



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
**Unidad Iztapalapa**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

---

**Geometría de variedades regladas  
y aplicaciones**

Tesis que presenta  
**Pablo García Román**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias Matemáticas**

Asesor: Dr. Felipe Zaldívar

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Javier Elizondo Huerta. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Secretario: Dr. Felipe Zaldívar. Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Vocal: Dr. Jesús Carrillo Pacheco. Departamento de Matemáticas, UACM.

México, D. F., Julio de 2015.



## Índice general

Introducción .....	v
Capítulo 1 Variedades Regladas .....	1
1.1 Grassmaniannas .....	1
1.1.1 Subvariedades de Grassmannianas .....	5
1.1.2 Variedades de incidencia .....	5
1.1.3 Variedades de planos incidentes .....	6
1.1.4 La unión de dos variedades .....	6
1.1.5 Unión de puntos correspondientes .....	7
1.2 Rollos normales racionales. Primera construcción .....	7
1.2.1 Rollos normales racionales. Un caso particular .....	7
1.2.2 Propiedades de los rollos .....	8
1.2.3 Rollos normales racionales. El caso general .....	11
1.3 Rollos normales racionales. Segunda construcción .....	11
1.3.1 Variedades determinantes .....	12
1.3.2 Rollos normales racionales como variedades determinantes .....	14
1.4 Rollos normales racionales. Tercera construcción .....	15
1.4.1 Sistemas lineales .....	16
1.4.2 Gavillas localmente libres sobre $\mathbb{P}^1$ .....	17
1.4.3 Rollos normales racionales como proyectivización de gavillas localmente libres sobre $\mathbb{P}^1$ .....	22
1.5 El grado de un rollo normal racional .....	26
1.5.1 El grado de una variedad .....	26
1.5.2 Variedades que realizan la cota de del Pezzo .....	31
1.6 Caracterización cohomológica de los rollos .....	31
1.6.1 Resultados generales de geometría algebraica .....	31
1.6.2 Caracterización cohomológica de los rollos .....	35
Capítulo 2 Aplicaciones .....	37
2.1 Códigos lineales .....	37
2.2 Sistemas proyectivos y códigos lineales .....	40
2.3 Códigos en variedades regladas .....	41
2.3.1 Construcción de códigos y sus parámetros .....	41
2.4 El teorema principal .....	43
Conclusiones .....	49

Apéndice A. ....	51
Bibliografía.....	53

## Introducción

De las familias de variedades algebraicas clásicas, las variedades regladas ocupan un lugar interesante, y entre las variedades regladas, los rollos normales racionales forman una subfamilia importante.

En términos intrínsecos, un rollo es un  $\mathbb{P}^{d-1}$ -haz sobre una curva  $C$ , esto es, un haz fibrado algebraico, isomorfo a  $U_i \times \mathbb{P}^{d-1}$  sobre pequeños conjuntos abiertos de Zariski  $U_i \subseteq C$  y pegados por funciones de transición dadas por morfismos  $U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{PGL}(d)$ . Este puede ser escrito como la proyectivización  $F = \mathbb{P}(E)$  de un haz vectorial  $E$  y el estudio de los rollos generales es esencialmente equivalente al de haces vectoriales sobre curvas. En el caso  $C = \mathbb{P}^1$  todo es mucho más simple, pues la curva base  $\mathbb{P}^1$  es un objeto muy explícito y cada haz vectorial es una suma directa de haces lineales (Teorema de Grothendieck). Así, cualquier pregunta acerca de rollos puede ser resuelta en términos muy explícitos.

El primer capítulo de este trabajo está dedicado a dar diversas construcciones de un rollo normal racional. Iniciamos en la sección 1.1 con algunos resultados sobre variedades *Grassmannianas*, los cuales utilizamos en la primera construcción de los rollos normales racionales, la cual es totalmente geométrica. En la siguiente sección mostramos que los rollos son variedades determinantes y la ventaja de esta descripción es que muestra el ideal de definición de la variedad. En la sección siguiente se ve una construcción más moderna de los rollos normales racionales, que permite caracterizarlos cohomológicamente, calcular su grado y después probar que alcanzan la cota de del Pezzo. Por último en la sección 1.6 se caracterizan cohomológicamente los rollos normales racionales  $\mathcal{S}_{e_0, \dots, e_d} \subseteq \mathbb{P}^n$  obteniendo los enteros  $e_i$  que dan el tipo del rollo  $\mathcal{S}$  en términos de las dimensiones de las secciones globales de ciertas gavillas naturales asociadas a divisores en  $\mathcal{S}$ .

Como una aplicación del teorema cohomológico anteriormente mencionado, siguiendo a [3] se dan algunos detalles de la construcción de un código álgebro-geométrico usando rollos normales racionales.

En la teoría de códigos detectores-correctores de errores sobre un campo finito  $\mathbb{F}_q$  una importante tarea es encontrar los parámetros de un código dado  $C$ . Tradicionalmente estos parámetros son la longitud  $n$  de las palabras, la dimensión  $k$  y la distancia mínima  $d$ . En concreto vemos a  $C$  como un subespacio lineal  $k$ -dimensional de  $\mathbb{F}_q^n$  y  $d$  es el peso mínimo de Hamming de  $C$ .

Una forma geométrica de construir códigos lineales, introducida por Tsfasman y Vlăduț, es por medio del lenguaje y propiedades de sistemas proyectivos no degenerados en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_q^{K-1}$ . En el presente trabajo construimos un

código lineal sobre una variedad algebraica llamada *rollo normal racional*. Estas variedades aparecen a lo largo de la geometría proyectiva y la geometría algebraica.

En el segundo capítulo, construimos un código lineal  $C$  sobre el rollo normal racional, de la siguiente manera. Empezamos con  $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathbb{P}^{K-1}$ , además suponemos que  $e_d \geq 1$  y de este modo  $\mathcal{S}$  es liso. Por otro lado  $\mathcal{S}$  contiene  $n = (q+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + q + 1)$  puntos sobre  $\mathbb{F}_q$ , elegimos un representante de cada uno de los  $n$  puntos como un vector columna en  $\mathbb{F}_q^K$  y formamos una matriz  $G$  de  $K \times n$  con estos  $n$  vectores como columnas. El código  $C$  es entonces el código lineal con  $G$  como matriz generadora. En general  $C$  es un  $[n, K]$ -código lineal, al cual llamaremos un *código de rollo*. Aparte de los parámetros  $n$  y  $K$  del código los cuales están determinados, el teorema principal de este capítulo nos permite no sólo encontrar el número máximo de puntos de  $\mathcal{S}$  es un hiperplano en  $\mathbb{P}^{K-1}$ , sino también el número máximo de puntos de  $\mathcal{S}$  en un subespacio de codimensión  $j$  en  $\mathbb{P}^{K-1}$  para cualquier  $j$ . Esto nos permite encontrar todos los pesos superiores  $d_j$  de los códigos definidos, para  $j = 1, \dots, K$  y estos pesos dan información más detallada que únicamente la distancia mínima  $d = d_1$ .

# Capítulo 1

## Variedades Regladas

### 1.1. Grassmaniannas

Antes de definir los objetos en los cuales estamos interesados, primero daremos algunas definiciones preliminares.

Recordemos que, si  $E$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$ , la potencia simétrica es el cociente

$$\text{Sim}^d(E) := T^d E / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_d - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)} : \sigma \in S_d \text{ y } v_i \in E \rangle$$

donde  $S_d$  es el grupo simétrico de grado  $d$ , y usaremos la notación  $v_1 \bullet \cdots \bullet v_d$  para la imagen del tensor  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$  en  $\text{Sim}^d E$ . Si  $e_1, \dots, e_n$  es una base de  $E$ , una base de  $\text{Sim}^d E$  está dada por los elementos de la forma  $e_{i_1} \bullet \cdots \bullet e_{i_d}$ , para  $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_d \leq n$ . Se sigue que la dimensión de  $\text{Sim}^d E$  es  $\binom{n+d-1}{d}$ .

Similarmente, la potencia exterior (o alternante) es el cociente

$$\wedge^d E := T^d E / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_d : v_i = v_{i+1}, \text{ para algún } i \rangle.$$

La imagen de  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$  en  $\wedge^d E$  la denotaremos por  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ . Si  $e_1, \dots, e_n$  es una base de  $E$ , una base de  $\wedge^d E$  está dada por los elementos  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ , para  $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ . Se sigue que la dimensión de  $\wedge^d E$  es  $\binom{n}{d}$ .

**Proposición 1.1.1.** *Si  $E$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$  y  $E^*$  es su dual, entonces el anillo de coordenadas homogéneo de  $\mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}^{n-1}(k)$  es*

$$k[\mathbb{P}(E)] \simeq \text{Sim}^\bullet E^* := \bigoplus_{d=0}^{\infty} \text{Sim}^d E^*,$$

de tal forma que  $E^*$  es el espacio de formas lineales en  $\mathbb{P}(E)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Un elemento  $f \in \text{Sim}^d E^*$  define una función en  $E$  homogénea de grado  $d$ , ya que si  $f = v_1^* \bullet \cdots \bullet v_d^*$ , con  $v_i^* \in E^*$ , entonces  $f : E \rightarrow k$  está dada por  $f(v) := v_1^*(v) \bullet \cdots \bullet v_d^*(v)$  (evaluando las funcionales lineales  $v_i^*$  en  $v \in E$ ); note que si  $\lambda \in k$ , se tiene que  $f(\lambda v) = v_1^*(\lambda v) \bullet \cdots \bullet v_d^*(\lambda v) = \lambda^d f(v)$ . Se sigue que el valor de  $f$  en un punto de  $\mathbb{P}(E)$ , es decir, en una recta  $L \subseteq E$ , sólo está definido salvo un múltiplo escalar no cero y por lo tanto sólo tiene sentido decir si  $f(L) = 0$  o  $f(L) \neq 0$ . Sin embargo, si  $f, g \in \text{Sim}^d E^*$  son dos funciones homogéneas del mismo grado  $d$ , por el párrafo anterior el cociente  $f/g$  define una función en el abierto de  $\mathbb{P}(E)$  donde  $g$  no se anula.  $\square$

**La Grassmanniana, primera definición.** Comenzamos generalizando la noción de espacio proyectivo. Para ésto, considere un  $k$ -espacio vectorial  $E$  de dimensión

finita  $n + 1$ . Al conjunto de rectas  $L \subseteq E$  que pasan por el origen lo denotaremos por  $\mathbb{P}(E)$ . Note que una recta por el origen  $L \subseteq E$  está determinada por un punto  $P$  distinto del origen de  $E$ . Así, si escogemos una base de  $E$  para introducir coordenadas por medio del isomorfismo lineal  $E \simeq k^{n+1}$ , entonces un punto  $P$  distinto del origen tiene una de sus coordenadas  $P = (a_0, \dots, a_n)$  distinta de cero. Claramente un punto arbitrario  $Q \in E$  pertenece a la recta que pasa por  $P$  y por el origen  $\bar{0}$  de  $E$  si y sólo si existe un escalar  $\lambda \in k$  tal que  $Q = \lambda P$ . Hemos así definido una función entre el conjunto  $\mathbb{P}(E)$  y el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$ , y claramente ésta es una biyección. Damos entonces a  $\mathbb{P}(E)$  la topología que hace que esta biyección sea un homeomorfismo, donde  $\mathbb{P}^n$  tiene la topología de Zariski. Decimos entonces que  $\mathbb{P}(E)$  es la *proyektivización* del espacio vectorial  $E$ . Por su definición, los puntos del espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$  se corresponden biunívocamente con subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $E$  y decimos entonces que  $\mathbb{P}(E)$  *parametriza* los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $E$ . La generalización siguiente, debida a Grassmann, es entonces natural. Fijando un entero  $0 \leq d \leq \dim E$ , el conjunto de los subespacios vectoriales de  $E$  de dimensión  $d + 1$  lo denotaremos por  $G(d + 1, E)$  y se conoce como la *Grassmanniana* de  $E$  de subespacios vectoriales de dimensión  $d + 1$ . Para ver que la Grassmanniana es una variedad proyectiva, comenzamos mostrando que se puede encajar en un espacio proyectivo. Para ésto, observe que todo subespacio vectorial  $L \subseteq E$  de dimensión  $d + 1$  está determinado por  $d + 1$  vectores  $w_0, \dots, w_d$  de  $E$  linealmente independientes. Considere ahora la  $d + 1$ -ésima potencia exterior  $\wedge^{d+1} E$  y recuerde que esta es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $\binom{n+1}{d+1}$ , donde  $n + 1 = \dim E$ , con una base dada por los elementos de la forma  $v_{i_0} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$  para  $i_0 < \dots < i_d$  y donde  $v_0, \dots, v_n$  es una base de  $E$ . Ahora, para el subespacio vectorial  $L \subseteq E$  de dimensión  $d + 1$ , determinado por una base  $w_0, \dots, w_d$ , considere entonces el elemento  $w_0 \wedge \dots \wedge w_d \in \wedge^{d+1} E$ . Observe ahora que si  $w'_0, \dots, w'_d$  es otra base de  $L$  los elementos  $w_0 \wedge \dots \wedge w_d$  y  $w'_0 \wedge \dots \wedge w'_d$  difieren sólo por el determinante  $\lambda$  de la matriz de cambio de base de  $L$ , es decir, difieren sólo por un escalar no cero  $\lambda \in k^*$ . Se sigue que el punto correspondiente a  $w_0 \wedge \dots \wedge w_d$  en  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  sólo depende del subespacio  $L$  y no de la elección de cualquier base de éste. Denotaremos este punto mediante  $[L] \in \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$ . Hemos definido así una función

$$\varphi : G(d + 1, E) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$$

que de hecho es inyectiva (la *inmersión de Plücker*). En efecto, para cualquier punto  $[w_0 \wedge \dots \wedge w_d] \in \text{Im } \varphi$ , el subespacio  $L \in G(d + 1, E)$  está unívocamente determinado por  $L = \{v \in E : v \wedge w_0 \wedge \dots \wedge w_d = 0\}$ . Por otra parte, si  $v_0, \dots, v_n$  es una base de  $E$ , los vectores de la forma  $v_{i_0} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$  para  $0 \leq i_0 < \dots < i_d \leq n$  forman una base de  $\wedge^{d+1} E$ . Entonces, todo punto  $[L] \in \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  se puede escribir de la forma

$$[L] = \sum_{i_0 < \dots < i_d} p_{i_0 \dots i_d} v_{i_0} \wedge \dots \wedge v_{i_d}.$$



Como  $[L]$  no es el origen, las coordenadas  $p_{i_0 \dots i_d}$  no son todas cero y se dice que son las *coordenadas de Plücker* del punto  $[L]$ . Antes de mostrar que  $G(d+1, E)$  es una subvariedad algebraica de  $\mathbb{P}(E)$  veamos dos ejemplos extremos:

**Ejemplo 1.1.2.** Cuando  $d = 0$ , directo de la definición se tiene que  $G(1, E) = \mathbb{P}(E)$ . Cuando  $d = n - 1$ , los subespacios vectoriales  $L \subseteq E$  de dimensión  $n$  corresponden a cocientes  $E/L$  de dimensión 1 porque la sucesión exacta siguiente se escinde

$$0 \rightarrow L \hookrightarrow E \twoheadrightarrow E/L \rightarrow 0.$$

Se sigue que

$$G(n, E) \simeq G(1, E) = \mathbb{P}(E).$$

Por otra parte, para  $d = 0$ ,  $\wedge^1 E = E$  y para  $d = n - 1$ ,  $\wedge^n E \simeq E$ . Así, en estos dos casos extremos, la inmersión de Plücker es un isomorfismo.

Salvo los dos casos extremos del ejemplo anterior, en general no todos los puntos  $P \in \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  son de la forma  $P = w_0 \wedge \dots \wedge w_d$  con  $w_i \in E$ . Para ver cuándo es este el caso, es decir, para determinar la imagen de la función de Plücker, al caracterizar lo anterior al mismo tiempo mostraremos que  $G(d+1, E)$  es variedad proyectiva. Para comenzar, queremos caracterizar aquellos vectores  $w \in \wedge^{d+1} E$  que son de la forma  $w = v_0 \wedge \dots \wedge v_d$  y para esto observamos que un vector  $w \in \wedge^{d+1} E$  es de la forma  $w = v \wedge u$  con  $v \in E$  y  $u \in \wedge^d E$ , si y sólo si  $w \wedge v = 0$ . En otras palabras, para la transformación lineal  $\varphi_w : E \rightarrow \wedge^{d+2} E$  dada por  $v \mapsto w \wedge v$  como su núcleo es  $\ker \varphi_w = \{v \in E : w \wedge v = 0\}$ , entonces  $w$  se puede expresar como  $w = v_0 \wedge \dots \wedge v_d$  si y sólo si  $\dim_k \ker \varphi_w = d + 1$ . Se sigue que  $[w] = [v_0 \wedge \dots \wedge v_d] \in G(d+1, E)$  si y sólo si el rango de  $\varphi_w$  es  $n - d$ . Como el rango de  $\varphi_w$  siempre es  $\geq n - d$  se sigue que la imagen de la inmersión de Plücker  $\varphi : G(d+1, E) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  está dada por

$$[w] \in G(d+1, E) \Leftrightarrow \text{rang}(\varphi_w) \leq n - d.$$

Finalmente observamos que la función  $\Phi : \wedge^{d+1} E \rightarrow \text{Hom}_k(E, \wedge^{d+2} E)$  dada por  $w \mapsto \varphi_w$  es lineal y por lo tanto las entradas de la matriz  $[\varphi_w]$  asociada son coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  y  $G(d+1, E)$  es la subvariedad de  $\mathbb{P}(\wedge^{d+1} E)$  definida por la anulación de los menores de tamaño  $n - d + 1$  de esta matriz.

**La Grassmanniana, segunda definición.** Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ , su proyectivización  $\mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}^n$  es una variedad de dimensión  $n$ . Entonces, un subespacio vectorial  $L \subseteq E$  de dimensión  $d + 1$  corresponde a un  $d$ -plano en  $\mathbb{P}(E)$ , i.e. a un  $\mathbb{P}(L) \simeq \mathbb{P}^d$  en  $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}(E)$ . Bajo esta identificación, la Grassmanniana  $G(d+1, E)$  se denota  $\mathbb{G}(d, \mathbb{P}(E))$ , o escogiendo bases,  $G(d+1, n+1)$  se denota por  $\mathbb{G}(d, n)$ .

**La Grassmanniana, tercera definición.** Generalizando lo usado en el ejemplo 1.1.2, un subespacio vectorial  $L \subseteq E$  de dimensión  $d + 1$  corresponde unívocamente, en la sucesión exacta que se escinde

$$0 \rightarrow L \hookrightarrow E \twoheadrightarrow E/L \rightarrow 0$$

a cocientes de  $E$  de dimensión  $n - d$ . Entonces,  $G(d + 1, E)$  se puede identificar con el conjunto  $G(E, n - d)$  de cocientes de dimensión  $n - d$  de  $E$ . O mejor aún, tomando duales en la sucesión exacta corta escindible anterior se obtiene la sucesión exacta corta (escindible)

$$0 \rightarrow (E/L)^\vee \rightarrow E^\vee \rightarrow L^\vee \rightarrow 0$$

donde  $\dim_k(E/L)^\vee = n - d$ , y así se tienen las identificaciones

$$G(d + 1, E) \simeq G(n - d, E^\vee) \quad \text{y} \quad \mathbb{G}(d, \mathbb{P}(E)) \simeq G(n - d - 1, \mathbb{P}(E^\vee)).$$

**La Grassmanniana, cuarta definición.** Desde un punto de vista geométrico un poco más contemporáneo, considere la categoría  $\text{Var}_k$  de variedades algebraicas sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  y para una variedad  $X \in \text{Var}_k$  sea  $\mathcal{O}_X$  su gavilla estructural. Si  $E$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ , entonces se puede ver como una gavilla localmente constante de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y el producto tensorial (como gavilla)  $E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X^{(n+1)}$  es libre de rango  $n + 1$ . Considere entonces el funtor

$$F : \text{Var}_k \rightarrow \text{Conj}$$

dado por  $X \mapsto F(X) =$  conjunto de cocientes  $E \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{F}$  localmente libres de rango  $n - d$ . Este funtor es representable precisamente por la Grassmanniana  $G(d + 1, E)$ , es decir,

$$(1) \quad F(X) \simeq \text{Hom}_{\text{Var}_k}(X, G(d + 1, E)).$$

En efecto, si  $\mathcal{F} \in F(X)$  y  $x \in X$  el epimorfismo  $E \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{F}$  induce en tallos el epimorfismo de espacios vectoriales

$$E \simeq E \otimes \mathcal{O}_{X,x} \simeq (E \otimes \mathcal{O}_X)_x \twoheadrightarrow \mathcal{F}_x$$

donde  $\dim_k \mathcal{F}_x = n - d$  y así el núcleo  $L$  del epimorfismo anterior tiene  $\dim_k L = d + 1$ , es decir  $L \in G(d + 1, E)$ . La asignación en (1) es entonces  $\mathcal{F} \rightsquigarrow (x \mapsto \ker(E \rightarrow \mathcal{F}_x))$ . Así, por el lema de Yoneda, la Grassmanniana  $G = G(d + 1, E)$  (de hecho, la identidad  $\text{id} : G \rightarrow G$ ) corresponde a un único cociente  $E \otimes \mathcal{O}_G \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_G$  localmente libre de rango  $n - d$ . El núcleo  $\mathcal{S}_G$  del epimorfismo anterior es localmente libre de rango  $d + 1$ . Se tiene así la sucesión exacta corta de gavillas localmente libres sobre  $G$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{S}_G \rightarrow E \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{Q}_G \rightarrow 0$$

y como localmente libres son planas, la sucesión dual también es exacta

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{Q}_G^\vee \rightarrow E^\vee \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{S}_G^\vee \rightarrow 0$$

donde dual quiere decir:  $(-)^{\vee} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_G}(-, \mathcal{O}_G)$ . Aplicando primero el funtor  $\wedge^{d+1}$  y luego el funtor contravariante  $\mathbb{P} = \mathbb{P}$  a (2) se obtienen los morfismos

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(d, \mathbb{P}(E)) &\simeq \mathbb{P}(\wedge^{d+1} \mathcal{S}_G^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^{d+1} (E^\vee \otimes \mathcal{O}_G)) \\ &\simeq \mathbb{P}(\wedge^{d+1} E^\vee) \times \mathbb{P}(\wedge^{d+1} \mathcal{O}_G) \\ &\quad \downarrow \\ &\mathbb{P}(\wedge^{d+1} E) \end{aligned}$$

que se puede identificar con la inmersión de Plücker.

### 1.1.1. Subvariedades de Grassmannianas

Para empezar, una inclusión de espacios vectoriales  $W \hookrightarrow E$  induce una inclusión de Grassmannianas  $G(d+1, W) \hookrightarrow G(d+1, E)$ ; de igual forma, un mapeo  $E \rightarrow E/U$  al cociente de  $E$  por un subespacio  $l$ -dimensional  $U$  induce una inclusión  $G(d+1-l, E/U) \hookrightarrow G(d+1, E)$ . Las imágenes de tales mapeos son llamadas *sub-Grassmannianas* y son subvariedades de  $G(d+1, E)$  (en términos de la inmersión de Plücker  $G(d+1, E) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} E)$ , son sólo la intersección de  $G(d+1, E)$  con subespacios lineales en  $\mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} E)$ ).

