



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍAS

ESQUEMA NUMÉRICO PARA FLUJOS
TÉRMICOS E ISOTÉRMICOS BASADO EN
UN MÉTODO DIRECTO

Tesis que presenta

Raúl Téllez Isidro

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Asesores: Dr. ALFREDO NICOLÁS CARRIZOSA
Dra. ELSA BÁEZ JUÁREZ

Jurado calificador:

Presidente: Dra. Blanca del Carmen Bermúdez Juárez

Secretario: Dr. Francisco Javier Sánchez Bernabe

Vocal: Dra. Elsa Báez Juárez

CIUDAD DE MÉXICO, 8 DE JULIO DEL 2016

Índice general

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	7
2.1. Ecuaciones adimensionales que describen el flujo de fluidos térmicos e isotérmicos	7
2.2. Formulación del modelo matemático en términos de las varia- bles velocidad y vorticidad	8
2.3. Ecuaciones no estacionarias para las componentes de la velocidad	10
2.4. Parámetros adimensionales, convección natural y transferencia de calor	11
3. Esquema numérico de solución	14
3.1. Discretización en tiempo	14
3.2. Problema discreto	16
3.3. Implementación del método de Jacobi por bloques y factori- zación de Crout para resolver el problema discreto	26
4. Resultados numéricos	30
4.1. Caso Térmico	30
4.2. Caso Isotérmico	39
5. Conclusiones	50
A. Ecuación de tipo transporte para la vorticidad ω	52
B. Problema discreto con $h_x \neq h_y$ y contribución de los términos no lineales	53

C. Problema discreto con $h_x \neq h_y$ y sin contribución de los términos no lineales	57
D. Pseudo-código del proceso de solución del problema	59
Bibliografía	63

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Alfredo Nicolás Carrizosa por todo el apoyo que me brindó en la licenciatura y en la maestría, por su entusiasmo, atención y guía en la elaboración del presente trabajo, y de manera muy especial agradezco su amistad.

A la Dra. Elsa Báez Juárez por aceptarme como su alumno, por toda su comprensión, paciencia y el tiempo que dedicó para la realización de este trabajo.

A la Dra. María Blanca del Carmen Bermúdez Juárez y al Dr. Francisco Javier Sánchez Bernabe por las sugerencias, críticas y comentarios que le hicieron a este trabajo con el fin de mejorarlo.

A mi querida familia: a ti Anahí, Daniel, Leticia, Carlos y Gaby, por estar presente en los buenos y malos momentos.

A mis amigos, Habersheel, Carlos Antonio Sánchez por su apoyo en todo momento.

A CONACyT por el apoyo económico que me brindó para realizar estos estudios.

Capítulo 1

Introducción

La teoría matemática de la dinámica de los fluidos comienza en el siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, quien fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica a los movimientos de los fluidos. Más tarde Leonhard Euler escribió por primera vez en 1755 las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal, y posteriormente Navier [1] en 1822, y de manera independientemente, Stokes [2] en 1845, introdujeron el término de la viscosidad en el modelo y llegaron a las ecuaciones que hoy denominamos de Navier-Stokes.

Estas ecuaciones, las cuales se obtienen a partir de la segunda ley de Newton y de la ley de conservación de masa, modelan matemáticamente la evolución de los fluidos isotérmicos. Si existen efectos termodinámicos importantes en el fluido entonces la ecuación de energía térmica correspondiente, la cual toma en cuenta dichos efectos, puede acoplarse con las ecuaciones de Navier-Stokes, para describir el comportamiento de flujos térmicos.

Un caso particular de este último tipo de flujos es el de aquellos que se presentan por convección natural, llamados así debido a que el movimiento del fluido se genera por fuerzas naturales relacionadas con la temperatura del mismo, esto es, la convección ocurre siempre que una superficie está en contacto con un fluido con temperatura diferente y bajo la influencia de un campo gravitacional. Por ejemplo, si consideramos una pared vertical caliente en contacto con un fluido frío, al transcurrir el tiempo el fluido en contacto con la pared se calienta inmediatamente y se hace menos denso, y debido a la acción conjunta de los cambios de densidad y el campo gravitacional te-

restre, se genera una fuerza de flotación, la cual provoca que el fluido más ligero se eleve y lo remplace otra cantidad de fluido frío, repitiéndose continuamente este proceso, Karlekar y Desmond [3].

El estudio de los flujos térmicos de convección natural es de gran importancia debido a que tienen diversas aplicaciones prácticas, entre las cuales se pueden mencionar: los mecanismos asociados con el aire caliente que sale de los radiadores caseros de calor, el enfriamiento de componentes electrónicos en computadoras sin ventilador y el aislamiento térmico de reactores nucleares. Por lo anterior, en las últimas tres décadas se han publicado varios estudios sobre flujos térmicos de convección natural, los cuales utilizan diferentes formulaciones del modelo matemático correspondiente, así como distintos esquemas numéricos, con la finalidad de analizar y comprender la mecánica asociada con este tipo de flujos. Entre estos trabajos se encuentra el desarrollado por Vahl Davis [4], quien empleando una formulación matemática basada en variables secundarias (función de corriente y vorticidad), además de la temperatura, resuelve el modelo matemático empleando el método llamado de falso transitorio y presenta un conjunto de soluciones para el caso de convección natural en cavidades cuadradas, con números de Rayleigh (parámetro adimensional que relaciona la fuerza de flotación, la difusividad térmica y la viscosidad de un fluido) $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. Shu y Wee [5] resuelven el problema en variables primarias (velocidad y presión) en la cavidad cuadrada unitaria, proponiendo una estrategia eficiente que combina un método llamado SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) con otro conocido como de cuadratura diferencial generalizada, que aproxima la derivada espacial en un punto como una suma lineal ponderada de los valores de la función en otros puntos, con esta estrategia obtienen resultados para $10^3 \leq Ra \leq 10^8$ con mallas menores a 51×51 nodos. Nicolás y Bermúdez [6] formulan el problema no estacionario en términos de las variables velocidad y vorticidad y, una vez que realizan la discretización temporal, resuelven el sistema elíptico obtenido utilizando un esquema iterativo de punto fijo, y diferencias finitas de segundo orden para la discretización espacial. Los resultados numéricos que presentan, corresponden a cavidades rectangulares con diferentes valores de aspecto geométrico A (relación entre el largo y ancho de la cavidad) y para $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, asimismo reportan el tiempo para el cual se alcanza el estado estacionario y el número de Nusselt global.

Entre los trabajos enfocados hacia las aplicaciones de flujos de convección natural, se mencionan a continuación algunos representativos: Condorí y Duran [7] presentan el diseño de una chimenea solar, la cual aprovecha el mecanismo de convección natural como un secador a escala doméstica en el proceso de producción de carne deshidratada. Onbasioglu y Egrican [8] investigaron experimentalmente el rendimiento térmico de un sistema de calentamiento solar a diferentes horas del día, en una habitación dividida en varias zonas. Zamora y Kaiser [9] llevaron a cabo un estudio numérico del efecto de los flujos por convección natural inducidos en chimeneas solares, para $10^5 \leq Ra \leq 10^{12}$, a partir de lo cual determinaron el espaciamiento óptimo de pared a pared y la altura de la chimenea solar que permiten maximizar la transferencia de calor dentro de dicha chimenea bajo determinadas condiciones climáticas.

Por otra parte, para flujos isotérmicos, los cuales pueden ser modelados por las ecuaciones de Navier-Stokes, es común utilizar el caso de un fluido confinado en una cavidad rectangular con tapa deslizante (lid-driven cavity) como problema de prueba, para verificar la eficiencia del método empleado y posteriormente experimentar con diferentes valores de los parámetros involucrados, como por ejemplo el número de Reynolds Re , el cual representa el balance entre las fuerzas inerciales y las viscosas.

Entre algunos de los trabajos más significativos se encuentran el de Ghia et al. [10] quienes emplearon un método, basado en mallas uniformemente refinadas para resolver el problema (estacionario) de la cavidad con tapa deslizante, en términos de las variables función de corriente y vorticidad, y muestran resultados para números de Reynolds $100 \leq Re \leq 10,000$ en cavidades cuadradas. Schreiber y Keller [11] resolvieron el mismo problema utilizando técnicas de alto orden de precisión obteniendo resultados para el mismo rango de valores Re utilizados por Ghia et al. [10] Por otra parte, Karniadakis et al. [12] emplearon un método de proyección, y un conjunto de reglas de integración explícitas e implícitas para la discretización temporal del problema no estacionario, y un método espectral para la discretización espacial, con lo cual obtienen esquemas de alto orden de precisión en el tiempo; durante el proceso se requiere resolver una ecuación de tipo Poisson para la presión, cuya condición de frontera tipo Neumann la obtienen al considerar la componente normal de la ecuación de momento, y reportan resultados para número de Reynolds bajos. Weinan y Liu [13] estudiaron el problema

no estacionario en variables primitivas, a partir de un método de proyección, y analizaron el efecto de considerar distintas condiciones de frontera para la presión. Por su parte, Goyon [14] consideró el problema no estacionario en variables secundarias y obtuvo resultados de estado estacionario para Reynolds $100 \leq Re \leq 7,500$, un flujo periódico para $Re = 12,500$ y algunos resultados para el caso de la cavidad rectangular con aspecto geométrico $A = 2$ y números de Reynolds $100 \leq Re \leq 1,000$. Sahin y Owens [15] utilizaron métodos implícitos de volumen finito, y eliminaron el término asociado con la presión al considerar el producto vectorial de la ecuación de momento con el vector normal unitario, obteniendo ecuaciones en términos únicamente de las componentes de la velocidad, a partir de la cual presentan resultados para Reynolds $Re \leq 10,000$, así como algunos otros de estado transitorio. A partir de la formulación en variables primitivas, Nicolás y Bermúdez [16] reformulan el problema en función de las variables corriente y vorticidad, muestran que la dinámica del flujo isotérmico en la cavidad con tapa deslizante se complica al aumentar el aspecto geométrico A y presentan resultados para $Re = 1,000$, con $A = 2$ y 3 . Marchi et al. [17] resuelven el modelo matemático en variables primarias (velocidad y presión), usando el método de volumen finito y una malla de $1,024 \times 1,024$, a partir de lo cual obtuvieron resultados para $100 \leq Re \leq 1,000$. Khorasanizade y Sousa [18], aplicaron un método libre de malla conocido como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) y números de Reynolds $100 \leq Re \leq 3,200$, además consideraron un tratamiento especial de las condiciones de frontera sin deslizamiento en las paredes solidas, esto último con objeto de mejorar los cálculos relacionados con las fuerzas viscosas que actúan en las cercanías de las paredes, lo cual contribuyó a que obtuvieran resultados con mejoras significativas respecto a otros trabajos en donde se ocupa el mismo método (SPH).

En este trabajo se presenta un esquema numérico (en variables velocidad-vorticidad) para tratar flujos térmicos e isotérmicos, viscosos, incompresibles y dependientes del tiempo en dos dimensiones ($2D$). Este esquema numérico, el cual se aplica una vez que la discretización temporal se ha realizado, representa una nueva alternativa para enfrentar algunas de las principales dificultades para resolver el modelo matemático correspondiente, es decir, procediendo con este esquema numérico evitamos la no linealidad y el acoplamiento entre las ecuaciones del sistema. Por su parte, los sistemas algebraicos correspondientes se resuelven utilizando el método de Jacobi por bloques en un esquema de programación en paralelo, el cual nos permite resolver los sistemas pequeños (bloques) con el método directo de Crout de forma paralela.

En el caso de flujos térmicos, nos enfocamos en aquellos que se generan por convección natural en una cavidad rectangular cerrada y llena de aire, cuyas paredes verticales tienen temperaturas constantes, pero distintas, mientras que las horizontales se encuentran aisladas. Para flujos isotérmicos, consideramos el problema de un fluido confinado en una cavidad rectangular con tapa superior deslizante (mecanismo que origina el movimiento del fluido y que ocasiona el fenómeno de recirculación).

El objetivo fundamental del presente trabajo consiste en resolver numéricamente las ecuaciones que modelan el flujo de fluidos térmicos/isotérmicos en variables velocidad-vorticidad utilizando un método directo, mismo que se describe en detalle más adelante. Una característica del procedimiento numérico es que aplicamos el método de Jacobi por bloques para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas que se obtienen del problema totalmente discreto, el cual dada su estructura es programado en paralelo.

A continuación se describe el contenido de la tesis. En el **Capítulo 2** se presenta el modelo matemático del problema, en la **Sección 2.1** se describe el sistema adimensional de ecuaciones, en variables primitivas (velocidad y presión) además de la temperatura, que modela el flujo de fluidos térmicos; asimismo se señala cómo a partir de éste se puede llegar al correspondiente modelo para flujos isotérmicos. En la **Sección 2.2** se obtiene la formulación del problema en variables velocidad-vorticidad, y en la **Sección 2.3** se hace una extensión del modelo para considerar las ecuaciones no estacionarias de las componentes de la velocidad. Finalmente en la **Sección 2.4** se describen brevemente los parámetros adimensionales involucrados en el modelo matemático y con la transferencia de calor. En el **Capítulo 3** se presenta el esquema numérico de solución, para lo cual primero se realiza la discretización temporal del problema (**Sección 3.1**) utilizando un esquema de diferencias finitas de segundo orden; posteriormente se obtiene el problema totalmente discreto (**Sección 3.2**) donde también se emplean diferencias finitas de segundo orden. Los sistemas de ecuaciones algebraicas que se obtienen del proceso de discretización son resueltos (**Sección 3.3**) utilizando el método de Jacobi por bloques y la factorización de Crout. En el **Capítulo 4** se presentan los resultados que se obtienen al aplicar el esquema numérico descrito en el Capítulo 3, para el caso de flujos térmicos de convección natural (**Sección 4.1**) y para el caso de flujos isotérmicos en la cavidad con

tapa deslizable (**Sección 4.2**). Por último, en el **Capítulo 5** se presentan las conclusiones del trabajo.

Adicionalmente a lo anterior, dado que en el Capítulo 3 se describe el esquema numérico considerando mallas uniformes, es decir tamaños de malla iguales en cada dirección ($h_x = h_y$), en los **Apéndices B y C** se presenta el sistema algebraico que se obtiene del problema totalmente discreto tomando en cuenta tamaños de malla diferentes ($h_x \neq h_y$); además, a partir de las hipótesis que se plantean en el Capítulo 3, en el primero de estos apéndices se considera la aportación de los términos no lineales a las matrices asociadas (y por lo tanto dependientes del tiempo) de los subsistemas algebraicos a resolver, mientras que en el segundo apéndice esta contribución se ve reflejada en el vector de términos independientes de dichos subsistemas. En el Apéndice D se muestra el pseudocódigo de la solución del problema utilizando el esquema numérico descrito en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Ecuaciones adimensionales que describen el flujo de fluidos térmicos e isotérmicos

Sea $\Omega \subset R^N (N = 2, 3)$, la región del flujo de un fluido incompresible, viscoso, térmico y no estacionario y Γ su frontera. Este tipo de flujos puede ser descrito por el siguiente sistema adimensional de ecuaciones no estacionarias, en $\Omega \times (0, T)$, con $T > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e}, & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & (b) \\ \theta_t - \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0, & (c) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde \mathbf{u} , p y θ representan la velocidad, presión (conocidas con el nombre de variables primarias) y temperatura del fluido. Los parámetros Re , Ra y Pr son los números adimensionales de Reynolds, de Rayleigh y de Prandtl, respectivamente, mientras que \mathbf{e} es el vector unitario en la dirección de la gravedad. Las ecuaciones de momento (2.1.a) y de continuidad (2.1.b) (también llamada esta última condición de incompresibilidad) se encuentran acopladas con la ecuación de energía térmica (2.1.c). En el caso en que no exista contribución de la temperatura, la ecuación de energía desaparece del sistema (2.1) y el lado derecho de la ecuación de momento (2.1.a) estaría dada en términos de una concentración de fuerzas externas $\mathbf{f}=(f_1, f_2, f_3)$ independiente de la temperatura θ , por lo que la ecuación de momento tomaría entonces la

siguiente forma

$$\mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.2)$$

por lo que el sistema (2.1) se reduciría a las ecuaciones de Navier-Stokes, mismas que describen el flujo de fluidos isotérmicos.

