UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

El proceso cuántico de Exclusión Asimétrica: algunos estados invariantes fuera de equilibrio

Tesis que presenta
Fernando Guerrero Poblete
para obtener grado de Doctor en Ciencias
(matemáticas)

Asesor: Dr. Julio César García Corte

Jurado calificador:
Presidente: Jorge Alberto León Vázquez

Secretario: Roberto Quezada Batalla

Vocal: Julio César Garcia Corte

Vocal: Octavio Arizmendi Echegaray

Vocal: Ricardo Enrique Castro Santis

México

Julio de 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

El proceso cuántico de Exclusión Asimétrica: algunos estados invariantes fuera de equilibrio

Tesis que presenta
Fernando Guerrero Poblete
para obtener grado de Doctor en Ciencias
(matemáticas)

Asesor: Dr. Julio César García Corte

Jurado calificador:

Presidente: Jorge Alberto León Vázquez

Secretario: Roberto Quezada Batalla

Vocal: Julio César Garcia Corte

Vocal: Octavio Arizmendi Echegaray

Vocal: Ricardo Enrique Castro Santis

México

Julio de 2015

Contenido

1 Preliminares **7**

1.1 Semigrupos dinámicos cuánticos . . . 7

1.1.1 Generadores no acotados . . . 11

1.1.2 Estados cuánticos invariantes . . . 14

1.2 Balance detallado cúantico . . . 16

2 Estados invariantes de equilibrio **19**

2.1 El semigrupo cuántico de Exclusión Asimétrica . . . 19

2.2 Estados invariantes de equilibrio en el nivel uno . . . 22

2.2.1 Conservatividad . . . 22

2.2.2 Condiciones sobre el estado invariante . . . 24

2.3 Estados invariantes de equilibrio en el nivel n . . . 28

2.3.1 Una condición suficiente para la existencia de estado invariante . . . 31

2.4 Dominio de atracción de los estados invariantes . . . 34

3 Estados fuera de equilibrio **39**

4 La forma de Dirichlet **51**

5 Conclusiones y perspectivas **59**

6 Apéndice **61**

6.1 Producto tensorial infinito . . . 61

Introducción

Uno de los modelos más relevantes en la literatura de los procesos estocásticos es el proceso de exclusión introducido por T. Liggett en [33] y retomado por él mismo en [34]. El estudio de la interacción de partículas en un sistema, dio lugar a modelos como el del votante y los procesos de contacto y exclusión; el proceso de exclusion modela el movimiento de partículas en un sistema; pero, a diferencia de los otros modelos en este se conserva siempre al número inicial de partículas. Por otra parte, uno de los objetos más estudiados en probabilidad cuántica son los semigrupos dinámicos cuánticos (de aquí en adelante abreviados como qds por sus siglas en inglés y como qms si son qds con la propiedad de markov). La versión cuántica del semigrupo de exclusión en el caso de volumen finito, fue derivada con el método del límite estocástico, por L. Accardi y S. Kozyrev en [3]. Más tarde, fue extendida al caso de volumen infinito por R. Quezada y L. Pantaleón en [39] y [40]. La versión cuántica del semigrupo de Exclusion Asimétrica ha sido profusamente estudiada por los mismos autores junto con de J. García et.al., en artículos tales como [26] y [27].

En este trabajo se retoma al semigrupo cuántico de Exclusión Asimétrica y se reescribe de una manera conveniente; una vez hecho esto, se presentan versiones de algunos de los resultados presentes en los trabajos antes citados. Gran parte de este trabajo se centra en el estudio de la dinámica en el espacio de una partícula, que es en donde se presentan algunos resultado nuevos.

La aportación de este trabajo es la de proponer un método mediante el cual se puede construir un estado invariante diagonal fuera de equilibrio; los detalles de dicha construcción se encuentran el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se demuestra que la forma de Dirichlet para el semigrupo cuántico de Exclusión Asimétrica en el nivel uno y con respecto al estado diagonal fuera de equilibrio construido en el Capítulo 4, coincide con la forma de Dirichlet con respecto a un estado diagonal en equilibrio.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma:

En el primer capítulo se hace una revisión de los preliminares necesarios para el desarrollo de este trabajo, definiciones y resultados fundamentales como los teoremas de Krauss y Lindblad, Gorini, Kossakowski y Sudarshan, las diferentes nociones de equilibrio y resultados relativos a estos tópicos; para cada uno de los teoremas se da una referencia en donde encontrar las demostraciones. En el segundo capítulo se presenta al semigrupo cuántico de Exclusión Asimétrica junto con la reelaboración de algunos resultados ya conocidos; contiene además, algunos resultado nuevos relativos a la dinámica en el espacio de una partícula y que aparecen en [30].

En el tercer capítulo y parte central de este trabajo, se exponen a detalle los principales resultados en [30], iniciando con una discusión heurística sobre como se establecen hipótesis bajo las cuales es posible construir estados invariantes fuera de equilibrio para el qms de Exclusión Asimétrica cuando se restringe la dinámica al espacio de una partícula. Los resultados principales están contenidos en los Teoremas 3.0.5, 3.0.6, 3.0.7 y 3.0.8. Se finaliza el capítulo con un ejemplo explícito.

En el Capítulo 4 se calcula la forma de Dirichlet para el qms de Exclusión Asimétrica con respecto al estado invariante diagonal fuera de equilibrio construido en el Capítulo 3. Finalmente, se hace una perspectiva de trabajos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Semigrupos dinámicos cuánticos

Sea h un espacio de Hilbert complejo y separable; se usaran letras latinas minúsculas como $u, v, \ldots,$ para denotar los elementos de h; $\langle u,\ v\rangle$ es el producto interno de u, v y $\|u\|$ es la norma de u. Sea $\mathcal{B}(h)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados en h; $a, b, x, y, z, \ldots$ denotarán a los elementos de $\mathcal{B}(h)$ y $\|x\|_\infty$ a la norma de $x \in \mathcal{B}(h)$; el elemento identidad en $\mathcal{B}(h)$ será denotado por I.

Sea $\mathcal{B}_+(h)$ el cono de los operadores positivo definidos en h. Dados $x, y \in \mathcal{B}(h)$ autoadjuntos, se dice $x \leq y$ si $y - x \in \mathcal{B}(h)_+$. $L_1(h)$ designará el espacio de los operadores de traza finita en h. $\sigma, \rho, \ldots$ denotarán a los elementos de $L_1(h)$ y $\|\sigma\|_1$ a la norma de σ en $L_1(h)$.

Dados dos operadores $x, y \in \mathcal{B}(h)$, se denotará al *conmutador de* x, y *como* $[x, y] := xy - yx$. *El bien conocido Teorema de Schatten (véase [38]) afirma que* $(L_1(h))^*$, *el espacio dual de* $L_1(h)$, *es isométricamente isomorfo a* $\mathcal{B}(h)$. *Más precisamente, cualquier funcional definida sobre* $L_1(h)$, $f : L_1(h) \to \mathbb{C}$, *está representada por un único elemento* $x \in \mathcal{B}(h)$ *en el siguiente sentido:* $f(\rho) = tr(x\rho)$, *donde* $tr(\sigma)$ *es la traza del elemento* $\sigma \in L_1(h)$. *La norma de la funcional* f *es exactamente* $\|x\|_\infty$.

Debido al Teorema de Schatten, $\mathcal{B}(h)$ *tiene la llamada topología débil* o topología ultra débil y* $L_1(h)$ *tiene la topología débil. La topología débil* se define como la menor topología* *en $\mathcal{B}(h)$ que hace continuas a todas las funcionales lineales definidas sobre $\mathcal{B}(h)$, de la forma $g_\rho : \mathcal{B}(h) \to \mathbb{C}$, $g_\rho(x) = tr(\rho x)$, con $\rho \in L_1(h)$, fijo. En otras palabras, una red en $\mathcal{B}(h)$, $\{x_i\}$, converge en la topología débil* a algún x en $\mathcal{B}(h)$, si y sólo si $tr(\rho x_i) \to tr(\rho x)$ para todo $\rho \in L_1(h)$. Se denotará esta convergencia por medio de $\omega^* \lim_i x_i = x$ ó $\omega^* x_i \to x$. En el caso de la topología débil, se trata de la menor topología en $L_1(h)$ que hace continuas a todas las funcionales lineales definidas en $L_1(h)$, que son de la forma $f_x : L_1(h) \to \mathbb{C}$, $f_x(\rho) = tr(\rho x)$ con $x \in \mathcal{B}(h)$. La convergencia de redes, en esta topología, se caracteriza de la siguiente forma: una red en $L_1(h)$, $\{\rho_i\}$, converge en la topología débil a algún $\rho \in L_1(h)$ si y sólo si $tr(\rho_i x) \to tr(\rho x)$ para todo $x \in \mathcal{B}(h)$; esta convergencia se denotará por $w \lim_i \rho_i = \rho$.*

Hay otras dos topologías en $\mathcal{B}(h)$ que juegan un papel importante: la topología débil (o w-topología) y la topología fuerte (o s-topología). La primera, a pesar del nombre, no debe confundirse con la topología débil en $L_1(h)$, pues está definida en $\mathcal{B}(h)$ y la convergencia de redes se caracteriza así: $w \lim_i x_i = x$ si y sólo si $\langle u, x_i v\rangle \to \langle u, xv\rangle$, para cualesquiera $u, v \in h$. La topología fuerte puede pensarse como la topología de convergencia puntual dado que una red en $\mathcal{B}(h)$, $\{x_i\}$, converge a x en esta topología, (lo cual se denotará por $s \lim_i x_i = x$) si y sólo si $x_i u \to xu$, para todo $u \in h$.

Definición. 1.1.1. *Un semigrupo dinámico cuántico (qds por sus iniciales en inglés) sobre $\mathcal{B}(h)$ es una familia de transformaciones, $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$, de $\mathcal{B}(h)$ en sí mismo, con la propiedad de semigrupo y ultra débil continua en el tiempo, i.e., para todo $t, s \geq 0$ y $x \in \mathcal{B}(h)$*

$$\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s, \qquad \mathcal{T}_0(x) = x, \quad y \qquad \omega^* \lim_{t\to 0} \mathcal{T}_t(x) = x,$$

en la que cada $\mathcal{T}_t$ es

1. *Lineal.*

2. *Completamente Positivo (CP), i.e., para cualquier par de sucesiones finitas $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^n$ en $\mathcal{B}(h)$*
$$\sum_{i,j=1}^n y_i^* \mathcal{T}_t(x_i^* x_j) y_j \in \mathcal{B}(h)_+. \tag{1.1}$$

3. *Normal, i.e., continuo en la topología débil*.*

4. *Submarkoviano, i.e,* $\mathcal{T}_t(I) \leq I$.

Convención: *Los operadores de* $\mathcal{B}(h)$ *en sí mismos, serán llamados superoperadores.*

Definición. 1.1.2. *El generador infinitesimal de un qds,* $\mathcal{T}$, *es el superoperador* $\mathcal{L} : Dom(\mathcal{L}) \to \mathcal{B}(h)$, *donde*

$$Dom(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{B}(h) : \omega^* \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}_t x - x}{t} \quad existe\},$$

$$\mathcal{L}(x) = \omega^* \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}_t x - x}{t} \quad para\ toda\, x \in Dom(\mathcal{L}). \tag{1.2}$$

Definición. 1.1.3. *Un qds,* $\mathcal{T}$, *se dice que es*

1. *Conservativo, unital, preserva la identidad o que es Markoviano si* $\mathcal{T}_t(I) = I$ *para toda* $t \geq 0$.

2. *Uniformemente continuo si*

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|\mathcal{T}_t(x) - x\|_\infty = 0.$$

Si un qds es Markoviano se dira simplemente que es un semigrupo cuántico de Markov y se abreviara como qms por sus iniciales en inglés. El generador infinitesimal de un qds que es uniformemente continuo es un superoperador acotado en $\mathcal{B}(h)$. Éste es un resultado bien conocido de la teoría general de semigrupos en espacios de Banach, pero, para qds uniformemente continuos y conservativos Lindblad, Gorini, Kossakowski y Sudarshan en 1976 (ver [35] y [25]), probaron un resultado que describe la estructura exacta del generador infinitesimal. El generador infinitesimal, en este caso, no es completamente positivo como cada $\mathcal{T}_t$ en el semigrupo, sino que es *condicionalmente completamente positivo* en el siguiente sentido,

Definición. 1.1.4. *Un operador lineal* $\mathcal{L} : \mathcal{B}(h) \to \mathcal{B}(h)$, *es condicionalmente completamente positivo (CCP), si para cualquier sucesión finita en* $\mathcal{B}(h)$, $a_1, \ldots, a_n$ *y cualquier sucesión finita en* h, $u_1, \ldots, u_n$ *tales que* $\sum_{j=1} a_j u_j = 0$, *se tiene que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_i, \mathcal{L}(a_i^* a_j) u_j \rangle \geq 0. \tag{1.3}$$

El primero de los siguientes dos teoremas caracteriza todos los superoperadores normales y CP definidos de $\mathcal{B}(h)$ en si mismo; el segundo resultado proporciona la descripción completa del generador infinitesimal de un qds uniformemente continuo. Se indicará en que referencias se pueden encontrar las demostraciones.

Teorema. 1.1.5. *(***Krauss 1971***) Sea $\Phi : \mathcal{B}(h) \to \mathcal{B}(h)$ un superoperador normal (es decir, continuo en la topología débil*) y CP, en el sentido de (1.1). Entonces, existe una sucesión en $\mathcal{B}(h)$, $\{L_\ell : \ell = 1, 2, \ldots, \}$ tal que*

$$\Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} L_k^* x L_k \tag{1.4}$$

donde la serie converge en la topología fuerte.

Para la demostración, véase [38], Proposición 29.8, p. 255 ó [31].

Teorema. 1.1.6. *(***Gorini, Kossakowsi, Sudarshan, Lindblad 1976***) Sea $\mathcal{T}$ un qds uniformemente continuo. Entonces*

1. *El generador infinitesimal $\mathcal{L}$, es acotado, normal, CCP, $\mathcal{L}(x^*) = (\mathcal{L}(x))^*$ para todo $x \in \mathcal{B}(h)$ y $\mathcal{L}(I) \leq 0$.*

2. *$\mathcal{L}$ puede expresarse en la Forma de Lindblad, es decir, hay una sucesión en $\mathcal{B}(h)$, $\{G, L_1, L_2, \cdots\}$ tal que G genera a un semigrupo de contracciones uniformemente continuo en h y*
$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k^* x L_k + G^* x + xG \tag{1.5}$$
donde la serie converge en la topología fuerte de $\mathcal{B}(h)$.

3. *Recíprocamente, cualquier $\mathcal{L}$ con la estructura (1.5) y $\mathcal{L}(I) \leq 0$ genera a un qds uniformemente continuo.*

4. *$\mathcal{T}$ es conservativo si y sólo si $\mathcal{L}(I) = 0$.*

Para la demostración, véase [38], Teorema 30.12, p. 267 ó [11] Teorema 4.1.1, p. 68.

1.1.1 Generadores no acotados

Los qds involucrados en la mayoría de las aplicaciones no son uniformemente continuos por lo que sus generadores infinitesimales sólo son densamente definidos y no acotados. Durante los últimos años se ha desarrollado una teoría poderosa sobre la existencia de qds cuyo generador infinitesimal $\mathcal{L}$ tiene, hablando a grandes rasgos, una estructura similar a (1.5) pero con algunos (o todos) de los L_k, G no acotados. En forma más precisa, se asocia con cada $x \in \mathcal{B}(h)$ una *forma sesquilineal no acotada y densamente definida* $\mathcal{L}(x)[u,v]$; $u, v \in Dom(G)$,

$$\mathcal{L}(x)[u,v] = \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k u, xL_k v\rangle + \langle Gu, xv\rangle + \langle u, xGv\rangle, \tag{1.6}$$

donde

i) G es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en h al que se denotará por $\{W_t\}_{t\geq 0}$.

ii) $Dom(G) \subseteq \bigcap\limits_{k\geq 1} Dom(L_k)$.

iii) Para cada $u \in Dom(G)$, se tiene la estimación

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|L_k u\|^2 \leq -2Re\langle Gu, u\rangle. \tag{1.7}$$

La condición (1.7) equivale a $\mathcal{L}(I)[u,u] \leq 0$ para $u \in Dom(G)$ y es necesaria para que la propiedad submarkoviana se cumpla. Típicamente, se considera que los operadores L_k son no acotados (incluso son no cerrables). Las condiciones i)-iii) se conocen como *Hipótesis A* y son suficientes para construir el llamado *qds minimal* (véase [13]), $\{\mathcal{T}_t^{\min}\}_{t\geq 0}$ que es solución a la *ecuación de Lindblad*,

$$\frac{d}{dt}\left\langle u, \mathcal{T}_t^{\min}(x)v\right\rangle = \mathcal{L}\left(\mathcal{T}_t^{\min}(x)\right)[u,v], \quad \mathcal{T}_0^{\min}(x) = x, \tag{1.8}$$

con $u, v \in Dom(G)$, $x \in \mathcal{B}(h)$.

La ecuación de Lindblad (1.8) recuerda a la ecuación diferencial del semigrupo, pero, para resolverla no se usa la teoría de Hille-Yosida (véase [6]), sino un método iterativo introducido por A.M. Chebotarev (véase [11] y sus referencias). El procedimiento está inspirado en el método de K.L. Chung para resolver la ecuación hacia atrás de Kolmogorov-Feller (véase [9] ó [20]). Se presenta un bosquejo de la construcción del qds minimal. Primero, se demuestra que (véase [13], Proposición 3.18, p. 46 ó [11], Proposición 4.3.1, p. 74) la ecuación de Lindblad (1.8) es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$\left\langle u, \mathcal{T}_t^{\min}(x)v\right\rangle = \langle u, W_t^* x W_t v\rangle + \int_0^t \Phi\left(\mathcal{T}_\tau^{\min}(x)\right)[W_{t-\tau}u, W_{t-\tau}v]d\tau \tag{1.9}$$

donde

$$\Phi(x)[u,v] = \sum_{k\geq 1} \langle L_k u, x L_k v\rangle. \tag{1.10}$$

El método iterativo consiste en dar para $x \in \mathcal{B}(h)$ y $t \geq 0$, la siguiente sucesión de operadores, $\mathcal{T}_t^n(x)$; $n = 0, 1 \ldots$

$$\mathcal{T}_t^0(x) := W_t^* x W_t, \tag{1.11}$$

y una vez que $\mathcal{T}_t^n(x)$ ha sido definido, se define $\mathcal{T}_t^{n+1}(x)$ por medio de su forma sesquilineal: Sean $u, v \in Dom(G)$, entonces

$$\left\langle u, \mathcal{T}_t^{n+1}(x)v\right\rangle := \langle u, \mathcal{T}_t^0(x)v\rangle + \int_0^t \Phi\left(\mathcal{T}_\tau^n(x)\right)[W_{t-\tau}u, W_{t-\tau}v]d\tau. \tag{1.12}$$

Se puede demostrar que, para cada x en $\mathcal{B}(h)_+$ y $t \geq 0$, los operadores $\mathcal{T}_t^n(x)$; $n = 0, 1 \ldots$ son acotados y satisfacen las desigualdades $0 \leq \mathcal{T}_t^n(x) \leq \mathcal{T}_t^{n+1}(x) \leq \|x\| I$. Por lo tanto, el siguiente límite existe

$$\mathcal{T}_t^{min}(x) := \omega^* \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_t^n(x).$$

En particular $0 \leq \mathcal{T}_t^{min}(I) \leq I$; así, $\mathcal{T}_t^{min}$ es submarkoviano.

