



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA UNIDAD IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---

**“Anábasis del Cuerpo Rígido”**

Tesis que para obtener el grado de doctor en ciencias (Física) presenta:

**Manuel de la Cruz López**

2151800754

Asesor

Dr. Román Linares Romero

Jurado

Dr. Eduardo Piña Garza, Presidente

Dr. Román Linares Romero, Secretario

Dr. Ricardo Méndez Fragoso, Vocal

Dr. José David Vergara Oliver, Vocal

Dr. Adrián Mauricio Escobar Ruíz, Vocal

*¡Perezoso mortal!, salva tu vida, cierra los párpados y ábrelos en otro mundo que está esperando ser creado por ti.*  
Mircea Cartarescu.

## Resumen

Se presenta una revisión exhaustiva de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  manifiesta en las ecuaciones que describen la dinámica del cuerpo rígido libre de torcas, llamadas ecuaciones de Euler. Este sistema tiene alta simetría debido a dos cantidades de movimiento con interpretación física: energía y momento angular, cuya dependencia funcional en las variables es de perfil cuadrático. Considerando solo grados de libertad rotacionales, el espacio de configuración del cuerpo rígido posee estructura de grupo  $SO(3)$  y puede contraerse en varios subgrupos vía la acción de  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre las cantidades de movimiento. Con este mecanismo, surgen sub álgebras asociadas como  $se(2)$  e  $iso(1,1)$ . El sistema posee varios esquemas analíticos para su descripción como los paréntesis de Lie-Poisson y la estructura de Nambu, ambas equivalentes. En el primer caso, tal estructura es la generalización de los paréntesis de Poisson a variedades grupo generales mientras que en el segundo caso, la mecánica de Nambu interpreta las cantidades de movimiento como hamiltonianos e introduce un paréntesis para  $n > 2$  funciones dinámicas. Permite además, una extensión del espacio fase a dimensión impar. En este contexto, es un hecho conocido que el espacio fase del cuerpo rígido puede reducirse mediante  $SL(2, \mathbb{R})$  al generado por el péndulo simple. En este trabajo se estudia este resultado con detalle analítico y geométrico bajo una parametrización en coordenadas elípticas que permite separar el hamiltoniano asociado a los grados de libertad rotacionales de la molécula asimétrica cuántica.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Cuerpo Rígido I. Generalidades</b>	<b>11</b>
1.1. Generalidades	11
1.2. Cinemática	12
1.3. Velocidad angular	13
1.3.1. Velocidad angular espacial	13
1.4. Tensor de inercia	14
1.5. Momento angular	14
1.6. Ecuaciones de Euler	15
1.7. La Construcción de Poinsot	15
1.8. Ángulos de Euler	16
1.8.1. Velocidad angular en ángulos de Euler	17
<b>2. Cuerpo Rígido II. Tópicos avanzados</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción	19
2.2. Grupos de Lie	19
2.2.1. Álgebra de Lie matricial	20
2.3. Acciones de grupo	20
2.3.1. Órbitas de grupo	21
2.3.2. Acciones de grupo sobre campos vectoriales	21
2.4. Sistemas hamiltonianos en parches coordenados	22
2.4.1. Paréntesis de Poisson	22
2.4.2. Campos vectoriales hamiltonianos	22
2.4.3. Funciones de estructura	23
2.4.4. Estructura Lie-Poisson	24
2.5. Bases de mecánica geométrica	26
2.5.1. Haz Cotangente	27
2.5.2. El grupo $SO(3)$	28
2.5.3. $AD$ , $Ad$ y $ad$ en $SO(3)$ y sus álgebras	29
2.5.4. Paréntesis de Lie-Poisson en variedades de Poisson	29
2.6. Paréntesis de Lie-Poisson y el cuerpo rígido	32
2.6.1. Reducción de Lie-Poisson	33
2.6.2. Ecuaciones de Euler	33
2.6.3. Reducción de la dinámica	34
2.7. Estructura de Nambu del cuerpo rígido	34
2.8. Fibrado de Hopf	36
2.8.1. Fase geométrica	36

<b>3. Clasificación de la simetría de norma <math>SL(2, \mathbb{R})</math> en las ecuaciones de Euler</b>	<b>39</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	39
3.2. El cuerpo rígido . . . . .	39
3.3. Funciones de Casimir . . . . .	40
3.4. Geometría de las funciones de Casimir . . . . .	43
3.4.1. Cuerpos rígidos asimétricos . . . . .	44
3.4.2. Cuerpos rígidos simétricos . . . . .	45
3.4.3. Ecuaciones de Euler adimensionales y soluciones . . . . .	46
3.5. Simetría $SL(2, \mathbb{R})$ de las ecuaciones de Euler . . . . .	48
3.6. Clasificación de las transformaciones de norma $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	50
3.7. A. Bianchi IX o $so(3)$ : $c = 0, d \neq 0$ . . . . .	50
3.7.1. Casos asimétricos $D_2 \subset SO(3)$ . . . . .	51
3.7.2. Casos simétricos $SO(2) \subset SO(3)$ . . . . .	53
3.8. B. Casos: $c \neq 0$ y $d = 0$ . . . . .	53
3.8.1. Caso Bianchi $VI_0$ . . . . .	54
3.9. Caso $c \neq 0, d \neq 0$ . . . . .	54
3.9.1. Casos Bianchi IX y VIII asimétricos . . . . .	54
3.9.2. Bianchi VIIo y VIo asimétricos . . . . .	55
3.9.3. Límites simétricos oblatos ( $e_1 = e_2$ ) . . . . .	55
3.9.4. Límites simétricos prolato ( $e_2 = e_3$ ) . . . . .	55
<b>4. Reducción simpléctica del cuerpo rígido bajo <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>	<b>57</b>
4.1. Introducción . . . . .	57
4.2. Cuerpo rígido y péndulo . . . . .	57
4.2.1. Integrales de movimiento en parámetros $e_i$ . . . . .	60
4.3. El péndulo . . . . .	61
4.3.1. Péndulo en tiempo real y sus soluciones . . . . .	61
4.3.2. Péndulo en tiempo imaginario . . . . .	63
4.4. El péndulo desde el cuerpo rígido extendido ( $c \neq 0$ y $d \neq 0$ ) . . . . .	64
4.4.1. Intersección de dos cilindros elípticos . . . . .	65
4.4.2. Intersección de cilindro hiperbólico y cilindro elíptico I . . . . .	69
4.4.3. Intersección de cilindro hiperbólico y elíptico II . . . . .	72
4.5. El péndulo desde el cuerpo rígido extendido ( $c \neq 0$ and $d = 0$ ) . . . . .	74
<b>5. Tópicos derivados de la investigación</b>	<b>75</b>
5.1. Introducción . . . . .	75
5.2. Cuerpo rígido como campo de control en sistemas de dos niveles . . . . .	76
5.2.1. Fase de Berry y monopolos . . . . .	76
5.2.2. Cuerpo rígido y sistema de dos niveles . . . . .	77
5.2.3. Pulso Allen-Eberly y reducción simpléctica . . . . .	81
5.2.4. Usando $SL(2, \mathbb{R})$ en teoría de control . . . . .	82
5.3. Decoherencia cuántica como término inestable en las ecuaciones de Euler . . . . .	84
5.3.1. Control de trayectorias en la Esfera de Bloch . . . . .	85
5.3.2. Caso B para un sistema abierto . . . . .	86
5.3.3. Ejemplo de ecuación maestra . . . . .	87
5.3.4. Adición de términos lineales al cuerpo rígido de Lagrange . . . . .	88
5.3.5. El Péndulo de Foucault y su fase geométrica . . . . .	90
5.4. Otras reducciones simplécticas . . . . .	90
5.4.1. Mapeo de momento para el álgebra $so(1, 1)$ . . . . .	90

5.4.2. Mapeo de momento elíptico para el álgebra $iso(2)$ . . . . .	92
5.5. El grupo de Heisenberg y un corolario . . . . .	93
5.5.1. Comentarios sobre el grupo de Heisenberg . . . . .	94
5.5.2. Un pequeño corolario . . . . .	95
5.5.3. Sistemas hamiltonianos generalizados en $O(K)^*$ . . . . .	96
5.6. La Simetría $\mathcal{PT}$ del cuerpo rígido . . . . .	97
5.7. Motivaciones en trabajos posteriores . . . . .	99
5.7.1. Aplicaciones de las funciones elípticas en el marco de la Física moderna . . . . .	101
<b>Conclusiones generales</b>	<b>103</b>
<b>Apéndices</b>	<b>106</b>
<b>A. Funciones elípticas</b>	<b>107</b>
A.1. Funciones elípticas de Jacobi . . . . .	108
A.2. Funciones elípticas de Weierstrass . . . . .	109
A.3. Funciones elípticas y el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ . . . . .	113
A.4. Grupo modular . . . . .	113
A.5. Red doble . . . . .	114
A.6. Transformaciones modulares sobre funciones de Jacobi . . . . .	114
<b>B. Soluciones explícitas de la ecuación de Euler</b>	<b>116</b>
<b>C. El Péndulo</b>	<b>118</b>
C.1. El péndulo y las funciones Elípticas . . . . .	118
C.2. Integral elíptica en formalismo hamiltoniano . . . . .	119
C.3. Integral elíptica en formalismo lagrangiano . . . . .	120
C.4. Soluciones reales para el péndulo . . . . .	121
C.5. Rotación de Wick e inversión de fuerzas . . . . .	121
C.5.1. Soluciones imaginarias . . . . .	122
<b>Agradecimientos</b>	<b>123</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>

# Introducción

El péndulo simple y el cuerpo rígido libre de torcas son sistemas físicos bien entendidos, tanto en mecánica clásica como su contraparte cuántica. El primer estudio sistemático del péndulo se le atribuye a Galileo Galilei alrededor de 1602 y su descripción dinámica culmina con el desarrollo de las funciones elípticas por Abel [1] y Jacobi [2; 3] que son soluciones analíticas a las ecuaciones de movimiento<sup>1</sup>. En la versión cuántica de este sistema, las soluciones analíticas a la ecuación de Schrödinger son funciones de Mathieu originalmente propuestas por Condon en 1928 [4]. Desarrollos subsecuentes de los diferentes aspectos de este sistema cuántico pueden consultarse en [5; 6]. Por otro lado, en 1758, L. Euler [7] mostró que las ecuaciones de movimiento que describen la rotación de un cuerpo rígido están descritas por una ecuación diferencial de primer orden cuasi lineal vectorial y también tiene como soluciones funciones elípticas. Una descripción geométrica de las soluciones fue dada por Poincaré [8]<sup>2</sup>. La cuantización del cuerpo rígido fue abordado por primera vez por Kramers e Ittman [9] y desde entonces, muchos autores han contribuido al entendimiento de los diferentes aspectos dinámicos del problema [10; 11; 12; 15; 16; 17; 18; 19].

A pesar de la longevidad de estos desarrollos, se siguen descubriendo nuevos aspectos físicos o nuevas interpretaciones de estos sistemas que contribuyen al entendimiento de la Física en general y de la mecánica en particular. A este respecto, basta recordar que la teoría moderna de campos desarrolla los campos asociados a partículas como un conjunto infinito de osciladores armónicos acoplados en el régimen sin interacción. El oscilador armónico a su vez, constiuye el régimen de oscilaciones pequeñas del sistema del péndulo y éste, en un arreglo acoplado de  $n$  miembros, tienen como límite continuo, la ecuación de sine-Gordon. Citando otros ejemplos: i) En 1973, Y. Nambu propuso una generalización de la mecánica hamiltoniana clásica usando como principio guía el teorema de Liouville [20]. Extendiendo el espacio fase (usualmente de dimensión par) a dimensiones impares, se puede construir un nuevo paréntesis  $n$ -dimensional completamente antisimétrico usando dos o más *hamiltonianos*. Nambu aplicó este formalismo al cuerpo rígido. ii) En 1995, R. Montgomery [21] calculó el cambio en la fase geométrica en el curso de la dinámica cíclica del cuerpo rígido en donde el vector de momento angular en el marco del cuerpo realiza un periodo en su movimiento. iii) Guiado por Deprit [22] y usando la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  de las ecuaciones de Euler, en 1991 Holm y Marsden construyen un nuevo hamiltoniano para ciertos sistemas dinámicos llamados en la literatura *cuerpos rígidos extendidos* que pueden escribirse como sistemas Lie-Poisson con diferentes estructuras en el álgebra de Lie asociada como  $so(3)$ ,  $iso(2)$  o  $heis_3$  [23]. Particularmente interesante es el caso  $iso(2)$  donde el espacio fase del cuerpo rígido está codificado con cilindros elípticos invariantes en los cuales la dinámica (en coordenadas elípticas) es la del péndulo simple estándar. Por último, en años recientes, la rotación clásica del cuerpo rígido es usada como campos de control en sistemas cuánticos de dos niveles en presencia de pulsos electromagnéticos externos [24]. En particular, los autores muestran que la dinámica del cuerpo rígido puede utilizarse para implementar compuertas cuánticas de un cubit.

En este trabajo estamos interesados en explorar con mayor profundidad la relación existente entre

---

<sup>1</sup>Para una revisión de las funciones elípticas veáse por ejemplo [122; 131; 132; 112] y [133; 134; 28].

<sup>2</sup>Para una descripción de la geometría de las soluciones, veáse [55; 61].

el cuerpo rígido y el péndulo simple. Respecto a esta relación, en [23] se muestra que las álgebras de Lie del cuerpo rígido son  $so(3)$  e  $iso(2)$ . También se presenta el álgebra de Heisenberg,  $heis_3$ , para el caso simétrico (dos momentos de inercia iguales). A su vez, muestran que esta estructura de álgebras puede observarse desde un punto de vista geométrico; ya que las integrales de movimiento del cuerpo rígido (que en esta tesis llamaremos *funciones Casimir*) corresponden a superficies 3-dimensionales en el espacio generado por las componentes de momento angular. La dinámica ocurre en la intersección de estas dos superficies que representan un elipsoide (energía) y una esfera (momento angular). Al aplicar la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  a las funciones de Casimir, su perfil geométrico cambia. El álgebra  $iso(2)$  se asocia a un perfil de cilindros elípticos donde la intersección permanece invariante ante esta transformación, pues ahí ocurre la dinámica. Las álgebras que menciona [23] son aquellas reglas de conmutación de los generadores hamiltonianos.

Por otro lado, el cuerpo rígido representa la dinámica a nivel clásico de una molécula rotante, es decir, sin considerar grados de libertad vibracionales. Al desarrollar la teoría cuántica para obtener el espectro rotacional y energético de una molécula completamente asimétrica, se requiere expresar el hamiltoniano del sistema en una parametrización que permita separar el hamiltoniano en componentes radiales y angulares. En el caso esférico, se entiende bien como hacerlo, siendo los armónicos esféricos los adecuados para representar las eigenfunciones relativas a la parametrización del espacio en coordenadas de Euler. Sin embargo, en el caso de la molécula asimétrica, es conocido en la literatura que se requiere una parametrización diferente, a saber, coordenadas esferoconales o elípticas. El hamiltoniano se expresa entonces utilizando estas coordenadas que permiten separar el operador hamiltoniano. Para lograrlo, se requiere a su vez definir los parámetros  $e_i$ , con  $i = 1, 2, 3$  y  $P$  llamados *parámetros de inercia* y *magnitud de asimetría*, respectivamente. Con estos parámetros, podemos aislar el hamiltoniano relativo a la energía cinética del cuerpo rígido y separarlo en coordenadas esferoconales. Se sugiere al lector, revisar [16; 17; 18; 19] para detalles de lo expuesto en este parrafo.

En esta tesis por lo tanto, usamos tal parametrización para estudiar la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  del cuerpo rígido. A diferencia de [23], en esta parametrización, las funciones de Casimir generan más superficies bajo la acción de esta simetría. A su vez, pudimos considerar transformaciones con parámetros complejos ( $\mathbb{C}$ ) para obtener el espacio fase del péndulo. Una de las ventajas de trabajar con los parámetros descritos líneas arriba es que es posible establecer una correspondencia explícita entre las soluciones a las ecuaciones de Euler con movimiento oscilatorio y circular. Esta conexión no fue mostrada en el artículo original [23] y se explica en este trabajo.

Nambu aplicó su teoría a sistemas bien conocidos en mecánica clásica y cuántica, a saber, el cuerpo rígido libre de torcas. En este sistema el espacio fase es 3-dimensional generado por las componentes del momento angular  $\mathbf{\Pi}$  en el sistema del cuerpo. Dos funciones hamiltonianas (funciones Casimir) son la energía cinética total  $E$  y el cuadrado del momento angular  $\mathbf{\Pi}^2 \equiv G$ . Las ecuaciones de Euler  $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{\Pi})$  se expresan como<sup>3</sup>  $\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, E, G\} = \nabla \Pi_i \cdot (\nabla E \times \nabla G)$ . En este formalismo el problema es manifiestamente invariante bajo transformaciones canónicas lineales que codifican el grupo  $SL(3, \mathbb{R})$  y bajo combinaciones lineales de las funciones de Casimir que codifican el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Nambu llamó a estas últimas *transformaciones de norma*. Se reconoce el trabajo de Nambu, entre otras cosas, por el hecho de que permite describir la evolución de un sistema dinámico con un número de constantes mayor que el mínimo requerido en la formulación canónica respetando su integrabilidad (véase [29; 30] y las referencias que allí se muestran). Importante para este trabajo es la posibilidad de geometrizar la teoría de Nambu en términos de *variedades Nambu-Poisson*[31; 75]. En particular, la estructura de Nambu está relacionada con el jacobiano asociado al elemento de volumen cuyo determinante (en un espacio de dimensión más

---

<sup>3</sup>Los gradientes son derivadas respecto a las componentes de momento angular, i.e,  $\nabla \equiv \hat{\Pi}_i g^{ik} \frac{d}{d\Pi_k}$ .

alta) hace posible el formalismo para objetos extendidos. Esta propiedad ha sido explotada para la cuantización de los paréntesis de Nambu [35] en búsqueda de una formulación natural en teoría M (véase [38; 41; 40; 36; 39] y sus referencias). No menos importante son los intentos de dilucidar la relación que existe entre los paréntesis de Nambu y las matemáticas, como geometría algebraica y teoría de grupos [42].

Con el objetivo último de cuantizar el cuerpo rígido en un espacio fase 3-dimensional, Nambu identificó las diferentes estructuras de Lie para los generadores cuánticos obteniendo que el sistema incluye el álgebra  $so(4)$  y aquellas relacionadas mediante contracciones de grupo. En otras palabras, los generadores de las álgebras de Lie son los correspondientes a los diferentes subgrupos de  $SL(3, \mathbb{R})$ . En el caso  $iso(2)$ , el espacio fase del cuerpo rígido es exhaustivamente descrito con cilindros invariantes intersectados en los cuales la dinámica en un parche coordinado con funciones elípticas, es la dinámica del péndulo simple estándar. En nuestro trabajo, se halla el caso del álgebra  $iso(1, 1)$  como posible estructura Lie-Poisson.

Como resultado de nuestro análisis, hemos identificado esta álgebra como posible estructura Lie-Poisson para un cuerpo extendido asimétrico y mostramos que esta álgebra no es posible para el caso simétrico. Incluimos también las formas explícitas de los generadores de las posibles álgebras de Lie. Esta contribución atiende este vacío en la descripción completa del sistema. Utilizamos en nuestra discusión la nomenclatura usada por Bianchi [33] para clasificar todos los isomorfismos de un álgebra de Lie 3-dimensional. Finalmente, consideramos muy interesante encontrar la relación entre la dinámica de Nambu y algunos resultados recientes en el área de física atómica y los espectros rotacionales de la molécula asimétrica [17; 34].

Relevante para nuestra discusión es el método geométrico introducido por Poincot (ver capítulo 1) para visualizar el movimiento del vector de momento angular que, para el caso del cuerpo rígido, toma lugar en la intersección del elipsoide de energía  $E$  y la esfera de momento angular  $G$ . Esta construcción permite incorporar naturalmente la formulación de Nambu pues  $\dot{E} = 0 = \dot{G}$  y por tanto ambas cantidades son constantes de movimiento. En otras palabras, la órbita del sistema en el espacio fase está determinada por la intersección de estas dos superficies. Analíticamente, la parametrización de estas intersecciones está dada en términos de funciones elípticas (véase apéndice A) cuyos módulos dependen sólo de los parámetros  $e_i$  (ver [16]). En estas coordenadas puede efectuarse la cuantización del cuerpo rígido asimétrico [9; 59; 11; 12]. La geometría de  $E$  es reemplazada por una función de Casimir  $h$  con perfil de hiperboloide elíptico que puede tener uno o dos mantos dependiendo del parámetro  $2E/G$ . También permite perfil de cono elíptico o cilindro hiperbólico en situaciones límite. Esta riqueza geométrica que permite la función hamiltoniana  $h$  (bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ ), concede más posibilidades geométricas en el contexto de la construcción de Poincot. En este sentido, nuestro trabajo es semejante al realizado por [68] para el sistema Maxwell-Bloch en óptica cuántica.

- Presentamos una lista de lo realizado en este trabajo:

**T.1** Revisión exhaustiva de la simetría de norma  $SL(2, \mathbb{R})$  en las ecuaciones de Euler y sus contracciones de grupo.

**T.2** Uso de una parametrización útil en la descripción de la molécula asimétrica, que permite una visualización geométrica del procedimiento propuesto en [23] en un enfoque más completo.

**T.3** Énfasis en la separabilidad de los operadores cuánticos del cuerpo rígido en esta parametrización y

posibles rutas para cuantización del sistema con  $SL(2, \mathbb{R})$  incorporado.

**T.4** Descripción algebraica y geométrica del subgrupo  $iso(1,1)$  en el contexto de la dinámica del cuerpo rígido.

**T.5** Condiciones generales en los generadores hamiltonianos para obtener el álgebra  $heis_3$  a partir de integrales de movimiento cuadráticos.

**T.6** Transformaciones  $SL(3, \mathbb{R})$  que reducen simplécticamente el cuerpo rígido a otros sistemas análogos al péndulo.

**T.7** El cuerpo rígido y su reducción al péndulo como campo de control en el Pulso Allen-Eberly en sistemas cuánticos de dos niveles.

**T.8** Contracciones de  $SO(3)$  y su clasificación geométrica dentro de la dinámica que describen las ecuaciones de Euler.

- Algunas preguntas planteadas en este trabajo son las siguientes:

**P.1** ¿Es la clasificación de [23] completa en términos de reducciones del espacio fase?

**P.2** ¿Es posible implementar transformaciones canónicas con variable compleja en este procedimiento?

**P.3** ¿Bajo qué condiciones, un sistema con integrales de movimiento da lugar a un álgebra específica en sus generadores hamiltonianos?

**P.4** ¿Que grado de actualidad tiene el estudio del cuerpo rígido y específicamente las ecuaciones de Euler?

**P.5** ¿Cuáles son las condiciones para que un sistema dinámico admita un parentesis de Lie-Poisson y su correspondiente mecanismo de reducción del espacio fase?

## Organización de la Tesis

Esta tesis está organizada como sigue. En el capítulo 1 se presentan tópicos básicos del sistema del cuerpo rígido con énfasis en el marco de referencia anclado al cuerpo, la construcción de Poincot y los momentos de inercia. En el segundo capítulo se exponen tópicos de mecánica geométrica, grupos y álgebras de Lie que sustentan la teoría del cuerpo rígido a nivel más general, muchos de los cuales se requieren para el estudio de los siguientes capítulos 3, 4 y 5. El capítulo 3 trata las geometrías asociadas a estas reducciones pendulares plasmadas en el primer artículo publicado. En capítulo 4 detalla la relación entre el péndulo y el cuerpo rígido usando los paréntesis de Lie-Poisson y constituye otro artículo publicado. El capítulo 5 presenta algunas ideas exploradas durante la estancia doctoral que a juicio del autor pueden marcar nuevas rutas de investigación. Algunos apéndices exponen tópicos de física relacionada al cuerpo general de la tesis y que sirven como referencia.

# Capítulo 1

## Cuerpo Rígido I. Generalidades



W. Pauli y N. Bohr maravillados con el trompo simétrico.

En este capítulo describimos las ideas básicas en la construcción y descripción de la dinámica del cuerpo rígido libre de torcas. Se enfatizan las construcciones de Poinsot y la obtención de las ecuaciones de Euler mediante la constancia del momento angular del sistema. Se establecen los marcos de referencia adecuados para la descripción dinámica y se esboza la parametrización de la matriz de rotación en coordenadas de Euler. En el apéndice C se pone de manifiesto la integral elíptica cuya integración son las soluciones a las ecuaciones de movimiento de Euler expresadas en funciones elípticas (apéndice B). Este capítulo está basado principalmente en [43; 47; 55].

### 1.1. Generalidades

Un cuerpo rígido puede pensarse como un objeto extendido que rota libremente en el espacio. Los objetos rígidos son considerados sin grados de libertad internos y pueden describirse como una colección de  $N$  puntos constreñidos a mantener invariante sus distancias relativas durante el curso de su evolución temporal, es decir  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = c_{ij}$  para cualquier  $i, j = 1, \dots, N$ , siendo  $c_{ij}$  una cantidad constante. Al pasar al continuo debemos reemplazar la suma de masas por una integración de una función de densidad de masa sobre un volumen:  $\sum_i \mapsto \int_{vol} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})$ . En el espacio euclidiano  $3 + 1$  dimensional, el cuerpo rígido tiene *seis*

*grados de libertad*, tres de ellos traslacionales y el resto rotacionales. El movimiento más general de un cuerpo rígido involucra entonces, una traslación en el espacio como un todo y una rotación alrededor de un punto del cuerpo.

## 1.2. Cinemática

Sea un punto  $P$  del cuerpo. Para describir la rotación alrededor de  $P$  requerimos dos marcos de referencia: *marco espacial fijo*, generado por la base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$  y *marco atado al cuerpo*, con base  $\{\mathbf{e}_a\}$ . De esta manera  $\{\mathbf{e}_a\}$  se mueve con el cuerpo como se muestra en la figura 1.1.

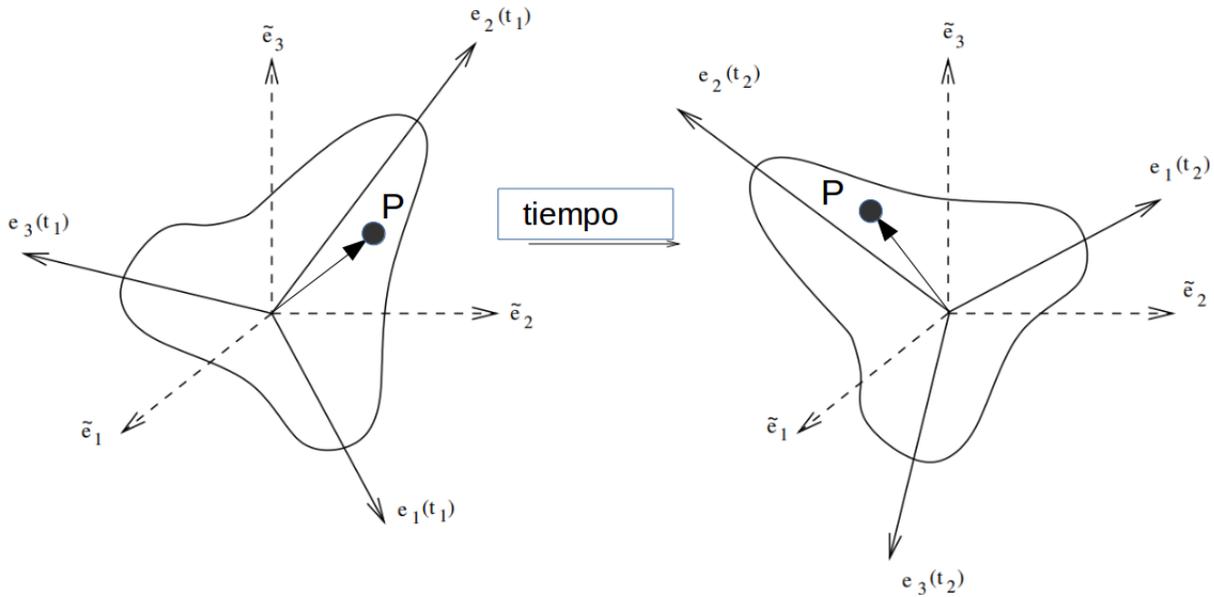


Figura 1.1: Relación entre el marco del cuerpo y el marco espacial.

Afirmemos que las bases son ortogonales y unitarias. Siempre será posible entonces, hallar una matriz  $R(t)$  que relacione linealmente los elementos de ambas bases. Es decir,  $\mathbf{e}_a(t) = R_{ab}(t)\tilde{\mathbf{e}}_b$ <sup>1</sup>. Así pues, la rotación del cuerpo rígido está descrita por una matriz  $3 \times 3$  con la propiedad de que su determinante es igual a la unidad<sup>2</sup>. El espacio de configuración del sistema (rotaciones únicamente) consta de el *grupo* de matrices que dejan invariante la norma de un vector:  $G = SO(3)$ <sup>3</sup>.

Sin embargo, el requerimiento  $R^T R = 1$  que representa la ortogonalidad de la rotación o invariancia de la norma del vector, impone seis constricciones en las nueve componentes de la matriz; dejando sólo tres componentes independientes que parametrizan el espacio de configuración<sup>4</sup>.

<sup>1</sup>Los índices repetidos indican suma, de acuerdo al convenio de Einstein

<sup>2</sup>La otra posibilidad es que sea determinante  $-1$  que representaría una rotación y una reflexión en las componentes de los vectores base  $\mathbf{e}_a \mapsto -\mathbf{e}_a$ .

