el mismo plano.

En los siguientes dos capítulos analizaremos las órbitas en superficies con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ .

## CAPÍTULO 4

# EQUILIBRIOS RELATIVOS EN $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$

En los capítulos anteriores estudiamos una familia particular de equilibrios relativos y soluciones homográficas en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Tomando lo anterior como base, en este capítulo analizaremos el movimiento de las partículas en superficies con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ , es decir, estudiaremos el comportamiento de los cuerpos en la hoja superior del hiperboloide  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  encajado en el espacio  $\mathbb{R}^{2,1}$ , el cual definiremos más adelante. Para tal efecto, es necesario retomar la Definición 8 que nos habla sobre los equilibrios relativos. Recordemos que los equilibrios relativos son soluciones  $\mathbf{q}$  del sistema de ecuaciones (1.34), que permanecen invariantes bajo el grupo de isometrías del hiperboloide.

Antes de empezar con el estudio de los equilibrios relativos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ , introduciremos algunas ideas básicas de la Geometría Hiperbólica para comprender el movimiento de las partículas en el hiperboloide. Los modelos usuales de la Geometría Hiperbólica, aparte del hiperboloide, son el disco de Poincaré y el semiplano superior de Poincaré, estos modelos preservan los ángulos en el plano hiperbólico, otro de los modelos es el disco de Klein-Beltrami, el cual no es conforme como los dos anteriores. Para el estudio de los equilibrios relativos y las soluciones homográficas usaremos el modelo de Karl Weierstrass, el cual algunos lo llaman esfera hiperbólica o pseudo esfera. Este modelo es mucho más natural que los otros modelos, ya que es similar analíticamente al modelo de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

El modelo de Weierstrass se construye a partir de una de las hojas del hiperboloide, cuya ecuación es  $x^2 + y^2 - z^2 = -\mathbf{K}^{-1}$ . El hiperboloide está encajado en el espacio de dimensión tres de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1} := (\mathbb{R}^3, \odot)$ , donde la operación  $\odot$  es el producto de Lorentz de los vectores  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  y  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  dado por

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y - a_z b_z.$$

Esta superficie se puede pensar como una pseudo esfera de radio imaginario  $iR$ , cuya relación con la curvatura es  $\mathbf{K}^{-1} = (iR)^2$ .

Por otra parte, una transformación lineal biyectiva  $T : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$  se dice isometría lineal o transformación de Lorentz lineal del espacio de Minkowski si preserva la métrica de Lorentz, es decir si preserva el producto  $\odot$  como sigue

$$T(\mathbf{a}) \odot T(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \odot \mathbf{a},$$

para cualquier  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2,1}$ . El conjunto de estas transformaciones junto con el producto de Lorentz forman un subgrupo del grupo de isometrías llamado *Grupo de Lorentz*. Este subgrupo de isometrías lineales es isomorfo al grupo ortogonal  $O(\mathbb{R}^{2,1}) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) | A^t G A = G\}$  donde todas las matrices tienen determinante  $\pm 1$  y  $G$  es la métrica de Minkowski. Por lo tanto, el grupo de Lie  $SO(\mathbb{R}^{2,1})$  es un subgrupo de  $O(\mathbb{R}^{2,1})$ , mientras que el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariante a  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ , denotado por  $G(\mathbb{R}^{2,1})$ , también es subgrupo de  $O(\mathbb{R}^{2,1})$ . En base a lo anterior definimos el subgrupo de Lorentz  $\text{Lor}(\mathbb{R}^{2,1}) := G(\mathbb{R}^{2,1}) \cap SO(\mathbb{R}^{2,1})$ .

Por resultados básicos de Geometría Diferencial y el Teorema del Eje Principal de Euler, las isometrías en el hiperboloide se representan por medio de las matrices  $A_1, A_2, A_3$ , es decir cualquier isometría se puede representar en su forma canónica como [28], [37]

$$A_1(\theta) = P \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (4.1)$$

para la transformación elíptica, donde  $\theta \in [0, 2\pi)$  y las matrices  $P, P^{-1} \in \text{Lor}(\mathbb{R}^{2,1})$ . Mientras que las transformaciones *hiperbólicas* se representan como

$$A_2(s) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh s & \sinh s \\ 0 & \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (4.2)$$

para  $s \in \mathbb{R}$  con  $P, P^{-1} \in \text{Lor}(\mathbb{R}^{2,1})$  y finalmente, las transformaciones *parabólicas* en el hiperboloide para  $t \in \mathbb{R}$  las representamos

$$A_3(t) = P \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - t^2/2 & t^2/2 \\ t & -t^2/2 & 1 + t^2/2 \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (4.3)$$

donde  $P \in \text{Lor}(\mathbb{R}^{2,1})$ . Por último, las geodésicas en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  son hipérbolas que se obtienen con la intersección del hiperboloide y los planos que pasan por el origen del sistema coordenado.

A continuación estudiaremos los puntos fijos en el hiperboloide y definiremos los equilibrios relativos elípticos, los hiperbólicos y los parabólicos en el hiperboloide. Además, mostraremos que no existen equilibrios relativos de tipo parabólico. Recordemos que en este trabajo nos hemos enfocado en equilibrios relativos Lagrangianos y Eulerianos, por esta razón mostraremos resultados referentes a los mismos.

**Definición 19.** *Un equilibrio relativo elíptico en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  es una solución  $\mathbf{q}$  de las ecuaciones de movimiento (1.34) invariante bajo la transformación  $A_1(\theta)$  para  $\theta \in [0, 2\pi)$ .*

**Definición 20.** *Un equilibrio relativo hiperbólico en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  es una solución  $\mathbf{q}$  de las ecuaciones de movimiento (1.34) invariante bajo la transformación  $A_2(s)$ , donde  $s \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 21.** *Un equilibrio relativo parabólico en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  es una solución  $\mathbf{q}$  de las ecuaciones de movimiento (1.34) invariante bajo la transformación  $A_3(t)$  donde  $t \in \mathbb{R}$ .*

Los equilibrios relativos elípticos son transformaciones alrededor del eje  $z$ . A continuación, siguiendo la estructura del capítulo 2, estudiaremos la existencia de los puntos fijos en el hiperboloide. Recordemos que los puntos fijos son las soluciones más simples del sistema de ecuaciones (1.34), la definición de los mismos se escribe a continuación.

**Definición 22.** *La solución del sistema (1.36) es un punto fijo si*

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{q}_i} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}(t)) = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_i(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$

A diferencia de la esfera, en el hiperboloide no existen puntos fijos. Este hecho es enunciado por el siguiente teorema en [25].

**Teorema 13.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  con  $n \geq 2$ . Ninguna configuración corresponde a un punto fijo de las ecuaciones de movimiento (1.34).*

A continuación estudiaremos la familia de equilibrios relativos hiperbólicos de tipo elíptico. En este tipo de soluciones podemos encontrar soluciones Lagrangianas y Eulerianas.

## 4.1. Equilibrios relativos hiperbólicos de tipo elíptico

Como se vio en el capítulo 2, el estudio de los equilibrios relativos elípticos puede llegar a ser bastante complejo. Por este motivo limitaremos la posición de los cuerpos para los equilibrios

relativos hiperbólicos de tipo elíptico, esta restricción consiste en ubicar los cuerpos en el mismo plano ortogonal al eje de rotación  $z$ .

Por lo tanto, un equilibrio relativo elíptico es una solución  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$  de las ecuaciones de movimiento para  $i = 1, \dots, n$ , y sus coordenadas se encuentran dadas por

$$x_i = r_i \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = r_i \sin(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = (r_i^2 + \mathbf{K}^{-1})^2. \quad (4.4)$$

donde  $\omega, \alpha_i$  y  $r_i$  son constantes para  $i = 1, \dots, n$ .

Es importante notar que en esta sección estudiamos una familia particular de equilibrios relativos hiperbólicos de tipo elíptico.

A continuación mostraremos la relación que existe entre la velocidad y las masas de los cuerpos. Esto con el objetivo de obtener la familia particular de equilibrios relativos elípticos.

**Teorema 14.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos con masas iguales en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que los cuerpos están en los vértices del polígono regular de  $n$  lados ortogonal al eje  $z$ . Entonces, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos elípticos.*

*Demostración.*

De manera similar a como se hizo en (5) para el caso de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , la demostración se dividirá en dos casos: (i) cuando  $n$  es impar y (ii) cuando  $n$  es par.

### Caso (i)

Para simplificar la notación, etiquetaremos a cada uno de los cuerpos como  $\mathbf{q}_i$ , donde  $i = -s, \dots, -1, 0, 1, \dots, s-1, s$ .

Además, los cuerpos están en los vértices de un polígono regular de  $n$  lados, por lo que el valor de  $\alpha_i$  es

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{2s+1}i, \quad \forall i = -s, \dots, s.$$

Por hipótesis, las masas de los  $n$  cuerpos son iguales y, sin pérdida de generalidad, sustituimos en las ecuaciones de movimiento (1.38), con  $2s+1 = n$ , una solución de la forma  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , donde

$$x_i = r_i \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = r_i \sin(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = \pm(r_i^2 + 1)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Consideremos el cuerpo de la posición  $\mathbf{q}_0$ . Realizando un poco de álgebra obtenemos la ecuación correspondiente a la coordenada  $z_0$ .

$$\sum_{j=-s, j \neq 0}^s \frac{m(z + c_{0j}z)}{(c_{0j}^2 - 1)^{3/2}} - r^2 \omega^2 z = 0,$$

donde  $c_{0j} = -x_0x_j - y_0y_j - z_0z_j = \cos \alpha_j - z^2 \cos \alpha_j + z^2$ . Con el objetivo de simplificar los cálculos de las ecuaciones, supondremos que  $\mathbf{K} = -1$ . Usando la paridad de la función coseno  $c_{0(-j)} = c_{0j}$  y el hecho de que  $r^2 - z^2 = -1$ , podemos re escribir la ecuación como

$$\sum_{j=1}^s \frac{2(1 - \cos \alpha_j)}{(c_{0j-1}^2)^{3/2}} = \frac{\omega^2}{m}. \quad (4.6)$$

Para obtener las ecuaciones correspondientes a  $x_0$  y  $y_0$  se realiza el mismo procedimiento.

Sustituyendo (4.6) en la primera ecuación del sistema (1.38), tenemos que

$$(r^2 - 1)\omega^2 \cos \omega t = \sum_{j=-s, j \neq 0}^s \frac{m[\cos(\omega t + \alpha_j) + c_{0j} \cos \omega t]}{(c_{0j}^2 - 1)^{3/2}}.$$

Resolviendo tenemos que

$$\frac{\omega^2}{m} = \sum_{j=1}^s \frac{2}{(1 - \cos \alpha_j)^{1/2} (z^2 - 1)^{3/2} [2 - (1 - \cos \alpha_j)(z^2 - 1)]^{3/2}}.$$

Es importante hacer notar que el lado derecho de la ecuación anterior es positivo para cualquier valor fijo de  $z \in (-1, 1)$ . Por lo tanto, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que satisfacen la ecuación anterior.

En conclusión, el polígono regular con un número impar de cuerpos es un equilibrio relativo elíptico.

**Caso (ii)**

De manera similar al caso anterior, etiquetaremos los cuerpos como  $\mathbf{q}_i$  donde  $i = -s + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s - 1, s$ .

La posición de los cuerpos en un polígono regular con  $n$  par está determinado por el valor de

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{s}i, \quad \forall i = -s + 1, \dots, s - 1, s.$$

Sin pérdida de generalidad, sustituimos una solución de la forma (4.5) en las ecuaciones de movimiento (1.38), donde  $s = n/2$ . Análogamente al caso impar, usaremos las ecuaciones correspondientes para el cuerpo  $\mathbf{q}_0$  y utilizaremos la coordenada  $z_0$ . Con lo anterior encontramos que

$$\frac{\omega^2}{m} = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{2(1 - \cos \alpha_j)}{(c_{0j}^2 - 1)^{3/2}} + \frac{2}{(c_{0s}^2 - 1)^{3/2}}.$$

Para obtener la ecuación correspondiente a la coordenada  $x_0$  es necesario hacer álgebra, sin dejar fuera el hecho de que  $\sin \alpha_j = -\sin \alpha_{-j}$ . Esta ecuación es de particular importancia pues nos da la relación entre la velocidad angular y la masa.

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{m} &= \frac{1}{4z^2|z|(1 - z^2)^{3/2}} \\ &+ \sum_{j=1}^{s-1} \frac{2}{(1 - \cos \alpha_j)^{1/2}(z^2 - 1)^{3/2}[2 - (1 - \cos \alpha_j)(z^2 - 1)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Notemos que el lado izquierdo de la ecuación anterior es positivo para cualquier valor de  $z \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ . Así, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que satisfacen la ecuación anterior.

Ya demostrados ambos casos, podemos concluir que el polígono regular de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  es un equilibrio relativo. ■

Como hemos mencionado con anterioridad, existen configuraciones Lagrangianas y Eule-rianas. Para probar la existencia de las mismas, es necesario extender nuestro estudio al problema de los tres cuerpos.

### 4.1.1. Equilibrios relativos elípticos Lagrangianos

De manera similar que en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , estudiaremos los equilibrios relativos elípticos para tres cuerpos en el hiperboloide, en particular cuando los cuerpos están en el mismo plano ortogonal al eje de rotación. El sistema de ecuaciones que definen el movimiento de los cuerpos es el siguiente

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j \mathbf{K}^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Recordemos que una solución Lagrangiana es una solución de las ecuaciones de movimiento donde la distancia entre los tres cuerpos es la misma. A continuación encontraremos la relación entre las masas y la velocidad angular para  $n = 3$ .

**Corolario 3.** *Consideremos el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  con masas iguales  $m := m_1 = m_2 = m_3$ . Entonces, para cualquier valor de  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$  existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos elípticos Lagrangianos. Además, si  $\omega^2/m > 0$ , existe un único valor de  $z > 0$  que genera equilibrios relativos elípticos Lagrangianos*

*Demostración.*

Sustituimos en el sistema de ecuaciones (4.7) una solución  $\mathbf{q}_i$  de la forma

$$x_i = r \cos(\omega t + \alpha_i), \quad y_i = r \sin(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = \sqrt{r^2 + \mathbf{K}^{-1}}, \quad (4.8)$$

donde  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2\pi/3$ ,  $\alpha_3 = 4\pi/3$ , con lo que obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{8(-\mathbf{K})^{3/2}}{3^{3/2}(\mathbf{K}z^2 - 1)^2(3\mathbf{K}^2z^4 - 1 - 2\mathbf{K}z^2)^{1/2}}.$$

Es importante hacer notar que el lado derecho es positivo para cualquier valor de  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$ , tiende a infinito cuando  $z \rightarrow \mathbf{K}^{-1/2}$  y tiende a cero cuando  $z \rightarrow 0$ . Utilizando la expresión anterior, estudiaremos la relación entre la velocidad angular  $\omega$  y la masa  $m$ . Sea

$$f(z) = \frac{8(-\mathbf{K})^{3/2}}{3^{3/2}(\mathbf{K}z^2 - 1)^2(3\mathbf{K}^2z^4 - 1 - 2\mathbf{K}z^2)^{1/2}}.$$

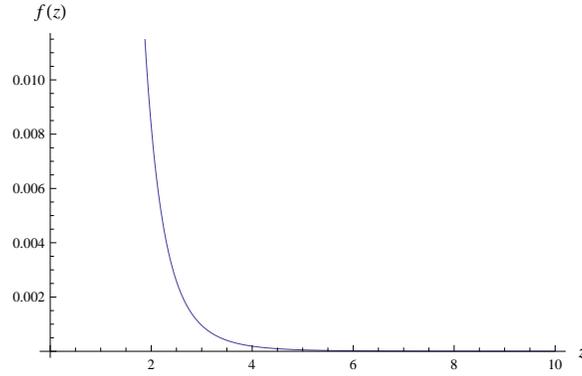


Figura 4.1: Gráfica de la función  $f(z)$  con  $\mathbf{K} = -1$ .

Como la función  $f(z)$  es positiva para  $z \in [\mathbf{K}^{-1/2}, \infty)$ , ver Figura 4.1, existe un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos elípticos. ■

A continuación demostramos la relación de las masas de los tres cuerpos para la existencia de equilibrios relativos elípticos Lagrangianos.

**Proposición 3.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que los cuerpos con masas  $m_1, m_2, m_3$  se encuentran inicialmente en los vértices de un triángulo equilátero, en el plano  $z = \text{constante}$  para algún  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$ . Entonces existen equilibrios relativos elípticos si y solo si las masas son iguales; es decir  $m_1 = m_2 = m_3$ .*

*Demostración.*

Para realizar la demostración, sustituimos las soluciones de la forma (4.8) en las ecuaciones de movimiento (4.7). Las ecuaciones de movimiento para cada una de las coordenadas son:

$$\ddot{z}_1 = \frac{z}{9(1 - \mathbf{K}z^2)} \left[ 9\omega^2 (\mathbf{K}z^2 - 1)^2 + \frac{4\sqrt{3}(-\mathbf{K})^{3/2} (m_2 + m_3)}{(3\mathbf{K}^2 z^4 - 2\mathbf{K}z^2 - 1)^{1/2}} \right], \quad (4.9)$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{z}{9(1 - \mathbf{K}z^2)} \left[ 9\omega^2 (\mathbf{K}z^2 - 1)^2 + \frac{4\sqrt{3}(-\mathbf{K})^{3/2} (m_1 + m_3)}{(3\mathbf{K}^2 z^4 - 2\mathbf{K}z^2 - 1)^{1/2}} \right], \quad (4.10)$$

$$\ddot{z}_3 = \frac{z}{9(1 - \mathbf{K}z^2)} \left[ 9\omega^2 (\mathbf{K}z^2 - 1)^2 + \frac{4\sqrt{3}(-\mathbf{K})^{3/2} (m_1 + m_2)}{(3\mathbf{K}^2 z^4 - 2\mathbf{K}z^2 - 1)^{1/2}} \right]. \quad (4.11)$$

Recordemos que la variable  $z := z_1 = z_2 = z_3$  es una constante, es decir  $\ddot{z} = 0$ . Por lo tanto, despejando  $(m_2 + m_3)$  de la ecuación (4.9) obtenemos

$$(m_2 + m_3) = -\frac{3\sqrt{3}\omega^2 (\mathbf{K}z^2 - 1) (3\mathbf{K}^2 z^4 - 2\mathbf{K}z^2 - 1)^{1/2}}{4(-\mathbf{K})^{3/2}},$$

En conclusión, despejando los términos  $(m_1 + m_3)$  y  $(m_1 + m_2)$  de las ecuaciones (4.10) y (4.11) respectivamente, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = \gamma\omega^2, \\ m_2 + m_3 = \gamma\omega^2, \\ m_3 + m_1 = \gamma\omega^2, \end{cases} \quad (4.12)$$

donde  $\gamma = 3\sqrt{3} (\mathbf{K}z^2 - 1) (3\mathbf{K}^2 z^4 - 2\mathbf{K}z^2 - 1)^{1/2} / 4(-\mathbf{K})^{3/2}$ . Notemos que la única solución para el sistema (2.14) es que se cumpla la siguiente expresión

$$m_1 = m_2 = m_3 = \gamma\omega^2/2.$$

Por lo tanto, las masas de los tres cuerpos posicionados en un triángulo equilátero deben ser iguales para que existan equilibrios relativos elípticos. Hemos demostrado la ida.

La demostración del regreso es inmediata, suponemos que las masas son iguales  $m_1 = m_2 = m_3$  y usando el Teorema 14 para  $n = 3$  obtenemos la existencia de los equilibrios relativos elípticos.

Por lo tanto, existen equilibrios relativos elípticos si las masas de los cuerpos son iguales. ■

El siguiente resultado nos muestra las condiciones necesarias para que una solución Lagrangiana sea un equilibrio relativo elíptico Lagrangiano. La demostración del siguiente resultado es la misma que la del Teorema 6, basta con reemplazar los signos correspondientes a la métrica hiperbólica.

**Teorema 15.** *Supongamos que tenemos tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  donde las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  rotan sobre el mismo círculo ortogonal al eje de rotación. Entonces existen soluciones Lagrangianas si las masas son iguales, esto es  $m_1 = m_2 = m_3$ .*

*Demostración.*

Tomemos una solución Lagrangiana (4.4) donde los cuerpos con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  están en el mismo plano ortogonal al eje  $z$ . Entonces  $r := r_1 = r_2 = r_3$  la solución Lagrangiana es de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \omega t, & y_1 &= r \sin \omega t, & z_1 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, \\ x_2 &= r \cos(\omega t + 2\pi/3), & y_2 &= r \sin(\omega t + 2\pi/3), & z_2 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, \\ x_3 &= r \cos(\omega t + 4\pi/3), & y_3 &= r \sin(\omega t + 4\pi/3), & z_3 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como los tres cuerpos están en la misma altura y forman un triángulo equilátero, se sigue que el ángulo que forman los cuerpos entre sí y el eje de rotación  $z$  es constante. Por otra parte, el momento angular de la solución Lagrangiana debe ser cero, en otras palabras, paralelo al eje  $z$ . Pero si el momento angular gira alrededor de este eje se violan las integrales del momento angular, es por este motivo que basta probar que las últimas dos componentes del vector  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i$  son cero.

$$m_1 r z_1 \sin \omega t + m_2 r z_2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + m_3 r z_3 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) = 0. \quad (4.13)$$

Si el valor de  $\omega$  es distinto de cero, en consecuencia para el tiempo  $t = 0$  se tiene

$$m_2 r z_2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -m_3 r z_3 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right). \quad (4.14)$$

La configuración del sistema es un triángulo equilátero, por lo que la distancia entre cada uno de los cuerpos es una constante, la cual denotaremos como  $\delta$  y cuyo valor está dado por

$$\delta = \mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 \odot \mathbf{q}_3.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento para la coordenada  $\ddot{y}_1$  es:

$$\ell r(r^2 + 1)\omega^2 \sin \omega t = m_2 r \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + m_3 r \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right),$$

donde  $\ell$  es una constante distinta de cero y para  $t = 0$  se cumple

$$m_2 r \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -m_3 r \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right). \quad (4.15)$$

Usando la ecuación anterior y la ecuación (4.14) concluimos que  $z_2 = z_3$ . y, de manera análoga  $z_1 = z_2$  y  $z_1 = z_3$ . Con esto podemos afirmar que las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  están

en la misma altura  $z$  y que por la Proposición 3, las masas de los tres cuerpos son iguales.

■

Ya hemos obtenido los resultados análogos a los equilibrios relativos Lagrangianos en la esfera, a continuación estudiaremos los equilibrios relativos elípticos Eulerianos en el hiperboloide.

### 4.1.2. Equilibrios relativos elípticos Eulerianos

La familia particular de equilibrios relativos elípticos Eulerianos que estudiaremos en lo que resta del capítulo son aquellas configuraciones donde la masa  $m_1$  está en el punto  $(0, 0, \mathbf{K}^{-1/2})$  y las masas restantes equidistan de la masa  $m_1$ . En otras palabras las masas  $m_2$  y  $m_3$  se encuentran en el mismo plano ortogonal al eje de rotación  $z$ .

El siguiente resultado nos muestra la existencia de los equilibrios relativos Eulerianos elípticos y la relación con el valor de  $\omega$ .