A $\mathcal{T}_t^{min}$ se le llama, *la solución minimal a la ecuación de Lindblad* (1.8) y debe su nombre a la siguiente propiedad: Si $\{S_t\}_{t\geq 0}$; $S_t : \mathcal{B}(h) \to \mathcal{B}(h)$ es una familia ultra-débil continua de superoperadores completamente positivos que es solución de (1.8) entonces para cualquier $x \in \mathcal{B}(h)_+$ y para toda $t \geq 0$, se tiene $\mathcal{T}_t^{min}(x) \leq S_t(x)$.

Una de las razones por la que es muy importante que $\mathcal{T}_t^{min}$ sea conservativo es la siguiente: si $\mathcal{T}_t^{min}$ es conservativo, entonces es la única solución a (1.8) (véase [13] para la demostración).

Si en (1.7) se sustituye la desigualdad por igualdad, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|L_k u\|^2 = -2Re\langle Gu, u\rangle, \tag{1.13}$$

se tiene la llamada *Hipótesis AA* (véase [13]).

Se denotará al resolvente de G en $\lambda \in \mathbb{C}$, por $R(\lambda; G) := (\lambda - G)^{-1}$.

Definición. 1.1.7. *(***Hipótesis C***) Sean $\{G, L_1, L_2, \cdots\}$ operadores en $\mathcal{B}(h)$ que satisfacen la Hipótesis AA. Los operadores satisfacen la Hipótesis C, si existe un operador positivo y auto-adjunto C y una variedad lineal D con las siguientes propiedades*

1. *D está contenido en $Dom(G)$.*

2. *D es un dominio esencial para $C^{\frac{1}{2}}$.*

3. *D es un dominio invariante para los operadores $\{W_t\}_{t\geq 0}$ y la variedad lineal $R(\lambda; G)(D)$ está contenida en $Dom(C^{\frac{1}{2}})$ para toda $\lambda > 0$.*

4. *La variedad lineal $L_k(R(\lambda; G)(D))$ está contenida en $Dom(C^{\frac{1}{2}})$ para toda $k \geq 1$ y para toda $\lambda > 0$.*

5. *Existe una constante $b > 0$ tal que para toda $u \in R(\lambda; G)(D)$ y para algún $\lambda > 0$*

$$2\,Re\,\langle C^{\frac{1}{2}}u, C^{\frac{1}{2}}Gu\rangle + \sum_{k\geq 1}\langle C^{\frac{1}{2}}L_k u, C^{\frac{1}{2}}L_k u\rangle \leq b\|C^{\frac{1}{2}}u\|^2. \tag{1.14}$$

El siguiente teorema es el 3.40 en [13].

Teorema. 1.1.8. *Supóngase que los operadores $\{G, L_1, L_2, \cdots\}$ satisfacen la Hipótesis AA y que existe un operador positivo y auto-adjunto ϕ en h tal que*

1. *El dominio de $\phi^{\frac{1}{2}}$ contiene al dominio de G y para todo $u \in Dom(G)$, se tiene*

$$-2\,Re\,\langle u, Gu\rangle = \sum_{k\geq 1}\langle L_k u, L_k u\rangle = \langle \phi^{\frac{1}{2}}u, \phi^{\frac{1}{2}}u\rangle.$$

2. *Existe un operador positivo y auto-adjunto C que satisface la Hipótesis C, y tal que el dominio de C está contenido en el dominio de ϕ y para todo $u \in Dom(C)$ se tiene que*

$$\langle \phi^{\frac{1}{2}} u, \phi^{\frac{1}{2}} u \rangle \leq \langle C^{\frac{1}{2}} u, C^{\frac{1}{2}} u \rangle.$$

Entonces el qds minimal es Markov.

1.1.2 Estados cuánticos invariantes

El *semigrupo predual*, $\mathcal{T}_{*t} : L_1(h) \to L_1(h)$, existe y se caracteriza por

$$tr(x\mathcal{T}_{*t}(\sigma)) = tr(\mathcal{T}_t(x)\sigma) \quad \text{para toda } t \geq 0,\ x \in \mathcal{B}(h),\ \sigma \in L_1(h).$$

Definición. 1.1.9. *Un estado cuántico σ, es un elemento en $L_1(h) \cap \mathcal{B}(h)_+$ con $tr(\sigma) = 1$. Un estado cuántico σ es*

1. *Invariante para el semigrupo $\{\mathcal{T}_{*t}\}_{t\geq 0}$, si $\mathcal{T}_{*t}(\sigma) = \sigma \quad$ para toda $t \geq 0$.*

2. *Fiel, si σ es inyectivo.*

3. *Normal, si conmuta con su adjunto.*

De aquí en adelante se referirá a un estado cuántico, simplemente como estado.
Se tiene el siguiente resultado también conocido como *Teorema Ergódico*, demostrado en [22], [32].

Teorema. 1.1.10. *Para cualquier qds $\{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$, con estado invariante fiel ρ, el límite*

$$w^* \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_s(x) ds$$

existe para cada $x \in \mathcal{B}(h)$. Equivalentemente,

$$w \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\sigma) ds$$

existe para cada $\sigma \in L_1(h)$. Este último límite es un estado invariante.

Definición. 1.1.11. *Sean σ, ρ estados, con ρ invariante; se dice que σ está en el dominio de atracción de ρ, si*

$$\lim_{t\to\infty} tr(x\mathcal{T}_{*t}(\sigma)) = tr(x\rho) \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{B}(h).$$

En otras palabras

$$w \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}_{*t}(\sigma) = \rho.$$

Definición. 1.1.12. *Se dice que $x \in \mathcal{B}(h)_+$ es armónico, (subarmónico, superarmónico) si $\mathcal{T}_t(x) = x$, ($\mathcal{T}_t(x) \geq x$, $\mathcal{T}_t(x) \leq x$) respectivamente.*

Teorema. 1.1.13. *Sea $\mathcal{L}$ el generador infinitesimal del un qms uniformemente continuo en $\mathcal{B}(h)$ y ρ cualquier estado normal en $\mathcal{B}(h)$. Entonces existe un operador acotado autoadjunto $H \in \mathcal{B}(h)$ y una sucesión de operadores $\{L_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathcal{B}(h)$ que satisfacen lo siguiente*

1. *$tr(\rho L_k) = 0$ para toda k.*
2. *$\sum_k L_k^* L_k$ es fuertemente convergente.*
3. *Si $\sum_k |c_k| < \infty$ y $c_0 I + \sum_k c_k L_k = 0$ entonces $c_k = 0$ para toda k.*
4. *$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2}\sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k)$ para todo $x \in \mathcal{B}(h)$.*

Además, H' otro operador autoadjunto y $\{L'_k\}_{k\geq 1}$ otra sucesión de operadores en $\mathcal{B}(h)$ satisfacen $1 \to 4$ si y sólo si las longitudes de las sucesiones $\{L_k\}_{k\geq 1}$ y $\{L'_k\}_{k\geq 1}$ son iguales y para algún escalar α y una matriz unitaria $U = \{u_{ij}\}_{ij}$ se tiene que

$$H' = \alpha I + H, \qquad L'_k = \sum_j u_{kj} L_j \qquad \textit{para cada } k. \tag{1.15}$$

Para la demostración véase [38]. En adelante se supondrá que ρ es invariante.

La siguientes definiciones son la 4.1 y 4.2 en [14].

Definición. 1.1.14. *Toda representación de $\mathcal{L}$ que satisfaga los puntos $1 \to 4$ del Teorema (1.1.13), será llamada una representación especial respecto al estado ρ y por medio de los operadores H y $\{L_k\}_{k\geq 1}$.*

De manera breve, será llamada una *representación especial*.

Definición. 1.1.15. *Toda representación especial de $\mathcal{L}$ será llamada privilegiada si H conmuta con ρ y sus operadores $\{L_k\}_{k\geq 1}$ satisfacen $\rho L_k = \lambda_k L_k \rho$ con $\lambda_k > 0$.*

1.2 Balance detallado cúantico

Una caracterización del equilibrio en los qms se da a través del llamado *θ-balance detallado cuántico* cuya definicón se reproduce de [14].

Definición. 1.2.1. *Sea $\theta \in [0,1]$ fijo. Se dice que un qms $\mathcal{T} : \mathcal{B}(h) \to \mathcal{B}(h)$ admite semigrupo θ-dual respecto al estado ρ si existe un semigrupo uniformemente continuo $\{\widetilde{\mathcal{T}}_t\}_{t\geq 0}$ en $\mathcal{B}(h)$ tal que*

$$tr(\rho^{1-\theta}\widetilde{\mathcal{T}}_t(x)\rho^{\theta}y) = tr(\rho^{1-\theta}x\rho^{\theta}\mathcal{T}_t(y)) \tag{1.16}$$

para todo $x, y \in \mathcal{B}(h)$, $t \geq 0$.

Definición. 1.2.2. *Un qms $\{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$ satisface la condición de θ-balance detallado cuántico (θ-QDB) respecto al estado normal, invariante y fiel ρ, si su generador $\mathcal{L}$ y el generador $\widetilde{\mathcal{L}}$ del semigrupo θ-dual satisfacen la igualdad*

$$\mathcal{L}(x) - \widetilde{\mathcal{L}}(x) = 2i[K, x] \tag{1.17}$$

para todo $x \in \mathcal{B}(h)$ y K operador auto-adjunto.

El siguiente teorema es el 5.1 en [14] y en el mismo se puede ver la demostración.

Teorema. 1.2.3. *Un qms $\mathcal{T}$ satisface la condición de 0-QDB si y sólo si existe una representación privilegiada de $\mathcal{L}$ por medio de los operadores H, L_k $k \geq 1$ tales que*

1. $H = K + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
2. $\lambda_k^{-\frac{1}{2}} L_k^* = \sum_j u_{kj} L_j$ *para algún $\lambda_k > 0$ y $(u_{kj})_{kj}$ operador unitario.*

El siguiente es el Teorema 8 en [1].

Teorema. 1.2.4. *Dada una representación especial de $\mathcal{L}$, entonces lo siguiente es equivalente*

1. *Existe una sucesión de pesos positivos $\{q_k\}_{k\geq 1}$ y operadores $H^{'}$ y $\{L^{'}_k\}_{k\geq 1}$ de una (posiblemente otra) representación especial de $\mathcal{L}$ tales que*

$$(\widetilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L})(x) = -2i[K, x] + \Pi(x), \tag{1.18}$$

donde K es un operador acotado y auto-adjunto, y

$$\Pi(x) = \sum_k (q_k - 1) L^{'*}_k x L^{'}_k. \tag{1.19}$$

2. *$\mathcal{L}$ es un generador acotado, los operadores H y $\{L_k\}_{k\geq 1}$ producen una representación privilegiada de $\mathcal{L}$, $H^{'}$ y $\{L^{'}_k\}_{k\geq 1}$ los correspondientes operadores en la representación privilegiada de $\widetilde{\mathcal{L}}$ y existe una sucesión de pesos positivos $\{q_k\}_{k\geq 1}$ y operadores $H^{''}$ y $\{L^{''}_k\}_{k\geq 1}$ de una (posiblemente otra) representación especial de $\mathcal{L}$ tales que*

$$\widetilde{L}_k = q_k^{\frac{1}{2}} L^{''}_k, \qquad \textit{para toda } k \geq 1.$$

Si la diferencia entre los generadores infinitesimales de los semigrupos predual y directo respectivamente, puede expresarse como en (1.18) entonces se dice que el qms satisface la condición de *balance detallado pesado* (véase Definición 5 en [1]).

Capítulo 2

Estados invariantes de equilibrio

Este capítulo está basado en los trabajos [39], [26], [27] y [42]; sin embargo, es una reescritura de la forma del generador infinitesimal la que le confiere una presentación distinta a algunos de los resultados en los trabajos arriba citados. Además, se presentan algunos de los resultados contenidos en [30].

2.1 El semigrupo cuántico de Exclusión Asimétrica

El generador infinitesimal GKSL del qms de Exclusión Asimétrica actúa en $\mathcal{B}(h)$ donde $h = \bigotimes_{l\in\mathbb{Z}^d}^{\varphi} h_l$, $h_l = \mathbb{C}^2$ y $\varphi = \{|0\rangle\}_{l\in\mathbb{Z}^d}$ la sucesión estabilizante. Sea $\mathbb{Z}^d$, cada $r \in \mathbb{Z}^d$ es llamado *sitio* y su norma es $|r| := \sup_i |r_i|$; dada un función $\eta : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ se denotara indistintamente $\eta(r)$ o η_r al valor de η en el sitio r; $Supp(\eta) := \{r \in \mathbb{Z}^d : \eta_r = 1\}$, $|\eta| = \#Supp(\eta)$; $\mathcal{S} := \{\eta : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\} : |\eta| < \infty\}$, todo elemento de $\mathcal{S}$ es llamado *configuración*. Dado un ordenamiento de $\mathbb{Z}^d = (r_0, r_1 \ldots)$, se estable una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{Z}^d$ y $\mathbb{Z}_+$, en la que se identifica a cada elemento de $\mathbb{Z}^d$ con su subíndice en la ordenación, con $r_0 = 0$ y $|r_n|_\infty \leq |r_{n+1}|_\infty$. Del mismo modo, se identifica al soporte de una configuración η con el conjunto de indices de los sitios en $Supp(\eta)$ i.e., si $Supp(\eta) = \{r_{l_1}, \ldots, r_{l_k}\} \equiv \{l_1, \ldots, l_k\}$. Para cada $\eta \in \mathcal{S}$ se denotará $|\eta\rangle = |\eta_{r_0}\eta_{r_1}\cdots\eta_{r_k}0\cdots\rangle = |\eta_{r_0}\rangle \bigotimes |\eta_{r_2}\rangle \bigotimes \ldots \bigotimes |\eta_{r_k}\rangle \bigotimes_{m>k} |0\rangle$. $\mathcal{S}_n = \{\eta : |\eta| = n\}$ es el conjunto de las configuraciones de tamaño n, $\beta = \{|\eta\rangle : \eta \in \mathcal{S}\}$, $\beta_n = \{|\eta\rangle : \eta \in \mathcal{S}_n\}$

y $V_n := \overline{Span\,\beta_n}$; V_n será llamado el espacio de n partículas. P_n la proyección ortogonal sobre V_n y $\mathbb{A}_n := P_n\mathcal{B}(h)P_n$ será nombrada el álgebra hereditaria de V_n. Por simplicidad se denotará η en lugar de $|\eta\rangle$, de tal modo que $\mathcal{S}$ y β son el mismo conjunto. Dada $\eta \in \mathcal{S}$ definimos $\eta_{rs}(l) = \eta(l)$ si $l \notin \{r, s\}$ ó $1 - \eta(l)$ si $l \in \{r, s\}$ y al operador $C_{rs} : h \to h$; $C_{rs}\eta = (1 - \eta_s)\eta_r\eta_{rs}$. Obsérvese que $(1 - \eta_s)\eta_r = 1$ si y sólo si $r \in Supp(\eta)$ y $s \notin Supp(\eta)$ y que $C_{rs} = C^*_{sr}$.

El generador formal GKSL del qms de Exclusión Asimétrica es

$$\pounds(x)[\eta, \xi] = \Phi(x)[\eta, \xi] + \langle G\eta, x\xi\rangle + \langle \eta, xG\xi\rangle \tag{2.1}$$

donde

$$\Phi(x) = \sum_r \big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}C^*_{rs}xC_{rs} + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}C^*_{rs}xC_{rs}\big) \tag{2.2}$$

es la parte completamente positiva de $\mathcal{L}$, $a^{\pm}_{rs}$ son números estríctamente positivos y $G = -\sum\limits_{\eta\in\mathcal{S}} c(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ operador de multiplicación donde

$$c(\eta) = \sum_r \big(\sum_{s>r} z^+_{rs}(1 - \eta_s)\eta_r + \sum_{s<r} \overline{z^-_{rs}}(1 - \eta_s)\eta_r\big);$$

$z^{\pm}_{rs} = a^{\pm}_{rs} + ib^{\pm}_{rs}$ y $b^{\pm}_{rs}$ números reales. Sea $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ la función asociada con el operador de multiplicación $\Phi(I)$ y cuya acción sobre una configuración η es

$$F(\eta) = \sum_{\Gamma^+_\eta} 2a^+_{rs} + \sum_{\Gamma^-_\eta} 2a^-_{rs},$$

donde los conjuntos Γ^+_η y Γ^-_η están definidos por

$$\Gamma^+_\eta := \{(r, s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : s > r, (1 - \eta_s)\eta_r = 1\}$$

y

$$\Gamma^-_\eta := \{(r, s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : s < r, (1 - \eta_s)\eta_r = 1\}. \tag{2.3}$$

Sea $\mathcal{L}$ el generador infinitesimal del qms de Exclusión Asimétrica, para $x \in Dom(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{B}(h) : \pounds(x) \in \mathcal{B}(h)\}$ $\mathcal{L}$ se puede reexpresar en la forma de Lindblad como

$$\mathcal{L}(x) = \sum_r \big(\sum_{s>r} L^{+*}_{rs}xL^+_{rs} + \sum_{s<r} L^{-*}_{rs}xL^-_{rs}\big) + G^*x + xG, \tag{2.4}$$

donde $L^+_{rs} = \sqrt{2a^+_{rs}}C_{rs}$ si $s > r$, $L^-_{rs} = \sqrt{2a^-_{rs}}C_{rs}$ si $s < r$. Con $x = \sum_{\eta,\xi\in\mathcal{S}} x_{\eta\xi}|\eta\rangle\langle\xi|$

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\eta,\xi\in\mathcal{S}} \Big\{ \sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs} x_{\eta_{rs}\xi_{rs}} (1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r +$$

$$\sum_{s<r} 2a^-_{rs} x_{\eta_{rs}\xi_{rs}} (1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r\Big) - (\overline{c(\eta)} + c(\xi))x_{\eta\xi}\Big\}|\eta\rangle\langle\xi|. \tag{2.5}$$

Por otra parte, es fácil ver que $G = -iH - \frac{1}{2}\sum_r\big(\sum_{s>r} L^{+*}_{rs}L^+_{rs} + \sum_{s<r} L^{-*}_{rs}L^-_{rs}\big)$, donde $H = \sum_{\eta\in\mathcal{S}}\big\{\sum_r\big(\sum_{s>r} b^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r - \sum_{s<r} b^-_{rs}(1-\eta_s)\eta_r\big)\big\}|\eta\rangle\langle\eta|$ y que

$$\mathcal{L}(x) = i[H,x] - \frac{1}{2}\sum_r \Big(\sum_{s>r}(xL^{+*}_{rs}L^+_{rs} - 2L^{+*}_{rs}xL^+_{rs} + L^{+*}_{rs}L^+_{rs}x) +$$

$$\sum_{s<r}(xL^{-*}_{rs}L^-_{rs} - 2L^{-*}_{rs}xL^-_{rs} + L^{-*}_{rs}L^-_{rs}x)\Big). \tag{2.6}$$

Se asumirá que

$$\sum_{s>r}|z^+_{rs}| + \sum_{s<r}|z^-_{rs}| < \infty, \tag{2.7}$$

para todo r fijo, lo cual asegura la existencia del semigrupo dinámico cuántico minimal (véase [39]); obsérvese también, que el operador G puede ser no acotado, ya que la función $c(\eta)$ puede ser no acotada. El álgebra hereditaria $\mathbb{A}_n$ es invariante bajo la acción del semigrupo generado por $\mathcal{L}$ (véase [39]); cuando se restringe $\mathcal{L}$ a $\mathbb{A}_n$, se dice que se está tratando con la dinámica en el nivel n. Es fácil ver que la acción del semigrupo predual $\mathcal{L}_*$ en un elemento

$$\rho = \sum_{\eta,\xi\in\mathcal{S}} \rho(\eta,\xi)|\eta\rangle\langle\xi| \tag{2.8}$$

en $Dom\mathcal{L}_* \subset L_1(h)$ es

$$\mathcal{L}_*(\rho) = \sum_{\eta,\xi\in\mathcal{S}} \Big\{ \sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}\rho(\eta_{rs},\xi_{rs})(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s +$$

$$\sum_{s<r} 2a^-_{rs}\rho(\eta_{rs},\xi_{rs})(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s\Big) - (c(\eta) + \overline{c(\xi)})\rho(\eta,\xi)\Big\}|\eta\rangle\langle\xi|, \tag{2.9}$$

donde $\rho(\eta,\xi) = \langle\eta,\rho\xi\rangle$ y $\rho(\eta) = \rho(\eta,\eta)$.