<sup>3</sup>El capítulo (2) se enfoca en estudiar este grupo bajo el contexto de mecánica geométrica.

<sup>4</sup>Por ejemplo, los tres ángulos de Euler.

### 1.3. Velocidad angular

Todo punto  $\mathbf{r}$  del cuerpo admite un desarrollo lineal en componentes de los dos marcos de referencia,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \tilde{r}_a(t)\tilde{\mathbf{e}}_a && \text{marco espacial} \\ &= r_a\mathbf{e}_a(t) && \text{marco del cuerpo,}\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $\tilde{r}_b(t) = r_a R_{ab}(t)$ . Tomando derivadas temporales,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\tilde{r}_a}{dt}\tilde{\mathbf{e}}_a && \text{marco espacial} \\ &= r_a \frac{d\mathbf{e}_a(t)}{dt} && \text{marco del cuerpo} \\ &= r_a \frac{dR_{ab}}{dt}\tilde{\mathbf{e}}_b.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Alternativamente podemos preguntarnos cómo cambia temporalmente la base misma,

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \frac{dR_{ab}}{dt}\tilde{\mathbf{e}}_b = \frac{dR_{ab}}{dt}R_{bc}^{-1}\mathbf{e}_c \equiv \omega_{ac}\mathbf{e}_c,\tag{1.3}$$

donde en la última igualdad hemos definido la matriz  $\omega_{ac} \equiv \dot{R}_{ab}(R^{-1})_{bc} = \dot{R}_{ab}R_{cb}$  usando la propiedad  $R^T R = 1$ . La matriz  $[\omega]$  es antisimétrica debido a la ortogonalidad de  $R$  y por ello podemos definir un objeto de un solo índice con estructura de vector, a saber

$$\omega_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega_{bc},\tag{1.4}$$

de manera que  $\omega_3 = \omega_{12}$ , etc. Las componentes  $\omega_a$  son tratadas como componentes de un vector en el marco del cuerpo, así que  $\boldsymbol{\omega} = \omega_a\mathbf{e}_a$  y el ritmo de cambio de la base en términos de  $\boldsymbol{\omega}$  es

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = -\epsilon_{abc}\omega_b\mathbf{e}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a,\tag{1.5}$$

donde hemos asumido un sistema dextrógiro  $\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = \epsilon_{abc}\mathbf{e}_c$ . El vector  $\boldsymbol{\omega}$  es la *velocidad angular instantánea* medida respecto al marco del cuerpo.

#### 1.3.1. Velocidad angular espacial

Es posible definir otro tipo de velocidad angular observando la variación de las coordenadas del marco espacial en el tiempo. En vista de que  $\tilde{r}_b(t) = r_a R_{ab}(t)$  podemos proceder como la sección anterior y calcular

$$\dot{\tilde{r}}_b = r_a \dot{R}_{ab} = \tilde{r}_a (R^{-1}\dot{R})_{ab}\tag{1.6}$$

donde podemos definir  $\Omega_{ab} = R_{ac}^{-1}\dot{R}_{cb}$  y llamarla *velocidad angular convectiva*, que da cuenta de la rotación en el marco espacial. Notar el orden de aparición de las matrices  $R$  en esta definición y comparar con  $\boldsymbol{\omega} = \dot{R}R^{-1}$  de la velocidad angular en el marco del cuerpo.

Finalizamos la sección mencionando que la matriz  $R$  es un miembro del *grupo de Lie*  $SO(3)$ , el espacio de matrices ortogonales  $3 \times 3$  de determinante uno. La matriz antisimétrica de velocidad angular,  $[\omega]$ , corresponde a rotación infinitesimal e instantánea que es un elemento del *álgebra de Lie*  $so(3)$  como veremos en el capítulo 2.

## 1.4. Tensor de inercia

Considerando al centro de masas anclado al origen de coordenadas, la energía cinética de un cuerpo rígido puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - (r_i \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \right).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

O bien, definiendo el *tensor de inercia*

$$I_{ab} \equiv \sum_i m_i \left( (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \delta_{ab} - (\mathbf{r}_i)_a (\mathbf{r}_i)_b \right) \tag{1.8}$$

completamente simétrico; la energía cinética adopta la forma

$$T = \frac{1}{2} \omega_a I_{ab} \omega_b. \tag{1.9}$$

Las componentes de (1.8) son independientes del tiempo ya que están medidos respecto al marco del cuerpo. Para un cuerpo continuo con función de densidad de masa, tenemos

$$I = \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Esta matriz es real y simétrica y por tanto diagonalizable. Sea la matriz ortogonal  $O$  que verifica  $OIO^T = I'$  donde  $I'$  es diagonal. Entonces, al rotar los ejes  $\{\mathbf{e}_a\}$  para que coincidan con los eigenvectores de  $I$  (que son  $\{O\mathbf{e}_a\}$ ), en este marco, el tensor de inercia es diagonal. Este sistema de ejes en el cuerpo que diagonaliza  $I$  son llamados *ejes principales de inercia*. En tal base,

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Los eigenvalores  $I_a$  son llamados *momentos principales de inercia* y son reales positivos. Las propiedades cinemáticas del cuerpo rígido están completamente determinadas por su masa, ejes principales y momentos de inercia, es decir, siete parámetros independientes. En este trabajo utilizaremos, no obstante, una parametrización diferente que deja libres dos parámetros; véase capítulos (3 y 4).

## 1.5. Momento angular

El momento angular del cuerpo rígido  $\boldsymbol{\Pi}$  alrededor de un punto  $P$ , puede describirse en términos del tensor de inercia. Partiendo de la definición de momento angular tenemos

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Pi} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\
 &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\
 &= \sum_i m_i \left( r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i \right) \\
 &= I \boldsymbol{\omega}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

En el marco del cuerpo, podemos escribir  $\boldsymbol{\Pi} = \Pi_a \mathbf{e}_a$  para obtener

$$\Pi_a = I_{ab} \omega_b, \tag{1.13}$$

donde  $\boldsymbol{\omega} = \omega_a \mathbf{e}_a$ . En general, el vector  $\boldsymbol{\omega}$  no es igual a  $\boldsymbol{\Pi}$ .

## 1.6. Ecuaciones de Euler

Ignorando el movimiento traslacional de un cuerpo rígido para concentrarnos en la rotación pura, podemos afirmar que, durante la evolución de la rotación, el momento angular se conserva<sup>5</sup>,

$$\vec{0} = \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \frac{d\Pi_a}{dt}\mathbf{e}_a + \Pi_a \frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \frac{d\Pi_a}{dt}\mathbf{e}_a + \Pi_a \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a. \quad (1.14)$$

La última expresión del lado derecho se simplifica si elegimos que el marco del cuerpo  $\{\mathbf{e}_a\}$  coincida con los ejes principales. Usando  $\Pi_a = I_{ab}\omega_b$  se tiene  $\Pi_1 = I_1\omega_1$ , etc. La expresión (1.14) nos permite escribir entonces

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) &= 0, \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

que son las *ecuaciones de Euler*. Las soluciones de (1.15) más generales involucran funciones elípticas.

## 1.7. La Construcción de Poincot

En virtud de la complejidad de las soluciones a las ecuaciones de Euler, existe una manera geométrica muy adecuada para describir el movimiento del cuerpo rígido, debida a Poincot [8]. Consideremos el referencial del cuerpo. En él, existen dos constantes de movimiento, la energía cinética  $T$  y la magnitud del momento angular  $\mathbf{\Pi}^2$ . En términos de la velocidad angular, tenemos

$$\begin{aligned} 2T &= I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \\ \mathbf{\Pi}^2 &= I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Estas ecuaciones definen un elipsoide en el espacio generado por  $\boldsymbol{\omega}$ . La dinámica de  $\boldsymbol{\omega}$  está constreñida a permanecer en la intersección de estos dos elipsoides, el primero de ellos definido como

$$\frac{I_1}{2T}\omega_1^2 + \frac{I_2}{2T}\omega_2^2 + \frac{I_3}{2T}\omega_3^2 = 1 \quad (1.17)$$

llamado *elipsoide de inercia*. Fijando la energía a cierto valor permisible, podemos pensar a este elipsoide como embebido dentro del objeto, rotando con él. El elipsoide de inercia de la figura (1.2) muestra las líneas de intersección entre ambas superficies para varios valores de  $\mathbf{\Pi}^2$ . Para valores fijos de las dos constantes de movimiento, el vector  $\boldsymbol{\omega}$  se mueve sobre las intersecciones. Esto proporciona una demostración pictórica del siguiente hecho: un objeto gira de manera estable alrededor de un eje principal con el mayor y menor momento de inercia, pero *no* alrededor del eje intermedio en este caso, el codificado por  $I_2$ <sup>6</sup>. La trayectoria de  $\boldsymbol{\omega}$  se conoce como curva *polhode* y son siempre cerradas pues el movimiento del cuerpo rígido es periódico.

En el marco espacial, el vector  $\mathbf{\Pi}$  es constante de movimiento y también  $2T = \mathbf{\Pi} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Esto sugiere que  $\boldsymbol{\omega}$  debe restringirse a un plano perpendicular a  $\mathbf{\Pi}$ , llamado *plano invariante*. El elipsoide de inercia toca el plano invariante en un punto definido por  $\boldsymbol{\omega}$ . Además, el plano invariante es siempre tangente al elipsoide de inercia en el punto  $\boldsymbol{\omega}$  debido a que el vector de momento angular, que podemos escribir como

$$\mathbf{\Pi} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T, \quad (1.18)$$

<sup>5</sup>Un cuerpo libre de torcas conserva su momento angular debido a la invariancia ante rotaciones de las ecuaciones de Newton según lo establece el teorema de Noether.

<sup>6</sup>Las propiedades de estabilidad se pueden analizar analíticamente. Sin embargo no es el propósito de este trabajo. Para detalles véase ([55; 47]).

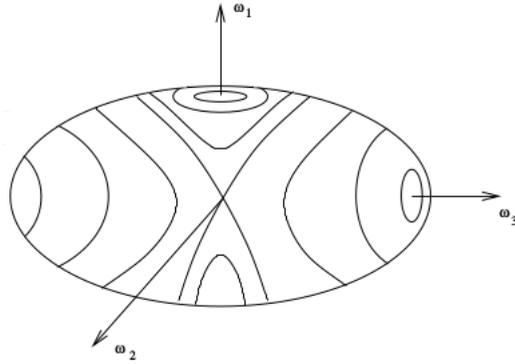


Figura 1.2: Elipsoide de inercia en la construcción de Poincaré. Aquí  $I_1 > I_2 > I_3$  y el eje mayor está generado por  $\omega_3$ . EL vector  $\omega$  rota siguiendo las líneas que se muestran. El movimiento es periódico en torno a  $\omega_1$  y  $\omega_3$ , son estables pero no así para  $\omega_2$ .

nos indica que  $\Pi$  es perpendicular al elipsoide como consecuencia de las propiedades del vector gradiente en el espacio  $\omega^7$ . Se sugiere consultar la figura (1.3).

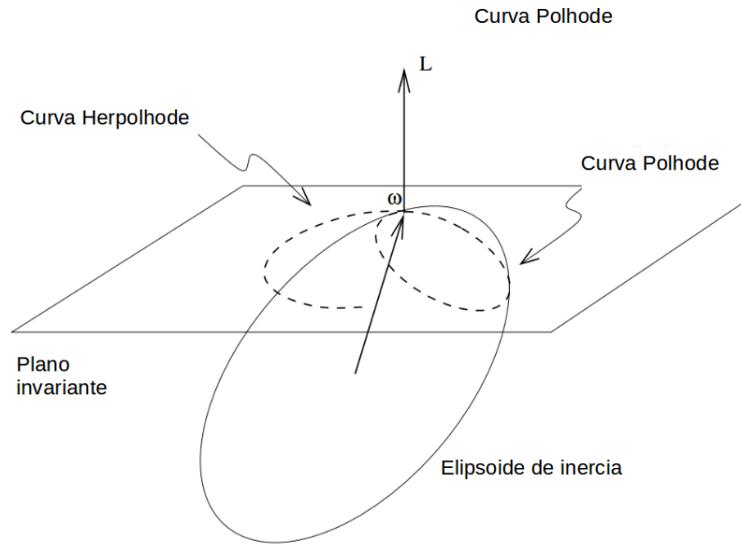


Figura 1.3: Movimiento del elipsoide de inercia sobre el plano invariante en el marco espacial.

La curva que traza  $\omega$  en el plano invariante es llamada *curva herpolhode* que a diferencia de la curva polhode no es necesariamente cerrada.

## 1.8. Ángulos de Euler

Como se mencionó en secciones anteriores, el espacio de configuración del cuerpo rígido puede ser parametrizado por tres coordenadas. Es común elegir los llamados *ángulos de Euler* para este propósito.

<sup>7</sup> $\nabla_{\hat{\omega}} \equiv \hat{\omega}_i \partial_{\omega_i}$ .

Para ello es útil mencionar el teorema de Euler: *una rotación general puede expresarse como el producto de 3 rotaciones sucesivas alrededor de 3 ejes diferentes*. La matriz general que describe la rotación parametrizada por los ángulos  $\{\phi, \theta, \psi\}$  es

$$\mathfrak{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

donde todos los ángulos son funciones del tiempo. El ángulo  $\phi \in [0, \pi]$  corresponde a rotar en torno al eje  $\tilde{e}_3$ , después, rotamos por un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi]$  este nuevo eje y finalizamos rotando una vez más por un ángulo  $\psi \in [0, 2\pi]$  (véase figura 1.4)<sup>8</sup>.

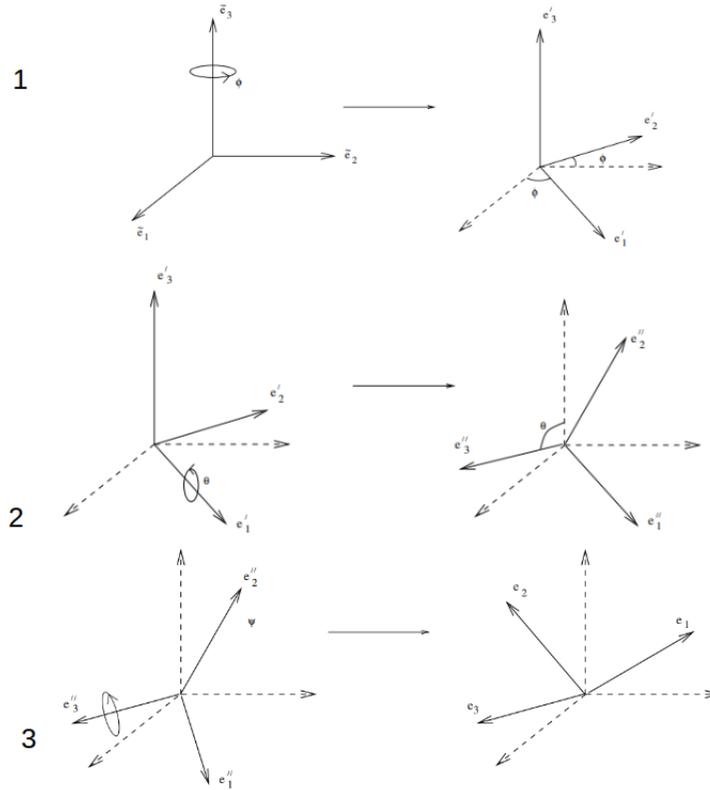


Figura 1.4: Rotaciones sucesivas de los ángulos de Euler que dan lugar a la matriz general (1.19).

### 1.8.1. Velocidad angular en ángulos de Euler

La velocidad angular instantánea adquiere una expresión relativamente sencilla en términos de los ángulos  $\{\phi, \theta, \psi\}$ . Considerando un cambio infinitesimal en los ángulos,

$$(\psi, \theta, \phi) \mapsto (\psi + d\psi, \theta + d\theta, \phi + d\phi) \quad (1.20)$$

por definición de ángulo de Euler, tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \tilde{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}'_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \quad (1.21)$$

<sup>8</sup>En la literatura representativa de este tema suele llamarse a este procedimiento *parametrización zxz* y existen diversas maneras de llevar a cabo las rotaciones en torno a los ejes. En nuestra construcción, la rotación se lleva a cabo en el orden *zxz*.

donde  $\mathbf{e}'_1$  es el eje que resulta de rotar por  $\phi$  en torno al eje  $\tilde{\mathbf{e}}_3$ . Expresando  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  y  $\mathbf{e}'_1$  en el marco del cuerpo,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_3 &= \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_1 &= \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{1.22}$$

de aquí es posible expresar  $\vec{\omega}$  en términos de los ángulos de Euler en el marco del cuerpo

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi] \mathbf{e}_1 + [\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi] \mathbf{e}_2 + [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta] \mathbf{e}_3.\tag{1.23}$$

Usando el mismo argumento podemos expresar  $\boldsymbol{\omega}$  en el marco espacial.

## Capítulo 2

# Cuerpo Rígido II. Tópicos avanzados

*Urgido por la fatalidad de hacer algo, de poblar de algún modo el tiempo, quise recordar, en mi sombra, todo lo que sabía.*  
La escritura de dios, J. L. Borges

---

### 2.1. Introducción

En este capítulo exploramos las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana dentro del contexto de la mecánica geométrica y simetrías. El cuerpo rígido constituye un caso paradigmático en la construcción geométrica debido a su alta simetría. En este sentido, la teoría de grupos de Lie y su efecto en variedades diferenciales adquiere relevancia para formular la teoría en su contexto más general.

El grupo de Lie  $SO(3)$  tiene un rol doble en la mecánica del cuerpo rígido: constituye el espacio de configuración del sistema y a su vez, es el grupo de simetrías de su función lagrangiana  $L : TSO(3) \mapsto \mathbb{R}$ . El grupo de simetría entonces, permite la reducción de la dinámica al espacio cociente  $TSO(3)/SO(3)$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange se generalizan (en términos de grupos de Lie) a las llamadas *ecuaciones de Euler-Poincaré*, definidas en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$  que es el espacio tangente de  $SO(3)$  conectado continuamente a la identidad, es decir  $T_e SO(3) = \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ . La formulación hamiltoniana, con  $H : T^*SO(3) \mapsto \mathbb{R}$ , involucra al espacio cotangente  $T^*SO(3)$  donde la dinámica se describe y también tiene estructura de álgebra de Lie, que denotamos como el álgebra dual  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}(3)^* = T_e^*SO(3)$ . La dinámica hamiltoniana del cuerpo rígido definida en  $\mathfrak{g}^*$  tiene estructura diferenciable y admite un paréntesis de Poisson, por tanto es llamado *paréntesis de Lie-Poisson*. Importante en este trabajo es la formulación del cuerpo rígido en la versión de Y. Nambu [20] en el que se extiende el espacio fase para considerar familias de hamiltonianos que dan lugar a la misma dinámica. *El paréntesis de Nambu* es equivalente al paréntesis de Lie-Poisson en el cuerpo rígido. El capítulo constituye una síntesis de [47; 48; 83]. Para una revisión general se sugiere [45; 46; 49; 55].

### 2.2. Grupos de Lie

Definimos un grupo de Lie  $G$  como un conjunto de elementos tales que

- $G \times G \mapsto G$  es una operación binaria (multiplicación) que asocia elementos:  $(gh)k = g(hk) \forall h, g \in G$ .

- Existe un elemento identidad  $e \in G$  tal que  $eg = g$  y  $ge = g$
- Existe el elemento inverso  $g^{-1}$  tal que  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ .

A su vez, un grupo de Lie tiene estructura de variedad (en sentido de geometría diferencial) en la cual, las operaciones  $(g, h) \mapsto gh$  y  $g \mapsto g^{-1}$  son funciones suaves.

Los grupos de Lie pueden ser muy abstractos, sin embargo, un *grupo de Lie matricial* es el conjunto de matrices invertibles  $n \times n$  que es cerrado bajo la multiplicación de matrices y es de hecho, una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Más aún, que un subgrupo de Lie sea una subvariedad implica que es invariante bajo operaciones de grupo específicas y sugiere una estrategia para caracterizar subgrupos de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$ , imponiendo condiciones de invariancia. El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  es aquel que consiste en el grupo de isomorfismos (lineales) de  $\mathbb{R}^n$  a él mismo y tiene dimensión  $n^2$ , el número de elementos independientes. Como ejemplo, consideremos el conjunto

$$S := \{U \in GL(n, \mathbb{R}) \mid U^T K U = K\},$$

que define un subgrupo  $S$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  y por tanto es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  de dimensión  $n(n-1)/2$  que deja invariantes ciertas formas cuadráticas bajo transformaciones lineales,  $S \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , con  $\mathbf{x} \mapsto U\mathbf{x}$ , ya que

$$\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = \mathbf{x}^T U^T K U \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Así que  $U \in S$  cambia la base para la forma cuadrática  $K$  pero deja su norma invariante. En otras palabras,  $S$  es el subgrupo de isotropía de la forma cuadrática asociada a  $K$ . Más adelante veremos que el paréntesis de Nambu del cuerpo rígido puede adoptar una forma que involucra esta forma cuadrática, a saber, el momento angular.

Para un grupo de Lie matricial  $S$ , podemos definir el *espacio tangente*  $T_I S$  en la identidad tal que, si  $A, B \in T_I S$  se verifica  $AB - BA \in T_I S$ . Con esta idea, podemos hablar de curvas  $R_A$  en  $S$  que comiencen en la identidad  $R_A = I$  y cuyas derivadas respecto del parámetro  $t$  en  $t = 0$  sean  $R'_A(0) = A$ . Tomemos entonces  $S(t) = R_A(t) B R_A(t)^{-1} \in T_I S$ . Se sigue que  $S(t) \in T_I S$  para cualquier  $t$  y  $S'(t) \in T_I S$ . En particular  $S'(0) = AB - BA \in T_I S$ . Al objeto  $[A, B] \equiv AB - BA$  se le llama *conmutador de matrices* que verifica propiedades de antisimetría y regla de Jacobi como definiremos en (2.4.1).

### 2.2.1. Álgebra de Lie matricial

Un álgebra de Lie matricial  $\mathfrak{g}$  es un conjunto de matrices  $n \times n$  con estructura de espacio vectorial con respecto a las operaciones usuales de adición y multiplicación de matrices por escalares y que posee la propiedad de cerradura bajo el conmutador  $[\cdot, \cdot]$ . Se sigue entonces que para cualquier grupo de Lie  $S$ , el espacio tangente en la identidad es su álgebra de Lie asociada, es decir  $\mathfrak{g} = T_I S$ .

## 2.3. Acciones de grupo

La *acción* de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad  $M$  es un grupo de transformaciones de  $M$  asociados a elementos del grupo  $G$ , cuya composición actuando en  $M$ , corresponde a multiplicación de grupo en  $G$ . Es pertinente presentar la definición completa [47].

*Definición.* Acción izquierda de un grupo de Lie  $G$  en  $M$  es un mapeo suave  $\Phi : G \times M \mapsto M$  tal que

- (i)  $\Phi(e, x) = x \quad \forall x \in M$ ;

- (ii)  $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x) \quad \forall g, h \in G, x \in M$  y
- (iii)  $\Phi(g, \cdot)$  es un difeomorfismo en  $M$  para cada  $g \in G$ .

Se suele utilizar la notación  $gx$  para  $\Phi(g, x)$  y pensar al elemento  $g$  del grupo actuando sobre un punto en  $M$ . El punto (ii) implica entonces que  $(gh)x = g(hx)$ . Existe la correspondiente acción derecha que resumimos con las expresiones:  $(xg)h = x(gh)$ .

La traslación Izquierda (Derecha) es una acción de un grupo sobre él mismo. Suele denotarse como  $L_g$  ( $R_h$ ), es decir  $L_g : h \mapsto gh$  ( $R_h : h \mapsto hg$ ) para elementos  $g, h \in G$ . Como caso particular, consideremos  $I_g : h \mapsto ghg^{-1}$  que define el *automorfismo interno* asociado a  $g$ . Las órbitas de esta acción definen las clases de conjugación.

### 2.3.1. Órbitas de grupo

Para un grupo de Lie  $G$  y un punto  $x \in M$ , definimos el conjunto

$$\text{Orb}[x] := \{gx | g \in G\} \subset M,$$

como la *órbita del grupo a través de  $x$* . Esta definición representa una noción más general de trayectorias en el espacio fase de un sistema dinámico.

Como ejemplo, podemos pensar en las órbitas de  $SO(3) := \{A | A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}, \det(A) = 1\}$  en  $M = \mathbb{R}^3$  dado por multiplicación de matrices. La acción de  $A \in SO(3)$  en un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  es el producto  $A\mathbf{x}$  y por tanto, la órbita del origen es el origen mismo mientras que para otro punto, es una esfera de radio  $|\mathbf{x}|$  en torno al punto de anclaje del vector  $\mathbf{x}$ . La acción de grupos  $G$  sobre ellos mismos mediante acciones por izquierda (o derecha) también produce órbitas de grupo llamadas *acción tangente levantada*<sup>1</sup> en su haz tangente<sup>2</sup>.

### 2.3.2. Acciones de grupo sobre campos vectoriales

Si  $\Phi : G \times M \mapsto M$  es una acción izquierda, entonces  $G$  actúa sobre el conjunto de campos vectoriales  $\mathcal{X}(M)$  mediante push-forwards<sup>3</sup>:  $g\mathbf{X} = (\Phi_g)_* \mathbf{X}$ . Lo mismo sucede en cuanto a la acción derecha:  $\mathbf{X}g$ .

#### Campos vectoriales invariantes por izquierda

Si  $G$  actúa sobre  $M$  por la izquierda, un campo  $\mathbf{X}$  en  $M$  es invariante con respecto a esta acción (a veces llamado  $G$ -invariante) si  $g\mathbf{X} = \mathbf{X}$  para toda  $g \in G$ . Equivalentemente  $g(\mathbf{X}(x)) = \mathbf{X}(gx)$  para toda  $g \in G$  y  $x \in \mathbf{X}$ . Más aún, si consideramos la acción izquierda de  $G$  sobre él mismo:  $\Phi_g(h) = L_g(h) = gh$ , decimos que un campo vectorial en  $G$  que sea invariante con respecto a esta acción es *invariante por izquierda*. Es decir,  $\mathbf{X}$  es invariante izquierda si y solo si  $g(\mathbf{X}(h)) = \mathbf{X}(gh)$ . Al conjunto de campos vectoriales de este tipo se etiqueta como  $\mathcal{X}^L(G)$ .

Considerando un elemento  $\zeta \in T_e G$ , definimos  $\mathbf{X}_\zeta(g) = g\zeta$ . Entonces  $\mathbf{X}_\zeta^L$  es el único campo vectorial invariante izquierda tal que  $\mathbf{X}_\zeta^L(e) = \zeta$ . Esto nos conduce a considerar que el mapeo  $\zeta \mapsto \mathbf{X}_\zeta^L$  es un isomorfismo de espacios vectoriales de  $T_e G$  a  $\mathcal{X}^L(G)$  y por ello, los campos vectoriales invariantes por izquierda pueden ser usados para definir las álgebras de Lie de los grupos de Lie, como veremos a continuación.

<sup>1</sup>Tangent Lifted action en inglés.

<sup>2</sup>Tangent bundle, en inglés.

<sup>3</sup>El push-forward puede definirse como sigue. Sea un vector  $X$  en  $M$  y un difeomorfismo  $\phi : M \mapsto M$ . Entonces el push-forward de  $X$  por  $\phi$  es  $\phi_*\mathbf{X}(\phi(x)) = T_x\phi(\mathbf{X}(x)) = D\phi(x) \cdot \mathbf{X}(x)$  con  $D$  el operador derivada.

## 2.4. Sistemas hamiltonianos en parches coordinados

Las ecuaciones de Hamilton son un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es posible abordar la mecánica de Hamilton en un formalismo de covarianza general de coordenadas y esto ofrece más naturalidad para estudiar sus propiedades matemáticas<sup>4</sup>. Para un sistema finito de rango constante, el teorema de Darboux establece que, siempre es posible introducir coordenadas en el sistema en orden de atender las particularidades de la dinámica [49].

### 2.4.1. Paréntesis de Poisson

Dada una variedad  $M$ , un corchete de Poisson en  $M$  asigna a cada par de funciones reales y suficientemente bien portadas  $F, H : M \mapsto \mathbb{R}$  otra función real denotada como  $\{F, G\}$  con las siguientes propiedades:

- (a) Bilinealidad.  
 $\{cF + c'P, H\} = c\{F, H\} + c'\{P, H\}, \{F, cH + c'P\} = c\{F, H\} + c'\{F, P\}, \forall c, c' \in \mathbb{R}.$
- (b) Anti-simetría.  
 $\{F, G\} = -\{G, F\},$
- (c) Identidad de Jacobi.  
 $\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0,$
- (d) Regla de Leibniz.  
 $\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}.$

Aquí  $(\cdot)$  representa la multiplicación ordinaria para funciones de variable real. Una variedad  $M$  con este corchete se denomina *variedad de Poisson* y define una *estructura de Poisson* en  $M$ . Esta noción de variedad es más general que las variedades simplécticas o con estructura Hamiltoniana ya que en particular, la variedad puede ser de dimensión impar. Si  $M$  es una variedad de Poisson, una función  $C : M \mapsto \mathbb{R}$  es llamada *Casimir* si el paréntesis de Poisson con cualquier otra función se anula idénticamente, esto es,  $\{C, H\} = 0, \forall H$ .