**Teorema 16.** *Consideremos el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ . Supongamos que las masas de los cuerpos son iguales  $m := m_1 = m_2 = m_3$ . Si fijamos el cuerpo con masa  $m_1$  en  $(0, 0, \mathbf{K}^{-1/2})$  y los cuerpos restantes equidistantes del cuerpo con masa  $m_1$ , entonces para  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$  existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos Eulerianos elípticos.*

*Demostración.*

Sustituimos en la ecuación de movimiento (4.7) una solución de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & z_1 &= \mathbf{K}^{-1/2}, \\ x_2 &= r \cos \omega t, & y_2 &= r \sin \omega t, & z_2 &= z, \\ x_3 &= -r \cos \omega t, & y_3 &= -r \sin \omega t, & z_3 &= z, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$  y  $r > 0$  son constantes que satisfacen  $z^2 = r^2 + \mathbf{K}^{-1}$ . Haciendo uso de identidades trigonométricas obtenemos la siguiente ecuación algebraica

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3 = (1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}, \quad \mathbf{K}\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3 = 1 - 2\mathbf{K}r^2.$$

Realizando las derivadas correspondientes de las ecuaciones (4.16), sustituimos los cálculos en las ecuaciones de movimiento (4.7). Simplificando obtenemos la siguiente expresión en términos de  $z$ :

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{\mathbf{K}^{5/2}}{z(1 + \mathbf{K}^4 z^2)^{3/2}} + \frac{(\mathbf{K}z^2 - \mathbf{K}^2 z^4)^{1/2}}{4\mathbf{K}^{1/2} z^4 (\mathbf{K}^{1/2} z + 1)^2 (\mathbf{K}^{1/2} z - 1)^2}. \quad (4.17)$$

Notemos que la parte derecha de la ecuación  $\omega^2/m$  es positiva para  $z > \mathbf{K}^{-1/2}$ , por lo tanto existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos elípticos Eulerianos. El signo de  $\omega$  determina el sentido de la rotación. ■

Recordemos que sólo analizamos una familia particular de equilibrios relativos elípticos en el hiperboloide, a continuación estudiaremos aquellas soluciones que son invariantes a las rotaciones alrededor del eje  $x$ .

## 4.2. Equilibrios relativos hiperbólicos

En esta sección estudiaremos los equilibrios relativos hiperbólicos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ , recordemos que un equilibrio relativo hiperbólico es una solución  $q$  de las ecuaciones de movimiento. Debido a que la transformación  $A_2$  deja invariante  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ , las solución es de la forma  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$  donde sus coordenadas son

$$x_i = \text{constante}, \quad y_i = r_i \cosh(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = r_i \sinh(\omega t + \alpha_i), \quad (4.18)$$

para  $\omega, \alpha_i$  constantes y  $r_i = (\mathbf{K}^{-1} + x_i^2)^{1/2} \geq \mathbf{K}^{-1}$  con  $i = 1, \dots, n$ .

A continuación mostraremos si los cuerpos están sobre la misma línea geodésica entonces no existen equilibrios relativos hiperbólicos.

**Teorema 17.** *A lo largo de una línea geodésica fija no existen equilibrios relativos hiperbólicos para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ .*

*Demostración.*

Sin pérdida de generalidad, elegimos la línea geodésica  $x = 0$ , y mostremos que las ecuaciones de movimiento no tienen soluciones de la forma (4.18) equilibrios relativos hiperbólicos. Sustituimos las expresiones

$$x_i = 0, \quad y_i = \sinh(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = \cosh(\omega t + \alpha_i),$$

en las ecuaciones de movimiento (4.7) y realizando algunos cálculo obtenemos la ecuación de movimiento para la coordenada  $y_i$

$$\sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{m_j [\sinh(\omega t + \alpha_j) - \cosh(\alpha_i - \alpha_j) \sinh(\omega t + \alpha_i)]}{[\sinh(\alpha_i - \alpha_j)]^3} = 0. \quad (4.19)$$

Supongamos que  $\alpha_i > \alpha_j$  para  $j \neq i$ . Sea  $\alpha_{\max(i)}$  el máximo de todos los  $\alpha_j$  para  $j \neq i$ , entonces para  $t \in (-\alpha_{\max(i)}/\omega, \alpha_i/\omega)$  se cumple

$$\sinh(\omega t + \alpha_j) < 0, \quad \sinh(\omega t + \alpha_i) > 0, \quad \text{para } j \neq i.$$

En consecuencia, la parte izquierda de la ecuación (4.19) es negativa en el intervalo  $(-\alpha_{\max(i)}/\omega, \alpha_i/\omega)$ , por lo tanto esta ecuación no tiene sentido para todo valor de  $t \in \mathbb{R}$ . Usando este hecho, es necesario que se cumpla  $\alpha_{\max(i)} \geq \alpha_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Notemos que esta condición conlleva a que existe por lo menos una  $i$  y una  $j$  con  $i \neq j$  tales que  $\alpha_i = \alpha_j$  y  $\sinh(\alpha_i - \alpha_j) = 0$ . La ecuación (4.19) se indetermina. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento (4.7) no admiten soluciones de la forma (4.18). En conclusión, no existen equilibrios relativos hiperbólicos sobre la línea geodésica  $x = 0$ . ■

A continuación mostramos una condición sobre la velocidad para generar equilibrios relativos hiperbólicos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ .

**Teorema 18.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  con masas iguales, existen un valor positivo y uno negativo de  $\omega$  que generan equilibrios relativos hiperbólicos Eulerianos.*

*Demostración.*

Probaremos que una solución  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  para  $i = 1, \dots, 3$ , es un equilibrio relativo hiperbólico del sistema de ecuaciones (4.7) de la forma

$$x_i = \text{constante}, \quad y_i = r_i \cosh(\omega t + \alpha_i), \quad z_i = r_i \sinh(\omega t + \alpha_i), \quad (4.20)$$

donde  $r = (\mathbf{K}^{-1} + x^2)^{1/2}$ . Notemos que se cumple las siguientes expresiones

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2 = x_1 x_3 + y_1 y_3 - z_1 z_3 = -r,$$

$$x_2 x_3 + y_2 y_3 - z_2 z_3 = -2x^2 - \mathbf{K}^{-1},$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 - \dot{z}_1^2 = \omega^2, \quad \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 - \dot{z}_2^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 - \dot{z}_3^2 = r^2 \omega^2.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las ecuaciones de movimiento (4.7) obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\omega^2}{m} = \frac{4x^2 + 5}{4x^2|x|(x^2 + \mathbf{K}^{-1})^{3/2}}.$$

Hemos obtenido la relación entre la función angular y la masa para la existencia de equilibrios relativos hiperbólicos. ■

Ya para terminar, analizaremos la existencia de los equilibrios relativos parabólicos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ .

### 4.3. Equilibrios relativos parabólicos

Un equilibrio relativo parabólico es una solución  $q_i = (x_i, y_i, z_i)$  de las ecuaciones de movimiento para  $i = 1, \dots, n$ , de la forma

$$\begin{aligned} x_i &= a_i - b_i t + c_i t, \\ y_i &= a_i - b_i(1 - t^2/2) + c_i t^2/2, \\ z_i &= a_i - b_i t^2/2 + c_i(1 - t^2/2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  son constantes para  $i = 1, \dots, n$  y satisfacen la expresión  $a_i^2 + b_i^2 - c_i^2 = -\mathbf{K}^{-1}$ .

A continuación probaremos que no existen equilibrios relativos parabólicos para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ . A continuación mostramos el resultado.

**Teorema 19.** *Para el problema de los  $n$  en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  no existen equilibrios relativos parabólicos.*

*Demostración.*

Tomemos una solución  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ , de la forma (4.21). Derivando cada una de las coordenadas obtenemos

$$\dot{x}_i = -b_i + c_i, \quad \dot{y}_i = a_i + (c_i - b_i)t, \quad \dot{z}_i = a_i + (c_i - b_i)t.$$

Calculando el momento angular, notemos que la primer componente es

$$\sum_i m_i a_i (b_i - c_i) - \sum_i m_i (b_i - c_i)^2 t.$$

La primer componente del momento angular debe ser una constante, de la ecuación anterior se sigue que  $b_i = c_i$ . Además,  $a_i^2 + b_i^2 - c_i^2 = -\mathbf{K}^{-1}$  y usando este hecho junto con la igualdad anterior obtenemos  $a_i^2 = -\mathbf{K}^{-1}$ . Finalmente hemos llegado a una contradicción debido a que  $a_i \in \mathbb{R}$ . ■

En conclusión, en este capítulo mostramos la existencia de una familia particular de equilibrios relativos hiperbólicos de tipo elíptico. Por la semejanza del mismo con los equilibrios de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , encontramos las soluciones Eulerianas y Lagrangianas. Por otro lado, estudiamos los equilibrios relativos hiperbólicos y mostramos la relación entre la velocidad angular y la masa. Por último, demostramos que en el problema de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} < 0$  no existen equilibrios relativos hiperbólicos de tipo parabólico.



## CAPÍTULO 5

### SOLUCIONES HOMOGRAFICAS EN $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$

Para el problema de los tres cuerpos estudiaremos la existencia de las soluciones homográficas en superficies con curvatura  $\mathbf{K}$  negativa. De manera similar al caso de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , las soluciones homográficas son aquellas soluciones de las ecuaciones de movimiento que mantienen la misma configuración para todo tiempo, sin embargo debido a que los cuerpos se mueven en la hoja superior del hiperboloide  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  encajado en el espacio  $\mathbb{R}^{2,1}$  la clasificación de las soluciones difieren a la clasificación que dimos en el capítulo 2.

Recordemos que existen varios tipos de equilibrios relativos en el hiperboloide, por lo tanto analizaremos y clasificaremos por separado las soluciones homográficas elípticas y las soluciones homográficas hiperbólicas. Debido a que no hay equilibrios relativos parabólicos, se sigue que no existen soluciones homográficas parabólicas en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ .

La ecuación de movimiento para el problema de los tres cuerpos es de la forma

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_j \mathbf{K}^{3/2} [\mathbf{q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_i]}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{q}_i \odot \mathbf{q}_j)^2]^{3/2}} - (\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}_i \odot \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

En el capítulo 3 obtuvimos el sistema de ecuaciones que generan soluciones homográficas elípticas, por lo que basta dar la clasificación de sus soluciones. En el caso de las soluciones homográficas hiperbólicas obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales que las generan para dar la clasificación de sus soluciones.

## 5.1. Soluciones homográficas elípticas

Como mencionamos anteriormente el sistema de ecuaciones que generan soluciones Lagrangianas y Eulerianas se calculó en el capítulo 3. Recordemos que estamos estudiando una familia particular de soluciones homográficas de tipo elíptico y la restricción que imponemos a los cuerpos, para las soluciones Lagrangianas, es que todos se encuentren a la misma altura o en el mismo plano ortogonal al eje de rotación  $z$ . Mientras que para las soluciones Eulerianas, posicionaremos el cuerpo con masa  $m_1$  en el punto  $(0, 0, \mathbf{K}^{-1})$  y los dos restantes en el mismo plano equidistante de la masa  $m_1$ . En lo que resta de la sección daremos una clasificación de las soluciones homográficas Lagrangianas y Eulerianas.

### 5.1.1. Órbitas Lagrangianas

Para el problema de los tres cuerpos en una superficie con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ , la familia particular de soluciones Lagrangianas que estamos estudiando son de la forma  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ , donde  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ , y sus coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \omega, & y_1 &= r \sin \omega, & z_1 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, \\ x_2 &= r \cos(\omega + 2\pi/3), & y_2 &= r \sin(\omega + 2\pi/3), & z_2 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, \\ x_3 &= r \cos(\omega + 4\pi/3), & y_3 &= r \sin(\omega + 4\pi/3), & z_3 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

la variable  $r = r(t)$  es la función del cambio de tamaño mientras que  $\omega = \omega(t)$  es la función angular. El sistema de ecuaciones que generan soluciones homográficas elípticas de Lagrange es

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{s} &= -\frac{2\nu s}{r}, \\ \dot{\nu} &= r(1 - \mathbf{K}r^2)s^2 - \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (5.3)$$

donde  $s = \dot{\omega}$ ,  $c \neq 0$  y  $\mathbf{K} < 0$ . Para simplificar, resolvemos la primera ecuación diferencial del sistema (5.3) obteniendo

$$s = \dot{\omega} = \frac{c}{r^2},$$

donde  $c$  es una constante de integración. Por lo que hemos reducido el sistema (5.3) al siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{(1-\mathbf{K}r^2)c^2}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1-\mathbf{K}r^2)}{r^2(12-9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde  $c \neq 0$ . Antes de continuar con el análisis del sistema, probaremos algunos lemas importantes para la demostración del mismo.

**Lema 3.** Sea  $\mathbf{K} < 0$ ,  $m > 0$  y  $c \neq 0$ ,

a) si  $27c^4\mathbf{K} + 4m^2 \leq 0$ , entonces el sistema (5.4) no tiene puntos fijos;

b) si  $27c^4\mathbf{K} + 4m^2 > 0$ , entonces el sistema (5.4) puede tener uno, dos o tres puntos fijos.

*Demostración.*

Para la demostración haremos  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{\nu} = 0$ , obteniendo el siguiente polinomio

$$p(x) = 729c^4\mathbf{K}^3x^3 - 2916c^4\mathbf{K}^2x^2 + 144(27c^4\mathbf{K} + 4m^2)x - 1728c^4. \quad (5.5)$$

Las soluciones del polinomio anterior son los puntos fijos del sistema, por lo que analizaremos los cambios de signos del polinomio (5.5). Sustituimos  $\mathbf{K} = -|\mathbf{K}|$  en el polinomio anterior obteniendo

$$p(x) = -729c^4|\mathbf{K}|^3x^3 - 2916c^4|\mathbf{K}|^2x^2 + 144(-27c^4|\mathbf{K}| + 4m^2)x - 1728c^4.$$

El término  $(-27c^4|\mathbf{K}| + 4m^2)$  determina el cambio de signo, por lo que si  $27c^4\mathbf{K} + 4m^2 \leq 0$  se sigue que todos los coeficientes del polinomio  $p(x)$  son negativos. Además usando la ley de Descartes, citada en el capítulo 3, concluimos que no existen raíces reales positivas ya que no hay cambios de signo en  $p(x)$ .

Para demostrar el segundo inciso, supongamos que  $27c^4\mathbf{K} + 4m^2 > 0$  entonces las raíces del polinomio  $p(x)$  son las mismas que del polinomio

$$\bar{p}(x) = x^3 - 4\mathbf{K}^{-1}x^2 + [48\mathbf{K}^{-1} + (64/81)c^{-4}\mathbf{K}^{-3}m^2]x - (64/27)\mathbf{K}^{-3}.$$

Para hallar las raíces del polinomio  $\bar{p}(x)$ , recordemos que si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son las raíces del polinomio cúbico  $\mathbf{P}(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ , entonces  $\mathbf{P}(x)$  admite la factorización:

$$\mathbf{P}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Efectuando la propiedad distributiva, reescribimos el polinomio anterior como

$$\mathbf{P}(x) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Sabemos que una de estas raíces siempre es un número real y tiene el signo de  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ . Como el término libre de  $\bar{p}(x)$  es positivo, se sigue que una de sus raíces debe ser siempre negativo e independiente al valor de los coeficientes  $\mathbf{K}$ ,  $c$  y  $m$ . Por lo tanto, el polinomio  $p$  puede tener dos raíces positivas (incluyendo la posibilidad de una raíz doble), o bien, ninguna de las raíces es positiva. Usando este hecho, el sistema puede tener dos, una, o ninguna raíz para  $27c^4\mathbf{K} + 4m^2 > 0$ , esto concluye la demostración. ■

**Lema 4.** Sea  $\mathbf{K} < 0$ ,  $m > 0$ ,  $c \neq 0$ , supongamos que  $(r_*, 0)$  es un punto fijo del sistema (5.4). Entonces  $\frac{d}{dr}g(r_*) = 0$  si y solo si  $r_* = \left(-\frac{2}{3\mathbf{K}}\right)^{1/2}$  y además se cumple  $\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) > 0$ .

*Demostración.*

Sea  $(r_*, 0)$  un punto fijo del sistema (5.4), por la definición de punto fijo tenemos que  $g(r_*) = 0$ , de esto se tiene la siguiente relación

$$\frac{c^2}{r_*^2} = \frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r_*^2)^{3/2}}. \quad (5.6)$$

Por otro lado, la derivada de la función  $g(r)$  evaluada en el punto fijo es

$$\frac{d}{dr}g(r_*) = -\frac{c^2}{r_*^2} - \frac{648\mathbf{K}mr_*}{(12 - 9\mathbf{K}r_*^2)^{5/2}}.$$

Para demostrar la ida, supongamos que se cumple  $\frac{d}{dr}g(r_*) = 0$ . Igualando el término  $c^2/r_*^2$  de la ecuación anterior y de la ecuación (5.6), obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r_*^2)^{3/2}} = -\frac{648\mathbf{K}mr_*}{(12 - 9\mathbf{K}r_*^2)^{5/2}}.$$

Simplificamos la expresión anterior para obtener que el único valor del punto fijo es  $r_* = \left(-\frac{2}{3\mathbf{K}}\right)^{1/2}$ .

Para demostrar el regreso del lema, evaluamos la función  $g(r)$  en el punto fijo  $r_* = \left(-\frac{2}{3\mathbf{K}}\right)^{1/2}$ , obteniendo la siguiente expresión

$$9c^2\sqrt{-3\mathbf{K}} = 4m,$$

Notemos que la expresión no depende de la variable  $r$ , por lo tanto  $\frac{d}{dr}g(r_*)$  es igual a cero.

Finalmente, resta demostrar que  $\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) > 0$ . Calculando la segunda derivada de  $g(r)$  y evaluándola en el punto fijo, obtenemos

$$\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) = -\frac{8m\mathbf{K}}{9\sqrt{2}}.$$

Notemos que  $\mathbf{K} < 0$ , por lo tanto  $\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) > 0$ . Hemos demostrado el lema. ■

El siguiente lema nos permitirá estudiar la dinámica del campo vectorial en el hiperboloide.

**Lema 5.** Sea  $\mathbf{K} < 0$ ,  $m > 0$ ,  $c \neq 0$ . Supongamos que  $(r_*, 0)$  es un punto fijo del sistema (5.4). Si  $\frac{\partial}{\partial r}G(r_*, 0) = 0$ , entonces  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}G(r_*, 0) > 0$ .

*Demostración.*

Recordemos que en el capítulo anterior definimos la función  $G(r, \nu)$  como

$$G(r, \nu) = g_1(r)g(r) + g_2(r, \nu), \quad (5.7)$$

donde

$$g_1(r) = \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{r^2}, \quad g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2}, \quad g(r) = \frac{c^2}{r} - \frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}. \quad (5.8)$$

Supongamos que  $(r_*, 0)$  es un punto fijo del sistema (5.4). Entonces se cumple que  $G(r_*, 0) = 0$ . Además, la función  $g_2(r_*, 0)$  es igual a cero y  $g_1(r_*)$  es positiva para cualquier valor de  $r_*$  excepto para  $r_* = 0$ . Usando estos hechos en la ecuación (5.7) concluimos que  $g(r_*)$  debe ser igual a cero.

Por otro lado, calculamos las derivadas de  $g_1$  y  $g_2$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r}g_1(r) = -\frac{2}{r} \left( \mathbf{K} + \frac{(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r}g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}\nu^2(1 + \mathbf{K}r^2)}{(1 - \mathbf{K}r^2)^2},$$

y evaluando las ecuaciones anteriores en el punto fijo tenemos que  $\frac{\partial}{\partial r}g_1(r_*)$  es distinta de cero y  $\frac{\partial}{\partial r}g_2(r_*, 0) = 0$ . Así, la derivada de la función  $G$  es:

$$\frac{\partial}{\partial r}G(r, \nu) = g(r) \frac{d}{dr}g_1(r) + g_1(r) \frac{d}{dr}g(r) + \frac{\partial}{\partial r}g_2(r, \nu).$$

Supongamos que  $\frac{\partial}{\partial r}G(r_*) = 0$ , entonces  $\frac{d}{dr}g(r_*) = 0$ . Por otro lado, la segunda derivada de la función  $G$  es:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}G(r, \nu) = g(r) \frac{d^2}{dr^2}g_1(r) + 2 \frac{d}{dr}g_1(r) \frac{d}{dr}g(r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}g_2(r, \nu) + g_1(r) \frac{d^2}{dr^2}g(r).$$

Por el lema anterior, se sigue que si  $\frac{d}{dr}g(r_*) = 0$ , entonces el valor del punto fijo es  $r_* = \left(-\frac{2}{3\mathbf{K}}\right)^{1/2}$  y se cumple que  $\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) > 0$ . Evaluamos el punto fijo en la segunda derivada, obteniendo

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}G(r_*, 0) = g_1(r_*) \frac{d^2}{dr^2}g(r_*).$$

Usando el hecho de que  $g_1(r_*) > 0$  y el Lema 4 concluimos que  $\frac{d^2}{dr^2}g(r_*) > 0$ , por lo tanto  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}G(r_*, 0) > 0$ . ■

A continuación daremos una clasificación de las soluciones Lagrangianas en superficies con curvatura constante negativa.

### Clasificación de las soluciones Lagrangianas

**Teorema 20.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  con masas iguales, existen ocho clases de soluciones Lagrangianas:*

- *órbitas Lagrangianas homotéticas que empiezan y terminan en colisión total para un tiempo finito;*
- *equilibrios relativos Lagrangianos que se mueven sobre un círculo paralelo al eje  $xy$ ;*

- *órbitas cuasiperiódicas Lagrangianas que cambian de tamaño;*
- *órbitas Lagrangianas que salen en  $t = -\infty$  de un equilibrio relativo  $s$  y en  $t = +\infty$  la órbita regresa al equilibrio relativo;*
- *órbitas Lagrangianas que vienen desde el infinito para  $t = -\infty$  y llega a un equilibrio relativo  $s$  en un tiempo  $t = +\infty$ ;*
- *órbitas Lagrangianas que salen de un equilibrio relativo  $s$  en  $t = -\infty$  y escapan al infinito para  $t = \infty$  ;*
- *órbitas Lagrangianas que vienen desde el infinito en un tiempo  $t = -\infty$  y simétricamente regresan al infinito en un tiempo  $t = +\infty$ , este tipo de órbitas nunca llega al equilibrio relativo  $s$  ;*
- *órbitas Lagrangianas que vienen desde el infinito en un tiempo  $t = -\infty$ , llegan a una posición muy cercana a la colisión total y regresan simétricamente al infinito en un tiempo  $t = +\infty$ . El número de órbitas mínimas de este tipo es mucho mas pequeño que las órbitas descritas en (20).*

*Demostración.*

Para las órbitas del inciso (20) usaremos el valor de la velocidad angular  $\dot{\omega}$  del sistema de ecuaciones (5.3)

$$\dot{\omega} = \frac{c}{r^2},$$

donde  $c$  es una constante, en particular si  $c$  es igual a cero tenemos que la velocidad angular  $\dot{\omega} = 0$ , es decir los tres cuerpos colisionan en el punto  $(0, 0, |\mathbf{K}|^{-1/2})$ . La colisión sucede en un tiempo finito ya que el punto de colisión no es un punto de equilibrio. Recordemos que, por el criterio de estabilidad de Lyapunov, los puntos de equilibrio convergen uniformemente cuando  $t$  está en el intervalo  $[0, \infty)$ . Por lo tanto hemos demostrado la existencia de las órbitas descritas en el inciso (20).