2.2 Estados invariantes de equilibrio en el nivel uno

En este nivel, todo elemento $\eta \in \mathcal{S}_1$ es de la forma $\eta = 1_r$, la función indicadora del único elemento $r \in Supp(\eta)$. Como punto de partida, se supondrá la existencia de un estado fiel e invariante ρ. En este nivel

$$\rho = \sum_r \rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_\Gamma \rho(1_r, 1_s)|1_r\rangle\langle 1_s|, \tag{2.10}$$

donde el conjunto Γ está definido por

$$\Gamma := \{(r,s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : r \neq s\}. \tag{2.11}$$

Obsérvese que en el nivel uno, $C_{rs} = |1_s\rangle\langle 1_r|$. Sea $x = \sum_r x_r|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_\Gamma x_{rs}|1_r\rangle\langle 1_s|$ un elemento arbitrario en $\mathbb{A}_1$; un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) = \sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}(x_s - x_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}(x_s - x_r)|1_r\rangle\langle 1_r| \Big) \\ - \sum_\Gamma x_{rs}(\overline{c(1_r)} + c(1_s))|1_r\rangle\langle 1_s|.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Así mismo, de forma directa se puede obtener que

$$G^*x + xG = -\sum_\Gamma x_{rs}(\overline{c(1_r)} + c(1_s))|1_r\rangle\langle 1_s| - 2\sum_r x_r Re\ c(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r|. \tag{2.13}$$

Obsérvese que en este caso, el generador es del tipo no degenerado i.e., los proyectores en la descomposición espectral de H son uno dimensional (véase [8]).

2.2.1 Conservatividad

Hasta ahora, se ha referido libremente al modelo de estudio como qms de Exclusión Asimétrica; sin embargo, para llevar dicho apelativo debe probarse primero la conservatividad del qds. Esta sección, basada en [30] está dedicada a ello.

Proposición. 2.2.1. *Los operadores G y $L^{\pm}_{rs}$, $r \neq s$, del qds de Exclusión Asimétrica satisfacen la Hipótesis AA (1.13).*

Demostración. Ya que para todo $r \neq s$, los operadores $L^{\pm}_{rs}$ son acotados, su dominio es todo h, así que $Dom(G) \subseteq Dom(L^{\pm}_{rs})$ para todo $r \neq s$. Con $u = 1_t$; $\langle u, Gu\rangle + \langle Gu, u\rangle = -2Re\ c(1_t) = -2\big(\sum\limits_{s>t} a^+_{ts} + \sum\limits_{s<t} a^-_{ts}\big)$ y $\sum\limits_r \big(\sum\limits_{s>r} \langle L^+_{rs}u, L^+_{rs}u\rangle + \sum\limits_{s<r} \langle L^-_{rs}u, L^-_{rs}u\rangle\big) = \sum\limits_{s>r} 2a^+_{ts} + \sum\limits_{s<r} 2a^-_{ts}$. □

Puesto que los operadores G y $L^{\pm}_{rs}$; $r \neq s$ satisfacen la Hipótesis AA, se tiene asegurada la existencia del qds minimal (véase Ref. [13]). Por otra parte, en el nivel $n = 1$ la función F asociada al operador $\Phi(I)$, actúa en una configuración 1_t como

$$F(1_t) = \big(\sum_{s>t} a^+_{ts} + \sum_{s<t} a^-_{ts}\big).$$

La siguiente proposición (basada en los Teoremas 4.4 y 4.5 en [8]), da condiciones bajo las cuales el qds de Exclusión Asimétrica en el nivel $n = 1$ es conservativo.

Proposición. 2.2.2. *Sea $\Lambda = m_f$ operador de multiplicación tal que $f : \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}$ satisface $f(1_r)a^-_{sr} = a^+_{rs} f(1_s)$ si $s > r$, $f \geq F$; Sea $D = Span\,\beta_1$ y supóngase que $Dom(G) \subset Dom(\Phi^{\frac{1}{2}})$ y que existe $b \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda r, $2\big(\sum\limits_{s>r}(a^-_{sr} - a^+_{rs}) + \sum\limits_{s<r}(a^+_{sr} - a^-_{rs})\big) \leq b$, entonces el qds de Exclusión Asimétrica es conservativo.*

Demostración. Para probar la conservatividad, se verificará que bajo los supuestos dados, se satisfacen las condiciones dadas en (1.1.8). Primero, obsérvese que $Dom(G) = \{u \in V_1 : \sum\limits_t |\langle 1_t, u\rangle c(1_t)|^2 < \infty\}$, $Dom(\Phi) = \{u \in V_1 : \sum\limits_t |\langle 1_t, u\rangle F(1_t)|^2 < \infty\}$, $Dom(\Lambda) = \{u \in V_1 : \sum\limits_t |\langle 1_t, u\rangle f(1_t)|^2 < \infty\}$; así que $D \subset Dom(G)$. Para verificar que G, $L^{\pm}_{rs}$; $r \neq s$ satisfacen la Hipótesis C (1.1.7); sea $D = Span\,\beta_1$, claramente $D \subset Dom(G)$, $D \subset Dom(\Lambda) \subset Dom(\Lambda^{\frac{1}{2}})$. Se probará que D es un dominio esencial para $\Lambda^{\frac{1}{2}}$; sea el par $(u, \Lambda u)$ con $u \in Dom(\Lambda)$, se mostrará que existe una sucesión $(v_n, \Lambda v_n)$ con $v_n \in D$ tal que $(v_n, \Lambda v_n) \to (u, \Lambda u)$. Sea $v_n := \sum\limits_{t \in B_n} \langle 1_t, u\rangle 1_t$ donde $B_n := \{r \in \mathbb{Z}_+ : |r| \leq n\}$, por lo tanto $v_n \to u$ y $||\Lambda u - \Lambda v_n||^2 = ||\sum\limits_{t \notin B_n} \langle 1_t, u\rangle f(1_t) 1_t||^2 = \sum\limits_{t \notin B_n} |\langle 1_t, u\rangle|^2 (f(1_t))^2 \underset{n \longrightarrow \infty}{\rightarrow} 0$. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ el semigrupo generado por G, ya que $W_t u = e^{-c(u)t}u$, $W(D) \subset D$, $L^{\pm}_{rs}(R(\lambda; G)(D)) \subset D$ para toda $r \neq s$, $\lambda > 0$. Con $u = 1_t$

$$2Re\ \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} Gu\rangle + \sum_r \big(\sum_{s>r} \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} L^+_{rs} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} L^+_{rs} u\rangle + \sum_{s<r} \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} L^-_{rs} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} L^-_{rs} u\rangle\big) =$$

$$-2f(1_t)\Big(\sum_{s>t} a^+_{ts} + \sum_{s<t} a^-_{ts}\Big) + \Big(\sum_{s>t} 2a^+_{ts} f(1_s) + \sum_{s<t} 2a^-_{ts} f(1_s)\Big) =$$

$$2f(1_t)\sum_{s>r}(a^-_{sr} - a^+_{rs}) + \sum_{s<r}(a^+_{sr} - a^-_{rs}) \leq bf(1_t). \tag{2.14}$$

Ya que $f \geq F$

$$\langle \Phi^{\frac{1}{2}} u, \Phi^{\frac{1}{2}} u\rangle \leq \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} u\rangle, \tag{2.15}$$

con lo que se tiene la demostración. Para un u general se tiene el mismo resultado debido a la linealidad y la independencia lineal de $\{1_r : r \in \mathbb{Z}_+\}$. □

El qms de Exclusión Asimétrica en el nivel uno es *genérico* en el sentido de [8]; una prueba de la conservatividad de esta clase de semigrupos cuánticos, se da en los Teoremas 4.4 y 4.5 en el mismo artículo.

2.2.2 Condiciones sobre el estado invariante

El siguiente resultado es el Teorema 3.1 en [30] y muestra que un estado invariante fiel tiene que ser necesariamente diagonal.

Teorema. 2.2.3. *Sea ρ un estado invariante y fiel en el nivel $n = 1$, entonces*

1. *ρ es diagonal respecto a la base $\{1_r : r \in \mathbb{Z}_+\}$ y para cada $r \in \mathbb{Z}_+$* $\sum_{s>r}(a^-_{sr}\rho(1_s) - a^+_{rs}\rho(1_r)) < \infty$.

2. *Los operadores de Krauss $L^{\pm}_{rs}$ de $\mathcal{L}$, satisfacen la siguiente relación*

$$\rho L^{\pm}_{rs} = \lambda_{rs} L^{\pm}_{rs}\rho \tag{2.16}$$

donde $\lambda_{rs} = \frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}$.

Demostración. 1. Se probará que $\rho(1_r, 1_s) = 0$ para toda $r \neq s$. Ya que ρ es un estado invariante, $\rho \in Dom(\mathcal{L}_*)$ y $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$. Dada la linealidad

$$\mathcal{L}_*(\rho) = \sum_r \rho(1_r)\mathcal{L}_*(|1_r\rangle\langle 1_r|) + \sum_\Gamma \rho(1_r, 1_s)\mathcal{L}_*(|1_r\rangle\langle 1_s|) \tag{2.17}$$

donde, y de acuerdo a (2.9), $\mathcal{L}_*(|1_{r_0}\rangle\langle 1_{s_0}|) =$

$$\sum_r 2\Big(\sum_{s>r} a^+_{rs}(1-1_{r_0}(s))1_{r_0}(r)(1-1_{s_0}(s))1_{s_0}(r)|(1_{r_0})_{rs}\rangle\langle(1_{s_0})_{rs}|+$$

$$\sum_{s<r} a^-_{rs}(1-1_{r_0}(s))1_{r_0}(r)(1-1_{s_0}(s))1_{s_0}(r)|(1_{r_0})_{rs}\rangle\langle(1_{s_0})_{rs}|\Big)-$$

$$(c(1_{r_0})+\overline{c(1_{s_0})})|1_{r_0}\rangle\langle 1_{s_0}|, \tag{2.18}$$

ya que $(1-1_{r_0}(s))1_{r_0}(r)\cdot(1-1_{s_0}(s))1_{s_0}(r) = 1$ si y sólo si $r_0 = s_0 = r$ y $s \notin \{r_0, s_0\}$. Como consecuencia de (2.17) y (2.18), un cálculo directo muestra que $\mathcal{L}_*(\rho) =$

$$\sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}\rho(1_r)|1_s\rangle\langle 1_s| + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}\rho(1_r)|1_s\rangle\langle 1_s|\Big)-$$

$$\sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}\rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}\rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r|\Big)-$$

$$\sum_\Gamma (c(1_r)+\overline{c(1_s)})\rho(1_r,1_s)|1_r\rangle\langle 1_s|; \tag{2.19}$$

aplicando el cambio de variables $(r,s)\mapsto(s,r)$ en el primer renglón, la anterior ecuación es igual a $\mathcal{L}_*(\rho) =$

$$2\sum_r \Big(\sum_{s>r}(a^-_{sr}\rho(1_s) - a^+_{rs}\rho(1_r)) + \sum_{s<r}(a^+_{sr}\rho(1_s) - a^-_{rs}\rho(1_r))\Big)|1_r\rangle\langle 1_r|-$$

$$\sum_\Gamma (c(1_r)+\overline{c(1_s)})\rho(1_r,1_s)|1_r\rangle\langle 1_s|. \tag{2.20}$$

Dada la independencia lineal de $\{|1_r\rangle\langle 1_s| : r,s\in\mathbb{Z}_+\}$, la ecuación (2.20) implica que

$$\sum_{s>r}(a^-_{sr}\rho(1_s) - a^+_{rs}\rho(1_r)) + \sum_{s<r}(a^+_{sr}\rho(1_s) - a^-_{rs}\rho(1_r) = 0 \tag{2.21}$$

para toda $r\in\mathbb{Z}_+$ y $-(c(1_r)+\overline{c(1_s)})\rho(1_r,1_s) = 0$ para toda $r\neq s$. Ya que $Re\ (c(1_r)+\overline{c(1_s)}) = \sum_{s>r_0} a^+_{r_0 s} + \sum_{s<r_0} a^-_{r_0 s} + \sum_{s>s_0} a^+_{s_0 s} + \sum_{s<s_0} a^-_{s_0 s} > 0$ entonces $(c(1_{r_0})+\overline{c(1_{s_0})})\neq 0$ y por lo tanto $\rho(1_r,1_s) = 0$, i.e. ρ es diagonal respecto a $\{1_r : r\in\mathbb{Z}_+\}$. Obsérvese que (2.21) implica que para toda r, $\sum_{s>r}(a^-_{sr}\rho(1_s) - a^+_{rs}\rho(1_r)) < \infty$.

2.
$$\rho L^{\pm}_{rs} = \rho\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}|1_s\rangle\langle 1_r| = \rho(1_s)\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}|1_s\rangle\langle 1_r| = \rho(1_s)L^{\pm}_{rs} \tag{2.22}$$

y
$$L^{\pm}_{rs}\rho = \sqrt{2a^{\pm}_{rs}}|1_s\rangle\langle 1_r|\rho = \rho(1_r)\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}|1_s\rangle\langle 1_r| = \rho(1_r)L^{\pm}_{rs}, \tag{2.23}$$

por lo tanto $\rho L^{\pm}_{rs} = \frac{\rho(1_s)\rho(1_r)}{\rho(1_r)}L^{\pm}_{rs} = \frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}L^{\pm}_{rs}\rho$.

□

Se sabe ya que ρ es un operador diagonal por lo que conmuta con el operador diagonal H; de esta observación y el punto 2 del teorema anterior, se sigue que la representación de $\mathcal{L}$ es *privilegiada* (refiérase a la Definición (1.1.15)). De (2.20) y la diagonalidad del estado invariante, se tiene que (2.21) es una condición necesaria sobre los valores propios de ρ para que $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$. Por otra parte, una condición suficiente para esto último es que

$$\rho(1_s)a^{-}_{sr} = a^{+}_{rs}\rho(1_r) \qquad \text{para } s > r. \tag{2.24}$$

Se llamará a tal condición *balance detallado infinitesimal.*

La siguiente proposición muestra la equivalencia entre la condición de balance detallado infinitesimal (2.24) y condición de θ-QDB para $\theta \in [0,1]$ (1.17), y es la Proposición 3.1 en [30].

Proposición. 2.2.4. *Sea ρ un estado invariante y fiel en el nivel $n = 1$ para el qms de Exclusión Asimétrica; los valores propios de ρ satisfacen la condición de balance detallado infinitesimal si y sólo si para todo $\theta \in [0,1]$ el qms de Exclusión Asimétrica satisface la condición de θ-QDB con respecto a ρ.*

Demostración. Como primer paso, se calcula al generador infinitesimal de semigrupo θ-dual. Se sabe que $\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \rho^{\theta-1}\mathcal{L}_*(\rho^{1-\theta}x\rho^{\theta})\rho^{-\theta}$ (véase Proposición 3.2 de Ref. [14]),
si $x = \sum_r x_r|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_\Gamma x_{rs}|1_r\rangle\langle 1_s|$ entonces
$\rho^{1-\theta}x\rho^{\theta} = \sum_r x_r\rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_\Gamma x_{rs}\rho^{1-\theta}(1_r)\rho^{\theta}(1_s)|1_r\rangle\langle 1_s|$ y

$$\mathcal{L}_*(\rho^{1-\theta}x\rho^{\theta}) = \sum_r x_r\rho(1_r)\mathcal{L}_*(|1_r\rangle\langle 1_r|) + \sum_\Gamma x_{rs}\rho^{1-\theta}(1_r)\rho^{\theta}(1_s)\mathcal{L}_*(|1_r\rangle\langle 1_s|). \tag{2.25}$$

De (2.18), un cálculo directo muestra que

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \sum_r \big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs} x_r \frac{\rho(1_r)}{\rho(1_s)} |1_s\rangle\langle 1_s| + \sum_{s<r} 2a^-_{rs} x_r \frac{\rho(1_r)}{\rho(1_s)} |1_s\rangle\langle 1_s| \big) -$$

$$2\sum_r x_r Re\ c(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| - \sum_\Gamma x_{rs}(c(1_r) + \overline{c(1_s)})|1_r\rangle\langle 1_s|. \tag{2.26}$$

Ahora, utilizando el cambio de variables $(r,s) \mapsto (s,r)$ en el primer renglón y por la condición de *balance detallado infinitesimal* (2.24),

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \sum_r \big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}(x_s - x_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}(x_s - x_r)|1_r\rangle\langle 1_r| \big) -$$

$$\sum_\Gamma x_{rs}(c(1_r) + \overline{c(1_s)})|1_r\rangle\langle 1_s|. \tag{2.27}$$

Por (2.12), (2.13); $(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(x) = G^*x + xG - xG^* - Gx = [(G^* - G), x]$, y ya que $G = -iH - \frac{1}{2}\sum\limits_k L^*_k L_k$, se sigue que $(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(x) = 2i[H,x]$ i.e. se cumple la condición de θ-QDB para todo $\theta \in [0,1]$.

Ahora, si el qms de Exclusión Asimétrica satisface la condición de θ-QDB para todo $\theta \in [0,1]$, en particular satisface la condición de 0-QDB. Se verificarán las condiciones del Teorema (1.2.3). Claramente $c = 0$; ahora, para $s > r$, $L^{+*}_{rs} = \sqrt{2a^+_{rs}} C^*_{rs} = \frac{\sqrt{2a^+_{rs}}\sqrt{2a^-_{sr}}}{\sqrt{2a^-_{sr}}} C_{sr} = \sqrt{\frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}}} L^-_{sr}$, entonces

$$\lambda_{rs}^{-\frac{1}{2}} L^{+*}_{rs} = \sqrt{\frac{\rho(1_r)}{\rho(1_s)}} L^{+*}_{rs} = \sqrt{\frac{\rho(1_r)a^+_{rs}}{\rho(1_s)a^-_{sr}}} L^-_{sr}. \tag{2.28}$$

De aquí que la condición (2) de (1.2.3), se satisface si y sólo si

$$u_{rs,r's'} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho(1_r)a^+_{rs}}{\rho(1_s)a^-_{sr}}} & if\ r's' = s\,r \text{ y } s > r \\ \sqrt{\frac{\rho(1_r)a^-_{rs}}{\rho(1_s)a^+_{sr}}} & if\ r's' = s\,r \text{ y } s < r \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}, \tag{2.29}$$

luego $(u_{rs,r's'})_{rs,r's'}$ es operador unitario si y sólo si $\frac{\rho(1_r)a^+_{rs}}{\rho(1_s)a^-_{sr}} = 1$ si $s > r$. $\square$

Con el propósito de dar simplicidad a la nomenclatura, de aquí en adelante se denotará

$$H_m^n := \prod_{t=m}^{n} \frac{a_{tt+1}^+}{a_{t+1t}^-} \quad \text{para } m \leq n \quad \text{y} \quad H_m^n := 1 \quad \text{para } n < m. \tag{2.30}$$

La siguiente proposición es la 3.2 en [30].