### 2.4.2. Campos vectoriales hamiltonianos

El carácter bilineal de la regla de Leibniz permite definir una noción de diferenciación mediante el mapeo  $F \mapsto \{F, H\}$  y por tanto campos vectoriales en  $M^5$ . Con esta idea podemos definir el siguiente objeto.

*Definición.* Si  $M$  es variedad de Poisson y  $H : M \mapsto \mathbb{R}$  es una función suave, el *campo vectorial hamiltoniano* asociado con  $H$  es el único vector  $\hat{v}_H$  en  $M$  tal que

$$\hat{v}_H(F) = \{F, H\} = -\{H, F\} \quad (2.1)$$

<sup>4</sup>A diferencia de introducir las coordenadas  $(q, p)$  que aparece en los textos elementales

<sup>5</sup>Para una variedad, un vector puede expresarse definiendo una base:  $\mathbf{v} = \zeta^i(x)\partial/\partial x_i$  donde los índices se suman de acuerdo al convenio de Einstein.

para cualquier función  $F$ . En este punto conviene considerar un ejemplo y para fijar ideas pensemos en el caso simpléctico de dimensión par. Sean  $(p, q) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$  y dos funciones  $H(q, p)$  y  $F(q, p)$ . El paréntesis de Poisson se define como

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right\}. \quad (2.2)$$

Que satisface todas las propiedades descritas arriba. En particular

$$\{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (2.3)$$

El campo vectorial hamiltoniano asociado a este paréntesis resulta ser

$$\hat{v}_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right), \quad (2.4)$$

y el correspondiente *flujo hamiltoniano* en el espacio fase está parametrizado por las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.5)$$

Existe una conexión fundamental entre los paréntesis de Poisson de dos funciones y el corchete de Lie asociado a sus campos vectoriales hamiltonianos. A saber,

$$\hat{v}_{\{F, H\}} = -[\hat{v}_F, \hat{v}_H] = [\hat{v}_H, \hat{v}_F]. \quad (2.6)$$

### 2.4.3. Funciones de estructura

Las funciones de estructura definen la regla de multiplicación de un álgebra de Lie. A su vez están ligadas a los paréntesis de Poisson como veremos a continuación. Asignemos a  $M$  un parche local coordinado  $x = (x^1, \dots, x^m)$  y sea  $H(x)$  una función de variable real. El campo vectorial hamiltoniano será  $\hat{v}_H = \zeta^i(x) \partial / \partial x^i$  donde los coeficientes  $\zeta^i(x)$  son funciones que dependen de  $H$ . Si  $F(x)$  es una segunda función, podemos escribir en virtud de (2.1),

$$\{F, H\} = \hat{v}_H(F) = \sum_{i=1}^m \zeta^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (2.7)$$

Entonces,

$$\zeta^i(x) = \hat{v}_H(x^i) = \{x^i, H\}, \quad (2.8)$$

por lo cual

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \{x^i, H\} \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, usando la antisimetría del paréntesis de Poisson es posible revertir este proceso y calcular en términos de los campos vectoriales asociados a las coordenadas  $x^i$ , a saber,

$$\{x^i, H\} = -\{H, x^i\} = -\hat{v}_{x^i}(H) = -\sum_{j=1}^m \{x^j, x^i\} \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad (2.10)$$

donde se ha aplicado nuevamente la ecuación (2.9) con  $H$  reemplazando a  $F$  y  $x^i$  reemplazando a  $H$ . Con esto podemos obtener la siguiente fórmula,

$$\{F, H\} = \sum_i \sum_j \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \quad (2.11)$$

En otras palabras, para calcular el paréntesis de Poisson de cualesquiera par de funciones en un parche coordinado local, es suficiente conocer el paréntesis entre las funciones coordinadas mismas. Llamamos a tal paréntesis  $J^{ij}(x) \equiv \{x^i, x^j\}$  *funciones de estructura*. Por conveniencia asignamos a tales funciones una matriz  $J(x)$  de  $m \times m$  y usando el hecho de que  $\nabla H$  representa el vector gradiente (columna) asociada a la función  $H$ , podemos escribir en el parche coordinado,

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H. \quad (2.12)$$

Por ejemplo, si el paréntesis de Poisson representa el paréntesis canónico en  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2n+l}$ , tal matriz tiene perfil simpléctico por bloque

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

relativo a las coordenadas canónicas  $(p, q; z)$ , donde  $I$  es la matriz  $n \times n$  y  $z = (z^1, \dots, z^l)$ . El campo vectorial hamiltoniano asociado con  $H$  es de la forma

$$\hat{v}_H = \sum_i^m \left( \sum_j^m J^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (2.14)$$

por tanto, en un parche coordinado, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x) = \{x, H\}. \quad (2.15)$$

Un sistema que posea esta estructura se dice que es un *sistema hamiltoniano* tal que las funciones  $J(x)$  determinan un paréntesis de Poisson en la variedad  $M$ . Finalizamos esta sección enfatizando que la matriz de Poisson cumple con las condiciones de anti simetría y verifica la identidad de Jacobi.

#### 2.4.4. Estructura Lie-Poisson

Las estructuras de Poisson tienen asociada un álgebra de Lie de dimensión finita  $\mathfrak{g}$ . Sea  $c_{ij}^k$  con  $i, j, k = 1, \dots, r$  las funciones de estructura, en este caso constantes relativa a la base  $\{v_1, \dots, v_r\}$ . Tomemos además un espacio vectorial  $V$  con coordenadas  $x = (x^1, \dots, x^r)$  con base generadora  $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ . Se define el paréntesis Lie-Poisson entre dos funciones suaves  $F, H : V \mapsto \mathbb{R}$  como

$$\{F, H\} = \sum_{ijk}^r c_{ijk} x^k \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (2.16)$$

En este caso, la matriz  $J$  es una combinación lineal en las coordenadas ( $J^{ij}(x) = c_{ijk} x^k$ ) que cumple las condiciones de anti simetría y regla de Jacobi.

La función  $F : V \mapsto \mathbb{R}$ , tiene gradiente  $\nabla F$  y es un elemento del espacio vectorial dual  $V^*$  o espacio cotangente si  $V = M$  y por ello, podemos definir el escalar

$$\langle \nabla F; y \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon y) - F(x)}{\epsilon} \quad (2.17)$$

Para cualquier  $y \in V$  y  $\langle ; \rangle$  representando el apareamiento<sup>6</sup> entre  $V$  y  $V^*$ . Tomando esto en cuenta, podemos identificar el espacio  $V$  usado en la construcción del paréntesis de Lie-Poisson con el álgebra

<sup>6</sup>En otros contextos como Relatividad General, el apareamiento es un escalar construido con la métrica  $\eta$ .

dual  $\mathfrak{g}^*$  siendo el conjunto  $\{\omega_i\}$  la base dual a  $\{v_i\}$ <sup>7</sup>. El paréntesis de Lie-Poisson adquiere su forma libre de coordenadas como

$$\{F, H\}(x) = \langle x; [\nabla F(x), \nabla H(x)] \rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad (2.18)$$

con  $[\ , \ ]$  el corchete de Lie ordinario del álgebra  $\mathfrak{g}$ . Ahora bien, si  $H : \mathfrak{g} \mapsto \mathbb{R}$  es una función escalar, el sistema asociado de ecuaciones de Hamilton adopta la forma

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j,k}^r c_{ij}^k x^k \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.19)$$

en donde las coordenadas aparecen explícitamente. Como ejemplo de este formalismo, consideremos el siguiente sistema [49].

Sea el álgebra de Lie 3-dimensional  $\mathfrak{g} = so(3)$  asociado al grupo de rotaciones  $SO(3)$ . Sea la base  $v_1 = y\partial_z - z\partial_y, v_2 = z\partial_x - x\partial_z, v_3 = x\partial_y - y\partial_x$  que genera rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}^3$ . Se sabe que esta base tiene relaciones de conmutación  $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$ . Tómese  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  como base dual para  $so(3)^* = \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^3$  de tal manera que  $\mathbf{\Pi} = \Pi^1 \omega_1 + \Pi^2 \omega_2 + \Pi^3 \omega_3$  es un punto en  $\mathfrak{g}^*$ . Sea la función  $F : so(3)^* \mapsto \mathbb{R}$ , entonces su vector gradiente es

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial \Pi^1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial \Pi^2} v_2 + \frac{\partial F}{\partial \Pi^3} v_3 \in so(3). \quad (2.20)$$

Usando (2.18), encontramos que el paréntesis de Lie-Poisson en  $so(3)^*$  es

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= \Pi^1 \left( \frac{\partial F}{\partial \Pi^3} \frac{\partial H}{\partial \Pi^2} - \frac{\partial F}{\partial \Pi^2} \frac{\partial H}{\partial \Pi^3} \right) + \Pi^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \Pi^1} \frac{\partial H}{\partial \Pi^3} - \frac{\partial F}{\partial \Pi^3} \frac{\partial H}{\partial \Pi^1} \right) + \Pi^3 \left( \frac{\partial F}{\partial \Pi^2} \frac{\partial H}{\partial \Pi^1} - \frac{\partial F}{\partial \Pi^1} \frac{\partial H}{\partial \Pi^2} \right) \\ &= -\mathbf{\Pi} \cdot \nabla F \times \nabla H \\ &= -\Pi^i c_{ijk} \partial^j F \partial H^k, \end{aligned} \quad (2.21)$$

usando el producto cruz estándar<sup>8</sup> en  $\mathbb{R}^3$ . La matriz de estructura en este caso será

$$J(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\Pi^3 & \Pi^2 \\ \Pi^3 & 0 & -\Pi^1 \\ -\Pi^2 & \Pi^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} \in so(3)^*. \quad (2.22)$$

Por tanto, las ecuaciones de Hamilton asociadas a la función  $H(\mathbf{\Pi})$  son

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \mathbf{\Pi} \times \nabla H(\mathbf{\Pi}). \quad (2.23)$$

Si la función  $H$  es de la forma  $H(\mathbf{\Pi}) = \frac{(\Pi^1)^2}{2I_1} + \frac{(\Pi^2)^2}{2I_2} + \frac{(\Pi^3)^2}{2I_3}$  siendo  $I_i$  ciertas constantes, entonces las ecuaciones de Hamilton son

$$\frac{d\Pi^1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \Pi^2 \Pi^3, \quad \frac{d\Pi^2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \Pi^3 \Pi^1, \quad \frac{d\Pi^3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \Pi^1 \Pi^2. \quad (2.24)$$

El sistema físico que obedece las ecuaciones (2.24) es el cuerpo rígido, es decir, son las ecuaciones de Euler si identificamos las constantes  $I_i$  con los momentos de inercia alrededor del sistema de ejes principales, a su vez  $\Pi^i$  son los momentos angulares (con velocidades angulares  $\Omega^i = \Pi^i / I_i$ ) y la función hamiltoniana representa la energía cinética del cuerpo rígido [55]. En este sentido ya podemos afirmar que el cuerpo rígido es un sistema Hamiltoniano con estructura Lie-Poisson y álgebra dual  $so(3)^*$ .

Las estructuras Lie-Poisson y las ecuaciones de Euler-Poincaré pueden generalizarse a grupos (y álgebras) de Lie arbitrarios. Para ello es necesaria una noción geométrica más general, independiente de parches coordinados. Este formalismo se desarrolla en el contexto de la *mecánica geométrica*.

<sup>7</sup>No se distingue índices covariantes de contravariantes pues trabajaremos en general con espacios vectoriales Euclidianos, a menos que se especifique lo contrario.

<sup>8</sup>Las constantes de estructura en este caso corresponden al tensor de Levi-Civita en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.5. Bases de mecánica geométrica

La mecánica lagrangiana se enfoca principalmente en los principios variacionales para su formulación básica. En contraste, la formulación Hamiltoniana se centra en las estructuras simplécticas y de Poisson. Estas dos formulaciones se relacionan entre ellas mediante transformaciones de Legendre. Comenzamos revisando la formulación Hamiltoniana dentro del contexto de la mecánica geométrica [50].

Si  $P$  es una variedad y  $\mathcal{F}(P)$  el conjunto de funciones de variable real en  $P$ . En (2.4.1) consideramos una operación llamada paréntesis de Poisson. Las tres primeras propiedades en (2.4.1) hacen del conjunto  $(P, \{, \})$  un *álgebra de Lie* como se mencionó en (2.4.3). A su vez, estas propiedades nos permiten asegurar la existencia de un tensor  $B$  en  $P$  que asigna cada  $z \in P$  un mapeo lineal  $B(z) : T_z^*P \mapsto T_zP$  tal que

$$\{f, g\}(z) = \langle B(z) \cdot \mathbf{d}f(z), \mathbf{d}g(z) \rangle. \quad (2.25)$$

Siendo  $\langle, \rangle$  un producto escalar entre vectores y covectores. Si  $z^I$ ,  $I = 1, 2, \dots, M$  denota un conjunto de coordenadas en  $P$ , podemos escribir

$$\{f, g\} = B^{IJ} \frac{\partial f}{\partial z^I} \frac{\partial g}{\partial z^J}. \quad (2.26)$$

La propiedad (b) en (2.4.1) indica que  $B^{IJ} = -B^{JI}$  y la identidad de Jacobi puede escribirse

$$B^{LI} \frac{\partial B^{JK}}{\partial z^L} + B^{LJ} \frac{\partial B^{KI}}{\partial z^L} + B^{LK} \frac{\partial B^{IJ}}{\partial z^L} = 0. \quad (2.27)$$

Si tenemos dos variedades de Poisson (ver sección 2.4.1), es natural intentar compararlas. Si  $(P_1, \{, \}_1)$  y  $(P_2, \{, \}_2)$  son variedades de Poisson, un mapeo  $\phi : P_1 \mapsto P_2$  se llama *Poisson* si para cualquier  $f, g \in \mathcal{F}(P_2)$  tenemos

$$\{f, h\}_2 \circ \phi = \{f \circ \phi, h \circ \phi\}_1, \quad (2.28)$$

es decir, un mapeo de Poisson preserva la estructura de Poisson.

En mecánica de Hamilton se utilizan las llamadas *variedades simplécticas*. Sea  $P$  una variedad y  $\Omega$  una 2-forma en  $P$ . El par  $(P, \Omega)$  es simpléctica si  $\Omega$  satisface

- (S1):  $\mathbf{d}\Omega = 0$  (i.e.  $\Omega$  es cerrada)
- (S2):  $\Omega$  es no degenerada.

En este contexto podemos definir la noción de ecuaciones de Hamilton cuyas curvas solución serán las curvas integrales de los campos vectoriales hamiltonianos. Es decir, si  $(P, \Omega)$  es una variedad simpléctica y  $f \in \mathcal{F}(P)$ , sea  $X_f$  el único vector en  $P$  que satisface

$$\Omega_z(X_f(z), v) = \mathbf{d}f(z) \cdot v \quad \forall v \in T_zP \quad (2.29)$$

decimos que  $X_f$  es un campo vectorial hamiltoniano de  $f$ . Las ecuaciones diferenciales de Hamilton en  $P$  son

$$\dot{z} = X_f(z). \quad (2.30)$$

El paréntesis de Poisson y la 2-forma  $\Omega$  son equivalentes

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g). \quad (2.31)$$

Se sigue que cualquier variedad simpléctica es una variedad de Poisson<sup>9</sup>. Sin embargo, los campos vectoriales hamiltonianos son definidos en variedades de Poisson de la siguiente manera.

Si  $(P, \{, \})$  es una variedad de Poisson y  $f \in \mathcal{F}(P)$ , definimos  $\mathbf{X}_f$  como el único campo vectorial en  $P$  que satisface

$$\mathbf{X}_f[k] := \langle \mathbf{d}k, \mathbf{X}_f \rangle = \{k, f\} \quad \forall k \in \mathcal{F}(P). \quad (2.32)$$

Entonces,  $\mathbf{X}_f$  es un campo vectorial Hamiltoniano de  $f$ . Estas ideas nos permiten escribir las ecuaciones de Hamilton de tres maneras diferentes. Si  $H \in \mathcal{F}(P)$  en una variedad de Poisson  $(P, \{, \})$ , se verifican las propiedades

- $\dot{z} = \mathbf{X}_H(z)$ .
- $\dot{f} \mathbf{d}f(z) \cdot \mathbf{X}_H(z) \quad \forall f \in \mathcal{F}(P)$ .
- $\dot{f} = \{f, H\} \quad \forall f \in \mathcal{F}(P)$ .

Sea el *flujo hamiltoniano*  $\phi_t$  de las ecuaciones de Hamilton, entonces  $\phi_t(z)$  es la curva integral de  $\dot{z} = \mathbf{X}_H$  comenzando en el punto  $z$ . Entonces se siguen las siguientes afirmaciones

- Cada  $\phi_t$  es un mapeo de Poisson.
- $H \circ \phi_t = H$  (conservación de la Energía).

La primera afirmación es válida incluso para funciones  $H$  dependientes del tiempo mientras que la segunda está acotada a funciones independientes de este. Otros resultados importantes en este formalismo es que el flujo de un campo vectorial hamiltoniano en una variedad simpléctica es un difeomorfismo simpléctico, es decir  $\phi^* \Omega = \Omega$  con  $\phi$  un mapeo de Poisson. Este resultado es importante porque permite demostrar el teorema de Liouville: *El flujo de un campo vectorial hamiltoniano consiste de mapeos que preservan el volumen*. En coordenadas canónicas, el campo vectorial hamiltoniano es

$$\mathbf{X}_H(q, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right). \quad (2.33)$$

### 2.5.1. Haz Cotangente

Si  $Q$  es una variedad<sup>10</sup> y  $T^*Q$  su haz cotangente, elegir un parche  $q^i$  para  $Q$  induce, de manera natural, coordenadas  $(q^i, p_j)$  en el haz cotangente  $T^*Q$  a veces llamadas *coordenadas canónicas cotangentes*. Existe una única 1-forma  $\Theta$  en  $T^*Q$  tal que, para cualquier elección de coordenadas, tenemos

$$\Theta = p_i dq^i; \quad (2.34)$$

y llamamos  $\Theta$ , *1-forma canónica* relacionada con  $\Omega$ ,

$$\Omega = -\mathbf{d}\Theta = \sum_i dq^i \wedge dp_i. \quad (2.35)$$

---

<sup>9</sup>El inverso no es necesariamente cierto. Un ejemplo no trivial de paréntesis de Poisson que no es simpléctico es la estructura de Lie-Poisson asociado al cuerpo rígido, como veremos en 2.6.

<sup>10</sup>Que puede ser el espacio de configuración de un sistema mecánico.

A manera de resumen, tenemos que  $(T^*Q, \Omega)$  es una variedad simpléctica que en coordenadas canónicas, el paréntesis de Poisson en  $T^*Q$  adopta la forma

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (2.36)$$

Finalmente, toda variedad simpléctica luce localmente como  $T^*Q$ . En otras palabras, para cualquier variedad simpléctica de dimensión finita, existen coordenadas bajo las cuales  $\Omega$  adopta la forma  $\Omega = -\mathbf{d}\Theta = dq^i \wedge dp_i$  y las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.37)$$

Las estructuras de Poisson son más generales que las simplécticas sin embargo, puede demostrarse que toda variedad de Poisson es la unión de superficies simplécticas. Esto es importante en nuestro contexto ya que el cuerpo rígido puede verse como la unión de retratos fase del péndulo, cuyo paréntesis es simpléctico<sup>11</sup>.

### 2.5.2. El grupo $SO(3)$

El grupo de Lie, llamado *grupo especial ortogonal* se define como

$$SO(3) := \{A | A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}, \det(A) = 1\}.$$

La acción del grupo de Lie matricial  $SO(3)$  sobre vectores en  $\mathbb{R}^3$  por multiplicación izquierda representa una rotación. El álgebra de Lie asociada se representa como  $\mathfrak{g} = so(3)$  y son matrices de  $3 \times 3$  tales que  $A^T = -A$ . Elementos en  $\mathfrak{g} = so(3)$  representan velocidades angulares mientras que los momentos angulares residen en  $so(3)^*$ .

Podemos definir un isomorfismo entre  $(so(3), \{\cdot, \cdot\})$  y  $(\mathbb{R}^3, \times)$  con  $\times$  el producto vectorial usual,

$$\mathbf{u} := (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \hat{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3),$$

que en componentes luce como  $\hat{u}_{ij} := -\epsilon_{ijk}u^k$ . Es equivalente el isomorfismo dado por

$$\hat{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Este isomorfismo es codificado por el operador *hat*:  $\hat{\cdot} : (so(3), \{\cdot, \cdot\}) \mapsto (\mathbb{R}^3, \times)$  y siempre puede escribirse en términos de una base para  $so(3)$ ,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{J}} = u^a \hat{J}_a,$$

Bajo el mapeo *hat* se verifica la identidad de Jacobi (2.4.1). Algunas propiedades de este isomorfismo son

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\wedge = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{u}} =: [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}],$
- $[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}]\mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w},$
- $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w})^\wedge = [[\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}], \hat{\mathbf{w}}],$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \text{Traza}(\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}) =: \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle.$

<sup>11</sup>En el capítulo 4 se utilizará esta afirmación.

### 2.5.3. AD, Ad y ad en $SO(3)$ y sus álgebras

La acción  $AD$  de  $SO(3)$  sobre él mismo es una conjugación mediante multiplicación de matrices

$$I_A(B) = ABA^{-1},$$

mientras que  $Ad$  de  $SO(3)$  sobre su álgebra  $so(3)$  puede obtenerse diferenciando  $B(t)$  en  $B(0) = Id$ ,

$$\text{Ad}_A \hat{\vartheta} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} (AB(t)A^{-1}) = A\hat{\vartheta}A^{-1}, \quad \text{con } \hat{\vartheta} = B'(0).$$

Es posible calcular el emparejamiento con un vector  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  mediante la siguiente expresión

$$\text{Ad}_A \hat{\vartheta}(\mathbf{w}) = A\hat{\vartheta}(A^{-1}\mathbf{w}) = A(\mathbf{v} \times A^{-1}\mathbf{w}) = A\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (A\mathbf{v}) \hat{\times} \mathbf{w}$$

donde se ha usado  $A(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = A\mathbf{u} \times A\mathbf{v}$ . Consecuentemente  $\text{Ad}_A \hat{\vartheta} = (A\mathbf{v}) \hat{\times}$  e identificando  $so(3) \cong \mathbb{R}^3$  tenemos

$$\text{Ad}_A \mathbf{v} = A\mathbf{v}.$$

En palabras, la acción adjunta  $Ad$  de  $SO(3)$  sobre  $so(3)$  es identificada con la multiplicación de una matriz por un vector. Por otro lado, la acción de  $so(3)$  sobre él mismo es el corchete de dos matrices

$$[\hat{u}, \hat{\vartheta}] = \text{ad}_{\hat{u}} \hat{\vartheta} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} (\exp(t\hat{u})\mathbf{v}) \hat{\times} = (\hat{u}\mathbf{v}) \hat{\times} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \hat{\times}.$$

Es decir, la acción  $\text{ad}$  de  $so(3)$  sobre si misma es el conmutador de matrices donde el isomorfismo *hat* lo identifica con el producto vectorial.

Es posible identificar también al dual  $so(3)^*$  con  $\mathbb{R}^3$  mediante el isomorfismo

$$\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \tilde{\mathbf{\Pi}} \in so(3)^* : \langle \tilde{\mathbf{\Pi}}, \hat{u} \rangle := \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Así que, en términos de este isomorfismo, la acción coAdjunta de  $SO(3)$  sobre  $so(3)^*$  es

$$\text{Ad}_{A^{-1}}^* \tilde{\mathbf{\Pi}} = (A\tilde{\mathbf{\Pi}}), \tag{2.38}$$

y la acción coadjunta de  $so(3)$  sobre  $so(3)^*$  es

$$\text{ad}_{\hat{u}}^* \tilde{\mathbf{\Pi}} = (\mathbf{\Pi} \tilde{\times} \mathbf{u}). \tag{2.39}$$

La acción coAdjunta de  $SO(3)$  sobre  $so(3)^*$  es como (2.38)

$$\text{Ad}_{A^{-1}}^* \tilde{\mathbf{\Pi}} = (A\tilde{\mathbf{\Pi}}).$$

Las órbitas de la acción (2.5.3) de  $SO(3)$  sobre  $so(3)^*$  es una esfera de radio  $|\mathbf{\Pi}|$ . Las curvas en esta órbita coAdjunta son sus intersecciones con los niveles de energía del cuerpo rígido, como se muestra en la imagen (2.1).

### 2.5.4. Paréntesis de Lie-Poisson en variedades de Poisson

El principio variacional del cuerpo rígido y su paréntesis asociado son casos especiales pues estas ideas se pueden generalizar a un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  general. Un espacio vectorial junto con un paréntesis antisimétrico  $[\zeta, \eta]$  que satisface la identidad de Jacobi:

$$[[\zeta, \eta], \zeta] + [[\zeta, \zeta], \eta] + [[\eta, \zeta], \zeta] = 0 \tag{2.40}$$

Por ejemplo, el álgebra  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$  asociada al grupo de rotaciones con corchete  $[\zeta, \eta] = \zeta \times \eta$ .

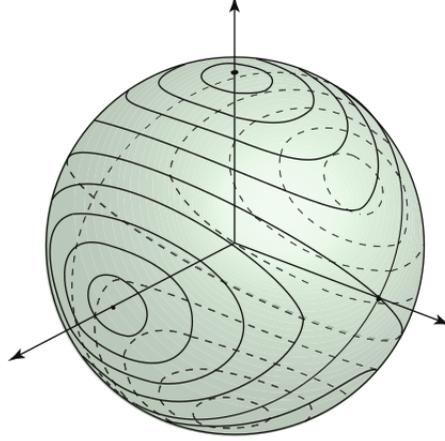


Figura 2.1: Órbitas de  $SO(3)$  sobre  $so(3)^*$ .

### Ecuaciones de Euler-Poincaré

Estas ecuaciones son válidas para cualquier álgebra de Lie (finita o infinita). Tomemos el caso finito y elegimos una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_r\}$  de  $\mathfrak{g}$  (entonces  $\dim \mathfrak{g} = r$ ). Se definen las constantes de estructura vía la ecuación (véase 2.19)

$$[e_a, e_b] = \sum_{d=1}^r C_{ad}^b e_d. \quad (2.41)$$

Si  $\zeta$  es un elemento del álgebra, sus componentes relativo a la base  $\mathcal{B}$  son  $\zeta^a$  y la correspondiente base dual es  $\mathcal{B}^* = (e^1, \dots, e^r)$ . La lagrangiana contiene derivadas  $\partial L / \partial x_i$  por lo que las ecuaciones de Euler-Poincaré para cualquier álgebra es

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \zeta^d} = \text{ad}_{\zeta}^* \frac{\partial L}{\partial \zeta^d}, \quad (2.42)$$

donde  $\text{ad}_{\zeta} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$  es el mapeo lineal  $\eta \mapsto [\zeta, \eta]$  y  $\text{ad}_{\zeta}^* : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$  su mapeo dual. En el caso de una función lagrangiana  $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \Omega} \times \Omega, \quad (2.43)$$

que generaliza las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido en donde el álgebra es  $so(3)$ . Por supuesto, las ecuaciones de Euler-Poincaré son equivalentes al principio variacional para el cuerpo rígido siempre que las variaciones sean de la forma  $\delta \zeta = \dot{\eta} + [\zeta, \eta]$  para alguna curva  $\eta$  en  $\mathfrak{g}$  que se anula en los extremos.

### Ecuaciones de Lie-Poisson

El paréntesis de Poisson (2.2) también se generaliza bajo álgebras arbitrarias. Si  $F, G$  son definidas en el espacio dual  $\mathfrak{g}^*$ . Denotemos a sus elementos con  $\mu$  y sea la *derivada funcional* de  $F$  en  $\mu$  el único elemento  $\delta F / \delta \mu$  de  $\mathfrak{g}$  definido como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [F(\mu + \epsilon \delta \mu) - F(\mu)] = \left\langle \delta \mu, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle, \quad (2.44)$$

para cualquier  $\delta \mu \in \mathfrak{g}$ . El símbolo  $\langle, \rangle$  es el apareamiento entre elementos de  $\mathfrak{g}^*$  y elementos de  $\mathfrak{g}$ . Con esto, definimos el paréntesis de Lie-Poisson como

$$\{F, G\}_{\pm}(\mu) = \pm \sum_{a,b,d=1}^r C_{ab}^d \mu_d \frac{\partial F}{\partial \mu_a} \frac{\partial G}{\partial \mu_b} \quad (2.45)$$

donde  $\mu = \mu_a e^a$ . Este paréntesis satisface las propiedades usuales: antisimetría, identidad de Jacobi y de Leibniz. Tiene estructura de variedad (por ser de Lie) y por tanto es llamado *Paréntesis de Lie-Poisson*.

El ejemplo característico es  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$  siendo el paréntesis  $[\hat{x}, \hat{y}] = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$  e identificando  $\mathfrak{g}^*$  con  $\mathfrak{g}$  usando el producto punto usual de  $\mathbb{R}^3$ :  $\langle \mathbf{\Pi}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{x}$ . Entonces el paréntesis de Lie-Poisson es (módulo un signo menos) el paréntesis del cuerpo rígido.