Independientemente de que se trate del caso térmico o isotérmico, si el fluido está confinado en una región Ω , el sistema (2.1) debe complementarse con condiciones iniciales, por ejemplo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ y $\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x})$ en Ω , así como de frontera, $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ y $B\theta = 0$ sobre Γ para $t \geq 0$, donde el operador B involucra una condición de frontera mixta para la temperatura θ , para tener un sistema bien planteado.

Como se sabe, existen serias dificultades para resolver este sistema de ecuaciones, entre las cuales se encuentran el acoplamiento entre las ecuaciones, los términos no lineales involucrados en las ecuaciones de momento y de temperatura, la condición de incompresibilidad no es fácil de satisfacer y no hay información adicional acerca de la presión.

2.2. Formulación del modelo matemático en términos de las variables velocidad y vorticidad

Con objeto de hacer frente a algunas de éstas dificultades, aplicamos el rotacional a la ecuación de momento (2.1.a), y considerando que el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ se define como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

se obtiene la siguiente ecuación de tipo transporte para la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$, Nicolás y Bermúdez [19], en $\Omega \times (0, T)$, los detalles pueden consultarse en el Apéndice A

$$\boldsymbol{\omega}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \nabla \times (\theta \mathbf{e}). \quad (2.4)$$

Para el caso de flujos isotérmicos, al aplicar el rotacional a la correspondiente ecuación de momento (2.2), se obtiene una muy similar a la (2.4),

excepto que el segundo término del lado derecho de esta ecuación cambiaría por el rotacional de la concentración de fuerzas externas \mathbf{f} , el cual puede representarse por \mathbf{F} .

De la ecuación (2.4) se sigue que la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ es difusiva, convectiva y 'stretched' (el término $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ aparece en el lado derecho), Chorin y Marsden [20]. Es fácil verificar que este término es cero cuando se considera el problema bidimensional, lo cual representa una gran diferencia respecto al caso tridimensional, tanto en el aspecto teórico como numérico.

Si también se aplica el rotacional a la ecuación (2.3) y se aplica la identidad vectorial ($\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = -\nabla^2 \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})$), considerando además que \mathbf{u} satisface la condición de incompresibilidad, se obtiene la siguiente ecuación de tipo Poisson para la velocidad

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones vectoriales (2.4) y (2.5), incluyendo la ecuación escalar (2.1.c) constituyen el modelo matemático que describe el flujo de fluidos térmicos en variables velocidad y vorticidad, además de la temperatura. En general en 3D, el sistema consiste de un total de siete ecuaciones (tres para la velocidad $\mathbf{u} = (u, v, w)$, tres para el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ y una para la temperatura θ en coordenadas cartesianas), sin embargo si se restringe el problema al caso bidimensional ($\Omega \subset R^2$), entonces el número de ecuaciones será de cuatro, ya que la ecuación (2.4) se reduce a una escalar dada por

$$\omega_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{Ra}{Pr Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.6)$$

donde

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.7)$$

mientras que las correspondientes ecuaciones, de tipo Poisson, para las componentes de la velocidad son

$$\nabla^2 u = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \quad y \quad \nabla^2 v = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (2.8)$$

De esta manera el sistema de ecuaciones 2D a resolver, en variables velocidad y vorticidad, está dado por

$$\left. \begin{aligned}
\nabla^2 u &= -\frac{\partial \omega}{\partial y} \\
\nabla^2 v &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \\
\omega_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{Ra}{Pr Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\theta_t - \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Como se observa del sistema (2.9), en la formulación velocidad-vorticidad el modelo matemático conserva la no linealidad y el acoplamiento entre ecuaciones, sin embargo se ha logrado evitar algunas otras dificultades, entre las cuales se puede contar la desaparición del término asociado a la presión, además de que se verifica la condición de incompresibilidad (2.1.b), ya que siguiendo a Fusegy y Farouk [21] podemos definir

$$D = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.10)$$

así, derivando las ecuaciones dadas por (2.8) con respecto a x la primera y con respecto a y la segunda, y sumando ambos resultados, se obtiene

$$\nabla^2 D = 0, \quad (2.11)$$

de lo cual, por el principio del máximo de la ecuación de Laplace, con condición de frontera adecuada, se sigue que $D = 0$, es decir se satisface la condición de incompresibilidad.

2.3. Ecuaciones no estacionarias para las componentes de la velocidad

Un enfoque comúnmente empleado para resolver las ecuaciones (2.8), y que se ocupa en el presente trabajo, consiste en incluir las derivadas temporales de las respectivas componentes de la velocidad en dichas ecuaciones de manera que éstas se extienden al respectivo problema no-estacionario (ecuaciones parabólicas), en $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, y a partir de las cuales, se busca el estado estacionario del flujo, si éste existe, a medida que $t \rightarrow +\infty$ (t grande

en la práctica).

Así, siguiendo dicho enfoque, el sistema (2.9) adquiere la siguiente forma

$$\left. \begin{aligned} u_t - \nabla^2 u &= \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ v_t - \nabla^2 v &= -\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \omega_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{Ra}{Pr Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \theta_t - \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Como ya se mencionó, éste debe complementarse con las correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Si bien éstas son dadas para la velocidad \mathbf{u} y para la temperatura θ , no se conocen para la vorticidad, sin embargo es posible obtenerlas a partir de la relación (2.7). De esta manera podemos describir estas condiciones en la siguiente forma

i) condiciones iniciales

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega \\ \omega(\mathbf{x}, 0) &= \omega_0(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega \\ \theta(\mathbf{x}, 0) &= \theta_0(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

donde $\omega_0(\mathbf{x})$ denota la condición inicial para la vorticidad que, por (2.7), debe satisfacer $\omega_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}$, y $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ es la velocidad inicial,

ii) condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{g} = (g_1, g_2) && \text{sobre } \Gamma \\ \omega &= \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} && \text{sobre } \Gamma \\ B\theta &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

con B un operador de frontera.

2.4. Parámetros adimensionales, convección natural y transferencia de calor

Como se señaló antes, es posible que existan fuerzas externas actuando sobre el sistema, por lo general debidas al campo gravitacional terrestre. En

el caso térmico, es posible que se presenten gradientes de temperatura en el fluido, lo que a su vez producirá diferencias de densidad que pueden ponerlo en movimiento y con ello transportar el calor a través de toda la región Ω que lo contiene. Este movimiento producido únicamente por la no uniformidad de la temperatura en el fluido se conoce con el nombre de convección natural. Si las diferencias de temperatura son pequeñas, entonces es suficiente usar la aproximación de Boussinesq, la cual considera constantes todas las propiedades del fluido, tales como la viscosidad μ , la conductividad térmica η , el coeficiente de expansión térmica β y el calor específico c_p , incluyendo la densidad ρ del fluido, excepto en el término de la fuerza de gravedad, misma que da origen al término $\frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e}$ en el lado derecho de la ecuación adimensional de momento, Griebel et al [22] y Gunzburger [23]. De aquí que la viscosidad cinemática y el coeficiente de difusividad térmica, que se definen respectivamente como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ y $\kappa = \frac{\eta}{c_p \rho}$, también sean consideradas constantes en este caso.

A partir de lo anterior, y considerando la forma en que se definen Re , Pr y Ra , es importante hacer algunas observaciones. El número de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (2.15)$$

(con U y L una velocidad y una longitud de referencia), representa la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas; en el caso de convección natural se acostumbra definir $U = \frac{\nu}{L}$, ya que no existe una velocidad de referencia, por lo que entonces $Re = 1$. El número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.16)$$

es una característica del fluido que expresa la relación entre la viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica κ , ambas constantes bajo la aproximación de Boussinesq, de manera que una vez que se considera un fluido específico, el valor de Pr será constante. En el caso del número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\beta L^3 g T_o - T_1}{\kappa \nu}, \quad (2.17)$$

representa el balance entre el empuje (fuerza desestabilizadora) y la viscosidad y la difusión (fuerzas estabilizadoras) y puede tomar diferentes valores dependiendo del gradiente de temperatura que se considere.

Por otra parte, la transferencia de calor sobre una superficie que se encuentra a una temperatura fija mayor que el fluido circundante, puede medirse a través de los números de Nusselt, local Nu y promedio \overline{Nu} . Si se conoce

el campo de temperatura de un fluido en una cavidad ($\Omega = (0, a) \times (0, b)$) rectangular, con aspecto geométrico $A = \frac{b}{a}$ y suponiendo que la pared con temperatura fija donde se medirá la transferencia de calor es la izquierda ($x = 0$), estos números pueden ser calculados como

$$Nu(y) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^A Nu(y) dy.$$

Si se están considerando flujos isotérmicos, el único parámetro que aparecerá en las ecuaciones es el número de Reynolds Re el cual, una vez que se ha establecido la velocidad y la longitud de referencia, solo dependerá de la viscosidad (de manera inversa) del fluido, esto es a mayor viscosidad menor será el valor de Re , y a menor viscosidad mayor será el de Re .

Capítulo 3

Esquema numérico de solución

3.1. Discretización en tiempo

Para resolver el sistema (2.12), en primer lugar procedemos a aproximar las derivadas temporales mediante el siguiente esquema de diferencias finitas de segundo orden

$$g_t(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t) = \frac{3g^{n+1} - 4g^n + g^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

donde $n \geq 1$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Delta t > 0$ es el paso de tiempo y $g^r \approx g(\mathbf{x}, r\Delta t)$. Este esquema es incondicionalmente estable cuando se combina implícitamente con el operador laplaciano, y se comporta bien cuando $t \rightarrow \infty$, Glowinski [24]. De esta manera, en cada nivel de tiempo $t = (n+1)\Delta t$ el sistema semi-discreto, en Ω , adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \alpha u^{n+1} - \nabla^2 u^{n+1} &= \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} + f_u, & a) \\ \alpha v^{n+1} - \nabla^2 v^{n+1} &= -\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} + f_v, & b) \\ \alpha \omega^{n+1} - \gamma \nabla^2 \omega^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \omega^{n+1} &= \frac{Ra}{PrRe^2} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x} + f_\omega, & c) \\ \alpha \theta^{n+1} - \varsigma \nabla^2 \theta^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \theta^{n+1} &= f_\theta, & d) \\ \mathbf{u}^{n+1}|_\Gamma &= \mathbf{u}_{cf}^{n+1}, & e) \\ \omega^{n+1}|_\Gamma &= \omega_{cf}^{n+1}, & f) \\ B\theta^{n+1}|_\Gamma &= 0, & g) \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde $\alpha = \frac{3}{2\Delta t}$, $f_s = \frac{4s^n - s^{n-1}}{2\Delta t}$, s puede ser considerado para u , v , ω ó θ , $\gamma = \frac{1}{Re}$, $\varsigma = \frac{1}{Re Pr}$, mientras que \mathbf{u}_{cf} y ω_{cf} denotan la condición de frontera para \mathbf{u} y ω respectivamente, y como se señaló antes B es un operador de frontera para θ .

Las derivadas parciales $\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x}$ y $\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x}$, que aparecen en las primeras tres ecuaciones (a, b y c) del sistema (3.2) las aproximamos mediante una extrapolación lineal de los correspondientes valores de ω obtenidos en los dos niveles de tiempo anteriores, de manera que

$$\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} \approx 2 \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - \frac{\partial \omega^{n-1}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} \approx 2 \frac{\partial \omega^n}{\partial y} - \frac{\partial \omega^{n-1}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x} \approx 2 \frac{\partial \theta^n}{\partial x} - \frac{\partial \theta^{n-1}}{\partial x},$$

si adicionalmente renombramos

$$\begin{aligned} u &= u^{n+1} \\ v &= v^{n+1} \\ \omega &= \omega^{n+1} \\ \theta &= \theta^{n+1} \end{aligned}$$

entonces en cada nivel de tiempo $(n+1)\Delta t$ debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones elípticas

$$\begin{aligned} \alpha u - \nabla^2 u &= 2 \frac{\partial \omega^n}{\partial y} - \frac{\partial \omega^{n-1}}{\partial y} + f_u, & a) \\ u|_{\Gamma} &= u_{cf} \\ \alpha v - \nabla^2 v &= -2 \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + \frac{\partial \omega^{n-1}}{\partial x} + f_v, & b) \\ v|_{\Gamma} &= v_{cf} \\ \alpha \omega - \gamma \nabla^2 \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{Ra}{Pr Re^2} \left(2 \frac{\partial \theta^n}{\partial x} - \frac{\partial \theta^{n-1}}{\partial x} \right) + f_\omega, & c) \\ \omega|_{\Gamma} &= \omega_{cf}, \\ \alpha \theta - \varsigma \nabla^2 \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= f_\theta, & d) \\ B\theta|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

De esta manera, una vez que encontramos u y v , a partir de las ecuaciones (3.3.a) y (3.3.b), éstas se incorporan a las ecuaciones (3.3.c) y (3.3.d) para calcular la vorticidad ω y la temperatura θ del fluido. Procediendo de esta forma, evitamos el acoplamiento entre las ecuaciones del sistema, así como la no linealidad que aparecen en las últimas dos ecuaciones, lo cual constituye un aspecto novedoso del esquema numérico que se utiliza en el presente trabajo.

Es importante señalar que si bien conocemos los valores de $(u^0, v^0, \omega^0, \theta^0)$, también se requiere de los valores de $(u^1, v^1, \omega^1, \theta^1)$ para iniciar el proceso. Para encontrar estos últimos, aproximamos las derivadas temporales que aparecen en el sistema (2.12) mediante el esquema de primer orden dado por

$$g_t(\mathbf{x}, n\Delta t) \approx \frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t}, \quad n \geq 1, \quad (3.4)$$

con lo que las ecuaciones que se obtienen tienen la misma forma que el sistema (3.3), con la diferencia de que

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \quad y \quad f_s = \frac{s^n}{\Delta t}$$

mientras que las derivadas espaciales de ω y de θ que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones del sistema (2.12) son consideradas en el nivel de tiempo $n = 0$, es decir $\frac{\partial \omega^0}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega^0}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta^0}{\partial x}$. Además, para tratar de preservar la aproximación de segundo orden, dividimos el primer nivel de tiempo en 5 subintervalos, resolvemos el problema en cada uno de ellos y al finalizar el último subintervalo, los valores que se obtienen para (u, v, ω, θ) se toman como los correspondientes $(u^1, v^1, \omega^1, \theta^1)$.