Analizaremos el flujo del sistema (5.3) en su espacio fase  $(r, \nu)$ , de manera similar al capítulo 3, las pendientes del flujo están dadas por

$$h(r, \nu) = \frac{d\nu}{dr} = \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{\nu r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{\nu r^2(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}, \quad (5.9)$$

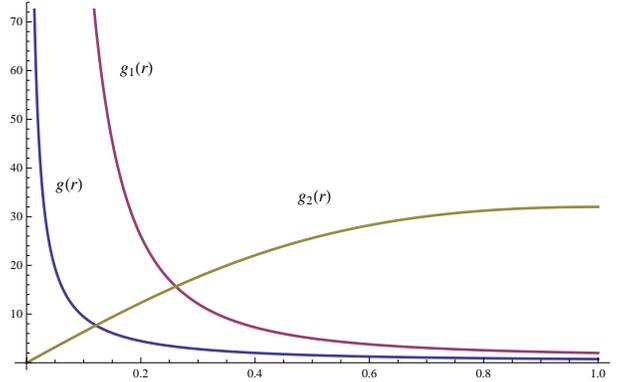


Figura 5.1: Gráfica de las funciones  $g(r)$ ,  $g_1(r)$  y  $g_2(r, \nu)$  donde  $\mathbf{K} = -1$ ,  $m = 1$ ,  $c = 1$  y  $\nu = 1$ .

donde la función  $h(r, \nu)$  es simétrica con respecto al eje  $r$  y por la primera ecuación del sistema (5.3) se sigue que el flujo cruza perpendicularmente para todo  $r$  excepto en los puntos fijos. En el Lema 3 demostramos la existencia de dos, uno o ningún punto fijo, por lo que estudiaremos el sistema para cada uno de los casos por separado.

### Caso 1) Ningún punto fijo

Notemos que el sistema de ecuaciones (5.4) no tiene puntos fijos si la función  $g$  no tiene raíces. Analizaremos el flujo  $G(r, \nu)$  cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $G(r, \nu)$  se definió en (5.7), por lo que basta analizar las funciones  $g$ ,  $g_1$  y  $g_2$ .

Las funciones  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g$  son de la forma

$$g_1(r) = \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{r^2}, \quad g_2(r, \nu) = -\frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1 - \mathbf{K}r^2}, \quad g(r) = \frac{c^2}{r} - \frac{24m}{(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}}.$$

donde las funciones  $g_1(r)$  y  $g_2(r, \nu)$  son siempre positivas y  $g \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ , por lo tanto  $g(r) > 0$  para cualquier  $r > 0$ . En conclusión, el flujo  $G(r, \nu) = g_1g + g_2$  siempre es positivo para  $r > 0$ , en la Figura 5.1 mostramos la gráfica de las funciones  $g$ ,  $g_1$  y  $g_2$ .

Observemos que  $h(r, \nu) = G(r, \nu)/\nu$ , entonces para  $\nu > 0$  se sigue que  $h(r, \nu) > 0$  y para  $\nu < 0$  la función  $h(r, \nu) < 0$ . Es decir, el flujo viene desde infinito en un tiempo  $t = -\infty$ , cruza el eje  $r$  perpendicularmente hacia arriba y regresa simétricamente al infinito en un tiempo  $t = \infty$ . Este tipo de órbitas corresponden a las definidas en el inciso (20) y (20), en la Figura 5.2 se puede observar el comportamiento del flujo.

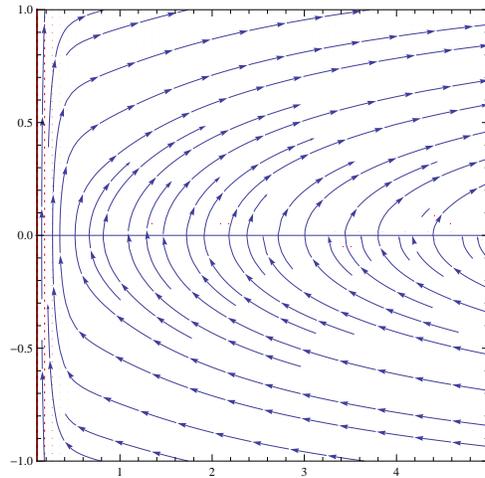


Figura 5.2: Espacio fase del sistema (5.3) para  $\mathbf{K} = -2$ ,  $c = 1/3$  y  $m = 1/2$ .

## Caso 2) Dos puntos fijos

En este caso la función  $g(r)$  tiene dos raíces distintas, las cuales denotaremos como  $r_1$  y  $r_2$  donde  $r_1 < r_2$ . La función  $g(r) > 0$  para  $r \in (0, r_1) \cup (r_2, \infty)$  y  $g(r) < 0$  para  $r \in (r_1, r_2)$ , por lo tanto el campo vectorial cruza el eje real hacia abajo entre  $r_1$  y  $r_2$ , y hacia arriba para  $r < r_1$  y  $r > r_2$ .

Para determinar el comportamiento del flujo cerca del punto fijo  $(r_1, 0)$ , linealizaremos el sistema (5.3). La parte lineal del campo vectorial es

$$A(r, \nu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial G(r, \nu)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix},$$

evaluándola en el punto de equilibrio  $(r_1, 0)$  tenemos:

$$A(r_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial G(r_1, 0)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix},$$

como  $G(r, 0) > 0$  para  $r < r_1$  y  $G(r, 0) < 0$  para  $r_1 < r < r_2$  tenemos que:

$$\frac{\partial G(r_1, 0)}{\partial r} < 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial G(r_1, 0)}{\partial r} = 0.$$

Por otro lado, el Lema 5 nos dice que si  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_1, 0) = 0$  entonces  $\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r_1, 0) > 0$ , es decir la función es convexa hacia arriba. Pero esto implica que en la función  $G$  no hay cambios de signo y en consecuencia no tendríamos la existencia de la raíz  $r_1$ . Por lo tanto  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_1, 0) < 0$  y los valores propios del sistema lineal los obtenemos de la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\partial G(r_1, 0)}{\partial r} & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.10)$$

Como el valor de  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_1, 0)$  es negativo se sigue que los valores propios son imaginarios y por lo tanto el punto  $(r_1, 0)$  no es un punto fijo del sistema (5.3). Para el sistema no lineal el punto  $(r_1, 0)$  puede ser una espiral o un centro, pero usando la simetría del sistema con respecto al eje  $r$  y el hecho de que cerca del punto  $r_1$  el flujo cruza el eje perpendicularmente hacia arriba del lado izquierdo de  $r_1$  y hacia abajo del lado derecho de  $r_1$  elimina cualquier posibilidad de que el punto de equilibrio sea una espiral. Por lo tanto el punto  $(r_1, 0)$  es un centro.

De manera similar estudiaremos el sistema lineal para el punto  $(r_2, 0)$ , el sistema lineal para el punto  $(r_2, 0)$  es

$$A(r_2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial G(r_2, 0)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix}.$$

La función  $G$  es negativa para  $r_1 < r < r_2$  y es positiva para  $r > r_2$ , por lo que su derivada  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_2, 0)$  puede ser positiva o igual a cero. Usando de nuevo el Lema 5 concluimos que  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_2, 0) > 0$ . Los valores propios para el punto fijo  $(r_2, 0)$  se encuentran dados por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\partial G(r_2, 0)}{\partial r} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Como  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_2, 0) > 0$  entonces el punto fijo es hiperbólico, es decir tiene dos valores propios  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ . Por lo tanto el punto  $(r_2, 0)$  es un punto silla para el sistema lineal.

Tomemos valores muy pequeños de  $\nu > 0$ , las pendientes del campo vectorial decrecen de  $-\infty$  a líneas con  $r = \text{constante}$  cuando  $\nu \rightarrow 0$  y  $r_1 < r < r_2$ . Por otro lado, las pendientes del campo vectorial decrecen de las mismas líneas pero con  $r > r_2$  a  $+\infty$  cuando  $\nu$  crece. Este comportamiento nos da una idea aproximada del comportamiento de los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en el plano fase.

Las líneas son la forma  $\nu = \eta r$  para  $\eta > 0$  y las pendientes del campo vectorial  $h(r, \nu)$  se encuentran dadas por la ecuación

$$h(r, \eta r) = \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{\eta r^3} \left[ \frac{c^2}{r} - \frac{24m(1 - \mathbf{K}r^2)}{(12 - 9\mathbf{K}r^2)^{3/2}} \right] - \frac{\mathbf{K}\eta r^2}{1 - \mathbf{K}r^2}$$

Notemos que cuando  $r \rightarrow \infty$ , la pendiente  $h(r, \nu r) \rightarrow \nu$ , es decir el campo vectorial no tiene pendientes negativas y por lo tanto van hacia infinito.

Tenemos que el punto  $(r_1, 0)$  es un centro, el punto  $(r_2, 0)$  es un punto silla y que el campo vectorial no tiene órbitas límite cuando  $r \rightarrow \infty$ , por lo tanto el espacio fase de las variables  $(r - \nu)$  se comporta como el de la Figura 5.3.

El comportamiento del flujo prueba la existencia de las siguientes órbitas

1. órbitas cerradas alrededor del punto fijo  $(r_1, 0)$ , recordemos que el sistema de ecuaciones diferenciales depende de tres variables  $(r, s, \nu)$  por lo que obtenemos las órbitas mencionadas en el inciso (20);
2. órbitas homotéticas al punto fijo  $(r_1, 0)$  que corresponden a las mencionadas en el inciso (20);
3. una órbita que tiende al punto fijo  $(r_2, 0)$  que corresponden a las mencionadas en el inciso (20);
4. órbitas que son expulsadas del punto fijo  $(r_2, 0)$  que corresponden a las mencionadas en el inciso (20);
5. órbitas que vienen desde el infinito en la dirección de la variedad estable del punto silla y están dentro de ésta, cruzan el eje  $r$  por la derecha del punto  $r_2$  y regresan simétricamente al infinito en dirección de la variedad inestable. Este tipo de órbitas corresponde al inciso (20);
6. órbitas que vienen desde el infinito en la dirección de la variedad estable del punto silla y están fuera de ésta, dan vuelta alrededor del lazo y regresan simétricamente al infinito en dirección de la variedad inestable. Además tocan el eje  $r$  entre los puntos  $r = 0$  y  $r = r_1$ , el tamaño mínimo se encuentra dado por los valores más pequeños de  $\mathbf{K}$ ,  $m$  y  $c$  que corresponden a las órbitas descritas en el inciso (20). Estas soluciones a las mencionadas en el inciso (20).

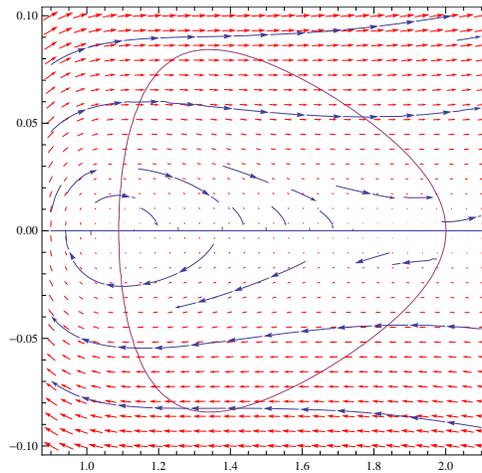


Figura 5.3: Espacio fase del sistema (5.3) con dos puntos fijos para  $\mathbf{K} = -0.3$ ,  $c = .23$  y  $m = .12$ .

Éstas son todas las órbitas generadas cuando el sistema tiene dos puntos fijos.

### Caso 3) Un punto fijo

Este caso ocurre cuando las dos raíces son dobles y las denotamos como  $(r_0, 0)$ . La función  $g$  es positiva para cualquier punto excepto en el punto fijo. En consecuencia, cerca del punto  $r_0$  la función  $g$  es decreciente para  $r < r_0$  y es creciente para  $r > r_0$ , además el eje  $r$  es tangente a la gráfica de  $g$ . Consecuentemente  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, 0) = 0$  y los valores propios obtenidos en la ecuación (5.10) son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Este es un caso degenerado, donde las órbitas cercanas al punto fijo son asintóticamente atraídas al flujo  $(r_0, 0)$ . Como el flujo fuera del punto fijo es similar al primer caso, la única diferencia es que las órbitas terminan en  $(r_0, 0)$ , y otras se originan en este punto. Este tipo de órbitas están descritas en los incisos (20) y (20).

Por lo tanto el teorema queda demostrado. ■

Hemos dado la clasificación de la familia particular de soluciones elípticas Lagrangianas en el hiperboloide  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ . A continuación estudiaremos las soluciones elípticas Eulerianas, recordemos los cuerpos de este tipo de soluciones están sobre la misma línea geodésica.

### 5.1.2. Órbitas Eulerianas

El sistema de ecuaciones diferenciales que generan la familia particular de soluciones elípticas Eulerianas en el hiperboloide es el siguiente

$$\begin{cases} \dot{r} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= \frac{c^2(1-\mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu^2}{1-\mathbf{K}r^2} - \frac{m(5-4\mathbf{K}r^2)}{4r^2(1-\mathbf{K}r^2)^{1/2}} = F(r, \nu). \end{cases} \quad (5.11)$$

donde  $c \neq 0$  y  $\mathbf{K} < 0$ . Para dar una clasificación de la familia de soluciones Eulerianas que estudiamos en el hiperboloide necesitamos demostrar dos lemas importantes.

**Lema 6.** *Para el problema de los tres cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} < 0$ , el polinomio  $q(x)$  tenemos que:*

1. Si  $c^4\mathbf{K} + m^2 \leq 0$ , entonces  $q(x)$  no tiene raíces positivas.
2. Si  $c^4\mathbf{K} + m^2 > 0$ , entonces  $q(x)$  tiene exactamente una raíz positiva.

*Demostración.*

Dividiremos la demostración en tres casos:

**Caso 1)**  $c^4\mathbf{K} + m^2 = 0$

El polinomio  $q(x)$  es de la forma  $8\mathbf{K}m^2x^2 + 23c^4\mathbf{K}x - 16c^4$  donde no tiene ninguna raíz positiva.

**Caso 2)**  $c^4\mathbf{K} + m^2 < 0$

Reescribiendo el polinomio  $q(x)$  tenemos que es de la forma  $8\mathbf{K}m^2x^2 + 23c^4\mathbf{K}x - 16c^4$ . Observemos que el término de  $x^2$  siempre es negativo. Si  $c^4\mathbf{K} + m^2 < 0$ , entonces no hay cambios de signo en el polinomio y por la ley de los signos de Descartes concluimos que  $q$  no tiene raíces reales positivas.

**Caso 3)**  $c^4\mathbf{K} + m^2 > 0$

Reescribiendo el polinomio tenemos que

- Si  $6c^4\mathbf{K} + 5m^2 < 0$ , entonces necesariamente  $48c^4\mathbf{K} + 25m^2 < 0$  y, por lo tanto,  $q$  tiene una raíz positiva.
- Si  $6c^4\mathbf{K} + 5m^2 > 0$  y  $48c^4\mathbf{K} + 25m^2 < 0$ , entonces  $q$  tiene un cambio de signo y, por lo tanto, tienen exactamente una raíz positiva.
- $48c^4\mathbf{K} + 25m^2 > 0$ , entonces todos los coeficientes son positivos excepto el término libre y, por lo tanto,  $q$  tiene exactamente una raíz positiva.

Hemos probado los tres casos, por lo tanto terminamos la demostración. ■

**Lema 7.** Sean  $\mathbf{K} < 0$ ,  $m > 0$  y  $c \neq 0$ . El sistema (5.11) no tiene puntos fijos. Entonces no existen puntos fijos del sistema donde  $\frac{\partial}{\partial r}W(r_*, 0) = 0$  donde

$$W(r, \nu) = \frac{u(r)}{r^2} + g_2(r, \nu). \quad (5.12)$$

*Demostración.*

Como  $u(r_*) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu}g_2(r_*, 0) = 0$  entonces

$$\frac{\partial W}{\partial r}(r, \nu) = -\left(\frac{2}{r^3}\right)u(r) + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d}{dr}u(r) + \frac{\partial}{\partial r}g_2(r, \nu),$$

esto implica que  $W(r_*, 0) = 0$  si y solo si  $\frac{d}{dr}u(r_*) = 0$ . Por lo tanto resta probar que no existe un punto fijo para  $\frac{d}{dr}u(r_*) = 0$ . Para demostrar este hecho, notemos que

$$\frac{d}{dr}u(r) = -\frac{c^4(1 + \mathbf{K}r^2)}{r^2} - \frac{\mathbf{K}mr(4\mathbf{K}r^2 - 3)}{4(1 - \mathbf{K}r^2)^{3/2}}. \quad (5.13)$$

De la definición de  $u(r)$  y la identidad  $u(r_*) = 0$  tenemos

$$(1 - \mathbf{K}r_*^2)^{1/2} = \frac{mr_*(5 - 4\mathbf{K}r_*^2)}{4c^2(1 - \mathbf{K}r_*^2)}.$$

Reescribimos el término  $(1 - \mathbf{K}r_*^2)^{3/2}$  como  $(1 - \mathbf{K}r_*^2)(1 - \mathbf{K}r_*^2)^{1/2}$  y sustituimos en la expresión  $(1 - \mathbf{K}r_*^2)$  de la ecuación (5.13) obteniendo

$$\frac{\mathbf{K}(4\mathbf{K}r_*^2 - 3)}{5 - 4\mathbf{K}r_*^2} + \frac{1 + \mathbf{K}r_*^2}{r_*^2} = 0,$$

simplificando la ecuación anterior tenemos el valor  $r_*^2 = \frac{5}{2\mathbf{K}} < 0$ . Por lo tanto no existe un punto fijo  $(r_*, 0)$  tal que  $\frac{d}{dr}u(r_*) = 0$ .

■

Hemos demostrado dos lemas importantes que nos permitirán demostrar la existencia de la familia de órbitas elípticas Eulerianas.

### Clasificación de las soluciones Eulerianas

**Teorema 21.** *Para el problema de los tres cuerpos en una superficie con curvatura constante negativa con masas iguales existen cuatro clases de soluciones Eulerianas*

- I) *órbitas Eulerianas homotéticas que empiezan o terminan en una colisión total en un tiempo finito;*
- II) *equilibrios relativos Eulerianos donde el cuerpo con masa  $m_1$  se encuentra fija en el vértice del hiperboloide mientras que los cuerpos restantes se mueven sobre un círculo paralelo al plano  $xy$ ;*
- III) *órbitas homográficas Eulerianas cuasiperiódicas, donde el cuerpo con masa  $m_1$  se encuentra fija en el vértice del hiperboloide y la línea que une a los otros dos cuerpos siempre es paralela al eje  $xy$  pero su coordenada  $z$  varía con respecto al tiempo;*
- IV) *órbitas homográficas Eulerianas que vienen desde infinito en  $t = -\infty$ , llegan a una posición donde la configuración es mínima y después regresan al infinito en  $t = \infty$ .*

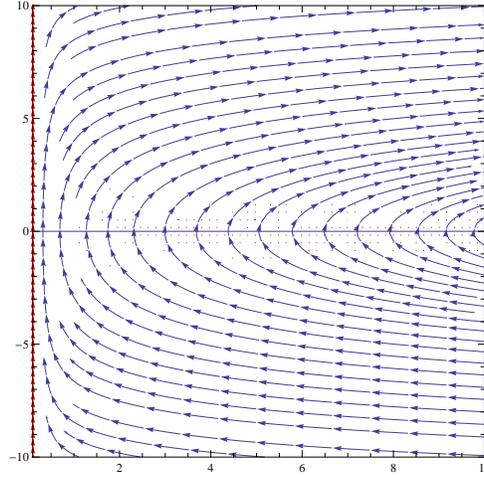


Figura 5.4: Espacio fase del sistema (5.3) con dos puntos fijos para  $\mathbf{K} = -2$ ,  $c = 2$  y  $m = 4$ .

*Demostración:*

El primer tipo de órbitas ocurre cuando  $c \neq 0$ , es decir, cuando los tres cuerpos colisionan en el punto  $(0, 0, \mathbf{K}^{-1/2})$  en un tiempo futuro o pasado. La colisión ocurre siempre en un tiempo finito debido a que éste no es un punto de equilibrio, el argumento de que el tiempo es finito es similar al que usamos en superficies con curvatura positiva.

El siguiente tipo de órbitas las demostramos en el capítulo anterior, por lo que probaremos la existencia de las órbitas restantes. Para ello haremos un análisis del flujo que genera el sistema de ecuaciones (5.11).

En el Lema 6 probamos que el sistema no tiene puntos fijos o bien tiene exactamente un punto fijo, por lo que analizaremos cada uno de los casos por separado.

### Caso 1) No hay puntos fijos

Como el sistema no tiene puntos fijo entonces la función  $u(r)$  no corta el eje  $r$ . Además  $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = +\infty$ , por lo tanto  $u(r) > 0$  para cualquier valor de  $r > 0$ . Usando este resultado tenemos que  $u(r)/r^2 > 0$  para todo valor de  $r > 0$ .

Por otro lado  $\lim_{r \rightarrow 0} g_2(r, \nu) = 0$ , esto implica que  $\lim_{r \rightarrow 0} W(r, \nu) = +\infty$ . Además el sistema (5.11) no tiene puntos fijos, es decir el flujo  $W$  nunca es cero. En consecuencia

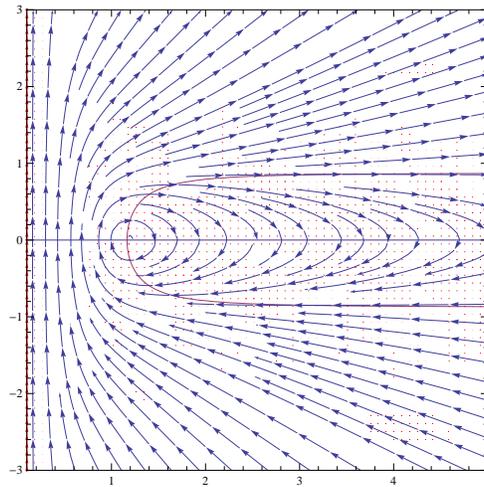


Figura 5.5: Espacio fase del sistema (5.3) con dos puntos fijos para  $\mathbf{K} = -2$ ,  $c = 2$  y  $m = 6.2$ .

$W(r, \nu) > 0$  para todo  $r > 0$  y  $\nu$ . Las pendientes del campo vectorial se encuentran dadas por la función

$$h_1(r, \nu) = \frac{W(r, \nu)}{\nu} = \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{\nu r^3} - \frac{\mathbf{K}r\nu}{1 - \mathbf{K}r^2} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}r^2)}{4\nu r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}},$$

donde  $h_1(r, \nu)$  es simétrica con respecto al eje  $r$  y corta perpendicularmente el eje  $r$  para cada punto  $r > 0$ . El comportamiento del flujo en sus extremos es  $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} W(r, \nu) = +\infty$  y, para  $\nu$  fijo,  $\lim_{r \rightarrow \infty} W(r, \nu) = 0$ . En conclusión, el comportamiento del flujo es simple como se muestra en la Figura 5.4. Este tipo de órbitas corresponden a las mencionadas en el inciso (IV).