### Campos vectoriales hamiltonianos en $so(3)^*$

Sobre una variedad de Poisson (que denotaremos  $(P, \{\cdot, \cdot\})$ ), se asocia a cualquier función  $H$ , un campo vectorial denotado por  $X_H$  tal que, para cualquier función  $F : P \mapsto \mathbb{R}$  se tiene la identidad

$$\langle F, X_H \rangle = F \cdot X_H = \{F, H\} \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{d}F$  es la diferencial de  $F$ . Como se mencionó en (2.32), decimos que  $X_H$  generada por la función  $H$  es un campo vectorial hamiltoniano

$$\dot{z} = X_H(z). \quad (2.47)$$

Para sistemas canónicos con paréntesis de Poisson canónico,  $X_H$ , tenemos

$$X_H(q^i, p_i) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right), \quad (2.48)$$

mientras que para el cuerpo rígido en  $\mathbb{R}^3$  (ecuación (2.24))

$$X_H(\mathbf{\Pi}) = \mathbf{\Pi} \times \nabla H(\mathbf{\Pi}). \quad (2.49)$$

Las ecuaciones generales de Lie-Poisson, determinadas por  $\dot{F} = \{F, H\}$  son

$$\dot{\mu}_a = \mp \sum_{b,c=1}^r \mu_b \mu_c C_{ab}^d \frac{\partial H}{\partial \mu_b}, \quad (2.50)$$

o, de manera covariante

$$\dot{\mu} = \mp \text{ad}_{\delta H / \delta \mu}^* \mu. \quad (2.51)$$

### Reducción y mapeos de momento

Los paréntesis de Lie-Poisson surgen del paréntesis canónico en el fibrado cotangente (espacio fase)  $T^*G$  asociado al grupo de Lie  $G$  que tiene a  $\mathfrak{g}$  como su álgebra de Lie. Específicamente, existe una construcción general bajo la asociación

$$(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) \mapsto (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \quad (2.52)$$

definida como

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{\sin \theta} [(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \sin \psi + p_\theta \sin \theta \cos \psi], \\ \Pi_2 &= \frac{1}{\sin \theta} [(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \sin \psi], \\ \Pi_3 &= p_\psi. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Este mapeo toma variables canónicas  $(\theta, \phi, \psi)$  y sus momentos conjugados  $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$  al paréntesis de Poisson (signo menos) en sentido siguiente. Si  $F$  y  $K$  son funciones de  $\Pi_i$ , ellos a su vez determinan

funciones de las variables canónicas (usando la relación (2.53)). Se puede mostrar que, usando regla de la cadena

$$\{F, K\}_{(-), \text{Lie-Poisson}} = \{F, K\}_{\text{canónico}}. \quad (2.54)$$

Decimos que (2.53) es un mapeo canónico o un mapeo de Poisson y el paréntesis de Lie-Poisson (signo menos) se obtiene del paréntesis canónico mediante *reducción*.

Para el cuerpo rígido libre de torcas alrededor de su centro de masa,  $G$  es el grupo de rotaciones  $SO(3)$  y los ángulos de Euler (y sus momentos conjugados) con coordenadas en  $T^*G$ . La elección de  $T^*G$  como espacio fase *primordial* está en acuerdo con los procedimientos clásicos en mecánica: el espacio de configuración  $SO(3)$  es el adecuado ya que cualquier elemento de  $A$  en él, describe la orientación del cuerpo rígido relativo a una configuración de referencia. Para una descripción usando el formalismo lagrangiano, se debe definir el espacio  $TSO(3)$  con coordenadas  $(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$  y la descripción hamiltoniana se obtiene mediante la transformada de Legendre que mapea  $TG \mapsto T^*G$ .

El cambio de  $T^*G$  al espacio donde vive  $\mathbf{\Pi}$  (espacio de momento angular de cuerpo) dado por (2.53) se determina por una *traslación izquierda* en el grupo. Este mapeo es un ejemplo del llamado *mapeo de momento*, una asignación cuyas componentes son cantidades de Noether asociados con el grupo de simetría. Para el espacio de coordenadas se usa la acción derecha y el paréntesis con signo (+), útil en la descripción dinámica de fluidos ya que ahí interesa en particular, la velocidad angular convectiva.

## 2.6. Paréntesis de Lie-Poisson y el cuerpo rígido

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, el cuerpo rígido admite una estructura Lie-Poisson y constituye un ejemplo de variedades de Poisson que *no* son simplécticas.

Si  $G$  es un grupo de Lie y  $\mathfrak{g} = T_e G$  es su álgebra de Lie con  $[\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$  el corchete de Lie asociado, entonces el espacio dual  $\mathfrak{g}^*$  es una variedad de Poisson con dos corchetes

$$\{f, k\}_{\pm}(\mu) = \pm \langle \mu, \left[ \frac{\delta f}{\delta \mu'}, \frac{\delta k}{\delta \mu} \right] \rangle. \quad (2.55)$$

Donde  $\mathfrak{g}$  es identificado como  $\mathfrak{g}^{**}$  tal que la derivada funcional  $\delta f / \delta \mu \in \mathfrak{g}$  está definida vía  $\{v, \delta f / \delta \mu\} = \mathbf{D}f(\mu) \cdot v$  para  $v \in \mathfrak{g}^*$  y el operador  $\mathbf{D}$  es de derivada. La notación  $\delta f / \delta \mu$  es usada por la aplicación en teoría de campos donde las derivadas frecuentemente son funcionales<sup>12</sup>. Asumiendo que  $\mathfrak{g}$  es de dimensión finita y eligiendo coordenadas  $(\zeta^1, \dots, \zeta^m)$  en  $\mathfrak{g}$ ;  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  en  $\mathfrak{g}^*$ , tenemos que el paréntesis de Lie-Poisson (2.55) es

$$\{f, k\}_{\pm}(\mu) = \pm \mu_a C_{bc}^a \frac{\partial f}{\partial \mu_b} \frac{\partial k}{\partial \mu_c}; \quad (2.56)$$

siendo  $C_{bc}^a$  las constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$  que siguen la tabla de multiplicar  $[e_a, e_b] = C_{bc}^a e_c$ , con  $e_i$  elementos de una base coordenada para  $\mathfrak{g}$  y donde, para  $\zeta \in \mathfrak{g}$  se tiene  $\zeta = \zeta^a e_a$ . Para  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mu = \mu_a e^a$  con  $(e^1, \dots, e^m)$  la base dual. La expresión (2.56) es exactamente la misma que (2.16) sin embargo, la primera está dotada de información adicional: los signos ( $\pm$ ) y el énfasis en las álgebras duales y sus elementos que pueden identificarse mediante isomorfismos (hat) al espacio euclideo usual  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>12</sup>En caso contrario, solo representan derivadas parciales.

### 2.6.1. Reducción de Lie-Poisson

El signo en (2.56) se determina a la luz de la *reducción de Lie-Poisson* que, puede sintetizarse como sigue. Sean los mapeos (izquierdos  $L_g$  y derechos  $R_g$ ) de traslación hacia la identidad  $e$  definidos como

- $\lambda : T^*G \mapsto \mathfrak{g}^*$  tal que  $p_g \mapsto (T_e L_g)^* p_g \in T_e^* G \cong \mathfrak{g}^*$ ;
- $\rho : T^*G \mapsto \mathfrak{g}^*$  tal que  $p_g \mapsto (T_e R_g)^* p_g \in T_e^* G \cong \mathfrak{g}^*$ .

Entonces  $\lambda$  ( $\rho$ ) es un mapeo de Poisson si se toma el signo  $(-)$  ( $+$ )<sup>13</sup>. Todo hamiltoniano invariante por izquierda y campo vectorial hamiltoniano en  $T^*G$  es mapeado por  $\lambda$  a un hamiltoniano y campo vectorial hamiltoniano en  $\mathfrak{g}^*$ . Una afirmación similar ocurre para el caso invariante por derecha. Decimos que el sistema original en  $T^*G$  ha sido *reducido* a  $\mathfrak{g}^*$ . La razón por la cual  $\lambda$  y  $\rho$  son mapeos de Poisson es debido a que la acción sobre  $G$  por el mismo, realiza al espacio  $T^*G$  por traslación derecha e izquierda, respectivamente.

### 2.6.2. Ecuaciones de Euler

Recordemos las ecuaciones de Euler [55]

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{I}\mathbf{\Omega}, \quad (2.57)$$

siendo  $\mathbf{\Pi}$  el momento angular. Estas ecuaciones son hamiltonianas relativas a una estructura de Lie-Poisson. El grupo  $G = SO(3)$  es el espacio de configuración. Entonces  $\mathfrak{g} \cong (\mathbb{R}^3, \times)$  y podemos identificar  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ . En [23] se anuncia que la correspondiente estructura de Lie-Poisson en  $\mathbb{R}^3$  puede escribirse como

$$\{f, k\}(\mathbf{\Pi}) = -\mathbf{\Pi} \cdot (\nabla f \times \nabla k). \quad (2.58)$$

Compárese esta última con (2.56). Para el sistema del cuerpo rígido, se elige el signo  $(-)$  en el paréntesis de Lie-Poisson. Comenzando con el Hamiltoniano del cuerpo rígido, podemos obtener directamente la fórmula  $H(\mathbf{\Pi}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi} \cdot (\mathbf{I}^{-1} \mathbf{\Pi})$ , que es la energía cinética. Tomando este hamiltoniano podemos afirmar lo siguiente:

- Las ecuaciones de Euler son equivalentes a  $\dot{f} = \{f, H\}$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(P)$ ,
- Para  $(P, \{, \})$ , una función  $C \in \mathcal{F}(P)$  que satisface  $\{C, f\} = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}(P)$  es llamada función de Casimir.

Una diferencia crucial entre variedades simplécticas y variedades de Poisson es que, para las primeras, las únicas funciones de Casimir son aquellas constantes mientras que para las segundas, hay mayor diversidad de estas funciones. En el caso del cuerpo rígido, la función  $C : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

$$C(\mathbf{\Pi}) = \Phi(|\mathbf{\Pi}|^2), \quad (2.59)$$

es una función de Casimir, con  $\Phi$  diferenciable. Las funciones de Casimir son constantes de Movimiento para cualquier hamiltoniano ya que  $\dot{C} = \{C, H\} = 0$ . En particular,  $|\mathbf{\Pi}|^2$  es una constante de movimiento y que representa a lo largo de esta tesis, la esfera de momento angular del cuerpo rígido.

<sup>13</sup>Esto se sigue por el hecho de que  $\lambda$  y  $\rho$  son mapeos de momento.

### 2.6.3. Reducción de la dinámica

Los mapeos de Poisson  $\lambda$  y  $\rho$  en (2.6.1) inducen un isomorfismo entre  $T^*G/G$  y  $\mathfrak{g}^*$  (con el signo (-) y (+) en el paréntesis respectivo) y por ello es un caso especial de reducción de Poisson. Enunciamos un teorema general que especifica la relación entre  $T^*G$  y  $\mathfrak{g}^*$ <sup>14</sup> para el caso específico de invariancia por izquierda.

*Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H : T^*G \mapsto \mathbb{R}$  un hamiltoniano invariante por izquierda. Sea  $h : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathbb{R}$  la restricción de  $H$  a la identidad. Para una curva  $p(t) \in T_{g(t)}^*G$ , sea  $\mu(t) = (T_{g(t)}^*L) \cdot p(t) = \lambda(p(t))$  la curva inducida en  $\mathfrak{g}^*$ , asumiendo que  $\dot{g} = \partial H / \partial p \in T_g G$ . Entonces son equivalentes las siguientes sentencias:*

- (i)  $p(t)$  es una curva integral de  $\mathbf{X}_H$ , es decir, las ecuaciones de Hamilton en  $T^*G$  se cumplen.
- (ii) Para cualquier  $F \in \mathcal{F}(T^*G)$ ,  $\dot{F} = \{F, H\}$  con  $\{, \}$  el paréntesis canónico en  $T^*G$ .
- (iii)  $\mu(t)$  satisface las ecuaciones de Lie-Poisson

$$\frac{d\mu}{dt} = \text{ad}_{\delta h / \delta \mu}^* \mu,$$

donde  $\text{ad}_{\xi} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$  es definido como  $\text{ad}_{\xi} \eta = [\xi, \eta]$  y  $\text{ad}_{\xi}^*$  es su dual, es decir

$$\dot{\mu}_a = C_{ba}^d \frac{\delta h}{\delta \mu_b} \mu_d.$$

- (iv) Para cualquier  $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ , se tiene

$$\dot{f} = \{f, h\}_-,$$

siendo  $\{, \}_-$  el (menos) paréntesis de Lie Poisson.

## 2.7. Estructura de Nambu del cuerpo rígido

En 1973, Y. Nambu publicó un artículo multicitado [20] en donde propone la generalización de la mecánica hamiltoniana a espacios fase 3-dimensionales que involucran dos hamiltonianos y tres variables canónicas. El cuerpo rígido, como el mismo presenta, puede adoptar este formalismo que sugiere su potencial aplicación a otros sistemas físicos. Damos una breve reseña de [20] para el trabajo posterior que presenta esta tesis.

Sea  $(x, y, z) = \mathbf{r}$  una terna de variables canónicas que genera el espacio fase tridimensional y dos funciones  $H$  y  $G$  dependientes de  $\mathbf{r}$  que podemos asignarle el carácter de funciones hamiltonianas, es decir, determinan el movimiento de puntos en el espacio fase. Las ecuaciones de 'Hamilton' serán

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(x, y)}, \quad (2.60)$$

o bien, en forma vectorial

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla H \times \nabla G. \quad (2.61)$$

<sup>14</sup>Cuya demostración escapa del alcance de este trabajo.

Y para cualquier función  $F(x, y, z)$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \nabla F \cdot (\nabla H \times \nabla G). \quad (2.62)$$

Se conoce como *Paréntesis de Poisson generalizado*  $[F, G, H]$ . Es antisimétrico bajo el intercambio de un par de componentes por el tensor de Levi-Civita. La órbita del sistema ocurre en la intersección de las superficies  $H = cte$ ,  $G = cte$ . Esta estructura la posee el cuerpo rígido, donde, como ya vimos, las cantidades conservadas, funciones de Casimir o integrales de movimiento son el cuadrado del momento angular y la energía. El paréntesis de Nambu (o Poisson-Nambu, en adelante) posee invariancia ante cierto conjunto de transformaciones  $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$  que serán canónicas si

$$[x', y', z'] = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = 1. \quad (2.63)$$

Entonces

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x', y', z')}. \quad (2.64)$$

Sin embargo, los conjuntos  $(H, G)$  y  $(H', G')$  pueden generar la misma transformación si existe una relación funcional entre  $H' = h(H, G)$  y  $G' = g(H, G)$  tal que

$$\frac{\partial(H', G')}{\partial(H, G)} = 1. \quad (2.65)$$

Este tipo de transformaciones son diferentes a las transformaciones de coordenadas canónicas y por ello Nambu enfatiza a las primeras como transformaciones de norma que forman el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Las transformaciones canónicas pueden escribirse como  $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$ , es decir lineales. La ecuación (2.63) implica que la matriz  $A$  es unimodular:  $\det A = 1$ . Por ello, las transformaciones canónicas forman el grupo  $SL(3, \mathbb{R})$ . Para generar este tipo de transformaciones, las funciones  $H, G$  deben ser formas lineales y cuadráticas,

$$H = \sum_i a_i r_i, \quad G = \sum_{ij} \frac{1}{2} r_i B_{ij} r_j, \quad (2.66)$$

siendo  $B_{ij}$  simétrica  $3 \times 3$ . Entonces

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \times (B\mathbf{r}), \quad \text{o bien } \dot{r}_i = \sum_{jkl} \epsilon_{ijk} a_j B_{kl} r_l. \quad (2.67)$$

Y por tanto, la matriz  $A$  es de la forma

$$A_{ik} = \sum_{jl} \epsilon_{ijl} a_j B_{lk}. \quad (2.68)$$

El número de parámetros es tres para  $H$  y seis para  $G$  pero existe la redundancia de norma bajo el reescalamiento  $H \mapsto \lambda H$  y  $G \mapsto G/\lambda$  y el número de grados de libertad se reduce a 8, el correcto para  $SL(3, \mathbb{R})$ . Para el caso del cuerpo rígido, Nambu hace la siguiente observación: ambas funciones de Casimir,  $H, G$  son formas cuadráticas (de las componentes del momento angular); asumamos en general que

$$H = (\mathbf{r}, A\mathbf{r}), \quad G = (\mathbf{r}, B\mathbf{r}), \quad (2.69)$$

siendo  $A, B$  matrices simétricas. Es posible, por tanto, llevarlas a una forma diagonal

$$H = \lambda (\mathbf{r}', I d\mathbf{r}'), \quad G = (\mathbf{r}', \Lambda \mathbf{r}') \quad (2.70)$$

mediante una transformación canónica lineal siempre que  $A$  sea positiva (o negativa) definida. Como ejemplo, Nambu propone primero diagonalizar  $A$  mediante una rotación, luego hacerla proporcional a la unidad mediante un reescalamiento de las coordenadas. Finalmente, hacer  $G$  diagonal mediante una segunda rotación. A su vez, existe una libertad de elegir transformaciones de norma lineales entre  $H$  y  $G$  de la forma

$$A \mapsto \alpha A + \beta B, \quad B \mapsto \gamma A + \delta B, \quad (2.71)$$

siempre que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , propiedad que caracteriza a  $SL(2, \mathbb{R})$ .

## 2.8. Fibrado de Hopf

Al efectuar la reducción del cuerpo rígido, el espacio reducido es

$$J^{-1}(\mu)/G_\mu = J^{-1}(\mu)/S^1,$$

que es la esfera  $S^2$ . A su vez,  $J^{-1}(\mu)$  es topológicamente equivalente al grupo  $SO(3)$  y este es equivalente a  $S^3/\mathbb{Z}_2$ . Por tanto, la reducción es un mapeo  $SO(3) \mapsto S^2$  que puede darse explícitamente tomando una matriz ortogonal  $A \in SO(3)$  y mapearlo a un vector  $A\hat{k}$  a lo largo del eje  $z$ . Esta aparente proyección es de hecho, una restricción del mapeo de momento y al componerla con el mapeo  $S^3 \sim SU(2) \mapsto SO(3)$  resulta una fibración de Hopf. El mapeo de Hopf ocurre de manera natural cuerpo rígido, como un mapeo de reducción de la representación material del cuerpo.

### 2.8.1. Fase geométrica

El péndulo de Foucault es un ejemplo de cómo la dinámica de un objeto, al completar un ciclo, adquiere una fase no nula (corrimiento en el ángulo del plano de movimiento mientras el péndulo se balancea). Cuando el sistema completa un ciclo en su evolución (movimiento circular del péndulo debido a la rotación de la Tierra), adquiere una fase de carácter geométrico. Al transportar paralelamente el marco de referencia ortonormal a lo largo de la misma línea de latitud, el sistema regresa al punto inicial con diferencia de fase  $\Delta\theta = 2\pi \cos\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo de oscilación respecto a la vertical.

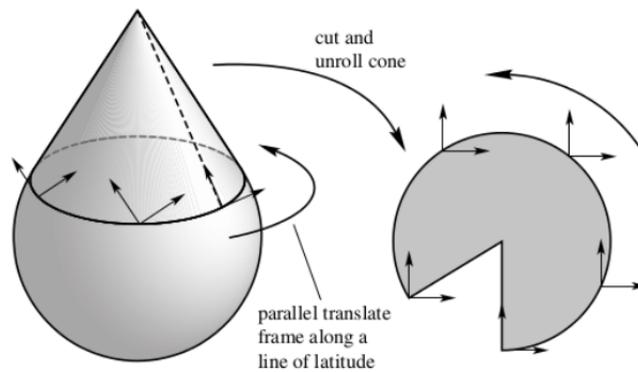


Figura 2.2: Interpretación geométrica del péndulo de Foucault [45].

En geometría, cuando un sistema de referencia ortonormal regresa rotado a su punto de partida, se llama *holonomía* (anholonomía). Este es el concepto fundamental tras la idea de la fase geométrica que ocurre en muchos sistemas físicos como el cuerpo rígido<sup>15</sup>.

<sup>15</sup>Otros ejemplos ocurren en dinámica molecular, magnetismo y sistemas cuánticos de dos niveles.

Consideremos un sistema integrable que depende de varios parámetros. En variables ángulo-acción

$$(I_1, \dots, I_n; \theta_1, \dots, \theta_n);$$

asumimos el hamiltoniano  $H(I_1, \dots, I_n; \theta_1, m)$  siendo  $m \in M$  del espacio de parámetros  $M$ . El sistema, al no depender de las variables  $I_i$  puede ser identificado con un toro  $n$  dimensional  $\mathbb{T}^n$ . Sea  $c$  un ciclo (o bucle) basado en el punto  $m_0 \in M$ . Buscamos comparar las variables angulares en el toro sobre  $m_0$ , una vez que el sistema cambia muy suavemente mientras los parámetros recorren el circuito  $c$ . La dinámica sobre la fibra varía mientras los parámetros se mueven sobre  $c$ , incluso si las acciones varían en un monto despreciable, habrá una diferencia de fase debido a las frecuencias  $\omega^i = \partial H / \partial I^i$  del sistema. Es posible definir

$$\text{Fase dinámica} := \int_0^1 \omega^i(I, c(t)) dt.$$

Al completar el circuito  $c$ , regresamos al mismo toro y por tanto una comparación entre ángulos tiene sentido. Existe a su vez, una corrección a la ecuación anterior llamada *fase geométrica*. Un resultado clave es que asociado a la integral sobre el circuito, la fase geométrica es la holonomía de una *conexión* llamada de Hannay-Berry en  $M$  (Toro-Fibra) que es construido con las variables de ángulo acción.

### Fases en el cuerpo rígido

El cuerpo rígido puede ser visto como el movimiento geodésico respecto de una métrica Riemanniana invariante por izquierda en  $SO(3)$  [21; 68]. El espacio fase es  $P = T^*SO(3)$  y el mapeo de momento  $J: P \mapsto \mathbb{R}^3$  para la acción izquierda  $SO(3)$  es la traslación derecha respecto a la identidad. Identificamos  $so(3)^*$  con  $so(3)$  via la forma de Killing y asociamos  $\mathbb{R}^3$  con  $so(3)$  via el mapeo *hat*:  $\hat{v}(w) = v \times w$ . Puntos en  $so(3)^*$  son considerados como la reducción izquierda de  $T^*SO(3)$  por  $G = SO(3)$  y son los momentos angulares vistos desde el marco anclado al cuerpo.

Los espacios reducidos  $P_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$  son identificados con esferas en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $|\mu|$  con su forma simpléctica  $\omega_\mu = -dS/|\mu|$ , donde  $dS$  es el área estándar de la esfera.  $G_\mu$  consiste entonces en rotaciones en torno al eje  $\mu$ . Las trayectorias de la dinámica reducida son obtenidas intersectando una familia homotética de elipsoides (que representan la energía) con las esferas de momento angular. Todas las trayectorias son periódicas, salvo cuatro de ellas que representan trayectorias *homoclínicas*.

Supongamos que una trayectoria reducida  $\mathbf{\Pi}(t)$  está dada en  $P_\mu$  y posee periodo  $T$ . Después de este tiempo, nos preguntamos por cuánto ha rotado el cuerpo rígido en el espacio. El momento angular espacial es  $\boldsymbol{\pi} = \mu = g\mathbf{\Pi}$ , que es el valor conservado  $\mathbf{J}$ . Aquí,  $g \in SO(3)$  es la posición del cuerpo rígido y  $\mathbf{\Pi}$  el momento angular en el cuerpo. Si  $\mathbf{\Pi}(0) = \mathbf{\Pi}(T)$ , entonces  $\mu = g(0)\mathbf{\Pi}(0) = g(T)\mathbf{\Pi}(T)$  y por tanto  $g(T)^{-1}\mu = g(0)^{-1}\mu$ , es decir,  $g(T)g(0)^{-1}\mu$  es una rotación en torno al eje  $\mu$ .

En orden de responder nuestra pregunta, sea  $c(t)$  la trayectoria correspondiente en  $J^{-1}(\mu) \in P$ . Identificando  $T^*SO(3)$  con  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$  por trivialización izquierda (identidad), tal que  $c(t)$  es identificado con  $(g(t), \mathbf{\Pi})$ . Ya que la trayectoria reducida  $\mathbf{\Pi}(t)$  cierra después de un tiempo  $T$ , recuperamos el hecho de que  $c(T) = gc(0)$  para alguna  $g \in G_\mu$ . Escribiendo  $g = g(T)g(0)^{-1}$  en la notación anterior, tenemos

$$g = \exp[(\Delta\theta)\zeta], \tag{2.72}$$

donde  $\zeta = \mu/|\mu|$  identifica a  $g_\mu$  con  $\mathbb{R}$  por acción izquierda  $a\zeta \mapsto a$  para  $a \in \mathbb{R}$ . Sea  $D$  una de las dos capas esféricas de  $S^2$  adjuntas por la trayectoria reducida, sea  $\Lambda$  el correspondiente ángulo sólido, esto es,  $|\Lambda| = (\text{area}D)/|\mu|^2$  y sea  $H_\mu$  la energía de la trayectoria reducida.

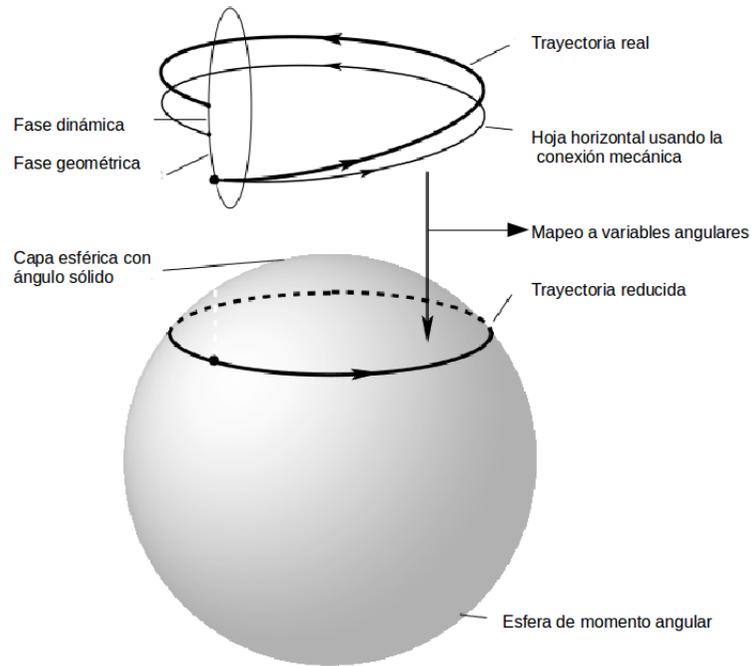


Figura 2.3: Geometría asociada a la ecuación (2.73). Detalles ver [45].

Montgomery, Ratiu y Marsden mostraron que módulo  $2\pi$ , la fórmula para la fase en el cuerpo rígido es [21]

$$\Delta\theta = \frac{1}{|\mu|} \left[ \int_D \omega_\mu + 2H_\mu T \right] = -\Lambda + \frac{2H_\mu T}{|\mu|}. \quad (2.73)$$

## Capítulo 3

# Clasificación de la simetría de norma $SL(2, \mathbb{R})$ en las ecuaciones de Euler

*Detrás del decorado de la inmensa existencia, en el más negro abismo, distingo claramente singulares ambientes, y, presa inescapable de mis éxtasis lúcidos, arrastro unas serpientes que me muerden mis talones.*  
La voz, C. Baudelaire

---

### 3.1. Antecedentes

En este capítulo se detalla y desgloza el contenido del artículo publicado [27] cuyo título corresponde al de este capítulo<sup>1</sup>. Se revisa exhaustivamente la clasificación de las transformaciones de norma en el cuerpo rígido dentro del contexto de la mecánica de Nambu, donde las ecuaciones de Euler tienen estructura bi-Hamiltoniana y está dotada de una estructura de Lie-Poisson<sup>2</sup>. Se analiza la estructura general de los vectores hamiltonianos que dan lugar a la dinámica del sistema y que están escritos en términos de las componentes del momento angular en el sistema anclado al cuerpo. Se obtiene una clasificación detallada de las diferentes estructuras Lie-Poisson reportadas en la literatura previamente.

### 3.2. El cuerpo rígido

En un marco de referencia anclado al cuerpo y libre de torcas externas, las ecuaciones de Euler

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \mathbf{\Pi} \times [I]^{-1}\mathbf{\Pi}, \quad (3.1)$$

describen la cinemática del cuerpo rígido (CR). El vector de momento angular es  $\mathbf{\Pi}$  y el momento de inercia  $[I]$ . El sistema anclado al cuerpo puede orientarse de tal forma que coincida con sus ejes principales de inercia en donde la matriz  $I$  es diagonal. Sin pérdida de generalidad, en lo sucesivo consideraremos un ordenamiento en los valores de los momentos de inercia

$$I_1 < I_2 < I_3. \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Véase <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491617300714?via>

<sup>2</sup>Detalles sobre estos conceptos se encuentran en el capítulo (2) y las referencias que allí se muestran.