Proposición. 2.2.5. *Sea ρ un estado invariante y fiel para el qms de Exclusión Asimétrica en el nivel uno, y que satisface la condición de balance detallado infinitesimal. Entonces $\sum\limits_{s>r} H_r^{s-1} < \infty$, y la forma explícita de los valores propios de ρ es,*

$$\rho(1_r) = \big(1 + \sum_{s>r} H_r^{s-1} + \sum_{s<r} (H_s^{r-1})^{-1}\big)^{-1}. \tag{2.31}$$

Demostración. Sea r un sitio fijo. Como ρ es un estado entonces $1 = \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \rho(1_s) = \rho(1_r) + \sum\limits_{s>r} \rho(1_s) + \sum\limits_{s<r} \rho(1_s)$. Un empleo repetido de (2.24) produce $\rho(1_{r+2}) = \frac{a_{r+1r+2}^+}{a_{r+2r+1}^-} \rho(1_{r+1}) = H_r^{r+1} \rho(1_r)$. De manera general, para $s > r$, $\rho(1_s) = H_r^{s-1} \rho(1_r)$ y para $s < r$, $\rho(1_s) = (H_s^{r-1})^{-1} \rho(1_r)$. Por lo tanto

$$1 = \rho(1_r)\big(1 + \sum_{s>r} H_r^{s-1} + \sum_{s<r} (H_s^{r-1})^{-1}\big). \tag{2.32}$$

De este modo, y para cada r, se tiene que $\sum\limits_{s>r} H_r^{s-1} < \infty$ y (2.31). □

2.3 Estados invariantes de equilibrio en el nivel n

Sean los conjuntos

$$C^+ := \{(\eta, r, s) : s > r,\ (1 - \eta_s)\eta_r = 1\},$$

$$C^- := \{(\eta, r, s) : s < r,\ (1 - \eta_s)\eta_r = 1\},$$

$$C_n^{\pm} := \{(\eta, r, s) \in C^{\pm} :\ \eta \in \mathcal{S}_n\}. \tag{2.33}$$

Una condición suficiente para que un estado diagonal $\sigma = \sum\limits_{\eta} \sigma(\eta) |\eta\rangle\langle\eta|$ en el dominio de $\mathcal{L}_*$ sea invariante, se deduce fácilmente de (2.9), ya que en un estado diagonal σ, $\mathcal{L}_*(\sigma) =$

$$\sum_{\eta\in\mathcal{S}} \Big\{ \sum_{r} \big(\sum_{s>r} 2a_{rs}^+ \sigma(\eta_{rs})(1 - \eta_r)\eta_s + \sum_{s<r} 2a_{rs}^- \sigma(\eta_{rs})(1 - \eta_r)\eta_s \big) - 2Re\ c(\eta) \Big\} |\eta\rangle\langle\eta|. \tag{2.34}$$

Aplicando el cambio de variables $(r,s) \mapsto (s,r)$ y la definición (2.33) en (2.34)

$$\mathcal{L}_*(\sigma) = 2\sum_{C^+}(a_{sr}^-\sigma(\eta_{rs}) - a_{rs}^+\sigma(\eta))|\eta\rangle\langle\eta| + 2\sum_{C^-}(a_{sr}^+\sigma(\eta_{rs}) - a_{rs}^-\sigma(\eta))|\eta\rangle\langle\eta|. \qquad (2.35)$$

De lo anterior se observa que una condición suficiente para que $\mathcal{L}_*(\sigma) = 0$, es

$$\sigma(\eta_{rs}) = \frac{a_{rs}^+}{a_{sr}^-}\sigma(\eta) \qquad \text{cuando } s > r, \quad (1-\eta_s)\eta_r = 1, \qquad (2.36)$$

condición que al nivel $n = 1$ es (2.24).

Las dos siguientes proposiciones están basadas en los trabajos [39] y [42], la primera de ellas da un método para construir un estado invariante en el nivel n a partir de la existencia de un estado invariante en el nivel $n = 1$ y al que se denotará por ρ_1.

Proposición. 2.3.1. *Sea ρ_1 un estado invariante y fiel en el nivel $n = 1$; sea $\alpha_r : \{0,1\} \to [0,1]$ definida por $\alpha_r(x) = \frac{\rho_1(1_r)^x}{1+\rho_1(1_r)}$. Para cada $\eta \in \mathcal{S}$, sea*

$$\rho(\eta) = \prod_{r\in\mathbb{Z}_+} \alpha_r(\eta(r)), \qquad (2.37)$$

entonces

1. *$\rho(\eta) > 0$ para toda $\eta \in \mathcal{S}$.*

2. *$\rho = \sum_{\eta\in\mathcal{S}} \rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ es un estado invariante.*

Demostración. 1. Ya que

$$\rho(\eta) = \prod_{r\in\mathbb{Z}_+} \frac{\rho_1(1_r)^{\eta(r)}}{1+\rho_1(1_r)} = \prod_{r\in\ Supp(\eta)} \frac{\rho_1(1_r)}{1+\rho_1(1_r)} \prod_{r\notin\ Supp(\eta)} \frac{1}{1+\rho_1(1_r)} \qquad (2.38)$$

y el primer producto tiene una cantidad finita de factores, es suficiente probar que el segundo producto es positivo. Se sabe que $\prod_{r\notin\ Supp(\eta)} \frac{1}{1+\rho_1(1_r)} > 0$ si y sólo si $\sum_{r\notin\ Supp(\eta)} \log(1+\rho_1(1_r)) < \infty$; además $\frac{\log(1+\rho_1(1_r))}{\rho_1(1_r)} \underset{|r|\to\infty}{\longrightarrow} 1$ si y sólo si $\rho_1(1_r) \underset{|r|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como $\sum_r \rho_1(1_r) = 1$, se sigue que $\prod_{r\notin\ Supp(\eta)} \frac{1}{1+\rho_1(1_r)} > 0$.

2. Para probar que ρ es un estado, se mostrará que $\sum_{\eta \in \mathcal{S}} \rho(\eta) = 1$. Para ello se sigue a a [34] y [42]. Por cada sitio $r \in \mathbb{Z}_+$, α_r es una medida de probabilidad en $\{0,1\}$; considérese la medida producto P de las $\alpha_{r's}$, la cual es una medida definida en la σ-álgebra cilíndrica $\mathcal{C}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, de aquí que $\rho(\eta)$ dada por (2.37) es la medida de $\eta \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, la que, claramente pertenece a $\mathcal{C}$, y

$$P(S) = \sum_{\eta \in S} \rho(\eta) > 0. \tag{2.39}$$

Se probará que S es un evento cola con respecto a una sucesión de variables aleatorias independientes, con esto y la ley 0-1 de Kolmogorov, se concluirá que

$$\sum_{\eta \in S} \rho(\eta) = 1. \tag{2.40}$$

Sea $\pi_n : \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+} \to \{0,1\}$ la proyección sobre el sitio n i.e. $\pi_n \eta = \eta(n)$. Entonces $\{\pi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes definidas en $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{C}, P)$, y $S = \liminf_{n\to\infty} \pi_n^{-1}(0)$. De aquí que S sea un evento cola con respecto a $\{\pi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ahora, se probará que el estado es invariante, verificando que ρ satisface (2.36). Obsérvese que $\rho(\eta_{rs}) =$

$$\prod_{\substack{t \in Supp(\eta_{rs}) \\ t \neq r,s}} \frac{\rho_1(1_t)}{1+\rho_1(1_t)} \cdot \prod_{\substack{t \notin Supp(\eta_{rs}) \\ t \neq r,s}} \frac{1}{1+\rho_1(1_t)} \cdot \frac{\rho_1(1_r)^{1-\eta(r)}}{1+\rho_1(1_r)} \cdot \frac{\rho_1(1_s)^{1-\eta(s)}}{1+\rho_1(1_s)} \tag{2.41}$$

y que $\rho(\eta) =$

$$\prod_{\substack{t \in Supp(\eta) \\ t \neq r,s}} \frac{\rho_1(1_t)}{1+\rho_1(1_t)} \cdot \prod_{\substack{t \notin Supp(\eta) \\ t \neq r,s}} \frac{1}{1+\rho_1(1_t)} \cdot \frac{\rho_1(1_r)^{\eta(r)}}{1+\rho_1(1_r)} \cdot \frac{\rho_1(1_s)^{\eta(s)}}{1+\rho_1(1_s)}; \tag{2.42}$$

dado lo anterior, es suficiente probar que $\frac{\rho_1(1_r)^{1-\eta(r)}}{1+\rho_1(1_r)} \cdot \frac{\rho_1(1_s)^{1-\eta(s)}}{1+\rho_1(1_s)} = \frac{a_{rs}^{+}}{a_{sr}^{-}} \cdot \frac{\rho_1(1_r)^{\eta(r)}}{1+\rho_1(1_r)} \cdot \frac{\rho_1(1_s)^{\eta(s)}}{1+\rho_1(1_s)}$ siempre que $s > r$ y $(1-\eta_s)\eta_r = 1$; pero bajo tal condición, la última ecuación se reduce a $\rho_1(1_s) = \frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}}\rho_1(1_r)$, que es la condición de *balance detallado infinitesimal* (2.24).

□

Proposición. 2.3.2. *En el nivel n, el qms de Exclusión Asimétrica satisface la condición de* 0*-QDB con respecto al estado invariante y fiel dado en la proposición anterior.*

Demostración. Para probarlo, es suficiente con mostrar que las partes completamente positivas de $\mathcal{L}$ y $\widetilde{\mathcal{L}}$ son iguales, ya que de este modo $(\mathcal{L}-\widetilde{\mathcal{L}})(x) = 2i[H,x]$. Primero, obsérvese que $\rho L^{\pm}_{rs}\eta = \rho\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}(1-\eta_s)\eta_r\eta_{rs} = \rho(\eta_{rs})L^{\pm}_{rs}\eta$ y $L^{\pm}_{rs}\rho\eta = \rho(\eta)L^{\pm}_{rs}\eta$, por (2.36)

$$\rho L^+_{rs} = \frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}}L^+_{rs}\rho \quad \text{si } s>r, \quad \rho L^-_{rs} = \frac{a^-_{rs}}{a^+_{sr}}L^-_{rs}\rho \quad \text{si } s<r. \tag{2.43}$$

Por otra parte, para $s>r$ $L^{+*}_{rs} = (\frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}})^{\frac{1}{2}}L^-_{sr}$ y para $s<r$ $L^{-*}_{rs} = (\frac{a^-_{rs}}{a^+_{sr}})^{\frac{1}{2}}L^+_{sr}$, de lo cual se sigue que

$$\rho L^{+*}_{rs} = \big(\frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}}\big)^{\frac{1}{2}}\rho L^-_{sr} = \big(\frac{a^+_{rs}}{a^-_{sr}}\big)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a^-_{sr}}{a^+_{rs}}L^-_{sr}\rho = \big(\frac{a^-_{sr}}{a^+_{rs}}\big)^{\frac{1}{2}}L^-_{sr}\rho \quad \text{para } s>r \tag{2.44}$$

y $\rho L^{-*}_{rs} = \big(\frac{a^+_{sr}}{a^-_{rs}}\big)^{\frac{1}{2}}L^+_{sr}\rho$ para $s<r$; por lo tanto

$$tr(\rho x L^{+*}_{rs}yL^+_{rs}) = tr(L^+_{rs}\rho x L^{+*}_{rs}y) = tr(\rho L^{-*}_{sr}xL^-_{sr}y) \quad \text{para } s>r \tag{2.45}$$

y

$$tr(\rho x L^{-*}_{rs}yL^-_{rs}) = tr(\rho L^{+*}_{sr}xL^+_{sr}y). \tag{2.46}$$

(2.45),(2.46) implican que $tr(\rho x\sum_r\big(\sum_{s>r}L^{+*}_{rs}yL^+_{rs} + \sum_{s<r}L^{-*}_{rs}yL^-_{rs})\big) =$
$tr(\rho\sum_r\big(\sum_{s>r}L^{-*}_{sr}xL^-_{sr} + \sum_{s<r}L^{+*}_{sr}xL^+_{sr}\big)y)$, como $y\in\mathcal{B}(h)$ es arbitrario, se sigue que $\Phi = \widetilde{\Phi}$. □

2.3.1 Una condición suficiente para la existencia de estado invariante

El siguiente teorema es una reelaboración del Teorema 3.1 en [27].

Teorema. 2.3.3. *Para cada* $r_0\in\mathbb{Z}_+$, *sea* $h(r_0) = \sum_{s>r_0}a^+_{r_0 s} + \sum_{s<r_0}a^-_{r_0 s}$. *Sea* $\rho_n := \sum_{\eta\in\mathcal{S}_n}\rho_n(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ *un estado diagonal en el nivel n tal que sus valores propios satisfacen*

(2.36), y supóngase que

$$\sum_{C_n^+} a_{rs}^+ \rho_n(\eta) + \sum_{C_n^-} a_{rs}^- \rho_n(\eta) < \infty, \tag{2.47}$$

entonces ρ_n es un estado invariante para el qms de Exclusión Asimétrica.

Demostración. Se probará que en $L_1(h)$

$$\rho_n = \lim_{k\to\infty} \rho_n^k \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_*(\rho_n^k) = 0. \tag{2.48}$$

Y ya que $\mathcal{L}_*$ es un operador cerrado, se concluye que $\rho_n \in Dom(\mathcal{L}_*)$ y $\mathcal{L}_*(\rho_n) = 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$, $B_k := \{r \in \mathbb{Z}_+ : |r| \le k\}$, $\mathcal{S}_n^k := \{\eta \in \mathcal{S}_n : Supp(\eta) \subset B_k\}$ y $\rho_n^k = \sum_{\eta\in\mathcal{S}_n^k} \rho_n(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$. Debido a la Proposición 3.32 en Ref. [13] $\rho_n^k \in Dom(\mathcal{L}_*)$. Obsérvese que $\#\mathcal{S}_n^k < \infty$ ya que $\#B_k < \infty$; $B_k \subset B_{k+1}$ y $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \mathbb{Z}_+$, de lo cual se sigue que $\mathcal{S}_n^k \subset \mathcal{S}_n^{k+1}$ y $\cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{S}_n^k = \mathcal{S}_n$; por lo tanto $\rho_n \ge \rho_n^{k+1} \ge \rho_n^k$ y

$$||\rho_n - \rho_n^k||_1 = tr(|\rho_n - \rho_n^k|) = tr(\rho_n - \rho_n^k) = \sum_{\eta\in\mathcal{S}_n\setminus\mathcal{S}_n^k} \rho_n(\eta) \to 0 \tag{2.49}$$

cuando $k \to \infty$ ya que $\sum_{\eta\in\mathcal{S}_n} \rho_n(\eta) = 1$. Para probar el segundo límite considérese la siguiente partición de los conjuntos $C_n^{\pm}$

$$\begin{aligned}
D_k^{\pm} &:= \{(\eta, r, s) \in C_n^{\pm} : \eta \in \mathcal{S}_n^k, \eta_{rs} \notin \mathcal{S}_n^k\},\\
E_k^{\pm} &:= \{(\eta, r, s) \in C_n^{\pm} : \eta \notin \mathcal{S}_n^k, \eta_{rs} \in \mathcal{S}_n^k\},\\
F_k^{\pm} &:= \{(\eta, r, s) \in C_n^{\pm} : \eta \in \mathcal{S}_n^k, \eta_{rs} \in \mathcal{S}_n^k\},\\
G_k^{\pm} &:= \{(\eta, r, s) \in C_n^{\pm} : \eta \notin \mathcal{S}_n^k, \eta_{rs} \notin \mathcal{S}_n^k\}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

De (2.35), se tiene que $\mathcal{L}_*(\rho_n^k) =$

$$2\sum_{C_n^+}(a_{sr}^-\rho_n^k(\eta_{rs}) - a_{rs}^+\rho_n^k(\eta))|\eta\rangle\langle\eta| + 2\sum_{C_n^-}(a_{sr}^+\rho_n^k(\eta_{rs}) - a_{rs}^-\rho_n^k(\eta))|\eta\rangle\langle\eta|. \tag{2.51}$$

Nótese que $\rho_n^k(\eta) = 0$ si $\eta \notin \mathcal{S}_n^k$ y $\rho_n^k(\eta) = \rho_n(\eta)$ si $\eta \in \mathcal{S}_n^k$, por lo que la suma sobre $G_k^{\pm}$ es cero al igual que la suma sobre $F_k^{\pm}$, esto último debido a (2.36); la anterior ecuación se reduce a $\mathcal{L}_*(\rho_n^k) =$

$$2\Big(\sum_{E_k^+} a_{sr}^-\rho_n^k(\eta_{rs}) + \sum_{E_k^-} a_{sr}^+\rho_n^k(\eta_{rs}) - \sum_{D_k^+} a_{rs}^+\rho_n^k(\eta) - \sum_{D_k^-} a_{rs}^-\rho_n^k(\eta)\Big)|\eta\rangle\langle\eta|, \tag{2.52}$$

debido a la desigualdad del triángulo

$$||\mathcal{L}_*(\rho_n^k)||_1 \leq 2\big(\sum_{E_k^+} a_{sr}^-\rho_n^k(\eta_{rs}) + \sum_{E_k^-} a_{sr}^+\rho_n^k(\eta_{rs}) + \sum_{D_k^+} a_{rs}^+\rho_n^k(\eta) + \sum_{D_k^-} a_{rs}^-\rho_n^k(\eta)\big). \quad (2.53)$$

Si $(\eta, r, s) \in E_k^-$ entonces $\eta \notin \mathcal{S}_n^k$ y $\eta_{rs} \in \mathcal{S}_n^k$, lo cual implica que $r \notin Supp(\eta_{rs})$, $s \in Supp(\eta_{rs}) \subset B_k$ y $\{r, s\} \triangle Supp(\eta_{rs}) = Supp(\eta) \not\subset B_k$. i.e. $|r| > k$. Por lo tanto, y ya que $\rho_n(\eta_{rs}) \leq 1$

$$a_{sr}^+\rho_n(\eta_{rs})1_{E_k^-}(\eta, r, s) \leq \sum_{|l|>k} a_{sl}^+; \quad (2.54)$$

de manera similar, si $(\eta, r, s) \in D_k^+$ entonces $|s| > k$ y

$$a_{rs}^+\rho_n(\eta)1_{D_k^+}(\eta, r, s) \leq \sum_{|l|>k} a_{rl}^+. \quad (2.55)$$