### Caso 2) Un punto fijo

Como sólo hay un punto fijo, analizaremos el comportamiento del sistema alrededor del punto fijo  $(r_0, 0)$ . Estudiaremos el comportamiento del flujo del sistema linealizado. El sistema lineal del campo vectorial evaluada en el punto fijo  $(r_0, 0)$  es

$$B(r_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial W(r_0, 0)}{\partial r} & 0 \end{pmatrix},$$

donde los valores propios del sistema linealizado se encuentran dados por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\partial W(r_0,0)}{\partial r} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Para determinar el signo de  $\frac{\partial W(r_0,0)}{\partial r}$ , calculemos el límite  $\lim_{r \rightarrow 0} W(r, \nu) = +\infty$ . Recordemos que el sistema tiene un punto fijo por lo que  $W(r, 0) > 0$  para  $0 < r < r_0$ . Por otro lado, para mostrar que  $W(r, 0) < 0$  para  $r > r_0$ , haremos la demostración por contradicción, es decir mostraremos que  $W(r, 0) > 0$  para  $r > r_0$ .

La igualdad  $W(r, 0) \geq 0$  se tiene para  $r = r_0$ , donde los parámetros satisfacen la desigualdad  $c^4 \mathbf{K} + m^2 > 0$ . Variando levemente los parámetros  $\mathbf{K} < 0$ ,  $m > 0$  y  $c \neq 0$ , obtenemos que la función  $W(r, 0)$  tiene dos ceros. Este hecho contradice el Lema 6, por lo tanto  $W(r, 0) < 0$  para  $r > r_0$ .

Como la función  $W(r, 0)$  decrece alrededor del punto  $r_0$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial r} W(r_0, 0) < 0$ . Pero por el Lema 7, si  $\frac{\partial}{\partial r} W(r_0, 0) \neq 0$  entonces necesariamente se debe satisfacer  $\frac{\partial}{\partial r} W(r_0, 0) < 0$ . Resolviendo el sistema linealizado obtenemos que los valores propios son puramente imaginarios, esto implica que el punto fijo  $(r_0, 0)$  del sistema (5.11) puede ser una espiral o un centro. La simetría del flujo con respecto al eje  $r$  excluye la posibilidad de ser una espiral, por lo tanto el punto fijo  $(r_0, 0)$  es un centro.

En la Figura 5.5 podemos observar el comportamiento del flujo en el plano  $(r - \nu)$ , no olvidemos que el sistema de ecuaciones diferenciales depende de las variables  $(r, s, \nu)$  por lo el sistema genera las órbitas cuasiperiódicas Eulerianas, mencionadas en el inciso (III).

Para terminar el análisis del flujo del sistema (5.11) haremos uso de la ceroclina  $\dot{\nu} = 0$ , la cual se encuentra dada por

$$\nu^2 = \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{\mathbf{K}r} \left[ \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.14)$$

A lo largo de la curva, donde pasa el punto fijo  $(r_0, 0)$ , es simétrica con respecto al eje  $r$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 - \mathbf{K}r^2}{\mathbf{K}r} \left[ \frac{c^2(1 - \mathbf{K}r^2)}{r^3} - \frac{m(5 - 4\mathbf{K}^2)}{4r^2(1 - \mathbf{K}r^2)^{1/2}} \right] = m(-\mathbf{K})^{1/2} + \mathbf{K}c^2.$$

Recordemos que los parámetros deben satisfacer la desigualdad  $m^2 + \mathbf{K}c^4 > 0$ , la cual es equivalente a

$$\left[ m(-\mathbf{K})^{1/2} + \mathbf{K}c^2 \right] \left[ m(-\mathbf{K})^{1/2} + \mathbf{K}c^2 \right] > 0.$$

Notemos que el segundo término del producto es positivo, por lo que el primer término también debe ser positivo. En consecuencia, el límite calculado anteriormente es un número positivo y la curva dada por la ecuación (5.14) está limitada por las líneas

$$\nu = \left[ m(-\mathbf{K})^{1/2} + \mathbf{K}c^2 \right]^{1/2}, \quad \text{y} \quad \nu = - \left[ m(-\mathbf{K})^{1/2} + \mathbf{K}c^2 \right]^{1/2}.$$

Dentro de la curva, la pendiente del campo vectorial es negativa para  $\nu > 0$ . Fuera de ella, la pendiente del campo vectorial es positiva para  $\nu > 0$ , pero es negativa para  $\nu < 0$ . Por lo tanto las órbitas que se mantienen fuera de la ceroclina son ilimitadas. Este tipo de órbitas corresponden a las soluciones descritas en el inciso (IV). Esto concluye la demostración del teorema. ■

Hemos dado una clasificación de la familia particular de órbitas elípticas Lagrangianas y de las elípticas Eulerianas para el hiperboloide  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$ . A continuación obtendremos la sistema de ecuaciones que generan órbitas homográficas de tipo hiperbólico y daremos una clasificación de las mismas.

## 5.2. Soluciones homográficas hiperbólicas

En esta sección estudiaremos las soluciones homográficas hiperbólicas, recordemos que este tipo de órbitas son soluciones de las ecuaciones de movimiento invariantes transformaciones de la forma

$$A_2(s) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh s & \sinh s \\ 0 & \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (5.15)$$

donde  $s \in \mathbb{R}$ . Recordemos que en el capítulo anterior demostramos la existencia de los equilibrios relativos hiperbólicos. Usando la definición 9 tenemos que las soluciones homográficas hiperbólicas son aquellas soluciones donde los cuerpos están en la misma geodésica, este tipo de soluciones las denominamos soluciones hiperbólicas de tipo Eulerianas.

En el capítulo anterior mostramos que existen órbitas hiperbólicas de tipo Eulerianas si las masas de los cuerpos son iguales. Sin pérdida de generalidad, posicionaremos el cuerpo con masa  $m_1$  en la línea geodésica que pasa por el punto  $(0, 0, |\mathbf{K}|^{-1/2})$ , mientras que los

cuerpos restantes  $m_2$  y  $m_3$  equidistan del cuerpo  $m_1$  y están sobre la misma geodésica. Por lo tanto, las soluciones hiperbólicas de tipo Euler son soluciones  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ , donde  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  y sus coordenadas son de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \sinh \omega, & z_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \cosh \omega, \\ x_2 &= (\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, & y_2 &= r \sinh \omega, & z_2 &= r \cosh \omega, \\ x_3 &= -(\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}, & y_3 &= r \sinh \omega, & z_3 &= r \cosh \omega. \end{aligned} \quad (5.16)$$

La variable  $r(t)$  es la función de tamaño mientras que  $\omega(t)$  es la función angular. Además, los cuerpos siempre están sobre la superficie del hiperboloide, en otras palabras, siempre se satisface  $x_i^2(t) + y_i^2(t) - z_i^2(t) = \mathbf{K}^{-1}$  para  $i = 1, 2, 3$ . El siguiente resultado nos da la existencia de este tipo de soluciones.

**Teorema 22.** *Para el problema de los tres cuerpos con masas iguales, la única solución homográfica hiperbólica Euleriana es una órbita homotética Euleriana o es un equilibrio relativo hiperbólico Euleriano.*

*Demostración.*

Consideremos una solución de la forma (5.16). Por contradicción, supongamos que la solución no es homotética y realizando los cálculos tenemos que

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_2 = \mathbf{K}\mathbf{q}_1 \odot \mathbf{q}_3 = |\mathbf{K}|^{-1/2} r, \quad \text{y} \quad \mathbf{K}\mathbf{q}_2 \odot \mathbf{q}_3 = -1 - 2\mathbf{K}r^2. \quad (5.17)$$

Derivando las ecuaciones (5.16) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0, & \dot{x}_2 &= -\dot{x}_3 = \frac{r\ddot{r}}{(\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}}, \\ \dot{y}_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \dot{\omega} \cosh \omega, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_3 = \dot{r} \sinh \omega + r\dot{\omega} \cosh \omega, \\ \dot{z}_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \dot{\omega} \sinh \omega, & \dot{z}_2 &= \dot{z}_3 = \dot{r} \cosh \omega + r\dot{\omega} \sinh \omega. \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_1 \odot \dot{\mathbf{q}}_1 = -\dot{\omega}^2,$$

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_2 \odot \dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_3 \odot \dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{K}r^2\dot{\omega}^2 - \frac{\mathbf{K}\dot{r}^2}{1 + \mathbf{K}r^2},$$

calculando su segunda derivada obtenemos

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= 0, \\
 \ddot{y}_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \dot{\omega}^2 \sinh \omega + |\mathbf{K}|^{-1/2} \ddot{\omega} \cosh \omega, \\
 \ddot{z}_1 &= |\mathbf{K}|^{-1/2} \dot{\omega}^2 \cosh \omega + |\mathbf{K}|^{-1/2} \ddot{\omega} \sinh \omega, \\
 \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_3 &= \frac{r\ddot{r}}{(\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{1/2}} + \frac{\mathbf{K}^{-1}r^2}{(\mathbf{K}^{-1} + r^2)^{3/2}}, \\
 \ddot{y}_2 = \ddot{y}_3 &= (\ddot{r} + r\dot{\omega}^2) \sinh \omega + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \cosh \omega, \\
 \ddot{z}_2 = \ddot{z}_3 &= (\ddot{r} + r\dot{\omega}^2) \cosh \omega + (r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}) \sinh \omega.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los cálculos anteriores en las ecuaciones de movimiento obtenemos la siguiente relación para cada una de las componentes

$$\begin{cases}
 \ddot{y}_1 & : |\mathbf{K}|^{-1/2} \ddot{\omega} \cosh \omega, \\
 \ddot{z}_1 & : |\mathbf{K}|^{-1/2} \ddot{\omega} \sinh \omega, \\
 \ddot{x}_2, \ddot{x}_3 & : E, \\
 \ddot{y}_2, \ddot{y}_3 & : E \sinh \omega + F \cosh \omega, \\
 \ddot{z}_2, \ddot{z}_3 & : E \cosh \omega + F \sinh \omega,
 \end{cases} \quad (5.18)$$

donde

$$\begin{aligned}
 E := E(t) &= \ddot{r} + r(1 + \mathbf{K}r^2)\dot{\omega}^2 - \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 + \mathbf{K}r^2} + \frac{m(1 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2|1 + \mathbf{K}r^2|^{1/2}}, \\
 F := F(t) &= r\ddot{\omega} + 2\dot{r}\dot{\omega}.
 \end{aligned}$$

Notemos que el sistema (5.18) es una combinación lineal de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico, por lo tanto la existencia y unicidad local de estas órbitas es equivalente a demostrar la existencia del siguiente sistema

$$\begin{cases}
 \ddot{\omega} & = 0, \\
 \ddot{\omega} & = -\frac{2\dot{r}\dot{\omega}}{r}, \\
 \ddot{r} & = -r(1 + \mathbf{K}r^2)\dot{\omega}^2 + \frac{\mathbf{K}r\dot{r}^2}{1 + \mathbf{K}r^2} - \frac{m(1 - 4\mathbf{K}r^2)}{4r^2|1 + \mathbf{K}r^2|^{1/2}}.
 \end{cases} \quad (5.19)$$

Integrando la primera ecuación obtenemos el valor de la función angular, esto es  $\omega(t) = at + b$  donde  $a$  y  $b$  son constantes, por lo que  $\dot{\omega} = a$ . Suponiendo que la solución no es

homotética entonces  $a$  es distinto de cero y usando la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos

$$\dot{\omega}(t) = \frac{c}{r^2(t)},$$

donde  $c$  es una constante de integración. Como  $a \neq 0$  implica que  $r(t)$  es una constante, es decir la solución es un equilibrio relativo. Este equilibrio relativo también satisface la tercera ecuación

$$a^2 = \dot{\omega}^2 = \frac{m(1 - 4\mathbf{K}r)}{4r^3 |1 + \mathbf{K}r^2|^{1/2}},$$

Por lo tanto cada solución homográfica hiperbólica Euleriana que no es una solución homotética Euleriana es un equilibrio relativo hiperbólico Euleriano. ■

Hemos analizado los equilibrios relativos y las soluciones homográficas en superficies con curvatura  $\mathbf{K}$ , para ello estudiamos la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  encajada en  $\mathbb{R}^3$  y la hoja superior del hiperboloide  $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^2$  encajado en el espacio  $\mathbb{R}^{2,1}$ . En el siguiente capítulo estudiaremos los equilibrios relativos en el modelo intrínseco para  $\mathbf{K} > 0$ .

## CAPÍTULO 6

# MODELO INTRÍNSECO PARA SUPERFICIES CON CURVATURA $\mathbf{K} > 0$

Hasta ahora hemos estudiado el problema de los  $n$  cuerpos en superficies 2-dimensionales encajadas respectivamente en los espacios  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^{2,1}$  donde analizamos una familia particular de equilibrios relativos y soluciones homográficas. En este capítulo haremos uso de la proyección estereográfica para obtener las ecuaciones de movimiento, estudiaremos la existencia de equilibrios relativos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$ . Este modelo nos permitirá dar una caracterización para los equilibrios relativos en dicha superficie, en particular para dos y tres cuerpos.

En la primera sección explicaremos brevemente la proyección estereográfica y en la segunda obtendremos las ecuaciones de movimiento haciendo uso del potencial cotangente  $U_{\mathbf{K}}$ . Demostraremos la equivalencia de las ecuaciones para ambos modelos y finalmente estudiaremos la existencia de los equilibrios relativos Eulerianos y Lagrangianos.

### 6.1. Proyección Estereográfica

Para estudiar el problema de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura  $\mathbf{K} > 0$  usaremos la proyección estereográfica. Antes de estudiar los equilibrios relativos en dicho espacio, obtendremos las ecuaciones de la proyección estereográfica. Para evitar confusiones con el modelo anterior, usaremos  $\mathbf{R}$  en lugar de  $\mathbf{K}^{-1/2}$  para denotar el radio de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

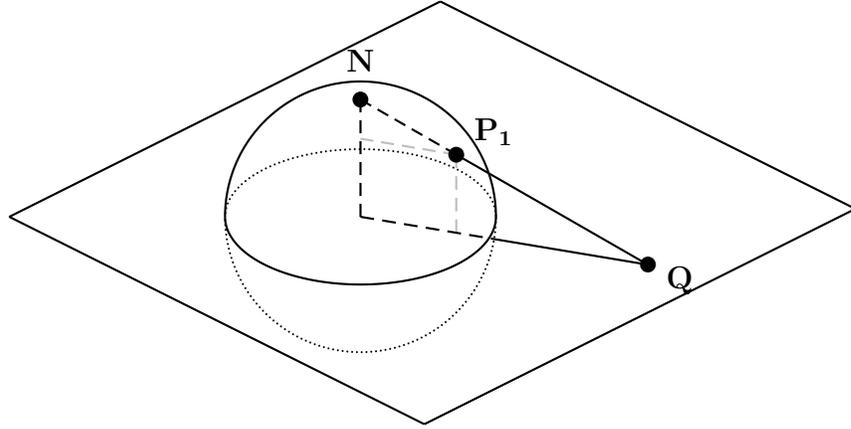


Figura 6.1: Proyección Estereográfica

Sea  $\mathbf{N} = (0, 0, \mathbf{R})$  el polo norte y  $\mathbf{P} = (\alpha, \beta, \gamma)$  un punto sobre la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , la línea recta que une al punto  $\mathbf{P}$  con el Polo Norte cruza el plano  $z = 0$  en un único punto  $\mathbf{Q}$  (ver Figura 6.1). La ecuación de la recta es  $\ell = \{\mathbf{N} + t(\mathbf{P} - \mathbf{N}) : t \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathbf{Q} = (\alpha t, \beta t)$ , donde el valor de  $t$  satisface la siguiente expresión

$$t = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R} - \gamma}.$$

Por lo tanto, la transformación estereográfica para cualquier punto de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  al plano  $z = 0$  se encuentra dada por

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{P} = (\alpha, \beta, \gamma) &\rightarrow \mathbf{Q} = \left( \frac{\mathbf{R}\alpha}{\mathbf{R} - \gamma}, \frac{\mathbf{R}\beta}{\mathbf{R} - \gamma} \right). \end{aligned}$$

Para construir la transformación inversa de la proyección usaremos la recta que une el Polo Norte de la esfera y el punto  $\mathbf{Q}$  del plano  $z = 0$ , la ecuación de la recta se encuentra dada por  $L = \{\mathbf{N} + \lambda(\mathbf{Q} - \mathbf{N}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . El punto de intersección de la recta  $L$  y la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  es el punto  $\mathbf{P}$  y sus coordenadas son  $\mathbf{P} = (\lambda u, \lambda y, \mathbf{R}(1 - \lambda))$  para cualquier valor de

$\lambda \in \mathbb{R}$ . Usando la ecuación de la esfera (1.9) obtenemos el valor de  $\lambda$  y por lo tanto la ecuación de la transformación inversa.

$$\begin{aligned} \Pi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2 \\ \mathbf{Q} = (u, v) &\rightarrow \mathbf{P} = (\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde cada una de las coordenadas del punto  $\mathbf{P}$  se encuentran dadas por

$$\alpha = \frac{2\mathbf{R}^2 u}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2}, \quad \beta = \frac{2\mathbf{R}^2 v}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2}, \quad \gamma = \frac{\mathbf{R}(u^2 + v^2 - \mathbf{R}^2)}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2}. \quad (6.2)$$

La proyección estereográfica es conforme, es decir, si dos curvas sobre la superficie de la esfera se cortan con un determinado ángulo entonces las proyecciones de las dos curvas mantendrán el mismo ángulo [42]. Debido a la proyección, la métrica del plano  $z = 0$  es

$$ds^2 = \frac{4\mathbf{R}^4}{(u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2)^2} (du^2 + dv^2). \quad (6.3)$$

El plano  $z = 0$  con la métrica anterior lo llamaremos el plano esférico  $\mathbb{R}_{esf}^2$ . A continuación calcularemos las curvas geodésicas y los símbolos de Christoffel, estos conceptos se pueden consultar en cualquier libro básico de Geometría Diferencial [10], [66]. Las curvas geodésicas en esta superficie son

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $\Gamma_{mn}^i$  son los símbolos de Christoffel para  $i, m, n = 1, 2$ . Para calcular los símbolos de Christoffel usaremos  $\lambda$ , que llamaremos como el parámetro conforme asociado a la métrica y se encuentra dado por

$$\lambda(u, v) = \frac{4\mathbf{R}^4}{(u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2)^2},$$

el valor de los símbolos de Christoffel se encuentran dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2\lambda(u, v)} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{-2u}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2}, \\ \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2\lambda(u, v)} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{-2v}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Finalmente, sustituimos los símbolos de Christoffel (6.5) en el sistema (6.4) obtenemos las ecuaciones de las geodésicas

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= \frac{2}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2} (u\dot{u}^2 + 2v\dot{u}\dot{v} - u\dot{v}^2), \\ \ddot{v} &= \frac{2}{u^2 + v^2 + \mathbf{R}^2} (v\dot{v}^2 + 2u\dot{u}\dot{v} - v\dot{u}^2).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Siguiendo la misma metodología del primer capítulo, necesitamos obtener la distancia entre dos puntos del plano  $\mathbb{R}_{esf}^2$  para calcular las ecuaciones de movimiento. Recordemos que la proyección estereográfica es conforme es decir la transformación conserva los ángulos orientados, por lo tanto la distancia entre dos puntos (1.10) es la misma para ambos modelos. Para evitar confusiones, denotaremos como  $\mathbf{Q}_i = (x_i, y_i, z_i)$  a los cuerpos que se encuentran sobre la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y como  $\mathbf{q}_i = (u_i, v_i)$  a los cuerpos del plano esférico  $\mathbb{R}_{esf}^2$ . Por lo tanto la distancia entre dos puntos en  $\mathbb{R}_{esf}^2$  es

$$d_{ij} = d_+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = d(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) = \mathbf{R} \arccos \left( \frac{\mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_j}{\mathbf{R}^2} \right). \quad (6.7)$$

Usando la proyección estereográfica para los puntos  $\mathbf{Q}_i$  y  $\mathbf{Q}_j$ , junto con el hecho  $\|\mathbf{q}_i\|^2 = u_i^2 + v_i^2$  obtenemos

$$\cos \left( \frac{d_{ij}}{\mathbf{R}} \right) = \frac{\mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_j}{\mathbf{R}^2} = \frac{4\mathbf{R}^2 (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j) + (\|\mathbf{q}_i\|^2 - \mathbf{R}^2) (\|\mathbf{q}_j\|^2 - \mathbf{R}^2)}{(\|\mathbf{q}_i\|^2 + \mathbf{R}^2) (\|\mathbf{q}_j\|^2 + \mathbf{R}^2)},$$

Para simplificar algunos cálculos, introduciremos la variable  $z = u + iv$  para identificar el plano esférico  $\mathbb{R}_{esf}^2$  con el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Notemos que  $\|\mathbf{q}_i\|^2 = |z_i|^2$  y el producto punto de cualesquiera dos cuerpos es  $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = (z_i \bar{z}_j + z_j \bar{z}_i)/2$ , por lo tanto la ecuación coseno y seno son de la forma

$$\cos \left( \frac{d_{ij}}{\mathbf{R}} \right) = \frac{W_1}{W_2}, \quad \sin \left( \frac{d_{ij}}{\mathbf{R}} \right) = \frac{1}{W_2} [W_2^2 - W_1^2]^{1/2},$$

donde

$$\begin{aligned}W_1 &= 2\mathbf{R}^2 (z_i \bar{z}_j + z_j \bar{z}_i) + (|z_i|^2 - \mathbf{R}^2) (|z_j|^2 - \mathbf{R}^2), \\ W_2 &= (|z_i|^2 + \mathbf{R}^2) (|z_j|^2 + \mathbf{R}^2).\end{aligned}$$

Finalmente la función cotangente en el plano complejo extendido es

$$\cot\left(\frac{d_{ij}}{\mathbf{R}}\right) = \frac{W_1}{[W_2^2 - W_1^2]^{1/2}} = \frac{2\mathbf{R}^2(z_j\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i) + (|z_i|^2 - \mathbf{R}^2)(|z_j|^2 - \mathbf{R}^2)}{2\mathbf{R}|z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|}.$$

La métrica (6.3) del plano complejo extendido con las nuevas coordenadas se encuentra dada por

$$ds^2 = \frac{4\mathbf{R}^4 dz d\bar{z}}{(\mathbf{R}^2 + |z|^2)^2}. \quad (6.8)$$

A partir de este momento denotaremos al plano complejo extendido con la métrica anterior como el plano curvado  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . Ahora ya podemos establecer las ecuaciones de movimiento y estudiar la dinámica de los cuerpos en esta superficie. A continuación estudiaremos las singularidades del problema en este modelo.