3.2. Problema discreto

En general, para resolver problemas elípticos como los del sistema (3.3) es posible considerar una discretización espacial ya sea en términos de elemento finito (estableciendo previamente una formulación variacional) o bien de diferencias finitas, en cualquiera de los casos se obtiene un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. En particular, si la región bidimensional que contiene el fluido es una cavidad rectangular ($\Omega = (0, a) \times (0, b)$), una discretización en términos de diferencias finitas es suficiente. En el presente trabajo utilizamos esta última, empleando para ello los siguientes esquemas de segundo orden

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} &\approx \frac{g_{i+1, j} - g_{i-1, j}}{2h_x} & a) \\
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{g_{i, j+1} - g_{i, j-1}}{2h_y} & b) \\
\frac{\partial^2 g(x_i, y_j)}{\partial x^2} &\approx \frac{g_{i+1, j} - 2g_{i, j} + g_{i-1, j}}{h_x^2} & c) \\
\frac{\partial^2 g(x_i, y_j)}{\partial y^2} &\approx \frac{g_{i, j+1} - 2g_{i, j} + g_{i, j-1}}{h_y^2} & d)
\end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

donde: $h_x = \frac{a}{M}$ y $h_y = \frac{b}{N}$ con $M, N > 0$ enteros,
(en caso en que $h_x = h_y$ entonces denotaremos por $h = h_x = h_y$),

$$g_{i, j} = g(x_i, y_j)$$

$$x_i = i * h_x, \quad y \quad y_j = j * h_y$$

$$\text{con } i = 0, \dots, M - 1 \quad y \quad j = 0, \dots, N - 1$$

Para aproximar $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ en puntos sobre la frontera de la región, utilizamos los siguientes esquemas de diferencias finitas, progresivas o regresivas, según se requiera

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} &\approx \frac{-3g_{i, j} + 4g_{i+1, j} - g_{i+2, j}}{2h_x} & i) \\
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{-3g_{i, j} + 4g_{i, j+1} - g_{i, j+2}}{2h_y} & ii) \\
&\text{ó} & \\
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x} &\approx \frac{3g_{i, j} - 4g_{i-1, j} + g_{i-2, j}}{2h_x} & iii) \\
\frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{3g_{i, j} - 4g_{i, j-1} + g_{i, j-2}}{2h_y} & iv)
\end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

En la Figura 3.1 se muestra el orden en que se numeran los nodos en la malla (puntos de la región Ω), mismos que son empleados en el proceso de discretización espacial, para resolver el sistema (3.3). Una vez que esta discretización es llevada a cabo, el problema totalmente discreto que se obtiene involucra resolver, en cada nivel de tiempo, cuatro sistemas algebraicos lineales $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$: dos para las componentes de la velocidad u y v , uno para la vorticidad ω y otro más para la temperatura θ .

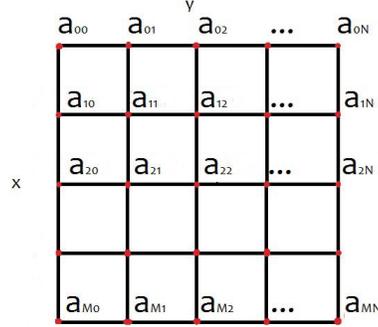


Figura 3.1: Numeración de los nodos

Para cada uno de estos sistemas la matriz \mathcal{A} y el vector \mathbf{b} tendrán una forma específica, en particular el orden de la matriz \mathcal{A} es $(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)$, sin embargo en el caso de las ecuaciones (3.3.c) y (3.3.d) también dependerá de la manera en que se aproximen los términos no lineales $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$ en las respectivas ecuaciones. Observemos dos casos.

1) Si ambos términos se aproximan considerando los valores respectivos de la vorticidad y de la temperatura en el nivel de tiempo $(n+1)\Delta t$, es decir

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \omega) \approx u_{ij} \left[\frac{\omega_{i+1j} - \omega_{i-1j}}{2h} \right] + v_{ij} \left[\frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij-1}}{2h} \right],$$

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \theta) \approx u_{ij} \left[\frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2h} \right] + v_{ij} \left[\frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2h} \right],$$

entonces los valores de ω y de θ son incógnitas a determinar y por lo tanto sus coeficientes serán parte de las matrices asociadas de los correspondientes sistemas algebraicos que se obtienen al realizar la discretización completa del sistema (3.3), misma que se muestra a continuación, y en donde por simplicidad se ha considerado que $h = h_x = h_y$. La discretización correspondiente al caso general, esto es cuando $h_x \neq h_y$, puede consultarse en el apéndice B.

$$\alpha u_{ij} - \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{h^2} = 2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h} + f_u \quad (a)$$

$$u|_{\Gamma} = u_{cf}$$

$$\alpha v_{ij} - \frac{v_{i-1j} + v_{i+1j} - 4v_{ij} + v_{ij-1} + v_{ij+1}}{h^2} = -2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h} + \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h} + f_v \quad (b)$$

$$v|_{\Gamma} = v_{cf}$$

$$\alpha \omega_{ij} - \gamma \frac{\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} - 4\omega_{ij} + \omega_{ij-1} + \omega_{ij+1}}{h^2} + u_{ij} \left(\frac{\omega_{i+1j} - \omega_{i-1j}}{2h} \right) + v_{ij} \left(\frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij-1}}{2h} \right) = \frac{Ra}{PrRe^2} \left[2 \left(\frac{\theta_{i+1j}^n - \theta_{i-1j}^n}{2h} \right) - \frac{\theta_{i+1j}^{n-1} - \theta_{i-1j}^{n-1}}{2h} \right] + f_{\omega} \quad (c) \quad (3.7)$$

$$\omega|_{\Gamma} = \omega_{cf}$$

$$\alpha \theta_{ij} - \zeta \frac{\theta_{i-1j} + \theta_{i+1j} - 4\theta_{ij} + \theta_{ij-1} + \theta_{ij+1}}{h^2} + u_{ij} \left(\frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2h} \right) + v_{ij} \left(\frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2h} \right) = f_{\theta} \quad (d)$$

$$B\theta|_{\Gamma} = 0$$

De aquí que:

- i) las matrices \mathcal{A}_u y \mathcal{A}_v asociadas a los dos primeros sistemas algebraicos, (3.4.a) y (3.4.b), para encontrar las componentes u y v de la velocidad, son iguales y tienen la siguiente forma

$$\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_v = \begin{pmatrix} A & -I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -I & A & -I & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & -I & A & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -I & A \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)}$$

donde la matriz A por bloques está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 4 + \alpha h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 + \alpha h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4 + \alpha h^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 + \alpha h^2 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

mientras que la matriz I es la matriz identidad de orden $(N - 1) \times (N - 1)$.

- ii) La matriz \mathcal{A}_ω asociada al tercer sistema algebraico de (3.4.c), para encontrar la vorticidad ω , es dependiente del tiempo debido a la influencia de los valores de u y v en el nivel de tiempo $(n + 1)\Delta t$. Esta matriz \mathcal{A}_ω puede ser representada mediante la siguiente matriz por bloques

$$\mathcal{A}_\omega = \begin{pmatrix} F_1 & H_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ G_1 & F_2 & H_2 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & G_2 & F_3 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & H_{M-2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & G_{M-2} & F_{M-1} \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)},$$

donde cada uno de los bloques son de orden $(N - 1) \times (N - 1)$.

Los bloques F_i con $i = 1, 2, \dots, M - 1$ están dados por

$$F_i = \begin{pmatrix} 4\gamma + \alpha h^2 & -\gamma + \frac{hv_{i,1}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma - \frac{hv_{i,2}}{2} & 4\gamma + \alpha h^2 & -\gamma + \frac{hv_{i,2}}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma - \frac{hv_{i,3}}{2} & 4\gamma + \alpha h^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma + \frac{hv_{i,N-2}}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma - \frac{hv_{i,N-1}}{2} & 4\gamma + \alpha h^2 \end{pmatrix}$$

mientras que los bloques G_i y H_i , con $i = 1, 2, \dots, M - 2$, representan

matrices diagonales, dadas respectivamente por

$$G_i = \begin{pmatrix} -\gamma - \frac{hv_{i+1,1}}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma - \frac{hv_{i+1,2}}{2} & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\gamma - \frac{hv_{i+1,3}}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\gamma - \frac{hv_{i+1,N-1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$H_i = \begin{pmatrix} -\gamma + \frac{hu_{i,1}}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma + \frac{hu_{i,2}}{2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\gamma + \frac{hu_{i,3}}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\gamma + \frac{hu_{i,N-1}}{2} \end{pmatrix}$$

iii) La matriz \mathcal{A}_θ asociada al cuarto sistema algebraico de (3.4.d), para encontrar la temperatura θ , está dada por

$$\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} J_1 & L_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ K_1 & J_2 & L_2 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & K_2 & J_3 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & L_{M-2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & K_{M-2} & J_{M-1} \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)},$$

donde cada uno de los bloques es de orden $(N-1) \times (N-1)$. Los bloques J_i con $i = 1, 2, \dots, M-1$ están dados por

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha h^2 + \frac{8}{3P_r} - \frac{2hv_{i,1}}{3} & -\frac{2}{3P_r} + \frac{2hv_{i,1}}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{P_r} - \frac{hv_{i,2}}{2} & \alpha h^2 + \frac{4}{P_r} & -\frac{1}{P_r} + \frac{hv_{i,2}}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{P_r} - \frac{hv_{i,3}}{2} & \alpha h^2 + \frac{4}{P_r} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{P_r} + \frac{hv_{i,N-2}}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{3P_r} - \frac{hv_{i,N-1}}{3} & \alpha h^2 + \frac{8}{3P_r} - \frac{2hv_{i,N-1}}{3} \end{pmatrix}$$

mientras que los bloques K_i y L_i , con $i = 1, 2, \dots, M-2$, representan

matrices diagonales dados respectivamente por

$$K_i = \begin{pmatrix} -\varsigma - \frac{hvi_{i+1,1}}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\varsigma - \frac{hv_{i+1,2}}{2} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\varsigma - \frac{hv_{i+1,3}}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\varsigma - \frac{hv_{i+1,N-1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_i = \begin{pmatrix} -\varsigma + \frac{hu_{i,1}}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\varsigma + \frac{hu_{i,2}}{2} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\varsigma + \frac{hu_{i,3}}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\varsigma + \frac{hu_{i,N-1}}{2} \end{pmatrix}$$

2) Alternativamente, si los correspondientes gradientes de los términos $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$ se aproximan por una extrapolación lineal de los valores obtenidos en los dos niveles previos de tiempo, esto es

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega \approx u_{ij} \left(2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h} - \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h} \right) + v_{ij} \left(2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h} \right)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \theta \approx u_{ij} \left(2 \frac{\theta_{i+1j}^n - \theta_{i-1j}^n}{2h} - \frac{\theta_{i+1j}^{n-1} - \theta_{i-1j}^{n-1}}{2h} \right) + v_{ij} \left(2 \frac{\theta_{ij+1}^n - \theta_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\theta_{ij+1}^{n-1} - \theta_{ij-1}^{n-1}}{2h} \right),$$

entonces el sistema (3.3) totalmente discreto toma la siguiente forma, en donde nuevamente se ha considerado $h = h_x = h_y$ (el caso en que $h_x \neq h_y$ puede consultarse en el apéndice C).

$$\alpha u_{ij} - \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij} + u_{ij-1} + u_{ij+1}}{h^2} = 2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h} + f_u \quad (a)$$

$$u|_{\Gamma} = u_{cf}$$

$$\alpha v_{ij} - \frac{v_{i-1j} + v_{i+1j} - 4v_{ij} + v_{ij-1} + v_{ij+1}}{h^2} = -2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h} + \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h} + f_v \quad (b)$$

$$v|_{\Gamma} = v_{cf}$$

$$\alpha \omega_{ij} - \gamma \frac{\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} - 4\omega_{ij} + \omega_{ij-1} + \omega_{ij+1}}{h^2} = \frac{Ra}{PrRe^2} \left(2 \frac{\partial \theta^n}{\partial x} - \frac{\partial \theta^{n-1}}{\partial x} \right) \quad (3.8)$$

$$-u_{ij} \left(2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h} - \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h} \right) - v_{ij} \left(2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h} \right) + f_{\omega} \quad (c)$$

$$\omega|_{\Gamma} = \omega_{cf},$$

$$\alpha \theta_{ij} - \varsigma \frac{\theta_{i-1j} + \theta_{i+1j} - 4\theta_{ij} + \theta_{ij-1} + \theta_{ij+1}}{h^2} = -u_{ij} \left(2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h} - \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h} \right) - v_{ij} \left(2 \frac{\theta_{ij+1}^n - \theta_{ij-1}^n}{2h} - \frac{\theta_{ij+1}^{n-1} - \theta_{ij-1}^{n-1}}{2h} \right) + f_{\theta} \quad (d)$$

$$B\theta|_{\Gamma} = 0,$$

a partir del cual se puede observar fácilmente que:

- i) las matrices \mathcal{A}_u y \mathcal{A}_v son las mismas que las del sistema (3.4) del inciso 1).

ii) La matriz \mathcal{A}_ω ahora es constante y se puede representar como

$$\mathcal{A}_\omega = \begin{pmatrix} F & G & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ G & F & G & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & G & F & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & G \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & G & F \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)}$$

donde el bloque F es una matriz tridiagonal

$$F = \begin{pmatrix} 4\gamma + \alpha h^2 & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 4\gamma + \alpha h^2 & -\gamma & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma & 4\gamma + \alpha h^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 4\gamma + \alpha h^2 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

mientras que el bloque G es la matriz identidad I multiplicada por el escalar $-\gamma$, es decir $G = -\gamma I_{(N-1) \times (N-1)}$ es una matriz diagonal.

iii) La matriz \mathcal{A}_θ también es constante y tiene una forma muy similar a la de \mathcal{A}_ω del inciso ii) anterior, pero sustituyendo ς por γ , es decir

$$\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} J & K & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ K & J & K & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K & J & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & K \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & K & J \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}$$

en donde el bloque J esta dado por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{16}{3}\zeta + \alpha h^2 & -\frac{4}{3}\zeta & 0 & \cdots & 0 \\ -\zeta & 4\zeta + \alpha h^2 & -\zeta & \ddots & 0 \\ 0 & -\zeta & 4\zeta + \alpha h^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\zeta \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{4}{3}\zeta & \frac{16}{3}\zeta + \alpha h^2 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

y el bloque $K = -\zeta I_{(N-1) \times (N-1)}$.

Como se observa, en ambas opciones 1) y 2) debemos resolver, en cada nivel de tiempo, cuatro sistemas lineales de ecuaciones (dos para las componentes de la velocidad, una para la vorticidad y una más para la temperatura), sin embargo en la primera opción, la matriz m_ω no es constante y de aquí que debe ser calculada en cada uno de estos niveles, lo cual repercute de manera importante en el tiempo de cómputo. En el presente trabajo, elegimos la segunda opción, por que las matrices asociadas a la vorticidad son constantes, lo cual representa una ventaja, dado que mejora el tiempo de cómputo requerido para obtener la solución aproximada del problema, esto debido a que no se le asigna tiempo de computo a la construcción de la matriz en cada nivel de tiempo.

Independientemente de la opción que se elija para aproximar el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$, la condición de frontera para la vorticidad, la cual se desconoce, se construye a partir de la respectiva condición de frontera para la velocidad \mathbf{u} , utilizando esquemas de diferencias finitas, progresivas (3.6.i) y (3.6.ii) o regresivas (3.6.iii) y (3.6.iv) según se requiera, además de centradas (3.5.a) y (3.5.b). De esta manera se tiene que

$$\omega_{cf} = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}, \quad (3.9)$$

de donde entonces:

$$\begin{aligned}
\omega_{cf}|_{x=0} &\approx \frac{-3g_{2i,j}+4g_{2i+1,j}-g_{2i+2,j}}{2h_x} - \frac{g_{1i,j+1}-g_{1i,j-1}}{2h_y}, & a) \\
\omega_{cf}|_{x=a} &\approx \frac{3g_{2i,j}-4g_{2i-1,j}+g_{2i-2,j}}{2h_x} - \frac{g_{1i,j+1}-g_{1i,j-1}}{2h_y}, & b) \\
\omega_{cf}|_{y=0} &\approx \frac{g_{2i+1,j}-g_{2i-1,j}}{2h_x} - \frac{-3g_{1i,j}+4g_{1i,j+1}-g_{1i,j+2}}{2h_y}, & c) \\
\omega_{cf}|_{y=b} &\approx \frac{g_{2i+1,j}-g_{2i-1,j}}{2h_x} - \frac{3g_{1i,j}-4g_{1i,j-1}+g_{1i,j-2}}{2h_y}. & d)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente, una vez obtenida la vorticidad ω , es posible calcular la función de corriente ψ , una variable importante que se define a través de las componentes de la velocidad como

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad y \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3.11}$$

y que está relacionada con la vorticidad ω mediante la relación (2.7), a partir de la cual puede verificarse la siguiente ecuación de tipo Poisson para ψ

$$\nabla^2\psi = -\omega, \tag{3.12}$$

cuya condición de frontera, dada en términos de las componentes de la velocidad, se obtiene de las ecuaciones (3.11). La función de corriente en conjunto con la vorticidad son llamadas las variables secundarias, y de aquí que las ecuaciones (2.6) y (3.12), incluyendo la ecuación (2.1.c) en el caso de flujos térmicos, representan una formulación alterna, en términos de estas variables secundarias ψ y ω , para el flujo de fluidos isotérmicos o térmicos respectivamente, en 2D.