Si $(\eta, r, s) \in E_k^+$ entonces $\eta \notin \mathcal{S}_n^k$ y $\eta_{rs} \in \mathcal{S}_n^k$, lo que implica que $r \notin Supp(\eta_{rs})$, $s \in Supp(\eta_{rs}) \subset B_k$ y $\{r, s\} \triangle Supp(\eta_{rs}) = Supp(\eta) \not\subset B_k$. i.e. $|r| > k$, lo cual es una contradicción ya que $s > r$; lo mismo sucede si $(\eta, r, s) \in D_k^-$. De aquí, se tiene que para toda $(\eta, r, s) \in C_n$

$$0 \leq a_{sr}^+\rho_n(\eta_{rs})1_{E_k^-}(\eta, r, s) + a_{rs}^+\rho_n(\eta)1_{D_k^+}(\eta, r, s) \leq \sum_{|l|>k} a_{sl}^+ + \sum_{|l|>k} a_{rl}^+ \to 0 \quad (2.56)$$

cuando $k \to \infty$. Por otra parte, para toda $(\eta, r, s) \in C_n$

$$0 \leq a_{sr}^+\rho_n(\eta_{rs})1_{E_k^-}(\eta, r, s) + a_{rs}^+\rho_n(\eta)1_{D_k^+}(\eta, r, s) \leq a_{sr}^+\rho_n(\eta_{rs}) + a_{rs}^+\rho_n(\eta), \quad (2.57)$$

lo cual no depende de k; nótese que (2.36) ocurre si y sólo si $a_{sr}^+\rho(\eta_{rs}) = a_{rs}^-\rho(\eta)$, $s < r$, $(1 - \eta_s)\eta_r = 1$; sumando sobre toda $(\eta, r, s) \in C_n^\pm$

$$\sum_{C_n^+} a_{rs}^+\rho_n(\eta) + \sum_{C_n^-} a_{rs}^-\rho_n(\eta) < \infty; \quad (2.58)$$

de donde se sigue que el lado derecho de (2.53) se va a cero cuando $k \to \infty$, debido al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. □

En el nivel $n = 1$, la ecuación (2.36) se lee como,

$$\sum_r \sum_{s>r} \rho(1_r)a_{rs}^+ + \sum_r \sum_{s<r} \rho(1_r)a_{rs}^- < \infty. \quad (2.59)$$

Proposición. 2.3.4. $\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\big(\sum_{s>r}2a^+_{rs}+\sum_{s<r}2a^-_{rs}\big)<\infty$ *si y sólo si para toda* $k\in\mathbb{N}$, $\Phi(I_k)$ *es un operador acotado en* $V_k:=\overline{Span\,\beta_k}$*, donde* $I_k =$ *es la identidad en* V_k*.*

Demostración. Obsérvese que $\Phi(I_k)=\sum_{\eta\in\mathcal{S}_k}F(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$. Se empieza por probar la suficiencia.
$\Phi(I_1)=\sum_{r\in\mathbb{Z}_+}F(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r|$ es un operador acotado y por lo tanto,

$$\infty>\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}F(1_r)=\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\big(\sum_{s>r}2a^+_{rs}+\sum_{s<r}2a^-_{rs}\big). \tag{2.60}$$

Para probar la necesidad. Sea $k\in\mathbb{N}$ y $\eta\in\mathcal{S}_k$, entonces $F(\eta)=$

$$\sum_{r\in Supp(\eta)}\sum_{s>r,s\notin Supp(\eta)}2a^+_{rs}+\sum_{r\in Supp(\eta)}\sum_{s<r,s\notin Supp(\eta)}2a^-_{rs}\leq\sum_{r\in Supp(\eta)}F(1_r). \tag{2.61}$$

Por lo tanto

$$||\Phi(I_k)||=\sup_{\eta\in\mathcal{S}_k}F(\eta)\leq\sup_{\eta\in\mathcal{S}_k}\sum_{r\in Supp(\eta)}F(1_r)\leq\sup_{\eta\in\mathcal{S}_k}\big(\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}F(1_r)\big)(\#Supp(\eta))=$$

$$k\cdot\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}F(1_r)=k\cdot\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\big(\sum_{s>r}2a^+_{rs}+\sum_{s<r}2a^-_{rs}\big)<\infty. \tag{2.62}$$

□

2.4 Dominio de atracción de los estados invariantes

Con un estado invariante ρ en toda la dinámica, se construye uno en el nivel n al que se denotará por ρ_n. Obsérvese que para cada $n\geq 1$ y $r\neq s$, P_n la proyección ortogonal sobre V_n y los operadores de Krauss $L^{\pm}_{rs}$ conmutan. Por una parte, sobre una configuración $\eta\in\mathcal{S}$, $P_nL_{rs}\eta=$

$$\begin{cases}\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}P_n\eta_{rs} & \text{si}\,(1-\eta_s)\eta_r=1\\ 0 & \text{si}\,(1-\eta_s)\eta_r=0\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}\eta_{rs} & \text{si}\,(1-\eta_s)\eta_r=1,\ |\eta|=n\\ 0 & \text{si}\,(1-\eta_s)\eta_r=0\,\text{ó}\,|\eta|\neq n.\end{cases}$$

Por otra parte $L_{rs}P_n\eta=$

$$\begin{cases}L_{rs}\eta_{rs} & \text{si}\,|\eta|=n\\ 0 & \text{si}\,|\eta|\neq n\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{2a^{\pm}_{rs}}\eta_{rs} & \text{si}\,|\eta|=n,\ (1-\eta_s)\eta_r=1\\ 0 & \text{si}\,(1-\eta_s)\eta_r=0\,\text{ó}|\eta|\neq n.\end{cases}$$

Proposición. 2.4.1. *Sea $\{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo cuántico minimal del qms de Exclusión Asimétrica, entonces*

1. $P_n\mathcal{T}_t(x)P_n = \mathcal{T}_t(P_nxP_n)$.

2. *Si ρ un estado invariante en toda la dinámica y*

$$\rho_n := \frac{P_n\rho P_n}{tr(\rho P_n)},$$

entonces ρ_n es un estado invariante en el nivel n.

Demostración. 1. Se probará que se se satisface $P_n\mathcal{T}_t^k(x)P_n = \mathcal{T}_t^k(P_nxP_n)$, para cada iteración del proceso constructivo del semigrupo cuántico minimal. Se procederá por inducción sobre k; para $k = 0$ y de (1.11), $\mathcal{T}_t^0(x) := W_t^*xW_t$, donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por G, luego

$$P_n\mathcal{T}_t^0(x)P_n = P_nW_t^*xW_tP_n = W_t^*P_nxP_nW_t = \mathcal{T}_t^0(P_nxP_n),$$

ya que P_n, G y el semigrupo que genera, son operadores diagonales respecto a la base $\{\eta : \eta \in \mathcal{S}\}$, y por tanto conmutan. Ahora, supóngase que para $u, v \in Dom(G)$, $x \in \mathcal{B}(h)$ y algún k, se satisface

$$\left\langle u, P_n\mathcal{T}_t^k(x)P_nv\right\rangle = \left\langle u, \mathcal{T}_t^k(P_nxP_n)v\right\rangle$$

y se probará se satisface para $k+1$. De (1.9),

$$\left\langle u, P_n\mathcal{T}_t^{k+1}(x)P_nv\right\rangle = \left\langle P_nu, \mathcal{T}_t^{k+1}(x)P_nv\right\rangle =$$

$$\langle P_nu, \mathcal{T}_t^0(x)P_nv\rangle + \int_0^t \Phi\left(\mathcal{T}_\tau^k(x)\right)[W_{t-\tau}P_nu, W_{t-\tau}P_nv]d\tau. \tag{2.63}$$

Ahora, de (1.10) y la hipótesis de inducción, el integrando en (2.63) es igual a

$$\sum_{r\neq s}\left\langle L_{rs}^{\pm}W_{t-\tau}P_nu, \mathcal{T}_\tau^k(x)W_{t-\tau}P_nv\right\rangle = \sum_{r\neq s}\left\langle L_{rs}^{\pm}W_{t-\tau}u, P_n\mathcal{T}_\tau^k(x)P_nW_{t-\tau}v\right\rangle =$$

$$\sum_{r\neq s}\left\langle L_{rs}^{\pm}W_{t-\tau}u, \mathcal{T}_\tau^k(P_nxP_n)W_{t-\tau}v\right\rangle = \Phi\left(\mathcal{T}_\tau^k(P_nxP_n)\right)[W_{t-\tau}u, W_{t-\tau}v]. \tag{2.64}$$

De (2.64) se sigue que (2.63) es igual a

$$\langle u, P_n\mathcal{T}_\tau^0(x)P_n v\rangle + \int_0^t \Phi\left(\mathcal{T}_\tau^k(P_nxP_n)\right)[W_{t-\tau}u, W_{t-\tau}v]d\tau =$$

$$\left\langle u, \mathcal{T}_t^{k+1}(P_nxP_n)v\right\rangle.$$

2. Claramente ρ_n es positivo, $tr\big(\frac{P_n\rho P_n}{tr(\rho P_n)}\big) = \frac{tr(\rho P_n)}{tr(\rho P_n)} = 1$ y para todo $x \in \mathcal{B}(h)$,

$$tr\big(\mathcal{T}_{*t}(\frac{P_n\rho P_n}{tr(\rho P_n)})x\big) = \frac{1}{tr(\rho P_n)}tr\big(\mathcal{T}_{*t}(P_n\rho P_n)x\big) = \frac{1}{tr(\rho P_n)}tr\big(\rho P_n\mathcal{T}_t(x)P_n\big) =$$

$$\frac{1}{tr(\rho P_n)}tr\big(\rho\mathcal{T}_t(P_nxP_n)\big) = \frac{1}{tr(\rho P_n)}tr\big(\mathcal{T}_{*t}(\rho)P_nxP_n\big) = tr\big((\frac{P_n\rho P_n}{tr(\rho P_n)})x\big), \tag{2.65}$$

lo cual muestra que es un estado invariante.

□

La siguiente proposición esta basada en [29].

Proposición. 2.4.2. *Se satisface lo siguiente:*

1. *En cada nivel hay un único estado invariante para el qms de Exclusión Asimétrica.*

2. *Todo estado invariante diagonal es una combinación lineal convexa de estados invariantes ρ_n definidos en la proposición anterior.*

Demostración. Lo primero afirmación se satisface dada la irreducibilidad de la dinámica en cada nivel (véase [19]); se denotará por ρ_n a ese único estado invariante en su respectivo nivel. Sea σ un estado invariante diagonal. Se mostrará que

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} tr(\sigma P_n)\rho_n. \tag{2.66}$$

Dado que ρ conmuta con las P_n y que $P_n\sigma P_n = tr(\sigma P_n)\rho_n$, se sigue que

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\sigma P_n = \sum_{n=1}^{\infty} tr(\sigma P_n)\rho_n. \tag{2.67}$$

□

Definición. 2.4.3. *Dado un estado invariante ρ su dominio de atracción es*

$$A(\rho) := \{\sigma \in S(h) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\sigma)ds = \rho \, \text{en la topología débil de } L_1(h)\}, \tag{2.68}$$

donde $S(h)$ es el conjunto de estados en $\mathcal{B}(h)$.

La siguiente proposición (Corolario 2.1 en [29]) caracteriza al dominio de atracción de un estado invariante.

Proposición. 2.4.4. *Sea ρ un estado invariante diagonal. Entonces $A(\rho) = \{\sigma \in S(h) : tr(\sigma P_n) = tr(\rho P_n) \, \forall n\}$.*

Demostración. Sea $\sigma \in A(\rho)$, debido a la markovianidad de $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{T}_{*t}$ preserva la traza, de donde se sigue que $tr(\sigma P_n) = tr(\mathcal{T}_{*t}(\sigma)P_n)$, de este modo

$$tr(\sigma P_n) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t tr(\mathcal{T}_{*s}(\sigma)P_n)ds = \lim_{t\to\infty} tr\big(\frac{1}{t}\int_0^t (\mathcal{T}_{*s}(\sigma)dsP_n\big) = tr(\rho P_n), \tag{2.69}$$

debido a la continuidad. Por otra parte, si $tr(\sigma P_n) = tr(\rho P_n)$ para toda n

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\sigma)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}_{*s}(\sigma \sum_n P_n)ds =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_n \mathcal{T}_{*s}(\rho P_n)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_n P_n\sigma P_n ds = \rho. \tag{2.70}$$

□

Capítulo 3

Algunos estados invariantes fuera de equilibrio en el nivel uno

Este capítulo contiene los principales resultados en [30].
Se inicia esta sección con una discusión heurística sobre como se establecen hipótesis bajo las cuales es posible construir estados invariantes fuera de equilibrio para el qms de Exclusión Asimétrica. De la prueba del Teorema (2.2.3), se desprende que la condición (2.21) sobre los valores propios de ρ es necesaria para que $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$, mientras que la condición (2.24) es solo suficiente para ello, ya que (2.24) implica la anulación de cada témino en el lado izquierdo de (2.21). En esta sección se propone una forma de construir una solución a (2.21) sin que se cumpla la condición (2.24); una vez hecho esto, se prueba que, en efecto, se tiene a un estado invariante fuera de equilibrio. Los resultados principales están contenidos en los Teoremas 3.0.5, 3.0.6, 3.0.7 y 3.0.8. El capítulo finaliza con un ejemplo explícito.

De (2.12) y (2.26), ecuación en la que no se ha empleado la hipótesis de balance detallado infinitesimal (2.24), se puede fácilmente obtener que

$$(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(x) = 2i[H, x] +$$

$$\sum_r \Big\{ \sum_{s>r} 2x_s \big(a^+_{rs} - a^-_{sr} \frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}\big) + \sum_{s<r} 2x_s \big(a^-_{rs} - a^+_{sr} \frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}\big) \Big\} |1_r\rangle\langle 1_r|. \tag{3.1}$$

Obsérvese que $x_s|1_r\rangle\langle 1_r| = |1_s\rangle\langle 1_r|^*x|1_s\rangle\langle 1_r|$, de este modo se puede reescribir (3.1) como

$$(\mathcal{L}-\widetilde{\mathcal{L}})(x) = 2i[H,x] + \sum_r\sum_{s>r} 2\big(a^+_{rs} - a^-_{sr}\frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}\big)|1_s\rangle\langle 1_r|^*x|1_s\rangle\langle 1_r| +$$

$$\sum_r\sum_{s<r} 2\big(a^-_{rs} - a^+_{sr}\frac{\rho(1_s)}{\rho(1_r)}\big)|1_s\rangle\langle 1_r|^*x|1_s\rangle\langle 1_r|, \tag{3.2}$$

es decir, el qms de Exclusión Asimétrica satisface la condición de balance detallado pesado (véase Definición 5 en [1]).

Para construir un estado invariante fuera de equilibrio, se proponen escalares estrictamente positivos $a^{\pm}_{rs}$ que satisfagan (2.21) y que al mismo tiempo al menos uno de los coeficientes de los operadores $|1_s\rangle\langle 1_r|^*x|1_s\rangle\langle 1_r|$ en (3.2), sea diferente de cero.

Se da la siguiente terminología: Para $s < r$, la expresión $(a^+_{sr}\rho(1_s) - a^-_{rs}\rho(1_r))$ será llamada *corriente hacia arriba de* s *a* r, y $(a^-_{rs}\rho(1_r) - a^+_{sr}\rho(1_s))$ *corriente hacia abajo de* r *a* s. Obsérvese que, para $s < r$ la *corriente hacia arriba de* s *a* r es uno de los sumandos que conforman el coeficiente del operador $|1_r\rangle\langle 1_r|$ en la ecuación (2.20), y su negativo, la *corriente hacia abajo de* r *a* s, es uno de los sumandos que conforman el coeficiente de $|1_s\rangle\langle 1_s|$ en la misma ecuación.

Sean s_0, s_1, r_0, s_2 sitios fijos, con $0 \le s_0 < r_0$. Supóngase que la corriente hacia arriba de s_0 a r_0 es diferente de cero, i.e.

$$a^+_{s_0r_0}\rho(1_{s_0}) - a^-_{r_0s_0}\rho(1_{r_0}) = d \neq 0. \tag{3.3}$$

La maneras más simple de compensar (3.3) en (2.21) es proponiendo que los valores propios de ρ satisfagan alguno de los dos siguientes casos:

Caso (I): Supóngase que

- $0 \le s_0 < s_1 < r_0$.
- La condición de balance detallado infinitesimal (2.24) es válida para todos los pares (r,s) diferentes de $(s_0,s_1),(s_0,r_0)$ y (s_1,r_0).
- Se tiene que

$$a^+_{s_1r_0}\rho(1_{s_1}) - a^-_{r_0s_1}\rho(1_{r_0}) = -d, \quad a^-_{s_1s_0}\rho(1_{s_1}) - a^+_{s_0s_1}\rho(1_{s_0}) = d. \tag{3.4}$$

Caso (II): Supóngase que

- $0 \le s_0 < r_0 < s_2$.
- La condición de balance detallado infinitesimal (2.24) es válida para todos los pares (r, s) diferentes de $(s_0, r_0), (s_0, s_2)$ y (r_0, s_2).
- Se tiene que

$$a^-_{s_2 r_0}\rho(1_{s_2}) - a^+_{r_0 s_2}\rho(1_{r_0}) = -d, \quad a^-_{s_2 s_0}\rho(1_{s_2}) - a^+_{s_0 s_2}\rho(1_{s_0}) = d. \tag{3.5}$$

Es evidente que (3.3) junto con las hipótesis del Caso (I) implican que

1. Se satisface la condición necesaria (2.21) para toda $r \in \mathbb{Z}_+$, ya que cada término en (2.21) es igual a cero excepto aquellos en los que $r = s_0$, s_1 o r_0; en estos casos, y si por ejemplo, $r = s_0$ entonces el lado izquierdo de (2.21) es igual a

$$\sum_{s>s_0}(a^-_{ss_0}\rho(1_s) - a^+_{s_0 s}\rho(1_{s_0})) + \sum_{s<s_0}(a^+_{ss_0}\rho(1_s) - a^-_{s_0 s}\rho(1_{s_0})) =$$

$$(a^-_{s_1 s_0}\rho(1_{s_1}) - a^+_{s_0 s_1}\rho(1_{s_0})) - (a^-_{r_0 s_0}\rho(1_{r_0}) - a^+_{s_0 r_0}\rho(1_{s_0})) = d - d = 0. \tag{3.6}$$

   De manera análoga (2.21) se satisface para $r = s_1$, r_0.

2. Si $s_0 + 1 \neq s_1$ y $s_1 + 1 \neq r_0$, es decir s_0, s_1 y r_0 no son consecutivos, entonces

$$a^-_{r+1r}\rho(1_{r+1}) = a^+_{rr+1}\rho(1_r) \tag{3.7}$$

   se satisface para toda $r \in \mathbb{Z}_+$. Si $s_0 + 1 = s_1$ entonces (3.7) se satisface para todo sitio r excepto para el sitio s_0. Si $s_1 + 1 = r_0$ entonces (3.7) se satisface para todo sitio r excepto para el sitio s_0.

3. $(\rho(1_{s_0}), \rho(1_{s_1}), \rho(1_{r_0}))$ es la única solución al sistema lineal

$$\begin{aligned} a^+_{s_0 r_0}\rho(1_{s_0}) - a^-_{r_0 s_0}\rho(1_{r_0}) &= \quad d \\ a^+_{s_1 r_0}\rho(1_{s_1}) - a^-_{r_0 s_1}\rho(1_{r_0}) &= \ -d \\ a^+_{s_0 s_1}\rho(1_{s_0}) - a^-_{s_1 s_0}\rho(1_{s_1}) &= \ -d \end{aligned} \tag{3.8}$$

   Si su determinante, Δ, es distinto de cero, obsérvese que las ecuaciones que componen al sistema (3.8) son justamente las relaciones (3.3) y (3.4).

4. Exactamente seis coeficiente es (3.2) son distintos de cero; los coeficientes en (3.8) y los negativos de estos, necesarios en la compensación.