## 6.2. Singularidades en el espacio $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

Para el problema de los  $n$  cuerpos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , el conjunto de singularidades son generados por el potencial cotangente y se encuentran dadas por las soluciones de la siguiente ecuación

$$2\mathbf{R}|z_j - z_i| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_i| = 0. \quad (6.9)$$

Si el término  $|z_j - z_i| = 0$  entonces los cuerpos con posiciones  $z_i, z_j$  colisionan, en la Figura 6.2 se muestra la colisión en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Por otro lado, si  $|\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_i| = 0$  y usando el hecho  $|z_j|^2 = z_j\bar{z}_j$  obtenemos la relación

$$z_i = \frac{-\mathbf{R}^2}{|z_j|^2} z_j,$$

En otras palabras, si las posiciones  $z_i, z_j$  satisfacen la expresión anterior entonces los cuerpos con masas  $m_i$  y  $m_j$  son antipodales en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , en la Figura 6.3 se muestra esta singularidad en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

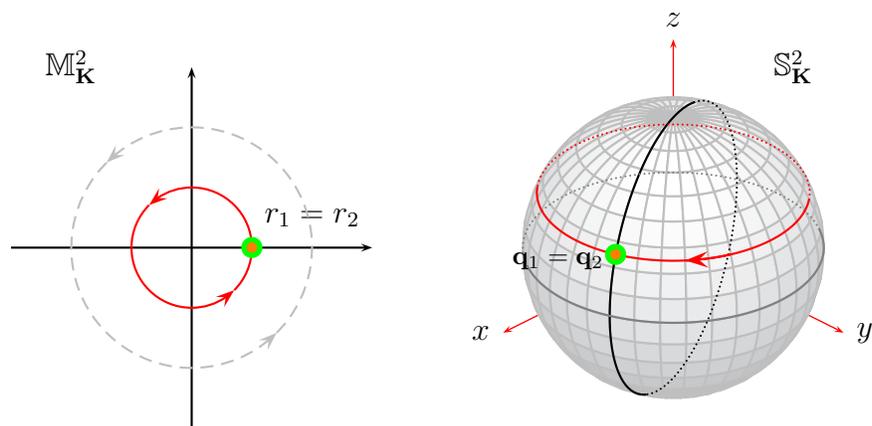


Figura 6.2: Singularidad  $\Delta_{ij}^+$  en el espacio  $M_{\mathbf{K}}^2$

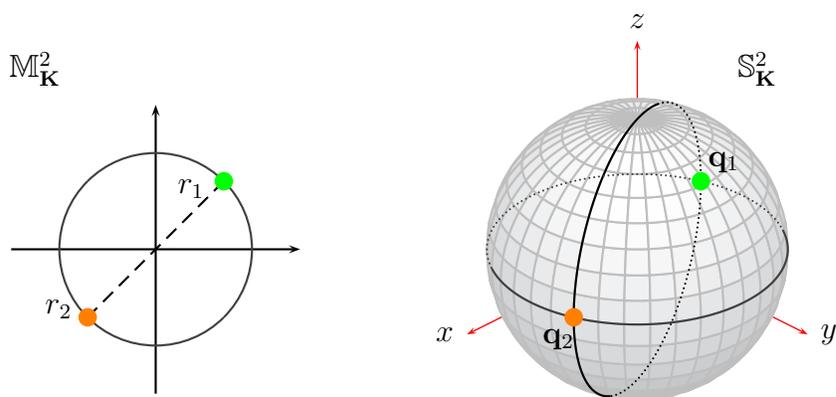


Figura 6.3: Singularidad  $\Delta_{ij}^-$  en el espacio  $M_{\mathbf{K}}^2$

Para diferenciar los dos tipos de singularidades definimos los conjuntos

$$\Delta_{ij}^+ = \{z_i = z_j\}, \quad \Delta_{ij}^- = \left\{ z_i = \frac{-\mathbf{R}^2}{|z_j|^2} z_j \right\}, \quad (6.10)$$

denominaremos como el *conjunto colisión singular* y el *conjunto antipodal singular* a los conjuntos

$$\Delta^+ = \bigcup_{ij} \Delta_{ij}^+, \quad \Delta^- = \bigcup_{ij} \Delta_{ij}^-.$$

Finalmente, el *conjunto singular total* es  $\Delta := \Delta^+ \cup \Delta^-$ . A continuación obtendremos las ecuaciones de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

### 6.3. Ecuaciones de movimiento

En esta sección calcularemos las ecuaciones de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  bajo la acción del Lagrangiano

$$L_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) = T_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) + U_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}), \quad (6.11)$$

donde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  son las posiciones de los  $n$  cuerpos y  $T_{\mathbf{R}}$  la energía cinética definida como

$$T_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \lambda(z_k, \bar{z}_k) |\dot{z}_k|^2. \quad (6.12)$$

En el primer capítulo argumentamos el uso del potencial cotagente en superficies con curvatura constante. A continuación calcularemos el potencial cotagente para el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) &= \frac{1}{\mathbf{R}} \sum_{j=1, j \neq k}^n m_k m_j \cot\left(\frac{d_{kj}}{\mathbf{R}}\right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{R}} \sum_{j=1, j \neq k}^n m_k m_j \frac{2\mathbf{R}^2(z_j \bar{z}_k + z_k \bar{z}_j) + (|z_k|^2 - \mathbf{R}^2)(|z_j|^2 - \mathbf{R}^2)}{2\mathbf{R}|z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|}. \end{aligned}$$

En el siguiente lema mostramos el cálculo de las ecuaciones de movimiento, que nos permitirá estudiar la dinámica de los cuerpos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

**Lema 8.** Sea

$$L_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \lambda(z_k, \bar{z}_k) |\dot{z}_k|^2 + \frac{1}{\mathbf{R}} \sum_{j=1, j \neq k}^n m_k m_j \cot\left(\frac{d_{kj}}{\mathbf{R}}\right), \quad (6.13)$$

el Lagrangiano del problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden son las ecuaciones de movimiento del problema curvado de los  $n$  cuerpos con curvatura positiva.

$$m_k \ddot{z}_k = \frac{2m_k \bar{z}_k \dot{z}_k^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} + \frac{2}{\lambda(z_k, \bar{z}_k)} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_k} &= \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j (\mathbf{R}^2 + |z_k|^2) (\mathbf{R}^2 + |z_j|^2) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k) (z_j - z_k)}{4\mathbf{R}^2 |z_j - z_k|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|^3} \\ &= \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j (\mathbf{R}^2 + |z_k|^2) (\mathbf{R}^2 + |z_j|^2) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k) (z_j - z_k)}{4\mathbf{R}^2 |z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k| (\bar{z}_j - \bar{z}_k) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_k z_j)}, \end{aligned}$$

y el elemento conforme es

$$\lambda(z_k, \bar{z}_k) = \frac{4\mathbf{R}^4}{(\mathbf{R}^2 + |z_k|^2)^2}. \quad (6.15)$$

*Demostración.*

Para obtener las ecuaciones de movimiento partiremos de la ecuación de Euler-Lagrange para variable compleja.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{\mathbf{R}}}{\partial \dot{\bar{z}}_k} \right) - \frac{\partial L_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad (6.16)$$

donde el potencial cotagente  $U_{\mathbf{R}}(z, \bar{z}) = U_{\mathbf{R}}$  y el elemento conforme  $\lambda(z_k, \bar{z}_k) = \lambda$  no dependen de la variable  $\dot{z}_k$ , sustituyendo estos supuestos obtenemos

$$\frac{\partial L_{\mathbf{R}}}{\partial \dot{z}_k} = \frac{\partial T_{\mathbf{R}}}{\partial \dot{z}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k} \left( \frac{1}{2} m_k \lambda |\dot{z}_k|^2 \right) = \frac{1}{2} m_k \lambda \dot{z}_k.$$

En consecuencia, el primer término de la ecuación (6.16) es de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{\mathbf{R}}}{\partial \dot{z}_k} \right) = \frac{1}{2} m_k \dot{z}_k \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial z_k} \dot{z}_k + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} \dot{\bar{z}}_k \right] + \frac{1}{2} m_k \lambda \ddot{z}_k. \quad (6.17)$$

Por otro lado, calculamos el segundo término de la ecuación (6.16) obteniendo

$$\frac{\partial L_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} m_k \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} |\dot{z}_k|^2 + \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k}. \quad (6.18)$$

Sustituimos los cálculos anteriores en la ecuación (6.16) obteniendo así

$$\left( \frac{1}{2} m_k \dot{z}_k \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial z_k} \dot{z}_k + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} \dot{\bar{z}}_k \right] + \frac{1}{2} m_k \lambda \ddot{z}_k \right) - \left( \frac{1}{2} m_k \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} |\dot{z}_k|^2 + \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0,$$

derivamos el elemento conforme, simplificamos y reordenamos la ecuación anterior obteniendo la ecuación de movimiento para el cuerpo  $z_k$  con masas  $m_k$ .

$$m_k \ddot{z}_k = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} + \frac{2 m_k \dot{z}_k^2 \bar{z}_k}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2}. \quad (6.19)$$

■

En el siguiente resultado, mostramos el comportamiento de los cuerpos cuando el potencial cotangente es una constante o cero.

**Teorema 23.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que el valor del potencial cotangente  $U_{\mathbf{R}}$  es cero o una constante entonces el  $k$ -ésimo cuerpo se mueve sobre su geodésica.*

*Demostración.*

Usando las ecuaciones de las geodésicas (6.6) para las variables  $u$  y  $v$  respectivamente. Recordemos que hicimos un cambio de variable  $z_k = u_k + iv_k$ , por lo tanto la ecuación de la geodésica para el cuerpo  $z_k$  es

$$\frac{\ddot{z}_k}{2} = \frac{\ddot{u}_k + i\ddot{v}_k}{2} = \frac{(u_k - iv_k) [\dot{u}_k + i\dot{v}_k]^2}{\mathbf{R}^2 + u_k^2 + v_k^2}, \quad (6.20)$$

multiplicando por  $2m_k$  y expresamos la ecuación anterior en términos de la variable  $z_k$ .

$$m_k \ddot{z}_k - \frac{2m_k \bar{z}_k \dot{z}_k^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} = 0. \quad (6.21)$$

Por otro lado, en el lema anterior obtuvimos la ecuación de movimiento para el cuerpo  $z_k$  con masa  $m_k$ .

$$m_k \ddot{z}_k - \frac{2m_k \dot{z}_k^2 \bar{z}_k}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k}.$$

Por hipótesis, el potencial cotangente  $U_{\mathbf{R}}$  es una constante o cero, por lo tanto la ecuación de movimiento es de la forma

$$m_k \ddot{z}_k - \frac{2m_k \dot{z}_k^2 \bar{z}_k}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} = 0. \quad (6.22)$$

Notemos que la ecuación anterior coincide con la ecuación de la geodésica (6.21) para la partícula  $z_k$ . En otras palabras, obtuvimos la ecuación movimiento con el simple cálculo de la ecuación geodésica del cuerpo  $z_k$ . En conclusión, cuando el potencial cotangente es nulo o es una constante el cuerpo  $z_k$  se mueve sobre su geodésica. ■

La ecuación de movimiento que obtuvimos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  es equivalente a la ecuación que describe el movimiento de los cuerpos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ . Recordemos que el objetivo principal del capítulo es estudiar los equilibrios relativos, por lo que en el apéndice A probamos la equivalencia de las ecuaciones de movimiento.

A continuación obtendremos la ecuación algebraica que genera equilibrios relativos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  usando el grupo de isometrías.

## 6.4. Equilibrios relativos en $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$

Haciendo uso de las isometrías a continuación estudiaremos la existencia de los equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . Llamamos grupo lineal general  $GL(2, \mathbb{C})$  el grupo de matrices invertibles de  $2 \times 2$  con entradas en los complejos y la multiplicación matricial usual. El grupo de isometrías del espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  se encuentra dado por el cociente  $SU(2) \setminus \{\pm I\}$  donde el subgrupo unitario especial está definido como

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T A = I\}.$$

Sea  $A \in SU(2)$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  y se cumple  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , entonces la matriz  $A$  es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

notemos que a cada matriz  $A \in SU(2) \setminus \{\pm I\}$  se le asocia una única transformación de Moebius dada por

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2 &\rightarrow \mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2 \\ z &\rightarrow \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Por otro lado, el grupo  $SU(2)$  es un grupo de Lie [7] que a su vez se le asocia una álgebra de Lie  $su(2)$  definida como

$$su(2) = \{X \in M(2, \mathbb{C}) \mid \bar{X}^T = -X, \text{Tr}(X) = 0\},$$

Para un mejor entendimiento definimos lo que es una álgebra de Lie.

**Definición 23.** Una álgebra de Lie es un par  $(A, [\cdot, \cdot])$  que consiste de un espacio vectorial  $A$  sobre un campo  $\mathbb{F}$ , junto con una operación binaria  $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ ,  $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ , llamada corchete de Lie, tal que para cualesquiera  $X, Y, Z \in A$  y  $a, b \in \mathbb{F}$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- *Antisimetría*

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

- *Linealidad*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

- *La Identidad de Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Usando el hecho de que es un espacio vectorial se sigue que  $su(2)$  es una combinación lineal de los elementos de su base. Una de las bases que generan el álgebra de Lie  $su(2)$  está compuesta por las matrices complejas de Pauli, en consecuencia para estudiar el grupo de isometrías de  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  basta con analizar las matrices complejas de Pauli.

$$\left\{ h_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, h_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hasta ahora conocemos toda la información del álgebra de Lie  $su(2)$ , sin embargo estamos interesados en la estructura del grupo  $SU(2)$ . Consideremos el mapeo exponencial, el cual nos permite capturar la información del álgebra de Lie al grupo de Lie,

$$\exp : su(2) \rightarrow SU(2),$$

aplicando la función exponencial a los subgrupos de un parámetro  $\{th_1\}$ ,  $\{th_2\}$ , y  $\{th_3\}$ , obtenemos los respectivos subgrupos en  $SU(2)$  de un parámetro. Para el primero  $\{th_1\}$ , el subgrupo en  $SU(2)$  es

$$H_1(t) = \exp(th_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(th_1)^n}{n!} = I + th_1 + \frac{t^2 h_1^2}{2!} + \frac{t^3 h_1^3}{3!} + \dots,$$

o bien, en su forma matricial

$$H_1(t) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{t}{n}\right)^{2n} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{t}{n}\right)^{2n+1} \\ - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{t}{n}\right)^{2n+1} \right) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{t}{n}\right)^{2n} \end{bmatrix},$$

observemos que los elementos de la matriz son desarrollos en serie de la función coseno y de la función seno, por lo tanto simplificando la matriz anterior obtenemos

$$H_1(t) = \exp(th_1) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & \sin(t/2) \\ -\sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix}.$$

Recordemos que a cada matriz en  $SU(2)$  le asociamos una transformación de Moebius (6.23), por lo que definimos a la familia uno paramétrica como

$$f_{H_1}(z) = \frac{z \cos(t/2) + \sin(t/2)}{-z \sin(t/2) + \cos(t/2)}.$$

El procedimiento es similar para la matriz  $\{th_2\}$  por lo que  $H_2$  se encuentra dada por

$$H_2(t) = \exp(th_2) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix},$$

donde la transformación de Moebius que actúa en la familia uno paramétrica es

$$f_{H_2}(z) = e^{it}z.$$

El cálculo de  $H_3$  es similar para el último subgrupo  $\{th_3\}$ .

$$H_3(t) = \exp(th_3) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) & i \sin(t/2) \\ i \sin(t/2) & \cos(t/2) \end{pmatrix},$$

cuya transformación de Moebius asociada a la matriz anterior es

$$f_{H_3}(z) = \frac{z \cos(t/2) + i \sin(t/2)}{zi \sin(t/2) + \cos(t/2)}.$$

El grupo de rotaciones  $A(t) \in SO(3)$  es la matriz solución para el vector de Killing  $L_Z(x, y, z) = (y, -x, 0)$  donde la rotación del vector es alrededor del eje  $z$  y es invariante para cualquier esfera centrada en el origen.

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación probaremos la equivalencia de los isomorfismos para ambos modelos.

**Proposición 4.** Sea  $G : SU(2) \setminus \{\pm I\} \rightarrow SO(3)$  el isomorfismo entre los grupos de isometrías de la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ , entonces  $G(H_2(t)) = A(t)$ .

*Demostración.*

Usando las ecuaciones de la proyección estereográfica tenemos

$$\Pi(x, y, z) = \left( \frac{\mathbf{R}x}{\mathbf{R} - z}, \frac{\mathbf{R}y}{\mathbf{R} - z} \right),$$

donde la rotación del vector tangente a  $(x, y, z)$  en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  es  $(y, -x, 0)$ . La matriz jacobiana de la transformación aplicada al vector tangente es

$$J_{\Pi} [L_Z(x, y, z)]^T = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}-z} & 0 & \frac{\mathbf{R}x}{(\mathbf{R}-z)^2} \\ 0 & \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}-z} & \frac{\mathbf{R}y}{(\mathbf{R}-z)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{R}y}{\mathbf{R}-z} \\ -\frac{\mathbf{R}x}{\mathbf{R}-z} \end{pmatrix}.$$

Notemos que  $v = \frac{\mathbf{R}y}{\mathbf{R}-z}$  y  $u = \frac{\mathbf{R}x}{\mathbf{R}-z}$ , en notación compleja esto corresponde a  $v - iu = -i(u + iv) = -iz$ , obteniendo la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{z} = -iz,$$

la cual genera el flujo  $f_t(z) = e^{-it}z$  y esta asociado al subgrupo de la transformación de Moebius  $f_{H_2}(t)$ , por lo tanto  $G(H_2(t)) = A(t)$ . ■

Ahora que hemos obtenido el grupo de isometrías de  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , podemos definir como en el modelo anterior los equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . Denotemos como  $Iso(\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2)$  al grupo de isometrías de  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y como  $\{G_M(t)\} \in Iso(\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2)$  a la familia de todas las rotaciones que actúan en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2 \setminus \Delta$ .

**Definición 24.** Un equilibrio relativo en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  es una solución  $z(t)$  de las ecuaciones de movimiento (6.22) invariante bajo el subgrupo  $G_M(t)$ . En otras palabras, para  $g_M \in G_M$ , la función  $w(t) = g_M(t)z(t)$  es una solución de la ecuación de movimiento (6.22).

Por el Teorema del Eje Principal, para cualquier rotación en  $\mathbb{R}^3$  elegimos un eje de rotación fijo. En este caso, sin pérdida de generalidad, fijaremos al eje  $z$  como el eje de rotación. Los subgrupos restantes representan rotaciones alrededor de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.

A continuación obtendremos la ecuación de movimiento que genera todos los equilibrios relativos del espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . Usando la Proposición 4 y el hecho de que fijamos al eje  $z$  como

eje de rotación, basta con analizar la segunda clase de transformaciones de Moebius, esto es

$$w_k(t) = f_{H_2}(z_k(t)) = e^{it} z_k(t). \quad (6.24)$$

donde  $z_k(t)$  es una solución de las ecuaciones de movimiento (6.14). Debido a que la ecuación anterior es na solución de la ecuación de movimiento, calculamos sus respectivas derivadas como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \dot{w}_k &= (i z_k + \dot{z}_k) e^{it}, \\ \ddot{w}_k &= (\ddot{z}_k + 2i \dot{z}_k - z_k) e^{it}, \\ \frac{d\bar{z}_k}{d\bar{w}_k} &= e^{it}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de movimiento (6.14) y expresándola en términos de la variable  $z_k$  obtenemos

$$m_k e^{it} \left[ (\ddot{z}_k + 2i \dot{z}_k - z_k) = \frac{2\bar{z}_k (i z_k + \dot{z}_k)^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} + \frac{(\mathbf{R}^2 + |z_k|^2)^2}{2m_k \mathbf{R}^4} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} \right],$$

usamos la ecuación de movimiento para  $z_k$  (6.14) para eliminar algunos términos y factorizando llegamos a la siguiente expresión

$$[2i \dot{z}_k - z_k] \left[ 1 - \frac{2|z_k|^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} \right] = 0,$$

donde la ecuación anterior tiene solución si y sólo si se cumple

$$1 - \frac{2|z_k|^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} = 0, \quad \text{o bien,} \quad (6.26)$$

$$2i \dot{z}_k = z_k. \quad (6.27)$$

Simplificando la ecuación (6.26) obtenemos la relación  $\mathbf{R}^2 = |z_k|^2$ . Esto implica que una condición necesaria y suficiente para obtener un equilibrio relativo en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  es que todas las partículas se encuentren sobre el círculo geodésico. El siguiente resultado fue probado

por Diacu, Pérez-Chavela y Santoprete en su artículo “*The  $n$ -body problem in spaces of constant curvature. Part I: Relative Equilibria*” [25].

**Proposición 5.** *Para el problema de los  $n$  cuerpos con masas arbitrarias, supongamos que los cuerpos están sobre el círculo geodésico y la configuración del sistema es un punto fijo (evitando las posiciones antipodales). Entonces la órbita generada por la acción de  $H_2(t)$  es un equilibrio relativo en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .*

*Demostración.*

Recordemos que la ecuación de movimiento para el problema de los  $n$  cuerpos es

$$m_k \ddot{z}_k - \frac{2m_k \bar{z}_k \dot{z}_k^2}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k},$$

supongamos que los cuerpos se mueven sobre el círculo geodésico, esto es es equivalente a la condición (6.26). Además como los cuerpos se mueven sobre su geodésica tenemos, por el Teorema 23, que el lado izquierdo de la ecuación de movimiento es cero, o bien la energía potencial no actúa a lo largo del círculo geodésico  $\frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k} = 0$ .

Por otro lado, la configuración es un punto fijo, lo cual implica que las velocidades de los cuerpos son nulas. Usando la acción del subgrupo  $H_2$  concluimos que la configuración del sistema es un equilibrio relativo. ■

Para la segunda condición (6.27) obtenemos que  $|z_k(t)| = r_k$ , donde  $r_k$  es un valor positivo con  $r_k \neq \mathbf{R}$  y satisface la relación  $0 \leq r_k < \pi \mathbf{R}$ . Estamos interesados en estudiar la existencia de equilibrios relativos cuando alguno de los cuerpos no se mueve sobre el círculo geodésico. En el siguiente resultado damos una caracterización de *todos* los equilibrios relativos salvo isometrías.

**Teorema 24.** *Considere el problema de los  $n$  cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . La solución  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$  de las ecuaciones de movimiento (6.22) es un equilibrio relativo si se satisface el siguiente sistema de funciones racionales*

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_k^2) z_k}{(\mathbf{R}^2 + r_k^2)^4} = - \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_j (\mathbf{R}^2 + r_j^2)^2 (z_j - z_k) (\mathbf{R}^2 + z_k \bar{z}_j)}{|z_j - z_k|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|^3}, \quad (6.28)$$

donde  $|z_\ell| = r_\ell \in [0, \pi \mathbf{R})$ .