3.3. Implementación del método de Jacobi por bloques y factorización de Crout para resolver el problema discreto

Como se señaló en la sección anterior, y de acuerdo al enfoque para aproximar los términos $\mathbf{u} \cdot \nabla\omega$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla\theta$ que se considera en el presente trabajo, todos los sistemas de ecuaciones algebraicos $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ que se obtienen a partir

de la discretización del problema (2.12), tienen la característica de que \mathcal{A} es una matriz constante y tridiagonal por bloques, de orden $(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)$, mientras que \mathbf{x} y \mathbf{b} son vectores de longitud $(M-1)(N-1)$, por lo que estos sistemas pueden ser representados en general de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} D & E & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ E & D & E & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & E & D & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & E \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & E & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{M-1} \end{pmatrix}.$$

Recordando que el bloque D que aparece en la diagonal principal es una matriz tridiagonal, mientras que el bloque E es una matriz diagonal, ambos de orden $(N-1) \times (N-1)$. Los vectores \mathbf{x}_i y los \mathbf{b}_i , con $i = 1, 2, \dots, (M-1)$ son de tamaño $(N-1)$.

Para resolver todos estos sistemas de ecuaciones en cada nivel de tiempo $(n+1)\Delta t$ empleamos el método iterativo de Jacobi por bloques, ya que éste se adapta en forma sencilla a una matriz con las características de \mathcal{A} , y cuyo algoritmo general se indica a continuación:

$k = 0$, norma = 1

Mientras ($k \leq k_{m\acute{a}x}$) y (norma $\geq tol$)

$$\text{resolver } D\mathbf{x}_1^{(k+1)} = \mathbf{b}_1 - E\mathbf{x}_2^{(k)},$$

para $i = 2$, hasta, $M-1$

$$\text{resolver } D\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{b}_i - E\mathbf{x}_{i-1}^{(k)} - E\mathbf{x}_{i+1}^{(k)},$$

$$\text{resolver } D\mathbf{x}_{M-1}^{(k+1)} = \mathbf{b}_{M-1} - E\mathbf{x}_{M-2}^{(k)},$$

$$\text{norma} = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty}$$

Del algoritmo se puede observar que las iteraciones $(k+1)$ se efectúan mientras las aproximaciones sucesivas no alcancen una tolerancia tol deseada, o no se haya alcanzado un número máximo de iteraciones $k_{m\acute{a}x}$. En cualquier caso, la solución se toma como la $\mathbf{x}^{(k+1)}$ calculada en la última iteración.

Para arrancar el esquema de solución en el primer nivel de tiempo, y obtener $\mathbf{x}^{\Delta t}$, tomamos como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^0$. Posteriormente para calcular:

- i) $\mathbf{x}^{2\Delta t}$ en el segundo nivel de tiempo, el valor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se obtiene a partir de la interpolación lineal de \mathbf{x}^0 y $\mathbf{x}^{\Delta t}$,
- ii) $\mathbf{x}^{3\Delta t}$ en el tercer nivel de tiempo, el valor inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se obtiene de la interpolación cuadrática de \mathbf{x}^0 , $\mathbf{x}^{\Delta t}$ y $\mathbf{x}^{2\Delta t}$,
- iii) a partir del cuarto nivel de tiempo, $\mathbf{x}^{(0)}$ se calcula como la interpolación cúbica de las aproximaciones $\mathbf{x}^{(n-3)\Delta t}$, $\mathbf{x}^{(n-2)\Delta t}$, $\mathbf{x}^{(n-1)\Delta t}$ y $\mathbf{x}^{n\Delta t}$, con $n \geq 3$, obtenidas en los cuatro niveles previos de tiempo.

El proceso de paralelización del método de Jacobi por bloques para resolver los sistemas lineales resulta ser sencillo de implementar, dado que para calcular el vector solución $\mathbf{x}^{(k+1)}$ sólo se requiere conocer el vector $\mathbf{x}^{(k)}$ de la iteración anterior y la factorización de D (la cual se realiza una vez), de manera que al tener esta información en la memoria que comparten todos los procesadores, aprovechamos el esquema de paralelización de memoria compartida (*OpenMP*), con objeto de que los subsistemas lineales que aparecen en el algoritmo anterior se resuelvan de manera simultánea (paralela) en los distintos procesadores del servidor.

A su vez, estos subsistemas lineales $Ax = b$, de orden $(N-1) \times (N-1)$, se resuelven usando un método directo. En cada caso factorizamos la respectiva matriz asociada A en la forma LU usando el algoritmo de Crout, y posteriormente resolvemos aplicando una sustitución hacia adelante seguida de una sustitución hacia atrás. Además de ello, explotamos la forma tridiagonal, y constante de cada bloque, dado que se sabe que los algoritmos de factorización pueden simplificarse considerablemente cuando se aplican a matrices banda, porque los elementos ceros no se toman en cuenta, Burden y Faires [25].

El algoritmo de factorización de Crout puede aplicarse siempre que $l_{i,i} \neq 0$ para toda $i=1,2,3,\dots,n$. Esta propiedad se satisface si la matriz de coeficientes cumple una de las siguientes características: que sea definida positiva o que sea estrictamente diagonal dominante, lo cual cumplen todas las matrices de coeficientes de asociadas a los sistemas lineales que resultan de la discretización del problema original, y donde las matrices L y U tienen la siguiente forma

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La no dependencia de los subsistemas a resolver en cada iteración es como ya se mencionó permite que el algoritmo pueda ser implementado de forma paralela, lo que a su vez reduce el tiempo de ejecución el programa comparado con el que se requeriría al resolverlos de manera secuencial utilizando un solo procesador.

Es importante señalar que el esquema de solución descrito en este trabajo fue implementado utilizando el lenguaje de programación C y, para almacenar la información de las matrices de los sistemas algebraicos involucrados, se utilizaron arreglos; el pseudocódigo correspondiente puede consultarse en el Apéndice D. El programa fue ejecutado en los clusters Aitzaloe y Yoltla del laboratorio de supercómputo de la UAM Iztapalapa [26].

El siguiente capítulo condensa los resultados que se obtienen al aplicar este esquema numérico a los casos de flujos térmicos de convección natural, y flujos isotérmicos en una cavidad rectangular con tapa deslizable.

Capítulo 4

Resultados numéricos

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a flujos que han alcanzado el estado estacionario (T_{ee}), los cuales como ya se mencionó anteriormente se desarrollan en cavidades rectangulares ($\Omega = (0, a) \times (0, b)$), con $a, b > 0$. Para determinar el tiempo (T_{ee}), utilizamos el criterio discreto de paro absoluto puntual L_∞ en la cerradura de la cavidad $\bar{\Omega}$,

$$\|\omega_{h_x, h_y}^{n+1} - \omega_{h_x, h_y}^n\|_\infty < tol,$$

donde tol es una la tolerancia dada, la cual para obtener una mejor precisión en nuestros resultados, en cavidades cuadradas es considerada como 10^{-5} y para cavidades rectangulares 10^{-7} .

Independientemente de que se estén considerando flujos térmicos o isotérmicos, los resultados que obtenemos se reportan a través de los valores de la función de corriente, y de la temperatura en el caso térmico, o de la vorticidad en el caso isotérmico, así como de las respectivas líneas de corriente, y de las isotermas o isocontornos de vorticidad según corresponda. Lo anterior con objeto de validar los resultados que obtenemos en el presente trabajo, con los que reportan otros autores.

4.1. Caso Térmico

Los resultados que se presentan corresponden a flujos de convección natural, en una cavidad cerrada llena de aire

$$Re = 1 \qquad Pr = 0.71,$$

y con aspecto geométrico $A \leq 2$, para valores del número de Rayleigh $Ra=10^4$ y $Ra=10^5$.

Las condiciones iniciales consideradas para la velocidad, vorticidad y temperatura son:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{0}, \quad \omega(\mathbf{x}, 0)=0 \quad \text{y} \quad \theta(\mathbf{x}, 0)=0,$$

mientras que las condiciones de frontera están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, y) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(a, y) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, b) = \mathbf{0}, \\ \omega(0, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \omega(a, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=a}, \quad \omega(x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \omega(x, b) = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b}, \\ \theta(0, y) = 1, \quad \theta(a, y) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, b) = 0. \end{aligned}$$

La geometría del problema, así como las condiciones iniciales y de frontera del mismo se ilustran en la Figura 4.1.

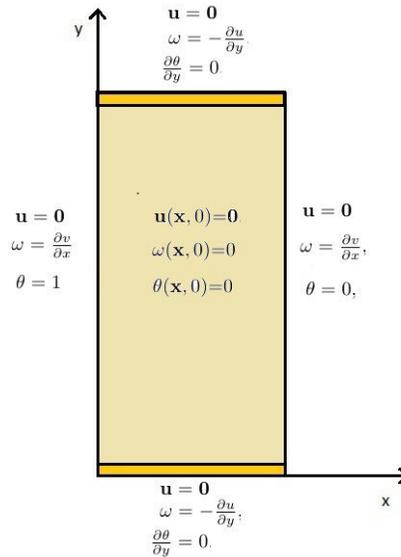


Figura 4.1: Geometría, y condiciones iniciales y de frontera del problema

De acuerdo a las condiciones de frontera para la temperatura θ , las paredes horizontales están aisladas, mientras que la pared izquierda está caliente y la derecha fría, por ello el fluido se calienta cerca de la pared izquierda, donde disminuye su densidad y con ello el fluido tiende a ascender; cerca de la pared derecha el fluido se enfría, tornándose más denso y haciendo que este descienda hacia al fondo de la cavidad, empujando a su vez el fluido del fondo hacia la pared caliente, donde se repite el ciclo. De esta forma se genera un patrón de rotación del fluido en la dirección de las manecillas del reloj (dirección negativa). Los resultados numéricos se reportan a través de las gráficas de las líneas de corriente, las isotermas y los números de Nusselt global y local, así como de los valores críticos de la función de corriente $\psi_{mín/máx}$ y el tiempo para alcanzar el estado estacionario.

La Figura 4.2 muestra las líneas de corriente y las isotermas del flujo de estado estacionario que se alcanza cuando $T_{ee}=0.19$, en una cavidad cuadrada $A=1$ y número de Rayleigh $Ra=10^4$, usando un tamaño de malla dado por $h=\frac{1}{20}$, y un paso de tiempo $\Delta t=10^{-4}$. Como se observa de las líneas de corriente, el movimiento del fluido genera una celda que rota en dirección negativa, tal como se señaló anteriormente. Por otra parte, las isotermas se encuentran más concentradas en la esquina inferior izquierda, cerca de la pared caliente, y al ascender sobre esta última tienden a alejarse unas de otras. En estas zonas de concentración de las isotermas existe una importante variación horizontal de la temperatura, por esta razón esperamos una mayor transferencia de calor en el fondo de la cavidad, cercana a la pared caliente, misma que va disminuyendo al alejarnos del fondo de la cavidad. Lo anterior se ve reforzado por la correspondiente gráfica del número de Nusselt local, Figura 4.3. Los resultados mostrados en la Figura 4.2 coinciden perfectamente con aquellos obtenidos por Nicolás y Bermúdez [6], quienes utilizan la aproximación de Boussinesq en la formulación función de corriente-vorticidad y resuelven el problema no estacionario aplicando un esquema numérico el cual se basa en un proceso iterativo de punto fijo, mismo que aplican una vez que han realizado la discretización en el tiempo. Para obtener los resultados correspondientes de $Ra = 10^4$ utilizaron una malla de $\frac{1}{16}$ y $\Delta t = 0.001$, a partir de lo cual reportan el número de Nusselt global $\overline{Nu} = 2.388$, mientras que en el presente trabajo se obtuvo que el número de Nusselt es $\overline{Nu} = 2.372$, lo que representa una diferencia menor del 1%. Por otra parte, con el esquema numérico que utilizaron señalan que alcanzan el estado estacionario en un tiempo $T_{ee} = 0.6711$ mientras que nosotros obtuvimos un valor de

$T_{ee} = 0.19$. Como complemento de la validación en cavidades cuadradas, comparamos también nuestros resultados con los reportados por Shu y Wee. [5] y Wan et al. [27], en estos trabajos no se reporta el tiempo para el cual se alcanza el estado estacionario, sin embargo el valor del números de Nusselt global que se reporta en el primer trabajo es de $\overline{Nu} = 2.243$ mientras que en el segundo es de $\overline{Nu} = 2.254$, lo que en ambos casos representa una diferencia menor al 10% con respecto al valor que reportamos en este trabajo; en relación con las líneas de corriente y las isotermas que reportan estos autores, éstas concuerdan bastante bien con las que se muestran en esta tesis.

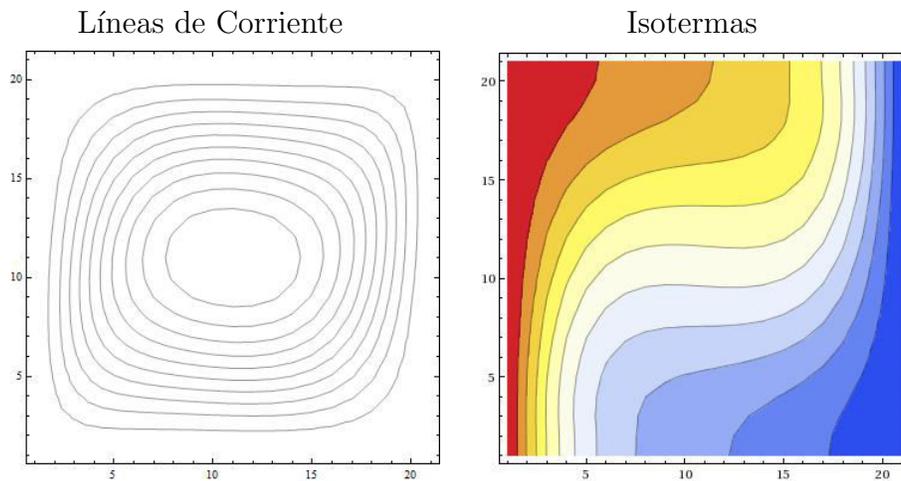


Figura 4.2: $Ra = 10^4$, $h = \frac{1}{20}$, $\Delta t = 10^{-4}$

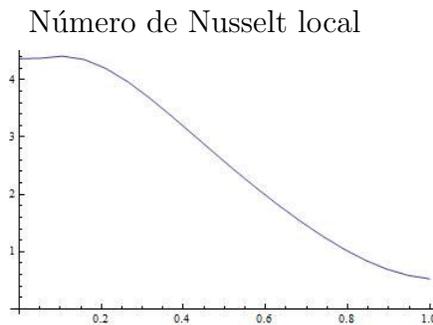


Figura 4.3: $Ra = 10^4$, $h = \frac{1}{20}$, $\Delta t = 10^{-4}$

Al aumentar el número de Rayleigh hasta $Ra = 10^5$, se requirió refinar la malla y el paso de tiempo, por lo que usamos $h = \frac{1}{50}$ y $\Delta t = 10^{-5}$. La Figura 4.4 muestra el flujo de estado estacionario, el cual se presenta en $T_{ee}=0.10$. Como se observa, las líneas de corriente siguen formando una gran celda que rota en sentido negativo, sin embargo hacia el centro de la misma aparecen dos pequeñas celdas que giran ambas en la misma dirección que la mayor, además ha aumentado la concentración de las líneas de corriente cerca de las paredes verticales, en comparación con las del caso anterior, y muestran deformaciones cerca de las paredes horizontales. Las isothermas también presentan una concentración más notoria cerca de la esquina inferior izquierda (así como en la esquina superior derecha), que se mantiene a lo largo de casi toda la pared caliente, por ello esperamos una transferencia de calor más alta que la que se obtuvo para $Ra = 10^4$. Esto último, se relaciona perfectamente con la gráfica del número de Nusselt local, Figura 4.5. Si bien, los resultados obtenidos en este caso muestran gran similitud con los reportados por Nicolás y Bermúdez [6], así como por Shu y Wee [5], existen algunas diferencias en el número de Nusselt que reportan ellos ($\overline{Nu} = 4.946$ los primeros y $\overline{Nu} = 4.519$ los segundos) y el obtenido en el presente trabajo es $\overline{Nu} = 4.741$, sin embargo estas diferencias son menores al 5%.