Escritos en una base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , las componentes del momento angular coinciden con los generadores del álgebra de Lie  $so(3)$

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \epsilon_{ijk}\Pi_k. \quad (3.3)$$

El sistema posee dos integrales de movimiento: la energía cinética  $E$  (no hay torcas) y el cuadrado del momento angular  $\Pi$  cuyas expresiones son

$$E = \frac{\Pi_1^2}{2I_1} + \frac{\Pi_2^2}{2I_2} + \frac{\Pi_3^2}{2I_3}, \quad \Pi^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2, \quad (3.4)$$

respectivamente. En un espacio Euclidiano (cuyas coordenadas son las componentes del momento angular), la ecuación de la energía representa un elipsoide con semi ejes  $\sqrt{2EI_1}$ ,  $\sqrt{2EI_2}$ ,  $\sqrt{2EI_3}$ , mientras que la integral de movimiento  $\Pi^2$  representa una esfera de radio  $\Pi$ . Ahora bien, el radio de la esfera está acotada justo por los valores de los semiejes máximos y mínimos del elipsoide  $2EI_1 < \Pi^2 < 2EI_3$  según nuestro ordenamiento (3.2). La dinámica del problema es usualmente resuelta mediante el análisis de Poincot (véase la sección 1.7). Cuando el momento angular se desplaza relativo a los ejes de inercia, genera una curva que representa la intersección de las superficies codificadas en las integrales de movimiento  $E$  y  $\Pi^2$ . Es claro que las soluciones de las ecuaciones de Euler (3.1) dependen de 5 parámetros; 3 momentos de inercia, la energía y el cuadrado del momento angular. Sin embargo, más adelante mostraremos cómo podemos reescribir el problema de tal manera que el sistema tenga sólo 2 parámetros independientes.

### 3.3. Funciones de Casimir

Recordemos del capítulo (2) que la mecánica de Nambu en tres dimensiones, requiere dos *funciones Hamiltonianas* o funciones de Casimir. Para el CR asimétrico los momentos de inercia son todos diferentes y por ello, el uso de coordenadas esferoconales se vuelve relevante [9]. Estas coordenadas se implican naturalmente por las funciones de Casimir del sistema:  $\Pi^2$  y  $e_0 \equiv e_1\Pi_1^2 + e_2\Pi_2^2 + e_3\Pi_3^2$ , donde los coeficientes adimensionales  $e_i$ 's están restringidos por dos condiciones como se verá más adelante (3.14). En los casos degenerados, donde dos momentos principales de inercia son iguales (caso simétrico) o los tres momentos son iguales (caso esférico), las coordenadas esferoconales son las que incorporan naturalmente las funciones de Casimir en el sistema:  $\Pi_3$  y  $\Pi^2$ . Nótese que en el caso asimétrico, los dos Casimir son cuadráticos en  $\Pi_i^2$ , mientras en el simétrico uno de ellos es lineal. Los argumentos esgrimidos aquí son detallados en [10; 15] y son retomados en este trabajo debido a que nuestro análisis depende en gran medida de las funciones de Casimir.

El punto de partida consiste en reconocer que cualquier vector en el álgebra  $o(3)$  puede ser rotado o proyectado en, digamos  $\Pi_3$  y por lo tanto,  $\Pi^2$  y  $\Pi_3$ , constituye una base canónica. Sin embargo, el caso asimétrico no está descrito propiamente en esta base. Para hallar una base apropiada, es necesario considerar tensores simétricos de segundo orden de la forma

$$N = \sum_{ij} N_{ij}\Pi_i\Pi_j, \quad (3.5)$$

en el álgebra envolvente  $o(3)$ . Un ejemplo de este tensor es la energía cinética del CR (3.4), donde  $N$  es una matriz simétrica real y se trabaja en una representación diagonal. Sus eigenvalores están dados por los inversos de los momentos de inercia  $N_{ii} = 1/I_i$ . La clasificación depende del número de eigenvalores diferentes que se derivan de los tres casos mencionados dos de los cuales están descritos por la base canónica, y el restante por una base de dos funciones cuadráticas. Los casos son los siguientes:

- *Caso esférico*: Si  $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$ , el tensor  $N = \Pi^2/I$  es escrito en términos de la base canónica y eigenvalor  $I^{-1}$ .

- *Caso simétrico*: Sin pérdida de generalidad, si  $I_1 = I_2 \equiv I \neq I_3$ , el tensor  $N = \Pi^2/I + \Pi_3^2/(I_3 - I)$  se escribe en términos de la base canónica y eigenvalores  $0, I^{-1}, 1/(I_3 - I)$ .
- *Caso asimétrico*: Si  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  el tensor  $N = \Pi^2/I_1 + (1/I_1 - 1/I_3)(k_2^2\Pi_2^2 + \Pi_3^2)$ , y la base es diferente de la canónica con eigenvalores  $I_1^{-1}, I_1^{-1} - k_2^2\Lambda, I_1^{-1} + k_2^2\Lambda$ , con  $\Lambda = (I_3 - I_1)/I_1 I_3$ . En adición a  $\Pi^2$  los otros tensores cuadráticos pueden ser cualquiera entre  $k_2^2\Pi_2^2 + \Pi_3^2$ ,  $\Pi_1^2 + k_1^2\Pi_2^2$  ó  $k_2^2\Pi_1^2 - k_1^2\Pi_3^2$ . Aquí consideramos,

$$k_1^2 \equiv \frac{\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}}{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}}, \quad k_2^2 \equiv \frac{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}}{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}}, \quad (3.6)$$

que toma valores en el rango  $0 < k_1^2 < 1, 0 < k_2^2 < 1$  y a su vez satisfacen  $k_1^2 + k_2^2 = 1$ .

En el caso asimétrico, se requiere una función cuadrática (además de  $\Pi^2$ ) para completar la base, ya que por ejemplo,  $\Pi_3^2 + k_2^2\Pi_2^2 = \Pi^2 - (\Pi_1^2 + k_1^2\Pi_2^2)$ . Debemos enfatizar que el tensor sólo depende de un parámetro real, como  $k_1^2$ . De acuerdo con [10; 12; 15] elegimos escribir el segundo tensor cuadrático expresando la matriz  $N$  en términos de sus representaciones irreducibles: su traza y su matriz simétrica sin traza, con lo que obtenemos

$$N = \left(N_{11} - \frac{1}{3}\text{Tr}N\right)\Pi_1^2 + \left(N_{22} - \frac{1}{3}\text{Tr}N\right)\Pi_2^2 + \left(N_{33} - \frac{1}{3}\text{Tr}N\right)\Pi_3^2 - \frac{1}{3}\text{Tr}N\Pi^2. \quad (3.7)$$

Podemos ahora reemplazar los momentos principales de inercia  $I_i/N_{ii}$  por *parámetros de inercia* equivalentes  $\bar{e}_i$  que tienen dimensiones del inverso de los momentos de inercia. La diferencia principal entre estas dos cantidades es que  $\bar{e}_i$  puede ser positiva, negativa o cero mientras que los momentos originales son siempre positivos. Escribiendo las componentes diagonales de la parte simétrica sin traza de  $N$  como

$$N_{ii} - \frac{1}{3}\text{Tr}N \equiv \bar{e}_i, \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

la condición de traza cero provee una restricción para los tres parámetros  $\bar{e}_i$ 's

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0. \quad (3.9)$$

La segunda restricción en los parámetros de inercia se obtiene calculando el cuadrado de la matriz sin traza y luego calcular su traza. Esto arroja la condición

$$\frac{1}{3} \left[ (N_{11} - N_{22})^2 + (N_{22} - N_{33})^2 + (N_{33} - N_{11})^2 \right] = \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2. \quad (3.10)$$

Las dos condiciones en los parámetros de inercia son las expresiones para las funciones simétricas invariantes de primer y segundo grado de las raíces de una ecuación polinomial de tercer grado. La invariancia es respecto al grupo de Galois que, para un polinomio de tercer grado, corresponde al grupo simétrico  $S_3$  o el grupo de permutaciones  $P_3$ . En la notación estándar de las funciones elípticas de Weierstrass (véase apéndice A), un polinomio de tercer orden siempre puede escribirse (después de una transformación de Tschirnhaus) de la forma  $4y^3 - g_2y - g_3 = 4(y - \bar{e}_1)(y - \bar{e}_2)(y - \bar{e}_3) = 0$  y, de hecho, la transformación (3.8) es una transformación de Tschirnhaus aplicada al polinomio característico asociado a la matriz  $N_{ij}$  de la ecuación (3.5)<sup>3</sup>. Las tres funciones invariantes y simétricas de las raíces de la ecuación (3.9) son

<sup>3</sup>Detalles de estas ideas pueden consultarse en [129]

$g_2 = -4(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1) = 2(\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2)$  y  $g_3 = 4\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ . El polinomio cúbico tiene tres raíces reales solo si  $g_2 > 0$  que se verifica tomando en cuenta (3.8) y considerando (3.10)

$$g_2 \equiv \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right)^2 + \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)^2 \right] > 0. \quad (3.11)$$

Esta expresión puede interpretarse como una magnitud de desviación respecto del caso esférico. La función invariante  $g_3$  puede tener cualquier signo o ser nula. Las raíces  $\bar{e}_i$ 's pueden ser escritas en términos de estos invariantes y debido a que el invariante de primer orden es cero, las soluciones están dadas en términos de  $g_2$  y  $g_3$  de la forma (ver por ejemplo [130])

$$\bar{e}_1 = -\sqrt{\frac{g_2}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right), \quad \bar{e}_2 = -\sqrt{\frac{g_2}{3}} \cos\left(\frac{\phi + \pi}{3}\right), \quad \bar{e}_3 = -\sqrt{\frac{g_2}{3}} \cos\left(\frac{\phi - \pi}{3}\right), \quad (3.12)$$

donde  $\phi \equiv \arccos\left(-\left(3/g_2\right)^{3/2} g_3\right)$  es una variable angular. Estas expresiones están relacionadas con aquellas que aparecen en [16], donde se introduce el *parámetro de asimetría*  $\kappa = \pi + \phi/3$ . Si utilizamos tal parámetro podemos definir los *parámetros de inercia adimensionales*  $e_i$ 's a través de  $\bar{e}_i \equiv \sqrt{g_2/3}e_i$ , a saber

$$e_1 = \cos \kappa, \quad e_2 = \cos(\kappa - 2\pi/3), \quad e_3 = \cos(\kappa + 2\pi/3), \quad (3.13)$$

que satisfacen las condiciones

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 3/2, \quad \text{y} \quad e_1 e_2 e_3 = (\cos 3\kappa)/4. \quad (3.14)$$

Finalmente, producto de este análisis, se puede afirmar que cualquier tensor de segundo orden  $N$  puede ser expresado como combinación de dos funciones de Casimir cuadráticas  $\Pi^2$  y  $e_1\Pi_1^2 + e_2\Pi_2^2 + e_3\Pi_3^2$ , como sigue

$$N = \frac{1}{3} \text{Tr} N \Pi^2 + \sqrt{\frac{g_2}{3}} (e_1\Pi_1^2 + e_2\Pi_2^2 + e_3\Pi_3^2). \quad (3.15)$$

Desde un punto de vista geométrico, en un espacio 3-dimensional (parametrizado por los parámetros de inercia  $e_i$ 's), la condición general del caso asimétrico expresada en (3.14), define un plano que corta al origen, mientras que la segunda condición representa una esfera de radio  $\sqrt{3}/2$ . La intersección de estas dos superficies es un círculo parametrizado por  $\kappa$ . El papel del invariante  $g_2$  es cambiar el tamaño de la esfera y por tanto el círculo que éste intersecta, mientras que  $g_3$  parametriza la variable  $\kappa$  que describe el círculo intersectante. Si valores explícitos de los momentos  $I_i$  son dados, las cantidades  $\text{Tr} N$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  y  $\kappa$  están completamente determinadas. Por otro lado, el parámetro de asimetría está acotado  $\kappa \in [0, \pi/3]$  y por tanto los parámetros de inercia se ordenan como sigue

$$e_3 \leq e_2 \leq e_1, \quad (3.16)$$

con  $e_3 \neq e_1$  (condición equivalente a (3.2)).

En general, para  $\kappa \in [0, 2\pi]$ , obtenemos los seis posibles ordenamientos para los parámetros  $e_i$  debido al hecho de que los parámetros de inercia están dados en términos de invariantes bajo el grupo de Galois que es de orden 6. Todos estos posibles valores se muestran en la figura (3.1).

En particular, cuando  $\kappa = n\pi/3$ , con  $n \in [1, 6]$ , el CR es simétrico (dos momentos de inercia iguales); para  $\kappa = (2n - 1)\pi/6$  se tiene el caso más asimétrico (un parámetro de inercia nulo). Para cualquier valor de  $\kappa$ , al menos un parámetro es positivo, otro negativo y el tercero puede ser positivo, negativo o cero.

En términos de  $e_i$ 's, los parámetros  $k_1^2$  y  $k_2^2$  se reescriben como

$$k_1^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k_2^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \quad (3.17)$$

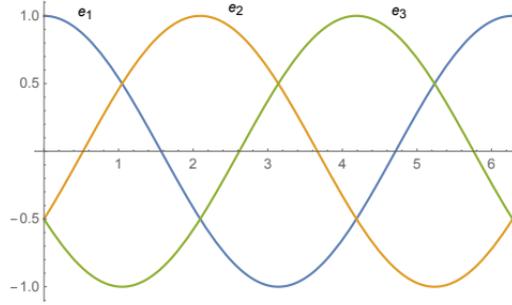


Figura 3.1: Parámetros de inercia adimensionales para diferentes valores de  $\kappa \in [0, 2\pi]$  en donde  $e_1 = \cos \kappa$ ,  $e_2 = \cos(\kappa - 2\pi/3)$  y  $e_3 = \cos(\kappa + 2\pi/3)$ .

que pueden cambiar según el ordenamiento. Por ejemplo, si el parámetro de asimetría toma valores en  $\kappa \in (\pi/3, 2\pi/3)$ , el nuevo ordenamiento resulta  $e_3 < e_1 < e_2$  y los valores de (3.17) se obtienen por el intercambio  $e_1 \leftrightarrow e_2$ , bajo el cual

$$\frac{1}{k_1^2} = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}, \quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{e_2 - e_1}{e_2 - e_3}. \quad (3.18)$$

Considérese el cuadro (3.1) que representa los seis casos.

Intervalo de $\kappa$	Ordenamiento	Cambio en $k_i$	
$\kappa \in (0, \pi/3)$	$e_3 < e_2 < e_1$	$k_1^2$	$k_2^2$
$\kappa \in (\pi/3, 2\pi/3)$	$e_3 < e_1 < e_2$	$\frac{1}{k_1^2}$	$-\frac{k_2^2}{k_1^2}$
$\kappa \in (2\pi/3, \pi)$	$e_1 < e_3 < e_2$	$\frac{1}{k_2^2}$	$-\frac{k_1^2}{k_2^2}$
$\kappa \in (\pi, 4\pi/3)$	$e_1 < e_2 < e_3$	$k_2^2$	$k_1^2$
$\kappa \in (4\pi/3, 5\pi/3)$	$e_2 < e_1 < e_3$	$-\frac{k_2^2}{k_1^2}$	$\frac{1}{k_1^2}$
$\kappa \in (5\pi/3, 2\pi)$	$e_2 < e_3 < e_1$	$-\frac{k_1^2}{k_2^2}$	$\frac{1}{k_2^2}$

Cuadro 3.1: Lista de los seis casos de ordenamiento de los parámetros de inercia para diferentes valores de  $\kappa$ . Incluimos el cambio en los cocientes (3.17), donde en la primera y cuarta fila indica sin cambios. Notar que en cualquier caso, la restricción análoga a  $k_1^2 + k_2^2 = 1$  se verifica.

### 3.4. Geometría de las funciones de Casimir

Al notar que el cociente  $E/\Pi^2$  tiene dimensiones del inverso de momento de inercia, podemos definir el *parámetro de energía adimensional*  $e_0$  asociado, claro está, a la energía del sistema pero también con

el cuadrado del momento angular de forma similar a (3.8), a saber<sup>4</sup>

$$\frac{2E}{\Pi^2} = \frac{1}{3} \text{Tr} N + \sqrt{\frac{g_2}{3}} e_0. \quad (3.19)$$

Si introducimos ahora un vector unitario  $\vec{u}$  en la dirección del momento angular  $\mathbf{\Pi} : \mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{\Pi}/\Pi$  podemos reescribir la superficie generada por (3.4) como

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1. \quad (3.20)$$

Si  $N = 2E$  en (3.15) junto con (3.19) podemos obtener la versión adimensional del segundo Casimir

$$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + e_3 u_3^2 = e_0. \quad (3.21)$$

En el espacio generado por  $(u_1, u_2, u_3)$ , la superficie (3.20) representa una esfera unitaria mientras que en (3.21) depende del signo de los coeficientes adimensionales. En breve se dará una clasificación de las diferentes geometrías para esta última y su relación con la dinámica. Es importante enfatizar que esta superficie no corresponde a la energía pero está relacionada con ella a través de la transformación (3.19). Empero, disculpándonos de antemano, abusaremos de la notación y llamaremos a  $e_0$  parámetro adimensional de energía y la superficie generada (3.21) como *superficie de energía*. Una clasificación parecida a la que damos aquí fue discutida en el contexto de cuantización por principio de correspondencia en [10].

### 3.4.1. Cuerpos rígidos asimétricos

Considerando el ordenamiento (3.16), la condición de intersección entre la esfera de momento angular y la superficie de energía implica que

$$e_3 < e_0 < e_1. \quad (3.22)$$

La geometría de la superficie de energía depende del valor  $e_0$  respecto al parámetro de inercia  $e_2$ . Existen dos casos diferentes y corresponden a los siguientes.

- Caso  $e_2 < e_0 < e_1$

Genéricamente, la superficie (3.21) es un hiperboloide en lugar de la superficie original (3.4) debido a que al menos un parámetro de inercia es positivo ( $e_1$  para 3.2) y el otro es negativo ( $e_3$ ). Como se muestra en la figura (3.1), el parámetro  $e_2$  puede ser positivo, cero o negativo. Entonces, como  $e_2 < e_0$  el parámetro de energía también puede ser positivo, cero o negativo. En el cuadro (3.2) se muestran todas las posibles geometrías asociadas al Casimir (3.21).

- Caso  $e_3 < e_0 < e_2$

Este caso es similar al previo. Las diferencias principales es la orientación de las superficies. En el cuadro (3.3) se da la lista de todas las geometrías.

---

<sup>4</sup>En la literatura especializada sobre aspectos cuánticos de la molécula asimétrica [18; 19] la expresión (3.19) se interpreta como una energía reducida donde el segundo término especifica qué tan asimétrica será la rotación respecto del caso esférico, representado por el primer término del lado derecho.

$e_2$	$e_0$	Ecuación de energía	Superficie asociada
$< 0$	$< 0$	$-\frac{e_1}{ e_0 }u_1^2 + \frac{ e_2 }{e_0^2}u_2^2 + \frac{ e_3 }{ e_0 }u_3^2 = 1$	Hiperboloide elíptico, manto en torno a $u_1$
$< 0$	$= 0$	$e_1u_1^2 =  e_2 u_2^2 +  e_3 u_3^2$	Cono elíptico en torno a $u_1$
$< 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}u_1^2 - \frac{ e_2 }{e_0}u_2^2 - \frac{ e_3 }{e_0}u_3^2 = 1$	Hip. Elíptico, dos mantos en torno a $u_1$
$= 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}(u_1^2 - u_3^2) = 1$	Cilindro hiperbólico
$> 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}u_1^2 + \frac{e_2}{e_0}u_2^2 - \frac{ e_3 }{e_0}u_3^2 = 1$	Hip. Elíptico, un manto en torno a $u_3$

Cuadro 3.2: Diferentes geometrías de la función de Casimir (3.21) donde  $e_2 < e_0 < e_1$ .

$e_2$	$e_0$	Superficie de energía	Geometría
$< 0$	$< 0$	$-\frac{e_1}{ e_0 }u_1^2 + \frac{ e_2 }{e_0^2}u_2^2 + \frac{ e_3 }{ e_0 }u_3^2 = 1$	Hiperboloide elíptico, manto en torno a $u_1$
$< 0$	$= 0$	$e_1u_1^2 =  e_2 u_2^2 +  e_3 u_3^2 = 1$	Cilindro hiperbólico
$< 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}u_1^2 - \frac{ e_2 }{e_0}u_2^2 - \frac{ e_3 }{e_0}u_3^2 = 1$	Hip. Elíptico, dos mantos en torno a $u_3$
$= 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}(u_1^2 - u_3^2) = 1$	Cono elíptico en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}u_1^2 + \frac{e_2}{e_0}u_2^2 - \frac{ e_3 }{e_0}u_3^2 = 1$	Hip. Elíptico, un manto en torno a $u_3$

Cuadro 3.3: Diferentes geometrías de la función de Casimir (3.21) donde  $e_3 < e_0 < e_2$ .

### 3.4.2. Cuerpos rígidos simétricos

En nuestra exposición es importante los casos especiales en donde el cuerpo rígido tiene simetría cilíndrica. Estos casos pueden obtenerse como situaciones límite del caso simétrico general tomando dos parámetros de inercia iguales. Se tiene dos de tales casos límite en el ordenamiento  $e_3 \neq e_2 \neq e_1$ . El llamado *caso prolato*  $e_3 = e_2$  y el caso *oblato*  $e_2 = e_1$ .

- Caso Prolato,  $e_3 = e_2 < 0 < e_1$  ( $\kappa = 0$ ). El momento principal de inercia más pequeño es  $I_1$ . Podemos tomar el límite prolato en tres situaciones diferentes. Las geometrías asociadas a los Casimir (3.21) están dados en el cuadro (3.4).

$e_0$	Ecuación de energía	Geometría
$< 0$	$-\frac{e_1}{ e_0 }u_1^2 + \frac{ e_3 }{ e_0 }(u_2^2 + u_3^2) = 1$	Hiperboloides, manto en torno a $u_1$
$= 0$	$e_1u_1^2 =  e_3 (u_2^2 + u_3^2)$	Cono circular en torno a $u_1$
$> 0$	$\frac{e_1}{e_0}u_1^2 - \frac{ e_3 }{e_0}(u_2^2 + u_3^2) = 1$	Hiperboloide, dos mantos en torno a $u_1$

Cuadro 3.4: Lista de geometrías para el Casimir (3.21) en el caso prolato.

- Caso Oblato,  $e_3 < 0 < e_2 = e_1$  ( $\kappa = \pi/3$ ). El momento de inercia principal más grande es  $I_3$ . El límite oblatto ocurre en tres situaciones diferentes. Las geometrías asociadas están dadas en el cuadro (3.5)

$e_0$	Ecuación de energía	Geometría
$< 0$	$-\frac{e_1}{ e_0 } (u_1^2 + u_2^2) + \frac{ e_3 }{ e_0 } u_3^2 = 1$	Hiperboloides, dos mantos en $u_3$
$= 0$	$e_1 (u_1^2 + u_2^2) =  e_3  u_3^2$	Cono circular en torno a $u_3$
$> 0$	$\frac{e_1}{e_0} (u_1^2 + u_2^2) - \frac{ e_3 }{e_0} u_3^2 = 1$	Hiperboloide, manto en torno a $u_3$

Cuadro 3.5: Lista de geometrías para el Casimir (3.21) en el caso oblato.

### 3.4.3. Ecuaciones de Euler adimensionales y soluciones

Las ecuaciones de Euler (3.1) pueden ponerse en términos de los parámetros adimensionales definidos en la sección anterior

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_2}{3}} L \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (e_k - e_j) u_j u_k. \quad (3.23)$$

Es posible a su vez absorber el factor  $\sqrt{\frac{g_2}{3}} \Pi$  si definimos el *parámetro de tiempo adimensional*:  $x \equiv t \sqrt{\frac{g_2}{3}} \Pi$ , obteniendo, para la componente  $i$ ,

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} (e_k - e_j) u_j u_k, \quad (3.24)$$

donde  $(\dot{\phantom{x}})$  significa derivada total respecto al *tiempo*  $x$ . Las soluciones de estas ecuaciones en el caso general asimétrico están dadas en términos de las funciones elípticas (véase apéndice A). En el contexto de la mecánica clásica existen al menos dos formas diferentes pero equivalentes de resolverlas. El primero, consiste en aplicar la construcción de Poincaré, *i.e.*, las soluciones se obtienen como las curvas que son generadas por las intersecciones de las superficies de momento angular y energía (véase sección 1.7). En [61] las soluciones se obtienen para las funciones de Casimir (3.4) mientras que en [60] se revisan para las expresiones (3.21) y (3.20).

La segunda forma, es relevante para fines de cuantización del cuerpo rígido asimétrico. Presentamos primero las soluciones explícitas en términos de funciones de Jacobi que dependen del valor relativo de  $e_0$  y  $e_2$  usadas comúnmente en sistemas clásicos (ver, por ejemplo [16; 57]). Más detalles sobre las soluciones pueden consultarse en [16; 57] y en el apéndice (C) de este trabajo.

**I.** Caso  $e_3 < e_2 < e_0 < e_1$  (*i.e.*  $1/I_2 < 2E/\Pi^2$ ).

Cuando el parámetro de energía  $e_0$  se encuentra en  $(e_2, e_1)$ , las soluciones están dadas por

$$u_1(\tau) = sn(\tau', m_c) dn(\tau, m), \quad u_2(\tau) = dn(\tau', m_c) sn(\tau, m), \quad u_3(\tau) = cn(\tau', m_c) cn(\tau, m), \quad (3.25)$$

donde  $\tau$  es el tiempo adimensional definido mediante

$$\tau \equiv x \sqrt{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}. \quad (3.26)$$

Las amplitudes de las soluciones están escritas como funciones elípticas de Jacobi al valor  $\tau' = \text{constante}$  y están relacionadas con los parámetros  $e_i$  y  $e_0$ :

$$sn^2(\tau', m_c) = \frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad cn^2(\tau', m_c) = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}, \quad dn^2(\tau', m_c) = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2}. \quad (3.27)$$

El módulo de las funciones elípticas está definido como<sup>5</sup>

$$m^2 \equiv \frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0)}{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)} = \frac{(e_1 - e_0)k_1^2}{(e_0 - e_3)k_2^2}, \quad (3.28)$$

que toma valores en el intervalo  $0 < m^2 < 1$ . A su vez, el módulo complementario y el módulo principal satisfacen  $m_c^2 = 1 - m^2$ .

**II.** Caso  $e_3 < e_0 < e_2 < e_1$  (i.e.  $2E/\Pi^2 < 1/I_2$ ).

En este caso, las soluciones están dadas por

$$u_1(\tau) = cn\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right)cn\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), \quad u_2(\tau) = \left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right)sn\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), \quad u_3(\tau) = sn\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right)dn\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), \quad (3.29)$$

donde el cuadrado del módulo toma valores en el intervalo  $0 < 1/m^2 < 1$ . Aquí  $m^2$  está definido en (3.28) pero, debido a que  $e_3 < e_0 < e_2 < e_1$ , tenemos  $m^2 > 1$ . El parámetro  $\tau$  está definido en (3.26).

La interpretación física de las soluciones es la siguiente: las curvas (3.25) y (3.29) son la parametrización de la intersección de la esfera unitaria de momento angular con el hiperboloide de energía correspondiente a las funciones de Casimir (3.20) y (3.21). Para el caso asimétrico el hiperboloide está dado en los cuadros (3.2) y (3.3). Las expresiones  $\tau$  y  $m$  dependen explícitamente de los parámetros de inercia  $e_i$  y de la energía  $e_0$  como lo muestran las ecuaciones (3.26) y (3.28). Este hecho implica que la parametrización de la curva de momento angular depende del valor  $e_0$ . Sin embargo es importante *considerar otro vector unitario perpendicular al momento angular y parametrizado con otras coordenadas esferoconales, cuyas funciones elípticas no dependan de ese parámetro de energía  $e_0$* , para incluir la dependencia en el tercer ángulo de Euler, ya que el momento angular únicamente implica dos ángulos de Euler.

Tal vector y su parametrización es muy importante en la cuantización del cuerpo rígido asimétrico, ya que en esta base, el hamiltoniano es separable en el sentido de Liouville. La separabilidad del hamiltoniano (o lagrangiano) fue discutida por Reiche en 1918 y se puede llevar a cabo siempre que la componente de momento angular en el sistema de referencia inercial (que es igual a la componente de momento canónico asociada a una variable angular) se anule [59]. Ese vector  $\mathbf{u}$  tiene componentes

$$u_1 = dn(\xi_1, k_1)sn(\xi_2, k_2), \quad u_2 = cn(\xi_1, k_1)cn(\xi_2, k_2), \quad u_3 = sn(\xi_1, k_1)dn(x_2, k_2), \quad (3.30)$$

donde los módulos  $k_1$  y  $k_2$  están dados por (3.17) y no dependen de  $e_0$ . En (3.30), los argumentos  $\xi_i$  son proporcionales a una variable que a su vez depende del tiempo

$$\xi_1 \equiv \sqrt{e_1 - e_3}\phi_1(t), \quad y \quad \xi_2 \equiv \sqrt{e_1 - e_3}\phi_2(t). \quad (3.31)$$

Piña [62; 64] muestra que las variables  $\phi_i(t)$  pueden ser utilizadas para construir una base ortonormal mediante  $\mathbf{e}_i = \partial\mathbf{u}/\partial\phi_i$  y el vector de momento angular se escribe en esta base. Para establecer la relación entre diferentes coordenadas elípticas, son importantes las transformaciones

$$sn(\tau_1, m) = \frac{k_2 sn(\xi_1, k_1)}{dn(\xi_1, k_1)}, \quad m \cdot sn(\tau_2, m) = -\frac{k_1 sn(\xi_2, k_2)}{dn(\xi_2, k_2)}. \quad (3.32)$$

<sup>5</sup>En la literatura sobre funciones elípticas, se suelen utilizar dos notaciones diferentes para el módulo:  $k$  y  $m$  y se ligan mediante  $k^2 = m$ . La restricción del módulo principal y complementario se escribe  $m + m' = 1$  [85]. Sin embargo, en esta tesis, debido al argumento que queremos plantear sobre la parametrización elíptica en teoría de moléculas asimétricas, escribimos el módulo como  $m$  y su restricción con el módulo complementario  $m^2 + m_c^2 = 1$ . Es decir, consideramos  $k = m^2$  pero esta  $k$  no está relacionada con (3.17). Pido disculpas al lector(a) si esto se presta a confusión.