*Demostración.*

Para garantizar la existencia de equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , los cuerpos se deben mover sobre cualquier círculo  $r_\ell \neq \mathbf{R}$  centrado en el origen y que satisfaga la relación  $0 \leq r_\ell < \pi \mathbf{R}$ , centrado en el origen del sistema coordenado. Derivando la condición (6.27) obtenemos

$$-4\ddot{z}_k = z_k. \quad (6.29)$$

Sustituimos la relación anterior en la ecuación de movimiento (6.14) y usando de nuevo la condición (6.27) podemos eliminar las derivadas  $\ddot{z}_k$  y  $\dot{z}_k$  de las ecuaciones de movimiento. Finalmente obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$m_k z_k = \frac{2m_k |z_k|^2 z_k}{\mathbf{R}^2 + |z_k|^2} - \frac{2(\mathbf{R}^2 + |z_k|^2)^2}{\mathbf{R}^4} \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k}, \quad (6.30)$$

realizando un poco de álgebra y usando el hecho de que  $|z_\ell| = r_\ell$  obtenemos una condición necesaria para la existencia de equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$

$$\frac{m_k \mathbf{R}^4 (\mathbf{R}^2 - |z_k|^2) z_k}{2(\mathbf{R}^2 + |z_k|^2)^3} = - \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j (\mathbf{R}^2 + |z_k|^2) (\mathbf{R}^2 + |z_j|^2)^2}{4\mathbf{R}^2 |z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k| (\bar{z}_j - \bar{z}_k) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_k z_j)}.$$

Recordemos que  $|z_\ell| = r_\ell$  y simplificando la ecuación anterior obtenemos finalmente una condición necesaria para la existencia equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_k^2) z_k}{(\mathbf{R}^2 + r_k^2)^4} = - \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_j (\mathbf{R}^2 + r_j^2)^2 (z_j - z_k) (\mathbf{R}^2 + z_k \bar{z}_j)}{|z_j - z_k|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|^3}.$$

■

El resultado anterior es de gran importancia dado que eliminó la dependencia de la velocidad y la aceleración de los cuerpos en la ecuación que genera equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . A diferencia de los capítulos anteriores, aquí estamos estudiando no sólo una familia de soluciones sino todos los equilibrios relativos para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

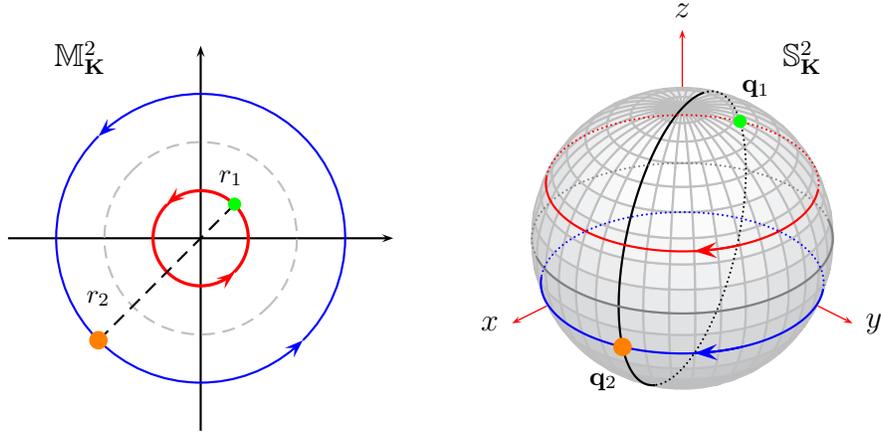


Figura 6.4: Representación del problema de dos cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$

## 6.5. Equilibrios relativos para $n = 2$

El problema de los dos cuerpos en espacios con curvatura positiva ha sido estudiado por varios autores [6, 8, 41, 59, 62], este se divide en dos casos. El primero de ellos es llamado el problema de Kepler en espacios con curvatura positiva, donde suponen que uno de los cuerpos se encuentra fijo en uno de los polos mientras que el segundo cuerpo se mueve atraído por el primero.

En el otro caso, los cuerpos se mueven libremente sobre la superficie curvada, sin embargo el centro de masa no es una primera integral por lo que el problema es no integrable [62, 67]. Por lo tanto, encontraremos los equilibrios relativos para un problema no integrable usando la acción del subgrupo de un parámetro  $\{H_2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ .

Para un sistema de dos cuerpos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  con masas  $m_1, m_2 > 0$ , el sistema de ecuaciones algebraicas (6.28) se encuentra dado por

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) z_1}{(\mathbf{R}^2 + r_1^2)^4} = -\frac{m_2 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (z_2 - z_1) (\mathbf{R}^2 + z_1 \bar{z}_2)}{|z_2 - z_1|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_2 z_1|^3}, \quad (6.31)$$

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) z_2}{(\mathbf{R}^2 + r_2^2)^4} = -\frac{m_1 (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 (z_1 - z_2) (\mathbf{R}^2 + z_2 \bar{z}_1)}{|z_1 - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_1 z_2|^3}, \quad (6.32)$$

Realizando un poco de álgebra en las ecuaciones anteriores obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) z_1 |z_2 - z_1|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_2 z_1|^3}{m_2 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^4 (\mathbf{R}^2 + z_1 \bar{z}_2)} &= (z_1 - z_2), \\ \frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) z_2 |z_1 - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_1 z_2|^3}{m_1 (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^4 (\mathbf{R}^2 + z_2 \bar{z}_1)} &= -(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Simplificamos las ecuaciones anteriores y evitando las singularidades obtenemos

$$\frac{(\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) m_1}{(\mathbf{R}^2 - r_2^2) (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 m_2} = -\frac{z_2 \mathbf{R}^2 + z_1 |z_2|^2}{z_1 \mathbf{R}^2 + z_2 |z_1|^2}.$$

Como ya vimos, los cuerpos se mueven en círculo paralelos al plano  $x-y$  por lo que podemos suponer que  $|z_k| = r_k$ , reescribimos la ecuación anterior como una ecuación polinomial de la forma

$$\begin{aligned} 0 = z_1 &\left[ m_1 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) \mathbf{R}^2 + m_2 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 r_2^2 \right] \\ &+ z_2 \left[ m_2 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 \mathbf{R}^2 + m_1 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) r_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

El polinomio anterior nos da la existencia de equilibrios relativos para dos cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$ , donde los cuerpos están posicionados en los círculos con radio  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. En la Figura 6.6 mostramos dos cuerpos en el plano  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y la representación de los mismos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

### 6.5.1. Dos masas en el mismo círculo.

Ahora supongamos que los dos cuerpos se encuentran en la misma órbita circular con radio  $r_1 = r_2 = r$  en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , esto en la esfera es equivalente a que los cuerpos se encuentren en el mismo plano ortogonal al eje de rotación  $z$ .

**Teorema 25.** *Para el problema de los dos cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que ambos cuerpos se mueven en el mismo círculo con radio  $r \neq \mathbf{R}$ . Entonces la configuración es un equilibrio relativo si y sólo si los cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$  son iguales y son antipodales en el círculo (ver Figura 6.6).*

*Demostración.*

Usaremos la ecuación (6.33) y el hecho de que  $r := r_1 = r_2$  obtenemos

$$0 = (\mathbf{R}^2 + r^2)^2 (\mathbf{R}^2 - r^2) \{z_1 [m_1 \mathbf{R}^2 + m_2 r^2] + z_2 [m_2 \mathbf{R}^2 + m_1 r^2]\},$$

como  $r \neq \mathbf{R}$  podemos simplificar la ecuación anterior obteniendo la siguiente expresión

$$0 = z_1 [m_1 \mathbf{R}^2 + m_2 r^2] + z_2 [m_2 \mathbf{R}^2 + m_1 r^2]. \quad (6.34)$$

Supongamos que las masas son iguales  $m_1 = m_2$ , se sigue que

$$z_1 m [\mathbf{R}^2 + r^2] = -z_2 m [\mathbf{R}^2 + r^2],$$

lo cual implica que  $z_1 = -z_2$ , en otras palabras los cuerpos se encuentran en lados opuestos del mismo círculo.

Por otro lado, despejamos la variable  $z_2$  de la ecuación (6.34) y calculando el módulo de  $z_2$  obtenemos la siguiente relación

$$|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 \frac{(m_1 \mathbf{R}^2 + m_2 r^2)^2}{(m_2 \mathbf{R}^2 + m_1 r^2)^2},$$

usando la condición  $|z_1| = |z_2| = r$  y simplificando tenemos

$$r = r \left| \frac{m_1 \mathbf{R}^2 + m_2 r^2}{m_2 \mathbf{R}^2 + m_1 r^2} \right|,$$

como todos los valores son positivos, la ecuación anterior es equivalente a

$$m_1 (\mathbf{R}^2 - r^2) = m_2 (\mathbf{R}^2 - r^2).$$

Dado que  $r \neq \mathbf{R}$  se tiene que las masas de los dos cuerpos son iguales  $m_1 = m_2$ , por lo tanto los cuerpos están en lados opuestos del círculo (ver Figuras 6.5 y 6.6). ■

**Corolario 4.** *Para el problema de los dos cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que el cuerpo con masa  $m_1$  esta sobre el círculo geodésico de radio  $\mathbf{R}$ . Entonces la configuración del sistema no es un equilibrio relativo.*

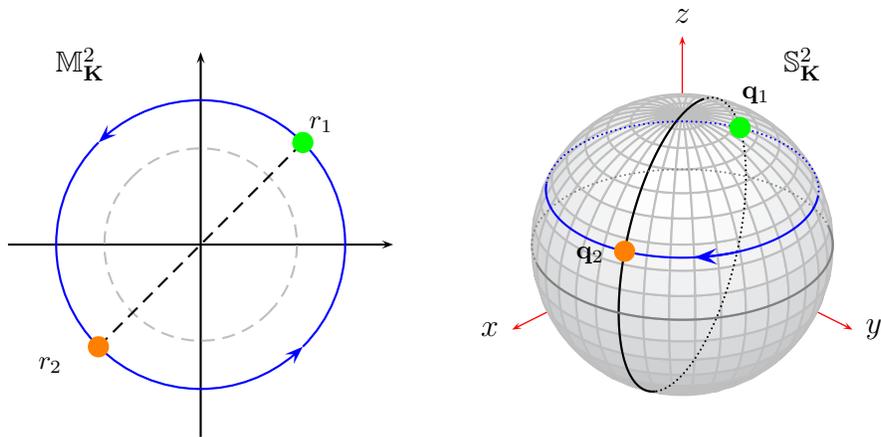


Figura 6.5: Equilibrios relativos para  $n = 2$  en el mismo círculo con masas iguales ubicadas en el hemisferio Norte.

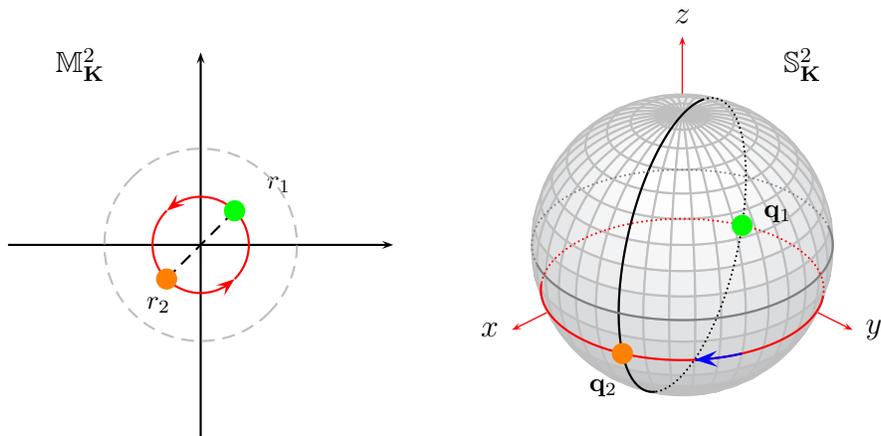


Figura 6.6: Equilibrios relativos para  $n = 2$  en el mismo círculo con masas iguales ubicadas en el hemisferio Sur.

*Demostración.*

Usando la ecuación (6.33) y el hecho de que el cuerpo con masa  $m_1$  está sobre el círculo geodésico, es decir  $r_1 = \mathbf{R}$  obtenemos

$$0 = 4m_2\mathbf{R}^4 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) [z_1 r_2^2 + z_2 \mathbf{R}^2].$$

Simplificando la ecuación anterior obtenemos la relación entre las posiciones de los cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$ .

$$z_1 = -\frac{z_2 \mathbf{R}^2}{r_2^2}, \quad (6.35)$$

observemos que  $z_1$  y  $z_2$  pertenecen al conjunto de singularidades  $\Delta^-$  de las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto, no existen equilibrios relativos si uno de los cuerpos está en el círculo geodésico. ■

Ya mostramos la existencia de equilibrios relativos cuando ambos cuerpos están en el mismo círculo en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  o visto desde la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  los cuerpos están en el mismo plano ortogonal al eje de rotación.

## 6.5.2. Dos masas en distintos círculos

A continuación mostraremos la relación entre las masas cuando los cuerpos no se encuentran en el mismo círculo en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  que generan equilibrios relativos degenerados, estos equilibrios relativos corresponden a una bifurcación para el problema de los dos cuerpos.

**Lema 9.** *Para el problema de los dos cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , una condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios relativos degenerados es que la relación de sus posiciones sea la siguiente*

$$z_1 = \pm (1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R}, \quad z_2 = \pm (1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R},$$

donde las masas deben de satisfacer alguna de las siguientes condiciones

$$m_2 = m_1, \quad m_2 = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})^2} m_1, \quad m_2 = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})^2} m_1.$$

*Demostración.*

Sin pérdida de generalidad, fijemos la posición del cuerpo con masa  $m_1 > 0$  en el punto  $z_1 = r_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ . Para evitar confusiones con la notación, denotamos la posición del cuerpo con masa  $m_2$  como  $|z_2| = r_2 = r$  y  $z_2 = z$ . Aplicando estos supuestos en la ecuación (6.33) obteniendo una ecuación algebraica para la variable  $z$ .

$$z = -\frac{m_1 (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + r^2)^2 \mathbf{R}^2 + m_2 (\mathbf{R}^2 - r^2) (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 r^2}{m_1 (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + r^2)^2 \alpha^2 + m_2 (\mathbf{R}^2 - r^2) (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 \mathbf{R}^2} \alpha, \quad (6.36)$$

junto con el hecho de que el cuerpo con masa  $m_1$  está en el eje real se sigue que el cuerpo con masa  $m_2$  también se encuentra en el eje real. Además, usando la condición  $|z| = r$  en la ecuación anterior obtenemos

$$[\alpha r \pm \mathbf{R}^2] \left[ m_1 (\mathbf{R}^2 + r^2)^2 (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) \alpha - m_2 (\mathbf{R}^2 - r^2) (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 r \right] = 0.$$

La ecuación tiene solución si

$$r = \pm \frac{\mathbf{R}^2}{\alpha}, \quad \text{o bien,} \quad (6.37)$$

$$m_1 (\mathbf{R}^2 + r^2)^2 (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) \alpha - m_2 (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 (\mathbf{R}^2 - r^2) r = 0. \quad (6.38)$$

Para obtener la posición del cuerpo con masa  $m_2$  tomemos la primera solución (6.37) y la sustituimos en la ecuación (6.36), entonces el valor de  $z$  es

$$z = -\frac{\mathbf{R}^2}{\alpha}, \quad (6.39)$$

pero  $z$  es antipodal al punto  $z_1 = \alpha$  definido en (6.10), en otras palabras la solución (6.37) no genera equilibrios en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

Por lo tanto, para probar la existencia de los equilibrios relativos necesitamos encontrar las soluciones reales de la ecuación (6.38). Sea

$$f(x) = m_1 \alpha (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + x^2)^2 - m_2 (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 (\mathbf{R}^2 x - x^3), \quad (6.40)$$

una función real donde su derivada se encuentra dada por

$$f'(x) = 4xm_1\alpha (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + x^2) - m_2 (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 (\mathbf{R}^2 - 3x^2). \quad (6.41)$$

Empezaremos estudiando las raíces dobles de  $f(x)$ , para ello resolveremos el sistema conformado por la función y su derivada como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} 4x \left[ m_1\alpha (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + x^2)^2 - m_2 (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 (\mathbf{R}^2 x - x^3) \right] &= 0 \\ (\mathbf{R}^2 + x^2) \left[ 4xm_1\alpha (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + x^2) - m_2 (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2 (\mathbf{R}^2 - 3x^2) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Como  $x = 0$  no es raíz de  $f$  y el valor de  $(\mathbf{R}^2 + x^2)$  nunca es cero, entonces el sistema es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} 4x f(x) &= 0, \\ (\mathbf{R}^2 + x^2) f'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos la ecuación

$$[(\mathbf{R}^2 - 3x^2)(\mathbf{R}^2 + x^2) - 4x(\mathbf{R}^2 x - x^3)] = 0,$$

Usando la fórmula general encontramos las soluciones de la ecuación anterior para  $x$

$$x = \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}\mathbf{R},$$

notemos además que tenemos la siguiente igualdad  $(3 \pm 2\sqrt{2}) = (1 \pm \sqrt{2})^2$  y por simetría de la ecuación (6.38) se tienen los valores para  $\alpha$

$$x = \pm (1 \pm \sqrt{2})\mathbf{R}, \quad \alpha = \pm (1 \pm \sqrt{2})\mathbf{R}, \quad (6.42)$$

donde  $z_1 = x$  y  $z_2 = \alpha$ . Además la relación entre las masas se obtienen usando la ecuación (6.40)

$$m_2 = m_1 \frac{\alpha (\mathbf{R}^2 - x^2) (\mathbf{R}^2 + \alpha^2)^2}{x (\mathbf{R}^2 - \alpha^2) (\mathbf{R}^2 + x^2)^2},$$

sustituyendo las soluciones (6.42) en la relación anterior obtenemos

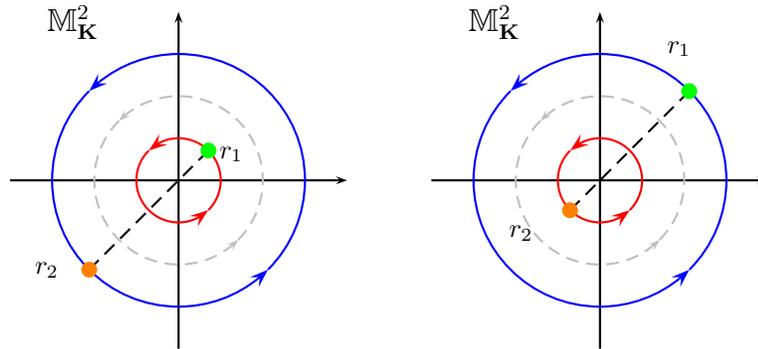


Figura 6.7: Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas  $m_2 = m_1$  y posiciones  $r_1 = -(1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R}$ ,  $r_2 = (1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R}$ .

$$m_2 = m_1 \frac{[\pm (1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R}] (1 \pm \sqrt{2}) (-1 \pm \sqrt{2})^2}{[\pm (1 \pm \sqrt{2}) \mathbf{R}] (1 \pm \sqrt{2}) (-1 \pm \sqrt{2})^2}. \quad (6.43)$$

Por lo tanto para obtener equilibrios relativos los cuerpos deben de satisfacer alguna de las siguientes relaciones de masa

$$m_2 = m_1, \quad m_2 = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})^2} m_1, \quad m_2 = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})^2} m_1. \quad (6.44)$$

Estas relaciones generan cuatro equilibrios relativos distintos. En la Figura (6.7) mostramos cuando uno de los cuerpos está ubicado en el hemisferio Norte y otro en el hemisferio Sur, y las masas son iguales  $m_1 = m_2$ . Los otros dos equilibrios relativos corresponden a las dos últimas ecuaciones de (6.44), en las Figuras 6.8 y 6.9) se muestran las configuraciones. ■

## 6.6. Equilibrios relativos para $n = 3$

Supongamos que tenemos tres cuerpos con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  interactuando en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , donde sus posiciones son  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  respectivamente. El sistema de ecuaciones algebraicas que generan equilibrios relativos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  es:

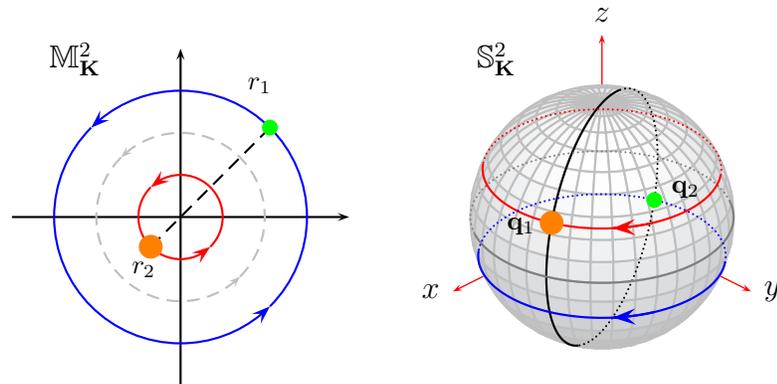


Figura 6.8: Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas  $m_2 = m_1 \frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})^2}$  y posiciones  $r_1 = -(1 + \sqrt{2}) \mathbf{R}$ ,  $r_2 = (1 - \sqrt{2}) \mathbf{R}$ .

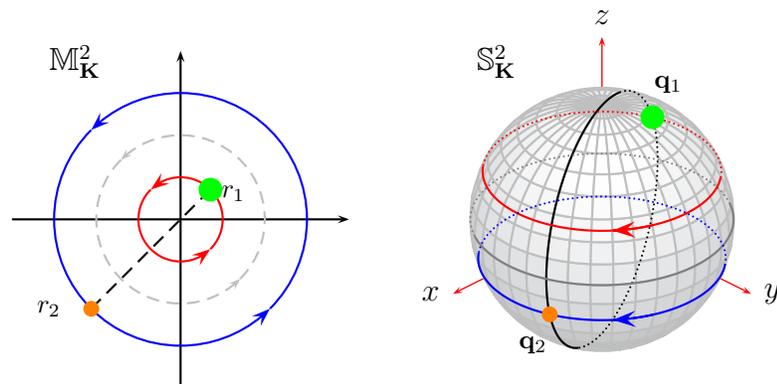


Figura 6.9: Equilibrios relativos para dos cuerpos con masas  $m_2 = m_1 \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})^2}$  y posiciones  $r_1 = -(1 - \sqrt{2}) \mathbf{R}$ ,  $r_2 = (1 + \sqrt{2}) \mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_1^2) z_1}{(\mathbf{R}^2 + r_1^2)^4} = & - \frac{m_2 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (z_2 - z_1) (\mathbf{R}^2 + z_1 \bar{z}_2)}{|z_2 - z_1|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_2 z_1|^3} \\ & - \frac{m_3 (\mathbf{R}^2 + r_3^2)^2 (z_3 - z_1) (\mathbf{R}^2 + z_1 \bar{z}_3)}{|z_3 - z_1|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_3 z_1|^3}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_2^2) z_2}{(\mathbf{R}^2 + r_2^2)^4} = & - \frac{m_1 (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 (z_1 - z_2) (\mathbf{R}^2 + z_2 \bar{z}_1)}{|z_1 - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_1 z_2|^3} \\ & - \frac{m_3 (\mathbf{R}^2 + r_3^2)^2 (z_3 - z_2) (\mathbf{R}^2 + z_2 \bar{z}_3)}{|z_3 - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_3 z_2|^3}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r_3^2) z_3}{(\mathbf{R}^2 + r_3^2)^4} = & - \frac{m_1 (\mathbf{R}^2 + r_1^2)^2 (z_1 - z_3) (\mathbf{R}^2 + z_3 \bar{z}_1)}{|z_1 - z_3|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_1 z_3|^3} \\ & - \frac{m_2 (\mathbf{R}^2 + r_2^2)^2 (z_2 - z_3) (\mathbf{R}^2 + z_3 \bar{z}_2)}{|z_2 - z_3|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_2 z_3|^3}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

Observemos que si el número de cuerpos aumenta, resolver el sistema de ecuaciones algebraicas se vuelve mucho más complejo. Debido a esto analizaremos dos tipos de configuraciones específicas: los equilibrios relativos Eulerianos y los equilibrios relativos Lagrangianos.