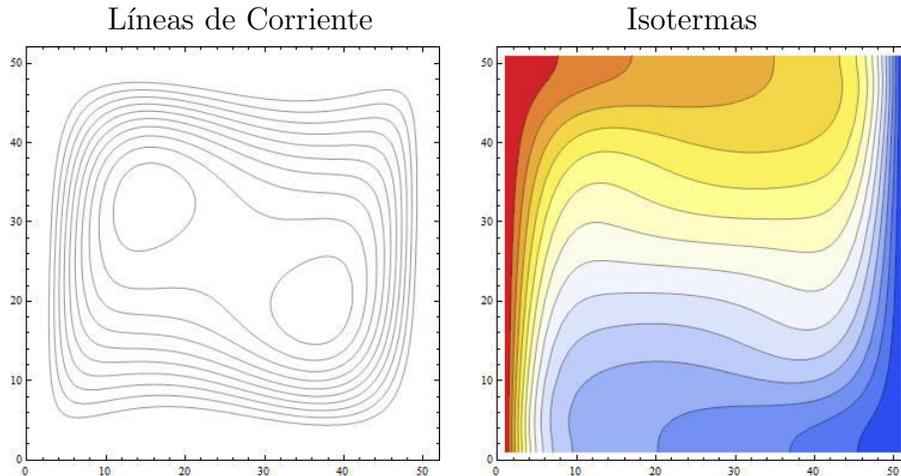


Figura 4.4: $Ra = 10^5$, $h = \frac{1}{50}$, $\Delta t = 10^{-5}$

Número de Nusselt local

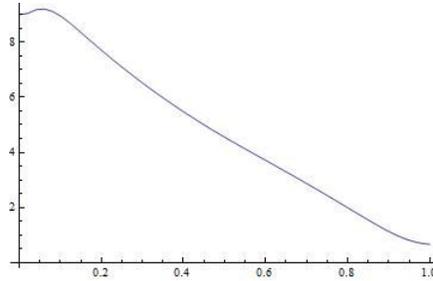


Figura 4.5: $Ra = 10^5$, $h = \frac{1}{50}$, $\Delta t = 10^{-5}$

La Tabla 1 condensa los valores mínimos de la función de corriente $\psi_{mín}$, el número de Nusselt global \overline{Nu} y el tiempo para alcanzar el estado estacionario T_{ee} , obtenidos para $Ra = 10^4$ y $Ra = 10^5$ en la cavidad unitaria.

Tabla 1: Resultados numéricos para flujos térmicos en la cavidad unitaria

Ra	$\psi_{mín}$	\overline{Nu}	T_{ee}
10^4	-9.74	2.372	0.19
10^5	-14.67	4.741	0.10

Observamos de la Tabla 1 que al incrementar el número de Rayleigh la magnitud de la función de corriente crece, lo cual indica que el movimiento del fluido aumenta, así como también lo hace la transferencia de calor, sin embargo el tiempo para alcanzar el estado estacionario disminuye.

Al aumentar el aspecto geométrico hasta $A=2$, para $Ra=10^4$, con una una malla $h_x \times h_y = \frac{1}{20} \times \frac{2}{40}$ y un paso de tiempo $\Delta t=10^{-5}$, el flujo de estado estacionario se alcanzó cuando $T_{ee}=1.80$. Como puede apreciarse de la Figura 4.6, las líneas de corriente e isothermas muestran un comportamiento similar al caso de cavidad cuadrada ($A=1$), para el mismo valor del número de Rayleigh, es decir las líneas de corriente forman una única celda que rota en dirección negativa, solo que ésta es más alargada; de manera similar, las isothermas se encuentran más cerca unas de otras en la esquina inferior izquierda y se alejan entre sí al ascender sobre la pared caliente, por lo que la transferencia de calor sobre dicha pared será mayor hacia el fondo, y disminuye al ascender

sobre ella, lo cual se confirma con la gráfica del número de Nusselt global, Figura 4.7.

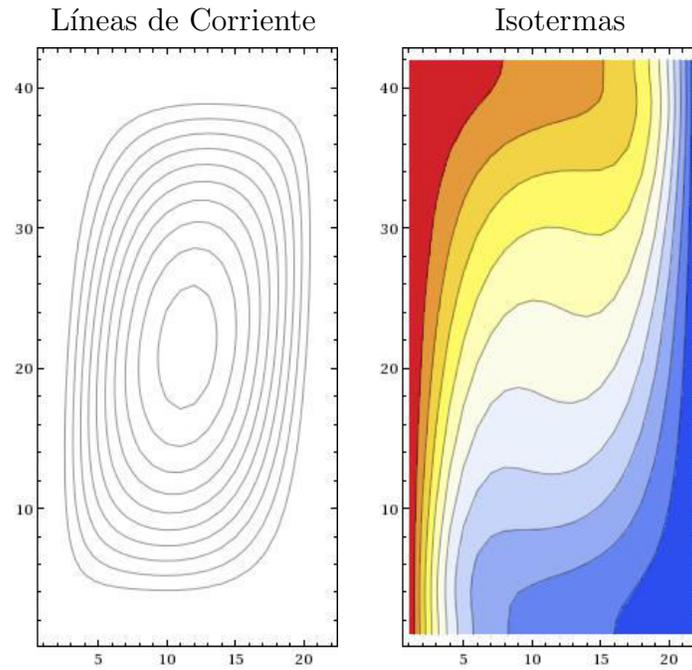


Figura 4.6: $Ra = 10^4$, $h_x \times h_y = \frac{1}{20} \times \frac{2}{40}$, $\Delta t = 10^{-5}$

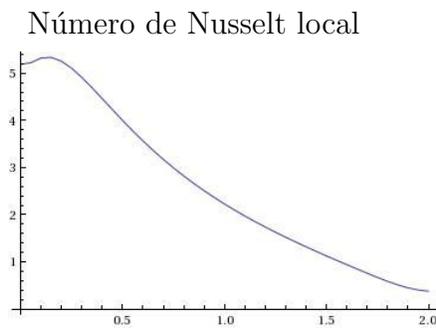


Figura 4.7: $Ra = 10^4$, $h_x \times h_y = \frac{1}{20} \times \frac{2}{40}$, $\Delta t = 10^{-5}$

Cuando $A=2$ y $Ra=10^5$, se empleó una malla dada por $h_x \times h_y = \frac{1}{64} \times \frac{2}{128}$ y un paso de tiempo $\Delta t=10^{-5}$, a partir de lo cual, se obtuvo el flujo de estado

estacionario que se muestra en la Figura 4.8 para $T_{ee}=0.83$. Nuevamente el comportamiento de las líneas de corriente e isothermas es muy parecido al caso de la cavidad unitaria para el mismo valor de número Rayleigh. Tanto las líneas de corriente como las isothermas han aumentado su concentración cerca de las paredes verticales de la cavidad, y podemos observar que las líneas de corriente forman una gran celda alargada que ocupa toda la cavidad. Hacia el centro de esta celda puede apreciarse que algunos contornos se han separado formado dos subceldas que giran en la misma dirección que la mayor. Por otro parte, la mayor cercanía entre las isothermas a lo largo de casi toda la pared caliente sugieren una mayor transferencia de calor sobre dicha pared comparada con la que se obtuvo para $Ra = 10^4$, tal como lo refleja la gráfica del número de Nusselt local, Figura 4.9. Los resultados para la cavidad con aspecto geométrico $A = 2$ son comparados principalmente con los obtenidos por Nicolás y Bermúdez [6], notando que hay gran similitud en los patrones de la función de corriente y en las isothermas, además el número de Nusselt que reportan es $\overline{Nu} = 4.62$, mientras que nosotros obtuvimos el valor de $\overline{Nu} = 4.33$, lo cual representa una diferencia menor al 10 %.

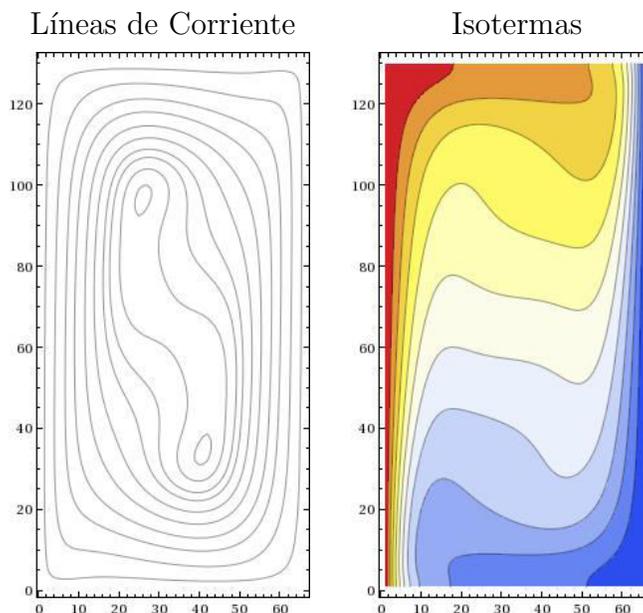


Figura 4.8: $Ra = 10^5$, $h_x \times h_y = \frac{1}{64} \times \frac{2}{128}$, $\Delta t = 10^{-5}$

Número de Nusselt local

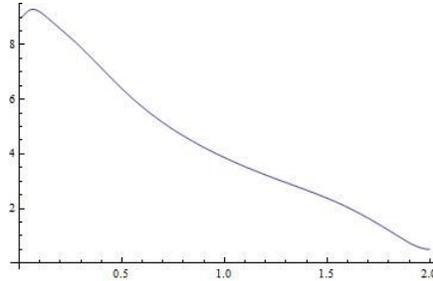


Figura 4.9: $Ra = 10^5$, $h_x \times h_y = \frac{1}{64} \times \frac{2}{128}$, $\Delta t = 10^{-5}$

En la Tabla 2, se reporta el valor mínimo para la función de corriente $\psi_{mín}$, el número de Nusselt global \overline{Nu} , así como el tiempo para alcanzar el estado estacionario T_{ee} , estos resultados numéricos corresponden a los diferentes valores de números de Rayleigh, en una cavidad con aspecto $A=2$.

Tabla 2: Resultados numéricos para flujos térmicos en la cavidad rectangular ($A = 2$)

Ra	$\psi_{mín}$	\overline{Nu}	T_{ee}
10^4	-17.74	2.28	1.80
10^5	-27.50	4.33	0.83

Los resultados numéricos de la Tabla 2, nuevamente indican que, de manera similar al caso de la cavidad cuadrada, el movimiento del fluido y la transferencia de calor aumentan cuando el valor de número de Rayleigh se incrementa, pero disminuye el tiempo para alcanzar el estado estacionario. Asimismo de las Tablas 1 y 2 podemos concluir que, al fijar el valor del número de Rayleigh y aumentando el aspecto geométrico se incrementa el movimiento del fluido, así como el tiempo para alcanzar el estado estacionario, pero disminuye la transferencia de calor.

4.2. Caso Isotérmico

Los experimentos numéricos se realizaron con números de Reynolds moderados, en el rango $400 \leq Re \leq 4000$, en una cavidad rectangular con aspecto geométrico $A \leq 2$. Para este caso, las condiciones iniciales de la velocidad y de vorticidad están dadas por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ y $\omega(\mathbf{x}, 0) = 0$, mientras que las condiciones de frontera son:

$$\mathbf{u}(0, y) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(a, y) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, b) = \mathbf{0},$$

$$\omega(0, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \omega(a, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=a}, \quad \omega(x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \omega(x, b) = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b}.$$

La Figura 4.2 esquematiza las condiciones iniciales y de frontera del problema

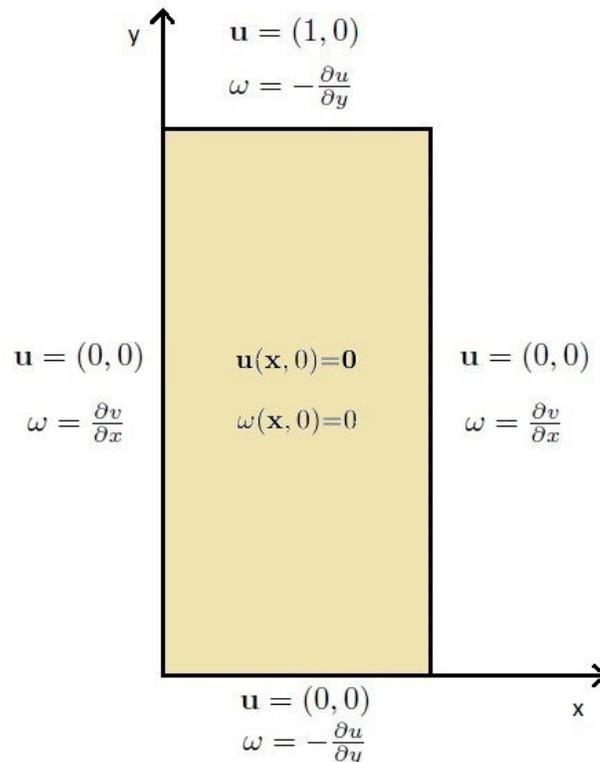


Figura 4.10: Condiciones iniciales y de frontera para el caso isotérmico

Los resultados que mostramos para el caso de flujos isotérmicos, se comparan principalmente con los obtenidos por Schreiber y Keller [11] y por Ghia et al. [10], quienes utilizan conjuntos de contornos con valores específicos, los cuales se presentan a continuación, y son los mismos que utilizamos para nuestros resultados.