Si vemos la Grassmanniana como el conjunto de subespacios lineales en un espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$ , las sub-Grassmannianas son sólo los subconjuntos de planos contenidos en un subespacio fijo y/o que contienen a un subespacio fijo. También podemos considerar el subconjunto  $\Sigma(\Lambda) \subset \mathbb{G}(d+1, \mathbb{P}(E))$  de  $(d+1)$ -planos que intersectan un subespacio lineal  $m$ -dimensional dado  $\Lambda \subset \mathbb{P}(E)$ , o más generalmente el subconjunto  $\Sigma_l(\Lambda)$  de  $(d+1)$ -planos que intersectan un  $\Lambda$  dado, en un subespacio de dimensión al menos  $l$ . Estos son otra vez subvariedades de la Grassmanniana;  $\Sigma_l(\Lambda)$  puede ser descrito como:

$$\Sigma_l(\Lambda) = \{[\omega] : \omega \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-l+1} = 0, \forall v_1, \dots, v_{m-l+1} \in \Lambda\}$$

de lo cual podemos ver en particular que como las sub-Grassmannianas, es la intersección de la Grassmanniana con un subespacio lineal de  $\mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} E)$ .

Supongamos que  $W \subset E$  es un subespacio de codimensión  $l$  en el espacio vectorial  $(n+1)$ -dimensional  $E$ . Para  $d+1 \leq l$ , tenemos un mapeo  $\pi : U \rightarrow G(d+1, E/W)$  definido en el conjunto abierto  $U \subset G(d+1, E)$  de  $(d+1)$ -planos que intersectan  $W$  únicamente en 0 simplemente tomando la imagen; para  $(d+1) \geq l$  tenemos un mapeo  $\eta : U' \rightarrow G(d+1-l, W)$  definido en el subconjunto abierto  $U' \subset G(d+1, E)$  de planos transversos a  $W$ , tomando la intersección. Notemos que ambos mapeos se pueden realizar via el encaje de Plücker, por una proyección lineal sobre el espacio proyectivo ambiente  $\mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} E)$  (por ejemplo, el mapeo  $\pi$  es la restricción a  $G(d+1, E)$  del mapeo lineal  $\mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} E) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{d+1}(E/W))$  inducido por la proyección  $E \rightarrow E/W$ ).

### 1.1.2. Variedades de incidencia

Sea  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(d, n)$  la Grassmanniana de  $(d)$ -planos en  $\mathbb{P}^n$ . Podemos entonces definir una subvariedad  $\Sigma \subseteq \mathbb{G} \times \mathbb{P}^n$ , dada por

$$\Sigma = \{(\Lambda, x) : x \in \Lambda\}.$$

$\Sigma$  es simplemente la subvariedad del producto cuya fibra sobre un punto dado  $\Lambda \in \mathbb{G}$  es el mismo  $d$ -plano  $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ .

No es difícil ver que  $\Sigma$  es una variedad proyectiva; de hecho, podemos escribir

$$\Sigma = \{([v_1 \wedge \cdots \wedge v_d], [w]) : v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge w = 0\}.$$

**Proposición 1.1.3.** Sea  $\Phi \subseteq \mathbb{G}(d, n)$  cualquier subvariedad. Entonces la unión

$$\Psi = \bigcup_{\Lambda \in \Phi} \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$$

es también una variedad.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\pi_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{G}(d, n)$  y  $\pi_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^n$  las respectivas proyecciones. Entonces podemos escribir

$$\Psi = \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi))$$

de lo cual tenemos que  $\Psi$  es subvariedad de  $\mathbb{P}^n$ .  $\square$

### 1.1.3. Variedades de planos incidentes

Sea  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  cualquier variedad proyectiva.

**Lema 1.1.4.** El lugar  $\mathcal{C}_d(X)$  de  $d$ -planos que intersectan a  $X$  es una subvariedad de la Grassmanniana  $\mathbb{G}(d, n)$ .

Para ver esto sea  $\Sigma \subseteq \mathbb{G} \times \mathbb{P}^n$  definida como antes, escribimos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_d(X) &= \{\Lambda \subseteq \mathbb{G}(d, n) : \Lambda \cap X \neq \emptyset\} \\ &= \{(\Lambda, x) \in \mathbb{G} \times \mathbb{P}^n : x \in \Lambda \cap X\} \\ &= \{(\Lambda, x) \in \Sigma : x \in X\} \\ &= \pi_1(\pi_2^{-1}(X)) \subseteq \mathbb{G}(d, n) \end{aligned}$$

donde  $\pi_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{G}(d, n)$  y  $\pi_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^n$  son los mapeos proyección. Esta variedad se llama la *variedad de planos incidentes*.

**Nota 1.1.5.** En los resultados anteriores dado que las proyecciones  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son morfismos regulares, se usa el teorema de Chevalley ver [5], aplicado a los respectivos conjuntos para ver que estos son cerrados.

### 1.1.4. La unión de dos variedades

Sean  $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades proyectivas disjuntas. Combinando 1.1.2 y 1.1.3 podemos deducir que la unión  $J(X, Y) \subseteq \mathbb{P}^n$  de las rectas que unen  $X$  a  $Y$  es otra vez una variedad proyectiva.

Por 1.1.3 el conjunto  $\mathfrak{J}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  de rectas que unen  $X$  a  $Y$  es una subvariedad de la Grassmanniana, ya que se puede expresar como la intersección  $\mathcal{C}_1(X) \cap \mathcal{C}_1(Y)$ , entonces por 1.1.2 la unión de estas rectas es una subvariedad de  $\mathbb{P}^n$ . Llamaremos a la variedad  $J(X, Y)$  la *unión* de  $X$  y  $Y$ .

Ahora sean  $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$  variedades proyectivas irreducibles. En el párrafo anterior dijimos que si  $X$  y  $Y$  son disjuntas, entonces el lugar  $\mathfrak{J}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subseteq \mathbb{G}(1, n)$  de rectas que intersectan ambas es una subvariedad de la Grassmanniana y por lo tanto la unión  $J(X, Y)$  de estas rectas es una subvariedad de  $\mathbb{P}^n$ . Daremos otra prueba de esto que generaliza la construcción al caso donde  $X$  y  $Y$  se intersectan (o incluso son iguales).

Observemos primero que si  $X$  y  $Y$  son disjuntas, el mapeo

$$j : X \times Y \rightarrow \mathbb{G}(1, n)$$

dado por enviar la pareja  $(p, q)$  a la recta  $\overline{pq}$ , es decir, por

$$j([v], [w]) \mapsto [v \wedge w]$$

es un mapeo regular. Más generalmente, aún si  $X$  y  $Y$  se intersectan, obtenemos de esta manera un mapeo racional  $j : X \times Y \dashrightarrow \mathbb{G}(1, n)$ ; la imagen de este mapeo sería justo la cerradura en  $\mathbb{G}(1, n)$  del lugar de las rectas  $\overline{xy}$ , con  $x \in X$ ,  $y \in Y$  y  $x \neq y$ . Llamaremos a esta la *variedad de rectas que unen a  $X$  y  $Y$* , denotada por  $\mathfrak{J}(X, Y)$ .

Ahora por 1.1.3, la unión de todas las rectas  $L \in \mathfrak{J}(X, Y)$  es también una variedad, a esta variedad se le llama la *unión de  $X$  y  $Y$* . Notación:  $J(X, Y)$ .

### 1.1.5. Unión de puntos correspondientes

Sean  $X, Y$  subvariedades de  $\mathbb{P}^n$  y supongamos que tenemos un mapeo regular  $\phi : X \rightarrow Y$  tal que  $\phi(x) \neq x$  para toda  $x \in X$ . Entonces definimos un

$$k_\phi : X \rightarrow \mathbb{G}(1, n)$$

enviando un punto  $x \in X$  a la recta  $\overline{x, \phi(x)}$ , uniendo  $x$  a su imagen bajo  $\phi$ . Este es un mapeo regular, así su imagen es una variedad, se sigue que la unión

$$K(\phi) = \bigcup_{x \in X} \overline{x, \phi(x)}$$

es también una variedad. Si la condición  $\phi(x) \neq x$  no se cumple para algún (pero no todo)  $x \in X$ , aún podemos definir un mapeo racional  $k_\phi$  y definir  $K(\phi)$  como la unión de las rectas correspondientes a su imagen.

## 1.2. Rollos normales racionales. Primera construcción

La primera construcción de los rollos normales racionales es totalmente geométrica como la unión de variedades en un caso especial de la construcción de la subsección §1.1.5.

### 1.2.1. Rollos normales racionales. Un caso particular

Sean  $e_0, e_1$  enteros positivos con  $e_0 \leq e_1$ ,  $n = e_0 + e_1 + 1$  y sean  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  subespacios complementarios lineales de dimensiones  $e_0$  y  $e_1$  en  $\mathbb{P}^n$ , es decir,  $\Lambda \cap \Lambda' = \emptyset$  y su generado es todo  $\mathbb{P}^n$ . Ahora escojamos curvas normales racionales  $C \subseteq \Lambda$  y  $C' \subseteq \Lambda'$  y un isomorfismo  $\varphi : C' \rightarrow C$ .

Un *rollo normal racional* es  $S_{e_0, e_1} = \bigcup_{p \in C'} \overline{p, \varphi(p)}$ , es decir, es la unión de las rectas de una curva normal racional a otra. Las rectas  $\overline{p, \varphi(p)}$  se llaman las *rectas del reglado* de  $S_{e_0, e_1}$ ; como veremos en la proposición siguiente son las únicas rectas que viven en  $S_{e_0, e_1}$  a menos que  $e_0 = 1$ . Observemos que  $S_{e_0, e_1}$  esta determinado salvo isomorfismo proyectivo por los enteros  $e_0$  y  $e_1$ ; pues podemos mover cualquier par de planos  $\Lambda, \Lambda'$  en cualesquiera otros, cualesquiera curvas normales racionales  $C, C'$  en cualesquiera otras y finalmente ajustar  $\varphi$  componiendo con un automorfismo de  $\Lambda$  o  $\Lambda'$  induciendo un automorfismo de  $C$  o  $C'$ . El nombre de *rollo* es porque evoca como imagen los pergaminos de la antigüedad:



**Ejemplo 1.2.1.** Sean  $e_0 = 0$ ,  $e_1 \geq 0$  y  $n = e_1 + 1$ , de aquí  $e_1 = n - 1$ . Sean también  $\Lambda, \Lambda' \subseteq \mathbb{P}^n$  subespacios lineales complementarios tales que  $\dim \Lambda = 0$  y  $\dim \Lambda' = n - 1$  (dado que en este caso  $\dim \Lambda = 0$ , tenemos que  $\Lambda = \{P\}$ ). Elijamos curvas normales racionales  $C \subseteq \Lambda$  y  $C' \subseteq \Lambda'$  y un isomorfismo  $\varphi : C' \rightarrow C$  dada por  $\varphi(x) = P$ , para todo  $x \in C'$ , es decir,  $\varphi$  es mapeo constante. En el caso degenerado donde  $e_0 = 0$  y  $C$  es un punto, tenemos que el rollo  $S_{0,n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ , puede ser visto como un cono sobre una curva normal racional.

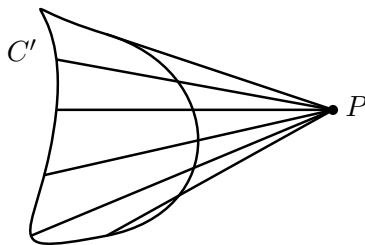


Figura 1.  $S_{0,n-1}$  visto como un cono sobre una curva normal racional

**Ejemplo 1.2.2.** Sean  $e_0 = 2$  y  $e_1 = 1$ , así  $n = e_0 + e_1 + 1 = 4$ . Sean  $\Lambda, \Lambda' \subseteq \mathbb{P}^4$  subespacios lineales complementarios de dimensiones  $e_0$  y  $e_1$  respectivamente. Elijamos curvas normales racionales  $C \subseteq \Lambda$ ,  $C' \subseteq \Lambda'$  y un isomorfismo  $\varphi : C' \rightarrow C$ . Entonces  $S_{2,1} \subseteq \mathbb{P}^4$  es el rollo cúbico.

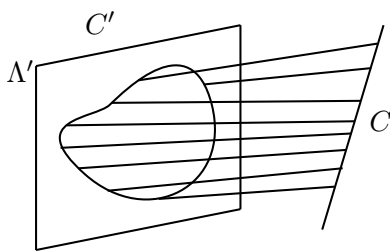


Figura 2. El rollo cúbico  $S_{2,1} \subseteq \mathbb{P}^4$

## 1.2.2. Propiedades de los rollos

**Lema 1.2.3.** Si  $L_0, \dots, L_{e_0}$  son cualesquiera  $e_0 + 1$  rectas del reglado de un rollo  $S_{e_0,e_1}$ , entonces  $L_i$ ,  $0 \leq i \leq e_0$  son independientes, es decir, generan a  $\mathbb{P}^{2e_0+1}$ .

Además cualesquiera  $e_0 + 2$  rectas son dependientes, es decir, están contenidas en un  $\mathbb{P}^{2e_0+2}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\pi : \mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_K^n$  la proyección canónica y sean  $L_0, \dots, L_{e_0}$  rectas del reglado del rollo  $S_{e_0, e_1}$  y supongamos que  $L_i = \pi(P_i)$ , con  $0 \leq i \leq e_0$ , donde  $P_i \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$  es un plano. Queremos mostrar que  $\langle L_0, \dots, L_{e_0} \rangle = \mathbb{P}^{2e_0+1}$ .

Tenemos que  $\langle L_0, \dots, L_{e_0} \rangle = \langle \pi^{-1}(L_0), \dots, \pi^{-1}(L_{e_0}) \rangle = \langle P_0, \dots, P_{e_0} \rangle$ , por otro lado  $L_i \cap L_j = \emptyset$  de aquí  $P_i \cap P_j = 0$ , y así  $P_i \cap \sum_{i \neq j} P_j = 0$ , entonces  $\dim(\sum_{i=0}^{e_0} P_i) = \sum_{i=0}^{e_0} \dim(P_i) = 2(e_0 + 1) = 2e_0 + 2$ . Por lo tanto  $\langle L_0, \dots, L_{e_0} \rangle = V$ , donde  $\dim(V) = 2e_0 + 2$ , entonces  $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{2e_0+1}$ , es decir,  $\langle L_0, \dots, L_{e_0} \rangle = \mathbb{P}^{2e_0+1}$ . Por lo tanto  $L_0, \dots, L_{e_0}$  son independientes.  $\square$

**Definición 1.2.4.** Decimos que dos variedades  $X, X' \subseteq \mathbb{P}^n$  son *proyectivamente equivalentes* si existe un automorfismo  $\sigma \in PGL_n$  de tal forma que  $\sigma(X) = X'$ .

**Observación 1.2.5.** Dado un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{P}^n$ , existe un mínimo subespacio lineal proyectivo que contiene a  $X$ , este espacio se denomina el *espacio lineal proyectivo generado* por  $X$  y se denota  $\langle X \rangle$  y corresponde al subespacio vectorial generado por  $\pi^{-1}(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ .

**Lema 1.2.6.** Si  $e_0 < e_1$ , entonces  $e_1 = n - e_0 - 1$  rectas  $L_i$  del reglado del rollo  $S_{e_0, e_1}$  generan un hiperplano  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  de tal modo que la intersección de  $H$  con  $S_{e_0, e_1}$  consiste de las rectas  $L_i$  junto con la curva  $C$ .

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que  $H \cap S_{e_0, e_1} = \{L_1, \dots, L_{e_1}, C\}$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $P \in \{L_1, \dots, L_{e_1}, C\}$ .

- Si  $P = L_i$  con  $1 \leq i \leq e_1$ , entonces  $P \in H$  y  $P \in S_{e_0, e_1}$ , es decir,  $P \in H \cap S_{e_0, e_1}$ .
- Por otro lado si  $P = C$ , entonces  $P \in S_{e_0, e_1}$ , falta mostrar que  $P \in H$ . Tenemos que  $e_0 < e_1$  y además  $n = e_0 + e_1 + 1$ , de este modo  $n - 1 = e_0 + e_1 > e_0$ , entonces  $\mathbb{P}^k \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \cong H \subseteq \mathbb{P}^n$ , de aquí  $C \in H$ . Por lo tanto  $P \in H \cap S_{e_0, e_1}$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $J \in H \cap S_{e_0, e_1}$ , entonces  $J \in \langle L_1, \dots, L_{e_1} \rangle = H$  y  $J \in S_{e_0, e_1}$ . Supongamos que  $J \neq C$  y como anteriormente supongamos que  $P_i = \pi^{-1}(L_i)$ , con  $1 \leq i \leq e_1$ , donde  $P_i \subseteq \mathbb{A}_K^{n+1}$ . Sea  $Q \in \pi^{-1}(J) \subseteq \langle P_1, \dots, P_{e_1} \rangle$  y dado que  $L_i \cap L_j = \emptyset$ , tenemos que  $P_i \cap P_j = 0$ , entonces  $Q \neq 0$ , entonces  $Q \in P_i$  para alguna  $i$ , entonces  $\pi(Q) \in \pi(P_i) = L_i$  para alguna  $i$ , entonces  $J \subseteq L_i$  para alguna  $i$ . Por lo tanto  $P = L_i$ , por lo tanto  $J \in \{L_1, \dots, L_{e_1}, C\}$ .  $\square$

**Definición 1.2.7.** Una curva normal racional de grado  $e_1$  en el rollo  $S_{e_0, e_1}$  que vive en un subespacio lineal  $\mathbb{P}^{e_1}$ , complementario al generado de la directriz y que interseca a cada una de las rectas del reglado una sola vez, será llamada una *sección complementaria* de  $S_{e_0, e_1}$ .

**Lema 1.2.8.** Sea  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  un hiperplano tal que  $H$  contiene  $n - e_1 = e_0 + 1$  o más rectas del reglado de  $S_{e_0, e_1}$ , entonces  $H$  interseca  $S_{e_0, e_1}$  en una unión del reglado y la directriz  $C$ . Por otro lado un hiperplano que contiene  $n - e_1 - 1 = e_0$  rectas del

reglado intersecta a  $S_{e_0, e_1}$  en una unión de rectas del reglado y la directriz o en las  $e_0$  rectas dadas y una sección complementaria. Por lo anterior cualquier punto del rollo  $S_{e_0, e_1}$  que no pertenece a la directriz se halla en una sección complementaria.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $L_0, \dots, L_{e_0}$  rectas del reglado de  $S_{e_0, e_1}$  y sea  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  hiperplano tal que  $L_0, \dots, L_{e_0} \subseteq H$ . Debemos mostrar que  $H \cap S_{e_0, e_1} = \{\bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i, C\}$ . Las  $e_0 + 1$  rectas  $L_i$  generan un  $\mathbb{P}^{2e_0+1}$ , es decir,  $\mathbb{P}^{2e_0+1} \subseteq H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $J \in \{\bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i, C\}$ , entonces  $J = \bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i$  o  $J = C$ . Supongamos que  $J \neq \bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i$ , entonces  $J = C$ , así  $J \in S_{e_0, e_1}$ . Además  $L_i = \overline{Q_i, \varphi(Q_i)} \subseteq H$ , para  $0 \leq i \leq e_0$ , es decir, los  $e_0 + 1$  puntos  $\varphi(Q_i) \in C$ , también pertenecen a  $H$ . Por otro lado sabemos que  $\mathbb{P}^{e_0} \subseteq \mathbb{P}^{2e_0+1} \subseteq H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ , de este modo basta demostrar que los  $e_0 + 1$  puntos  $\varphi(Q_i)$  generan  $\mathbb{P}^{e_0}$ .

Para lo anterior usaremos los siguiente hechos:

1. Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$ . Entonces el número máximo de puntos linealmente independientes en  $\mathbb{P}(E)$  es  $n + 1$ , es decir, la dimensión de  $\mathbb{P}$ .
2. De  $n + 1$  puntos de un espacio  $\mathbb{P}(V)$ , con  $\dim(\mathbb{P}(V)) = n$ , da lo mismo afirmar que generan el espacio total a que son independientes.

Por lo anterior tenemos que los  $e_0 + 1$  puntos  $\varphi(Q_i)$  generan  $\mathbb{P}^{e_0}$ , es decir,  $\mathbb{P}^{e_0} \subseteq \mathbb{P}^{2e_0+1} \subseteq H \subseteq \mathbb{P}^n$ , además  $C \subseteq \mathbb{P}^{e_0}$ , entonces  $C \subseteq H$ . Por lo tanto  $C \in H \cap S_{e_0, e_1}$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $P \in H \cap S_{e_0, e_1}$ , entonces  $P \in H$  y  $P \in S_{e_0, e_1} \subseteq \mathbb{G}(1, n)$ . Debemos mostrar que  $P \in \{\bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i, C\}$ , es decir,  $P = \bigcup_{L'_i \subseteq S_{e_0, e_1}} L'_i$  ó  $P = C$ . Supongamos que  $P \neq C$ , basta mostrar que  $P = L'_i$ , para alguna  $i$ .  $\square$

**Proposición 1.2.9.** (a) Los rollos  $S_{e_0, e_1}, S_{e'_0, e'_1} \subseteq \mathbb{P}^n$  son proyectivamente equivalentes si y sólo si  $e_0 = e'_0$ .

(b) En el caso  $e_0 < e_1$ , la curva normal racional  $C \subseteq S_{e_0, e_1}$  de grado  $e_0$  que aparece en la construcción, es la única curva normal racional de grado menor que  $e_1$  en  $S$  (distinta de las rectas del reglado); en particular, está determinada de manera única por  $S_{e_0, e_1}$  (se llama la directriz de  $S_{e_0, e_1}$ ). No es el caso para la curva normal racional  $C'$  de grado mayor  $e_1$  o para  $C$  misma en el caso  $e_0 = e_1$ .

(c) La imagen del rollo  $S_{e_0, e_1}$  bajo proyección desde un punto  $p \in S_{e_0, e_1}$  es proyectivamente equivalente a  $S_{e_0-1, e_1}$  si  $p$  pertenece a la directriz  $C$ ; y es proyectivamente equivalente a  $S_{e_0, e_1-1}$  en otro caso. En particular todos los rollos son racionales.

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración de (a), si  $S_{e_0, e_1}$  y  $S_{e'_0, e'_1}$  son proyectivamente equivalentes, sin pérdida de generalidad supongamos que  $e_0 \leq e'_0$ . Si  $L_i \in S_{e'_0, e'_1}$ , con  $0 \leq i \leq e_0$ , entonces por 1.2.3 tenemos  $e'_0 + 1$  rectas linealmente independientes, como  $\sigma(S_{e'_0, e'_1}) = S_{e_0, e_1}$ , entonces  $\sigma(L_i) \subseteq S_{e_0, e_1}$  son  $e'_0 + 1$  rectas linealmente independientes, entonces  $e'_0 + 1 \leq e_0 + 1$ , entonces  $e'_0 \leq e_0$ . Por lo tanto  $e_0 = e'_0$ .