El hecho de que los valores propios de ρ satisfagan las condiciones en el Caso (I) y (3.3), significa que se satisface la condición de balance detallado infinitesimal en todo el sistema excepto entre los sitios s_0, s_1 y r_0, los cuales forman un sub-sistema en el cual se viola la condición de reversibilidad de Kolmogorov (véase Definición 3.4 en Ref. [26]), ya que $\Delta = a^-_{r_0s_0}a^+_{s_0s_1}a^+_{s_1r_0} - a^+_{s_0r_0}a^-_{r_0s_1}a^-_{s_1s_0}$, entonces, asumir que $\Delta \neq 0$ equivale a $\frac{a^+_{s_0s_1}a^+_{s_1r_0}}{a^+_{s_0r_0}} \neq \frac{a^-_{r_0s_1}a^-_{s_1s_0}}{a^-_{r_0s_0}}$.
La solución a (3.8) es

$$\rho(1_{s_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}, \quad \rho(1_{s_1}) = \frac{d\Delta_{s_1}}{\Delta}, \quad \rho(1_{r_0}) = \frac{d\Delta_{r_0}}{\Delta}; \tag{3.9}$$

donde $d\Delta_{s_0}$, $d\Delta_{s_1}$ y $d\Delta_{r_0}$ son los determinantes de Cramer en la solución. La necesidad de resolver (3.8) junto con la de satisfacer (3.7) y el hecho de que los valores propios de ρ deben ser números estrictamente positivos que sumen 1, lleva a establecer ciertas hipótesis necesarias sobre Δ, Δ_{s_0}, Δ_{s_1}, Δ_{r_0}, d, las cuales están escritas a detalle e lo largo del Teorema 4.1 (véase ecuaciones (3.14) a (3.20)). Las diferentes hipótesis en el Teorema 4.1 toman en cuenta todas las posibles relaciones de vecindad que pueden existir entre los sitios s_0, s_1, r_0.
El análisis de (3.3) junto son las hipótesis del Caso (II) es similar al previo, ya que lleva al siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} a^+_{s_0s_2}\rho(1_{s_0}) - a^-_{s_2s_0}\rho(1_{s_2}) &= -d \\ a^+_{r_0s_2}\rho(1_{r_0}) - a^-_{s_2r_0}\rho(1_{s_2}) &= d \\ a^+_{s_0r_0}\rho(1_{s_0}) - a^-_{r_0s_0}\rho(1_{r_0}) &= d \end{aligned} \tag{3.10}$$

Obsérvese que el signo en el lado derecho de (3.10) es contrario al signo en el lado derecho de (3.8). De tal modo que si se cambia d por $-d$, el análisis es esencialmente el mismo.
Una primera estimación del valor de d se obtiene como sigue: un cálculo directo muestra que $\Delta_{s_0} = -(a^-_{r_0s_1}a^-_{s_1s_0} + a^-_{r_0s_0}a^-_{s_1s_0} + a^-_{r_0s_0}a^+_{s_1r_0})$, $\Delta_{s_1} = -(a^+_{s_0r_0}a^-_{r_0s_1} + a^+_{s_0s_1}a^-_{r_0s_1} + a^+_{s_0s_1}a^-_{r_0s_0})$, $\Delta_{r_0} = -(a^+_{s_0r_0}a^+_{s_1r_0} + a^+_{s_0s_1}a^+_{s_1r_0} + a^+_{s_0r_0}a^-_{s_1s_0})$; por lo tanto, si $\Delta > 0$ entonces $d < 0$ y de (3.9) se sigue que

$$\max\left\{\frac{\Delta}{\Delta_{s_0}}, \frac{\Delta}{\Delta_{s_1}}, \frac{\Delta}{\Delta_{r_0}}\right\} < d < 0. \tag{3.11}$$

Del mismo modo, si $\Delta < 0$ entonces $d > 0$ y

$$0 < d < \min\Big\{\frac{\Delta}{\Delta_{s_0}}, \frac{\Delta}{\Delta_{s_1}}, \frac{\Delta}{\Delta_{r_0}}\Big\}. \tag{3.12}$$

A fin de dar simplicidad a los cálculos, de aquí en adelante se denotará $H_m^n := \prod_{r=m}^n \frac{a^+_{rr+1}}{a^-_{r+1r}}$ para $m \leq n$ y $H_m^n := 1$ para $n < m$.

Teorema. 3.0.5. *Sean $\{a^+_{rs}\}$, $\{a^-_{sr}\}$ números positivos y $0 \leq s_0 < s_1 < r_0$ sitios fijos, tales que $\Delta \neq 0$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1} < \infty, \tag{3.13}$$

si uno de las siguientes condiciones se satisface

1. *$s_0 + 1 < s_1 < r_0 - 1$, es decir, los sitios no son consecutivos,*

$$\frac{\Delta_{s_1}}{\Delta_{s_0}} = H_{s_0}^{s_1-1}, \quad \frac{\Delta_{r_0}}{\Delta_{s_1}} = H_{s_1}^{r_0-1} \quad y \quad d := \frac{\Delta}{\Delta_{s_0}} H_0^{s_0-1}\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}\big)^{-1}. \tag{3.14}$$

2. *$s_0 + 1 = s_1$, $s_1 + 1 < r_0$, es decir, s_0 y s_1 son consecutivos,*

$$\Delta_{s_1} = \frac{\Delta + a^+_{s_0 s_1}\Delta_{s_0}}{a^-_{s_1 s_0}}, \qquad \frac{\Delta_{r_0}}{\Delta_{s_1}} = H_{s_1}^{r_0-1} \quad y \tag{3.15}$$

$$d := \Big(\frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}) + \frac{1}{a^-_{s_1 s_0}} \sum_{n=s_1}^{\infty} H_{s_1}^{n-1}\Big)^{-1}. \tag{3.16}$$

3. *$s_0 + 1 < s_1$, $s_1 + 1 = r_0$, es decir, s_1 y r_0 son consecutivos,*

$$\frac{\Delta_{s_1}}{\Delta_{s_0}} = H_{s_0}^{s_1-1}, \qquad \Delta_{r_0} = \frac{\Delta + a^+_{s_1 r_0}\Delta_{s_1}}{a^-_{r_0 s_1}} \quad y \tag{3.17}$$

$$d := \Big(\frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}) + \frac{1}{a^-_{r_0 s_1}} \sum_{n=r_0}^{\infty} H_{r_0}^{n-1}\Big)^{-1}. \tag{3.18}$$

4. *$s_0 + 1 = s_1 = r_0 - 1$, es decir, los tres son consecutivos,*

$$\Delta_{s_1} = \frac{\Delta + a^+_{s_0 s_1}\Delta_{s_0}}{a^-_{s_1 s_0}}, \quad \Delta_{r_0} = \frac{\big((a^+_{s_1 r_0} + a^-_{s_1 s_0})\Delta + a^+_{s_0 s_1} a^+_{s_1 r_0}\Delta_{s_0}\big)}{a^-_{s_1 s_0} a^-_{r_0 s_1}} \tag{3.19}$$

y $\qquad d :=$

$$\Big(\frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}) + \frac{1}{a^-_{s_1 s_0}} + \frac{1}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}}) \sum_{n=r_0}^{\infty} H_{r_0}^{n-1}\Big)^{-1}. \tag{3.20}$$

Entonces existe un estado diagonal ρ que satisface (3.9). Además, bajo los supuestos de la condición 1, la ecuación (3.7) se satisface para toda $r \in \mathbb{Z}_+$. Bajo los supuestos de la condición 2, (3.7) se satisface para toda $r \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{s_0\}$. Bajo los supuestos de la condición 3, (3.7) se satisface para toda $r \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{s_1\}$. Por último, y bajo los supuestos de la condición 4, (3.7) se satisface para toda $r \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{s_0, s_1\}$.

Demostración. 1. Sea

$$\rho(1_0) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}, \quad \rho(1_n) = \rho(1_0)H_0^{n-1} \quad \text{para toda } n \geq 1. \tag{3.21}$$

La primera igualdad en (3.21) y la definición de d en (3.14) implican que

$$\rho(1_0) = \frac{\Delta}{\Delta_{s_0}} H_0^{s_0-1}\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}\big)^{-1} \frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1} = \big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}\big)^{-1}, \tag{3.22}$$

y la segunda igualdad en (3.21) implica (3.7), $a^-_{n+1n}\rho(1_{n+1}) = a^+_{nn+1}\rho(1_n)$, es decir, se satisface la condición de balance detallado infinitesimal ente sitios consecutivos. En particular se tiene que

$$\rho(1_{s_0}) = \rho(1_0)H_0^{s_0-1} = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{s_0-1} = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}, \tag{3.23}$$

$$\rho(1_{s_1}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{s_0-1}H_{s_0}^{s_1-1} = \frac{d\Delta_{s_1}}{\Delta} \quad \text{y} \tag{3.24}$$

$$\rho(1_{r_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{s_0-1}H_{s_0}^{s_1-1}H_{s_1}^{r_0-1} = \frac{d\Delta_{r_0}}{\Delta}. \tag{3.25}$$

Además y debido a (3.22)

$$\sum_n \rho(1_n) = \rho(1_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(1_0)H_0^{n-1} = \rho(1_0)\big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}\big) = 1. \tag{3.26}$$

2. Sea $\rho(1_0)$ igual que en (3.21) y

$$\rho(1_n) = \begin{cases} \rho(1_0)H_0^{n-1} & \text{si } 1 \leq n \leq s_0 \\ \rho(1_0)H_0^{s_0} + \frac{d}{a^-_{s_1 s_0}} & \text{si } n = s_1 \\ \big(\rho(1_0)H_0^{s_0} + \frac{d}{a^-_{s_1 s_0}}\big)H_{s_1}^{n-1} & \text{si } n > s_1 \end{cases} \tag{3.27}$$

En este caso y debido a la definición de d en (3.16), $\rho(1_0) =$

$$\Big(\frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}(1+\sum_{n=1}^{\infty}H_0^{n-1})+\frac{1}{a^-_{s_1s_0}}\sum_{n=s_1}^{\infty}H_{s_1}^{n-1}\Big)^{-1}\frac{\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1} =$$

$$\Big((1+\sum_{n=1}^{\infty}H_0^{n-1})+\frac{\Delta}{a^-_{s_1s_0}\Delta_{s_0}}H_0^{s_0-1}\sum_{n=s_1}^{\infty}H_{s_1}^{n-1}\Big)^{-1}. \tag{3.28}$$

Evidentemente, la condición (3.7) se satisface para toda r excepto para $r = s_0$; como $\rho(1_n)$ se define igual que en el punto 1 para $n \leq s_0$, del mismo modo que en (3.23) $\rho(1_{s_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}$;

$$\rho(1_{s_1}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{s_0}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}} = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}\frac{a^+_{s_0s_1}}{a^-_{s_1s_0}}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}} = \frac{d\Delta_{s_1}}{\Delta}, \tag{3.29}$$

$$\rho(1_{r_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{r_0-1}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}}H_{s_1}^{r_0-1} =$$

$$\frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}\frac{a^+_{s_0s_1}}{a^-_{s_1s_0}}\frac{\Delta_{r_0}}{\Delta_{s_1}}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}}\frac{\Delta_{r_0}}{\Delta_{s_1}} = \frac{d}{\Delta}\frac{\Delta_{r_0}}{\Delta_{s_1}}\Big(\frac{\Delta+a^+_{s_0s_1}\Delta_{s_0}}{a^-_{s_1s_0}}\Big) = \frac{d\Delta_{r_0}}{\Delta}. \tag{3.30}$$

Además, debido a (3.27), $\sum\limits_n \rho(1_n) = \rho(1_0)+$

$$\sum_{n=1}^{s_0}\rho(1_0)H_0^{n-1}+\rho(1_0)H_0^{s_0}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}}+\sum_{n=s_1+1}^{\infty}\big(\rho(1_0)H_0^{n-1}+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}}H_{s_1}^{n-1}\big) =$$

$$\rho(1_0)\big(1+\sum_{n=1}^{\infty}H_0^{n-1}\big)+\frac{d}{a^-_{s_1s_0}}\sum_{n=s_1}^{\infty}H_{s_1}^{n-1}. \tag{3.31}$$

De la primera igualdad en (3.21), $d = \rho(1_0)\frac{\Delta}{\Delta_{s_0}}H_0^{s_0-1}$; de este modo y debido a (3.28), (3.31) es igual a

$$\rho(1_0)\Big((1+\sum_{n=1}^{\infty}H_0^{n-1})+\frac{\Delta}{a^-_{s_1s_0}\Delta_{s_0}}H_0^{s_0-1}\sum_{n=s_1}^{\infty}H_{s_1}^{n-1}\Big) = 1. \tag{3.32}$$

3. La demostración es similar a la del punto anterior.

4. Sea $\rho(1_0)$ igual que en (3.21) y

$$\rho(1_n) = \begin{cases} \rho(1_0)H_0^{n-1} & \text{si } 1 \leq n \leq s_0 \\ \rho(1_0)H_0^{s_0} + \frac{d}{a^-_{s_1 s_0}} & \text{si } n = s_1 \\ \rho(1_0)H_0^{s_1} + \frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}}) & \text{si } n = r_0 \\ \big(\rho(1_0)H_0^{s_1} + \frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}})\big)H_{r_0}^{n-1} & \text{si } n > r_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

En este caso, debido a (3.20) y (3.21), $\rho(1_0) =$

$$\big((1+\sum_{n=1}^{\infty} H_0^{n-1}) + \frac{\Delta}{a^-_{s_1 s_0}\Delta_{s_0}} H_0^{s_0-1} + \frac{\Delta}{a^-_{r_0 s_1}\Delta_{s_0}} H_0^{s_0-1}(1+\frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}}) \sum_{r=r_0}^{\infty} H_{r_0}^{n-1}\big)^{-1}. \tag{3.34}$$

Recuérdese que en este punto, se asume que $s_1 = s_0 + 1$ y $r_0 = s_1 + 1$. Es claro que (3.7) se satisface para toda r excepto para $r = s_0, s_1$; nuevamente y como en (3.23), $\rho(1_{s_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}$; del mismo modo que en (3.29) $\rho(1_{s_1}) = \frac{d\Delta_{s_1}}{\Delta}$ ya que en este punto tenemos las mismas suposiciones para Δ_{s_1} que en el punto 2;

$$\rho(1_{r_0}) = \frac{d\Delta_{s_0}}{\Delta}(H_0^{s_0-1})^{-1}H_0^{s_1} + \frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}}) =$$

$$\frac{d}{\Delta}\frac{\big((a^+_{s_1 r_0} + a^-_{s_1 s_0})\Delta + a^+_{s_0 s_1}a^+_{s_1 r_0}\Delta_{s_0}\big)}{a^-_{s_1 s_0}a^-_{r_0 s_1}} = \frac{d\Delta_{r_0}}{\Delta}, \tag{3.35}$$

debido a la segunda igualdad en (3.19). Además y debido a (3.33),

$$\sum_n \rho(1_n) = \rho(1_0) + \sum_{n=1}^{s_0}\rho(1_0)H_0^{n-1} + \rho(1_0)H_0^{s_0} + \frac{d}{a^-_{s_1 s_0}} + \rho(1_0)H_0^{s_1}$$

$$+\frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}}) + \sum_{n=r_0+1}^{\infty}\Big(\rho(1_0)H_0^{s_1} + \frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}})\Big)H_{r_0}^{n-1} =$$

$$\rho(1_0)(1 + \sum_{n=1}^{\infty}H_0^{n-1}) + \frac{d}{a^-_{s_1 s_0}} + \frac{d}{a^-_{r_0 s_1}}(1 + \frac{a^+_{s_1 r_0}}{a^-_{s_1 s_0}})\sum_{n=r_0}^{\infty}H_{r_0}^{n-1}, \tag{3.36}$$

nuevamente, por la primera igualdad en (3.21) y (3.34), la última expresión (3.36) es igual a 1.

□

El siguiente teorema da una condición suficiente para que el estado ρ construido en el Teorema 3.0.5 sea invariante.

Teorema. 3.0.6. *Si en adición, el estado diagonal ρ construido en el Teorema 3.0.5 satisface*

$$\rho(1_s)a_{sr}^{-} = \rho(1_r)a_{rs}^{+} \qquad \textit{para } s > r \textit{ y } (r,s) \neq (s_0,s_1),(s_0,r_0),(s_1,r_0), \tag{3.37}$$

y $\rho \in Dom(\mathcal{L}_*)$, entonces el estado diagonal es también invariante.

Demostración. Ya que $\rho \in Dom(\mathcal{L}_*)$, solo debe mostrarse que $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$. Como ρ is diagonal, (3.37) implica que cada sumando en (2.20) es igual a cero excepto los correspondientes al sistema lineal (3.8), de este modo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_*(\rho) = d|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}| - d|1_{s_0}\rangle\langle 1_{s_0}| - d|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}| + d|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}| - \\ d|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}| + d|1_{s_0}\rangle\langle 1_{s_0}| = 0.\end{aligned} \tag{3.38}$$

□

Se presenta ahora una condición suficiente para que el estado ρ del Teorema 3.0.6 pertenezca al dominio de $\mathcal{L}_*$.

Teorema. 3.0.7. *Sea ρ el estado diagonal del Teorema 3.0.5 que además satisface (3.37). Una condición suficiente para que $\rho \in Dom(\mathcal{L}_*)$ es*

$$\sum_r \sum_{s>r} a_{rs}^{+}\rho(1_r) < \infty. \tag{3.39}$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema (2.3.3). Ya que es claro que $\rho^k := \sum_{r\le k} \rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| \in Dom(\mathcal{L}_*)$, se probará que en $L_1(h)$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \rho^k \qquad \text{y} \qquad \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}_*(\rho^k) = 0, \tag{3.40}$$

y ya que $\mathcal{L}_*$ es un operador cerrado, se concluye que $\rho \in Dom(\mathcal{L}_*)$ y $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$. Para la prueba del primer límite, obsérvese que como $\rho \geq \rho^k$

$$\|\rho - \rho^k\|_1 = tr(|\rho - \rho^k|) = tr(\rho - \rho^k) = \sum_{r>k} \rho(1_r) \to 0 \tag{3.41}$$

cuando $k \to \infty$ ya que $\sum\limits_r \rho(1_r) = 1$.