### 6.6.1. Equilibrios relativos Eulerianos.

Consideremos el problema de los tres cuerpos posicionados en la misma línea geodésica donde el cuerpo con masa  $m_1$  está en el origen  $z_1 = 0$  y los cuerpos con masas  $m_2$  y  $m_3$  están los círculos de radio  $r_2$  y  $r_3$  respectivamente. Recordemos que este tipo de configuraciones son soluciones, en la Figura (6.10) mostramos la posición de los cuerpos en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y en  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

Aplicando una rotación conveniente en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  asumimos, sin pérdida de generalidad, que los cuerpos con masas  $m_2$  y  $m_3$  están sobre el eje real, es decir,  $z_2 = a$  y  $z_3 = -r$  donde  $a, r \in \mathbb{R}^+$ . Reescribiendo el sistema de ecuaciones (6.45-6.47) obtenemos:

$$0 = -\frac{m_2 (\mathbf{R}^2 + a^2)^2}{a^2} + \frac{m_3 (\mathbf{R}^2 + r^2)^2}{r^2}, \quad (6.48)$$

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - a^2) a}{(\mathbf{R}^2 + a^2)^4} = \frac{m_1}{a^2} - \frac{m_3 (\mathbf{R}^2 + r^2)^2}{(r + a)^2 (\mathbf{R}^2 - ar)^2}, \quad (6.49)$$

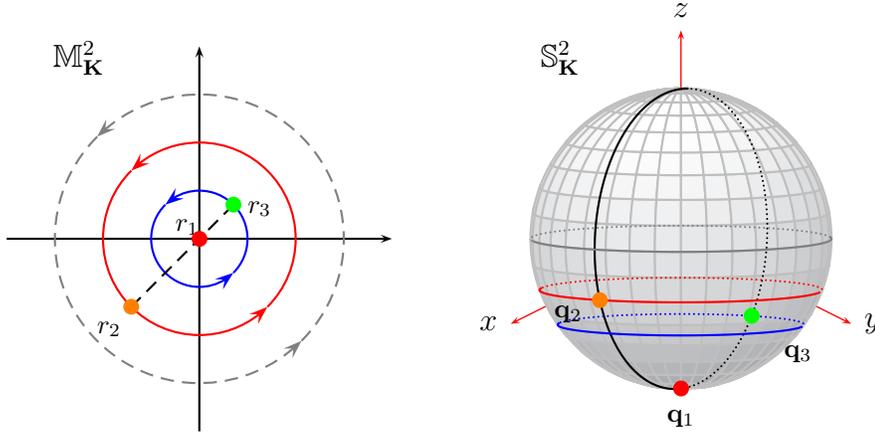


Figura 6.10: Equilibrios relativos Eulerianos en el hemisferio Sur

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r^2) r}{(\mathbf{R}^2 + r^2)^4} = -\frac{m_1}{r^2} + \frac{m_2 (\mathbf{R}^2 + a^2)^2}{(a+r)^2 (\mathbf{R}^2 - ar)^2}, \quad (6.50)$$

Usando el sistema de ecuaciones obtendremos las condiciones para la existencia de equilibrios relativos Eulerianos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

**Teorema 26.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , supongamos que el cuerpo con masa  $m_1 = M$  está posicionado en el origen del sistema coordenado y las masas de los cuerpos restantes son iguales  $m_2 = m_3 = m$ . Entonces existen equilibrios relativos si y sólo si los cuerpos con masa  $m$  están en lugares opuestos del mismo círculo.*

*Demostración.*

Supongamos que  $m_2 = m_3 = m$  entonces la ecuación (6.48) es de la forma

$$ar^2 - r(a^2 + \mathbf{R}^2) + a\mathbf{R}^2 = 0,$$

las soluciones del polinomio son  $r = a$  o  $r = -\mathbf{R}^2/a$ . Por lo tanto, la posición del cuerpo con masa  $m_3$  es  $z_3 = -a$ , o bien  $z_3 = -\mathbf{R}^2/a$ .

Observemos que el último valor para  $z_3$  es antipodal al cuerpo con masa  $m_2$  por lo que genera una singularidad en las ecuaciones de movimiento. En conclusión, la única solución

para  $z_3$  es  $z_3 = r$ , en otras palabras existen equilibrios relativos Eulerianos si los cuerpos con masas  $m_2 = m_3 = m$  están posicionados en lados opuestos del mismo círculo.

Por otro lado, supongamos que ambos cuerpos se encuentran en lados opuestos del mismo círculo  $r = a$ , y usando el hecho de que  $a = |z_3| = r$  en la ecuación (6.48) tenemos la siguiente expresión

$$(m_2 - m_3) \left[ \frac{(r^2 + \mathbf{R}^2)^2}{r^2} \right] = 0,$$

donde el segundo término siempre es positivo, esto implica que existen equilibrios relativos Eulerianos si las masas  $m_2$  y  $m_3$  son iguales.

Además para que existan equilibrios relativos Eulerianos, obtendremos una condición en términos de las masas, para ello sustituimos  $r = a$  y  $m_1 = M$  en la ecuación (6.49),

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r^2) r}{(\mathbf{R}^2 + r^2)^4} = \frac{M}{r^2} - \frac{m (\mathbf{R}^2 + r^2)^2}{4r^2 (\mathbf{R}^2 - r^2)^2}, \quad (6.51)$$

simplicando la ecuación anterior se tiene el siguiente polinomio

$$8\mathbf{R}^6 r^3 (\mathbf{R}^2 - r^2)^3 - 4M (\mathbf{R}^2 - r^2)^2 (\mathbf{R}^2 + r^2)^4 + m (\mathbf{R}^2 + r^2)^6 = 0. \quad (6.52)$$

Despejamos la variable  $M$  de la ecuación anterior tenemos

$$M = \frac{m (\mathbf{R}^2 + r^2)^6 + 8\mathbf{R}^6 r^3 (r^2 - \mathbf{R}^2)^3}{4 (r^2 - \mathbf{R}^2)^2 (\mathbf{R}^2 + r^2)^4}. \quad (6.53)$$

La expresión anterior relaciona el valor la masa  $M$  con la posiciones y la masa de los cuerpos restantes. ■

Llamaremos a este tipo de órbitas como *equilibrios relativos Eulerianos de tipo isósceles*, estos corresponden a la familia de equilibrios relativos que estudiamos en la sección 2.2 del capítulo 2. Recordemos que en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  estudiamos una familia particular de equilibrios relativos Eulerianos, en cambio en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  podemos estudiar *todos* los equilibrios relativos Eulerianos, en otras palabras no sólo estudiamos una familia de equilibrios relativos. A continuación estudiaremos la existencia de los equilibrios relativos Eulerianos cuando las masas de los tres cuerpos son distintas.

**Teorema 27.** Consideremos el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  donde las masas  $m_1, m_2, m_3$  están ubicadas en la misma línea geodésica y el cuerpo con masa  $m_1$  está posicionada en el origen. Entonces para dos valores  $a^*, b^* \in [0, \mathbf{R}]$  tales que para cada  $a \in [0, a^*]$  y  $b \in [b^*, \mathbf{R}]$ , existen dos puntos  $r$  y  $r^*$  tales que cuando los cuerpos con masas  $m_2, m_3$  están en los círculos de radio  $z_2 = a$  y  $z_3 = -r$  o bien  $z_2 = b$  y  $z_3 = -r^*$ . Esta configuración correspondiente a un equilibrio relativo Euleriano y las masas satisfacen las ecuaciones (6.49 y 6.50) del sistema.

*Demostración.*

De la ecuación (6.48) tenemos la siguiente expresión

$$\frac{r}{\sqrt{m_3}(r^2 + \mathbf{R}^2)} = \frac{a}{\sqrt{m_2}(a^2 + \mathbf{R}^2)}, \quad (6.54)$$

Haremos un análisis geométrico para encontrar los valores que satisfacen la ecuación anterior. Consideremos la pareja de funciones  $f_2(x)$  y  $f_3(x)$  reales continuas.

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \frac{x}{\mathbf{R}^2 + x^2}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{m_3}} \frac{x}{\mathbf{R}^2 + x^2}.$$

Notemos que si  $m_3 < m_2$  entonces  $f_3(x) > f_2(x)$  para todo  $x > 0$ , en consecuencia el conjunto  $f_2([0, \mathbf{R}])$  está contenido en el conjunto  $f_3([0, \mathbf{R}])$ . Además se alcanza el valor máximo de  $f_2$  y  $f_3$  en el punto  $x = \mathbf{R}$ , fijémonos en el valor  $f_2(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\mathbf{R}\sqrt{m_2}}$ . Como se observa en la Figura 6.11, para cualquier valor de  $f_2(a) \in \left(0, \frac{1}{2\mathbf{R}\sqrt{m_2}}\right)$  existen dos puntos  $r < \mathbf{R}$  y  $r^* > \mathbf{R}$  tales que se satisfacen las siguientes relaciones

$$f_2(a) = f_3(r), \quad f_2(a) = f_3(r^*). \quad (6.55)$$

Para un valor fijo de  $a$ , resolvemos la ecuación (6.54) en términos de la variable  $a$ , obteniendo

$$r = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{m_3}}(a^2 + \mathbf{R}^2) - \sqrt{\frac{m_2}{m_3}(a^2 + \mathbf{R}^2)^2 - 4a^2\mathbf{R}^2}}{2a},$$

$$r^* = \frac{\sqrt{\frac{m_2}{m_3}}(a^2 + \mathbf{R}^2) + \sqrt{\frac{m_2}{m_3}(a^2 + \mathbf{R}^2)^2 - 4a^2\mathbf{R}^2}}{2a},$$

como  $0 < m_3 < m_2$ , entonces  $r, r^* \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto los cuerpos deben estar posicionados en  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = a$  y  $z_3 = r$  o  $z_3 = r^*$ , además el cuerpo con masa  $m_3$  no es antipodal

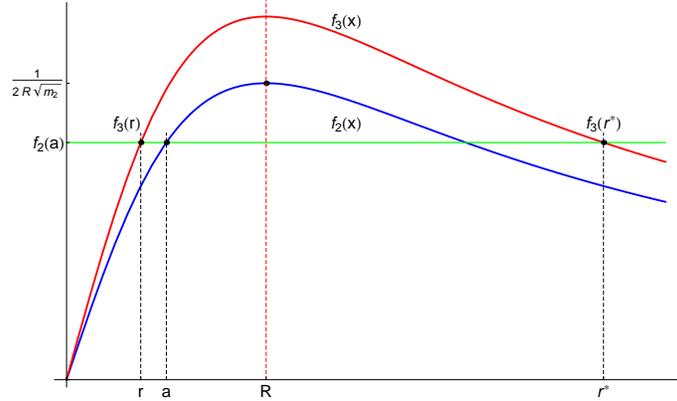


Figura 6.11: Gráfica de las funciones  $f_2(x)$  y  $f_3(x)$  para los valores  $\mathbf{R} = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $m_2 = 3$  y  $m_3 = 2$ .

al cuerpo con masa  $m_2$  por lo tanto la configuración mencionada es un equilibrio relativo Euleriano.

Notemos que el equilibrio relativo Euleriano obtenido tiene masas distintas para un valor  $a$  fijo. Sin embargo, no es claro que para todo  $z = a$  se pueda generar un equilibrio relativo. Por lo tanto buscaremos las condiciones necesarias en  $a$  para que este valor genere equilibrios relativos Eulerianos, multiplicando por  $m_2 (a^2 + \mathbf{R}^2)^2$  ambos lados de la ecuación (6.49) y por  $-m_3 (r^2 + \mathbf{R}^2)^2$  la ecuación (6.50) obtenemos

$$\frac{\mathbf{R}^3}{4} \left[ \frac{a (\mathbf{R}^2 - a^2) m_2}{(\mathbf{R}^2 + a^2)^2} - \frac{r (\mathbf{R}^2 - r^2) m_3}{(\mathbf{R}^2 + r^2)^2} \right] + \frac{m_1}{8\mathbf{R}^3} \left[ -\frac{m_2 (a^2 + \mathbf{R}^2)^2}{a^2} + \frac{m_3 (r^2 + \mathbf{R}^2)^2}{r^2} \right] = 0.$$

Imponiendo la relación (6.54) en la ecuación anterior obtenemos una expresión para las masas y sus posiciones

$$m_2 \frac{(\mathbf{R}^2 - a^2) a}{(\mathbf{R}^2 + a^2)^2} = m_3 \frac{(\mathbf{R}^2 - r^2) r}{(\mathbf{R}^2 + r^2)^2}. \quad (6.56)$$

De manera similar al caso anterior, definimos las siguientes funciones auxiliares

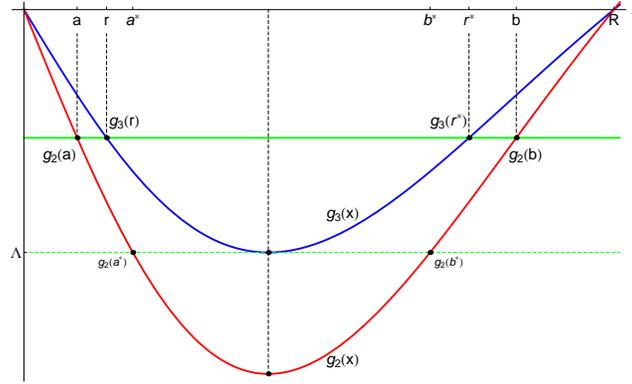


Figura 6.12: Gráfica de las funciones  $g_2(x)$  y  $g_3(x)$  con valores  $\mathbf{R} = 1$ ,  $m_2 = 3$  y  $m_3 = 2$ .

$$g_2(x) = m_2 \frac{(x^2 - \mathbf{R}^2)x}{(\mathbf{R}^2 + x^2)^2}, \quad g_3(x) = m_3 \frac{(x^2 - \mathbf{R}^2)x}{(\mathbf{R}^2 + x^2)^2},$$

Notemos que, si  $m_3 < m_2$  entonces  $g_3(x) < g_2(x)$  para todo  $x \in (0, \mathbf{R}]$ .

Sea  $\Lambda$  el mínimo de la función  $g_3(x)$  en el intervalo  $(0, \mathbf{R}]$  y por el Teorema del valor intermedio existen dos puntos  $a^*, b^* \in (0, \mathbf{R}]$  tales que

$$g_2(a^*) = \Lambda = g_2(b^*).$$

El conjunto  $g_3([0, \mathbf{R}])$  está contenido en  $g_2([0, \mathbf{R}])$  y ambas funciones desaparecen en los puntos  $x = 0$ ,  $x = \mathbf{R}$ . Sea  $a \in [0, a^*]$  entonces existe un único punto  $r \in [0, a^*]$  tal que

$$m_2 \frac{(a^2 - \mathbf{R}^2)a}{(\mathbf{R}^2 + a^2)^2} = g_2(a) = g_3(r) = m_3 \frac{(r^2 - \mathbf{R}^2)r}{(\mathbf{R}^2 + r^2)^2}.$$

Hemos obtenido una solución para la ecuación (6.56) y usando el mismo argumento demostramos que para cualquier  $b \in [b^*, \mathbf{R}]$  existe  $r^* \in [b, \mathbf{R}]$  tal que  $g_2(b) = g_3(r^*)$ . En la Figura 6.13 se pueden observar los equilibrios relativos que demostramos en este teorema. ■

Ya hemos encontrado todos los equilibrios relativos Eulerianos del espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , a continuación estudiaremos los equilibrios relativos Lagrangianos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

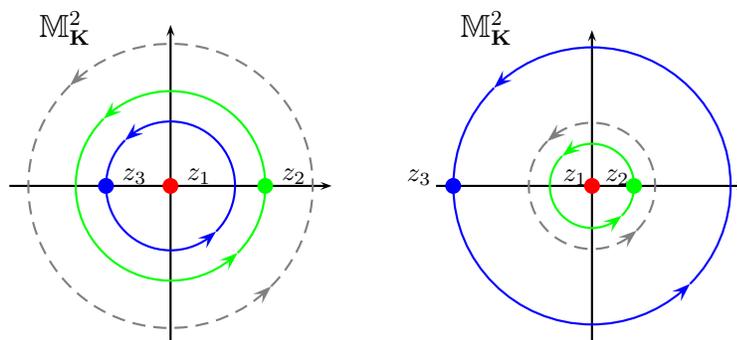


Figura 6.13: Representación de los equilibrios relativos Eulerianos que satisfacen la ecuación 6.54. La línea punteada es el radio  $\mathbf{R} = 1.5$ ,  $a = 1$  es un valor fijo dado y  $z_3 = r$  o bien  $z_3 = r^*$ .

## 6.6.2. Equilibrios relativos Lagrangianos

Cuando estudiamos la familia particular de equilibrios relativos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  en el capítulo 2 demostramos que si las masas están en los vértices de un triángulo entonces éstos generan un equilibrio relativo Lagrangiano *sólo* si sus masas son iguales. Además, mostramos que las masas tienen que rotar sobre el mismo círculo ortogonal al eje de rotación.

Debido a que las ecuaciones de movimiento son equivalentes en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  (ver Apéndice A) entonces existen equilibrios relativos Lagrangianos si las masas son iguales y están en el mismo plano ortogonal al eje de rotación. Por lo que para el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , basta con analizar el caso donde las masas de los cuerpos son iguales y se mueven sobre el mismo círculo. A continuación mostraremos que este hecho es una condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios relativos Lagrangianos.

**Teorema 28.** *Para el problema de los tres cuerpos en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , donde las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  son iguales y además los cuerpos están en el mismo círculo de radio  $r$ . Entonces esta configuración es un equilibrio relativo Lagrangiano si y sólo si los tres cuerpos forman un triángulo equilátero en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .*

*Demostración.*

Supongamos que las masas son iguales y se encuentran posicionados en el círculo de radio  $r$ . Sin pérdida de generalidad, ubicamos el cuerpo con masa  $m_1$  sobre el eje real, esto es

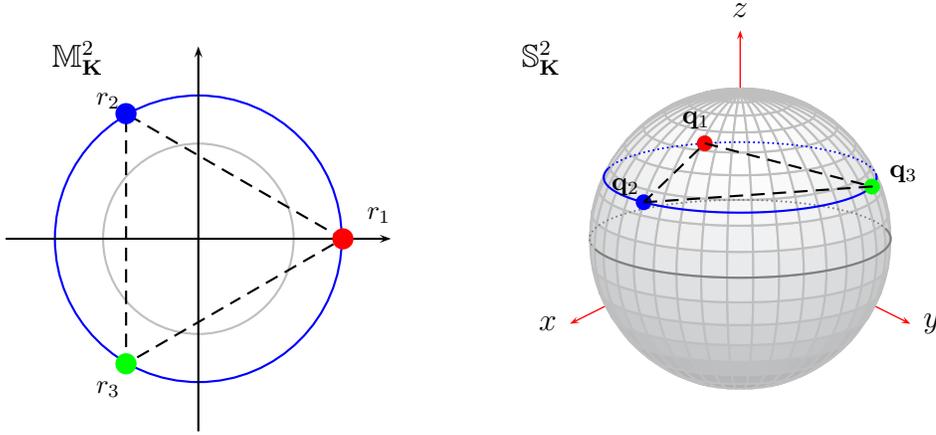


Figura 6.14: Equilibrios relativos Lagrangianos

$z_1 = r$  y los cuerpos restantes están en el mismo círculo como se muestra en la Figura 6.14. Reescribiendo las ecuaciones de movimiento (6.45, 6.46, 6.47) obtenemos el sistema

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r^2) r}{m (\mathbf{R}^2 + r^2)^6} = -\frac{(z_2 - r) (\mathbf{R}^2 + r\bar{z}_2)}{|z_2 - r|^3 |\mathbf{R}^2 + r\bar{z}_2|^3} - \frac{(z_3 - r) (\mathbf{R}^2 + r\bar{z}_3)}{|z_3 - r|^3 |\mathbf{R}^2 + r\bar{z}_3|^3}, \quad (6.57)$$

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r^2) z_2}{m (\mathbf{R}^2 + r^2)^6} = -\frac{(r - z_2) (\mathbf{R}^2 + rz_2)}{|r - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + rz_2|^3} - \frac{(z_3 - z_2) (\mathbf{R}^2 + z_2\bar{z}_3)}{|z_3 - z_2|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_3 z_2|^3}, \quad (6.58)$$

$$\frac{2\mathbf{R}^6 (\mathbf{R}^2 - r^2) z_3}{m (\mathbf{R}^2 + r^2)^6} = -\frac{(r - z_3) (\mathbf{R}^2 + z_3 r)}{|r - z_3|^3 |\mathbf{R}^2 + rz_3|^3} - \frac{(z_2 - z_3) (\mathbf{R}^2 + z_3\bar{z}_2)}{|z_2 - z_3|^3 |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_2 z_3|^3}, \quad (6.59)$$

Como el cuerpo con masa  $m_2$  y  $m_3$  reescribimos su posición aprovechando el hecho que estamos en el plano complejo, es decir  $z_2 = re^{i\theta_2}$  y  $z_3 = re^{i\theta_3}$ . Sustituyendo este cambio de variable en el sistema de ecuaciones y separando la parte real de la compleja obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\frac{1 - \cos \theta_2}{D_{12}} + \frac{1 - \cos (\theta_3 - \theta_2)}{D_{23}} = \frac{2(1 - \cos \theta_3)}{D_{13}} \quad (6.60)$$

$$\frac{\sin \theta_2}{D_{12}} + \frac{\sin (\theta_3 - \theta_2)}{D_{23}} = 0 \quad (6.61)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{12} &= 8^{3/2} r^3 \mathbf{R}^3 (1 - \cos \theta_2)^{3/2} (r^4 + \mathbf{R}^4 + 2r^2 \mathbf{R}^2 \cos \theta_2)^{3/2}, \\ D_{13} &= 8^{3/2} r^3 \mathbf{R}^3 (1 - \cos \theta_3)^{3/2} (r^4 + \mathbf{R}^4 + 2r^2 \mathbf{R}^2 \cos \theta_3)^{3/2}, \\ D_{23} &= 8^{3/2} r^3 \mathbf{R}^3 [1 - \cos(\theta_2 - \theta_3)]^{3/2} [r^4 + \mathbf{R}^4 + 2r^2 \mathbf{R}^2 \cos(\theta_2 - \theta_3)]^{3/2}. \end{aligned}$$

Tomando la ecuación (6.60) y la identidad  $\sin^2(\frac{\theta}{2}) = (1 - \cos \theta)/2$  obtenemos la siguiente expresión

$$\left[ \frac{\sin^2(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2})}{\sin^2(\frac{\theta_2}{2})} \right]^2 \left[ \frac{(r^2 - \mathbf{R}^2)^4 + r^2 \mathbf{R}^2 \sin^2(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2})}{(r^2 - \mathbf{R}^2)^4 + r^2 \mathbf{R}^2 \sin^2(\frac{\theta_2}{2})} \right]^3 = \frac{1 - \sin^2(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2})}{1 - \sin^2(\frac{\theta_2}{2})},$$

aplicamos el cambio de variables  $u = \sin^2(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2})$  y  $v = \sin^2(\frac{\theta_2}{2})$ , simplificamos la ecuación anterior

$$u^2 (1 - v) \left[ (r^2 - \mathbf{R}^2)^4 + r^2 \mathbf{R}^2 u \right]^3 = v^2 (1 - u) \left[ (r^2 - \mathbf{R}^2)^4 + r^2 \mathbf{R}^2 v \right]^3.$$

Notemos que tiene solución real si y sólo si  $u = v$ , en otras palabras se cumple  $\sin^2(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}) = \sin^2(\frac{\theta_2}{2})$  o  $\theta_3 = 2\theta_2$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (6.61) se tiene

$$\frac{1 - \cos \theta_2}{1 - \cos 2\theta_2} = \frac{(\mathbf{R}^4 + r^4 + 2r^2 \cos 2\theta_2)^3}{(\mathbf{R}^4 + r^4 + 2r^2 \cos \theta_2)^3}.$$

Sea  $w = \cos \theta_2$  y  $s = \cos 2\theta_2$ , aplicamos otro cambio de variable para la ecuación anterior, obteniendo el polinomio

$$(1 - w) (\mathbf{R}^4 + r^4 + 2r^2 \mathbf{R}^2 w)^3 = - (1 - s) (\mathbf{R}^4 + r^4 + 2r^2 \mathbf{R}^2 s)^3,$$

donde su única solución real es  $s = w$ , esto es  $\cos \theta_2 = \cos 2\theta_2$ . Por lo tanto

$$\theta_2 = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi.$$

Los valores  $\theta_2 = 0$  y  $\theta_2 = 2\pi$  generan una singularidad en las ecuaciones de movimiento. En consecuencia, los únicos valores posibles son:

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

Notemos que si  $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$  y  $\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$ , se satisface el sistema anterior y la configuración corresponde a un triángulo equilátero en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ . ■

Finalmente, encontramos todos los equilibrios relativos para  $n = 2$  y  $n = 3$  en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , la dificultad en el manejo de las ecuaciones aumenta considerablemente a medida que los cuerpos crece. El uso de la proyección estereográfica nos permitió dar una caracterización en términos de funciones racionales de los equilibrios relativos.