Recíprocamente si  $e_0 = e'_0$  como  $e_0 + e_1 + 1 = n = e'_0 + e'_1 + 1$ , entonces  $e_1 = e'_1$ , es decir,  $S_{e_0, e_1}$  y  $S_{e'_0, e'_1}$  son proyectivamente equivalentes trivialmente.

Para la demostración de (b), supongamos que existe  $C'' \subseteq S_{e_0, e_1}$  de tal manera que  $\text{grado}(C'') = e_0 < e_1$ . Por el lema 1.2.6 tenemos que  $\langle L_1, \dots, L_{e_1} \rangle = H \subseteq \mathbb{P}^n$  y  $H \cap S_{e_0, e_1} = \{L_1, \dots, L_{e_1}, C''\} = \{L_1, \dots, L_{e_1}, C\}$ , de aquí tenemos que  $C'' = C$ .  $\square$

**Observación 1.2.10.** Notemos que el rollo  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^n$  es no degenerado por 1.2.9.

### 1.2.3. Rollos normales racionales. El caso general

A continuación se generaliza la construcción de los rollos normales racionales de la subsección §1.2.1 al caso cuando se tienen  $\Delta$  enteros  $0 \leq e_\Delta \leq \dots \leq e_1$  y  $e_\Delta \geq 1$  como sigue:

Se escogen  $\Delta$  espacios lineales complementarios  $L_i \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$  (esto es  $L_i \cap L_j = \emptyset$  y  $\overline{L_1 \cup \dots \cup L_\Delta} = \mathbb{P}^{N-1}$ ) de dimensiones  $\dim L_i = e_i$ , así  $L_i \simeq \mathbb{P}^{e_i}$  y no todos los  $e_i$  son cero. Después si cada  $e_i \neq 0$  en cada  $L_i$  escogemos una curva normal racional  $C_{e_i}$  y un isomorfismo  $\phi_i : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_{e_i}$ . Si  $e_i = 0$ ,  $C_{e_i} = L_i = \mathbb{P}^0$  es un punto y  $\phi_i : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_{e_i} = \mathbb{P}^0$  es la función constante. Entonces la variedad

$$S_{e_1, \dots, e_\Delta} = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^1} \overline{\phi_1(P), \dots, \phi_\Delta(P)} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

dada por la unión de los  $(\Delta - 1)$ -planos generados por los puntos  $\phi_1(P), \dots, \phi_\Delta(P)$  de las curvas  $C_{e_i}$  es el *rollo normal racional*.

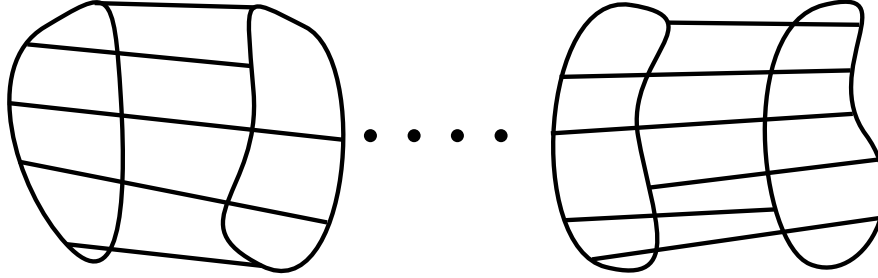


Figura 3. El rollo normal racional  $S_{e_1, \dots, e_\Delta}$

**Observación 1.2.11.** El rollo general  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$  es no degenerado. En efecto para cualquier subespacio lineal  $H \subseteq \mathbb{P}^{N-1} = \overline{L_1 \cup \dots \cup L_\Delta}$  tal que  $S_{e_1, \dots, e_\Delta} \subseteq H$  se tiene que  $H = \mathbb{P}^{N-1}$ .

## 1.3. Rollos normales racionales. Segunda construcción

En esta sección se muestran que los rollos normales racionales de la sección 1.2 son variedades determinantaes.

### 1.3.1. Variedades determinantaes

Si  $m, n$  son enteros no negativos, sea  $M(m, n) = \text{Mat}_{m \times n} \simeq \mathbb{A}^{mn}$  la variedad afín de matrices  $m \times n$ . Para  $0 \leq \min\{m, n\}$ , sea

$$M_r(m, n) := \{P \in M(m, n) : \text{rang}(P) \leq r\} \subseteq M(m, n)$$

el conjunto de matrices  $m \times n$  de rango  $\leq r$ . Por definición de rango de una matriz, es claro que las matrices  $P$  de rango  $\leq r$  satisfacen que todas sus submatrices de tamaño  $(r+1) \times (r+1)$  tienen determinante nulo. Dicho de otra manera, las entradas de las matrices  $P$  satisfacen las ecuaciones polinomiales dadas por los menores (determinantes) de tamaño  $r+1$ . Sea  $I_{r+1}$  el ideal generado por los menores de tamaño  $r+1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} M_r(m, n) &= \{P \in M(m, n) : \text{rang } P \leq r\} \\ &= \{P \in M(m, n) : \text{los menores de tamaño } r+1 \text{ de } P \text{ se anulan}\} \\ &= \mathcal{V}(I_{r+1}) \end{aligned}$$

y así  $M_r(m, n) = \mathcal{V}(I_{r+1})$  es una subvariedad afín de  $M(m, n)$ .

**Lema 1.3.1.** (1) *La codimensión de  $M_r(m, n)$  en  $M(m, n)$  es  $(m-r)(n-r)$ .*

(2) *El lugar singular de  $M_r(m, n)$  es  $M_{r-1}(m, n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para (1), considere la correspondencia de incidencia

$$\Sigma := \{(P, \Lambda) \in M(m, n) \times G(n-r, n) : \Lambda \subseteq \ker P\}$$

pensando a  $P \in M(m, n)$  como una transformación lineal  $P : k^n \rightarrow k^m$ . Note primero que para la proyección  $q : \Sigma \rightarrow G(n-r, n)$  su fibra en un punto  $\Lambda \in G(n-r, n)$  es

$$q^{-1}(\Lambda) = \{(P, \Lambda) \in \Sigma : \Lambda \subseteq \ker P \text{ con } P \text{ fijo}\} \simeq \{P : k^n \rightarrow k^m : \Lambda \subseteq \ker P\}$$

donde observamos que  $\Lambda \subseteq \ker P \Leftrightarrow P(\Lambda) = 0 \Leftrightarrow P$  induce  $\bar{P} : k^n/\Lambda \rightarrow k^m$ , por lo que

$$q^{-1}(\Lambda) \simeq \mathbb{P} \text{Hom}_k(k^n/\Lambda, k^m) \simeq \mathbb{P} M(m, r) \simeq \mathbb{P}^{mr-1}$$

porque  $\dim_k(k^n/\Lambda) = r$  ya que  $\dim_k \Lambda = n-r$ . Del teorema de la dimensión de las fibras se sigue que

$$\dim \Sigma = \dim G(n-r, n) + \dim q^{-1}(\Lambda) = r(n-r) + (mr-1) = r(m+n-r) - 1.$$

Finalmente, como la proyección  $p : \Sigma \rightarrow M$  es de grado 1 y su imagen es  $M_r(m, n)$  porque  $n-r = \dim_k \Lambda \leq \dim_k(\ker P)$  implica que  $\text{rang } P \leq r$ , entonces  $M_r(m, n)$  tiene la misma dimensión que  $\Sigma$  y por lo tanto su codimensión es

$$\text{codim}_{M(m, n)} M_r(m, n) = mn - 1 - (r(m+n-r) - 1) = (m-r)(n-r). \quad \square$$

Para probar que  $M_r = M_r(m, n)$  es una variedad normal se requiere un poco más acerca del ideal de definición  $I_{r+1}$  de  $M_r$ :

**Proposición 1.3.2.** *El ideal  $I_{r+1}$  es radical. Se sigue que el ideal de anulaci3n de  $M_r$  es  $I_{r+1}$ .*

DEMOSTRACI3N. Por definici3n  $M_r = \mathcal{V}(I_{r+1})$  y as3 basta mostrar que  $I_{r+1}$  es radical.  $\square$

Observe ahora que la multiplicaci3n de matrices da un morfismo de variedades afines

$$M(m, r) \times M(r, n) \rightarrow M(m, n)$$

cuya imagen es la subvariedad determinantal  $M_r(m, n)$ . Por otra parte, se tiene la acci3n del grupo lineal general  $\mathrm{GL}_r$  en la variedad producto  $M(r, n) \times M(m, n)$  dada por

$$g(P, Q) := (Pg^{-1}, gQ), \quad \text{para } g \in \mathrm{GL}_r, P \in M(m, r) \text{ y } Q \in M(r, n).$$

**Teorema 1.3.3.** *El anillo de coordenadas de  $M_r(m, n)$  es*

$$k[M_r(m, n)] = k[M(m, r) \times M(r, n)]^{\mathrm{GL}_r}.$$

DEMOSTRACI3N. Para la demostraci3n consultar [1, p3gs. 78-79].  $\square$

**Corolario 1.3.4.** *La variedad  $M_r(m, n)$  es normal.*

DEMOSTRACI3N. Como  $M(m, r) \times M(r, n)$  es lisa, y por lo tanto normal, basta probar que el subanillo  $k[M_r] \subseteq k[M(m, r) \times M(r, n)] =: S$  es integralmente cerrado en  $S$ . Para esto, supongamos que  $a \in S$  satisface una ecuaci3n de dependencia entera sobre  $k[M_r] = S^{\mathrm{GL}_r}$ . Entonces, para todo  $g \in \mathrm{GL}_r$  los trasladados  $ga \in S$  satisfacen la misma ecuaci3n (porque los coeficientes de esta ecuaci3n son invariantes bajo la acci3n de  $\mathrm{GL}_r$ ). Pero como esta ecuaci3n s3lo tiene un n3mero finito de ra3ces, entonces s3lo hay un n3mero finito de trasladados  $ga$  de  $a$ ; es decir, la 3rbita  $\mathrm{orb}_{\mathrm{GL}_r}(a)$  es finita. Pero como  $\mathrm{GL}_r$  es conexo, esto s3lo es posible si  $\mathrm{orb}_{\mathrm{GL}_r}(a) = \{a\}$ , es decir, si  $a$  es  $\mathrm{GL}_r$ -invariante, i.e.,  $a \in k[M_r]$ .  $\square$

El resultado siguiente es m3s profundo:

**Teorema 1.3.5** (Eagon-Hochster, Hochster-Laksov-Musili). *La variedad  $M_r(m, n)$  es Cohen-Macaulay.*

DEMOSTRACI3N. Para la demostraci3n consultar [1, p3gs. 79-82].  $\square$

La construcci3n anterior de las variedades  $M_r(m, n)$  se puede generalizar de la forma siguiente. Sea  $X$  una variedad algebraica arbitraria y sea  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  un morfismo de gavillas de  $k$ -3lgebras en  $X$ , localmente libres de rangos  $n$  y  $m$ , respectivamente. Entonces, existen abiertos (afines)  $U \subseteq X$  que cubren  $X$  tales que  $\mathcal{E}|_U$  y  $\mathcal{F}|_U$  son libres de rangos  $n, m$  y adem3s  $\varphi|_U : \mathcal{E}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$  es tal que, para todo  $x \in U$ ,

$$\varphi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$$

es un morfismo de  $k$ -espacios vectoriales de dimensiones  $n$  y  $m$ , respectivamente, y por lo tanto est3 representado por una matriz  $[\varphi_x]$  de tama3o  $m \times n$ . Se tiene as3 una funci3n

$$(1) \quad U \rightarrow M(m, n) \quad \text{dada por } x \mapsto [\varphi_x]$$

que, claramente, es un morfismo de variedades (afines). Entonces, para  $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ , sea  $U_r \subseteq U$  la preimagen de  $M_r = M_r(m, n)$  bajo el morfismo (1). Observe que  $\mathcal{O}_X|_{U_r}$  es la gavilla estructural de  $U_r$  y, más aún, las variedades (afines)  $(U_r, \mathcal{O}_{U_r})$  satisfacen las condiciones de pegado y definen una subvariedad algebraica

$$X_r(\varphi) \subseteq X$$

tal que  $X_r(\varphi) \cap U = U_r$ . La variedad  $X_r(\varphi)$  se llama la *variedad determinantal  $r$ -ésima* asociada al morfismo  $\varphi$  y a la variedad  $X$ . Note que el conjunto subyacente a  $X_r(\varphi)$  es

$$(2) \quad X_r(\varphi) = \{x \in X : \text{rang}(\varphi_x) \leq r\}.$$

Como la codimensión de  $M_r$  en  $M(m, n)$  es  $(m-r)(n-r)$ , entonces

$$\text{codim}_X(X_r(\varphi)) \leq (m-r)(n-r).$$

**Observación 1.3.6.** Si  $X = M(m, n)$  con gavilla estructural  $\mathcal{O}_X$  y  $\varphi : \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X^m$  es el morfismo dado por  $v \mapsto Av$ , donde  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ , entonces  $X_r(\varphi) = M_r(m, n)$ , por lo que la construcción general recupera la construcción inicial.

A continuación veremos que el teorema 1.3.5 implica la versión general si  $X_r(\varphi)$  tiene la codimensión máxima:

**Teorema 1.3.7.** Sean  $X$  una variedad algebraica arbitraria,  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  un morfismo de gavillas de  $k$ -álgebras en  $X$ , localmente libres de rangos  $n$  y  $m$ , respectivamente, y  $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ . Si  $X_r(\varphi)$  tiene codimensión  $(m-r)(n-r)$  en  $X$ , entonces es Cohen-Macaulay. Se sigue que  $X_r(\varphi)$  no tiene componentes encajadas.

El teorema 1.3.7 se sigue de la versión especial 1.3.5 (donde, por el lema 1.3.1,  $M_r(m, n)$  tiene la codimensión máxima) y del lema siguiente:

**Lema 1.3.8.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo entre variedades algebraicas y  $Z \subseteq Y$  una subvariedad Cohen-Macaulay pura de codimensión  $r$ . Si  $f^{-1}(Z)$  es pura de codimensión  $r$ , entonces es Cohen-Macaulay.

## 1.3.2. Rollos normales racionales como variedades determinantes

Una ventaja de la descripción determinantal es que exhibe el ideal de definición del rollo.

Comenzamos observando que una curva normal racional  $C_i \subseteq L_i \simeq \mathbb{P}^{e_i} \subseteq \mathbb{P}^n$  es la imagen del encaje  $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{e_i}$  dado por el sistema lineal completo  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$ , que en coordenadas homogéneas es

$$\varphi_i : [y_0, y_1] \mapsto [y_0^{e_i}, y_0^{e_i-1}y_1, \dots, y_1^{e_i}]$$

(monomios de grado  $e_i$  en dos variables), es decir,  $C_i$  es una variedad de Veronese. Entonces, para los multiíndices  $\underline{i} = (i_0, i_1)$ , poniendo  $z_{\underline{i}} = y_0^{i_0}y_1^{i_1}$ , la curva anterior está dada por los ceros de los polinomios  $z_{\underline{i}}z_{\underline{j}} - z_{\underline{p}}z_{\underline{q}}$  para  $\underline{i} + \underline{j} = \underline{p} + \underline{q}$ . En términos

de determinantes,  $C_i$  es la curva dada por la anulaci3n de los menores  $2 \times 2$  de la matriz

$$M_{e_i} := \begin{pmatrix} z_{0,e_i} & z_{1,e_i-1} & \cdots & z_{e_i-1,1} \\ z_{1,e_i} & z_{2,e_i-1} & \cdots & z_{e_i,0} \end{pmatrix}$$

que, despu3s de un cambio de coordenadas, se puede escribir como

$$M_{e_i} := \begin{pmatrix} x_0^{(i)} & \cdots & x_{e_i-1}^{(i)} \\ x_1^{(i)} & \cdots & x_{e_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

Supongamos de nuevo que  $e_d \geq \cdots \geq e_0$  son enteros. Escojamos coordenadas homog3neas en  $\mathbb{P}^n$

$$x_0^{(0)}, \dots, x_{e_0}^{(0)}; x_0^{(1)}, \dots, x_{e_1}^{(1)}; \dots; x_0^{(d)}, \dots, x_{e_d}^{(d)}$$

donde  $n + 1 = \sum_{i=0}^d (e_i + 1) = f + d + 1$ , de tal manera que  $x_0^{(i)}, \dots, x_{e_i}^{(i)}$  son coordenadas homog3neas de  $L_i \simeq \mathbb{P}^{e_i}$ . Si sucediera que  $e_0 = \cdots = e_{r-1} = 0$  y que  $e_i > 0$  para  $i \geq r$ , consideramos entonces la matriz

$$M_{e_0, \dots, e_d} := \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & \cdots & x_{e_0-1}^{(0)} & \cdots & x_0^{(d)} & \cdots & x_{e_d-1}^{(d)} \\ x_1^{(0)} & \cdots & x_{e_0}^{(0)} & \cdots & x_1^{(d)} & \cdots & x_{e_d}^{(d)} \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.3.9.** *El rollo  $S_{e_0, \dots, e_d}$  es la variedad determinantal dada por el ideal generado por los menores  $2 \times 2$  de la matriz  $M_{e_0, \dots, e_d}$ .*

DEMOSTRACI3N. Sea  $X$  la variedad dada por los menores  $2 \times 2$  de  $M_{e_0, \dots, e_d}$ . Como vimos arriba, la curva normal racional  $C_i \subseteq L_i \simeq \mathbb{P}^{e_i} \subseteq \mathbb{P}^n$  est3 dada por los menores de la matriz  $M_{e_i}$  que es una submatriz de  $M_{e_0, \dots, e_d}$ . Se sigue que las curvas  $C_i \subseteq X$ . Por linealidad se sigue que  $X$  tambi3n contiene los  $d$ -planos  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_d(t)$  y por lo tanto contiene al rollo  $S_{e_0, \dots, e_d}$ . El rec3proco es similar. Hemos as3 mostrado que, como conjuntos,

$$(1) \quad X = S_{e_0, \dots, e_d},$$

en particular,  $\dim X = \dim S_{e_0, \dots, e_d} = d + 1$  y por lo tanto

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^n} X = \text{codim}_{\mathbb{P}^n} S_{e_0, \dots, e_d} = n - d$$

y as3, por el teorema 1.3.5,  $X$  es Cohen-Macaulay; en particular no tiene componentes encajadas y por lo tanto la igualdad conjuntista (1) anterior es igualdad como variedades.  $\square$

## 1.4. Rollos normales racionales. Tercera construcci3n

En esta secci3n se ve una construcci3n m3s moderna de los rollos normales racionales, que permite caracterizarlos cohomol3gicamente, calcular su grado y despu3s probar que alcanzan la cota de del Pezzo 1.5.9.

### 1.4.1. Sistemas lineales

Si  $D$  es un divisor en  $X$ , sea  $L(D)$  el haz lineal correspondiente a  $D$ . Recuerde que  $L(D + D') = L(D) \otimes L(D')$  y que la función  $L : \text{Div } X \rightarrow \text{Pic } X$  dada por  $D \mapsto L(D)$  es un morfismo y además  $L(D)$  es trivial si y sólo si  $D$  es principal. Así, el morfismo inducido en el cociente  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Pic } X$  es un isomorfismo. Más aún, la correspondencia anterior es funtorial, es decir, si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de variedades y  $D \in \text{Div } Y$ , entonces  $f^*(L(D)) = L(f^*(D))$ . Una forma alterna de ver lo anterior es considerar la sucesión exacta corta de gavillas en  $X$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{i} k(X)^* \xrightarrow{p} k(X)^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

cuya sucesión larga asociada comienza como

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{i_*} H^0(X, k(X)^*) \xrightarrow{p_*} H^0(X, k(X)^*/\mathcal{O}_X^*) \\ \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

donde se tienen las identificaciones

$$\text{Div } X = H^0(X, k(X)^*/\mathcal{O}_X^*) \quad \text{y} \quad \text{Pic } X = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

y además, para toda  $s \in k(X)^*$ ,  $p_*(s) = \text{div } f$  y para todo divisor  $D \in \text{Div } X$ ,  $\delta D = L(D)$ .

Si  $D \in \text{Div } X$ , denotemos con  $|D| \subseteq \text{Div } X$  al conjunto de divisores efectivos de  $X$  linealmente equivalentes a  $D$ . Si  $L(D) \in \text{Pic } X$  es el haz lineal correspondiente, algunas veces escribimos  $|L(D)| = |D|$ . Ahora, sea

$$\mathcal{O}_X(D) := \{f \in k(X) : D + \text{div}(f) \geq 0\}.$$

Observe ahora que si  $s_0 \in \Gamma(X, L(D))$  es tal que  $\text{div}(s_0) = D$ , entonces para cualquier  $s \in \Gamma(X, L(D))$  el cociente  $f = s/s_0 \in k(X)$  satisface que  $\text{div}(f) = \text{div}(s) - \text{div}(s_0) = \text{div}(s) - D \geq -D$ , por lo que  $f \in \mathcal{O}_X(D)$  y además  $\text{div}(s) = D + \text{div}(f) \in |D|$ . Por otra parte, si  $D' \in |D|$ , por definición  $D'$  es linealmente equivalente a  $D$  y así existe  $f \in k(X)$  tal que  $D' = D + \text{div}(f)$ .

Se tienen así las biyecciones

$$|D| \simeq \mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))) \simeq \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$$

y se dice que  $|D|$  es un *sistema lineal completo* en  $X$  de dimensión

$$\begin{aligned} \dim |D| &= \dim \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - 1 \\ &= h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - 1. \end{aligned}$$

En general, una familia de divisores efectivos  $\mathcal{D} \subseteq |D|$  de  $X$  corresponde a un subespacio vectorial de  $\mathbb{P} H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  dado por

$$E = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) : \text{div}(s)_0 \in \mathcal{D}\} \cup \{0\}$$

donde  $\text{div}(s)_0$  es el divisor de ceros de  $s$ . Se tiene así que  $\mathcal{D} = \mathbb{P}(E)$  es un subespacio lineal de  $\mathbb{P} H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  y se llama un *sistema lineal* en  $X$ . Por definición  $\dim \mathcal{D} := \dim \mathbb{P}(E) = \dim_k E - 1$ . Si  $\dim \mathcal{D} = 1$ , se dice que es un *pinxel*. Así, un *pinxel* es un sistema lineal de divisores parametrizados por la recta  $\mathbb{P}^1$ .