Para la prueba del segundo límite, considérese los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} D_k^+ &= \{(r,s) : r \leq k < s\}, & E_k^- &= \{(r,s) : s \leq k < r\} \\ F_k^+ &= \{(r,s) : r < s \leq k\}, & F_k^- &= \{(r,s) : s < r \leq k\} \\ G_k^+ &= \{(r,s) : k < r < s\}, & G_k^- &= \{(r,s) : k < s < r\} \quad . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nótese que $\rho^k(1_r) = \rho(1_r)$ si $r \leq k$ y $\rho^k(1_r) = 0$ si $r > k$, de aquí y para $(r,s) \in G_k^{\pm}$, $\rho^k(1_r) = 0$; de este modo y debido a (2.20)

$$\mathcal{L}_*(\rho^k) = -2\sum_{D_k^+} a_{rs}^+ \rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| + 2\sum_{E_k^-} a_{sr}^+ \rho(1_s)|1_r\rangle\langle 1_r| +$$

$$2\sum_{F_k^+}(a_{sr}^- \rho(1_s) - a_{rs}^+ \rho(1_r))|1_r\rangle\langle 1_r| + 2\sum_{F_k^-}(a_{sr}^+ \rho(1_s) - a_{rs}^- \rho(1_r))|1_r\rangle\langle 1_r|. \tag{3.43}$$

Por (3.37), para $k > r_0$, en (3.43) la suma sobre F_k^+ es igual a

$$(a_{s_1 s_0}^- \rho(1_{s_1}) - a_{s_0 s_1}^+ \rho(1_{s_0}))|1_{s_0}\rangle\langle 1_{s_0}| + (a_{r_0 s_0}^- \rho(1_{r_0}) - a_{s_0 r_0}^+ \rho(1_{s_0}))|1_{s_0}\rangle\langle 1_{s_0}| +$$

$$(a_{r_0 s_1}^- \rho(1_{r_0}) - a_{s_1 r_0}^+ \rho(1_{s_1}))|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}|, \tag{3.44}$$

y sobre F_k^- es igual a

$$(a_{s_0 s_1}^+ \rho(1_{s_0}) - a_{s_1 s_0}^- \rho(1_{s_1}))|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}| + (a_{s_0 r_0}^+ \rho(1_{s_0}) - a_{r_0 s_0}^- \rho(1_{r_0}))|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}| +$$

$$(a_{s_1 r_0}^+ \rho(1_{s_1}) - a_{r_0 s_1}^- \rho(1_{r_0}))|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}|; \tag{3.45}$$

así, la suma sobre F_k^+ más la suma sobre F_k^- es igual a cero. Sobre D_k^+

$$\| - 2\sum_{D_k^+} a_{rs}^+ \rho(1_r)|1_r\rangle\langle 1_r| \| = 2\sum_{r \leq k}\sum_{s > k} a_{rs}^+ \rho(1_r); \tag{3.46}$$

ya que sobre este conjunto $s > k \geq r$, entonces $a_{rs}^+ \rho(1_r) \leq \sum\limits_{s>k} a_{rs}^+ \rho(1_r) < \sum\limits_{s>k} a_{rs}^+ \to 0$ cuando $k \to \infty$ ya que $\sum\limits_{s>r} a_{rs}^+ < \infty$, debido a (2.7) y a que $z_{rs}^{\pm} = a_{rs}^{\pm} + ib_{rs}^{\pm}$; por otra parte $a_{rs}^+ \rho(1_r) 1_{D_k^+} \leq a_{rs}^+ \rho(1_r)$ lo cual no depende de k, sumando sobre (r,s) con $s > r$, $\sum\limits_r \sum\limits_{s>r} a_{rs}^+ \rho(1_r) < \infty$. Así, el lado derecho de (3.46) se va a cero por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Sobre E_k^-, se emplea el mismo razonamiento. $\square$

Obsérvese que si $\sum\limits_{s>r} a^+_{rs}$ como función de r es acotada, y dado que

$$\sum_r \sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r) \leq \sup_r\{\sum_{s>r} a^+_{rs}\}$$

entonces se satisface (3.39).

Por último se probará que el estado del Teorema 3.0.7 es de no equilibrio.

Teorema. 3.0.8. *El estado ρ del Teorema 3.0.7 es un estado invariante fuera de equilibrio.*

Demostración. Ya que ρ es invariante, basta entonces mostrar que para algún $x \in \mathcal{B}$, $(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(x) \neq 2i[K, x]$ donde K es un operador auto-adjunto. Para ello, considérese a $x = |1_{s_0}\rangle\langle 1_{s_0}|$; ya que $K = H$ entonces $[K, x] = 0$ y

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(x) = 2(a^-_{s_1 s_0} - a^+_{s_0 s_1}\frac{\rho(1_{s_0})}{\rho(1_{s_1})})|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}| + 2(a^-_{r_0 s_0} - a^+_{s_0 r_0}\frac{\rho(1_{s_0})}{\rho(1_{r_0})})|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}| = \\ \frac{2d}{\rho(s_1)}|1_{s_1}\rangle\langle 1_{s_1}| - \frac{2d}{\rho(1_{r_0})}|1_{r_0}\rangle\langle 1_{r_0}|. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 3.0.9. Se finaliza este capítulo con un ejemplo concreto de esta construcción, específicamente de la del punto 4. Sean $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ y $r_0 = 2$. Se buscan escalares positivos a^+_{rs}, a^-_{sr} y alguna constante $d \neq 0$ tales que

$$\begin{aligned} a^+_{02}\rho(1_0) - a^-_{20}\rho(1_2) &= \quad d \\ a^+_{12}\rho(1_1) - a^-_{21}\rho(1_2) &= -d \\ a^+_{01}\rho(1_0) - a^-_{10}\rho(1_1) &= -d \\ \rho(1_s)a^-_{sr} &= \rho(1_r)a^+_{rs} \end{aligned} \qquad (3.48)$$

y donde la última ecuación en (3.48) se satisface para $s > r$ y $(r, s) \neq (0, 1), (0, 2), (1, 2)$. Se define

$$a^+_{rs} := \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0,\ s = 1 \\ 1/2 & \text{si } r = 0,\ s = 2 \\ 2 & \text{si } r = 1,\ s = 2 \\ 2^{1+r-s} & \text{si } (r, s) \neq (0, 1), (0, 2), (1, 2) \end{cases} \qquad (3.49)$$

$$a_{rs}^{-} := \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1,\ s = 0 \\ 4 & \text{si } r = 2,\ s = 0 \\ 2 & \text{si } r = 2,\ s = 1 \\ 2 & \text{si } (r,s) \neq (1,0),(2,0),(2,1) \end{cases} \tag{3.50}$$

De este modo, $\Delta = 7$, $\Delta_0 = -14$, $\Delta_1 = -7$ y $\Delta_2 = -\frac{7}{2}$. Es fácil verificar que $\frac{\Delta + a_{01}^{+}\Delta_0}{a_{10}^{-}} = \frac{7+1\cdot(-14)}{1} = -7 = \Delta_1$ y $\frac{(a_{12}^{+}+a_{10}^{-})\Delta + a_{01}^{+}a_{12}^{+}\Delta_0}{a_{10}^{-}a_{21}^{-}} = \frac{(2+1)\cdot 7+1\cdot 2(-14)}{1\cdot 2} = -\frac{7}{2} = \Delta_2$, i.e. se satisfacen las hipótesis en (3.19) punto 4. Obsérvese ahora que $\frac{a_{rr+1}^{+}}{a_{r+1r}^{-}}$ es igual a 1 para $r = 0, 1$ e igual a $\frac{1}{2}$ para $r \geq 2$, así

$$H_0^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0,1,2 \\ \frac{1}{2^{n-2}} & \text{if } n \geq 3 \end{cases} \qquad \text{de aqí que} \tag{3.51}$$

$d = -\frac{1}{4}$, lo que a su vez implica que $\rho(1_0) = \frac{1}{2}$, $\rho(1_1) = \frac{1}{4}$ y $\rho(1_2) = \frac{1}{8}$; de forma general, para $r \geq 0$

$$\rho(1_r) = \frac{1}{2^{r+1}}, \qquad \text{de esto} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \rho(1_n) = 1. \tag{3.52}$$

Por otra parte, para toda $(s,r) \neq (1,0),(2,0),(2,1)$ se satisface

$$\rho(1_s)a_{sr}^{-} = \frac{1}{2^{s+1}}2 = \frac{1}{2^{r+1}}2^{1+r-s} = \rho(1_r)a_{rs}^{+},$$

i.e. (3.37). Además, es fácil ver que $\sum_{s>r} a_{rs}^{+} = 2$ para toda $r \neq 1$ y $\sum_{s>1} a_{1s}^{+} = 3$, por lo que se satisface (3.39). Finalmente,

$$(\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}})(|1_0\rangle\langle 1_0|) = -2|1_1\rangle\langle 1_1| + 4|1_2\rangle\langle 1_2|. \tag{3.53}$$

Capítulo 4

La forma de Dirichlet

Para el estudio de la forma de Dirichlet asociada al qms de Exclusión Asimétrica, se considera al espacio de Hilbert $L_2(h)$ de los operadores Hilbert-Schmidt con el producto interno $\langle y, x\rangle = tr(y^*x)$. Para cada estado ρ y $\theta \in (0,1)$, se inyecta $\mathcal{B}(h)$ en $L_2(h)$ por medio de la aplicación $\iota : \mathcal{B}(h) \to L_2(h)$ definida por

$$\iota(x) = \rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}}. \tag{4.1}$$

ι es un mapeo contractivo con rango denso. Además es completamente positivo para $\theta = 1/2$. Para ver que $\iota(x) \in L_2(h)$, defínase $p := \frac{1}{\theta}$ y $q := \frac{1}{1-\theta}$. $p, q > 1$ y son exponentes conjugados pues

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \theta + 1 - \theta = 1.$$

Además, $\rho^{\theta} \in L_p(h)$ y $\rho^{1-\theta} \in Ł_q(h)$. Puesto que los espacios $L_p(h)$ y $L_q(h)$ son ideales bilaterales, entonces

$$\rho^{1-\theta} x^* \in L_q(h) \qquad y \qquad \rho^{\theta} x \in L_p(h).$$

Ahora bien, para demostrar que $\iota(x) = \rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}} \in L_2(h)$ hay que probar que el operador positivo semidefinido

$$(\rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}})^* \rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}} \quad \in L_1(h).$$

Pero, usando la propiedad de que $tr(ab) = tr(ba)$,

$$0 \leq tr((\rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}})^* \rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}}) = tr(\rho^{\frac{1-\theta}{2}} x^* \rho^{\frac{\theta}{2}} \rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}}) =$$

$$tr(\rho^{\frac{1-\theta}{2}}x^*\rho^{\frac{\theta}{2}}x) < \infty.$$

Si $\theta = 0$ entonces $\rho^{\frac{\theta}{2}}x\rho^{\frac{1-\theta}{2}} = x\rho^{\frac{1}{2}} \in L_2(h)$, pues $\rho^{\frac{1}{2}}$ y $x\rho^{\frac{1}{2}} \in L_2(h)$. Del mismo modo si $\theta = 1$.

Se define $T_t(\iota(x)) := \iota(\mathcal{T}_t(x))$ para toda $t \geq 0$ y $x \in \mathcal{B}(h)$. Los operadores T_t se pueden extender a todo $L_2(h)$ y ellos definen a un único semigrupo contractivo y fuertemente continuo $T = (T_t)_{t\geq 0}$ en $L_2(h)$ (véase Teorema 2.0.3 en Ref. [7]). Si L es el generador infinitesimal de T, entonces $\iota(Dom(\mathcal{L}))$ está contenido en $Dom(L)$ y para todo $x \in Dom(\mathcal{L})$

$$L\big(\rho^{\frac{\theta}{2}}x\rho^{\frac{1-\theta}{2}}\big) = \rho^{\frac{\theta}{2}}\mathcal{L}(x)\rho^{\frac{1-\theta}{2}}. \tag{4.2}$$

La forma de Dirichlet, definida para $\xi \in Dom(L)$, es la forma cuadrática ε asociada con $L(\xi)$

$$\varepsilon(\xi) = -Re\langle \xi, L(\xi)\rangle. \tag{4.3}$$

Se presenta el cálculo de la forma de Dirichlet cuando ρ es diagonal y de balance detallado siguiendo a [40]. Más adelante en el Teorema 4.0.12 se presenta la forma de Dirichlet del estado invariante construido en el capítulo anterior.

Sean los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
A^+ &= \{(\eta,\xi,r,s) : \eta,\xi \in \mathcal{S};\ r,s \in \mathbb{Z}_+, s > r;\ (1-\eta_s)\eta_r = 1\},\\
A^- &= \{(\eta,\xi,r,s) : \eta,\xi \in \mathcal{S};\ r,s \in \mathbb{Z}_+, s < r;\ (1-\eta_s)\eta_r = 1\},\\
B^+ &= \{(\eta,\xi,r,s) : \eta,\xi \in \mathcal{S};\ r,s \in \mathbb{Z}_+, s > r;\ (1-\xi_s)\xi_r = 1\},\\
B^- &= \{(\eta,\xi,r,s) : \eta,\xi \in \mathcal{S};\ r,s \in \mathbb{Z}_+, s < r;\ (1-\xi_s)\xi_r = 1\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Teorema. 4.0.10. *Sea $\rho = \sum_\eta \rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ un estado invariante y fiel para el qms de Exclusión Asimétrica, y que satisface (2.36); sea $x \in Dom(\mathcal{L})$ con $x = \sum_{\eta,\xi} x_{\eta\xi}|\eta\rangle\langle\xi|$, entonces* $\varepsilon(\iota(x)) =$

$$\sum_{A^+\cap B^+} \rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^+_{rs}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}} - x_{\eta\xi}|^2 + \sum_{A^-\cap B^-} \rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^-_{rs}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}} - x_{\eta\xi}|^2 +$$

$$\sum_{A^+\triangle B^+} \rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^+_{rs}|x_{\eta\xi}|^2 + \sum_{A^-\triangle B^-} \rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^-_{rs}|x_{\eta\xi}|^2. \tag{4.5}$$

Demostración.

$$\varepsilon(\iota(x)) = -Re\ tr((\rho^{\frac{\theta}{2}} x \rho^{\frac{1-\theta}{2}})^* \rho^{\frac{\theta}{2}} \mathcal{L}(x) \rho^{\frac{1-\theta}{2}}) = -Re\ tr(x^* \rho^\theta \mathcal{L}(x) \rho^{1-\theta}). \tag{4.6}$$

Ya que $\mathcal{L}(x) = \Phi(x) + G^* x + xG$, donde

$$\Phi(x) = \sum_{\eta,\xi} \sum_r \big\{ \sum_{s>r} 2a_{rs}^+ x_{\eta\xi} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s |\eta_{rs}\rangle\langle\xi_{rs}| +$$
$$\sum_{s<r} 2a_{rs}^- x_{\eta\xi} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s |\eta_{rs}\rangle\langle\xi_{rs}| \big\}, \tag{4.7}$$

y

$$G^* x + xG = -\sum_{\eta,\xi} \overline{c(\eta)} x_{\eta\xi} |\eta\rangle\langle\xi| - \sum_{\eta,\xi} c(\xi) x_{\eta\xi} |\eta\rangle\langle\xi| =$$
$$-\sum_{\eta,\xi} \sum_r \big\{ \sum_{s>r} \overline{z_{rs}^+} x_{\eta\xi} (1-\eta_s)\eta_r + \sum_{s<r} z_{rs}^- x_{\eta\xi} (1-\eta_s)\eta_r \big\} |\eta\rangle\langle\xi| -$$
$$\sum_{\eta,\xi} \sum_r \big\{ \sum_{s>r} z_{rs}^+ x_{\eta\xi} (1-\xi_s)\xi_r + \sum_{s<r} \overline{z_{rs}^-} x_{\eta\xi} (1-\xi_s)\xi_r \big\} |\eta\rangle\langle\xi|. \tag{4.8}$$

De (4.7) y (4.8); con $\rho_\theta = \rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)$, $\rho_{\theta_{rs}} = \rho^\theta(\eta_{rs})\rho^{1-\theta}(\xi_{rs})$; se sigue que

$$\rho^\theta \mathcal{L}(x) \rho^{1-\theta} = \sum_{\eta,\xi} \big[\sum_r \big\{ \sum_{s>r} 2a_{rs}^+ x_{\eta\xi} \rho_{\theta_{rs}} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s +$$
$$\sum_{s<r} 2a_{rs}^- x_{\eta\xi} \rho_{\theta_{rs}} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s \big\} \big] |\eta_{rs}\rangle\langle\xi_{rs}| -$$
$$\sum_{\eta,\xi} \big[\sum_r \big\{ \sum_{s>r} \overline{z_{rs}^+} x_{\eta\xi} \rho_\theta (1-\eta_s)\eta_r + \sum_{s<r} z_{rs}^- x_{\eta\xi} \rho_\theta (1-\eta_s)\eta_r +$$
$$\sum_{s>r} z_{rs}^+ x_{\eta\xi} \rho_\theta (1-\xi_s)\xi_r + \sum_{s<r} \overline{z_{rs}^-} x_{\eta\xi} \rho_\theta (1-\xi_s)\xi_r \big\} \big] |\eta\rangle\langle\xi|. \tag{4.9}$$

Con $x^* = \sum_{\alpha,\beta} \overline{x}_{\alpha\beta} |\beta\rangle\langle\alpha|$, se sigue que

$$x^* \rho^\theta \mathcal{L}(x) \rho^{1-\theta} = \sum_{\beta,\eta,\xi} \big[\sum_r \big\{ \sum_{s>r} 2a_{rs}^+ x_{\eta\xi} \overline{x}_{\eta_{rs}\beta} \rho_{\theta_{rs}} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s +$$
$$\sum_{s<r} 2a_{rs}^- x_{\eta\xi} \overline{x}_{\eta_{rs}\beta} \rho_{\theta_{rs}} (1-\eta_r)\eta_s (1-\xi_r)\xi_s \big\} \big] |\beta\rangle\langle\xi_{rs}| -$$

$$\sum_{\beta,\eta,\xi}\Big[\sum_{r}\Big\{\sum_{s>r}\overline{z_{rs}^{+}}x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta\beta}\rho_\theta(1-\eta_s)\eta_r+\sum_{s<r}z_{rs}^{-}x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta\beta}\rho_\theta(1-\eta_s)\eta_r+$$
$$\sum_{s>r}z_{rs}^{+}x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta\beta}\rho_\theta(1-\xi_s)\xi_r+\sum_{s<r}\overline{z_{rs}^{-}}x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta\beta}\rho_\theta(1-\xi_s)\xi_r\Big\}\Big]|\beta\rangle\langle\xi|; \tag{4.10}$$

de esto último (4.10), se sigue que $tr(x^*\rho^\theta\mathcal{L}(x)\rho^{1-\theta})=$

$$\sum_{\eta,\xi}\Big\{\sum_{r}\Big(\sum_{s>r}2a_{rs}^{+}\rho_{\theta_{rs}}\overline{x}_{\eta_{rs}\xi_{rs}}x_{\eta\xi}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s+$$
$$\sum_{s<r}2a_{rs}^{-}\rho_{\theta_{rs}}\overline{x}_{\eta_{rs}\xi_{rs}}x_{\eta\xi}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s-$$
$$\sum_{s>r}\overline{z_{rs}^{+}}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2(1-\eta_s)\eta_r-\sum_{s<r}z_{rs}^{-}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2(1-\eta_s)\eta_r-$$
$$\sum_{s>r}z_{rs}^{+}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2(1-\xi_s)\xi_r-\sum_{s<r}\overline{z_{rs}^{-}}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2(1-\xi_s)\xi_r\Big)\Big\}. \tag{4.11}$$

Aplicando el cambio de variable $(\eta_{rs},\xi_{rs},r,s)\to(\eta,\xi,r,s)$ en los dos primeros renglones, con $A^\pm$ y $B^\pm$ como en (4.4), $A^\pm=(A^\pm\cap B^\pm)\cup(A^\pm\backslash B^\pm)$; se tiene que $-Re\,tr(x^*\rho^\theta\mathcal{L}(x)\rho^{1-\theta})$

$$=-\sum_{A^+\cap B^+}2a_{rs}^{+}\rho_\theta Re(x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta_{rs}\xi_{rs}})-\sum_{A^-\cap B^-}2a_{rs}^{-}\rho_\theta Re(x_{\eta\xi}\overline{x}_{\eta_{rs}\xi_{rs}})+$$
$$2\sum_{A^+\cap B^+}a_{rs}^{+}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2+2\sum_{A^-\cap B^-}a_{rs}^{-}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2+$$
$$\sum_{A^+\triangle B^+}a_{rs}^{+}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2+\sum_{A^-\triangle B^-}a_{rs}^{-}\rho_\theta|x_{\eta\xi}|^2. \tag{4.12}$$

Recuérdese que si $w_1,w_2\in\mathbb{C}$, entonces $-2Re(w_1\overline{w}_2)+|w_1|^2=|w_1-w_2|^2-|w_2|^2$; así $\varepsilon(\iota(x))=$

$$\sum_{A^+\cap B^+}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{+}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}-x_{\eta\xi}|^2+\sum_{A^-\cap B^-}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{-}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}-x_{\eta\xi}|^2-$$
$$\sum_{A^+\cap B^+}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{+}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}|^2-\sum_{A^-\cap B^-}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{-}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}|^2+$$
$$\sum_{A^+\cap B^+}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{+}|x_{\eta\xi}|^2+\sum_{A^-\cap B^-}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{-}|x_{\eta\xi}|^2+$$
$$\sum_{A^+\triangle B^+}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{+}|x_{\eta\xi}|^2+\sum_{A^-\triangle B^-}\rho^\theta(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a_{rs}^{-}|x_{\eta\xi}|^2. \tag{4.13}$$