Estas transformaciones contienen los módulos (3.17) y las relacionan con los módulos (3.28) a través de funciones elípticas. Es decir, con estas transformaciones se pasa de una parametrización dependiente de  $e_0$  a una que no lo haga. Con ayuda de (3.32) y las funciones  $\phi_i$  se obtiene explícitamente el tercer ángulo de Euler. Se sugiere al lector interesado, consultar [62; 64] en donde se desarrolla la dependencia temporal de las variables  $\phi_i$  y la obtención de (3.32) para tal propósito. En la parametrización (3.30), los parámetros  $\xi_i$  están acotados en los intervalos

$$-2K_1 \leq \xi_1 \leq 2K_1 \quad y \quad -K_2 \leq \xi_2 \leq K_2, \quad (3.33)$$

siendo  $K_i$  los cuartos de periodo de las funciones elípticas de Jacobi<sup>6</sup>. A su vez, debido a que verifican las siguientes expresiones

$$\frac{u_1^2}{dn^2(\xi_1, k_1)} + \frac{u_2^2}{cn^2(\xi_1, k_1)} = 1, \quad \frac{u_2^2}{cn^2(\xi_2, k_2)} + \frac{u_3^2}{dn^2(\xi_2, k_2)} = 1, \quad (3.34)$$

los argumentos  $\xi_1, \xi_2$  pueden interpretarse también como coordenadas elípticas en la esfera con ejes a lo largo de  $u_1$  y  $u_2$  respectivamente. Finalmente, es pertinente mencionar que, refiriéndonos a la figura (2.1), el vector de momento angular que puede construirse bajo la parametrización (3.30) genera las mismas órbitas en la esfera como lo haría bajo la parametrización (3.25). A partir de este momento se usará como es usual en teoría de moléculas asimétricas, la parametrización (3.30).

### 3.5. Simetría $SL(2, \mathbb{R})$ de las ecuaciones de Euler

Las simetrías de norma de las ecuaciones de Euler quedan manifiestas si usamos el vector unitario  $\mathbf{u}$ ,

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \times \epsilon \mathbf{u} \quad (3.35)$$

donde  $\epsilon = \text{diag}(e_1, e_2, e_3)$  permite reescribir las ecuaciones de Euler como

$$\dot{\mathbf{u}} = \nabla l \times \nabla h, \quad (3.36)$$

siendo las funciones  $l, h$

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} (e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + e_3 u_3^2) \Rightarrow \epsilon \bar{u} = \nabla h = (e_1 u_1, e_2 u_2, e_3 u_3), \\ l &= \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \Rightarrow \bar{u} = \nabla l = (u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Al escribir de esta manera, se hace explícita la invariancia bajo transformaciones  $SL(2, \mathbb{R})$  [56; 68; 20]. Es posible verificar que, bajo la transformación

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ l \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

con  $ad - bc = 1$ , obtenemos

$$\dot{\mathbf{u}} = \nabla \mathcal{L} \times \nabla \mathcal{H}. \quad (3.39)$$

La dinámica de Nambu establece que, dado un sistema dinámico con hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , cualquier cantidad dinámica  $Q$  evoluciona temporalmente de acuerdo con el paréntesis de Nambu (Lie-Poisson)<sup>7</sup>,

$$\dot{Q} = \{Q, \mathcal{N}, \mathcal{H}\} = X_H Q, \quad (3.40)$$

<sup>6</sup>Sobre los períodos de las funciones elípticas, véase apéndice A.

<sup>7</sup>Véase sección 2.5.4

donde el generador  $X_G$  está dado por

$$X_G = (\nabla \mathcal{N} \times \nabla G) \cdot \nabla. \quad (3.41)$$

En coordenadas esferoconales (3.30), el operador gradiente tiene componentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} &= \frac{1}{\tilde{h}^2} \left[ dn(\xi_1, k_1) cn(\xi_2, k_2) dn(x_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + k_1^2 sn(\xi_1, k_1) sn(\xi_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right], \\ \frac{\partial}{\partial u_2} &= \frac{1}{\tilde{h}^2} \left[ -cn(\xi_1, k_1) sn(\xi_2, k_2) dn(\xi_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + sn(\xi_1, k_1) dn(\xi_1, k_1) cn(\xi_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right], \\ \frac{\partial}{\partial u_3} &= \frac{1}{\tilde{h}^2} \left[ -k_2^2 sn(\xi_1, k_1) sn(\xi_2, k_2) cn(\xi_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + cn(\xi_1, k_1) dn(\xi_1, k_1) dn(\xi_2, k_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde la función  $\tilde{h}$  está dada por

$$\tilde{h}^2 \equiv \tilde{h}^2(\xi_1, \xi_2) = 1 - k_1^2 sn^2(\xi_2, k_2). \quad (3.43)$$

De acuerdo con la transformación (3.38), el generador  $X_G$  se expresa en componentes como

$$X_G = (ce_1 + d) u_1 \left( \frac{\partial G}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{\partial G}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + (ce_2 + d) u_2 \left( \frac{\partial G}{\partial u_3} \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial G}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) + (ce_3 + d) u_3 \left( \frac{\partial G}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial G}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial u_1} \right). \quad (3.44)$$

Para determinar la estructura del álgebra de Lie de estos generadores, debemos calcular los conmutadores de Lie-Poisson para los campos vectoriales hamiltonianos en las coordenadas  $u_i$ ,

$$\begin{aligned} X_{u_1} &= (ce_3 + d) u_3 \partial_2 - (ce_2 + d) u_2 \partial_3, \\ X_{u_2} &= (ce_1 + d) u_1 \partial_3 - (ce_3 + d) u_3 \partial_1, \\ X_{u_3} &= (ce_2 + d) u_2 \partial_1 - (ce_1 + d) u_1 \partial_2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Cuyas reglas de conmutación están dadas por,

$$[X_{u_1}, X_{u_2}] = (ce_3 + d) X_{u_3}, \quad [X_{u_2}, X_{u_3}] = (ce_1 + d) X_{u_1}, \quad [X_{u_3}, X_{u_1}] = (ce_2 + d) X_{u_2}. \quad (3.46)$$

La clasificación de las diferentes álgebras surgen de las órbitas invariantes de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Antes de llegar a este punto, es conveniente recordar que para los casos simétricos, las coordenadas adecuadas son las esféricas. Podemos obtener los correspondientes generadores a partir de la ecuación (3.30) en los límites apropiados. Para el caso oblató ( $e_1 = e_2$ ), en virtud de que las funciones elípticas de Jacobi se *degeneran* a funciones hiperbólicas (circulares) para valores del módulo  $k_1 = 1$  ( $k_2 = 0$ ), las coordenadas (3.30) adoptan la forma

$$u_1 = (\xi_1) \sin(\xi_2), \quad u_2 = (\xi_1) \cos(\xi_2), \quad u_3 = \tanh(\xi_1). \quad (3.47)$$

Geoméricamente, en este límite, las elipses  $\xi_1 = \text{constante}$  se degeneran a círculos y por tanto la coordenada  $\xi_2$  puede etiquetarse como el ángulo azimutal estándar  $\xi_2 \equiv \phi$ . A su vez, sectores de la elipse  $\xi_2 = \text{constante}$  degeneran a semicírculos que intersectan el semiplano  $u_2 = 0$ ,  $u_1 > 0$  con la esfera. Ahora, debido a que la función hiperbólica  $\text{sech}(\xi_1)$  es siempre positiva a diferencia de la función de Jacobi  $\text{cn}(\xi_1)$ , en aras de cubrir toda la esfera, el ángulo  $\phi$  debe extenderse al intervalo  $[-\pi, \pi]$  (en lugar de  $3.33$  para  $\xi_1$ ). Es común parametrizar la esfera unitaria  $S^2$  con funciones circulares en lugar de hiperbólicas; el reemplazo  $\text{sech}(\xi_1) \mapsto \sin(\theta) \Rightarrow \tanh(\xi_1) \mapsto \cos(\theta)$  con  $\theta \in [0, \pi]$ , ayuda a este respecto

$$u_1 = \sin \theta \sin \phi, \quad u_2 = \sin \theta \cos \phi, \quad u_3 = \cos \theta. \quad (3.48)$$

Como consecuencia, la ecuación (3.42) adopta la forma

$$\begin{aligned}\partial_1 &= \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \csc \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \partial_2 &= \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \csc \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \partial_3 &= \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

El caso prolato ( $e_2 = e_3$ ) se obtiene tomando el límite  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$ . Procediendo de forma similar al caso oblató, construimos la parametrización adecuada de  $S^2$ , a saber

$$u_1 = \cos \theta, \quad u_2 = \sin \theta \cos \phi, \quad u_3 = \sin \theta \sin \phi,\tag{3.50}$$

y por tanto, las componentes del operador gradiente(3.42) serán

$$\begin{aligned}\partial_1 &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \partial_2 &= -\cos \theta \cot \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \csc \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \partial_3 &= -\sin \theta \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \csc \phi \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

### 3.6. Clasificación de las transformaciones de norma $SL(2, \mathbb{R})$

Con las ideas de las secciones anteriores podemos realizar ya la clasificación de la simetría de norma  $SL(2, \mathbb{R})$  del cuerpo rígido. Se dividen en tres conjuntos generales donde cada uno pertenece a una forma específica de la matriz  $SL(2, \mathbb{R})$ . Como veremos, para algunos conjuntos, existen casos diferentes donde los campos vectoriales hamiltonianos tienen formas no equivalentes en el álgebra de Lie de tres dimensiones. Nuestro análisis se asemeja al realizado en [68] y en nuestra discusión se utiliza la nomenclatura comúnmente usada en la literatura (ver por ejemplo [129]) así como aquella introducida por Bianchi en el contexto de la clasificación de las álgebras de Lie 3-dimensionales [33].

#### 3.7. A. Bianchi IX o $so(3)$ : $c = 0, d \neq 0$

Un elemento genérico del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  para este caso, adopta la forma

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.\tag{3.52}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir  $a > 0$ . Este elemento del grupo es de la forma  $AN$  en la descomposición de Iwasawa del grupo especial lineal [66] y tiene la característica que no cambia la órbita del grupo. En esta situación podemos definir nuevos generadores:  $Y_{u_i} \equiv aX_{u_i}, \forall i = 1, 2, 3$ ; obteniendo el álgebra de Lie  $so(3)$

$$[Y_{u_1}, Y_{u_2}] = Y_{u_3}, \quad [Y_{u_2}, Y_{u_3}] = Y_{u_1}, \quad [Y_{u_3}, Y_{u_1}] = Y_{u_2}.\tag{3.53}$$

De acuerdo a la ecuación (3.38) las funciones de Casimir son transformadas bajo  $SL(2, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left[ (ae_1 + b)^2 u_1^2 + (ae_2 + b)^2 u_2^2 + (ae_3 + b)^2 u_3^2 \right] - \frac{1}{2} (ae_0 + b) \\ \mathcal{N} &= \frac{1}{2a} \left[ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \right] - \frac{1}{2a},\end{aligned}\tag{3.54}$$

mientras que el vector hamiltoniano es

$$Y_H = -(ae_1 + b) u_1 Y_{u_1} - (ae_2 + b) u_2 Y_{u_2} - (ae_3 + b) u_3 Y_{u_3}. \quad (3.55)$$

Notamos que el Casimir  $\mathcal{N}$  es de hecho el mismo que la expresión  $l$  (ecuación (3.37)) y por tanto está representada por una esfera  $S^2$ . Por el contrario, la geometría del Casimir  $\mathcal{H}$  y su generador asociado  $Y_H$  depende de los valores de los coeficientes  $ae_i + b$ . Determinar estas cantidades requiere un análisis por casos. Aquél con  $b = 0$  es el más simple y describe la evolución del momento angular adimensional para un cuerpo rígido asimétrico ya que el Casimir  $\mathcal{H}$  está dado simplemente por  $h$ . De acuerdo a las ecuaciones de Euler (3.39), la física ocurre en la intersección de las superficies  $l$  y  $h$ , y para  $b = 0$  en el caso asimétrico. Esto ocurre en 10 formas diferentes en los cuadros (3.2) y (3.3) así como en sus 3 + 3 casos simétricos límites.

Casos excepcionales ocurren si  $e_0$  toma alguno de los valores  $e_{i \neq 0}$ . Si  $e_0 = e_1$  (o  $e_0 = e_3$ ), el hiperboloide y la esfera son tangentes en solo dos puntos:  $(u_1, u_2, u_3) = (\pm 1, 0, 0)$  (o bien  $(0, 0, \pm 1)$ ). Sin embargo, si  $e_0 = e_2$  el hiperboloide y la esfera son tangentes en dos círculos formando la separatriz con dos puntos opuestos inestables en  $(0, \pm 1, 0)$ . La figura (3.2) esquematiza lo relatado anteriormente.

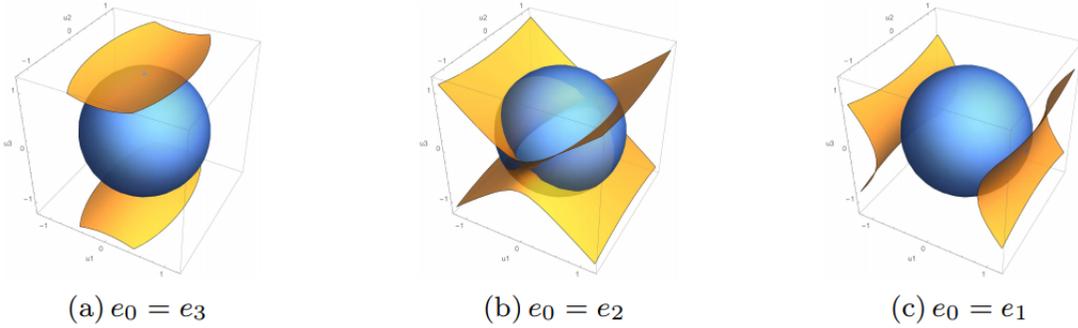


Figura 3.2: Intersecciones de las funciones de Casimir (3.21) y la esfera unitaria cuando  $e_0 = e_{i \neq 0}$ .

Para  $b \neq 0$  el Casimir  $\mathcal{H}$  no coincide más con  $h$ ; su geometría será discutida ahora.

### 3.7.1. Casos asimétricos $D_2 \subset SO(3)$

Como se menciona en [10], para el caso asimétrico, el grupo Diédrico  $D_2$  es subgrupo de  $SO(3)$ . Para determinar las geometrías de  $\mathcal{H}$  es importante conocer la relación entre  $e_0$  y  $e_2$ . De la sección (3.4.3), sabemos ya que existen dos casos.

- Caso  $e_2 < e_0 < e_1$

En el primer caso, el parámetro  $e_0$  está entre  $e_1$  y  $e_2$ . A fin de obtener las diferentes geometrías codificadas en  $\mathcal{H}$ , permitamos al parámetro  $b$  adquirir cualquier valor real. Esto da origen a nueve geometrías genéricas. Por ejemplo, si  $-\infty < b < -ae_1$ , los tres coeficientes  $ae_i + b$  son negativos (ver cuadro (3.6)) así como la cantidad  $ae_0 + b$ .

La superficie resultante es un elipsoide cuyo eje mayor (menor) ocurre en  $u_1$  ( $u_3$ ). En la situación límite  $b \mapsto \infty$ , la superficie  $\mathcal{H}$  degenera a la esfera  $S^2$ . Cuando el parámetro toma el valor  $b = -ae_1$ ,  $\mathcal{H}$  se vuelve un cilindro elíptico con eje de simetría en dirección  $u_1$ . Si ahora los valores del parámetro están en el intervalo  $-ae_1 < b < -ae_0$ ,  $\mathcal{H}$  es ahora un hiperboloide elíptico de un manto en torno a  $u_1$ . Las

$ae_1 + b$	$ae_0 + b$	$ae_2 + b$	$ae_3 + b$	Superficie $\mathcal{H}$
$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Elipsoide elíptico eje mayor en $u_1$ , menor en $u_3$
$= 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Cilíndro elíptico en torno a $u_1$
$> 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, un manto en torno a $u_1$
$> 0$	$= 0$	$< 0$	$< 0$	Cono elíptico en torno a $u_1$
$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, dos mantos en torno a $u_1$
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$< 0$	Cilíndro hiperbólico en torno a $u_2$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, un manto en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$= 0$	Cilíndro elíptico en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	Elipsoide elíptico, eje mayor en $u_3$ y eje menor en $u_1$

Cuadro 3.6: Clasificación de nueve geometrías para la función  $\mathcal{H}$  (3.54) en el caso asimétrico tal que se verifican  $e_2 < e_0 < e_1$ . Para cada caso el álgebra de Lie de los vectores hamiltonianos en las coordenadas  $u_i$  en Bianchi IX.

superficies  $\mathcal{H}$  obtenidas para diferentes valores de  $b$  están sintetizadas en el cuadro (3.6).

Es importante enfatizar que, independientemente de la geometría de  $\mathcal{H}$ , el hecho relevante es que la intersección con  $\mathcal{N}$  es siempre la misma. En otras palabras, la dinámica del cuerpo rígido asimétrico, que toma lugar en la intersección de dos *superficies de Casimir* de acuerdo a la ecuación (3.39), es invariante ante transformaciones de Norma de la forma (3.52).

- Caso  $e_3 < e_0 < e_2$

Este caso es muy similar al previo salvo que  $e_0$  está en diferente intervalo y las intersecciones de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{N}$  ocurren en diferentes secciones. En el caso previo ocurría en la región superior respecto de la separatriz y están dadas por curvas elípticas en la esfera en torno a  $u_3$ , mientras que en este caso ocurren por debajo de la separatriz y están dadas por curvas elípticas alrededor de  $u_1$ . En el cuadro (3.7) se resume todos estos casos para diferentes valores de  $b$ .

$ae_1 + b$	$ae_2 + b$	$ae_0 + b$	$ae_3 + b$	Superficie $\mathcal{H}$
$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Elipsoide elíptico eje mayor en $u_1$ , menor en $u_3$
$= 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Cilíndro elíptico en torno a $u_1$
$> 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, un manto en torno a $u_1$
$> 0$	$= 0$	$< 0$	$< 0$	Cilíndro hiperbólico en torno a $u_2$
$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, dos mantos en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$< 0$	Cono elíptico en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	Hiperboloide elíptico, un manto en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$= 0$	Cilíndro elíptico en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	Elipsoide elíptico, eje mayor en $u_3$ y eje menor en $u_1$

Cuadro 3.7: Clasificación de nueve geometrías para la función  $\mathcal{H}$  (3.54) en el caso asimétrico tal que se verifican  $e_3 < e_0 < e_2$ . Para cada caso el álgebra de Lie de los vectores hamiltonianos en las coordenadas  $u_i$  en Bianchi IX.

Finalmente, notemos que en la transformación (3.52) hemos considerado que  $a > 0$ . Eligiendo elementos del grupo tales que  $a < 0$ , la transformación de norma cambia el orden de los parámetros de inercia  $e_3 < e_2 < e_1$  a  $e_1 < e_2 < e_3$  y por tanto deriva en un intercambio en los módulos de las funciones elípticas  $k_1^2 \leftrightarrow k_2^2$  (ver cuadro 3.1).

$ae_1 + b$	$ae_0 + b$	$ae_3 + b$	Superficie $\mathcal{H}$
$< 0$	$< 0$	$< 0$	Elipsoide oblató con eje mayor en $u_1$
$= 0$	$< 0$	$< 0$	Planos paralelos $u_1, u_2$
$> 0$	$< 0$	$< 0$	Hiperboloide circular dos mantos en torno a $u_3$
$> 0$	$= 0$	$< 0$	Cono circular dos mantos en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$< 0$	Hiperboloide circular, un manto en torno a $u_3$
$> 0$	$> 0$	$= 0$	Cilindro circular eje en $u_3$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	Elipsoide oblató con eje mayor en $u_3$

Cuadro 3.8: Clasificación de siete geometrías para la función  $\mathcal{H}$  (3.54) en el caso simétrico oblató para cada álgebra de Lie de los vectores hamiltonianos en el parche  $u_i$  y que son tipo Bianchi IX

### 3.7.2. Casos simétricos $SO(2) \subset SO(3)$

Como casos límites del cuerpo rígido asimétrico en Bianchi IX se obtiene el caso oblató (prolató) Bianchi IX que corresponde al cuerpo rígido simétrico. El grupo asociado a estos casos es  $SO(2)$  y se obtienen cuando se verifica  $e_1 = e_2$  (oblató) y  $e_2 = e_3$  (prolató). Tomando el límite oblató del cuadro (3.7), obtenemos siete geometrías diferentes para  $\mathcal{H}$ , que se resumen en el cuadro (3.8).

De manera similar el caso simétrico prolató se obtiene como caso límite en la clasificación del cuadro (3.6). De nuevo, se obtienen siete geometrías distintas que difieren de aquellas oblatas por la orientación del eje axial de simetría.

## 3.8. B. Casos: $c \neq 0$ y $d = 0$

Un elemento genérico del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  para este caso está dado por

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -1/b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } b \in \mathbb{R}/\{0\}. \quad (3.56)$$

El caso  $a = 0$  sólo intercambia el rol de las funciones de Casimir  $h$  y  $l$  y por tanto pertenece al tipo Bianchi IX. Sin pérdida de generalidad asumimos que  $a > 0$  y debido a esto, el álgebra de Lie (3.46) se reduce a la forma

$$[X_{u_1}, X_{u_2}] = -\frac{1}{b}e_3X_{u_3}, \quad [X_{u_2}, X_{u_3}] = -\frac{1}{b}e_1X_{u_1}, \quad [X_{u_3}, X_{u_1}] = -\frac{1}{b}e_2X_{u_2}. \quad (3.57)$$

La función de Casimir  $\mathcal{H}$  tiene la misma forma que (3.54) y por tanto sus geometrías están dadas de acuerdo al cuadro (3.6) y (3.7), mientras que  $\mathcal{N}$ , en este caso, es proporcional a  $h$ :  $\mathcal{N} = -h/b$ . Esto implica que sus geometrías están clasificadas de acuerdo a los cuadros (3.2) y (3.3). Los elementos del grupo (3.56) actúa como transformación de norma en dos álgebras de Lie diferentes. La primera corresponde a Bianchi VIII o  $so(2, 1)$  mientras que la segunda actúa en Bianchi  $VI_0$  o  $iso(1, 1)$ . La diferencia entre estas dos álgebras radica en el valor  $e_2$ . Si  $e_2 \neq 0$  estamos en la situación Bianchi VIII y si  $e_2 = 0$  le corresponde Bianchi  $VI_0$ . Los generadores en ambas álgebras describen en general el cuerpo asimétrico. Estrictamente, el sistema ya no corresponde al cuerpo rígido debido a que el Casimir  $\mathcal{N}$  ya no es  $S^2$ . En ocasiones, la literatura llama a estos objetos *cuerpos rígidos generalizados* [26]. Un comentario final es que, al igual que el caso de la sección previa  $a < 0$  en (3.56) produce diferentes ordenamientos en los parámetros de inercia.

### Casos Bianchi VIII

El álgebra de Lie (3.57) pertenece a la clase Bianchi VIII si  $e_2 \neq 0$ . Para verlo, recordemos que  $e_1 > 0$ ,  $e_3 = -|e_3| < 0$  y  $e_2 \equiv \epsilon|e_2|$ , donde  $\epsilon \equiv \text{sign}(e_2)$  ya que  $e_2$  puede ser positivo o negativo. Al redefinir los

generadores (3.45) como

$$X_{u_1} \equiv -\frac{1}{b}\sqrt{|e_2||e_3|}Y_{u_1}, \quad X_{u_2} \equiv -\frac{1}{b}\sqrt{|e_1||e_3|}Y_{u_2}, \quad X_{u_3} \equiv -\frac{1}{b}\sqrt{|e_1||e_2|}Y_{u_3}, \quad (3.58)$$

obtenemos el álgebra  $so(2,1)$ ,

$$[Y_{u_1}, Y_{u_2}] = -Y_{u_3}, \quad [Y_{u_2}, Y_{u_3}] = +Y_{u_1}, \quad [Y_{u_3}, Y_{u_1}] = \epsilon Y_{u_2}. \quad (3.59)$$

Los límites simétricos pueden tomarse directamente de las expresiones (3.58) eligiendo  $e_1 = e_2$  (oblato) y  $e_2 = e_3$  (prolato).

### 3.8.1. Caso Bianchi $VI_0$

La segunda álgebra de esta sección emerge cuando  $e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = -e_3$ . En este caso la geometría de  $\mathcal{N}$  corresponde a un cilindro hiperbólico de acuerdo a los cuadros (3.2) y (3.3). Reescribiendo los generadores (3.45) como  $X_{u_i} \equiv -\sqrt{e_1}Y_{u_i}/b$  para  $i = 1, 3$  y  $X_{u_2} \equiv -e_1Y_{u_2}/b$ , el álgebra es del tipo Bianchi  $VI_0$

$$[Y_{u_1}, Y_{u_2}] = -Y_{u_3}, \quad [Y_{u_2}, Y_{u_3}] = +Y_{u_1}, \quad [Y_{u_3}, Y_{u_1}] = 0; \quad (3.60)$$

y los generadores (3.45) se reducen a

$$X_{u_1} = -u_3\partial_2, \quad X_{u_2} = u_1\partial_3 + u_3\partial_1, \quad X_{u_3} = -u_1\partial_2, \quad (3.61)$$

donde los valores de los módulos de las funciones elípticas de Jacobi en las derivadas (3.42) son  $k_1^2 = k_2^2 = 1/2$ . En este caso no hay límite simétrico.

## 3.9. Caso $c \neq 0, d \neq 0$

En este caso, ambas funciones de Casimir están dados por combinaciones lineales de  $h$  y  $l$ . Mientras que  $\mathcal{H}$  está dado por (3.54) el casimir  $\mathcal{N}$  adopta la forma

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}[(ce_1 + d)u_1^2 + (ce_2 + d)u_2^2 + (ce_3 + d)u_3^2] - \frac{1}{2}(ce_0 + d). \quad (3.62)$$

con álgebras de Lie

$$[Y_{u_1}, Y_{u_2}] = \epsilon_3 Y_{u_3}, \quad [Y_{u_2}, Y_{u_3}] = \epsilon_1 Y_{u_1}, \quad [Y_{u_3}, Y_{u_1}] = \epsilon_2 Y_{u_2}. \quad (3.63)$$

Se sigue que el caso general asimétrico contiene siete casos que pertenecen a cuatro diferentes álgebras tipo A en la clasificación de Bianchi, llamadas Bianchi  $IX$ ,  $VIII$ ,  $VII_0$  y  $VI_0$ . Sin pérdida de generalidad asumimos que  $c < 0$ . En el cuadro (3.9) resumimos todos los casos que analizaremos en lo sucesivo.

### 3.9.1. Casos Bianchi $IX$ y $VIII$ asimétricos

Procediendo de manera similar al análisis de la sección (3.8), reescribimos los tres coeficientes como  $ce_i + d \equiv \epsilon_i|ce_i + d| \neq 0$  donde  $\epsilon_i = \text{sign}(ce_i + d)$ . Luego definimos los generadores  $Y'_i$ s

$$X_{u_1} \equiv \sqrt{|ce_3 + d||ce_2 + d|}Y_{u_1}, \quad X_{u_2} \equiv \sqrt{|ce_3 + d||ce_1 + d|}Y_{u_2}, \quad X_{u_3} \equiv \sqrt{|ce_3 + d||ce_1 + d|}Y_{u_3}, \quad (3.64)$$

que derivan directamente a las ecuaciones (3.63). Las situaciones 1,3,5 y 7 del cuadro (3.9) son de esta forma.

Situación	$ce_1 + d$	$ce_2 + d$	$ce_3 + d$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	Bianchi:
1	$< 0$	$< 0$	$< 0$	-1	-1	-1	<i>IX</i>
2	$= 0$	$< 0$	$< 0$	0	-1	-1	<i>VII<sub>0</sub></i>
3	$> 0$	$< 0$	$< 0$	+1	-1	-1	<i>VIII</i>
4	$> 0$	$= 0$	$< 0$	+1	0	-1	<i>VI<sub>0</sub></i>
5	$> 0$	$> 0$	$< 0$	+1	+1	-1	<i>VIII</i>
6	$> 0$	$> 0$	$= 0$	+1	+1	0	<i>VII<sub>0</sub></i>
7	$> 0$	$> 0$	$> 0$	+1	+1	+1	<i>IX</i>

Cuadro 3.9: Álgebras de Lie para transformaciones de norma  $SL(2, \mathbb{R})$  con  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Todas las álgebras son del tipo A en la clasificación de Bianchi y describen un cuerpo rígido asimétrico.

### 3.9.2. Bianchi VIIo y VIo asimétricos

- Situación 2:  $d = -ce_1$  (Bianchi VII<sub>0</sub> o *iso*(2)).

En acuerdo con el cuadro (3.9), este caso se obtiene cuando los coeficientes de la transformación  $SL(2, \mathbb{R})$  satisfacen la relación  $d = -ce_1$ . Luego entonces, el álgebra (3.63) es Bianchi VIIo o *iso*(2). Sin pérdida de generalidad podemos asumir  $c > 0$  y la reescritura adecuada de los generadores es

$$X_{u_1} \equiv c\sqrt{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}Y_{u_1}, \quad X_{u_2} \equiv c\alpha Y_{u_2}, \quad X_{u_3} \equiv c\alpha \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} Y_{u_3}. \quad (3.65)$$

Notamos que aparece la constante  $\alpha$ .