Los conjuntos **cSK** y **vSK** involucran los valores de las líneas de corriente y de los contornos de vorticidad, respectivamente, empleados por Schreiber y Keller [11]

$$\mathbf{cSK} = \{-0.11, -0.10, -0.08, -0.06, -0.04, -0.02, -0.01, -0.00001, 0.000001, 0.00001, 0.0001, 0.001, 0.002\},$$

$$\mathbf{vSK} = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\},$$

asimismo, los conjuntos **cG** y **vG** corresponden a los valores empleados por Ghia et al. [10] para graficar las líneas de corriente en el primer caso y los contornos de vorticidad en el segundo

$$\mathbf{cG} = \{-1.0 \times 10^{-10}, -1.0 \times 10^{-7}, -1.0 \times 10^{-5}, -1.0 \times 10^{-4}, -0.01, -0.03, -0.05, -0.07, -0.09, -0.1, -0.11, -0.115, -0.1175, 1.0 \times 10^{-8}, 1.0 \times 10^{-7}, 1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}, 5.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}, 1.5 \times 10^{-3}, 3.0 \times 10^{-3}\}$$

$$\mathbf{vG} = \{-3, -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

En las Figuras 4.11 y 4.12 se muestran los resultados del flujo de estado estacionario ($T_{ee} = 33.46$) que se obtiene para $Re = 400$ en la cavidad unitaria ($A = 1$), utilizando un tamaño de malla dada por $h = \frac{1}{320}$, y un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-3}$. En la Figura 4.11 se muestran las líneas de corriente y de vorticidad utilizando los conjuntos de valores **cSK** y **vSK** dados por Schreiber y Keller [11], y de manera similar, la Figura 4.12 muestra los respectivos resultados empleando los conjuntos de valores **cG** y **vG** utilizados por Ghia et al. [10]. A partir de ambas Figuras 4.11 y 4.12, y recordando que el mecanismo que origina el movimiento del fluido, es debida a la velocidad horizontal en la tapa, la cual es igual a uno, podemos deducir que el vórtice primario que aparece en las líneas de corriente, en el centro de la cavidad, gira en dirección de las manecillas del reloj, mientras que los vórtices secun-

darios que se ubican en la parte inferior giran en en dirección contraria de como lo hace el vórtice primario, es decir en sentido positivo y por lo tanto los correspondientes valores de las líneas de corriente serán positivos. Lo anteriormente señalado concuerda con los valores mínimo y máximo respectivos de la función de corriente que aparecen en la Tabla 3.

Por otra parte, los isocontornos de vorticidad se encuentran un poco alejados del centro, con una actividad más intensa hacia las paredes de la cavidad, particularmente en las esquinas superiores asociadas con la tapa deslizante que es la causante del movimiento al fluido.

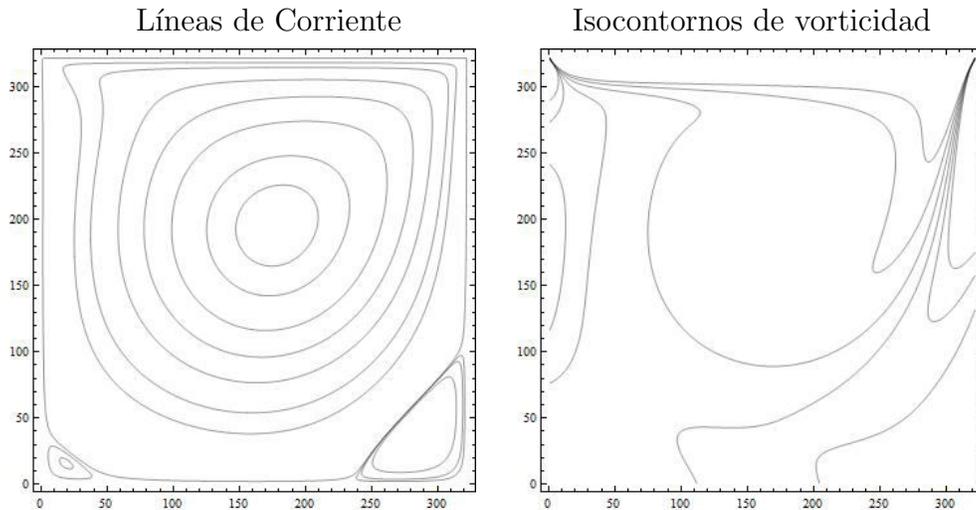


Figura 4.11: $Re = 400$, $h = \frac{1}{320}$, $\Delta t = 10^{-3}$

Comparando los resultados de la Figura 4.11 con los que muestra Schreiber y Keller [11], se observa que obtenemos el mismo número de vórtices (uno primario y dos secundarios) que los que presentan dichos autores, y que cada uno de estos vórtices tiene el mismo número de contornos que los obtenidos por ellos. Si bien existen algunas diferencias en las líneas de corriente, éstas son mínimas y están asociadas básicamente con el tamaño del contorno más interno tanto del vórtice primario como del subvórtice que se ubica en la esquina inferior izquierda, esto es, en nuestros resultados el contorno más interno del vórtice principal es ligeramente más grande, y el del subvórtice inferior izquierdo es un poco más pequeño que los respectivos mostrados por

Schreiber y Keller [11]. En cuanto a los isocontornos de vorticidad, no se observan diferencias perceptibles con aquellas mostradas por Schreiber y Keller [11], es decir, hay buena concordancia entre ambos resultados.

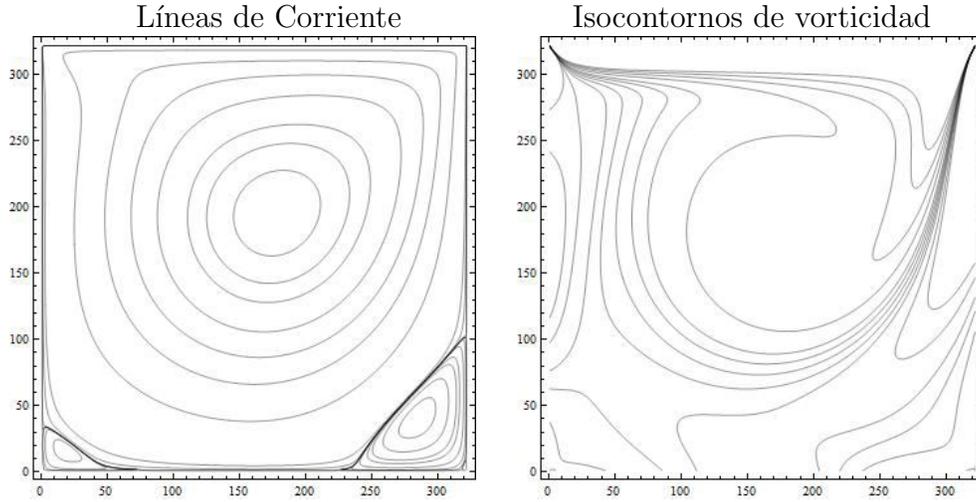


Figura 4.12: $Re = 400$, $h = \frac{1}{320}$, $\Delta t = 10^{-3}$

Por otra parte, al comparar la Figura 4.12 con los resultados mostrados por Ghia, se puede notar que nuevamente existe una pequeña diferencia en el tamaño del contorno central del vórtice primario, así como en el contorno más interno del vórtice secundario izquierdo en las líneas de corriente, mientras que los isocontornos de vorticidad prácticamente no muestran diferencias. Respecto a los valores numéricos de la función de corriente, Ghia et al. [10] reportan el valor de $\psi_{mín} = -0.113$ y $\psi_{máx} = 6.42 \times 10^{-4}$ mientras que Schreiber y Keller [11] obtienen $\psi_{mín} = -0.112$ y $\psi_{máx} = 6.44 \times 10^{-4}$ en comparación con los alcanzados en el presente trabajo, $\psi_{mín} = -0.115$ y $\psi_{máx} = 6.0 \times 10^{-4}$, lo cual representa una diferencia menor al 10%.

Adicionalmente Gupta y Kalita [28], quienes resolvieron el problema estacionario mediante un método de gradiente biconjugado, obtienen resultados similares a los presentados en esta tesis para las líneas de corriente e isocontornos vorticidad con la diferencia de que consideran un conjunto mayor de contornos que los empleados aquí y reportan $\psi_{mín} = -0.113$ y $\psi_{máx} = 6.48 \times 10^{-4}$.

Las Figuras 4.13 y 4.14 muestran el flujo de estado estacionario, el cual se alcanza en $T_{ee} = 42.73$, referente al número de Reynolds $Re = 1000$, utilizando un tamaño de malla más fino y paso de tiempo menor en comparación al caso anterior, dados por $h = \frac{1}{640}$, y $\Delta t = 10^{-4}$. En estos resultados utilizamos los valores de los contornos dados por Ghia et al. y Schreiber y Keller (para el resultado de la Figura 4.13 se utilizaron los contornos **cSK** y **vSK**, y para la Figura 4.14 los de **cG** y **vG**). Nuevamente las líneas de corriente muestran un vórtice central y dos secundarios, como en el caso de $Re = 400$, pero cada uno con mayor cantidad de ellas. Los vórtices secundarios son un poco más grandes que los obtenidos para este último caso, mientras que los isocontornos de vorticidad muestran un mayor desarrollo y se han alejado un poco del centro de la cavidad. Se observa que existen pequeñas diferencia entre las líneas de corriente que se reportan en la Figura 4.13 y las que muestran Schreiber y Keller [11], esto es, el contorno interno del vórtice principal en las líneas de corriente, que obtenemos en el presente trabajo es ligeramente más grande; no se perciben diferencias entre los isocontornos de vorticidad. Respecto a los valores numéricos de la función de corriente, Schreiber y Keller [11] reportan $\psi_{mín} = -0.118$ y $\psi_{máx} = 1.7 \times 10^{-3}$.

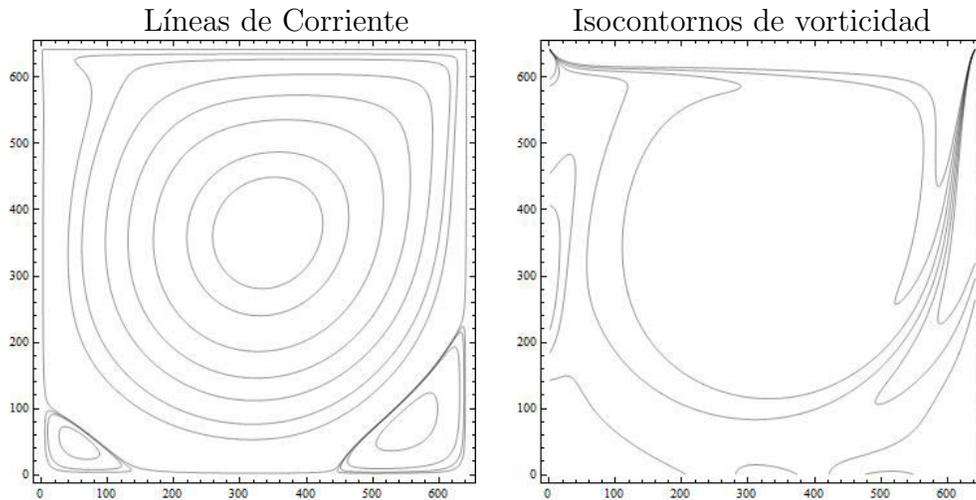


Figura 4.13: $Re = 1000$, $h = \frac{1}{640}$, $\Delta t = 10^{-4}$

Por otra parte, se observaron diferencias mínimas entre los resultados de la función de corriente mostrados en la Figura 4.14 con los respectivos obtenidos por Ghia et al. [10], las cuales están en relación con el tamaño del

contorno más interno del vórtice central, que en nuestro caso es ligeramente más grande; los isocontornos de vorticidad no muestran diferencias perceptibles. Los valores mínimo y máximo de la función de corriente reportados por Ghia, $\psi_{mín} = -0.116$ y $\psi_{máx} = 1.75 \times 10^{-3}$, nuevamente muestran una diferencia menor al 10 % en comparación con los que obtuvimos en este trabajo, $\psi_{mín} = -0.119$ y $\psi_{máx} = 1.6 \times 10^{-3}$. Asimismo, Gupta y Kalita [28] muestran resultados parecidos aunque, como ya se mencionó antes, utilizan una mayor cantidad de contornos con valores no específicos, y reportan los siguientes valores críticos para la función de corriente $\psi_{mín} = -0.117$ y $\psi_{máx} = 1.7 \times 10^{-3}$.

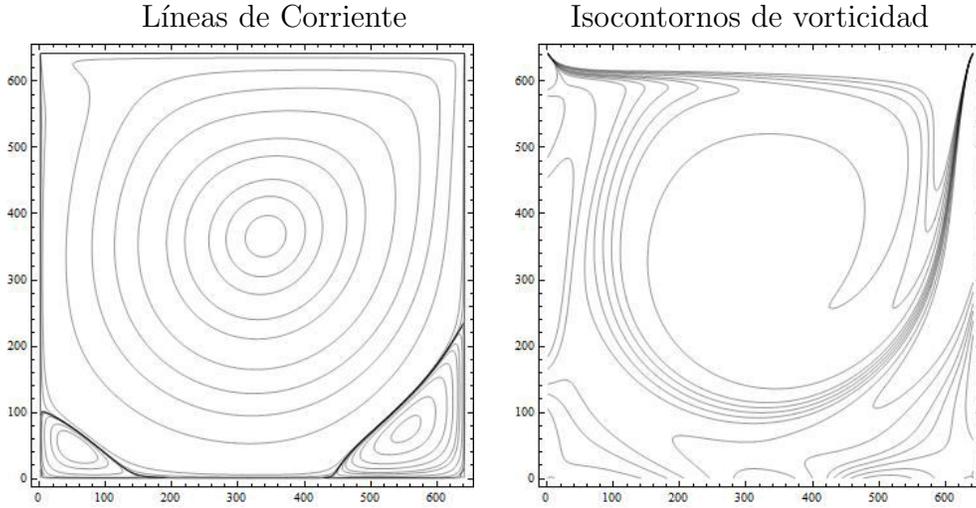


Figura 4.14: $Re = 1000$, $h = \frac{1}{640}$, $\Delta t = 10^{-4}$

Para el flujo que se muestra en la Figura 4.15 para $Re=4000$, en el estado estacionario $T_{ee}=118.65$, hubo necesidad de realizar un mayor refinamiento de malla, por lo cual se consideró $h=\frac{1}{881}$ y un paso de tiempo $\Delta t=5 \times 10^{-5}$. Los resultados se obtuvieron considerando únicamente el conjunto de valores dados por Schreiber y Keller [11] (**cSK**, y **vSK**) ya que ni Ghia et al. [10] ni Gupta y Kalita [28] presentan resultados para este caso. Como se observa en las líneas de corriente, aparece un nuevo vórtice, de manera que además del primario en el centro de la cavidad hay tres secundarios, dos en la parte inferior y uno más en la parte superior izquierda de la cavidad, mientras que los isocontornos de vorticidad se han replegado hacia la frontera de la cavidad donde tienen mayor actividad, esto debido a que el fluido es menos viscoso

para este número de Reynolds. Los resultados que mostramos tienen ligeras diferencias, comparados con los reportados por Schreiber y Keller; en el caso de las líneas de corriente, estas diferencias se observan principalmente en los contornos internos de los vórtices primario y secundario izquierdo, los cuales son un poco más grandes que los obtenidos por ellos y, de igual manera, los isocontornos de vorticidad que se encuentran cerca de la tapa están menos alejados de la pared izquierda que los mostrados por estos autores. Los valores críticos que reportan Schreiber y Keller para este caso son $\psi_{mín} = -0.112$ y $\psi_{máx} = 2.8 \times 10^{-3}$.