El resultado se sigue una vez que se pruebe que

$$\sum_{A^{\pm}\cap B^{\pm}} \rho^{\theta}(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^{\pm}_{rs}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}|^2 = \sum_{A^{\mp}\cap B^{\mp}} \rho^{\theta}(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^{\mp}_{rs}|x_{\eta\xi}|^2. \tag{4.14}$$

Aplicando el cambio de variable $(\eta_{rs}, \xi_{rs}, r, s) \to (\eta, \xi, s, r)$

$$\sum_{A^{+}\cap B^{+}} \rho^{\theta}(\eta)\rho^{1-\theta}(\xi)a^{+}_{rs}|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}}|^2 = \sum_{A^{-}\cap B^{-}} \rho^{\theta}(\eta_{rs})\rho^{1-\theta}(\xi_{rs})a^{+}_{sr}|x_{\eta\xi}|^2, \tag{4.15}$$

de (2.36) se sigue el resultado. $\square$

Corolario. 4.0.11. *Si $x \in Dom(\mathcal{L})$ y $\varepsilon(\iota(x)) = 0$, entonces x es diagonal con respecto a $\mathcal{S}$.*

Demostración. Como $a^{+}_{rs} > 0$ para toda $s > r$, $a^{-}_{rs} > 0$ para toda $s < r$ y ρ es fiel; si $\varepsilon(\iota(x)) = 0$, entonces $|x_{\eta_{rs}\xi_{rs}} - x_{\eta\xi}|^2 = 0$ sobre $A^{\pm} \cap B^{\pm}$ y $|x_{\eta\xi}|^2 = 0$ sobre $A^{\pm}\triangle B^{\pm}$. Sean η, ξ configuraciones distintas; por lo tanto existe $t_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $t_0 \in Supp(\eta)$ y $t_0 \notin Supp(\xi)$; sea $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\eta, \xi, t_0, s) \in A^{\pm}$, ya que $(1 - \xi_s)\xi_{t_0} = 0$ entonces $(\eta, \xi, t_0, s) \notin B^{\pm}$, i.e. $(\eta, \xi, t_0, s) \in (A^{\pm}\backslash B^{\pm}) \subset (A^{\pm} \triangle B^{\pm})$; por lo tanto $x_{\eta\xi} = 0$, i.e. x es diagonal. Además $x_\eta = x_{\eta_{rs}}$ siempre que $(1 - \eta_s)\eta_r = 1$. $\square$

Teorema. 4.0.12. *Sea ρ el estado invariante en el Teorema 3.0.7 para el qms de Exclusión Asimétrica en el nivel uno; sea $x \in Dom(\mathcal{L})$ con $x = \sum_r x_r|1_r\rangle\langle 1_r| + \sum_\Gamma x_{rs}|1_r\rangle\langle 1_s|$, donde Γ está definido en (2.11), entonces*

$$\varepsilon(\iota(x)) = \sum_r \Big(\sum_{s>r} \rho(1_r)a^{+}_{rs}|x_s - x_r|^2 + \sum_{s<r} \rho(1_r)a^{-}_{rs}|x_s - x_r|^2 \Big) +$$
$$\sum_{\Gamma} \rho(1_r)^{\theta}\rho(1_s)^{1-\theta}|x_{rs}|^2\, Re(\overline{c(1_r)} + c(1_s)). \tag{4.16}$$

Demostración. Debido a (4.6), se empieza por calcular $\rho\mathcal{L}(x)\rho^{1-\theta}$; con $\rho = \sum_t \rho(1_t)|1_t\rangle\langle 1_t|$ se obtiene directamente

$$\rho\mathcal{L}(x)\rho^{1-\theta} = \sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^{+}_{rs}\rho(1_r)(x_s - x_r) + \sum_{s<r} 2a^{-}_{rs}\rho(1_r)(x_s - x_r) \Big)|1_r\rangle\langle 1_r| -$$

$$\sum_{\Gamma} \rho(1_r)^{\theta}\rho(1_s)^{1-\theta}x_{rs}(\overline{c(1_r)} + c(1_s))|1_r\rangle\langle 1_s|. \tag{4.17}$$

Con $x^* = \sum_r \overline{x_m}|1_m\rangle\langle 1_m| + \sum_\Gamma \overline{x_{mn}}|1_n\rangle\langle 1_m|$, $tr(x^*\rho\mathcal{L}(x)\rho^{1-\theta}) =$

$$\sum_r \Big(\sum_{s>r} 2a^+_{rs}\rho(1_r)(x_s - x_r)\overline{x_r} + \sum_{s<r} 2a^-_{rs}\rho(1_r)(x_s - x_r)\overline{x_r}\Big) -$$

$$\sum_\Gamma |x_{rs}|^2\rho(1_r)^{\theta}\rho(1_s)^{1-\theta}(\overline{c(1_r)} + c(1_s)). \tag{4.18}$$

Debido a lo anterior y al hecho de que $-2\,Re(x_s\overline{x_r}) + |x_r|^2 = |x_s - x_r|^2 - |x_s|^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\iota(x)) = &\sum_r \Big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_s - x_r|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_s - x_r|^2\Big) - \\
&\sum_r \Big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_s|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_s|^2\Big) + \\
&\sum_r \Big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_r|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_r|^2\Big) + \\
&\sum_\Gamma \rho(1_r)^{\theta}\rho(1_s)^{1-\theta}|x_{rs}|^2\,Re(\overline{c(1_r)} + c(1_s)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Obsérvese que con el cambio de variable $(r, s) \mapsto (s, r)$

$$\sum_r \big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_s|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_s|^2\big) = \sum_r \big(\sum_{s<r} a^+_{sr}\rho(1_s)|x_r|^2 + \sum_{s>r} a^-_{sr}\rho(1_s)|x_r|^2\big).$$

Si el estado ρ satisface la condición de balance detallado infinitesimal (2.24), entonces la última expresión es igual a

$$\sum_r \big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_r|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_r|^2\big).$$

Como tal condición (2.24) se satisface para todo $(r, s) \neq (s_0, s_1), (s_0, r_0), (s_1, r_0), (s_1, s_0), (r_0, s_0)$ y (s_1, s_0), entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\iota(x)) = &\sum_r \Big(\sum_{s>r} a^+_{rs}\rho(1_r)|x_s - x_r|^2 + \sum_{s<r} a^-_{rs}\rho(1_r)|x_s - x_r|^2\Big) + \\
&\sum_\Gamma \rho(1_r)^{\theta}\rho(1_s)^{1-\theta}|x_{rs}|^2\,Re(\overline{c(1_r)} + c(1_s)) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|x_{s_0}|^2\Big(\big(a^+_{s_0s_1}\rho(1_{s_0}) - a^-_{s_1s_0}\rho(1_{s_1})\big) + \big(a^+_{s_0r_0}\rho(1_{s_0}) - a^-_{r_0s_0}\rho(1_{r_0})\big)\Big)+ \\
&|x_{s_1}|^2\Big(\big(a^-_{s_1s_0}\rho(1_{s_1}) - a^+_{s_0s_1}\rho(1_{s_0})\big) + \big(a^+_{s_1r_0}\rho(1_{s_1}) - a^-_{r_0s_1}\rho(1_{r_0})\big)\Big)+ \qquad (4.20) \\
&|x_{r_0}|^2\Big(\big(a^-_{r_0s_0}\rho(1_{r_0}) - a^+_{s_0r_0}\rho(1_{s_0})\big) + \big(a^-_{r_0s_1}\rho(1_{r_0}) - a^+_{s_1r_0}\rho(1_{s_1})\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Por (3.8), los últimos tres renglones en (4.20) son iguales a cero. Esto prueba el resultado.

□

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Siguiendo algunos resultados previos relativos al estudio del qms de Exclusión Asimétrica, se ha avanzado en el estudio de éste cuando se restringe al nivel uno. Se prueba que un estado invariante es necesariamente diagonal, se dan condiciones para la conservatividad, se propone un método para construir estados invariantes diagonales fuera de equilibrio y se calcula la forma de Dirichlet respecto al estado fuera de equilibrio, haciendo evidente que esta forma coincide con la que se obtiene respecto a un estado diagonal.

La extensión de esta técnica de construcción de estados invariantes fuera de equilibrio a un nivel superior a uno, no es directa, como lo han mostrado diversos cálculos posteriores a la escritura de este trabajo; sin embargo, se cree que tiene ciertas analogías con el trabajo que actualmente llevan a cabo L. Accardi, F. Fagnola y R. Quezada [4], salvo que este trabajo está pensado en dimensión finita. El hecho de que la forma de Dirichlet del qms de Exclusión Asimétrica en el nivel uno y con respecto al estado invariante fuera de equilibrio coincida con la forma de Dirichlet del mismo y con respecto a un estado diagonal, implica que la tasa de convergencia al equilibrio de ambos qms, es la misma. El cálculo o estimación del gap espectral es un paso natural una vez obtenida la forma de Dirichlet.

Así, quedan como tareas futuras:

i) Cálculo o estimación del gap espectral del qms de Exclusión Asimétrica en el nivel uno.

ii) Construcción de estados invariantes fuera de equilibrio en niveles mayores a uno.

iii) Cálculo o estimación del gap espectral del qms de Exclusión Asimétrica en niveles mayores a uno.
iv) Extender la construcción de estados invariantes fuera de equilibrio a los qms genéricos.
v) Comparar la construcción de estados invariantes fuera de equilibrio que se propone en este trabajo con el trabajo realizado por L. Accardi, F. Fagnola y R. Quezada [4].

Capítulo 6

Apéndice

6.1 Producto tensorial infinito

Dado un espacio de Hilbert h separable, para $|u\rangle$, $|v\rangle \in h$, se defina al operador $|u\rangle\langle v| : h \to h$ mediante la regla de correspondencia: $|u\rangle\langle v||w\rangle = \langle v, w\rangle|u\rangle$, para todo $w \in h$.
Se verifica que

1. $|u\rangle\langle v|$ es lineal en u y lineal conjugado en v.

2. $|u\rangle\langle v|^* = |v\rangle\langle u|$.

3. $|u\rangle\langle v||w\rangle\langle z| = \langle v, w\rangle|u\rangle\langle z|$.

4. Para todo $x \in \mathcal{B}(h)$, $x|u\rangle\langle v| = |xu\rangle\langle v|$ y $|u\rangle\langle v|x = |u\rangle\langle x^*v|$.

Dada una familia de espacios de Hilbert $\{h_n, \langle\cdot,\cdot\rangle_n\}_{n\geq 1}$ complejos y separables; para cada $n \geq 1$, sea $\{e_l^n\}_{l\geq 1}$ una base ortonormal para h_n. Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de las sucesiones de enteros positivos, para cada $\bar{n} = \{n_l\}_{l\geq 1} \in \mathbb{S}$ sea $e_{\bar{n}} = e_{n_1}^1 \bigotimes e_{n_2}^2 \bigotimes \cdots = \bigotimes_{l\geq 1} e_{n_l}^l$, $W_0 := \{e_{\bar{n}} : \bar{n} \in \mathbb{S}\}$. Las combinaciones lineales finitas de elemento de W_0 son de la forma $u = \sum c(\bar{n})e_{\bar{n}}$ en donde $c : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{C}$. Al espacio vectorial $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de W_0 con producto interno $\langle u, v\rangle := \sum \overline{c(\bar{n})}d(\bar{n})$, con c, $d : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{C}$ se le llama *producto tensorial infinito* de la familia de espacios de Hilbert $\{h_n\}_{n\geq 1}$.
Una variante de este producto tensorial es la siguiente. Dada una sucesión de vectores

unitarios $\varphi = \{u^n\}_{n\geq 1}$ en donde $u^n \in h_n$; para cada h_n se considera una base ortonormal $\{e^n_{l_n}\}_{l_n\geq 1}$ tal que $e^n_1 = u^n$. La cerradura del subespacio lineal generado por los vectores ortonormales $e_{\bar{n}}$ en donde $\bar{n} = 1$ i.e., $e^n_{l_n} = u^n$ para todos excepto un número finito de $l \geq 1$ es llamado el *producto tensorial estabilizado* de la familia de espacios de Hilbert $\{h_n\}_{n\geq 1}$ con respecto al *vector estabilizante* φ.

Agradecimientos

A CONACYT por el apoyo financiero dado a través la beca 165407 y al proyecto conjunto México−Italia *Dinámica Estocástica con Aplicaciones en Física y Finanzas*.

Bibliografía

[1] Accardi, L., Fagnola, F. and Quezada, R. 2011. *Weighted Detailed Balance and Local KMS Condition for Non-Equilibrium Stationary States*. Preprint.

[2] Accardi, L., Fagnola, F. and Hachicha, S. 2005. *Generic q-Markov Semigroups and Speed of Convergence of q-Algorithms*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 14, No. 4, pp. $567 - 594$. World Scientific.

[3] Accardi, L. and S, Kozyrev. 2002. *Lectures on Quantum Interacting Particle Systems*. Quantum Interacting Particle Systems, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis XIV, eds. L. Accardi and F. Fagnola. pp. 1-195. World Scientific.

[4] Accardi, L., Fagnola, F. and Quezada, R. 2014. *On 3 new principles in non-equilibrium statistical mechanics and their mutual relationships*. Preprint.

[5] Alicki, R. 1976. *On the Detailed Balance Condition for non-Haniltonian Systems*. Rep. Math. Phis., 10, pp. 249-258.

[6] Bratteli, O. and Robinson, D. 1987. *Operetor Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*. Second Edition, Springer, Berlin.

[7] Carbone, R. 2000. *Exponential Ergodicity of Some Quantum Markov Semigroups*. Tesis de Doctorado. Milano, Universitá degli Studi di Milano, Dipartamento di Matematica.

[8] Carbone, R. Fagnola, F. and Hachicha, S. 2007. *Generic Quantum Semigroups: the Gaussian Gauge Invariant Case*. Open Systems and Information Dynamics, Vol. 14, pp. $425 - 444$. Springer.

[9] Chung, K.L. 1960. *Markov Chains with Stationary Transition Probabiliity.* Springer-Verlag.

[10] Chebotarev, A.M. and Fagnola, F. 1998. *Sufficient Conditions for Conservativity of Minimal Quantum Dynamical Semigroups.* J. Func. Anal. no. 153, $382 - 404$

[11] Chebotarev, A.M. 2000. *Lectures on Quantum Probability.* Aportaciones Matemáticas. Mexíco, Ser. Textos, no.14.

[12] Durrett, Richard. 1991. *Probability: Theory and Examples.* California, Wadsworth.

[13] Fagnola, F. 1999. *Quantum Markov Semigroups and Quantum Markov Flows.* Proyecciones 18, no. 3, pp. 1-144.

[14] Fagnola, F. and Umanita, V. 2007. *Generators of Detailed Balance Quantum Markov Semigroups.* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 10, No. 3, pp. $335 - 363$.

[15] Fagnola, F. and Umanita V. 2010. *On Two Quantum Versions of the Detailed Balance Condition.* Non Conmutative Harmonic Analysis withh Applications to Probability, M. Bozejko, et al. eds., Banach Center Publications, Polish Academy of Sciences.

[16] Fagnola, F. and Umanita V. *Quantum Detailed Balance Condition with Time Reversal: The Finite Dimensional Case.* Banach Center Publications, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences Warszawa. Preprint.

[17] Fagnola, F. and Hachicha, S. 2012. *Decomposition and Clasification of Generic Quantum Markov Semigroups: The Gaussian Gauge Invariant Case.* Open Systems and Information Dynamics, Vol. 19, No. 2. World Scientific.

[18] Fagnola, F. and Umanita, V. 2012. *Generic Quantum Markov Semigroups, Cycle Decomposition and Deviation from Equilibrium.* Infinite Demensional Analysis, Quantum Pobability and Related Topics, Vol. 15, No. 3.

[19] Fagnola, F. and Rebolledo, R. 2002. *Lectures on Qualitative Analysis of Quantum Markov Semigroups.* Interacting Particle Systems, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis XIV pp. $137 - 240$, Word Scientific.

[20] Feller, W. 1940. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 48, 488 – 575. Errata, Vol. 58, 475.

[21] Frigerio, A. Kossakowsky, A. Gorini, V. and Verri, M. 1977. Commun. Math. Phys. 57, 97 – 110. Erratum: Commun. Math. Phys. 60, 96.

[22] Frigerio, A. 1977. Lett. in Math. Phys. 2, 79 – 87.

[23] Frigerio, A. Verri, M. 1982. Math. Zeitschrift, 180, 275 – 286.

[24] Glauber, R.J. 1963. J. Math. Phys. 4, 294 – 307.

[25] Gorini, V. Kossakowaki, A. and Sudarshan, E. 1976. J. Math. Phys. no. 17, 821 – 825.

[26] García, J., Quezada, R. and Pantaleón, L. 2009. *Invariant States for the Asymmetric Exclusion Quantum Markov Semigroup*. Communications on Stochastic Analysis. Vol. 3, No. 3. pp. 419-431.

[27] García, J., Quezada, R. and Pantaleón, L. 2009. *Sufficent Condition for Existence of Invariant States for the Asymmetric Exclusion QMS*. Infinite Dimensional Analysis and Related Topics. Vol. 14, No. 2. pp. 337-343.

[28] García, J., Pantaleón, L. and Quezada, R. 2010. *A Sufficient Condition for All Invariant States of a QMS to be Simultaneously Diagonalizable*. En preparación.

[29] García, J., Pantaleón, L. and Quezada, R. *A Sufficient Condition for All Invariant States of a QMS to be Diagonal*.

[30] García, J. and Guerrero-Poblete, F. 2015. *Some non-equilibrium invariant states for the Asymmetric Exclusion QMS at level one*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. Vol. 18, No. 1. World Scientific.

[31] Kraus, K. 1970. Ann. Phys. 64, 311 – 335.

[32] Kümmerer, B. and Nagel, R. Acta Sci. Math. 41, 151 – 159.

[33] Ligget, T. 1985. *Interacting Particle Systems*. New York, Springer.

[34] Liggett, T. 1999.*Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer-Verlag. Berlin.

[35] Lindblad, G. 1976. Commun. Math. Phys. no. 48, 119 − 130.

[36] Majewski, M. and Streater, R. 1998. *Detailed Balance and Quantum Dinamical Maps*. J. Phis. A: Math. Gen. 31, 7981-7995.

[37] Chen, Mu-Fa. 2004. *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*. Singapore, World Scientific.

[38] Parthasarathy, K.R. 1992. *An Introduction to Quantum Sochastic Calculus*. Birkhäuser-Verlag, Berlin.

[39] Pantaleón, L. 2009. *El Semigrupo Cuántico de Exclusión Asimétrica*. Tesis de Doctorado. UAM, México.

[40] Pantaleón-Martínez, L. and Quezada, R. 2009. *The asymmetric exclusion quantum semigroup*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 12. 367-385.

[41] Jiang, Da-Quan. Quian, Min and Quian, Min-Ping. 2004. *Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States*. Berlin, Srpinger-Verlag.

[42] Rebolledo, R. 2005. *Decoherence of Quantum Markov Semigroups*. Annales de L'institut Henri Poincaré -PR 41-. pp. 349-373.

[43] Stroock, W. Daniel. 2005. *An Introduction to Markov Processes*. Berlin, Springer-Verlag.