- Situación 4:  $d = -ce_2 \neq 0$  (Bianchi VI<sub>0</sub> o *iso*(1,1)).

La elección adecuada de generadores para este caso está dada por

$$X_{u_1} \equiv c\alpha \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}} Y_{u_1}, \quad X_{u_2} \equiv c\sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)} Y_{u_2}, \quad X_{u_3} \equiv c\alpha Y_{u_3}. \quad (3.66)$$

- Situación 6:  $d = -ce_3$  (Bianchi VIIo o *iso*(2))

En este caso, los generadores serán

$$X_{u_1} \equiv c\alpha Y_{u_1}, \quad X_{u_2} \equiv c\alpha \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}} Y_{u_2}, \quad X_{u_3} \equiv c\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} Y_{u_3} \quad (3.67)$$

### 3.9.3. Límites simétricos oblatos ( $e_1 = e_2$ )

Estos límites pueden obtenerse de manera natural en las situaciones 1,5,6,7 del cuadro (3.8) debido a que los signos de  $ce_1 + d$  y  $ce_2 + d$  son los mismos. Los casos 2,3 y 4 degeneran todos a un solo caso que está caracterizado por tener  $ce_1 + d = ce_2 + d = 0$  y cuya álgebra es del tipo Bianchi II, comúnmente conocida como el álgebra de Heisenberg *heis*<sub>3</sub> (consultar [129] y cuadro 3.10).

### 3.9.4. Límites simétricos prolato ( $e_2 = e_3$ )

Un resultado similar es obtenido para este caso. Para propósitos de completar se incluyen las posibilidades en el cuadro (3.11) pero no daremos más detalles pues las álgebras asociadas son las mismas que el caso oblat.

Situación	$ce_1 + d$	$ce_3 + d$	Bianchi:	$X_{u_1}$	$X_{u_2}$	$X_{u_3}$
1	$< 0$	$< 0$	<i>IX</i>	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_1}$	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_2}$	$ ce_1 + d Y_{u_3}$
8	$= 0$	$< 0$	<i>II</i>	$Y_{u_1}$	$Y_{u_2}$	$3 d Y_{u_3}/2$
5	$> 0$	$< 0$	<i>VIII</i>	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_1}$	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_2}$	$ ce_1 + d Y_{u_3}$
6	$> 0$	$= 0$	<i>VII<sub>0</sub></i>	$Y_{u_1}$	$Y_{u_2}$	$ ce_1 + d Y_{u_3}$
7	$> 0$	$> 0$	<i>IX</i>	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_1}$	$\sqrt{ ce_3  + d} ce_1 + d Y_{u_2}$	$ ce_1 + d Y_{u_3}$

Cuadro 3.10: Casos simétricos oblatos ( $e_1 = e_2$ ) y su clasificación de su álgebra de Lie-Poisson para sus vectores Hamiltonianos en la carta generada por  $u_1$ .

Situación	$ce_1 + d$	$ce_3 + d$	Bianchi:
1	$< 0$	$< 0$	<i>IX</i>
2	$= 0$	$< 0$	<i>VII<sub>0</sub></i>
3	$> 0$	$< 0$	<i>VIII</i>
8	$> 0$	$= 0$	<i>II</i>
7	$> 0$	$> 0$	<i>IX</i>

Cuadro 3.11: Casos simétricos prolatos ( $e_2 = e_3$ ) y su clasificación de su álgebra de Lie-Poisson para sus vectores Hamiltonianos en la carta generada por  $u_1$ .

## Capítulo 4

# Reducción simpléctica del cuerpo rígido bajo $SL(2, \mathbb{R})$

¡Oh! divina sapiencia, qué bien reinas en el cielo, la tierra y el infierno y con cuanta justicia das y quitas. Canto XIX, Comedia.

---

### 4.1. Introducción

En este capítulo estamos interesados en explorar con mayor profundidad la relación existente entre el cuerpo rígido y el péndulo simple. Como se mencionó en la introducción, en el trabajo original [23] se muestra que la plétera de álgebras de Lie del cuerpo extendido son  $so(3)$ ,  $iso(2)$  o  $heis_3$  empero, en [26] se exhibe la lista completa de álgebras de Lie relacionadas con  $so(3)$ . Más aún, de acuerdo con [23], el péndulo puede obtenerse del cuerpo rígido extendido si desde el punto de vista geométrico las superficies de las dos funciones Casimir tienen el perfil de cilindros elípticos como se mencionó en el capítulo (3). Mientras la geometría que representa el cuadrado del momento angular (esfera) se mantenga, la geometría de la función Casimir, que representa la energía cinética (elipsoide), puede ser reemplazada por hiperboloides elípticos que pueden tener uno o dos mantos dependiendo de los valores numéricos de  $e_0$  y  $\kappa$ . El péndulo también se obtiene en términos de tiempo y energía compleja (imaginaria) para el caso donde las funciones Casimir son cilindros elípticos e hiperbólicos que generan álgebras  $iso(2)$  e  $iso(1,1)$ . Una de las ventajas de trabajar con los parámetros  $e_0$  y  $\kappa$ , es que es posible establecer una correspondencia explícita entre las soluciones a las ecuaciones de Euler con movimiento oscilatorio y circular<sup>1</sup>.

### 4.2. Cuerpo rígido y péndulo

Comenzamos esta sección con la siguiente afirmación: *el movimiento del cuerpo rígido se reduce al movimiento del péndulo en superficies de nivel de energía y momento angular constantes*. Resultado conocido dentro de la teoría de sistemas dinámicos y propuesto por Holm y Marsden [56; 23]. Presentamos con cierto detalle el cálculo que sustenta esta afirmación.

Expresando las ecuaciones de Euler en forma vectorial,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Pi} = \nabla H \times \nabla L, \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>El contenido de este capítulo está publicado en [53].

donde  $H$  es la energía (veáse capítulo 2) y  $L = \mathbf{\Pi}^2/2$  la mitad del cuadrado del momento angular

$$H = \frac{\Pi_1^2}{2I_1} + \frac{\Pi_2^2}{2I_2} + \frac{\Pi_3^2}{2I_3}, \quad L = \frac{1}{2} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2). \quad (4.2)$$

Ambas funciones son conservadas<sup>2</sup> y el movimiento del cuerpo rígido tiene lugar en la intersección de las superficies de energía (elipses) y momento angular (esferas) en la variedad  $\mathbb{R}^3$ . En la representación (4.1), podemos notar que los centros de estas superficies coinciden. A su vez, el intercambio  $\Pi_i \mapsto -\Pi_i$  deja invariante las funciones  $H$  y  $L$ , es decir, poseen simetría  $(\mathbb{Z}_2)^3$ .

Como en el capítulo 3, las ecuaciones de Euler son invariantes bajo combinaciones lineales de  $H$  y  $L$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

bajo las cuales

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Pi} = \nabla \mathcal{K} \times \nabla \mathcal{N}, \quad (4.4)$$

y reproduce las ecuaciones de Euler siempre que la matriz en (4.3) sea tal que  $ad - bc = 1$ . Una elección específica es [55]

$$[A] \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{I_1 I_3}{I_3 - I_1} & \frac{I_3}{I_3 - I_1} \\ 1 & -\frac{1}{I_3} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Bajo el ordenamiento (sin pérdida de generalidad)  $0 < I_1 < I_2 < I_3$ , se tiene  $[A]_{22} < 0$ ,  $[A]_{11} < 0$ , y  $[A]_{12} < 0$ . La ecuación (4.4) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) \Pi_2^2 \\ \mathcal{N} &= \frac{I_3 (I_2 - I_1)}{2I_2 (I_3 - I_1)} \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \Pi_3^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Las expresiones (4.6) reproducen las ecuaciones de Euler<sup>3</sup>  $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbf{\Omega}$ . La colinealidad de los gradientes implica equilibrio y tal situación en (4.6) sucede en dos puntos: donde los cilindros son tangentes y aquellos puntos donde el eje de un cilindro está dirigido ortogonalmente a través de la superficie del otro cilindro. Definamos ahora tres constantes positivas  $k_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3$  para reescribir las ecuaciones (4.6), a

saber

$$\mathcal{K} = \frac{\Pi_1^2}{2k_1^2} + \frac{\Pi_2^2}{2k_2^2}, \quad \mathcal{N} = \frac{\Pi_2^2}{2k_3^2} + \frac{\Pi_3^2}{2}, \quad (4.7)$$

siendo

$$\frac{1}{k_1^2} \equiv \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}, \quad \frac{1}{k_2^2} \equiv \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}, \quad \frac{1}{k_3^2} \equiv \frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_2(I_3 - I_1)}. \quad (4.8)$$

Aquí es posible hallar un cambio de variable tal que la superficie  $\mathcal{K}$  sea una constante. Si definimos  $r = \sqrt{2\mathcal{K}}$  y efectuamos el cambio de variables  $(\theta, p)$ , definido por

$$\Pi_1 := k_1 r \cos \theta, \quad \Pi_2 := k_2 r \sin \theta, \quad \Pi_3 := p, \quad (4.9)$$

las ecuaciones (4.6) resultan

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} r^2, \quad \mathcal{N} = \frac{p^2}{2} + \left( \frac{k_2^2}{2k_3^2} r^2 \right) \sin^2 \theta. \quad (4.10)$$

<sup>2</sup>En otros capítulos son llamados funciones de Casimir; integrales de movimiento, etc.

<sup>3</sup>Véase (2.57), siendo  $\Omega_i = \Pi_i/I_i$  la velocidad angular.

Con esta estructura (que luce como un sistema hamiltoniano), el paréntesis de Lie-Poisson

$$\{F_1, F_2\}_K = -\nabla\mathcal{K} \cdot (\nabla F_1 \times \nabla F_2) \quad (4.11)$$

está definido sobre el álgebra dual  $\mathbb{R}^3$  (ver sección 2.5.4) y define una estructura hamiltoniana simpléctica (sobre  $\mathcal{K} = cte$ ) módulo un factor global constante:

$$\{p, \theta\}_K = \frac{1}{k_1 k_2}, \quad (4.12)$$

que para funciones dinámicas genéricas, pero bien portadas

$$\{F, G\}_K = \frac{1}{k_1 k_2} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial p} \right). \quad (4.13)$$

La reestricción del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  al cilindro elíptico  $\mathcal{K} = cte$  está dado por

$$\mathcal{H} = \frac{k_1^2 K}{I_1} + \frac{1}{I_3} \left[ \frac{1}{2} p^2 + \frac{I_3(I_2 - I_1)}{2(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)} r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{k_1^2 K}{I_1} + \frac{1}{I_3} \mathcal{N}, \quad (4.14)$$

entonces,  $\mathcal{N}/I_3$  puede ser considerado como hamiltoniano en la hoja simpléctica  $\mathcal{K}$  y tiene la forma de energía cinética más energía potencial. Las ecuaciones de movimiento en las variables canónicas  $(\theta, p)$  son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta &= \{\theta, \mathcal{N}/I_3\} = -\frac{1}{k_1 k_2 I_3} p, \\ \frac{d}{dt} p &= \{p, \mathcal{N}/I_3\} = \frac{1}{k_1 k_2 I_3} \frac{k_2^2}{k_3^2} r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{r^2}{2k_1^2 k_3^2 I_3^2} \sin 2\theta, \quad (4.16)$$

en los parámetros originales del cuerpo rígido,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{\mathcal{K}}{I_3^2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \sin 2\theta. \quad (4.17)$$

Es decir, *el movimiento del cuerpo rígido puede reducirse al movimiento de un péndulo en superficies de nivel  $\mathcal{K}$* . El factor de 2 en el argumento de la función seno se debe a la simetría  $\mathbb{Z}_2$  en las superficies de nivel de  $\mathcal{K}$  o bien, por la invariancia bajo el intercambio  $\theta \mapsto \theta + \pi$ .

Finalizamos esta sección estableciendo el teorema originalmente propuesto en [23],

**Teorema.** Las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido son Lie-Poisson con hamiltoniano  $\mathcal{N}$  para el álgebra de Lie dual  $\mathbb{R}_K^3$  donde el grupo de Lie asociado a  $\mathcal{K}$  es el grupo ortogonal  $O(K)$ , si  $\mathcal{K}$  es no degenerada. Si  $\mathcal{K}$  tiene signatura  $(+, +, 0)$ <sup>4</sup> el grupo asociado es  $ISO(2)$ . En particular, los grupos  $SO(3)$ ,  $SO(2,1)$  y  $ISO(2)$  ocurren al variar los parámetros  $a, b, c, d$  de la matriz  $SL(2, \mathbb{R})$ . Para el caso de un cuerpo simétrico, el grupo de Heisenberg ocurre también.

En lo sucesivo exploramos este teorema en nuestra parametrización (inspirada en los trabajos de la molécula asimétrica mostrados en el capítulo 3) y obtenemos, bajo el paréntesis de Lie-Poisson y transformaciones adecuadas de las variables de momento angular, nuevos paréntesis simplécticos que dan lugar a la dinámica del péndulo en todos sus regímenes de movimiento o en secciones de este.

<sup>4</sup>la matriz asociada a la forma cuadrática  $\mathcal{K}$  que será diagonal en el sistema de ejes principales.

### 4.2.1. Integrales de movimiento en parámetros $e_i$

En los parámetros adimensionales  $\{e_i\}$  y  $e_0$  tenemos

$$e_1 = \cos(\kappa), \quad e_2 = \cos(\kappa - 2\pi/3), \quad e_3 = \cos(\kappa + 2\pi/3), \quad (4.18)$$

y verifican (véase sección 3.3),

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 3/2 \quad \text{and} \quad e_1 e_2 e_3 = (\cos 3\kappa)/4. \quad (4.19)$$

Las funciones de Casimir, en el espacio coordinado  $(u_1, u_2, u_3)$  se escriben como (ver 3.37),

$$h(u_1, u_2, u_3) \equiv \frac{1}{2} (e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + e_3 u_3^2), \quad (4.20)$$

$$l(u_1, u_2, u_3) \equiv \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2). \quad (4.21)$$

Y bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  (ecuación 4.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} [(ae_1 + b) u_1^2 + (ae_2 + b) u_2^2 + (ae_3 + b) u_3^2], \\ \mathcal{N} &= \frac{1}{2} [(ce_1 + d) u_1^2 + (ce_2 + d) u_2^2 + (ce_3 + d) u_3^2]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado el ordenamiento  $e_3 < e_2 < e_1$  de los parámetros adimensionales de inercia, las soluciones dependen del valor relativo entre  $e_0$  y  $e_2$ . Mostramos en esta sección el cuadro (4.1) y un resumen de la sección (3.4.3) para propósitos de autocontención. Detalles sobre estas soluciones pueden consultarse en la sección (3.4.3) de este trabajo o en [62; 63].

#### I. Caso $e_3 < e_2 < e_0 < e_1$

Cuando  $e_0$  adquiere valores entre  $e_2$  y  $e_1$ , las soluciones son

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \text{sn}(\tau', m_c) \text{dn}(\tau, m), & u_2(\tau) &= \text{dn}(\tau', m_c) \text{sn}(\tau, m), \\ u_3(\tau) &= \text{cn}(\tau', m_c) \text{cn}(\tau, m), \end{aligned} \quad (4.23)$$

con amplitudes escritas como funciones elípticas de Jacobi con parámetro  $\tau' = \text{constante}$ <sup>5</sup>,

$$\text{sn}^2(\tau', m_c) = \frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \text{cn}^2(\tau', m_c) = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}, \quad \text{dn}^2(\tau', m_c) = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2}. \quad (4.24)$$

El cuadrado del módulo  $m$  y su complementario  $m_c$  en la ecuación (4.23) está dado por

$$\begin{aligned} m^2 &\equiv \frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0)}{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)} = \frac{(e_1 - e_0)}{(e_0 - e_3)} \frac{k_1^2}{k_2^2}, \quad \text{y} \\ m_c^2 &\equiv \frac{(e_0 - e_2)(e_1 - e_3)}{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)} = \frac{(e_0 - e_2)}{(e_0 - e_3)} \frac{1}{k_2^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

que toma valores  $0 < m^2 < 1$  y  $0 < m_c^2 < 1$  y satisface  $m^2 + m_c^2 = 1$ . Los cocientes son

$$k_1^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \text{y} \quad k_2^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \quad (4.26)$$

que satisfacen de manera similar  $k_1^2 + k_2^2 = 1$ .

<sup>5</sup>El tiempo  $\tau$  es el definido en la sección (3.4.3), específicamente (3.26).

**II.** Caso  $e_3 < e_0 < e_2 < e_1$  .

Aquí, las soluciones son

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{cn}\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) \operatorname{cn}\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), & u_2 &= \operatorname{dn}\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) \operatorname{sn}\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), \\ u_3 &= \operatorname{sn}\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) \operatorname{dn}\left(m\tau, \frac{1}{m}\right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde  $0 < 1/m^2 < 1$ , con  $m^2$  definido en (4.25). Empero, debido a que  $e_3 < e_0 < e_2 < e_1$ ,  $m^2 > 1$ . Las amplitudes son escritas en términos de funciones de Jacobi con parámetro  $\tau' = \text{constante}$

$$(4.28)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) &= \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}, & \operatorname{cn}^2\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) &= \frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}, \\ \operatorname{dn}^2\left(\tau', i\frac{m_c}{m}\right) &= \frac{e_0 - e_3}{e_2 - e_3}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Notemos que, de manera análoga al hecho de que  $m^2$  y  $m_c^2$  son complementarios entre ellos, es decir,  $m^2 + m_c^2 = 1$ , el par  $1/m^2$  y  $-m_c^2/m^2$  también lo son. A su vez  $1/m_c^2$  y  $-m^2/m_c^2$  satisfacen

$$m^2 + m_c^2 = 1, \quad \frac{1}{m^2} - \frac{m_c^2}{m^2} = 1, \quad \frac{1}{m_c^2} - \frac{m^2}{m_c^2} = 1. \quad (4.30)$$

	$m^2$	$m_c^2$	$\frac{1}{m^2}$	$-\frac{m_c^2}{m^2}$	$\frac{1}{m_c^2}$	$-\frac{m^2}{m_c^2}$
$e_2 < e_0$	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$	$(-\infty, 0)$	$(1, \infty)$	$(-\infty, 0)$
$e_0 < e_2$	$(1, \infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(-\infty, 0)$	$(1, \infty)$

Cuadro 4.1: Intervalo de valores de  $m^2$  y  $m_c^2$ , sus inversos  $1/m^2$ ,  $1/m_c^2$  y cocientes  $m^2/m_c^2$  and  $m_c^2/m^2$ , como función de los valores relativos entre  $e_0$  y  $e_2$ .

### 4.3. El péndulo

Como el caso del cuerpo rígido extendido, las soluciones del péndulo simple están dadas en términos de las funciones elípticas de Jacobi definidas en todo el espacio complejo  $\mathbb{C}$  con la propiedad de ser doblemente periódicas. Revisamos las características principales de la expresión de la energía del péndulo en tiempo real e imaginario. Estas propiedades están bien entendidas en la literatura y existen muchos trabajos interesantes al respecto [67; 87; 111; 112; 122; 133; 134]. En este trabajo seguiremos principalmente a [28].

#### 4.3.1. Péndulo en tiempo real y sus soluciones

Comenzamos considerando un péndulo de masa  $M$  y longitud  $r$  sujeto a la acción gravitatoria constante de magnitud  $-g$  ( $g > 0$ ). Si  $\theta$  es el ángulo polar medido respecto a la línea vertical y en dirección anti horaria, entonces  $\dot{\theta}$  representa la derivada temporal de su posición angular. El lagrangiano del sistema es

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - Mgr(1 - \cos \theta). \quad (4.31)$$

El cero de energía potencial es la posición vertical más baja del péndulo ( $\theta = 2n\pi$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ ). La ecuación de movimiento resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0, \quad (4.32)$$

en donde, tras una primera integración, obtenemos la conservación de la energía mecánica total

$$E = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + 2Mgr \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{constante}. \quad (4.33)$$

Soluciones físicas de la ecuación (4.33) existen solo si  $E \geq 0$ . Ahora bien, lícito es reescribir la ecuación en forma adimensional en términos del parámetro  $k_E^2 \equiv \frac{E}{2Mgr}$  y la variable real temporal:  $x \equiv \sqrt{\frac{g}{r}}t \in \mathbb{R}$ , obteniendo

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = k_E^2, \quad (4.34)$$

donde  $p$  es la velocidad angular adimensional:  $p(x) \equiv d\theta/dx$ . Una inspección al potencial permite concluir que el péndulo tiene cuatro tipos de soluciones diferentes dependiendo de los valores de la constante  $k_E^2$ :

- *Equilibrio estático* ( $\dot{\theta} = 0$ ): el comportamiento trivial ocurre cuando  $k_E^2 = 0$  o  $k_E^2 = 1$ . El primer caso implica  $\dot{\theta} = 0$ . Para  $k_E^2 = 1$  podemos considerar la situación donde  $\dot{\theta} = 0$ . En ambos casos, el péndulo no presenta movimiento, es decir, equilibrio estático. Cuando  $\theta = 2n\pi$  el equilibrio es estable y en  $\theta = (2n+1)\pi$  es inestable.

- *Movimiento Oscilatorio* ( $0 < k_E^2 < 1$ ): en estos casos, el péndulo oscila respecto a un punto de equilibrio estable. Las soluciones analíticas son

$$\theta(x) = 2 \arcsin[k_E \operatorname{sn}(x - x_0, k_E)], \quad (4.35)$$

$$p(x) = 2k_E \operatorname{cn}(x - x_0, k_E), \quad (4.36)$$

donde el cuadrado del módulo  $k^2$  de las funciones elípticas están relacionadas con el parámetro de energía:  $k^2 \equiv k_E^2$ . Aquí  $x_0$  es una segunda constante de integración y aparece cuando (4.34) es integrada. Su significado físico es la arbitrariedad en la elección del cero en el tiempo. El periodo de movimiento es  $4K$  o, reestableciendo la dimensión temporal,  $4K\sqrt{g/r}$  con  $K$  un cuarto de periodo de la función elíptica  $\operatorname{sn}(x - x_0, k_E)$ .

- *Movimiento asintótico* ( $k_E^2 = 1$  y  $\dot{\theta} \neq 0$ ): en este caso, el ángulo  $\theta$  toma valores en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  y por tanto  $\sin(\theta/2) \in (-1, 1)$ . La partícula alcanza el punto más alto del círculo. Las soluciones vienen dadas por

$$\theta(x) = \pm 2 \arcsin[\tanh(x - x_0)], \quad (4.37)$$

$$p(x) = \pm 2 \operatorname{sech}(x - x_0). \quad (4.38)$$

El signo  $\pm$  corresponde al movimiento de ( $\mp\pi \rightarrow \pm\pi$ ). Notar que  $\tanh(x - x_0)$  toma valores en  $(-1, 1)$  si  $x - x_0 \in (-\infty, \infty)$ . Por ejemplo, si  $\theta \rightarrow \pi$ ,  $x - x_0 \rightarrow \infty$  y  $\tanh(x - x_0)$  tiende asintóticamente a 1. Es claro que este movimiento no es periódico. En la literatura es común tomar  $x_0 = 0$ .

- *Movimiento Circulatorio* ( $k_E^2 > 1$ ): en este caso, el momento de la partícula es suficientemente largo para superar el punto más alto del círculo y por tanto se desliza alrededor de este. Siempre en la misma dirección. Las soluciones están dadas por

$$\theta(x) = \pm 2 \operatorname{sgn} \left[ \operatorname{cn} \left( k_E(x - x_0), \frac{1}{k_E} \right) \right] \arcsin \left[ \operatorname{sn} \left( k_E(x - x_0), \frac{1}{k_E} \right) \right], \quad (4.39)$$

$$p(x) = \pm 2k_E \operatorname{dn} \left( k_E(x - x_0), \frac{1}{k_E} \right), \quad (4.40)$$

donde el signo global (+) es por movimiento anti horario y (-) en sentido horario. La función  $\text{sgn}(x)$  está definida como

$$\text{sgn} \left[ \text{cn} \left( k_E(x - x_0), \frac{1}{k_E} \right) \right] = \begin{cases} +1 & \text{si } (4n - 1)K \leq k_E(x - x_0) < (4n + 1)K, \\ -1 & \text{si } (4n + 1)K \leq k_E(x - x_0) < (4n + 3)K, \end{cases} \quad (4.41)$$

y su papel es acortar el periodo de la función  $\text{sn}(k_E(x - x_0), 1/k_E)$  a la mitad. Este hecho está en acuerdo con la expresión para  $p(x)$  ya que el periodo de la función elíptica  $\text{dn}(k_E(x - x_0), 1/k_E)$  es  $2K/k_E$  en lugar de  $4K/k_E$ , que es el periodo de  $\text{sn}(k_E(x - x_0), 1/k_E)$ . El módulo  $k^2$  es igual al inverso de la *energía*  $0 < k^2 = 1/k_E^2 < 1$ . Todos estos son los movimientos posibles del péndulo simple. Se puede demostrar que las soluciones satisfacen (4.34) usando las relaciones entre las funciones de Jacobi (donde el módulo satisface  $0 < k^2 < 1$ ) y sus análogos para funciones hiperbólicas (que son el caso límite para las cuales  $k = 1$ ):

$$\text{sn}^2(x, k) + \text{cn}^2(x, k) = 1, \quad (4.42)$$

$$\tanh^2(x) + \text{sech}^2(x) = 1, \quad (4.43)$$

$$k^2 \text{sn}^2(x, k) + \text{dn}^2(x, k) = 1. \quad (4.44)$$

### 4.3.2. Péndulo en tiempo imaginario

En el análisis anterior, el tiempo es real. Las soluciones del péndulo simple solo contemplan el periodo  $4K$  real. Sin embargo, las funciones de Jacobi están definidas en todo  $\mathbf{C}$ . Por ejemplo, la función  $\text{sn}(z, k)$  con módulo  $0 < k^2 < 1$ , tiene periodo  $4K$  y un periodo imaginario  $2iK_c$  donde  $K$  y  $K_c$  son los cuartos de periodo [112]). En 1878, Paul Appell clarificó el significado físico del tiempo imaginario en este sistema [113; 111]. Revirtiendo el signo del campo gravitacional  $g \rightarrow -g$  y obligando a las ecuaciones de Newton a permanecer invariantes ante este cambio, debemos reemplazar la variable  $t$  por  $\tau \equiv \pm it$ . Implementando estos cambios, la ecuación de movimiento (4.32) adopta la forma

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \frac{g}{r} \sin \theta = 0. \quad (4.45)$$

Escribir esta última en forma adimensional, requiere la introducción del tiempo imaginario  $y \equiv \pm \tau \sqrt{g/r} = \pm ix$ . Integrando obtenemos

$$\frac{1}{4} \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = -k_E^2, \quad (4.46)$$

que luce como (4.34) pero con potencial invertido. Para resolver esta ecuación, invertimos el signo del potencial y reescribimos la ecuación de tal forma que sea similar a (4.34). Esto se logra desfasando el potencial por una unidad,

$$\left( \frac{\mathbb{P}}{2} \right)^2 + \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 1 - k_E^2. \quad (4.47)$$

Aquí  $\mathbb{P}$  es el momento de la función con tiempo imaginario. El segundo paso es reescribir el potencial de tal forma que coincida con aquél de (4.34). Esto se logra con una traslación de la gráfica del potencial por un ángulo  $\pi/2$  hacia la derecha. Definamos ahora  $\theta' = \theta - \pi$ , para obtener

$$\left( \frac{\mathbb{P}}{2} \right)^2 + \sin^2 \left( \frac{\theta'}{2} \right) = 1 - k_E^2. \quad (4.48)$$

Es claro que  $0 < 1 - k_E^2 < 1$  para el movimiento oscilatorio y  $1 - k_E^2 < 0$  para el circulatorio. No es el propósito de este trabajo revisar el conjunto completo de soluciones con tiempo imaginario. Se sugiere consultar [28] para una revisión exhaustiva.

#### 4.4. El péndulo desde el cuerpo rígido extendido ( $c \neq 0$ y $d \neq 0$ )

En esta sección comenzamos a revisar la relación entre el cuerpo rígido y el péndulo originalmente discutido en [23]. Extendemos la discusión para el caso de tiempo imaginario. En todos los casos se analizan las propiedades geométricas y algebraicas. Una lección aprendida en [23] es que, para obtener un péndulo desde el cuerpo rígido, es necesario que la transformación  $SL(2, \mathbb{R})$  de los invariantes otorgue nuevas representaciones que, geoméricamente, sean cilindros elípticos. En nuestra parametrización, las condiciones matemáticas para que esto suceda son

$$ae_i + b = 0, \quad y \quad ce_j + d = 0, \quad \text{con } i \neq j. \quad (4.49)$$

Sin embargo, debido al hecho de que los parámetros de inercia no son necesariamente positivos, estas condiciones no solo constriñen al sistema a cilindros elípticos, también cilindros hiperbólicos surgen (ver [27] y el capítulo 3). Para tener el control de estas posibilidades de obtener péndulos, es necesario listar todos las transformaciones que  $SL(2, \mathbb{R})$  contempla y que satisface (4.49). Estos conjuntos se determinan bajo las siguientes condiciones: i)  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$ ; ii)  $c \neq 0$  y  $d = 0$ ; iii)  $c = 0$  y  $d \neq 0$  [68]. En el último caso, un elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  es

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \quad \text{con } b \in \mathbb{R}. \quad (4.50)$$

Se concluye que la superficie  $\mathcal{N}$  es una esfera unitaria y por tanto en este caso no es posible degenerarlo a una superficie cilíndrica<sup>6</sup>. Como consecuencia, el péndulo no puede alcanzarse desde elementos de grupo de esta clase y nos restringimos a los casos i) y ii). Dejamos el caso  $c \neq 0$  and  $d = 0$  para la sección (4.5) y presentamos los cuadros (4.2) y (4.3) que muestran las posibilidades geométricas para los casos  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$  de la transformación (4.3).