Supongamos entonces que  $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1} = \mathbb{P}(W)$  es un pincel de divisores en una variedad lisa  $X$ , donde  $W \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  es un espacio vectorial de dimensión 2. Sea  $j : X \rightarrow \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$  la inmersión normal asociada a  $X$  y considere el hiperplano  $H = j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$  en  $X$ . Suponga que la dimensión  $h^0(X, \mathcal{O}_X(H - D)) =: f \geq 2$ . El morfismo de multiplicación con  $\mathcal{O}_X(D)$ :

$$W \otimes_k H^0(X, \mathcal{O}_X(H - D)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(H))$$

corresponde a una matriz  $M$  de tamaño  $2 \times f$  con entradas lineales y cuyos menores  $2 \times 2$  se anulan en la imagen  $j(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ . Por la descripción de un rollo como variedad determinantal, se sigue que la variedad determinantal definida por la anulación de los menores  $2 \times 2$  de la matriz  $M$  es un rollo algebraico  $\mathcal{S}$  de grado  $f$ .

Observe ahora que, para la inmersión  $j : X \rightarrow \mathbb{P}^N$  y para cada divisor  $D_\lambda$  del pincel de divisores  $\{D_\lambda\}$  en  $X$ , el subespacio lineal  $\overline{D}_\lambda$  en  $\mathbb{P}^N$  generado por la imagen  $j(D_\lambda)$  en  $\mathbb{P}^N$ :

$$\overline{D}_\lambda := \bigcap \{H : H \text{ es un hiperplano en } \mathbb{P}^N \text{ que contine a } j(D_\lambda)\}$$

es el subespacio lineal de  $\mathbb{P}^N$  definido por las formas lineales en la imagen del morfismo

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(H - D_\lambda)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)).$$

Entonces, el rollo  $\mathcal{S}$  es la variedad que barren estos subespacios lineales:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} \overline{D}_\lambda \subseteq \mathbb{P}^N.$$

### 1.4.2. Gavillas localmente libres sobre $\mathbb{P}^1$

Dentro de las posibles propiedades que puede tener una variedad algebraica, estudiaremos cuales poseen los rollos normales racionales. A continuación resumimos algunos resultados generales de geometría algebraica que usaremos para caracterizar cohomológicamente a los rollos normales racionales.

La noción general de *fibración* no es otra cosa que un morfismo de variedades  $\pi : X \rightarrow S$ , esto es, una variedad sobre  $S$ .

**Definición 1.4.1.** Una familia de espacios vectoriales sobre  $X$  es una fibración  $\pi : E \rightarrow X$  tal que cada fibra  $E_x = \pi^{-1}(x)$  para  $x \in X$  es un espacio vectorial sobre  $k(x)$  y la estructura de variedad algebraica de  $E_x$  como espacio vectorial coincide con la de los  $E_x \subseteq E$  como la imagen inversa de  $x$  bajo  $\pi$ .

Un morfismo de una familia de espacios vectoriales  $\pi : E \rightarrow X$  en otra familia  $\pi' : F \rightarrow X$  es un morfismo  $f : E \rightarrow F$  para el cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ X & & \end{array}$$

conmuta (así que en particular  $f$  mapea  $E_x$  a  $F_x$ , para toda  $x \in X$ ) y el morfismo  $f_x : E_x \rightarrow F_x$  es lineal sobre  $k(x)$ .

El ejemplo más simple de una familia es el producto directo  $E = X \times V$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $k$  y  $\pi$  la primera proyección de  $X \times V \rightarrow X$ . Una familia de este tipo o isomorfa a esta se dice que es *trivial*.

Si  $\pi : E \rightarrow X$  es una familia de espacios vectoriales y  $U \subseteq X$  cualquier conjunto abierto, la fibrición  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es una familia de espacios vectoriales sobre  $U$ . Se llama la *restricción* de  $E$  a  $U$  y se le denota  $E|_U$ .

$$\pi^{-1}(U) \subseteq E \xrightarrow{\pi} U \subseteq X.$$

**Definición 1.4.2.** Una sección de un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow X$  es un morfismo  $s : X \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id_X$ .

Si  $\pi : E \rightarrow X$  es un haz vectorial, se tiene el *haz proyectivo asociado*  $\mathbb{P}(E) \rightarrow X$  definido como aquel haz vectorial cuyas fibras en cada punto  $x \in X$  son el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E_x)$ . Si  $\{U_i\}$  es una trivialización  $\pi_i = \pi|_{U_i} : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times k^n$ , los morfismos  $\pi_i$  inducen morfismos

$$\tilde{\pi}_i : \mathbb{P}(E)|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

**Observación 1.4.3.** Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  y con  $\pi : E \rightarrow X$  un haz vectorial, se tienen funciones de transición

$$\begin{array}{ccc} E|_{(U_i \cap U_j)} & & \\ \pi_i \downarrow & \searrow \pi_j & \\ U_i \cap U_j & & U_i \cap U_j \end{array}$$

$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n$ . Entonces para las trivializaciones  $\tilde{\pi}_i$  de  $\mathbb{P}(E)$ , las funciones de transición son:

$$\tilde{g}_{ij} := U_i \cap U_j \xrightarrow{g_{ij}} GL_n \xrightarrow{\rho} PGL_n,$$

donde  $\rho$  es el epimorfismo canónico.

**Lema 1.4.4.** Todo  $\mathbb{P}^{n-1}$ -haz  $P \rightarrow \mathbb{P}^1$  es de la forma  $\mathbb{P}(E)$  para algún haz vectorial  $E \rightarrow \mathbb{P}^1$  de rango  $n$ .

El caso que nos interesa ahora es el de haces vectoriales sobre la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$ , y el resultado importante en este caso es:

**Teorema 1.4.5 (Grothendieck).** Para todo haz vectorial  $\mathcal{E}$  de rango  $d$  en  $\mathbb{P}^1$ , existen enteros únicos  $e_d \geq \dots \geq e_1$  tales que

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_d),$$

donde los  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$  son haces de rango 1 y grado  $e_i$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración siguiente es de [6]. Para comenzar observe que la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_k^1$  sobre  $k$  se puede obtener pegando las rectas afines:

$$U_1 = \text{Spec } k[s] \quad \text{y} \quad U_2 = \text{Spec } k[t]$$



e identificando

$$U_{12} = \text{Spec } k[s] - \{0\} \quad \text{y} \quad U_{21} = \text{Spec } k[t] - \{0\}$$

mediante el isomorfismo  $s \mapsto t^{-1}$ .

Ahora, si  $\mathcal{E}$  es un haz vectorial de rango  $d$  en  $\mathbb{P}^1$  (una gavilla libre localmente libre de rango  $d$  sobre  $\mathbb{P}^1$ ), sea  $\mathbb{A}^d = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ . Entonces,  $\mathcal{E}|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{A}^d$  es trivial,  $i = 1, 2$ , y así  $\mathcal{E}$  se obtiene, salvo isomorfismo, pegando  $U_1 \times \mathbb{A}^d$  con  $U_2 \times \mathbb{A}^d$  mediante la identificación

$$(U_1 - \{0\}) \times \mathbb{A}^d \leftrightarrow (U_2 - \{0\}) \times \mathbb{A}^d$$

dada por un isomorfismo de la forma  $(s, v) \mapsto (s^{-1}, A(s, s^{-1})v)$ , donde  $A(s, s^{-1})$  es invertible para todo  $s \neq 0$  y todo  $s^{-1} \neq 0$ . Esto último implica que  $\det A(s, s^{-1}) = s^n$ , para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , ya que este determinante es un polinomio de Laurent en  $s, s^{-1}$  que no se anula en  $s \neq 0$  y  $s^{-1} \neq 0$  y por lo tanto sus únicas raíces pueden ser  $s = 0$  o  $s^{-1} = 0$  y así, después de normalizar, debe ser de la forma  $s^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Observe ahora que un automorfismo del haz vectorial trivial  $U_1 \times \mathbb{A}^d$  necesariamente es de la forma  $(s, v) \mapsto (s, M(s)v)$ , donde  $M(s)$  es una matriz con entradas en  $k[s]$  y tal que  $\det M(s) \in k^*$ . Similarmente, un automorfismo del haz trivial  $U_2 \times \mathbb{A}^d$  está dado por una matriz  $N(s^{-1})$  con coeficientes en  $k[s^{-1}]$  y con determinante en  $k^*$ . Es claro que diferentes trivializaciones del haz  $\mathcal{E}|_{U_i}$  difieren sólo por un automorfismo de  $U_i \times \mathbb{A}^d$ . Hemos así mostrado que las clases de isomorfismo de haces vectoriales algebraicas de rango  $d$  sobre  $\mathbb{P}^1$  corresponden biyectivamente a clases de equivalencia de matrices  $A(s, s^{-1})$  de tamaño  $d \times d$  y con entradas en  $k[s, s^{-1}]$  tales que  $\det A(s, s^{-1}) = s^n$ , para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , y donde la relación de equivalencia es  $A(s, s^{-1}) \sim A'(s, s^{-1}) \Leftrightarrow$  existen matrices invertibles  $M(s)$  y  $N(s^{-1})$  con entradas en  $k[s]$  y  $k[s^{-1}]$ , respectivamente y con determinante constante no cero, tales que

$$A'(s, s^{-1}) = N(s^{-1})A(s, s^{-1})M(s).$$

El lema siguiente da formas canónicas para las matrices  $A(s, s^{-1})$  de tamaño  $d \times d$  con entradas en  $k[s, s^{-1}]$  y determinante  $s^n$  bajo la relación de equivalencia anterior:

**Lema 1.4.6.** *Sea  $A(s, s^{-1})$  una matriz  $d \times d$  con entradas en  $k[s, s^{-1}]$  y con determinante  $s^n$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces, existen matrices polinomiales  $N(s^{-1}), M(s)$ , de tamaño  $d \times d$  y con determinante constante no cero, tales que*

$$N(s^{-1})A(s, s^{-1})M(s) = \begin{pmatrix} s^{e_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{e_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{e_d} \end{pmatrix}$$

con  $e_1 \geq \dots \geq e_d$  en  $\mathbb{Z}$ . Los  $e_i$  está unívocamente determinados por  $A(s, s^{-1})$ . Más aún, si  $A(s, s^{-1})$  es polinomial en  $s$ , entonces los  $e_i \geq 0$ , y si  $A(s, s^{-1})$  es polinomial en  $s^{-1}$ , entonces los  $e_i \leq 0$ .

DEMOSTRACIÓN. *Unicidad:* Denotemos por  $D(e_1, \dots, e_d)$  a la matriz del lado derecho de la fórmula desplegada en el enunciado del lema. Supongamos que hay otra matriz diagonal  $D(e'_1, \dots, e'_d)$  equivalente a  $A(s, s^{-1})$ ; entonces

$$D(e_1, \dots, e_d) \sim D(e'_1, \dots, e'_d)$$

y por lo tanto existen matrices polinomiales  $N, M$  con determinante constante no cero tales que

$$(1) \quad N(s^{-1})D(e_1, \dots, e_d) = D(e'_1, \dots, e'_d)M(s).$$

Para una matriz  $A$ , denotemos con  $A_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$  al menor de  $A$  dado al tomar el determinante de la submatriz de  $A$  obtenida al remover todos los renglones con índices en  $\{1, \dots, d\} - \{i_1, \dots, i_r\}$  y todas las columnas con índices en  $\{1, \dots, d\} - \{j_1, \dots, j_r\}$ . Es claro que

$$(AB)_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} = \sum_{\ell_1 < \dots < \ell_r} A_{\ell_1, \dots, \ell_r}^{i_1, \dots, i_r} A_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}$$

y aplicando esta igualdad a (1) se sigue que

$$(2) \quad N_{j_1, \dots, j_r}^{1, \dots, r}(s^{-1})s^{e_{i_1} + \dots + e_{i_r}} = s^{e'_1 + \dots + e'_r} M_{i_1, \dots, i_r}^{1, \dots, r}(s)$$

para todo  $i_1 < \dots < i_r$ . Observe ahora que, para algunos  $i_1, \dots, i_r$  se tiene que

$$M_{i_1, \dots, i_r}^{1, \dots, r}(s) \neq 0.$$

Se sigue que  $e'_1 + \dots + e'_r \leq e_{i_1} + \dots + e_{i_r}$ , para algunos  $i_1 < \dots < i_r$  y, consecuentemente,  $e'_1 + \dots + e'_r \leq e_1 + \dots + e_r$  para todo  $r$ . Multiplicando (1) a la izquierda por  $N(s^{-1})^{-1}$  y por  $M(s)^{-1}$  a la derecha, queda

$$(3) \quad D(e_1, \dots, e_d)M(s)^{-1} = N(s^{-1})^{-1}D(e'_1, \dots, e'_d),$$

y repitiendo el argumento anterior se sigue que  $e_1 + \dots + e_r \leq e'_1 + \dots + e'_r$  para todo  $r$ . Por lo tanto,  $e_i = e'_i$ , para todo  $i = 1, \dots, d$ .

*Existencia:* Multiplicando  $A(s, s^{-1})$  por una potencia adecuada de  $s^n$ , con  $n \geq 0$ , se obtiene una matriz polinomial  $B(s)$ . Después, mediante operaciones elementales en columnas, i.e., multiplicando  $B(s)$  a la derecha por una matriz  $M(s)$  se obtiene una matriz  $B'(s)$  con  $b'_{11} \neq 0$  y  $b'_{1i} = 0$  for  $i \geq 2$ , (de hecho, escogemos  $b'_{11}$  como el máximo común divisor de los  $b_{1i}$  para que al hacer las operaciones con columnas se eliminen los que siguen en el primer renglón). Note que  $b'_{11} = s^{e_1}$  porque el determinante de  $B(s)$  es una potencia de  $s$  y  $b'_{11}$  divide este determinante al desarrollar por menores a lo largo del primer renglón. Ahora sea  $B_2$  la submatriz  $(d-1) \times (d-1)$  obtenida al eliminar el primer renglón y la primer columna de  $B_1 = B'(s)$ . Por inducción suponemos que el resultado es válido para  $d-1$  (el caso  $d=1$  es trivial); entonces, existen  $N_2(s^{-1}), M_2(s)$  tales que  $N_2(s^{-1})B_2M_2(s)$  es de la forma que pide el lema. Se obtiene así el producto

$$(4) \quad C(s) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{e_1} & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & s^{e_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_d & 0 & \dots & s^{e_d} \end{pmatrix}$$

para ciertos enteros  $e_i \geq 0$  y con el mismo  $e_1$  tal que  $b'_{11} = s^{e_1}$  y con los  $c_i \in k[s, s^{-1}]$ . Multiplicando el primer renglón por potencias adecuadas de  $s$  y restando el primer renglón que resulte a los renglones de abajo (es decir, multiplicando a la izquierda por una matriz  $N(s^{-1})$  adecuada) se obtienen los  $c_i \in k[s]$ .

Considere ahora todas las matrices polinomiales de la forma (4) y que son equivalentes a  $B(s)$  y escoja una para la cual  $e_1$  es máximo. Note una tal matriz existe porque  $e_1 \leq \text{gr}(\det B(s))$  ya que  $e_2, \dots, e_d \geq 0$ . Probaremos entonces que  $e_1 \geq e_i$  para toda  $i \geq 2$ . En efecto, si algún  $e_1 < e_i$ , substrayendo un  $k[s^{-1}]$  múltiplo del primer renglón del  $i$ -ésimo renglón (para la  $i$  tal que  $e_1 < e_i$ ) se obtiene una matriz (4) con  $c_i = s^{e_1+1}c'(s)$ . Ahora, intercambie el primer y el  $i$ -ésimo renglón para encontrar una matriz polinomial  $B'(s)$  tal que el máximo común divisor de su primer renglón es  $s^{e'_1}$ , donde  $e'_1 \geq e_1 + 1$ . Ahora, se aplica a  $B'(s)$  el mismo procedimiento anterior que se aplicó a  $B(s)$ . Se obtiene entonces una matriz  $B''(s)$  de la forma (4) para la cual  $e'_1 > e_1$ , una contradicción con la maximalidad de  $e_1$ . Podemos entonces suponer que en (4) se tiene que  $e_1 \geq e_i$  y  $c_i \in k[s]$ , para  $i = 2, \dots, d$ . Substrayendo ahora un  $k[s]$  múltiplo adecuado de la segunda columna a la primera columna y luego múltiplos de la tercera, etcétera, hasta abstraer un  $k[s]$  múltiplo adecuado de la  $d$ ésima columna a la primera columna, se encuentra una matriz como en (4) donde los  $c_i(s)$  tienen grado  $\text{gr } c_i(s) \leq e_i$ . Entonces, como  $e_1 \geq e_i$ , se sigue que  $\text{gr } c_i(s) < e_1$  y por lo tanto un  $k[s^{-1}]$  múltiplo adecuado de  $s^{e_1}$  es igual a  $c_i$  y por lo tanto multiplicación por una matriz adecuada  $N(s^{-1})$  a la izquierda da una matriz como en (4) pero con  $c_2 = \dots = c_d = 0$ . Entonces, la matriz del lado derecho de (4) tiene la forma que pide el lema. Permutando columnas, si hiciera falta, se ordenan las entradas como  $e_1 \geq \dots \geq e_d$ , y para las matrices  $M(s)$  y  $N(s^{-1})$  correspondientes, con determinante una constante no nula, se tiene que

$$N(s^{-1})s^n A(s, s^{-1})M(s) = N(s^{-1})B(s)M(s) = D(e'_1, \dots, e'_d).$$

Multiplicando por  $s^{-n}$  se sigue que  $N(s^{-1})A(s, s^{-1})M(s) = D(e_1, \dots, e_d)$  con  $e_i = e'_i - n$ .

La última parte del lema se prueba como la primera parte pero comenzando con una matriz  $N(s^{-1})$  y usando operaciones con renglones (respectivamente, columnas) donde se usaron columnas (respectivamente, renglones) en la primera parte.  $\square$

La demostración del teorema de Grothendieck es ahora directa: al principio de la demostración del teorema vimos que el haz  $\mathcal{E}$  de rango  $d$  corresponde a una (clase de equivalencia de una) matriz  $A(s, s^{-1})$  de tamaño  $d \times d$  con determinante  $s^n$ , que de acuerdo al lema 1.4.6 se puede elegir de la forma

$$D(e_1, \dots, e_d) = \begin{pmatrix} s^{e_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{e_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{e_d} \end{pmatrix}.$$

Ahora, si el haz  $\mathcal{E}$  en  $\mathbb{P}^1$  es de rango  $d = 1$ , necesariamente es de la forma  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$ , para algún  $e$ , y la matriz anterior es  $A(s, s^{-1}) = D(e_1) = (s^{e_1}) = s^{e_1}$  porque es  $1 \times 1$  de determinante  $s^e$ . Finalmente observe que la matriz  $D(e_1, \dots, e_d)$  es suma directa de las matrices  $D(e_1), \dots, D(e_d)$ , cada una de ellas correspondiente al haz lineal  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_i)$  y por lo tanto  $\mathcal{E}$  corresponde a la suma directa  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_d)$ .  $\square$

**Definición 1.4.7.** Si  $\mathcal{E}$  es una gavilla localmente libre de rango  $n$  en  $X$  y si  $\pi : E \rightarrow X$  es el haz vectorial asociado, denotaremos con  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  al haz proyectivo asociado a  $E \rightarrow X$ . Así, como  $\pi : E \rightarrow X$  es un haz vectorial de rango  $n$ , entonces  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(E)$  es un  $\mathbb{P}^{n-1}$ -haz proyectivo sobre  $X$  cuyas fibras son las proyectivizaciones  $\mathbb{P}(E_x)$  de las fibras  $E_x$  de  $\pi$ .

**Definición 1.4.8.** Una gavilla de grupos abelianos  $\mathcal{F} : \text{Top}X \rightarrow \text{Ab}$ , se dice que es una gavilla de  $\mathcal{O}_X$ -módulos si existe un morfismo de gavillas  $\mu : \mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  tal que para todo  $U \subseteq X$  abierto, el morfismo  $\mu : \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  hace de  $\mathcal{F}(U)$  un  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo.

**Ejemplo 1.4.9.**  $\mathcal{O}_X$  es gavilla de  $\mathcal{O}_X$ -módulos; pues tenemos que para el morfismo  $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  para todo  $U \subseteq X$  abierto,  $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$  es el producto con el anillo  $\mathcal{O}_X(U)$ .

**Ejemplo 1.4.10.** Para todo  $\Gamma$ ,  $\mathcal{O}_X^{(\Gamma)}$  es  $\mathcal{O}_X$ -módulo libre.

**Definición 1.4.11.** Una gavilla  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos se dice que es:

1. Libre si y sólo si  $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{(\Gamma)}$ , para algún  $\Gamma$ .
2. Localmente libre si existe una cubierta abierta  $\{U_i\}$  de  $X$  tal que  $\mathcal{F}|_{U_i}$  es libre, es decir,  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}^{(\Gamma)}$ .
3. Localmente libre de rango finito si cada  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}^{(n_i)}$ , con  $n_i \in \mathbb{N}$ .

**Afirmación 1.4.12.** Existe una correspondencia biyectiva

$$\{\text{haces vectoriales } F \rightarrow X \text{ de rango } r\} \leftrightarrow \{\text{gavillas loc. libres de rango } r \text{ en } X\}$$

Para la demostración ver [12], página 58.

### 1.4.3. Rollos normales racionales como proyectivización de gavillas localmente libres sobre $\mathbb{P}^1$

Los rollos son variedades fascinantes, los cuales han sido estudiados largamente en Geometría Algebraica. Como variedades abstractas, son  $\mathbb{P}^{n-1}$ -haces sobre  $\mathbb{P}^1$  y son incluidas en un  $\mathbb{P}^N$ , para  $N$  adecuada, de tal forma que las fibras  $\mathbb{P}^{n-1}$  del fibrado sobre  $\mathbb{P}^1$  son subespacios lineales de  $\mathbb{P}^N$ .

Por simplicidad, en esta sección siempre trabajamos sobre un campo  $k$  algebraicamente cerrado de característica cero.

Si  $0 \leq e_0 \leq \dots \leq e_d$  son enteros, sea  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_d)$  una gavilla localmente libre de rango  $d + 1$  en  $\mathbb{P}^1$ , sea  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  el  $\mathbb{P}^d$ -haz correspondiente y digamos que

$$X := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_d)) = \mathbb{P}(\mathcal{E}).$$

Sean  $s_0, \dots, s_N \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$  una  $k$ -base y consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^N := \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(1))) \\ x &\longmapsto [s_0(x), \dots, s_N(x)] \end{aligned}$$

para  $N = f + d$ , donde  $f = e_0 + \dots + e_d \geq 2$ .

**Definición 1.4.13.** La imagen de  $X$  bajo  $\varphi$  en  $\mathbb{P}^N := \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(1)))$  se llama *rollo normal racional* de tipo  $e_0, \dots, e_d$  y se denota por  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{e_0, \dots, e_d}$ .

**Observación 1.4.14.** Como  $\varphi$  es un mapeo regular, por el teorema de *Chevalley* tenemos que  $\varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^N$  es un conjunto cerrado.