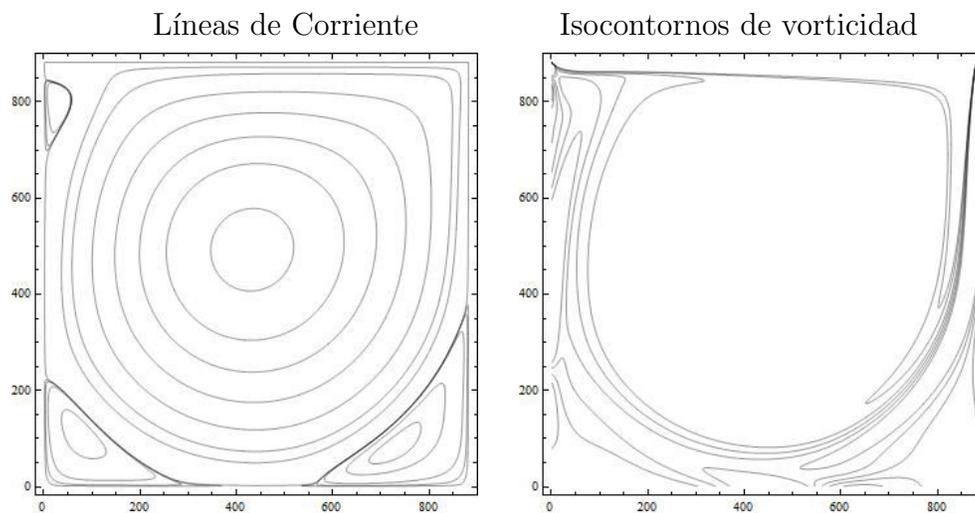


Figura 4.15: $Re = 4000$, $h = \frac{1}{881}$, $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$

Los correspondientes valores numéricos de $\psi_{mín/máx}$, así como el tiempo T_{ee} obtenidos para estos tres números de Reynolds $Re = 400$, $Re = 1000$ y $Re = 4000$ en la cavidad unitaria se condensan en la siguiente tabla.

Tabla 3: Resultados numéricos para flujos isotérmicos en la cavidad unitaria

Re	$\psi_{mín/máx}$	T_{ee}
400	$-0.115/6.0 \times 10^{-4}$	33.46
1000	$-0.119/1.6 \times 10^{-3}$	42.73
4000	$-0.133/4.4 \times 10^{-3}$	118.65

Los valores numéricos señalados en la Tabla 3 para la cavidad unitaria, indican que el movimiento del fluido es más intenso, y el tiempo para alcanzar el estado estacionario aumenta conforme se incrementa el número de Reynolds.

A continuación se reportan resultados en la cavidad rectangular, con aspecto geométrico $A=2$, para números de Reynolds $Re=400$ y $Re=1000$. Los resultados serán comparados principalmente con los de Nicolás y Bermúdez [29], Gupta y Kalita [28] y Goyon [14], ya que ni Schreiber y Keller, ni Ghia et al. obtienen resultados para este caso.

Los resultados mostrados en la Figura 4.16, para $Re=400$, con $h_x \times h_y = \frac{1}{320} \times \frac{2}{640}$ y $\Delta t = 10^{-4}$, se obtuvieron considerando los contornos \mathbf{cG} y \mathbf{vG} . Como se observa, las líneas de corriente presentan dos vórtices primarios, uno en la mitad superior, el cual se mueve en dirección negativa, y el otro en la mitad inferior el cual gira en dirección contraria; asimismo se aprecia en cada una de las esquinas inferiores subvórtices bien definidos, rotando en dirección negativa. En el vórtice superior primario, se aprecian claramente ocho líneas de corriente y en el vórtice inferior aparecen nueve. Nicolás y Bermúdez [29] reportan resultados muy similares aunque no utilizan los mismos valores empleados por nosotros para las líneas de corriente y los isocontornos de vorticidad, a partir de ello obtienen ocho líneas de corriente en el inferior y nueve en el superior, además obtienen solo un subvórtice en la esquina inferior izquierda el cual es más grande que el que aquí presentamos y el contorno más interno del vórtice superior está más abierto que el obtenido en este trabajo. En relación a la vorticidad, si bien ellos muestran una cantidad ligeramente mayor de isocontornos, no se aprecian diferencias notables. Por su parte, Gupta y Kalita [28] solo muestran resultados de las líneas de corriente con un número considerablemente mayor de contornos, con valores no especificados, similares a los mostrados en la Figura 4.16; en sus resultados también se aprecia claramente la existencia de los subvórtices en las esquinas inferiores, tal como se reporta en esta tesis. Finalmente los resultados obtenidos por Goyon [14], quien utiliza los mismos conjuntos de contornos \mathbf{cG} y \mathbf{vG} que empleamos aquí, muestran algunas diferencias importantes tanto en las líneas de corriente como en los isocontornos de vorticidad; en el caso de las líneas de corriente, apenas son perceptibles los subvórtices de las esquinas inferiores, además en los vórtices primarios se obtiene una cantidad menor de contornos, mismos que lucen menos desarrollados que los mostrados aquí,

y que parecen tener relación con las oscilaciones que muestran varios de los isocontornos de vorticidad.

En cuanto a los valores críticos de la función de corriente obtenidos en este trabajo: $\psi_{\min} = -0.116$ y $\psi_{\max} = 8.6 \times 10^{-3}$, Gupta y Kalita reportan $\psi_{\min} = -0.113$ y $\psi_{\max} = 8.021 \times 10^{-3}$, mientras que Goyon obtiene $\psi_{\min} = -0.1097$ y $\psi_{\max} = 8.06 \times 10^{-3}$, sin embargo el error porcentual en todos los casos es menor al 10 %.

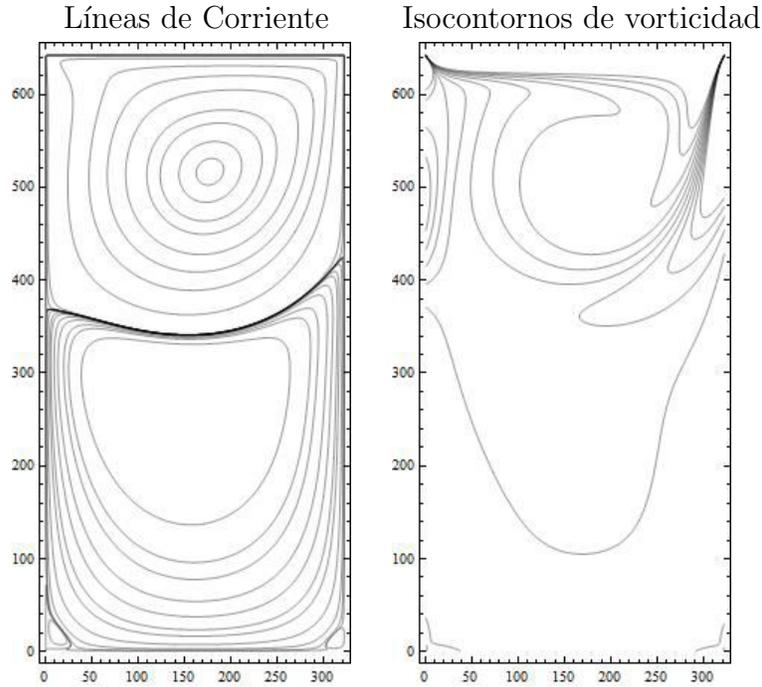


Figura 4.16: $Re = 400$, $h_x \times h_y = \frac{1}{320} \times \frac{2}{640}$, $\Delta t = 10^{-4}$

Por otra parte la Figura 4.17 muestra el flujo para $Re = 1000$, con $h_x \times h_y = \frac{1}{600} \times \frac{2}{1200}$ y $\Delta t = 10^{-5}$, observamos que la actividad de las líneas de corriente y los isocontornos de vorticidad se intensifican en la parte media inferior, esto es, comparado con el caso anterior, debido a que el flujo es menos viscoso para este número de Reynolds. En las líneas de corriente nuevamente aparecen dos vórtices primarios y dos subvórtices en la misma ubicación que el caso anterior. Nicolás y Bermúdez [16] reportan contornos mas cerrados en el vórtice primario superior y un vórtice inferior izquierdo mas pequeño

que el que aquí se muestra, respecto a los isocontornos de vorticidad no se presentan diferencias perceptibles. Por su parte Gupta y Kalita [28] quienes reportan vórtices semejantes a los que nosotros mostramos, con la diferencia notable solo en el subvórtice inferior izquierdo el cual es ligeramente más pequeño. Finalmente Goyon [14] presenta contornos más cerrados en el vórtice primario superior y subvórtices más pequeños que los que en este trabajo se muestran, por su parte los isocontornos de vorticidad lucen similares a los que nosotros presentamos.

Los valores críticos que reportan Gupta y Kalita [28] son $\psi_{mín} = -0.1182$ y $\psi_{máx} = 0.0125$, mientras que Goyon [14] reporta $\psi_{mín} = -0.1137$ y $\psi_{máx} = 1.12 \times 10^{-2}$, todos los cuales comparados con los que aquí obtenemos $\psi_{mín} = -0.121$ y $\psi_{máx} = 1.3 \times 10^{-2}$ muestran una diferencia menor al 10 %.

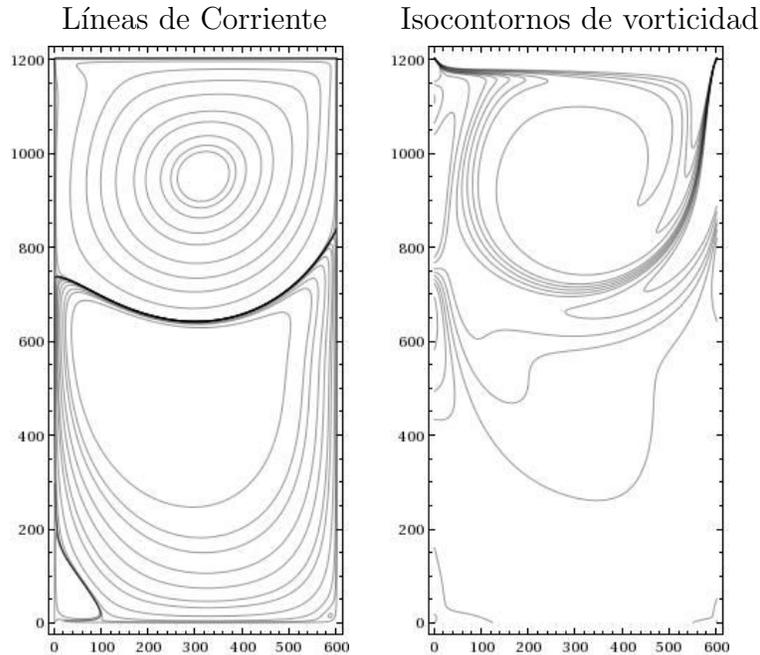


Figura 4.17: $Re = 1000$, $h_x \times h_y = \frac{1}{600} \times \frac{2}{1200}$, $\Delta t = 10^{-5}$

En la Tabla 4 se muestran los resultados numéricos para $Re=400$ y $Re=1000$, en una cavidad rectangular de aspecto geométrico $A=2$, tales como los valores máximos y mínimos de la corriente $\psi_{mín/máx}$, así como el tiempo

T_{ee} en el cual se alcanza el estado estacionario.

Tabla 4: Resultados numéricos para flujos isotérmicos en la cavidad rectangular ($A = 2$)

Re	$\psi_{mín/máx}$	T_{ee}
400	$-0.116/8.6 \times 10^{-3}$	45.36
1000	$-0.121/1.3 \times 10^{-2}$	55.52

De los valores numéricos de la función de corriente que se muestran en la Tabla 4, se observa que al incrementar el número de Reynolds, lo que significa disminuir la viscosidad del fluido, el movimiento del fluido y el tiempo para alcanzar el estado estacionario aumentan.

A partir de los resultados mostrados en las Tablas 3 y 4 se deduce que un aumento en el aspecto geométrico, fijando el número de Reynolds, implica un movimiento ligeramente mayor del fluido y un notorio aumento en el tiempo para alcanzar el estado estacionario.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo presentamos un esquema numérico para tratar el flujo de fluidos térmicos o isotérmicos, viscosos, incompresibles y dependientes del tiempo, en una cavidad rectangular cerrada y acotada. Las ecuaciones que gobiernan este tipo de flujos son descritas en términos de las variables velocidad y vorticidad (además de la temperatura en el caso de flujos térmicos), y son resueltas considerando los casos de convección natural para flujos térmicos, y la cavidad con tapa deslizante para flujos isotérmicos. Los resultados, obtenidos para aspecto geométrico $A \leq 2$ y valores moderados de Ra o de Re , mostraron ser satisfactorios ya que se observó buena concordancia con los obtenidos por otros autores.

A partir de los resultados obtenidos, se describen a continuación las principales conclusiones:

1) Independientemente del tipo de fluido (térmico o isotérmico) involucrado, se obtuvieron flujos de estado estacionario para valores $A \leq 2$ del aspecto geométrico y números de Rayleigh $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ o de Reynolds $400 \leq Re \leq 4000$, respectivamente.

2) En el caso de flujos de convección natural se observó que, al fijar el aspecto geométrico de la cavidad e incrementar el número de Rayleigh, el movimiento del fluido es más intenso y la transferencia de calor aumenta pero disminuye el tiempo para alcanzar el estado estacionario. Por el contrario, si lo que se mantiene fijo es el número de Rayleigh y se aumenta el aspecto geométrico el movimiento del fluido también se incrementa y aumenta el

tiempo para alcanzar el estado estacionario, sin embargo la transferencia de calor disminuye.

3) En el caso de la cavidad con tapa deslizable, un incremento en el número de Reynolds o en el aspecto geométrico de la cavidad conduce a un mayor movimiento del fluido e incrementa el tiempo requerido para que el flujo alcance el estado estacionario.

4) Por otra parte, se observó que las mallas empleadas para el caso de flujos isotérmicos requieren de un fuerte refinamiento, y por lo tanto de un paso de tiempo más pequeño, a medida que Re aumenta, comparado con lo que sucede para el caso de flujos térmicos cuando Ra aumenta.

5) Si bien lo señalado en el punto anterior pareciera ser una característica común a otros esquemas y formulaciones (Shu y Wee [5] y Baéz [30] en variables primarias, Goyon [14] y Gupta y Kalita [28] en variables secundarias y Nicolás y Bermúdez [29] en variables velocidad-vorticidad), el refinamiento de la malla fué mas fuerte para flujos isotérmicos.

Cabe mencionar, que la principal aportación del presente trabajo consiste en presentar un esquema numérico para flujos térmicos e isotérmicos basados en un método directo, el cual evita la no linealidad y el acoplamiento entre las ecuaciones del sistema. Así como también, presentamos una estrategia nueva para resolver los sistemas algebraicos correspondientes utilizando el método de Jacobi por bloques de forma paralela.

Finalmente, consideramos que un trabajo a futuro consiste en proponer ajustes al esquema numérico, en cavidades rectangulares, que permitan utilizarlo con valores moderados y grandes de Ra o Re , en flujos térmicos o isotérmicos respectivamente, sin tener que utilizar mallas demasiado finas, así como explorar con un algoritmo de predicción corrección, el cual a mostrado mejorar el tiempo de procesamiento y de convergencia, y posteriormente aplicarlo a otro tipo de situaciones, como por ejemplo al caso de flujos de convección mixta.