Notemos que en el espacio  $\mathbb{R}^3$  sólo estudiamos una familia particular de equilibrios relativos, mientras que en  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  dimos una caracterización de todos los equilibrios relativos. El costo de haber usado la proyección estereográfica es que la velocidad angular  $\omega$  es la misma para todos los cuerpos.

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Planteamos el problema de los  $n$  cuerpos en superficies con curvatura Gaussiana  $\mathbf{K}$  constante haciendo uso de resultados importantes de la Geometría Diferencial y el potencial cotangente. Obtenemos las ecuaciones de movimiento de manera análoga al caso clásico ( $\mathbf{K} \neq 0$ ) así como sus primeras integrales y singularidades.

Por la complejidad de las ecuaciones, empezamos estudiando solo una familia particular de equilibrios relativos en la esfera y en el hiperboloide. Recordemos que en esta familia de soluciones restringimos los cuerpos al mismo plano ortogonal al eje de rotación y junto con la simetría de las superficies encontramos las relaciones entre las masas de los cuerpos y de la velocidad angular. También obtenemos la forma general de las ecuaciones algebraicas que generan equilibrios relativos y finalmente damos las condiciones necesarias para la existencia de equilibrios relativos para dos y tres cuerpos.

Ya que obtenemos las condiciones para generar equilibrios relativos, empezamos con el estudio las soluciones homográficas, es decir aquellas soluciones cuya configuración permanece similar a ella misma para todo tiempo, donde los cuerpos rotan alrededor de un eje y se dilatan o se contraen. De manera similar a los equilibrios relativos estudiamos una familia particular de soluciones homográficas en la esfera y en el hiperboloide. Finalmente damos una clasificación completa de las mismas.

En el problema de los  $n$  cuerpos curvado, la manipulación algebraica de las ecuaciones que generan todos equilibrios relativos es mucho más tediosa que estudiar solo una familia particular de los mismos. Debido a esto, estudiamos el problema de los  $n$  cuerpos en el modelo intrínseco haciendo uso de la proyección estereográfica. Esto nos permite encontrar *todos* los equilibrios relativos en superficies con curvatura positiva. Trabajamos las ecuaciones de movimiento para obtener una clasificación de las soluciones homográficas en este

modelo, desafortunadamente las ecuaciones que describen el movimiento en este modelo son demasiado complejas para manipularlas de forma adecuada.

Usando la proyección estereográfica y teoría de grupos encontramos las ecuaciones algebraicas que satisfacen los equilibrios relativos para  $n = 2, 3$ , en otras palabras pasar al modelo intrínseco nos permite eliminar la dependencia del tiempo en las posiciones y velocidades cuando tenemos dos o tres cuerpos. Logramos encontrar otros equilibrios relativos, bajo ciertas condiciones y simetrías, distintos a los estudiados en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .

Finalmente para el estudio de los equilibrios relativos en superficies con curvatura negativa, el análisis es similar al caso positivo. Este material se discutió y se trabajó con el asesor pero decidimos no incluirlo en este trabajo. En lugar de obtener las ecuaciones de movimiento en el plano complejo  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , se trabajan las ecuaciones en el disco de Poincaré o en la parte superior del plano de Poincaré. Recordemos que en superficies negativas es necesario analizar los equilibrios relativos de tipo elípticos y de tipo hiperbólico. Los detalles del mismo se pueden consultar en el trabajo de los autores F. Diacu, E. Pérez Chavela y J. Reyes-Victoria [23].

Notemos que para el estudio de los equilibrios relativos, empezamos obteniendo las ecuaciones en la esfera o en el hiperboloide, es decir en el espacio  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^{2,1}$  respectivamente para tener una primera noción del movimiento de los cuerpos en estas superficies. Después pasamos al modelo intrínseco, el cual nos permite obtener equilibrios relativos adicionales para dos y tres cuerpos. Recordemos que haciendo uso de la proyección estereográfica fuimos capaces de pasar de la esfera al modelo intrínseco, y de hecho en el apéndice probamos la equivalencia de las ecuaciones de movimiento por lo que es posible saltar de un modelo a otro para encontrar otro tipo de soluciones.

Hasta ahora hemos encontrado las soluciones más sencillas, es decir los equilibrios relativos en el modelo intrínseco y una familia de soluciones homográficas; pero aún resta encontrar otro tipo de familia o familias de soluciones periódicas en superficies encajadas en los espacios  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^{3,1}$ , o bien en el modelo intrínseco.

Por otro lado, dado que el estudio de las órbitas en superficies curvadas es reciente, aún es necesario explotar las herramientas que tenemos actualmente para analizar el movimiento de los cuerpos en estas superficies. Ya se ha estudiado la estabilidad de las soluciones que conocemos hasta ahora pero aún hay mucho trabajo por hacer. Uno de ellos sería estudiar el problema  $3 + 1$ , esto es estudiar la interacción de los cuerpos donde tres de ellos tienen masas finitas y el cuerpo restante una masa infinitesimal.

## APÉNDICE A

### EQUIVALENCIA DE LOS MODELOS $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ Y $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$

Hemos obtenido las ecuaciones de movimiento para los espacios  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  y  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , en este apéndice probaremos la equivalencia de las ecuaciones para ambos espacios.

Las ecuaciones de movimiento (1.34) para el problema de los  $n$  cuerpos en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  se obtuvieron en la sección 1.3 y en el último capítulo para el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ .

Imponiendo la condición  $\mathbf{K}\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_k = 1$  en la ecuación (1.32) tenemos

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j \mathbf{K}^{1/2} (\mathbf{K}\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j)}{[1 - (\mathbf{K}\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j)^2]^{1/2}}, \quad (\text{A.1})$$

usando las ecuaciones de la proyección estereográfica, expresamos  $\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j$  en términos de las variables complejas  $z_k$  y  $z_j$

$$\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j = \frac{2\mathbf{R}^4 (z_k \bar{z}_j + z_j \bar{z}_k) + \mathbf{R}^2 (|z_k|^2 - \mathbf{R}^2) (|z_j|^2 - \mathbf{R}^2)}{(|z_k|^2 + \mathbf{R}^2) (|z_j|^2 + \mathbf{R}^2)}.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en el potencial y usando las ecuaciones de la proyección estereográfica (6.1), reescribiremos la energía potencial como sigue

$$\begin{aligned}
U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) &= \sum_{j=1, k \neq j}^n \frac{m_k m_j \frac{1}{\mathbf{R}^3} \left( \frac{2\mathbf{R}^4(z_k \bar{z}_j + z_j \bar{z}_k) + \mathbf{R}^2(|z_k|^2 - \mathbf{R}^2)(|z_j|^2 - \mathbf{R}^2)}{(|z_k|^2 + \mathbf{R}^2)(|z_j|^2 + \mathbf{R}^2)} \right)}{\frac{1}{\mathbf{R}^2} [\mathbf{R}^4 - (\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j)^2]^{1/2}}, \\
&= \frac{1}{\mathbf{R}} \sum_{j=1, k \neq j}^n m_k m_j \frac{2\mathbf{R}^2(z_k \bar{z}_j + z_j \bar{z}_k) + (|z_k|^2 - \mathbf{R}^2)(|z_j|^2 - \mathbf{R}^2)}{2\mathbf{R} |z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k|},
\end{aligned}$$

por lo tanto  $U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) = U_{\mathbf{R}}(z, \bar{z})$ . Ahora mostraremos que los gradientes son iguales, el gradiente del potencial (1.32) en variables complejas es:

$$\frac{\partial U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q})}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{j=1}^n \nabla_{\mathbf{Q}_j} U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_j}{\partial \bar{z}_k}, \quad (\text{A.2})$$

donde el término  $\frac{\partial \mathbf{Q}_j}{\partial \bar{z}_k}$  desaparece si  $j \neq k$ .

$$U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) = \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_k m_j \mathbf{K}^{3/2} [\mathbf{Q}_j - (\mathbf{K} \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j) \mathbf{Q}_k]}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_j)^2]^{3/2}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k}. \quad (\text{A.3})$$

Las coordenadas de la partícula  $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$  en términos de  $z_k$  y  $\bar{z}_k$  son

$$\mathbf{Q}_j = \left( \frac{\mathbf{R}^2(z_j + \bar{z}_j)}{z_j \bar{z}_j + \mathbf{R}^2}, -i \frac{\mathbf{R}^2(z_j - \bar{z}_j)}{z_j \bar{z}_j + \mathbf{R}^2}, \frac{\mathbf{R}(z_j \bar{z}_j - \mathbf{R}^2)}{z_j \bar{z}_j + \mathbf{R}^2} \right), \quad (\text{A.4})$$

calculando  $\frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k}$  tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\mathbf{R}^2}{(|z_k|^2 + \mathbf{R}^2)^2} (-z_k^2 + \mathbf{R}^2, i(z_k^2 + \mathbf{R}^2), 2\mathbf{R}z_k), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{Q}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k} = \frac{2\mathbf{R}^4 [ (|z_j|^2 - (z_k \bar{z}_j + z_j \bar{z}_k) - \mathbf{R}^2) z_k + (|z_k|^2 + \mathbf{R}^2) z_j ]}{(|z_j|^2 + \mathbf{R}^2)(|z_k|^2 + \mathbf{R}^2)}, \quad (\text{A.6})$$

de la última ecuación tenemos que  $\mathbf{Q}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k} = 0$ . Usando este hecho en la ecuación (A.3) obtenemos

$$\frac{\partial U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q})}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_k m_j \mathbf{K}^{3/2}}{[1 - (\mathbf{K} \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_j)^2]^{3/2}} \left( \mathbf{Q}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}_k}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

En variable compleja la ecuación anterior es

$$\frac{\partial U_{\mathbf{K}}(\mathbf{Q})}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{m_k m_j (\mathbf{R}^2 + |z_k|^2) (\mathbf{R}^2 + |z_j|^2) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k) (z_j - z_k)}{4\mathbf{R}^2 |z_j - z_k| |\mathbf{R}^2 + \bar{z}_j z_k| (\bar{z}_j - \bar{z}_k) (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_k z_j)},$$

por lo tanto

$$\frac{\partial U_{\mathbf{K}}(\mathbf{q})}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial U_{\mathbf{R}}}{\partial \bar{z}_k}.$$

Hemos probado la equivalencia de los potenciales y de sus gradientes. Para terminar con la demostración mostraremos que las energías cinéticas (1.24) y (6.12) son equivalentes.

Derivando la ecuación (A.4) obtenemos las coordenadas para la velocidad  $\dot{\mathbf{Q}}_K$

$$\frac{\mathbf{R}^2 \dot{z}_k (\mathbf{R}^2 - \bar{z}_k^2) + \dot{\bar{z}}_k (\mathbf{R}^2 - \bar{z}_k^2)}{(z_k \bar{z}_k + \mathbf{R}^2)^2}, \quad -\frac{i\mathbf{R}^2 [\dot{z}_k (\mathbf{R}^2 + \bar{z}_k^2) - \dot{\bar{z}}_k (\mathbf{R}^2 + z_k^2)]}{(z_k \bar{z}_k + \mathbf{R}^2)^2},$$

$$\frac{\mathbf{R}^3 (\dot{z}_k \bar{z}_k + z_k \dot{\bar{z}}_k)}{(z_k \bar{z}_k + \mathbf{R}^2)^2},$$

por lo que el producto punto es

$$\dot{\mathbf{Q}}_k \cdot \dot{\mathbf{Q}}_k = \lambda |\dot{z}_k|^2.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de la energía cinética (1.24) tenemos

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k^{-1} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{p}_k) (\mathbf{K} \mathbf{q}_k \odot \mathbf{q}_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \frac{4\mathbf{R}^2 \dot{z}_k \dot{\bar{z}}_k}{(\mathbf{R}^2 + |z_k|^2)^2} |\dot{z}_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \lambda |\dot{z}_k|^2 = T_{\mathbf{R}}(z, \dot{z}, \bar{z}, \dot{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Notemos que las expresiones para la energía cinética son equivalentes, por lo tanto el sistema de ecuaciones (1.34) y (6.14) describen la misma dinámica.

Hemos obtenido las ecuaciones de movimiento para el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$  y hemos probado que los modelos son equivalentes. Notemos que disminuimos la dimensión de nuestro problema en el espacio  $\mathbb{M}_{\mathbf{K}}^2$ , esto nos permitirá encontrar otros tipos de equilibrios relativos distintos a los que se encontraron en la esfera  $\mathbb{S}_{\mathbf{K}}^2$ .



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ARNOLD, V., KHUKHRO, E., KOZLOV, V., AND NEISHTADT, A. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Physica-Verlag, 2007.
- [2] ARNOLD, V., VOGTMANN, K., AND WEINSTEIN, A. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.
- [3] BENJAMÍN, J. *Mecánica Newtoniana*. Aula Politécnica, 2011.
- [4] BOLYAI, W., AND BOLYAI, J. *Geometrische Untersuchungen*. Leipzig-Berlin, 1913.
- [5] BORISOV, A., AND MAMAEV, I. The restricted two-body problem in constant curvature spaces. *Celestial Mech. Dynam. Astronom* 96 (2006), 1–17.
- [6] BORISOV, A., MAMAEV, I., AND KILIN, A. Two-body problem on a sphere: reduction, stochasticity, periodic orbits. *Regul. Chaotic Dyn.* 9, 3 (2004), 265–279.
- [7] BUMP, D. *Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2004.
- [8] CARIÑENA, J., RAÑADA, M., AND SANTANDER, M. Central potentials on spaces of constant curvature: The Kepler problem on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H^2$ . *J. Math. Phys* 46 (2005).
- [9] CARIÑENA, J., RAÑADA, M., AND SANTANDER, M. The Kepler problem and the Laplace-Runge-Lenz vector on spaces of constant curvature and arbitrary signature. *Qual. Th. Dyn. Syst.* 7 (2008), 87–99.
- [10] CARMO, D. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

- 
- [11] COURANT, R. *Differential and Integral Calculus*. No. v. 2 in Differential and Integral Calculus. Wiley, 2011.
- [12] DÁVILA, G. *Álgebra Lineal*. Colección textos académicos. Universidad de Sonora, 2006.
- [13] DIACU, F. On the singularities of the curved  $N$ -body problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 363, 4 (2011), 2249–2264.
- [14] DIACU, F. The non-existence of the center-of-mass and the linear-momentum integrals in the curved  $N$ -body problem. *Libertas Math (new series)* 32, 1 (2012), 25–37.
- [15] DIACU, F. Polygonal homographic orbits of the curved 3-body problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364, 5 (2012), 2783–2802.
- [16] DIACU, F. *Relative equilibria of the curved  $N$ -body pro*, vol. 1. Atlantis Studies in Dynamical Systems, Atlantis Press, Amsterdam, 2012.
- [17] DIACU, F. The curved  $N$ -body problem: risks and rewards. *Math. Intelligencer* 35, 3 (2013), 24–33.
- [18] DIACU, F. *Relative equilibria in the 3-dimensional curved  $n$ -body problem*, vol. 228. American Mathematical Society, 2013.
- [19] DIACU, F., AND BRENDAN, T. Rectangular orbits of the curved 4-body problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* (to appear).
- [20] DIACU, F., AND KORDLOU, S. Rotopulsators of the curved  $N$ -body problem. *J. Differential Equations* 255 (2013), 2709–2750.
- [21] DIACU, F., MARTÍNEZ, R., PÉREZ-CHAVELA, E., AND SIMÓ, C. On the stability of tetrahedral relative equilibria in the positively curved 4-body problem. *Physica D* 256-257 (2013), 21–35.
- [22] DIACU, F., AND PÉREZ-CHAVELA, E. Homographic solutions of the curved 3-body problem. *J. Differential Equations* 250 (2011), 340–366.
- [23] DIACU, F., PÉREZ-CHAVELA, E., AND REYES-VICTORIA, J. An intrinsic approach in the curved  $n$ -body problem: the negative curvature case. *Journal of Differential Equations* 252, 8 (2012), 4529–4562.
- [24] DIACU, F., PÉREZ-CHAVELA, E., AND SANTOPRETE, M. Saari’s conjecture for the collinear  $N$ -body problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2005), 4215–4223.

- [25] DIACU, F., PÉREZ-CHAVELA, E., AND SANTOPRETE, M. The  $N$ -body problem in spaces of constant curvature. Part I: Relative Equilibria. *Journal of Nonlinear Science* 22, 2 (2012), 247–266.
- [26] DIACU, F., PÉREZ-CHAVELA, E., AND SANTOPRETE, M. The  $N$ -body problem in spaces of constant curvature. Part II: Singularities. *Journal of Nonlinear Science* 22, 2 (2012), 267–275.
- [27] DIACU, F., AND THORN, B. Rectangular orbits of the curved 4-body problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* (to appear).
- [28] DILLEN, F., AND KÜHNEL, W. Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Manuscripta Math* 98 (1999), 307–320.
- [29] DUBROVIN, B., FOMENKO, A., AND NOVIKOV, P. *Modern Geometry, Methods and Applications*, vol. I. Springer-Verlag, 1984.
- [30] FRANCO-PÉREZ, L., AND PÉREZ-CHAVELA, E. Global symplectic regularization for some restricted 3-body problems on  $S^1$ . *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 71, 11 (2009), 5131–5143.
- [31] FUJIWARA, T., FUKUDA, H., OZAKI, H., AND TANIGUCHI, T. Saari's homographic conjecture for the planar equal-mass-three-body problem in newton gravity. *J. Phys. A: Math. Theor.* 360 (2008), 6447–6473.
- [32] GARCÍA GUTIERREZ, L., AND SANTANDER, M. Levi-Civita regularization and geodesic flows for the 'curved' Kepler problem.
- [33] GELFAND, I., AND FOMIN, S. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, 1963.
- [34] GOLDSTEIN, H. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverte S.A., 1987.
- [35] GOODMAN, A., AND HIRSCH, L. *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. Prentice Hall, 1996.
- [36] GUILLEMIN, V., AND GOLUBITSKY, M. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York, USA, 1973.
- [37] HANO, J., AND NOMIZU, K. On isometric immersions of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkovski space and the Monge-Apère equation of certain type. *Math. Ann.* 262 (1983), 245–253.
- [38] HIRSCH, M., SMALE, S., AND DEVANEY, R. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Elsevier Academic Press, 2004.

- [39] INFELD, L., AND SCHILD, A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. *Phys. Rev.* 67 (1945), 121–122.
- [40] KILLING, W. Die mechanik in den nichteuklidischen raumformen. *J. Reine Angew. Math.* 98 (1885), 1–48.
- [41] KOZLOV, V., AND HARIN, A. Kepler's problem in constant curvature spaces. *Celestial Mech. Dynam. Astronom* 54 (1992), 393–399.
- [42] LASCURAIN ORIVE, A. *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*. Prensas de ciencias. UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [43] LEUNG, K., SUEN, S., AND MOK, I. *Polynomials and Equations: A Chinese Merchant Elite in Colonial Hong Kong (with a new preface)*. Hong Kong University Press, 1992.
- [44] LIEBMANN, H. Die kegelschnitte und die planetenbewegung im nichteuklidischen raum. *Berichte Konigl. Sachsischen Gesell. Wiss., Math. Phys. Klasse* 54 (1902), 393–423.
- [45] LIPSCHITZ, R. Extension of the planet-problem to a space of  $n$  dimensions and constant integral curvature. *Quart. J. Pure Appl. Math* 12 (1873), 349–370.
- [46] LOBACHEVSKY, N. *The new foundations of geometry with full theory of paralels [in Russian]*, vol. 2. In *Collected Works*, Moscow, 1949.
- [47] MARTÍNEZ, R., AND SIMÓ, C. On the Stability of the Lagrangian Homographic solutions in a curved three-body problem on  $\mathbb{S}^2$ . *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A* 33 (2013), 1157–1175.
- [48] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. sumptibus Societatis, 1723.
- [49] OLIVA, W. *Geometric Mechanics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2002.
- [50] ORIVE, A. *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*. Prensas de ciencias. UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [51] PÉREZ-CHAVELA, E. Sobre la Profesión más Antigua del mundo. *Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana* 46 (2005).
- [52] PÉREZ-CHAVELA, E., AND REYES-VICTORIA, J. An intrinsic approach in the curved  $n$ -body problem: the positive curvature case. *Trans. Amer. Math Soc.* 364, 7 (2012), 3805–3827.

- [53] PÓLYA, G., SZEGŐ, G., AND BILLIGHEIMER, C. *Problems and Theorems in Analysis. Volume II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer London, Limited, 1998.
- [54] PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry.* Undergraduate Mathematics. Springer, 2000.
- [55] SCHERING, E. Die schwerkraft im gaussischen raume. *Nachr. Konigl. Gesell. Wiss. Gottingen 15* (1870), 311–321.
- [56] SCHERING, E. Die schwerkraft in mehrfach ausgedehnten gaussischen und riemannschen raumen. *Nachr. Konigl. Gessel. Wiss. Gottingen 6* (1873), 149–159.
- [57] SERRET, P. *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure.* Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
- [58] SHCHEPETILOV, A. V. Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature. *J. Phys. A: Math. Gen. V. 31* (1998), 6279–6291.
- [59] SHCHEPETILOV, A. V. Central potentials on spaces of constant curvature: The Kepler problem on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H^2$ . *J. Math. Phys. 46* (2005), 052702.
- [60] SHCHEPETILOV, A. V. Comment on “Central potentials on spaces of constant curvature: The Kepler problem on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H^2$ ”. *J. Math. Phys. 46* (2005), 114101.
- [61] SHCHEPETILOV, A. V. *Calculus and mechanics on two-point homogenous Riemannian spaces*, vol. 707 of *Lectures notes in physics*. Springer Verlag, 2006.
- [62] SHCHEPETILOV, A. V. Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces. *J. Phys. A: Math. 39* (2006), 5787–5806.
- [63] TIBBOEL. Existence of a class of rotopulsators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 404* (2013), 185–191.
- [64] TIBBOEL, P. Polygonal homographic orbits in spaces of constant curvature. *Proc. Amer. Math. Soc. 141* (2013), 1465–1471.
- [65] TKACHUK, V. *Curso básico de topología general.* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1999.

- [66] VELASCO, O., AND VICTORIA, J. *Curso de geometría diferencial*. Prensas de ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2005.
- [67] VOZMISCHEVA, T. G. *Integrable problems of celestial mechanics in spaces of constant curvature*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [68] WINTNER, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1941.