Entonces,  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^N$  es una variedad proyectiva irreducible no degenerada de grado mínimo

$$\text{gr } \mathcal{S} = f = N - d$$

y dimensión  $\dim \mathcal{S} = d + 1$ . Si todos los  $e_i > 0$ , entonces  $\mathcal{S}$  es lisa y  $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{S}$  es un isomorfismo. Si alguno de los  $e_i = 0$ , entonces  $\mathcal{S}$  es singular y  $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{S}$  es una resolución de singularidades. De hecho, las singularidades de  $\mathcal{S}$  son racionales, es decir,

$$\varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \text{ y } R^i \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = 0 \text{ para } i > 0$$

por [7, Section §2, pág. 5]. Como consecuencia, para la mayoría de las consideraciones cohomológicas se puede reemplazar  $\mathcal{S}$  por  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ , aún en el caso cuando  $\mathcal{S}$  es singular.

Ahora mostraremos que  $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$  tiene dimensión finita, para ello basta mostrar por el teorema 5.19 en [13] que  $\mathcal{O}_X(1)$  es gavilla coherente.

**Observación 1.4.15.** En los abiertos distinguidos  $D(x_i) = \mathbb{P}^n - V(x_i)$ , con  $V(x_i) = \{x_i = 0\}$ , la gavilla  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)$  es isomorfa a la gavilla estructural  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ .

DEMOSTRACIÓN. Para cada subconjunto abierto  $U \subseteq D(x_i)$  los mapeos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)(U) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \cdot x_i^j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) \\ \varphi &\longmapsto \varphi/x_i^j \end{aligned}$$

dan un isomorfismo. Por lo tanto  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)|_{D(x_i)} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{D(x_i)}$ .  $\square$

Sea  $\{D(x_i)\}$  cubierta abierta de  $X := \mathbb{P}(\mathcal{E})$ , donde  $D(x_i) = X - V(x_i)$ , tenemos que mostrar que existen  $m_i, n_i \in \mathbb{N}$  tal que la sucesión

$$\mathcal{O}_X(D(x_i))^{(n_i)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(x_i))^{(m_i)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)(D(x_i)) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por la observación anterior la sucesión se convierte en

$$\mathcal{O}_X(D(x_i))^{(n_i)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(x_i))^{(m_i)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(x_i)) \longrightarrow 0.$$

Entonces si  $n_i = 0$  y  $m_i = 1$ , entonces la sucesión es exacta. Por lo tanto  $\mathcal{O}_X(1)$  es gavilla coherente, así  $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$  es de dimensión finita.

De hecho para tener una descripción más explícita, elegimos coordenadas homogéneas  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ . Entonces una base de  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$  esta dada por los monomios

$$s_i^e := u^i v^{e-i}, 0 \leq i \leq e.$$

Esto da una base de  $H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E})$  consistente de

$$\underbrace{s_0^{e_0}, \dots, s_{e_0}^{e_0}}_{e_0+1}, \underbrace{s_0^{e_1}, \dots, s_{e_1}^{e_1}}_{e_1+1}, \dots, \underbrace{s_0^{e_d}, \dots, s_{e_d}^{e_d}}_{e_d+1}$$

haciendo un pequeño calculo tenemos  $\sum_{i=0}^d e_i + d + 1$  secciones globales, así que  $N = \sum_{i=0}^d e_i + d$ .

Para los ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 vistos anteriormente, tenemos:

1. Para el rollo cúbico  $S_{1,2} \subseteq \mathbb{P}^4$

- (a) Para los enteros  $k = 1, l = 2$  y para todo abierto  $U \subseteq \mathbb{P}^4$  tomemos las gavillas  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)(U)$  y  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)(U)$ , de esta manera definimos  $\mathcal{E}(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)(U)$ , gavilla localmente libre de rango 2 sobre  $\mathbb{P}^1$ .
- (b) Sea  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  el haz vectorial de rango 2 asociado a  $\mathcal{E}$ , así para todo  $P \in \mathbb{P}^1$ ,  $\pi^{-1}(P)$  es espacio vectorial de dimensión 2. Sea  $\tilde{\pi} : \mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1$  el haz vectorial lineal proyectivo asociado a  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Definimos  $X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ , donde  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \bigsqcup_{P \in \mathbb{P}^1} \mathbb{P}(\pi^{-1}(P)) = \mathbb{P}^1$ .
- (c) Sea  $P \in \mathbb{P}^1$ , para  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e))$  una  $k$ -base esta dada por los monomios  $s_i^e := u^i v^{e-i}$ , con  $0 \leq i \leq e$ .

Para  $e = 1$ , una base para  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  esta dada por

$$\begin{aligned} s_0^1 &= v, \\ s_1^1 &= u \end{aligned}$$

Para  $e = 2$ , una base para  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$  esta dada por

$$\begin{aligned} s_0^2 &= v^2, \\ s_1^2 &= uv, \\ s_2^2 &= u^2 \end{aligned}$$

Por otro lado  $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}) = \mathcal{E}(\mathbb{P}^1)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{P}^1) &= (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))(\mathbb{P}^1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)(\mathbb{P}^1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)(\mathbb{P}^1) \\ &= H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)), \end{aligned}$$

por lo que  $\dim(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))) = 5$ , y entonces

$$\dim(\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))) = 4.$$

Sean  $v, u, v^2, uv, u^2 \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  una  $k$ -base y consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^4 \\ (x_0, x_1) &\longmapsto (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}$$

donde  $\varphi((x_0, x_1)) = (x_1, x_0, x_1^2, x_0x_1, x_0^2)$ , de donde obtenemos las ecuaciones  $y_0y_3 - y_1y_2 = 0$ ,  $y_0y_4 - y_1y_3 = 0$  y  $y_2y_4 - y_3^2 = 0$ .

- Ejemplo 1.4.16.** (a)  $\mathbb{P}^e$ , el cual es  $S_{0, \dots, 0, 1}$ .  
 (b) La curva normal racional de grado  $e$  en  $\mathbb{P}^e$ , la cual es  $S_e$   
 (c) La cuádrica  $S_{1,1} \subseteq \mathbb{P}^3$ .

**Observación 1.4.17.** (a) Dado que tenemos las siguiente situación:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1 \\ & \nearrow \tilde{\pi} & \\ \mathbb{P}^{\Delta-1} & & \end{array}$$

de donde para todo  $P \in \mathbb{P}^1$  tenemos que  $\tilde{\pi}^{-1}(P)$  es un espacio vectorial de dimensión  $\Delta - 1$ , claramente  $\mathcal{S}$  tiene  $q + 1$  fibras sobre  $\mathbb{F}_q$ , cada una con  $q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + q + 1$  puntos.

- (b) Una parametrización simple es la siguiente: para cada  $i = 1, \dots, \Delta$ , tomamos como curva directriz una curva normal racional en  $\mathbb{P}^{e_i}$ , parametrizada por

$$X_0 = t^{e_i}, X_1 = t^{e_i-1}u, \dots, X_{e_i} = u^{e_i},$$

para todo  $(t, u) \in \mathbb{P}^1$ .

En la observación 1.4.14 vimos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{P}^N$ , para tener que es una variedad proyectiva nos resta mostrar que es irreducible.

**Observación 1.4.18.** Por definición tenemos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta} = \varphi(X)$ , donde  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^N$  es un morfismo regular.

- (a) Dado que  $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_\Delta))$  es una variedad proyectiva, es conexo, entonces  $S_{e_0, \dots, e_\Delta} = \varphi(X)$  es conexo.  
 (b)  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^N$  es continua y  $X$  es irreducible, entonces  $\varphi(X)$  es irreducible.

**DEMOSTRACIÓN.** (a) Se sigue del hecho que  $\varphi$  es continua. Para (b) Supongamos que  $\varphi(X)$  es reducible, entonces  $\varphi(X) = U_1 \cup U_2$  con  $U_1, U_2 \subsetneq \varphi(X)$  cerrados no vacíos, entonces  $X = \varphi^{-1}(U_1) \cup \varphi^{-1}(U_2)$  con  $\varphi^{-1}(U_1), \varphi^{-1}(U_2)$  cerrados en  $X$ . Supongamos que  $X = \varphi^{-1}(U_1)$ , entonces  $\varphi(X) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(U_1)) \subseteq U_1$ , así  $\varphi(X) = U_1$  lo cual es una contradicción, ya que  $U_1 \subsetneq \varphi(X)$ . Por lo tanto  $\varphi(X)$  es irreducible.  $\square$

Por las observaciones 1.4.14 y 1.4.18 tenemos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es una variedad proyectiva.

Por la construcción del rollo normal racional tenemos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta} := \varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ , donde  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ , además también hemos probado que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es una

variedad proyectiva. Por otro lado tenemos que  $\mathbb{P}^N$  es una variedad completa, entonces por el teorema principal de la teoría de eliminación en [5],  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es una variedad completa.

## 1.5. El grado de un rollo normal racional

En esta sección se calcula el grado de un rollo normal racional y se prueba que alcanza la cota de del Pezzo.

### 1.5.1. El grado de una variedad

Después de su dimensión, el invariante más importante de una variedad proyectiva es su *grado*. Sean  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad proyectiva de dimensión  $r = \dim X$  y sea  $k^h[X]$  su anillo de coordenadas homogéneo. Sea  $h_X(t) \in \mathbb{Q}[t]$  el *polinomio de Hilbert* del anillo graduado  $k^h[X]$ . Así, para todo entero  $\ell \gg 0$  se tiene que

$$h_X(\ell) = \dim_k k^h[X]_\ell,$$

donde  $k^h[X]_\ell$  es el subespacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $\ell$ . Por el teorema 7.39 de [] se tiene que

$$\text{gr}(h_X(t)) = \text{dimensión de Krull de } k^h[X] = \dim X$$

y el coeficiente de grado de  $h_X(t)$  es un entero positivo. Se define el *grado de la variedad*  $X$  de dimensión  $\dim X = r$ , como

$$\text{gr}(X) := r! \text{gr}(h_X(t)).$$

Los ejemplos siguientes aclaran, de alguna manera, esta definición *ad-hoc* del grado de una variedad proyectiva:

**Ejemplo 1.5.1.** Si  $X = \mathbb{P}^n$ , entonces  $\text{gr}(\mathbb{P}^n) = 1$ . Como,  $k^h[\mathbb{P}^n] = k^h[x_0, \dots, x_n]$  entonces para cada entero  $\ell > 0$  se tiene que

$$\dim_k k^h[x_0, \dots, x_n]_\ell = \binom{n + \ell}{n}$$

por lo que

$$h_{\mathbb{P}^n}(t) = \binom{n + t}{n}$$

cuyo coeficiente de grado es  $1/n!$  y así

$$\text{gr}(\mathbb{P}^n) = (\dim \mathbb{P}^n)! (\text{coeficiente de grado de } h_{\mathbb{P}^n}(t)) = n!(1/n!) = 1.$$

**Ejemplo 1.5.2.** Si  $X = \mathcal{V}(F(x_0, \dots, x_n)) \subseteq \mathbb{P}^n$  es una hipersuperficie dada por un polinomio homogéneo  $F \in k[x_0, \dots, x_n]$  irreducible de grado  $d$ , por el ejemplo [14, 4.4] la dimensión de  $X$  es  $r = n - 1$ , y se tiene que

$$\text{gr}(h_X(t)) = d = \text{gr}(F).$$

En efecto, como  $F$  es irreducible,  $k^h[X] = k^h[x_0, \dots, x_n]/\langle F \rangle$  y se tiene la sucesión exacta corta de anillos graduados

$$0 \rightarrow k^h[x_0, \dots, x_n](-d) \xrightarrow{F} k^h[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k^h[x_0, \dots, x_n]/\langle F \rangle \rightarrow 0,$$



donde  $k^h[x_0, \dots, x_n](-d)$  es el anillo graduado obtenido a partir de  $k^h[x_0, \dots, x_n]$  desplazando su gradación  $-d$  lugares, es decir, la gradación es

$$k^h[x_0, \dots, x_n](-d)_\ell := k^h[x_0, \dots, x_n]_{\ell-d}$$

y el morfismo etiquetado con  $F$  quiere decir multiplicación por  $F$ ; es claro entonces que la sucesión anterior es una sucesión exacta de álgebras graduadas. Las otras dos  $k$ -álgebras en la sucesión anterior son  $k^h[x_0, \dots, x_n] = k[\mathbb{P}^n]$  y  $k^h[x_0, \dots, x_n]/\langle F \rangle = k^h[X]$ . Por la aditividad del polinomio de Hilbert, de la sucesión exacta corta anterior se sigue que

$$h_{\mathbb{P}^n}(t) = h_{k^h[x_0, \dots, x_n](-d)}(t) + h_X(t)$$

y por lo tanto, para  $\ell \gg 0$  entero se tiene que

$$h_X(\ell) = h_{\mathbb{P}^n}(\ell) - h_{k^h[x_0, \dots, x_n](-d)}(\ell) = h_{\mathbb{P}^n}(\ell) - h_{\mathbb{P}^n}(\ell - d),$$

donde usando ahora el cálculo del ejemplo 1.5.1 anterior se sigue que

$$h_X(t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-d}{n} = \frac{d}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} \text{gr}(X) &:= (\dim X)! (\text{coeficiente de grado de } h_X(t)) \\ &= (n-1)! \frac{d}{(n-1)!} = d = \text{gr}(F), \end{aligned}$$

como se quería. Note cómo el ejemplo 1.5.1 anterior es un caso especial del ejemplo 1.5.2, pero de hecho el cálculo del ejemplo 1.5.1 se usó en el ejemplo 1.5.2.

**Ejemplo 1.5.3.** Sea  $X$  la imagen de la aplicación de Veronese

$$\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d \quad \text{dada por} \quad [x_0, x_1] \mapsto [x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_1^d].$$

Entonces,

$$k^h[X]_\ell = \{\text{polinomios homogéneos en } k[x_0, x_1]_{d\ell}, \text{ i.e., de grado } d\ell\}$$

y claramente

$$\dim_k k^h[X]_\ell = d\ell + 1$$

por lo que  $h_X(\ell) = d\ell + 1$  y así el polinomio de Hilbert de  $X$  es

$$h_X(t) = dt + 1.$$

Se sigue que

$$\dim X = 1 \quad \text{y} \quad \text{gr}(X) = d.$$

Se dice que  $X$  es la *curva de Veronese de grado*  $d$ .

**Proposición 1.5.4.** (1) Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es no vacía, entonces el grado de  $X$  es un entero  $\text{gr}(X) > 0$ .

(2) Sea  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una variedad proyectiva y supongamos que  $X = X_1 \cup X_2$ , donde  $\dim X_1 = \dim X_2 = r$  y además  $\dim(X_1 \cap X_2) < r$ . Entonces,

$$\text{gr}(X) = \text{gr}(X_1) + \text{gr}(X_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Para (1), como  $X \neq \emptyset$ , entonces su polinomio de Hilbert es no cero y de grado  $r = \dim X$ . Los coeficientes de polinomio de Hilbert son enteros, por lo que el grado  $\text{gr } X$  es un entero. Por otra parte, este grado es positivo porque para  $\ell \gg 0$  se tiene que  $h_X(\ell) = \dim_k k[X]_\ell \geq 0$ , donde  $M_\ell$  es el subespacio de elementos homogéneos de grado  $\ell$  en  $M$ .

Para (2), si  $J_i = \mathcal{J}(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , entonces  $J := \mathcal{J}(X) = J_1 \cap J_2$  y se tiene una sucesión exacta corta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow k^h[x_0, \dots, x_n]/J &\rightarrow k^h[x_0, \dots, x_n]/J_1 \oplus k^h[x_0, \dots, x_n]/J_2 \\ &\rightarrow k^h[x_0, \dots, x_n]/(J_1 + J_2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{V}(J_1 + J_2) = X_1 \cap X_2$  que, por hipótesis, tiene dimensión  $< r$ . Se sigue que el polinomio de Hilbert de  $k^h[x_0, \dots, x_n]/(J_1 + J_2)$  tiene grado  $< r$ . Por otra parte, por la aditividad del polinomio de Hilbert, de la sucesión exacta corta anterior se sigue que

$$\begin{aligned} h_X(t) &= h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/J}(t) \\ &= h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/J_1 \oplus k^h[x_0, \dots, x_n]/J_2}(t) - h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/(J_1 + J_2)}(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto el coeficiente de grado de  $h_X(t) = h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/J}(t)$  es la suma de los coeficientes de grado de  $h_X(t) = h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/J_1}(t)$  y  $h_X(t) = h_{k^h[x_0, \dots, x_n]/J_2}(t)$ , y estos tres polinomios tienen el mismo grado  $r$ . El resultado se sigue.  $\square$

A continuación interpretamos el grado de una variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  en términos del número de puntos en la intersección de  $X$  con casi cualquier subespacio lineal de  $\mathbb{P}^n$  de dimensión complementaria, es decir, con proyectivos de la forma  $\mathbb{P}^{n-r}$ , donde  $r = \dim X$ . Comenzamos con un teorema de Bertini 1.5.7 que garantiza cuándo las fibras de un morfismo dominante  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades proyectivas lisas son también lisas. Después probaremos que este teorema 1.5.7 implica un resultado que garantiza que una sección de una variedad proyectiva lisa  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  por un hiperplano  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  también es lisa 1.5.8. Los dos lemas preliminares siguientes caracterizan cuándo una fibra es lisa:

**Lema 1.5.5.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo dominante entre variedades proyectivas, con  $X$  lisa. La fibra  $f^{-1}(y)$  es lisa si  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  es suprayectiva para todos los puntos  $x \in f^{-1}(y)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para comenzar observe que el espacio tangente  $T_x f^{-1}(y)$  está contenido en el núcleo de  $df_x : T_x X \rightarrow T_y Y$  porque la composición

$$(1) \quad T_x f^{-1}(y) \hookrightarrow T_x X \xrightarrow{df_x} T_y Y$$

es cero ya que, dualmente, se tiene que la composición (2) de morfismos entre los espacios cotangentes de Zariski:

$$(2) \quad \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \xrightarrow{d_x f^\vee} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \overline{\mathfrak{m}}_x/\overline{\mathfrak{m}}_x^2$$

donde  $\bar{\mathfrak{m}}_x$  es el ideal máximo de  $\mathcal{O}_{f^{-1}(y),x}$  y  $\mathfrak{m}_x \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x$  es inducido por la restricción de  $X$  a  $f^{-1}(y)$ , es obviamente cero. Se sigue que se tiene la primera desigualdad en

$$\begin{aligned} \dim_k T_x f^{-1}(y) &\leq \dim_k(\ker d_x f) = \dim_k T_x X - \dim_k T_y Y \\ &= \dim X - \dim_k T_y Y \leq \dim X - \dim Y, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es porque por hipótesis  $d_x f$  es suprayectiva y la segunda igualdad es porque  $X$  es lisa y la última desigualdad es porque  $\dim Y \leq \dim_k T_y Y$  en general. Finalmente, como todas las fibras tienen dimensión  $\leq \dim X - \dim Y$ , se sigue que  $f^{-1}(y)$  es lisa.  $\square$

**Lema 1.5.6.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo dominante entre variedades proyectivas, con  $X$  lisa. Entonces, existe un abierto no vacío  $U \subseteq X$  tal que para todo  $x \in U$ ,  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  es suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Por dualidad basta probar que  $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  es inyectiva en un abierto no vacío  $U \subseteq X$ . Probaremos entonces que si  $u_1, \dots, u_m$  son parámetros locales en  $y \in Y$ , entonces  $d_x u_1, \dots, d_x u_m$  son linealmente independientes en  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Por la expansión de Taylor [14, Pág.160-162] se tiene una inclusión  $\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow k[[x_1, \dots, x_n]]$  (el anillo de series formales en  $n$  indeterminadas sobre  $k$ ) de donde se sigue que  $u_1, \dots, u_m$  son algebraicamente independientes sobre  $k$ . Como  $f(X) \subseteq Y$  es denso, se sigue que  $u_1, \dots, u_m$  se pueden ver como elementos de  $k(X)$  y siendo algebraicamente independientes se pueden completar a un conjunto algebraicamente independiente  $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$  en  $k(X)$ . Debemos probar entonces que, para cualquier familia algebraicamente independiente  $u_1, \dots, u_n \in k(X)$ , el conjunto de puntos de  $X$  en los cuales  $u_1, \dots, u_n$  son parámetros locales, es abierto no vacío. Sin perder generalidad podemos suponer que  $X$  es afín, digamos  $X \subseteq \mathbb{A}^N$ , con coordenadas  $x_1, \dots, x_N$ . Probaremos entonces que existe un abierto no vacío  $U \subseteq X$  tal que para todo  $x \in U$  los  $d_x x_i$  se pueden expresar como combinación lineal de  $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ . En efecto, si sucediera que los  $d_x u_1, \dots, d_x u_n$  son linealmente dependientes, entonces  $\dim_k T_x X < n = \dim X = \text{grtr}_k k(X)$ , y como la familia  $u_1, \dots, u_n$  es algebraicamente independiente, cada coordenada  $x_i$  se relaciona con  $u_1, \dots, u_n$  mediante un polinomio irreducible  $F_i$  con  $F_i(x_i, u_1, \dots, u_n) = 0$  donde  $\partial F_i / \partial x_i \neq 0$  (no es idénticamente cero, porque  $\text{cark} = 0$ ). Escribamos  $F_i = a_0 x_i^{n_i} + a_1 x_i^{n_i-1} + \dots + a_n$ , con los  $a_j \in k[u_1, \dots, u_n]$ . Entonces, para cada  $a_j$  se tiene que  $d_x a_j$  es combinación lineal de los  $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ , y de la igualdad  $F_i(x_i, u_1, \dots, u_n) = 0$  se sigue que

$$(1) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) d_x x_i + x_i^{n_i} d_x a_0 + \dots + d_x a_n = 0$$

para todo  $x \in X$ . Observe ahora que los puntos  $x$  tales que  $(\partial F_i / \partial x_i)(x) \neq 0$  forman un abierto no vacío  $U \subseteq X$  y en estos puntos de  $U$ , despejando de (1) se sigue que  $d_x x_i$  es combinación lineal de los  $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ , como se quería.  $\square$

**Teorema 1.5.7** (Bertini). *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo dominante entre variedades proyectivas, con  $X$  lisa. Entonces, existe un abierto no vacío  $V \subseteq Y$  tal que la*

restricción  $f : f^{-1}V \rightarrow V$  es un morfismo liso. En particular, para todos los puntos  $y \in V$ , las fibras  $f^{-1}(y)$  son lisas.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $n = \dim X$ ,  $m = \dim Y$ . Por el teorema [14, Teorema 3.35, pág. 122], existe un subconjunto abierto denso de  $Y$  en el cual todas las fibras  $f^{-1}(y)$  son puras de dimensión  $n - m$ . Podemos asumir que  $Y$  es este conjunto. Por el teorema [14, 5.1] existe un abierto denso  $Y_{\text{liso}} \subseteq Y$  y así también podemos asumir que  $Y$  es liso. Sea  $Z \subseteq X$  el subconjunto de puntos  $x \in X$  donde  $d_x f$  no es suprayectiva, es decir, donde el rango de  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  es menor que  $\dim Y = m$ . Así, los menores de tamaño  $< m$  de (una matriz asociada a)  $d_x f$  se anulan y por lo tanto  $Z$  es un cerrado dado por los ceros de estos menores de  $d_x f$ . Debemos probar ahora que la imagen  $f(Z)$  está contenida en un cerrado propio  $Y' \subsetneq Y$  (ya que entonces su complemento  $V = Y - Y'$  es un abierto no vacío, y por lo tanto denso en  $Y$ , donde  $d_x f$  es suprayectiva, como se quería). Supongamos que tal cerrado  $Y'$  no existe; entonces,  $f(Z)$  es denso en  $Y$ . Ahora, por el lema 1.5.6 aplicado a  $Z$ , existe un abierto no vacío  $U \subseteq Z$  tal que  $d_x f : T_x Z \rightarrow T_{f(x)} Y$  es suprayectiva para todo  $x \in U$ . Como  $T_x Z \subseteq T_x X$ , se debe tener que  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  también es suprayectiva, una contradicción.  $\square$

**Teorema 1.5.8** (Bertini). *Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva lisa, entonces existe un hiperplano  $H \subseteq \mathbb{P}^n$  que no contiene a  $X$  y tal que  $H \cap X$  es lisa. Más aún, el conjunto de hiperplanos  $H$  con la propiedad anterior forma un subconjunto abierto denso en el sistema lineal completo  $|H|$ , considerado éste como un espacio proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Hartshorne [5, II. 8.18, pág. 179]  $\square$

Recuerde que una variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es *no degenerada* si no está contenida en un hiperplano de  $\mathbb{P}^n$ .