Apéndice A

Ecuación de tipo transporte para la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$

Aplicamos el rotacional a la ecuación de momento

$$\mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e}, \quad (a) \quad (\text{A.1})$$

usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) \times \mathbf{u}$$

y considerando que el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ se define como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u},$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\omega}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \nabla \times (\theta \mathbf{e}),$$

Considerando que $\nabla \times \nabla p = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de tipo transporte para la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega}_t - \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \nabla \times (\theta \mathbf{e}).$$

Apéndice B

Problema discreto con $h_x \neq h_y$ y contribución de los términos no lineales

El problema discreto cuando $h_x \neq h_y$ y aproximando los gradientes de ω y θ que aparecen respectivamente en los términos $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ en el nivel de tiempo $(n+1)\Delta t$ toma la forma:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha u_{ij} - \left(\frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 2u_{ij}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1} + u_{ij+1} - 2u_{ij}}{h_y^2} \right) &= 2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h_y} \\
 &\quad - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h_y} + f_u \quad (a) \\
 u|_{\Gamma} &= u_{cf} \\
 \alpha v_{ij} - \left(\frac{v_{i-1j} + v_{i+1j} - 2v_{ij}}{h_x^2} + \frac{v_{ij-1} + v_{ij+1} - 2v_{ij}}{h_y^2} \right) &= -2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h_x} \\
 &\quad + \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} + f_v \quad (b) \\
 v|_{\Gamma} &= v_{cf} \\
 \alpha \omega_{ij} - \gamma \left(\frac{\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} - 2\omega_{ij}}{h_x^2} + \frac{\omega_{ij-1} + \omega_{ij+1} - 2\omega_{ij}}{h_y^2} \right) + u_{ij} \left(\frac{\omega_{i+1j} - \omega_{i-1j}}{2h_x} \right) \\
 &\quad + v_{ij} \left(\frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij-1}}{2h_y} \right) = \\
 &\quad \frac{Ra}{PrRe^2} \left[2 \left(\frac{\theta_{i+1j}^n - \theta_{i-1j}^n}{2h_x} \right) - \frac{\theta_{i+1j}^{n-1} - \theta_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} \right] + f_{\omega} \quad (c) \\
 \omega|_{\Gamma} &= \omega_{cf} \\
 \alpha \theta_{ij} - \varsigma \left(\frac{\theta_{i-1j} + \theta_{i+1j} - 2\theta_{ij}}{h_x^2} + \frac{\theta_{ij-1} + \theta_{ij+1} - 2\theta_{ij}}{h_y^2} \right) + u_{ij} \left(\frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2h_x} \right) \\
 &\quad + v_{ij} \left(\frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2h_y} \right) = f_{\theta} \quad (d) \\
 B\theta|_{\Gamma} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (B.1)$$

de donde se obtienen matrices de tamaño $(M - 1)(N - 1) \times (M - 1)(N - 1)$, hacemos notar tres casos respecto a la estructura de esta matriz.

i) $M = N$, la matriz obtenida es de tamaño $(N - 1)^2 \times (N - 1)^2$, la cual contiene $(N - 1)$ bloques sobre la diagonal, es decir la matriz consta de $(N - 1)^2$ bloques en total, donde cada bloque es una matriz de tamaño $(N - 1) \times (N - 1)$.

ii) $(M < N)$ caso donde se tiene un refinamiento en la malla sobre el eje y , obtenemos una matriz la cual contiene $(M - 1)$ bloques sobre la diagonal, donde cada bloque es de tamaño $(N - 1) \times (N - 1)$, observemos que cuanto mayor sea este refinamiento sobre el eje y , las matrices que forman los bloques son cada vez más grandes y se tendrá la misma cantidad de $(M - 1)$ bloques sobre la diagonal.

iii) $(N < M)$ caso donde el refinamiento sucediera sobre el eje x , tendremos una matriz con una cantidad mayor de bloques en la diagonal y el tamaño de cada matriz que forma el bloque sería $(N - 1) \times (N - 1)$.

En particular en el presente trabajo incluimos el caso de cavidades rectangulares verticales, donde la altura es el doble de la base, es decir en la discretización consideramos $a < b = 2a$, por lo cual para utilizar una malla uniforme, se recurrió a considerar $N = 2M$, con lo cual tenemos el caso donde $(M < N)$, por lo que las matrices para las componentes de la velocidad, tendrían la siguiente estructura

$$\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_v = \begin{pmatrix} O & P & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ P & O & P & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P & O & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P & O \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)}$$

con $M - 1$ bloques en la diagonal, todos ellos de tamaño $N - 1 \times N - 1$, donde los bloques O y P , son matrices con la siguiente estructura

$$O = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_y^2} & \alpha + \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y^2} & \alpha + \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_y^2} & \alpha + \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_x^2} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

Mientras que la matriz de ω , en este esquema, donde es dependiente del tiempo, tiene la siguiente estructura

$$A_\omega = \begin{pmatrix} Q_1 & S_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ R_1 & Q_2 & S_2 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & R_2 & Q_3 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & S_{M-2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & R_{M-2} & Q_{M-1} \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)},$$

donde los bloques Q_i son matrices tridiagonales con la siguiente estructura

$$Q_i = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & -\frac{\gamma}{h_y^2} + \frac{v_{i,1}}{2h_y} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\gamma}{h_y^2} + \frac{v_{i,2}}{2h_y} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & -\frac{\gamma}{h_y^2} + \frac{v_{i,2}}{2h_y} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,3}}{2h_x} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,N-2}}{2h_x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,N-1}}{2h_x} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

y los bloques R_i y S_i , son matrices diagonales

$$R_i = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,1}}{2h_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,2}}{2h_x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,3}}{2h_x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,N-1}}{2h_x} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$S_i = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,1}}{2h_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,2}}{2h_x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,3}}{2h_x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} + \frac{u_{i,N-1}}{2h_x} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

Por su parte la matriz asociada a la temperatura tendría la misma estructura que la matriz de ω , solo que $\gamma = \varsigma$.

Apéndice C

Problema discreto con $h_x \neq h_y$ y sin contribución de los términos no lineales

Si los gradientes en los términos no lineales $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ y $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$ se aproximan por una extrapolación lineal de los valores obtenidos en los dos niveles de tiempo previos, tendríamos el siguiente sistema discreto

$$\left. \begin{aligned}
 & \alpha u_{ij} - \left(\frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} - 2u_{ij}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1} + u_{ij+1} - 2u_{ij}}{h_y^2} \right) = 2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h_y} \\
 & \qquad - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h_y} + f_u \quad (a) \\
 & u|_{\Gamma} = u_{cf} \\
 & \alpha v_{ij} - \left(\frac{v_{i-1j} + v_{i+1j} - 2v_{ij}}{h_x^2} + \frac{v_{ij-1} + v_{ij+1} - 2v_{ij}}{h_y^2} \right) = -2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h_x} \\
 & \qquad + \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} + f_v \quad (b) \\
 & v|_{\Gamma} = v_{cf} \\
 & \alpha \omega_{ij} - \gamma \left(\frac{\omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} - 2\omega_{ij}}{h_x^2} + \frac{\omega_{ij-1} + \omega_{ij+1} - 2\omega_{ij}}{h_y^2} \right) = \frac{Ra}{PrRe^2} \left[2 \left(\frac{\theta_{i+1j}^n - \theta_{i-1j}^n}{2h_x} \right) \right. \\
 & \qquad \left. - \frac{\theta_{i+1j}^{n-1} - \theta_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} \right] - u_{ij} \left(2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h_x} - \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} \right) \\
 & \qquad - v_{ij} \left(2 \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h_y} - \frac{\omega_{ij+1}^{n-1} - \omega_{ij-1}^{n-1}}{2h_y} \right) + f_{\omega} \quad (c) \\
 & \omega|_{\Gamma} = \omega_{cf}, \\
 & \alpha \theta_{ij} - \varsigma \left(\frac{\theta_{i-1j} + \theta_{i+1j} - 2\theta_{ij}}{h_x^2} + \frac{\theta_{ij-1} + \theta_{ij+1} - 2\theta_{ij}}{h_y^2} \right) = -u_{ij} \left(2 \frac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h_x} \right. \\
 & \qquad \left. - \frac{\omega_{i+1j}^{n-1} - \omega_{i-1j}^{n-1}}{2h_x} \right) - v_{ij} \left(2 \frac{\theta_{ij+1}^n - \theta_{ij-1}^n}{2h_y} - \frac{\theta_{ij+1}^{n-1} - \theta_{ij-1}^{n-1}}{2h_y} \right) + f_{\theta} \quad (d) \\
 & B\theta|_{\Gamma} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

así, las matrices para las componentes de la velocidad permanecerían iguales a las que se presentaron en en Anexo A, y la matriz asociada a ω sería igual a la matriz asociada para θ , con el cambio respectivo de las constantes γ por ς . A continuación se muestra la matriz asociada a γ

$$\mathcal{A}_\omega = \begin{pmatrix} Q & R & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ R & Q & R & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R & Q & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & R & Q \end{pmatrix}_{(M-1)(N-1) \times (M-1)(N-1)}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & -\frac{\gamma}{h_y^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\gamma}{h_y^2} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & -\frac{\gamma}{h_y^2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{h_y^2} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_y^2} & \alpha + \frac{2\gamma}{h_x^2} + \frac{2\gamma}{h_y^2} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{h_x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{h_x^2} \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

Apéndice D

Pseudo-código del proceso de solución del problema

DATOS

M	Número de divisiones en el eje x
N	Número de divisiones en el eje y
h_x	Tamaño de paso en dirección del eje x
h_y	Tamaño de paso en dirección del eje y
re	Número de Reynolds
T	Tiempo final
M_t	Número de divisiones para el tiempo
$\Delta t = \frac{T}{M_t}$	Tamaño de paso de el tiempo
$ndt=5$	Número de subdivisiones para calcular el primer paso de tiempo
$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{ndt}$	Tamaño de paso en el tiempo para Euler

CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES PARA

u, v, ω y θ CON $\alpha = 1/\Delta t_1$

AUTORIZACIÓN LU

EL PRIMER CICLO *for* ES PARA OBTENER EL PRIMER PASO DE TIEMPO, CON EL MÉTODO DE EULER

para $i = 1$ hasta $i \leq ndt$

PARA u

Calculo del lado derecho de u , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de u

$$u^r = u^{r+1}$$

PARA v

Calculo del lado derecho de v , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de v

$$v^r = v^{r+1}$$

PARA θ

Calculo del lado derecho de θ , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de θ

$$aux = \theta^r$$

$$\theta^r = \theta^{r+1}$$

$$\theta^{r-1} = aux$$

PARA ω

Calculo del lado derecho de ω , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de ω

$$aux = \omega^r$$

$$\omega^r = \omega^{r+1}$$

$$\omega^{r-1} = aux$$

}
CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES PARA

u, v, ω y θ CON $\alpha = 3/2 * \Delta t$

REASIGNACION DE u, v, θ y ω

$$u^r = u^{r+1}$$

$$v^r = v^{r+1}$$

$$\theta^r = \theta^{r+1}$$

$$\omega^r = \omega^{r+1}$$

FACTORIZACIÓN LU

para $i = 1$ hasta $i \leq M_t$

PARA u

Calculo del lado derecho de u , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de u

$$u = u^r$$

$$u^r = u^{r+1}$$

$$u^{r-1} = aux$$

PARA v

Calculo del lado derecho de v , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de v

$$v = v^r$$

$$v^r = v^{r+1}$$

$$v^{r-1} = aux$$

PARA θ

Calculo del lado derecho de θ , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de θ

$$aux = \theta^r$$

$$\theta^r = \theta^{r+1}$$

$$\theta^{r-1} = aux$$

PARA ω

Calculo del lado derecho de ω , con las condiciones de frontera para resolver el sistema lineal

Resolvemos el sistema lineal con programación en paralelo

Reasignación de ω

$$aux = \omega^r$$

$$\omega^r = \omega^{r+1}$$

$$\omega^{r-1} = aux$$

}

PARTE DONDE SE RESUELVE ψ

CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ para ψ CON $\alpha = 3/(2 * \Delta t)$

Bibliografía

- [1] Navier C. L., Mémoire sur les lois du mouvement des uides, Mem. Acad. Sci. Inst. France, Vol. 6, (1822), pp. 380-440.
- [2] Stokes G. G., On the theories of internal friction of fluids in motion, Trans. Cambridge. Philos. Soc. Vol. 8, (1845), pp. 287-305.
- [3] Karlekar B. V. and Desmond R. M., *Engineering heat Transfer* West Publishing Company, St. Paul, Minn., (1977).
- [4] Vahl Davis. G., *Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solutions*, Int. J. Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, (1983), pp. 249-264.
- [5] Shu C. and Wee K., *Numerical simulation of natural convection in a square cavity by SIMPLE-generalized differential quadrature method*, Computers and Fluids, Vol. 31, (2001), pp. 209-226.
- [6] Nicolás, A. y Bermúdez B., *Convección natural de fluidos incompresibles y viscosos en cavidades rectangulares*, Revista Mexicana de física (2008), pp. 236-246.
- [7] Condorí M. and Duran G. *Sistema Chimenea-Concentrador Solar para Producir Convención Natural de Aire en un Secador Doméstico*, Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente . Vol. 8, (2004), pp. 349-353.
- [8] Onbasioglu H. and Egrican A., *Experimental approach to the thermal response of passive systems*, Energy Convers. Manage. Vol. 43, (2002), pp. 2053-2065.

- [9] Zamora B. and Kaiser A., *Optimum wall-to-wall spacing in solar chimney shaped channels in natural convection by numerical investigation*, Applied Thermal Engineering, Vol. 29, (2009), pp. 762-769.
- [10] Ghia U., Ghia K. and Shin C., *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method* J. Comp. Phy., Vol. 48, (1982), pp. 387-411.
- [11] Schreiber R. and Keller H., *Driven Cavity Flow by Efficient Numerical Techniques.*, Journal of Computational Physics, Vol. 49, (1983), pp. 310-333.
- [12] Karniadakis G. E., Israeli M. and Orszag S. A. *High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. of Comp. Physics, Vol. 97, (1991), pp. 414-443.
- [13] Weinan E. and Liu J. G. *Projection Method I: Convergence and numerical boundary layers*, SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), pp. 1017-1057.
- [14] Goyon O., *High Reynolds number solutions of Navier-Stokes equations using incremental unknowns*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 130 (1996), pp. 319-335.
- [15] Sahin M. and Owens R. G. *A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem -part I: high Reynolds number flow calculations.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, 42, (2003), pp. 57-77
- [16] Nicolás, A. and Bermúdez, B., *2D thermal/isothermal incompressible viscous flows.*, Int. J. for Num. Meth. in Fluids, Vol. 48, (2005), pp. 349-366.
- [17] Marchi C., Suero R. and Araki L. *The Lid-Driven Square Cavity Flow: Numerical Solution with a 1024×1024 Grid*, ABCM, Vol. 16, (2009)
- [18] Khorasanizade S. and Sousa J., *A detailed study of lid-driven cavity flow at moderate Reynolds numbers using Incompressible SPH*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 76, (2014), pp. 653-668.

- [19] Nicolás A. and Bermúdez B., *Viscous Incompressible Flows by the Velocity-Vorticity Navier-Stokes Equations*. Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 20, (2007), pp. 73–83.
- [20] Chorin A. J. and Marsden J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, N. Y., (2000)
- [21] Fusegi T. and Farouk B., *Predictions of Fluid Flow and Heat Transfer Problems by the Vorticity-Velocity Formulation of the Navier-Stokes Equations*. J. Comp. Phys, Vol. 65, (1986), pp. 227-243.
- [22] Griebel M., Dornseifer T. and Neunhoeffler T., *Numerical Simulation in Fluid Dynamics*, SIAM. Philadelphia, (1998).
- [23] Gunzburger, M. D., *Finite element methods for viscous incompressible flows: A guide to theory, practice and algorithms*, Academic Press, New York, (1989).
- [24] Glowinski, R., *Numerical Methods For NonLinear Variational Problems*, Springer-Verlag, (1984).
- [25] Burden R. L. and Faires J. D. *Numerical Analysis*. PWS, Boston, USA., (1985)
- [26] supercompu.izt.uam.mx/?q=cluster-yoltla
- [27] Wan D., Patnaik B., and Wei G., *A New Benchmark Quality Solution For The Buoyancy-Driven Cavity by Discrete Singular Convolution*, Numerical Heat Transfer, Vol. 40, (2001) pp. 199-228.
- [28] Gupta M. and Kalita J., *A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation*, Journal of Computational Physics, Vol. 207, (2005), pp. 52-68.
- [29] Nicolás A. y Bermúdez B. *Flujos Isotérmicos/Térmicos, Incompresibles y Viscosos con Formulación Velocidad-Vorticidad*, Información Tecnológica, Vol 21(3), (2010), pp. 39-49
- [30] Báez E. *Convección Natural y Transferencia de Calor en Medios Libres y Porosos*, Tesis Doctoral, U. A. M. I. (2008).