**Teorema 1.5.9** (del Pezzo). *Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva no degenerada y  $d = \dim X$ , entonces*

$$\text{gr}(X) \geq n - d + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Griffiths-Harris [2, pág. 173].  $\square$

El teorema 1.5.9 anterior se puede reescribir de tal forma que da una cota para la dimensión del espacio proyectivo donde  $X$  se encuentra encajada:

**Teorema 1.5.10** (del Pezzo). *Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva de dimensión  $d = \dim X$ , entonces  $X$  está contenida en un subespacio lineal de dimensión  $d + \text{gr}(X) - 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Griffiths-Harris [2, pág. 174].  $\square$

**Corolario 1.5.11.** *Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una variedad proyectiva no degenerada de dimensión  $d = \dim X$  y grado  $\text{gr}(X) = 1$ , entonces  $X$  es un subespacio lineal de dimensión  $n + d - 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior  $X$  está contenida en un subespacio lineal  $L$  de dimensión  $d + \text{gr}(X) - 1 = d + 1 - 1 = d = \dim(X)$  y así, por la proposición [14, 4.9], se sigue que  $X = L$ .  $\square$

### 1.5.2. Variedades que realizan la cota de del Pezzo

A continuación calculamos el grado de un rollo y mostraremos que los rollos normales racionales son variedades que alcanzan la cota de del Pezzo.

**Ejemplo 1.5.12.** Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una curva no degenerada tal que  $\text{gr}(X) = n - \dim X + 1 = n - 1 + 1 = n$ , i.e.,  $X$  es una curva no degenerada de grado  $n$  en  $\mathbb{P}^n$ , entonces  $X$  es proyectivamente isomorfa a una curva normal racional, i.e., la imagen del morfismo de Veronese  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ , [2, págs. 178-179].

**Ejemplo 1.5.13.** Si  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  es una superficie tal que  $\text{gr}(X) = n - \dim X + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$ , i.e.,  $X$  es una superficie de grado  $n - 1$  en  $\mathbb{P}^n$ , entonces es un rollo normal racional de dimensión 2 o una superficie de Veronese en  $\mathbb{P}^5$  [2, pág. 525].

## 1.6. Caracterización cohomológica de los rollos

En esta sección se caracterizan cohomológicamente los rollos normales racionales

$$S_{e_0, \dots, e_d} \subseteq \mathbb{P}^n$$

obteniendo los enteros  $e_i$  que dan el tipo del rollo  $S$  en términos de las dimensiones de las secciones globales de ciertas gavillas naturales asociadas a divisores en  $S$ .

### 1.6.1. Resultados generales de geometría algebraica

**Lema 1.6.1** (Fórmula de proyección). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de espacios anillados,  $\mathcal{F}$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo y  $\mathcal{E}$  es un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo localmente libre de rango finito, entonces se tiene*

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar un abierto  $U \subseteq Y$  tal que  $\mathcal{E}|_U \simeq \mathcal{O}_U|^n$  es libre de rango (finito)  $n$ .

$$\begin{aligned} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) &\simeq f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_Y^n) \\ &\simeq f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_X^n) \\ &\simeq f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_X)^n \\ &\simeq f_*(\mathcal{F}^n) \\ &\simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y^n \\ &\simeq f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 1.6.2.** *Sea  $\mathcal{L}$  una gavilla localmente libre de rango finito y sea  $\mathcal{L}^\vee = \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$  su dual. Entonces para cualesquiera  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Mod}(X)$  tenemos*

$$\text{Ext}^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}),$$

y para la gavilla  $\mathcal{E}xt$  tenemos

$$\mathcal{E}xt(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}^\vee.$$

**Lema 1.6.3** (Fórmula de proyección). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de espacios anillados,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -módulo y  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo localmente libre de rango finito, entonces*

$$(1') \quad R^i f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{E}) \simeq R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$  una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}$ , o en su forma desplegada:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2 \rightarrow \dots$$

una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}$  con las  $\mathcal{L}^j$  inyectivas. Del lema 1.6.1, se tienen isomorfismos para cada  $i$ :

$$f_*(\mathcal{L}^i \otimes f^* \mathcal{E}) \simeq f_*(\mathcal{L}^i) \otimes \mathcal{E}.$$

o abreviadamente, isomorfismos de complejos

$$(2). \quad f_*(\mathcal{L}^\bullet \otimes f^* \mathcal{E}) \simeq f_*(\mathcal{L}^\bullet) \otimes \mathcal{E}$$

Para calcular las cohomologías de ambos lados del isomorfismo que se quiere probar, observemos primero que como  $\mathcal{E}$  es localmente libre de rango finito, entonces  $f^* \mathcal{E}$  también es localmente libre de rango finito. Entonces, por el lema 6.6 de [5] las gavillas  $\mathcal{L}^i \otimes f^* \mathcal{E}$  también son inyectivas (esencialmente por la adjunción de los funtores  $\otimes$  y  $\text{Hom}$ ) y así tensorando (1) con  $f^* \mathcal{E}$  se obtiene la resolución inyectiva

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^0 \otimes f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^1 \otimes f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^2 \otimes f^* \mathcal{E} \rightarrow \dots$$

o en forma abreviada

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet \otimes f^* \mathcal{E}.$$

Por otra parte, como  $\mathcal{E}$  es localmente libre, es plana (basta ver los tallos) y por lo tanto tensorando (1) con  $\mathcal{F}$  se obtiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^0 \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{E} \rightarrow \dots$$

donde, por el mismo lema 6.6 de [5] cada  $\mathcal{L}^i \otimes \mathcal{E}$  es inyectiva y así, la anterior es una resolución inyectiva de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ . Así podemos usar (3) para calcular los funtores derivados derechos de (1') del lado izquierdo de (3):

$$(4) \quad R^i f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}^i(f_*(\mathcal{L}^\bullet \otimes f^* \mathcal{E})).$$

Para  $R^i f_* \mathcal{F}$  en el lado derecho de (1'), como  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$  es una resolución inyectiva, entonces

$$(5) \quad R^i f_* \otimes \mathcal{E} \simeq \mathcal{H}^i(f_* \mathcal{L}^\bullet \otimes \mathcal{E}).$$

Por lo tanto, los lados derechos de (4) y (5) son isomorfos por (2) y así se tiene el isomorfismo (1').  $\square$

**Lema 1.6.4** (Un caso degenerado de la sucesión espectral de Leray). *Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua entre espacios topológicos y  $\mathcal{F} \in \text{Gav}_k X$  satisface que  $R^i f_* \mathcal{F} = 0$  para todo  $i > 0$ , entonces se tienen isomorfismos naturales para cada  $i \geq 0$ :*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, f_* \mathcal{F}).$$

DEMOSTRACIÓN. Considere el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^1 & \longrightarrow & \mathcal{L}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & f_* \mathcal{F} & \longrightarrow & f_* \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & f_* \mathcal{L}^1 & \longrightarrow & f_* \mathcal{L}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

donde el renglón superior es una resolución inyectiva de  $\mathcal{F}$  y las flechas verticales están inducidas por el morfismo natural  $\mathcal{F} \rightarrow f_* \mathcal{F}$ . Como el funtor  $f_* : \text{Gav}_k X \rightarrow \text{Gav}_k Y$  preserva inyectivos y como por hipótesis  $R^i f_* \mathcal{F} = 0$  para todo  $i > 0$ , entonces el renglón inferior es exacto y es una resolución inyectiva de  $f_* \mathcal{F}$ . Finalmente, como la cohomología  $H^i(X, \mathcal{F})$  es la cohomología del complejo  $\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)$  que es isomorfo al complejo  $\Gamma(X, f_* \mathcal{L}^\bullet)$ , el resultado se sigue.  $\square$

**Lema 1.6.5.** *Sean  $X$  un esquema noetheriano regular y  $\mathcal{E}$  una gavilla coherente localmente libre de rango finito  $\geq 2$  en  $X$ . Entonces*

- (a)  $\text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \text{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$ .
- (b) Si  $\mathcal{E}'$  es otra gavilla coherente localmente libre en  $X$ , entonces  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}')$  si y sólo si existe una gavilla invertible  $\mathcal{L}$  tal que  $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el morfismo natural

$$\varphi : \text{Pic}(X) \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

dado por

$$(L, n) \mapsto (\pi^* L \otimes \mathcal{O}(n)),$$

donde  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow X$  es la proyección correspondiente a  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(n)$ .

Sea  $r = \text{rango de } \mathcal{E}$  y escojamos un punto  $x \in X$  y una vecindad abierta afín  $U$  de  $x$  tal que  $\mathcal{E}|_U$  es libre. Sea  $k(x)$  el campo residual. Entonces,  $\phi^{-1}U = \mathbb{P}_U^{r-1}$  y se tiene así un encaje

$$(2) \quad \mathbb{P}_{k(x)}^{r-1} \rightarrow \mathbb{P}_U^{r-1} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}).$$

Claramente

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)|_U \simeq \mathcal{O}_U(n)$$

y sabemos que  $\text{Pic}(\mathbb{P}_{k(x)}^{r-1}) = \mathbb{Z}$  por lo que (2) da un inverso izquierdo de

$$\mathbb{Z} = \mathbb{P}_{k(x)}^{r-1} \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

$\square$

En general, si  $Y$  es un esquema entero de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ ,  $\mathcal{E}$  es una gavilla localmente libre en  $Y$  y  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow Y$  es la proyección o haz proyectivo correspondiente, entonces

$$\text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \text{Pic}(Y) \oplus \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el morfismo natural

$$(1) \quad \varphi : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

dado por

$$(L, m) \mapsto (\pi^* L \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m)).$$

Injectividad: Suponga que  $\pi^* L \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ . Entonces  $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \simeq \mathcal{O}_Y$  por la proposición II 7.11 (a) en [5].

Por otra parte, por la fórmula de proyección 1.6.1,  $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \otimes \pi^* L) \simeq \pi \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \otimes_{\mathcal{O}_Y} L \simeq \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} L \simeq L \simeq \mathcal{O}_Y$  y así  $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \otimes L \simeq \mathcal{O}_Y$  y así  $L$  es invertible. De aquí se sigue que  $L^{-1} \simeq \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m)$ .

- Si  $m \leq 0$ :

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m < 0 \\ \mathcal{O}_Y, & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

- Si  $m > 0$ ,  $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \cong S^m(\mathcal{E})$  que tiene rango  $r = \binom{n+m+1}{n-1}$ , donde  $n = \text{rango}(\mathcal{E})$ . Entonces, si  $r > 1$  hemos terminado el caso  $m > 0$  pues  $r > 1$  es demasiado grande para que se tenga que  $S^m(\mathcal{E}) \otimes L \simeq \mathcal{O}_Y$  que es de rango 1.

Si  $\mathcal{E}$  es invertible ( $n = 1$ ), entonces  $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) = \mathcal{O}_Y$  y así  $L \simeq \mathcal{O}_Y$ .

Suprayectividad: Sea  $\mathcal{F} \in \text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ . Su restricción  $\mathcal{F}|_y$  a la fibra  $\mathbb{P}(\mathcal{E})_y \simeq \mathbb{P}^n$  y una gavilla invertible en  $\mathbb{P}^n$  y por la clasificación (o cálculo de  $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$ ) de ésta, es una  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$  para algún  $m$ .  $\square$

**Ejemplo 1.6.6.** El grupo de Picard  $\text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$  lo generan la clase del hiperplano  $H = [\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)]$  y la regla  $R = [\phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)]$ :

$$\text{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}R,$$

con producto de intersección dado por

$$H^d = f, H^{d-1} \cdot R = 1, R^2 = 0.$$

**Lema 1.6.7.** Sean  $Y$  un esquema noetheriano y  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo localmente libre de rango finito  $n + 1$  con  $n \geq 1$ . Sea  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  con la gavilla invertible  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  y morfismo de proyección  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow Y$ . Entonces:

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(l) = \begin{cases} \text{Sim}^l(\mathcal{E}), & \text{para todo } l \geq 0; \\ 0, & \text{para } l < 0. \end{cases}$$

y

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(l) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < i < n \ \forall l \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{para } i = n \ \& \ l > -n - 1. \end{cases}$$



DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{U_i\}$  una cubierta abierta de  $Y$  tal que cada  $U_i \cong \text{Spec}(A_i)$  con  $A_i$  noetheriano y además tal que  $\mathcal{E}(U_i) \cong \mathcal{O}_Y^{n+1}|_{U_i}$  para cada  $i$ . Entonces  $\pi^{-1}(U_i) \cong \mathbb{P}_{A_i}^n = \text{Proy}(A_i[x_0, \dots, x_n])$ . En particular

$$H^j(\pi^{-1}U_i, \mathcal{O}(l)|_{\pi^{-1}(U)}) = H^j(\mathbb{P}_{A_i}^n, \mathcal{O}(l)|_{\pi^{-1}U_i}) = 0$$

para  $0 < j < n$  por el teorema III 5.1 de [5]. Se sigue que  $R^j\pi_*\mathcal{O}(l) = 0$  para  $0 < j < n$  por la proposición III 8.1 de [5]. Similarmente,  $H^n(\mathbb{P}_{A_i}^n, \mathcal{O}(l)) = 0$  para  $l > -n - 1$  implica que  $R^n\pi_*\mathcal{O}(l) = 0$  para  $l > -n - 1$ .  $\square$

## 1.6.2. Caracterización cohomológica de los rollos

Sean  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e_d)$ , con  $e_1 \geq \dots \geq e_d \geq 0$  enteros y sea  $f := e_1 + \dots + e_d \geq 2$ . Sea  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$  el sistema lineal en el haz  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  con fibras  $\mathbb{P}^{d-1}$ . Pongamos  $N := f + d$  y consideremos el morfismo  $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$  dado por el sistema lineal completo  $H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L})$ . La imagen de este morfismo es el rollo (normal) racional  $S \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$  de tipo  $e_1, \dots, e_d$ . Si  $e_d \geq 1$ , entonces  $S$  es liso e isomorfo a  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ .

**Teorema 1.6.8.** *Sea  $D \in \text{Cl}(S)$  (la clase de) un divisor dado por una fibra del morfismo (proyección) natural  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  y sea  $L$  una sección hiperplana de  $S$ . Sean*

$$c_i = h^0(L - iD) - h^0(L - (i+1)D), \quad \text{para } i \geq 0 \text{ enteros.}$$

Entonces,

$$e_i = \#\{j : c_j \geq i\} - 1, \quad \text{para todo } i \geq 0, \text{ poniendo } e_0 := d.$$

En particular, la dimensión del rollo es  $\dim S = d_0$ .

DEMOSTRACIÓN. Por definición, y sus varias construcciones recordadas previamente, un rollo normal racional  $S = S(e_1, \dots, e_d)$  está definido especificando los enteros  $e_1 \geq \dots \geq e_d \geq 0$ . A continuación mostramos, siguiendo a Schreyer [11, 2.4 y 2.5, pág. 114-115], que los enteros  $e_i$  tienen una interpretación cohomológica, de hecho se recuperan a partir de las dimensiones de los espacios de secciones  $H^0(X, \mathcal{O}_X(H - F - (i+1)E))$ . Escojamos una de las construcciones del rollo  $S$ , digamos usando un pincel  $\{D_\lambda\}$  de divisores en  $X$  y descompongamos el pincel en sus partes fija y móviles,

$$D_\lambda = F + E_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{P}^1$$

y considere la partición siguiente del entero  $N = 1$ , donde  $N = f + d - 1 = e_1 + \cdots + d_d + d - 1$ :

$$\begin{aligned} d_0 &:= h^0(X, \mathcal{O}_X(H)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(H - D)) \\ d_1 &:= h^0(X, \mathcal{O}_X(H - D)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(H - F - 2E)) \\ &\vdots \\ d_i &:= h^0(X, \mathcal{O}_X(H - F - iE)) - h^0(X, \mathcal{O}_X(H - F - (i + 1)E)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde notamos que para  $i \gg 0$  suficientemente grande  $\mathcal{O}_X(H - F - iE)$  ya no tiene secciones globales y por lo tanto la dimensión  $h^0(X, \mathcal{O}_X(H - F - iE))$  para  $i \gg 0$ .

Para demostrar el teorema, por [11, Pág. 114-115] basta encontrar una base  $x_{ij}$ , con  $1 \leq i \leq d_0$  y  $0 \leq j \leq e_i$ , como en la subsección 1.3.2, del espacio

$$H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \cong H^0(S, \mathcal{O}_S(H)).$$

Para comenzar, sea  $W \subseteq H^0(S, \mathcal{O}_S(E))$  el subespacio vectorial de dimensión 2 correspondiente al pincel  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$  que no tiene componentes fijas (es decir, quitamos la parte  $F$  fija). Considere las sucesiones exactas de gavillas [10, Lemma 2.6, pág. 162-163]

$$0 \rightarrow \wedge^2 W \otimes \mathcal{O}_S(H - F + (i-2)E) \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_S(H - F + (i-1)E) \rightarrow \mathcal{O}_S(H - F + iE)$$

y tomando secciones globales se obtiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \wedge^2 W \otimes M \rightarrow W \otimes M \rightarrow M$$

con  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^0(S, \mathcal{O}_S(H - F + iE))$ . Aquí,  $M$  se ve como módulo graduado sobre el anillo de polinomios  $\text{Sim}^\bullet W = k[\mathbb{P}(W)]$ . Se sigue que

$$\text{Tor}_j^{\text{Sim}^\bullet W}(M, k) = 0 \quad \text{para todo } j \geq 0$$

y por lo tanto

$$M \simeq \text{Sim}^\bullet W \otimes_k M / WM$$

como  $\text{Sim}^\bullet M$  –módulo graduado. En particular,

$$M_{-1} = \bigoplus_{i: e_i \geq 1} \text{Sim}^{e_i-1} W$$

y la composición

$$W \otimes M_{-1} = W \otimes H^0(S, \mathcal{O}_S(H - D)) \rightarrow M_0 = H^0(S, \mathcal{O}_S(H - F)) \subseteq H^0(S, \mathcal{O}_S(H))$$

corresponde a una matriz de tamaño  $2 \times h^0(\mathcal{O}_S(H - D))$  del tipo deseado.  $\square$

# Capítulo 2

## Aplicaciones

Sea  $\mathbb{F}_q$  un campo finito de cardinalidad  $q = p^n$ ,  $p$  un primo.

### 2.1. Códigos lineales

**Definición 2.1.1.** Si  $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n$  son dos vectores, la *distancia de Hamming* entre  $u$  y  $v$  es

$$d(u, v) = |\{i : \text{existe } u_i \neq v_i, 1 \leq i \leq n\}|.$$

**Teorema 2.1.2.** La función distancia satisface las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ .
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para toda  $x, y, z \in \mathbb{F}_q^n$ .

Este teorema hace a la función distancia una métrica sobre el espacio vectorial  $\mathbb{F}_q^n$ .

**Definición 2.1.3.** El *peso o norma de Hamming* de un vector  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{F}_q^n$  es

$$\|u\| = |\{i : \text{existe } u_i \neq 0, 1 \leq i \leq n\}|,$$

lo cual también se puede definir como

$$\|u\| = d(u, 0).$$

En general, si  $W \subseteq \mathbb{F}_q^n$  es un subespacio vectorial, se define su *norma o peso de Hamming* como

$$\|W\| = |\{i : \text{existe un vector } w \in W \text{ tal que } w_i \neq 0\}|.$$

**Observación 2.1.4.** Si  $w \in \mathbb{F}_q^n$  y si  $W = \langle w \rangle \subseteq \mathbb{F}_q^n$  es el subespacio vectorial que genera, entonces

$$\|w\| = \|W\|.$$

**Definición 2.1.5.** Un código lineal  $C$  sobre  $\mathbb{F}_q$ , es un subespacio vectorial de  $\mathbb{F}_q^n$ . Así,  $C$  tiene la métrica de Hamming como subespacio métrico de  $\mathbb{F}_q^n$ .

Al número  $n = \dim_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^n$  se le llama la *longitud* de las palabras del código  $C$ . A  $\dim_{\mathbb{F}_q} C$  se le llama la *dimensión* del código.  $[n, k]_q$  denotara a un código lineal  $C$  sobre  $\mathbb{F}_q$  de longitud  $n$  y dimensión  $k$ .

**Definición 2.1.6.** La distancia mínima del  $[n, k]_q$ -código lineal  $C$  es

$$d = d(C) = \min\{d(x, y) : x, y \in C, x \neq y\}.$$

Si se conoce la distancia mínima  $d$  de un  $[n, k]_q$ -código  $C$  diremos que es un  $[n, k, d]_q$ -código lineal.

**Observación 2.1.7.** Por las definiciones 2.1.3 y 2.1.6 para todo  $u, v \in \mathbb{F}_q^n$  se cumple

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

**Teorema 2.1.8.** Para un código lineal  $C$  la distancia mínima es igual al mínimo de los pesos no nulos de  $C$ .

DEMOSTRACIÓN.  $d(u, v) = d(u - v, 0) = \|u - v\|$  y si  $u \in C, v \in C$ , entonces  $u - v \in C$ .  $\square$

**Definición 2.1.9.** Si  $C$  es un  $[n, k]_q$  código lineal, entonces el radio cubriente  $\rho(C)$  de  $C$  es

$$\max\{\min\{d(x, c) : c \in C\} : x \in \mathbb{F}_q^n\}.$$

La esfera  $B_\rho(x)$  con radio  $\rho$  y centro en  $x$  se define como el conjunto  $\{y \in \mathbb{F}_q^n : d(x, y) \leq \rho\}$ . Si  $\rho$  es el entero más grande tal que las esferas  $B_\rho(c)$  con  $c \in C$  son disjuntas, entonces  $d = 2\rho + 1$  o  $d = 2\rho + 2$ . El radio cubriente es el  $\rho$  más pequeño tal que las esferas  $B_\rho(c)$  con  $c \in C$  cubren  $\mathbb{F}_q^n$ . Si estos números son iguales, entonces el código  $C$  es llamado *perfecto*. Esto también puede ser enunciado como sigue.

**Definición 2.1.10.** Un  $[n, k]_q$  código lineal  $C$  con distancia mínima  $2e + 1$  se llama un código *perfecto* si cada  $x \in \mathbb{F}_q^n$  tiene distancia  $\leq e$  a exactamente una palabra código.

**Observación 2.1.11.** Eligiendo una base para un  $[n, k, d]_q$ -código lineal  $C$ , se tiene un monomorfismo lineal

$$\gamma : C \cong \mathbb{F}_q^k \hookrightarrow \mathbb{F}_q^n$$

y a la matriz  $G$  asociada al monomorfismo  $\gamma$ , respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{F}_q^k$  y  $\mathbb{F}_q^n$ , se le llama la *matriz generadora* del código  $C$ . Así  $G \in \mathbb{M}_{k \times n}(\mathbb{F}_q)$ . Observemos que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_q^k \xrightarrow{\gamma} \mathbb{F}_q^n \xrightarrow{\eta} \mathbb{F}_q^{n-k} \rightarrow 0$$

es decir, el código  $C$  se recupera como

$$C = \{yG : y \in \mathbb{F}_q^k\}$$

donde

$$yG = (y_1, \dots, y_k)G_{k \times n} \in \mathbb{F}_q^n$$

así que *codificar* es multiplicar por la matriz generadora  $G$ . Decimos que  $G$  esta en forma estándar si  $G = (I_k \ P)$ , donde  $I_k$  es la matriz identidad de  $k$  por  $k$ . La matriz  $H \in \mathbb{M}_{(n-k) \times n}(\mathbb{F}_q)$  asociada el epimorfismo  $\eta$  se llama la *matriz de control* del código  $C$  y el código  $C$  se recupera usando esta matriz como  $C = \{x \in \mathbb{F}_q^n : Hx^T = 0\}$ , donde  $x^T =$  transpuesta de  $x$ , es decir,  $x$  visto como vector columna.

Dado un  $[n, k]_q$  código lineal  $C$ , el *código dual* de  $C$ , denotado por  $C^\perp$ , se define como el conjunto de aquellos vectores de  $\mathbb{F}_q^n$  los cuales son ortogonales a cada palabra código de  $C$ , es decir,

$$C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n : x \cdot u = 0, \text{ para todo } u \in C\}.$$

**Lema 2.1.12.** *Supongamos que  $C$  es un  $[n, k]_q$  código lineal con matriz generadora  $G$ . Entonces un vector  $x$  de  $\mathbb{F}_q^n$  pertenece a  $C^\perp$  si y sólo si  $x$  es ortogonal a cada renglón de  $G$ , es decir,  $x \in C^\perp \Leftrightarrow Gx^T = 0$ .*

**Teorema 2.1.13.** *Supongamos que  $C$  es un  $[n, k]_q$  código lineal. Entonces el código dual  $C^\perp$  es un  $[n, n - k]_q$  código lineal.*

**Teorema 2.1.14.** *Para cualquier  $[n, k]_q$  código lineal  $C$ ,  $(C^\perp)^\perp = C$ .*

**Observación 2.1.15.** Una matriz de control para un  $[n, k]_q$  código lineal  $C$  es una matriz generadora de  $C^\perp$ .

**Definición 2.1.16.** Si  $C$  es un código lineal con matriz de control  $H$ , para cada  $x \in \mathbb{F}_q^n$ , al vector  $Hx^T$  en  $\mathbb{F}_q^{n-k}$ , se le llama el *síndrome* del vector  $x$ .

Dado que  $C$  es un subgrupo de  $\mathbb{F}_q^n$ , podemos particionar  $\mathbb{F}_q^n$  en clases laterales de  $C$ , así tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.17.** *Dos vectores pertenecen a la misma clase lateral si y sólo si tienen el mismo síndrome.*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $x_1, x_2 \in \mathbb{F}_q^n$  están en la misma clase lateral de  $C$ , entonces  $x_1 - x_2 = c \in C$ . Por lo tanto  $Hx_1^T = H(x_2 + c)^T = Hx_2^T + Hc^T = Hx_2^T$ . Por lo tanto  $x_1$  y  $x_2$  tienen el mismo síndrome. Por otro lado si  $Hx_1 = Hx_2$ , entonces  $H(x_2 - x_1)^T = 0$  y de esta manera  $x_2 - x_1 \in C$ .  $\square$

**Corolario 2.1.18.** *Existe una correspondencia biyectiva entre clases laterales de  $C$  y síndromes.*

El síndrome es una importante ayuda para decodificar vectores recibidos  $x$ . Sea  $x \in \mathbb{F}_q^n$  una palabra enviada. Se busca la palabra código a distancia mínima de  $x$ . Supóngase que

$$s = d(x, c) = \min\{d(x, c') : c' \in C\}.$$

Así, se puede escribir  $x = c + e$  con  $c \in C$  y  $e \notin C$  una palabra con peso mínimo  $s$ . Como  $C$  es lineal

$$\min_{c \in C} (d(x, y)) = \min_{c \in C} \|x - c\| = \min_{e \in x + C} \|e\|,$$

por tanto, tratar de decodificar  $x$  como una palabra del código  $c$  a distancia mínima  $s$  es equivalente a buscar  $e = x - c$  con peso mínimo en  $x + C$ .

**Teorema 2.1.19.** *Sea  $C$  un código lineal con matriz de control  $H$ . Decodificar la palabra recibida  $x$  como  $x - e = c \in C$  por distancia mínima es equivalente a encontrar  $e$  con peso mínimo en la clase  $x + C$ , es decir, donde  $e$  es una palabra de peso mínimo con igual síndrome que  $x$ .*

Los pesos generalizados de Hamming, que se definen a continuación, son otra familia de parámetros de un código lineal, que generalizan la noción de peso mínimo o distancia mínima de un código lineal.

**Definición 2.1.20.** Sea  $D \subseteq \mathbb{F}_q^n$  un subespacio vectorial de dimensión  $r$ . El peso de Hamming definido para vectores en  $\mathbb{F}_q^n$ , se generaliza naturalmente al conjunto de subespacios, esto es,

$$\|D\| = |\text{Sop}(D)|, \text{ donde } \text{Sop}(D) = \{i : \text{existe } v \in D, v_i \neq 0\}.$$

Para un código lineal  $C$ , su  $r$ -ésimo peso generalizado  $d_r$ ,  $r = 1, \dots, k$  es:

$$d_r = d_r(C) = \min\{\|D\| : D \subseteq C, \dim(D) = r\}.$$

Observe que  $d_1 = d$  es la distancia mínima del código.

## 2.2. Sistemas proyectivos y códigos lineales

Una forma de construir códigos lineales introducida por Tsfasman y Vlăduț es por medio del lenguaje y propiedades de *sistemas proyectivos no degenerados* en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$ .

**Definición 2.2.1.** Un *sistema proyectivo* es un conjunto de  $n$  puntos  $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$ . Se dice que el sistema proyectivo  $X$  es *no degenerado* si no está contenido en un hiperplano de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$ ; entonces claramente  $|X| \geq k$ .

En términos geométricos, la definición de pesos superiores  $d_r = d_r(P)$  para sistemas proyectivos es aún más natural:

$$n - d_r = \max\{|\mathbb{P} \cap \Pi^r| : \Pi^r \text{ es un subespacio proyectivo de codimensión } r \text{ en } \mathbb{P}\}.$$

Si desde el punto de vista matemático, el parámetro  $d$  para sistemas proyectivos merece estudiarse, también  $d_r$ .

**Proposición 2.2.2.** (1) *A cada sistema proyectivo no degenerado de  $n$  puntos en  $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$  le corresponde un  $[n, k]_q$ -código lineal  $C_X$  no degenerado.*

(2) *Si se consideran clases de equivalencia de  $[n, k]_q$ -sistemas proyectivos no degenerados y clases de equivalencia de  $[n, k]_q$ -códigos lineales no degenerados, la correspondencia anterior es biyectiva.*

(3) *La distancia mínima del código  $C_X$  asociado al sistema proyectivo no degenerado  $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$  está dada por*

$$d(C_X) = n - \max\{|X \cap H| : H \text{ es un hiperplano de } \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}\}.$$

(4) *Si  $r \geq 1$  es un entero, el  $r$ -ésimo peso superior de  $C_X$  está dado por*

$$d_r(C_X) = n - \max\{|X \cap H| : H \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}, \text{codim}_{\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}} H = r\}.$$

(5) *Los pesos superiores satisfacen las desigualdades*

$$0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

DEMOSTRACIÓN. (1): Dado un sistema proyectivo no degenerado

$$\{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1} \simeq \mathbb{P}(V)$$

(donde  $V$  es un  $\mathbb{F}_q$ -espacio vectorial de dimensión  $k$ ), levantando cada punto  $P_i \in \mathbb{P}(V)$  a un vector  $v_i \in V$  (en cualquier forma) se define la función de evaluación

$$ev|_{v_1, \dots, v_n} : V^* \rightarrow \mathbb{F}_q^n$$

mediante  $f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_n))$ . Claramente la función es inyectiva y lineal. Su imagen  $C_X$  es un  $[n, k]_q$ -código lineal.

- (2) Si  $C$  es un  $[n, k]_q$ -código lineal no degenerado, consideremos las funciones coordenadas  $x_i : C \rightarrow \mathbb{F}_q$  dadas por  $x_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ ; entonces  $x_i \in C^*$  (el dual del espacio vectorial  $C$ ) y como  $C$  es no degenerado todas las funcionales  $x_i$  no son cero en  $C^*$ . Así, vistas como puntos no cero cada una define un punto  $P_i$  en  $\mathbb{P}(C^*) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$  y se tiene el sistema proyectivo  $\{P_1, \dots, P_n\}$  en  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{k-1}$ . □

**Definición 2.2.3.** La colección de números  $d_1, \dots, d_k$  se llama la jerarquía de pesos del código.

## 2.3. Códigos en variedades regladas

Usando las variedades regladas del capítulo 1 y siguiendo el artículo de Hana-Johnsen [3], se construirán códigos lineales álgebra-geométricos sobre los puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales de un rollo algebraico racional. Después se calculan sus parámetros principales (longitud, dimensión y distancia mínima), al final determinaremos la jerarquía de pesos

$$0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$$

del código usando la parte que caracteriza a un rollo normal racional como en el teorema 1.6.8.

### 2.3.1. Construcción de códigos y sus parámetros

Para el rollo cúbico del ejemplo 1.2.2 tenemos,  $\Delta = e_1 = 2, e_2 = 1$  y suponemos que  $q = 3$ , es decir,  $S_{e_1, e_2} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^4$ . Sea  $[t, u] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^1$ .

Para la curva normal racional  $C_{e_1}$  de grado 2 tenemos la siguiente parametrización:

$$X_0 = t^{e_1} = t^2, X_1 = t^{e_1-1}u = tu, X_2 = u^{e_1} = u^2.$$

Para la curva normal racional  $C_{e_2}$  de grado 1 tenemos la siguiente parametrización:

$$X_0 = t^{e_2} = t, X_1 = t^{e_2-1}u = u.$$

Por lo anterior para  $C_{e_1}$  tenemos,  $[t^2, tu, u^2, 0, 0] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^4$  y de igual manera para  $C_{e_2}$  tenemos  $[0, 0, 0, t, u] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^4$ .

Los puntos de las dos curvas directrices  $C_{e_1}$  y  $C_{e_2}$  son:

$$C_{e_1} = \{[0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0, 0], [1, 2, 1, 0, 0]\}$$

$$C_{e_2} = \{[0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 2], [0, 0, 0, 0, 1]\}$$

Sea  $C$  el código sobre un campo finito  $\mathbb{F}_q$  definido como sigue. Empezamos con  $S$ , el cual está metido en  $\mathbb{P}^{N-1}$  con  $N = e_1 + \cdots + e_\Delta + \Delta$ . Asumiremos que  $e_\Delta \geq 1$ , así que  $S$  es liso.  $S$  contiene

$$n = (q+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + q + 1)$$

puntos sobre  $\mathbb{F}_q$ . Supondremos que  $q \geq e_1$  así que los puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales generan  $\mathbb{P}^{N-1}$ .

Elegimos un representante de cada uno de los  $n$  puntos como un vector columna en  $\mathbb{F}_q^N$  y formemos una matriz  $G$  de  $N \times n$  con estos  $n$  vectores como columnas (en el orden que se prefiera). El código  $C$  es entonces el código lineal con  $G$  como matriz generadora.

**Ejemplo 2.3.1.** Del ejemplo 1.2.2 con  $\Delta = 2$ ,  $e_1 = 2$ ,  $e_2 = 1$  obtenemos la siguiente matriz generadora:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En general  $C$  es entonces un  $[n, N]$ -código lineal (únicamente definido salvo equivalencia de código, pero esta ambigüedad no afectará los parámetros del código). Llamaremos a  $C$  un *código de rollo*.

Para un rollo  $\mathcal{S} = S_{e_1, \dots, e_\Delta}$ , sea  $N = \sum_{i=1}^{\Delta} e_i + \Delta$  como lo definimos anteriormente.

**Lema 2.3.2.** Sea  $\mathcal{S} = S_{e_1, \dots, e_\Delta} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$  un rollo normal racional liso, es decir,  $e_1 \geq 1$ . Sea  $\chi = \mathcal{S}(\mathbb{F}_q) \subseteq \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{F}_q)$  el conjunto de  $\mathbb{F}_q$ -racionales del rollo  $\mathcal{S}$ . Entonces:

- (1)  $|\chi| = |\mathcal{S}(\mathbb{F}_q)| = (q+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + q + 1)$ .
- (2) Si  $q \geq e_1$ , entonces el conjunto de puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales  $\chi = \mathcal{S}(\mathbb{F}_q)$  del rollo  $\mathcal{S}$  es un sistema proyectivo no degenerado en  $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{F}_q)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** (1) Para el rollo  $\mathcal{S}$  tenemos el siguiente morfismo  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ , donde para cada  $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  la fibra  $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^{\Delta-1}(\mathbb{F}_q)$  y claramente  $\mathcal{S}$  tiene  $q+1$  fibras sobre  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ . Por otro lado cada fibra tiene  $q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + 1$  puntos, así que  $\mathcal{S}$  contiene  $(q+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + 1)$  puntos sobre  $\mathbb{F}_q$ . Para la parte (2), si  $H \subseteq \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{F}_q)$  es un hiperplano tal que  $\chi = \mathcal{S}(\mathbb{F}_q) \subseteq H$  y denotemos con la misma  $H$  al hiperplano correspondiente en  $\mathbb{P}^{N-1}$ .

Como el rollo  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}^{N-1}(\overline{\mathbb{F}_q})$  está generado por sus rectas directrices (que son  $\mathbb{P}^1$ 's) y cada uno de estos  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \subseteq H$ , entonces cada  $\mathbb{P}^1 \subseteq H$  y así  $\mathcal{S} \subseteq$



$H$ . Pero como  $\mathcal{S}$  es no degenerado, entonces  $H = \mathbb{P}^{N-1}$  y así  $H(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{F}_q)$  y por lo tanto  $\mathcal{S}(\mathbb{F}_q)$  es no-degenerado.  $\square$

El código lineal  $C$  asociado al rollo  $\mathcal{S}$  es el código asociado al sistema proyectivo no degenerado  $\chi = \mathcal{S}(\mathbb{F}_q)$  dado por los puntos  $\mathbb{F}_q$ - racionales del rollo  $\mathcal{S}$ . Explícitamente, elegimos un representante de cada uno de los  $n$  puntos como un vector columna en  $\mathbb{F}_q^N$  y formamos una matriz  $G$  de  $N \times n$  con estos  $n$  vectores como columnas (en cualquier orden). El código  $C$  será el código lineal con matriz generadora  $G$ .

## 2.4. El teorema principal

A partir de lo realizado en las secciones anteriores, en la presente sección calcularemos el número máximo de puntos  $\mathbb{F}_q$ - racionales del rollo  $\mathcal{S}$  intersectado con subespacios lineales  $\mathbb{P}^{k-1} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$ . Los resultados siguientes serán importantes para la demostración del teorema principal. Sea  $H$  un subespacio lineal de  $\mathbb{P}^{N-1}$ . Asociamos a  $H$  la  $(\Delta + 1)$ -ada  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta)$ , donde  $\alpha_i$  es el número de fibras  $D_\lambda$  de  $\mathcal{S}$  sobre  $\mathbb{P}^1$ , de tal manera que  $H$  intersecta  $D_\lambda$  en un  $\mathbb{P}^{i-1}$  espacio proyectivo. Claramente la suma de las  $\alpha_i$ 's es  $q + 1$ .

**Definición 2.4.1.** Definimos  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) \geq (\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$  si  $\alpha_\Delta > \beta_\Delta$  o si existe una  $i$  tal que  $\alpha_i > \beta_i$  y  $\alpha_j = \beta_j$  para toda  $j$  con  $j > i$ , o si  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) = (\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$ . Definimos

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) > (\beta_0, \dots, \beta_\Delta) \text{ si } (\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) \geq (\beta_0, \dots, \beta_\Delta), \\ \text{pero } (\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) \neq (\beta_0, \dots, \beta_\Delta).$$

**Lema 2.4.2.** Sean  $H_1$  y  $H_2$  espacios lineales (de la misma dimensión) en  $\mathbb{P}^{N-1}$ . Sean  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta)$  y  $(\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$  asociadas a  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. Supongamos que no estamos en la situación donde  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_{i-1} = 0$  y  $\beta_{i-1} \geq q$  para la  $i$  más grande tal que  $\alpha_i > \beta_i$ . Entonces el número de puntos  $\mathbb{F}_q$ - racionales contenidos en la intersección de  $H_1$  con  $\mathcal{S}$  es mayor que el número de puntos  $\mathbb{F}_q$ - racionales contenidos en la intersección de  $H_2$  con  $\mathcal{S}$  si  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) > (\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta) > (\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$ . Sea  $i$  la mayor  $j$  tal que  $\alpha_j > \beta_j$ . Hagamos  $k_j = \alpha_j - \beta_j$ .

- Si todos los  $\beta_j$ 's son a lo más  $q - 1$ , entonces  $k_i \geq 1$ ,  $k_{i-1} \geq 1 - q$ ,  $k_{i-2} \geq 1 - q$ ,  $\dots$ ,  $k_0 \geq 1 - q$ . Por lo tanto la diferencia entre el número de puntos en  $H_1$  y en  $H_2$  de  $\mathcal{S}$  es al menos

$$(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) + (1 - q)(q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1) + \dots \\ + (1 - q)(q + 1) + (1 - q) = i > 0.$$

Para el resto de la demostración, supongamos que uno de los  $\beta_i$ 's es al menos  $q$ .

- Si  $\alpha_i = q + 1$ , entonces el número máximo de puntos en  $H_2$  de  $\mathcal{S}$  se alcanza cuando  $\beta_{i-1} = 1$  y  $\beta_i = q$ . La diferencia es de este modo

$$(q + 1)(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1)$$

$$-(q(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) + (q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1)) = q^{i-1} > 0.$$

- Si  $2 \leq \alpha_i \leq q$ , entonces el número máximo de puntos en  $H_2$  de  $\mathcal{S}$  se alcanza cuando  $\beta_{i-1} \geq q$ . Entonces  $\beta_i \leq 1$  y la diferencia es así al menos

$$a_i(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) - ((q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) + q(q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1)) \geq a_i - 1 > 0.$$

- Si  $\alpha_i = \alpha_{i-1} = 1$ , entonces el número máximo de puntos en  $H_2$  de  $\mathcal{S}$  es alcanzado cuando  $\beta_{i-1} \geq q$ . Así, la diferencia es al menos

$$(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) + (q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1) - (q+1)(q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1) = 1 > 0.$$

- Si  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_{i-1} = 0$  y  $\beta_{i-1} < q$ , entonces  $0 \leq \beta_{i-1} \leq 1$ . La diferencia es así al menos

$$(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) - (q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1) - q(q^{i-3} + q^{i-4} + \dots + 1) = \frac{q^i - 2q^{i-1} + q}{q-1} > 0.$$

□

**Observación 2.4.3.** Con la notación como en el lema, supongamos que  $\alpha_i = 1$ ,  $\alpha_{i-1} = 0$ ,  $\beta_{i-1} = q$  y  $\beta_k = 1$  para alguna  $k > i$ . Entonces la diferencia entre el número de puntos en  $H_1$  y en  $H_2$  de  $\mathcal{S}$  es al menos

$$(q^{i-1} + q^{i-2} + \dots + 1) - q((q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1)) = 1 > 0.$$

De este modo  $H_1$  contiene más puntos de  $\mathcal{S}$  también en este caso.

**Teorema 2.4.4.** Sean  $k = c_0 + c_1 + \dots + c_i + a$ , con  $0 \leq a \leq c_{i+1} - 1$ ,  $i \geq -1$  y  $b = \min\{a, c_{i+1} - c_{i+2}\}$  (el número de  $e_j$  iguales a  $i+1$ ). Entonces

- Si  $a > 0$ , el máximo número de puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales de  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^{k-1}$  es
 
$$(i+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + 1) + (q^{\Delta-c_{i+1}+a-1} + q^{\Delta-c_{i+1}+a-2} + \dots + 1) + (q-i-1)(q^{\Delta-c_{i+1}+b-1} + q^{\Delta-c_{i+1}+b-2} + \dots + 1).$$

- Si  $a = 0$ , el número máximo de puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales de  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^{k-1}$  es
 
$$(i+1)(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + 1) + (q-i)(q^{\Delta-c_{i+1}-1} + q^{\Delta-c_{i+1}-2} + \dots + 1).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Paso (1) Primero estudiamos el caso  $i = -1$ . Para  $k = 1$  el número máximo de puntos en  $\mathcal{S}$  contenidos en un  $\mathbb{P}^{i-1}$  es 1, para  $k = 2$  es  $q+1, \dots$ , para  $k = \Delta$  es  $q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + q + 1$ , ya que cualquier fibra del rollo es como un  $\mathbb{P}^{\Delta-1}$ .

Paso (2) Ahora estudiamos  $k = d + a$ , donde  $a \in \{1, 2, \dots, \Delta - 1\}$ . Primero mostraremos que no es posible para un  $\mathbb{P}^{k-1}$ , el cual no contiene ninguna fibra, contener más puntos en  $\mathcal{S}$  que todos los espacios proyectivos  $\mathbb{P}^{k-1}$  que contienen una de tales fibras. Elegimos un  $\mathbb{P}^{k-1}$  espacio proyectivo  $H$  generado por una fibra y  $a$  puntos adicionales en otra fibra, uno en cada una de las curvas directrices de grados  $e_\Delta, e_{\Delta-1}, \dots, e_{\Delta-a+1}$ . Este contiene al (posiblemente vacío) subrollo  $\overline{\mathcal{S}}$  generado por aquellas curvas

directrices que se encuentran entre las mencionadas, tal que las  $e_i$ 's en cuestión son 1. Let there be  $b$  such  $e_i$ 's. Es claro que  $H$  contiene  $q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + q + 1$  puntos en la fibra que contiene completamente,  $q^{a-1} + q^{a-2} + \dots + q + 1$  puntos en la fibra donde hemos escogido los  $a$  puntos adicionales y  $(q-1)(q^{b-1} + q^{b-2} + \dots + q + 1)$  puntos adicionales en  $\bar{S}$  (el cual es un subrollo de tipo  $(1, 1, \dots, 1)$  con  $b$  1's). Esto es

$$(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + q + 1) + (q^{a-1} + q^{a-2} + \dots + q + 1) \\ + (q-1)(q^{b-1} + q^{b-2} + \dots + q + 1)$$

puntos en total (donde el último término se interpreta como cero si  $b = 0$ ). Si  $a \neq b$ , la  $(\Delta + 1)$ -ada  $(\alpha_0, \dots, \alpha_\Delta)$  asociada a  $H$  está dada por  $\alpha_\Delta = 1$ ,  $\alpha_a = 1$  y  $\alpha_b = q - 1$ . Si  $a = b$ , está dada por  $\alpha_\Delta = 1$  y  $\alpha_b = q$ .

Estudiamos  $(k - 1)$ -espacios  $R$  que no contienen ninguna fibra. Tenemos  $\beta_\Delta = 0$ , donde  $(\beta_0, \dots, \beta_\Delta)$  es la  $(\Delta + 1)$ -ada asociada. Si  $R$  no contiene más puntos que  $H$  de  $\mathcal{S}$ , entonces por el lema 2.4.2,  $\beta_{\Delta-1} \geq q$ . En particular,  $\beta_{\Delta-1} \geq 2$ . Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos fibras tales que  $\dim(R \cap D_i) = \Delta - 2$  y escribimos  $R_i = R \cap D_i$ . Entonces  $R_1$  y  $R_2$  generan un  $\mathbb{P}^{2\Delta-3}$  espacio proyectivo. En particular,  $a = k - \Delta \geq \Delta - 2$ .

Si  $a = \Delta - 1$ , entonces  $\alpha_{\Delta-1} \geq 1$  y por el lema 2.4.2 tenemos que  $H$  contiene más puntos que  $R$  de  $\mathcal{S}$ .

Supongamos que  $a = \Delta - 2$ . Entonces  $\alpha_{\Delta-2} \geq 1$  y  $R$  es el espacio proyectivo generado por  $R_1$  y  $R_2$ . Si  $\beta_{\Delta-1} < q$ ,  $H$  contiene más puntos de  $\mathcal{S}$  que  $R$ . Así, estamos interesados sólo en el caso  $\beta_{\Delta-1} \geq q$ . Si  $\beta_{\Delta-1} = q$ , entonces  $R$  contiene a lo más

$$q(q^{\Delta-2} + q^{\Delta-3} + \dots + 1) + (q^{\Delta-3} + q^{\Delta-4} + \dots + 1)$$

puntos de  $\mathcal{S}$ , los cuales son menos que el número de puntos de  $\mathcal{S}$  en  $H$ .

Si  $\beta_{\Delta-1} = q + 1$ , consideremos el proyectivo generado  $\langle D_1, D_2 \rangle$ . Este contiene al proyectivo generado  $\langle R_1, R_2 \rangle$ . En particular, contiene a  $R$ . Dado que  $\beta_{\Delta-1} = q + 1 \geq 3$ , existe una fibra  $D_3$  distinta de  $D_1$  y  $D_2$  tal que  $\dim(R \cap D_3) = \Delta - 2$ . Sea  $R_3 = R \cap D_3$  y sea  $P$  un punto en  $D_3 - R_3$ , entonces  $\langle R_3, P \rangle = D_3$ . De este modo,  $D_3 \subseteq \langle \langle D_1, D_2 \rangle, P \rangle$ . Así,

$$c_2 = h^0(L - 2D) - h^0(L - 3D) \leq 1.$$

En conclusión,  $H$  siempre contiene al menos tantos puntos de  $\mathcal{S}$  como  $R$ . Esto nos permite, para  $k \in \{\Delta + 1, \Delta + 2, \dots, 2\Delta - 1\}$ , restringirnos a maximizar únicamente el número de puntos de  $\mathcal{S}$  en un  $(k - 1)$ -espacio proyectivo que contiene una fibra; estos son secciones de  $L - D$ . Tenemos  $\alpha_\Delta = 1$  para todos estos  $(k - 1)$ -espacios y se sigue de 2.4.2 y 2.4.3 que los  $(k - 1)$ -espacios con un número máximo de puntos son los  $(k - 1)$ -espacios que son más grandes con respecto al orden lexicográfico inverso. Por lo tanto el  $(k - 1)$ -espacio  $H$  que contiene el mayor número de puntos de  $\mathcal{S}$  debe estar dado por la elección de una fibra y  $a = k - \Delta$  puntos de otra fibra.

Supongamos que  $H$  es un  $(k-1)$ -espacio que contiene una fibra  $D_1$  y  $a$  de tales puntos en otra fibra  $D_2$ . Para cada punto  $P$  en el generado lineal de estos  $a$  puntos podemos escribir  $P = g_1 P_1 + \cdots + g_\Delta P_\Delta$ , donde cada  $P_i$  vive en  $D_2$  y también en la directriz número  $i$ . Sean  $Q_i$  para  $i = 1, \dots, \Delta$  los correspondientes puntos directrices en  $D_1$  y  $Q = h_1 Q_1 + \cdots + h_\Delta Q_\Delta$  un punto en  $D_1$ . Tenemos que encontrar el número de puntos en  $\mathcal{S}$  que esta contenido en  $H$ , pero en ninguna de las dos fibras. Si una recta contiene tres puntos de  $\mathcal{S}$ , la recta debe estar contenida en  $\mathcal{S}$ , pues  $\mathcal{S}$  está definido por cuádricas. Sea  $R = \sum g_i P_i + \sum h_i Q_i = P + Q$  un punto de  $\mathcal{S}$  en  $H$ . Entonces  $R$  está en la recta  $\overline{PQ}$ , así cada punto en  $\mathcal{S} \cap H$  fuera de las dos fibras vive en una recta  $\overline{PQ}$  globalmente contenida en  $H$ . Así el asunto decisivo es: ¿cuántas rectas  $\overline{PQ}$  no contenidas en una fibra están globalmente contenidas en  $\mathcal{S}$ ?

**Observación 2.4.5.** Es un hecho bien conocido acerca de rollos normales racionales que las rectas no contenidas en una fibra son precisamente aquellas que aparecen en el subrollo  $B_1$  de tipo  $(1, 1, \dots, 1)$  con  $c_2 - c_1$  1s, en otras palabras el subrollo formado por aquellas curvas directrices que son rectas (si las hay).

El subrollo  $B_1$  es simplemente un  $\mathbb{P}^{c_2 - c_1 - 1} \times \mathbb{P}^1$ . El hecho de que todas las rectas en  $\mathcal{S}$  estén en fibras o sean de la forma  $\{pt\} \times \mathbb{P}^1$  dentro de  $B_1$  puede ser visto por ejemplo del hecho de asignar coordenadas a  $\mathbb{P}^{N-1}$  en términos de coordenadas homogéneas  $Z_1, \dots, Z_\Delta$  de cada fibra de  $\mathcal{S}$  y  $t, u$  de las directrices dentro de  $\mathcal{S}$ . Cada coordenada homogénea  $x_r$  para  $\mathbb{P}^{N-1}$  es de la forma  $Z_i t^j u^{e_i - j}$ . Queremos describir una curva racional de grado 1 por una parametrización lineal. Supongamos que la curva no está contenida en una fibra, así es no constante en  $t, u$ . Es claro que podemos únicamente usar aquellos  $x_r$  con  $e_i = 1$ , ya que los otros, si no son constantes en  $t, u$ , están forzados a ser de grado al menos  $e_i$ . Para aquellos  $x_r$  con  $e_i = 1$ , existe sólo una posibilidad: lineal en  $t, u$  y constante en  $Z_1, \dots, Z_\Delta$ . Esto da una recta horizontal, transversal a las fibras.

Así, para encontrar el mayor número de rectas  $\overline{PQ}$  contenidas en  $\mathcal{S}$  tenemos que elegir los  $a$  puntos en la segunda fibra de tal forma que la intersección de su generado con  $B_1$  sea tan grande como sea posible. Esto ocurre cuando elegimos tantos puntos como sea posible de los  $a$  puntos que se encuentran en las rectas directrices. Podemos elegir  $b$  puntos que se encuentren en las rectas directrices, donde  $b$  es el mínimo entre  $a$  y  $c_1 - c_2$ . Entonces  $H \cap \mathcal{S}$  consiste de toda una fibra de  $\mathcal{S}$ , un  $(a-1)$ -espacio en otra fibra de  $\mathcal{S}$  y un subrollo  $(1, \dots, 1)$  con fibras de dimensión  $b-1$ . Esto da un total de

$$(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \cdots + q + 1) + (q^{a-1} + q^{a-2} + \cdots + q + 1) \\ + (q+1)(q^{b-1} + q^{b-2} + \cdots + q + 1)$$

puntos.

Paso (3) Para  $k = 2\Delta$  vemos por el lema 2.4.2 que los  $k$ -espacios  $H$  que contienen más puntos son aquellos que contienen dos fibras y cualquier elección de dos fibras de  $\mathcal{S}$  generan un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{2\Delta-1}$ , pues  $e_i \geq 1$  para toda  $i$ , es decir,  $c_0 = c_1 = \Delta$ . Los puntos de  $\mathcal{S}$  en  $H$  son los puntos de las dos fibras y aquellos del subrollo  $(1, \dots, 1)$  de dimensión  $c_1 - c_2 = \Delta - c_2$  contenidos en  $H$ . Esto da

$$2(q^{\Delta-1} + q^{\Delta-2} + \dots + q + 1) + \\ (q - 1)(q^{\Delta-c_2-1} + q^{\Delta-c_2-2} + \dots + q + 1)$$

puntos.

Paso (4) Ahora regresamos al caso  $k \geq 2\Delta + 1$ . Es claro del lema 2.4.2 que sólo consideramos  $(k - 1)$ -espacios que contienen por lo menos dos fibras de  $\mathcal{S}$ . Ahora todos estos  $(k - 1)$ -espacios  $H$  contienen al subrollo  $B_1$ . En lugar de incluir  $\mathcal{S}$  al espacio proyectivo  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{N-1}$  mediante  $L$  usamos el sistema lineal  $L - D$  (que contiene una fibra fija), de este modo el subrollo  $B_1$  colapsa a un  $(\Delta - c_2 - 1)$ -espacio  $R$ , mientras que todos los otros puntos son enviados inyectivamente en un espacio proyectivo más pequeño  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^{N-1-\Delta}$ . Denotemos la imagen de  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  bajo  $L - D$  en  $\mathbb{P}'$  por  $\mathcal{S}'$ .

Sea  $k = 2\Delta + a$ , donde  $1 \leq a \leq c_2 = h^0(L - 2D) - h^0(L - 3D)$ . Cada  $(k - 1)$ -espacio  $H$  contiene dos fibras de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{P}$  correspondientes a un  $(k' - 1)$ -espacio  $H'$  en  $\mathbb{P}'$  y el problema de maximizar el número de puntos racionales de  $\mathcal{S}$  en  $H$  y el número de puntos de  $\mathcal{S}'$  en  $H'$  es el mismo.

Supongamos que  $H$  contiene las dos fibras  $D_1$  y  $D_2$  y pensemos a  $L - D$  como  $L - D_1$ . Por lo tanto  $H'$  contiene a la imagen de  $D_2$  en  $\mathcal{S}'$ . Ahora todas las imágenes de las fibras tienen al  $(\Delta - c_2 - 1)$ -espacio  $R$  como lugar base. Por el lema 2.4.2 el número máximo de puntos es alcanzado cuando elegimos los restantes  $a = k - 2\Delta$  puntos de una fibra fija  $D_3$ . Usando la misma lógica como en el caso  $\Delta \leq k \leq 2\Delta$ , ahora aplicado a  $L - D$ , vemos que una elección óptima es elegir  $\min(a, c_2 - c_3)$  de los puntos en  $D_3$  sobre curvas directrices cuyos grados sean (y grado 2 cuando incluimos con  $L$  en lugar de  $L - D$ ). Aquí  $c_2 - c_3$  es el número de valores  $i$  tal que  $e_i = 2$ . Levantando de nuevo a  $\mathbb{P}$  vemos que un  $H$  óptimo contiene un subrollo de tipo  $(2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ , donde el número de 1's  $c_1 - c_2 = \Delta - c_2$  y el número de 2's es  $b = \min(a, c_2 - c_3)$ .

Paso (5) Si continuamos este argumento y estudiamos los sistemas lineales revisados  $L - 2D, L - 3D, L - 4D, \dots, L - uD$ , donde  $u$  es el máximo con  $c_u$  no cero, el sistema lineal no es necesariamente libre de puntos base y por lo tanto no mapea más que un subconjunto estricto de  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  en un espacio proyectivo. Sin embargo esto no es esencial para el problema que estudiamos. El sistema lineal completo  $L - sD$  tendrá al subrollo  $B_{s-1}$  formado por las curvas directrices con  $e_i < s$  como puntos base y este definirá un mapeo pero colapsa los puntos  $B_s - B_{s-1}$ . En cada paso los hiperplanos de  $\mathbb{P}^{N-1}$  que contienen  $s + 1$  fibras también contendrán a  $B_s$ . Encontrando los  $(k - 1)$ -espacios lineales que contienen

un número máximo de puntos de  $\mathcal{S}$ , pueden por el lema 2.4.2 ser reducidos para encontrar el número máximo de puntos de  $\mathcal{S}$  entre aquellos  $(k-1)$ -espacios los cuales contienen  $s+1$  fibras, cuando  $k$  sea lo suficientemente grande para que esto sea posible. Este análisis lo aplicaremos en el rango  $c_0 + c_1 + \cdots + c_s \leq k < c_0 + c_1 + \cdots + c_{s+1}$ , donde existe un  $(k-1)$ -espacio que contiene  $s+1$  fibras, pero ninguno contiene  $s+2$  fibras. Encontramos el  $(k-1)$ -espacio con un número máximo de puntos replicando el análisis para  $L$  y  $c_0 = \Delta \leq k < c_0 + c_1 = 2\Delta$ , para el sistema lineal  $L - sD$ . Así uno elige un  $(k'-1)$ -espacio  $H_1$  en  $\mathbb{P}^{N-1-(c_0+c_1+\cdots+c_{s-1})}$  que contiene una fibra completa de la imagen de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) - B_{s-1}$  y tantos puntos independientes como sea posible de una fibra adicional y entre aquellos hiperplanos que lo hacen, uno que contenga un subrollo máximo de tipo  $(1, \dots, 1)$  en la imagen de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) - B_{s-1}$ . Entonces  $H'$  corresponde a un  $(k-1)$ -espacio  $H$  en  $\mathbb{P}^{N-1}$ . El número de puntos en  $H$  de  $\mathcal{S}$  es como se indica en el teorema.

□

## Conclusiones

El objetivo principal de la tesis fue la construcción y obtención de las propiedades de una familia de variedades regladas: los rollos normales algebraicos. El resultado principal es la caracterización cohomológica de los rollos normales racionales, de la cual se da una demostración detallada, siguiendo la demostración original de Schreier [11]. Como una aplicación de este resultado, de naturaleza álgebra-geométrica, se muestra la construcción de un código álgebra-geométrico  $C \subseteq \mathbb{F}_q^K$ , siguiendo el artículo original de [3], utilizando la construcción geométrica introducida por Tsfasman y Vlăduț [13] por medio del lenguaje y propiedades de sistemas proyectivos no degenerados en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{K-1}$ . Para dicho código fue posible no sólo calcular la longitud de las palabras  $n$  y su dimensión  $K$ , sino que gracias al teorema principal fue posible calcular la *jerarquía de pesos*  $d_1 < d_2 < \dots < d_K$  del código  $C$ , encontrando el número máximo de puntos  $\mathbb{F}_q$ -racionales de una intersección del rollo normal racional  $\mathbb{S}$  y un subespacio lineal de una dimensión dada  $k - 1$  en  $\mathbb{P}^{K-1}$ , para  $k = 1, \dots, K$ . De lo anterior se obtuvo que la distancia mínima del código de rollo  $C$  esta dada por  $d = (q + 1 - e_1)q^{\Delta-1}$ .





# Apéndice A

Empezamos esta sección con la siguiente:

**Definición A.0.6.** Sea  $k$  un campo algebraicamente cerrado. Una prevariedad sobre  $k$  es un espacio topológico conexo  $X$  tal que existe cubierta abierta finita  $\{U_i : 1 \leq i \leq m\}$  de  $X$  tal que  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$  es una variedad algebraica afín, es decir,  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \cong (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ , con  $V_i \cong \mathbb{A}_k^{n_i}$ . Los  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$  que cubren  $X$  definen una gavilla  $\mathcal{O}_X$  en  $X$ .

En [5] se demuestra con todo detalle que  $\mathbb{P}_k^n$  es *prevariedad algebraica*, usando estos hechos mostramos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es prevariedad algebraica.

**Afirmación A.0.7.**  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es *prevariedad algebraica*.

DEMOSTRACIÓN. Por el ejemplo 2.3 en [5] tenemos que  $(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N})$  es prevariedad con cubierta abierta  $U_i = \mathbb{P}_k^N - V(x_i) \simeq \mathbb{A}_k^N$ . Ahora construimos una gavilla de funciones en  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  de la forma siguiente. Sea  $U \subseteq S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  cualquier abierto y defina

$$\mathcal{O}_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}}(U) = \{f/g \in k(S_{e_0, \dots, e_\Delta}) : gr(f) = gr(g), \text{ con } f, g \text{ polinomios} \\ \text{homogéneos tales que } f/g \text{ es regular en } U\}.$$

Además si  $V_i = S_{e_0, \dots, e_\Delta} \cap U_i, 0 \leq i \leq N$  son abiertos relativos de  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  los cuales lo cubren, entonces  $V_i \simeq S_{e_0, \dots, e_\Delta} \cap \mathbb{A}_k^N$  el cual es afín. Por el Lema 2.4 en [5] tenemos que  $\mathcal{O}_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}}$  es una gavilla de funciones regulares en  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$ .  $\square$

Dado que en geometría algebraica no se tiene como tal el concepto de ser Hausdorff, utilizaremos una de las siguientes equivalencias para analizar si los *rollos normales racionales* son variedades *separadas*.

De la topología general, para  $X$  un espacio topológico arbitrario las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $X$  es Hausdorff.
2. Para cualesquiera dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$ , el conjunto *igualador* de  $f$  y  $g$ ,  $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$  es cerrado en  $Y$ .
3. La *diagonal*  $\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X\}$  es cerrada en  $X \times X$ , con la topología producto.

Una prevariedad algebraica  $X$  se dice que es *separada* si para cualesquiera morfismos de prevariedades  $f, g : Y \rightarrow X$  el igualador  $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$  es cerrado en  $Y$ . Una prevariedad algebraica separada se llamaría una *variedad algebraica*.

**Proposición A.0.8.** *Una prevariedad algebraica  $X$  es separada si y sólo si la diagonal  $\Delta_X \subseteq X \times_k X$  es cerrada.*

Por la observación 1.4.14 tenemos que  $S_{e_0, \dots, e_\Delta} \subseteq \mathbb{P}^N$  es un conjunto cerrado, entonces  $\Delta_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}} \subseteq \mathbb{P}^N$  es un conjunto cerrado, sea  $\Delta_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}} = \Delta_{\mathbb{P}^N} \cap (S_{e_0, \dots, e_\Delta} \times_k S_{e_0, \dots, e_\Delta})$ . Entonces  $\Delta_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}} \subseteq \mathbb{P}^N \times_k \mathbb{P}^N$  es un conjunto cerrado, así como  $S_{e_0, \dots, e_\Delta} \times_k S_{e_0, \dots, e_\Delta} \subseteq \mathbb{P}^N \times_k \mathbb{P}^N$ , entonces  $\Delta_{\mathbb{P}^N} \cap (S_{e_0, \dots, e_\Delta} \times_k S_{e_0, \dots, e_\Delta})$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{P}^N \times_k \mathbb{P}^N$ . Por lo tanto  $\Delta_{S_{e_0, \dots, e_\Delta}} \subseteq S_{e_0, \dots, e_\Delta} \times_k S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es un conjunto cerrado, por lo tanto  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es una variedad separada, por lo tanto  $S_{e_0, \dots, e_\Delta}$  es una variedad algebraica.

Una variedad algebraica  $X$  se dice que es *completa* si para cualquier otra variedad algebraica  $Y$  el morfismo de proyección  $p_2 : X \times_k Y \rightarrow Y$  es una función cerrada.

**Proposición A.0.9.** (1) *Si  $X$  es completa y  $Y \subseteq X$  es cerrado, entonces  $Y$  es variedad completa.*

(2) *Si  $X$  y  $Y$  son variedades completas, entonces  $X \times_k Y$  es completa.*

(3) *Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de variedades algebraicas y  $X$  es completa, entonces  $f(X) \subseteq Y$  es cerrada y es una variedad completa.*

## Bibliografía

- [1] Arbarello, E., M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris., *Geometry of Algebraic Curves. Volume I*. Springer Verlag, New York, 1985.
- [2] Griffiths, P. and J. Harris., *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley, New York, 1978.
- [3] Hana, G. M. and T. Johnsen, “Scroll Codes”, *Designs, Codes and Cryptography*. **45** (2007), 365-377.
- [4] J. Harris., *Algebraic Geometry. A First Course*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [5] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [6] Hazewinkel, M. and C. Martin, “A Short Elementary Proof of Grothendieck’s Theorem on Algebraic Vector Bundles on the Projective Line”. *J. of Pure and App. Alg.* **25**, (1982), 207-211.
- [7] Kempf, G., “Schubert Methods with an Application to Algebraic Curves”, *Publications of Mathematicsch Zentrum*, Amsterdam, 1971.
- [8] Reid, M., “Rational Scrolls”. In *Complex Algebraic Geometry*, Editor J. Kollár. 19-31. AMS, Providence, 1997.
- [9] Rotman, J., *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, Inc., London, 1979.
- [10] Saint-Donat, B., “On Petri’s Analysis of the Linear Systems of Quadrics through a Canonical Curve”. *Math. Ann.*, **206**, 157-175, 1973.
- [11] Schreyer, F.-O., “Syzygies of Canonical Curves and Special Linear Series”. *Math. Ann.* **275**, 105-137, 1986.
- [12] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [13] Tsfasman, M. A. and S. G. Vlăduț, *Algebraic-Geometric Codes*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [14] Zaldívar, F., *Introducción a la geometría algebraica*.  
<https://fzaldivar.wordpress.com/2013/04/18/234/>