Situación	$ae_1 + b$	$ae_2 + b$	$ae_3 + b$	Superficie $\mathcal{H}$ , tras la aplicación $SL(2, \mathbb{R})$ a $H$
1	= 0	< 0	< 0	Cilindro elíptico en torno a $u_1$
2	> 0	= 0	< 0	Cilindro hiperbólico en torno a $u_2$ , foco en $u_1$ ( $e_2 < e_0$ )
3	> 0	= 0	< 0	Cilindro hiperbólico en torno a $u_2$ , foco en $u_3$ ( $e_0 < e_2$ )
4	> 0	> 0	= 0	Cilindro elíptico en torno a $u_3$

Cuadro 4.2: Clasificación de las cuatro geometrías diferentes para  $\mathcal{H}$  en el cuerpo rígido extendido asimétrico.

Situación	$ce_1 + d$	$ce_2 + d$	$ce_3 + d$	Superficie $\mathcal{N}$ , tras la aplicación $SL(2, \mathbb{R})$ a $N$
5	= 0	< 0	< 0	Cilindro elíptico en torno a $u_1$
6	> 0	= 0	< 0	Cilindro hiperbólico en torno a $u_2$ , foco en $u_1$ ( $e_2 < e_0$ )
7	> 0	= 0	< 0	Cilindro hiperbólico en torno a $u_2$ , foco en $u_3$ ( $e_0 < e_2$ )
8	> 0	> 0	= 0	Cilindro elíptico en torno a $u_3$

Cuadro 4.3: Clasificación de las cuatro geometrías diferentes para  $\mathcal{N}$  en el cuerpo rígido extendido asimétrico.

Nos referimos a las cinco posibilidades en términos de las intersecciones 1-6, 1-7, 1-8, 2-8 y 3-8 de los cuadros (4.2) y (4.3). El caso discutido en [23] corresponde a 1-8: intersección de dos cilindros elípticos.

<sup>6</sup>Sin embargo existen mapeos como la proyección estereográfica al plano complejo. Este tipo de transformaciones no pertenecen a  $SL(2, \mathbb{R})$  pero si, tal vez a  $SL((3, \mathbb{R}))$  o el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Estas consideraciones son motivo de investigación posterior como se presenta en el último capítulo de esta tesis.

Sin embargo tenemos otros cuatro casos que no son discutidos en la literatura, hasta donde sabemos. Resaltamos que, a diferencia del trabajo de [23], aquí usamos diferente parametrización. Adicionalmente, agrandamos a más posibilidades de mapeos de momento contemplando la posibilidad que estos sean complejos. En la subsección (4.3.2), se estudia por qué el momento  $\mathbb{P} = -ip$  definido así, es consecuencia de introducir tiempos puramente imaginarios. Cuando el tiempo es real, el espacio de momento angular final permanece en  $\mathbb{R}^3$  mientras que el asociado al espacio fase del péndulo es  $\mathbb{R} \times S^1$ . Para tiempo imaginario puro, el espacio de momento angular final es  $\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}$  y el espacio fase del péndulo es construido con la coordenada real  $\theta$  y el momento imaginario puro  $\mathbb{P}$ . En esta sección comenzamos analizando el caso original (1-8) en nuestra parametrización.

#### 4.4.1. Intersección de dos cilindros elípticos

Eligiendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  entradas no nulas de  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  que verifiquen

$$ae_1 + b = ce_3 + d = 0, \quad (4.51)$$

que se logra fijando dos de los tres parámetros de  $g$ . Sustituyendo  $b$  y  $d$  en las expresiones (4.3) para los invariantes obtenemos

$$\mathcal{H}: \quad -\frac{a}{2}(e_1 - e_2)u_2^2 - \frac{a}{2}(e_1 - e_3)u_3^2 = -\frac{a}{2}(e_1 - e_0), \quad (4.52)$$

$$\mathcal{N}: \quad \frac{c}{2}(e_1 - e_3)u_1^2 + \frac{c}{2}(e_2 - e_3)u_2^2 = \frac{c}{2}(e_0 - e_3). \quad (4.53)$$

Notando que las superficies no dependen de valores específicos de  $a$  y de  $b$ . Sin embargo, podemos fijar uno de estos parámetros en términos de otro con la condición  $\det g = 1$ , que en este caso produce la condición  $ac = 1/(e_1 - e_3)$ . En otras palabras, Holm y Marsden consideraron un elemento  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  de la forma

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{e_1}{c(e_1 - e_3)} \\ \frac{1}{c(e_1 - e_3)} & -ce_3 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

que depende solo del parámetro libre  $c \neq 0$ . Originalmente este parámetro fue fijado en  $c = 1$  a pesar de que no es necesario debido a que la combinación  $SL(2, \mathbb{R})$  de  $h$  y de  $l$  deja expresiones que no dependen de  $c$ . Bajo el ordenamiento  $e_3 < e_2 < e_1$ , los coeficientes en (4.54) tienen la propiedad  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $d > 0$ . Las ecuaciones que determinan las superficies pueden escribirse entonces como

$$\mathcal{H}: \quad k_2^2 u_2^2 + u_3^2 = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{N}: \quad u_1^2 + k_1^2 u_2^2 = \frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad (4.56)$$

que representan genéricamente dos cilindros elípticos,  $\mathcal{H}$  con eje en la coordenada  $u_1$  y  $\mathcal{N}$  a lo largo de  $u_3$ . Aquí  $k_1^2$  y  $k_2^2$  son los definidos como

$$k_1^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \text{y} \quad k_2^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (4.57)$$

Las secciones transversales de los cilindros son elipses con semi eje mayor y menor en ejes que dependen del valor  $e_0$ , es decir, tienen tamaño variable y las intersecciones son exactamente las mismas que en la figura (4.1) ya que las transformaciones  $SL(2, \mathbb{R})$  cambian la geometría de las integrales de movimiento pero dejan invariante sus intersecciones [20]. La estrategia es ahora implementar un cambio de variables de tal forma que uno de los cilindros se vuelva circular usando para ello, funciones trigonométricas. Hecho esto, el segundo cilindro no podrá mapearse a uno circular simultáneamente sin introducir funciones elípticas. Esta estrategia puede aplicarse de dos maneras diferentes, en un caso  $\mathcal{H}$  se degenera a cilindro

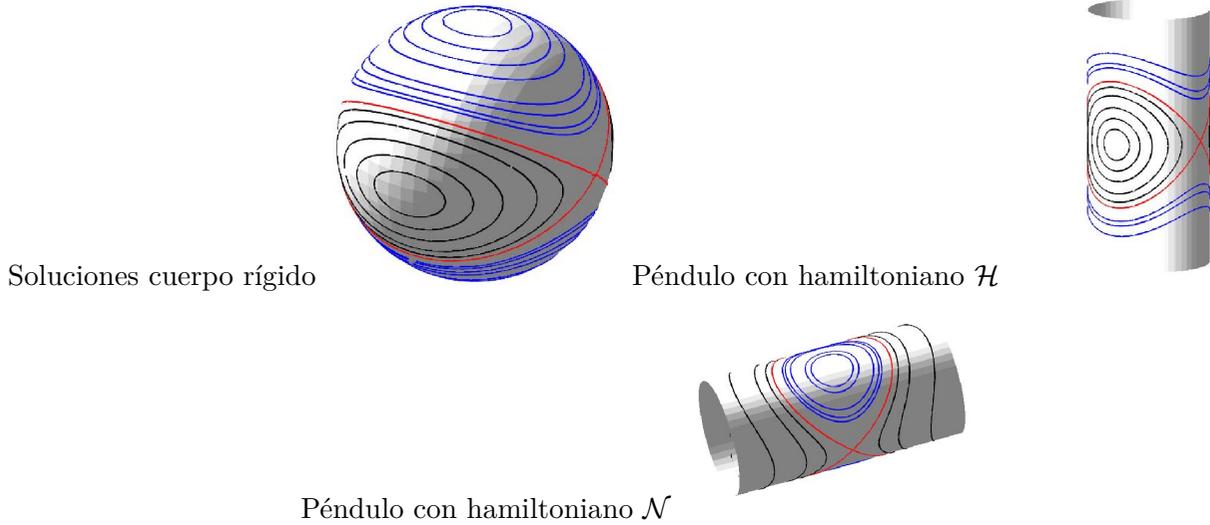


Figura 4.1: Órbitas solución del vector de momento angular en el marco atado al cuerpo para  $so(3)$ . Para  $e_2 < e_0$  se dibujan en negro mientras que para  $e_0 < e_2$  se dibujan en azul. Las líneas rojas corresponden a las separatices. La figura superior derecha corresponde al espacio fase del péndulo simple con hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y espacio cotangente  $\mathcal{N}$ . La figura inferior le corresponde los Casimir invertidos. Notar que las líneas azules (negras) están intercambiadas en ambos cilindros.

elíptico mientras que en el segundo caso, le corresponde a  $\mathcal{N}$ . Interesante es que estos dos casos produce el mismo sistema físico, esperado en la teoría general de sistemas bi-hamiltonianos a pesar de que el origen físico difiere en ambos casos como explicaremos. El cambio de variable o dicho técnicamente *mapeo de momento* que se implementa [55] es análogo al definido por Holm y Marsden. Como resultado de este mapeo, una de las expresiones para las superficies invariantes adopta la forma de hamiltoniano sobre una superficie simpléctica definida por el otro invariante. Tal hamiltoniano es el del péndulo simple y podemos identificar directamente si la energía es la adecuada para producir oscilaciones o movimiento circular. Adicionalmente introducimos mapeos de momento con tiempo imaginario.

- Péndulo simple con tiempo real y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : consideremos el mapeo de momento

$$u_1 \equiv \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_3 \equiv \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \frac{p}{2}. \quad (4.58)$$

La expresión para la superficie  $\mathcal{N}$  se verifica idénticamente mientras que, para  $\mathcal{H}$ , tenemos

$$\mathcal{H} : \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{e_1 - e_0}{e_0 - e_3} \cdot \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} \equiv m^2. \quad (4.59)$$

La función  $\mathcal{N}$  se interpreta como el espacio cotangente con geometría de un cilindro circular de radio unitario. Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (4.34),  $\mathcal{H}$  es el hamiltoniano del péndulo en analogía a la relación hallada por Holm y Marsden [23]. Debido a que en la situación 1 del cuadro (4.2) es válida para toda  $e_0$  en  $e_3 < e_0 < e_1$  se tiene que  $0 < m^2 < 1$  para  $e_0 > e_2$ ,  $m^2 = 1$  y a su vez  $e_0 = e_2$ ,  $m^2 > 1$  para  $e_0 < e_2$  (ver cuadro 4.1). Pot tanto, para  $m^2 < 1$  tenemos movimiento oscilatorio para el péndulo y en  $m^2 = 1$  movimiento crítico. Para el valor  $m^2 > 1$  se verifica el movimiento circulatorio. La figura 4.1 muestra el espacio fase completo del péndulo. Los generadores (3.45) del sistema pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
Y_{u_1} &\equiv \frac{1}{c\alpha} X_{u_1} = -\frac{(e_1 - e_3)}{\alpha} k_1^2 u_2 \partial_3, \\
Y_{u_2} &\equiv \frac{k_1}{c\alpha} X_{u_2} = \frac{(e_1 - e_3)}{\alpha} k_1 u_1 \partial_3, \\
Y_{u_3} &\equiv \frac{1}{ck_1(e_1 - e_3)} X_{u_3} = k_1 u_2 \partial_1 - \frac{1}{k_1} u_1 \partial_2,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

que satisfacen el álgebra de Lie  $iso(2)$

$$[Y_{u_1}, Y_{u_2}] = 0, \quad [Y_{u_2}, Y_{u_3}] = Y_{u_1}, \quad [Y_{u_3}, Y_{u_1}] = Y_{u_2}. \tag{4.61}$$

Adicionalmente a la constante  $c$  en (4.60), los generadores  $Y_{u_1}$  y  $Y_{u_2}$  pueden multiplicarse por un factor constante  $\alpha$ . Se puede introducir una estructura Lie-Poisson para el péndulo en la superficie cilíndrica  $\mathcal{N} = 1$  [23], en términos del par  $(\theta, p)$  si definimos el paréntesis como

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = -\nabla \mathcal{N} \cdot (\nabla f \times \nabla g). \tag{4.62}$$

Con lo cual obtenemos

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = -8 \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \tag{4.63}$$

que muestra que las variables  $\theta$  y  $p$  representa un par canónicamente conjugado hasta un factor

$$\{p, \theta\}_{\mathcal{N}} = 8 \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}}. \tag{4.64}$$

En términos de este paréntesis, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \{\mathcal{H}, \theta\}_{\mathcal{N}} \quad \text{y} \quad \frac{dp}{d\tau} = \{\mathcal{H}, p\}_{\mathcal{N}}. \tag{4.65}$$

Combinando este par de ecuaciones obtenemos la ecuación de movimiento para el péndulo simple

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -16 \frac{(e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2}{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)} \sin \theta. \tag{4.66}$$

• Péndulo simple con tiempo imaginario y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : considere el mapeo de momento

$$u_1 \equiv \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_3 \equiv i \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \frac{\mathbb{P}}{2}. \tag{4.67}$$

La expresión para  $\mathcal{N}$  se verifica idénticamente mientras que, para  $\mathcal{H}$ , tenemos

$$\mathcal{H} : \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 = m_c^2, \tag{4.68}$$

donde  $m_c^2$  es el módulo complementario definido en (4.25). El invariante  $\mathcal{H}$  representa el hamiltoniano del péndulo con tiempo imaginario (4.48). Nuevamente, debido a que (4.68) es válida para toda  $e_0$ , tenemos todos los movimientos que el péndulo puede ejecutar. Osculatorio:  $e_2 < e_0$  y  $0 < m_c^2 < 1$ ; asintótico:  $e_0 = e_2$  y  $m_c^2 = 0$ ; circulatorio:  $e_0 < e_2$  y  $m_c^2 < 0$  (ver cuadro 4.1). El complejo  $i$  en la coordenada  $u_3$  juega el papel geométrico de cambiar el cilindro elíptico a un cilindro hiperbólico a pesar de que el primero está definido en el espacio fase real  $\mathbb{R}^3$  mientras que el último está definido en  $\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}$ , con carácter complejo. En

este caso se tiene la misma álgebra  $iso(2)$  que (4.61) pues grupos diferentes pueden compartir álgebras iguales. El paréntesis se escribe con un factor de escala imaginario puro

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = -8i \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \mathbb{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \quad (4.69)$$

en completo acuerdo con el hecho de que la ecuación de Newton para el péndulo simple con tiempo imaginario tiene un signo negativo extra en el término de fuerza

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 16 \frac{(e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2}{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)} \sin \theta. \quad (4.70)$$

Debido a que el cuerpo rígido es un sistema bi-hamiltoniano, es interesante obtener el péndulo simple ahora con  $\mathcal{N}$  como hamiltoniano y constante de movimiento  $\mathcal{H}$  en el papel de espacio cotangente.

• Péndulo simple con tiempo real y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : sea el mapeo de momento

$$u_1 \equiv \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{p}{2}, \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_3 \equiv \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.71)$$

Ahora, la expresión para  $\mathcal{H}$  se verifica explícitamente mientras que, para  $\mathcal{N}$ , tenemos

$$\mathcal{N} : \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{m^2}, \quad (4.72)$$

de acuerdo con (4.34), le corresponde ser la energía del péndulo simple. Debido a que la situación 8 del cuadro (4.3) es lícita para todo  $e_0$  en el intervalo  $e_3 < e_0 < e_1$ , tenemos que, en virtud de (4.72), todos los movimientos son posibles. En el caso  $e_0 < e_2$ , para el cual  $0 < m^2 < 1$  en (4.59) se tiene movimiento oscilatorio. Para (4.72) se tiene movimiento circulatorio para los mismos valores de  $e_0$ :  $1 < 1/m^2 < \infty$ . Algo análogo se tiene para movimientos circulatorios en (4.59) y oscilatorios en (4.72). Los casos asintóticos se codifican en  $e_0 = e_2$  para el cual  $m^2 = 1$  tanto en (4.59) como (4.72). Esta es la razón por la cual, los colores en (4.1) de las órbitas de momento angular están intercambiadas en ambos cilindros, salvo los casos asintóticos.

Enfaticemos que el cilindro circular  $\mathcal{H}$  es unitario. En este caso el vector hamiltoniano asociado a  $u_i$  está dado por las ecuaciones (3.45). Definiéndolos como

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{u_1} &\equiv \frac{1}{a(e_1 - e_3)k_2} \tilde{X}_{u_1} = \frac{1}{k_2} u_3 \partial_2 - k_2 u_2 \partial_3, \\ \tilde{Y}_{u_2} &\equiv \frac{1}{a\alpha} \tilde{X}_{u_2} = -\frac{(e_1 - e_3)}{\alpha} u_3 \partial_1, \\ \tilde{Y}_{u_3} &\equiv \frac{1}{a\alpha k_2} \tilde{X}_{u_3} = \frac{e_1 - e_3}{\alpha} k_2 u_2 \partial_1, \end{aligned} \quad (4.73)$$

satisfacen el álgebra  $iso(2)$ .

$$[\tilde{Y}_{u_1}, \tilde{Y}_{u_2}] = \tilde{Y}_{u_3}, \quad [\tilde{Y}_{u_2}, \tilde{Y}_{u_3}] = 0, \quad [\tilde{Y}_{u_3}, \tilde{Y}_{u_1}] = \tilde{Y}_{u_2}. \quad (4.74)$$

En (4.73)  $\alpha$  es una constante arbitraria. El paréntesis de Lie-Poisson en términos de  $(\theta, p)$  en la superficie  $\mathcal{H} = 1$ , será

$$\{f, g\}_{\mathcal{H}} = -\nabla \mathcal{H} \cdot (\nabla f \times \nabla g), \quad (4.75)$$

de donde tenemos

$$\{f, g\}_{\mathcal{H}} = 8 \frac{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}{\sqrt{(e_1 - e_0)(e_2 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right). \quad (4.76)$$

La ecuación de movimiento asociada a este paréntesis es

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -16 \frac{(e_1 - e_3)^2 (e_1 - e_2)^2}{(e_1 - e_0)(e_2 - e_3)} \sin \theta. \quad (4.77)$$

• Péndulo simple con tiempo imaginario y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : sea el mapeo

$$u_1 \equiv i \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{\mathbb{P}}{2}, \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_3 \equiv \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right). \quad (4.78)$$

Se verifica idénticamente el invariante  $\mathcal{H}$ . Para  $\mathcal{N}$ , el mapeo otorga

$$\mathcal{N} : \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = -\frac{m_c^2}{m^2}. \quad (4.79)$$

Este es un hamiltoniano para el péndulo simple con tiempo imaginario. Como en el caso previo, se verifican todos los movimientos posibles (4.79). El invariante  $\mathcal{H}$  es el espacio cotangente y por tanto el álgebra es  $\mathfrak{iso}(2)$  dada por (4.74). Para el par  $(\theta, \mathbb{P})$  se verifica igual que (4.76) pero difiere solo por el factor de escala  $i$ .

La interpretación geométrica de estos resultados se sigue naturalmente. Si comenzamos con un cuerpo rígido específico  $\mathfrak{so}(3)$ , los tres momentos de inercia  $\{I_i\}$  se dan como entrada, estos fijan el parámetro  $\kappa$  para luego definir  $\{e_i\}$ . Las soluciones diferentes se obtienen para diferentes valores de  $e_0$ . Después de la transformación de norma  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre las integrales de movimiento (invariantes o funciones de Casimir), para los mapeos de momento (4.58) y (4.67), obtenemos un cilindro circular  $\mathcal{N}$  con eje en torno a  $u_3$  representando el espacio cotangente. Por otro lado,  $\mathcal{H}$  es un elemento de un conjunto de cilindros elípticos (hiperbólicos) con eje en torno a  $u_1$  y representan superficies de energía ya que  $\mathcal{H}$  es el hamiltoniano del péndulo simple (ver ecuaciones (4.34) y (4.48)). Las intersecciones de estas superficies representa el movimiento del péndulo en todos sus casos. Análogamente, para los mapeos (4.71) y (4.78),  $\mathcal{H}$  se vuelve cilindro circular en torno a  $u_1$  y es el espacio cotangente para el hamiltoniano  $\mathcal{N}$  (cilindro hiperbólico o elíptico) del péndulo simple. La libertad de elección de norma de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  no cambia la situación física, que es la órbita de la partícula en el curso de su movimiento.

#### 4.4.2. Intersección de cilindro hiperbólico y cilindro elíptico I

Consideremos en esta sección los casos 2-8 y 3-8 que corresponden a la intersección de cilindros elípticos e hiperbólicos. El elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  para esta situación es

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{c(e_2 - e_3)} & -\frac{e_2}{c(e_2 - e_3)} \\ c & -ce_2 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Como consecuencia, las integrales de movimiento son

$$\mathcal{H} : \quad k_2^2 u_1^2 - k_1^2 u_3^2 = \frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}, \quad (4.81)$$

$$\mathcal{N} : \quad u_1^2 + k_1^2 u_2^2 = \frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}. \quad (4.82)$$

Notamos que  $\mathcal{N}$  es exactamente la misma que (4.56), como debería ser ya que en ambos casos se trata de la situación 8 (ver cuadro (4.3)), que representa un cilindro elíptico unitario con eje en torno a  $u_3$ . En los casos 2-8 y 3-8 difieren por un signo en el lado derecho de la ecuación para  $\mathcal{H}$  (4.81). Para 2-8 tenemos  $e_0 - e_2 > 0$  y  $e_0 - e_2 < 0$  para el caso 3-8. Geométricamente, la diferencia de signos cambia la orientación de los cilindros hiperbólicos (ver fig 4.2). De nuevo, esperamos dos mapeos de momento diferentes. Uno

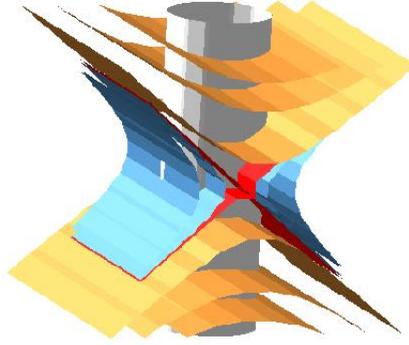


Figura 4.2: La figura muestra la geometría del cilindro hiperbólico para diferentes valores  $e_0$ . Corresponde a  $e_2 < e_0$  la traza en azul mientras que en  $e_0 < e_2$  es amarillo. Los planos en rojo son las separatices.

para  $\mathcal{N}$  que será espacio cotangente asociado al hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y viceversa.

- Péndulo simple con tiempo real y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : como discutimos previamente, bajo el mapeo (4.58)

$$u_1 \equiv \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_3 \equiv \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \left(\frac{p}{2}\right),$$

la expresión para  $\mathcal{N}$  se verifica idénticamente. Por otro lado, la superficie (4.81) coincide con el hamiltoniano (4.34) y (4.59)

$$\mathcal{H} : \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = m^2,$$

donde  $0 < m^2 < 1$  para el caso 2-8 ( $e_0 - e_2 > 0$ ) y representa entonces movimiento oscilatorio. Para  $1 < m^2 < \infty$  (caso 3-8), se tiene ( $e_0 - e_2 < 0$ ) es decir, circulatorio. Como es usual,  $e_0 = e_2$  representa la separatriz. Los vectores hamiltonianos asociados a las coordenadas son los mismos que (4.60) y verifican el álgebra  $iso(2)$  (4.61). Un cálculo permite obtener el paréntesis (4.63) y la ecuación de movimiento (4.66). Los resultados muestran que este caso y el caso real (4.59) representan la misma dinámica a pesar de tener diferente geometría del invariante  $\mathcal{H}$ .

- Péndulo simple con tiempo imaginario y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : como en la sección (4.4.1), bajo el mapeo

$$u_1 \equiv \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_3 \equiv i \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right), \quad (4.83)$$

se tiene que  $\mathcal{N}$  se verifica y  $\mathcal{H}$  adopta la forma

$$\mathcal{H} : \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 = m_c^2. \quad (4.84)$$

donde  $-\infty < m_c^2 < 1$ . Notemos que el rol geométrico de escribir la coordenada  $u_3$  en términos del momento imaginario  $\mathbb{P}$  es mapear el cilindro hiperbólico  $\mathcal{H}$  al elíptico con eje en torno a  $u_2$ . De acuerdo con la ecuación (4.48),  $\mathcal{H}$  representa el hamiltoniano del péndulo con tiempo imaginario y energía  $m^2 = 1 - m_c^2$ ,

como en (4.4.2). El paréntesis de Lie-Poisson y la ecuación de movimiento coinciden con (4.69) y (4.70).

El siguiente mapeo natural es aquel que transforma el sistema del cuerpo rígido al espacio cotangente  $\mathcal{H}$  con hamiltoniano  $\mathcal{N}$ . Por inspección de (4.81), esto puede lograrse introduciendo una coordenada imaginaria pura. El hacerlo nos permite cambiar la naturaleza hiperbólica de los cilindros definidos en  $\mathbb{R}^3$  a cilindros elípticos definidos en  $\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}$ .

• Péndulo circulatorio con tiempo real, coordenada imaginaria y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : consideremos el mapeo de momento

$$u_1 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1 k_2} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \frac{p}{2}, \quad u_3 \equiv \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.85)$$

Hemos asumido  $e_0 - e_2 > 0$  (que es la situación 2 en el cuadro (4.2)). Para tal mapeo, la integral de movimiento  $\mathcal{H}$  se verifica y  $\mathcal{N}$  adopta la forma

$$\mathcal{N} : \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{m_c^2}, \quad (4.86)$$

donde  $1 < 1/m_c^2 < \infty$  (ver cuadro (4.1)) y por tanto el hamiltoniano representa solo movimiento circulatorio para el péndulo. Debido a que el hamiltoniano es  $\mathcal{N}$ , los vectores asociados a las coordenadas están dados por (3.45). Los definimos como

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{u_1} &\equiv \frac{k_2}{a\beta k_1} \tilde{X}_{u_1} = \frac{1}{\beta} \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)} u_3 \partial_2, \\ \tilde{Y}_{u_2} &\equiv \frac{1}{a\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}} \tilde{X}_{u_2} = -\frac{k_2}{k_1} u_1 \partial_2 - \frac{k_1}{k_2} u_3 \partial_1, \\ \tilde{Y}_{u_3} &\equiv \frac{1}{a\beta} \tilde{X}_{u_3} = \frac{1}{\beta} (e_1 - e_2) u_1 \partial_2, \end{aligned} \quad (4.87)$$

que satisfacen el álgebra  $iso(1,1)$

$$[\tilde{Y}_{u_1}, \tilde{Y}_{u_2}] = \tilde{Y}_{u_3}, \quad [\tilde{Y}_{u_2}, \tilde{Y}_{u_3}] = -\tilde{Y}_{u_1}, \quad [\tilde{Y}_{u_3}, \tilde{Y}_{u_1}] = 0. \quad (4.88)$$

Adicionalmente a la constante  $a$  en (4.87), los generadores  $\tilde{Y}_{u_1}$  y  $\tilde{Y}_{u_3}$  pueden multiplicarse por una constante arbitraria, digamos  $\beta$ . El paréntesis de Lie-Poisson será

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = -8i \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_0 - e_2)(e_1 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \quad (4.89)$$

y la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 16 \frac{(e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_2)^2}{(e_1 - e_3)(e_0 - e_2)} \sin \theta. \quad (4.90)$$

En este punto, el signo en la ecuación de movimiento parece ser incorrecto pero, es el reflejo del hecho de que hemos aplicado un mapeo complejo a la coordenada  $u_3$ . A pesar de que hemos presentado el análisis asumiendo  $e_2 - e_0 < 0$ , es importante hacer notar que la misma física emerge en el caso  $e_2 - e_0 > 0$ . La única diferencia es la introducción de un mapeo complejo en  $u_1$  en lugar de  $u_3$ . Llegamos a la conclusión de que, para la situación donde la intersección de superficies es entre cilindro hiperbólico  $\mathcal{H}$  y elíptico  $\mathcal{N}$  siempre que el hamiltoniano sea  $\mathcal{H}$  y el espacio cotangente  $\mathcal{N}$ . Bajo esto, los movimientos del péndulo son exahustivos y el álgebra del cuerpo rígido extendido es  $iso(2)$ . En el caso de hamiltoniano  $\mathcal{N}$  y espacio

cotangente  $\mathcal{H}$  obtenemos solo movimientos circulatorios y álgebra  $iso(1,1)$ .

- Péndulo en movimiento circulatorio, tiempo y coordenada imaginaria y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : sea el mapeo

$$u_1 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{i}{k_1 k_2} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \frac{\mathbb{P}}{2}, \quad u_3 \equiv \frac{i}{k_1} \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right). \quad (4.91)$$

donde se ha asumido  $e_0 - e_2 > 0$  y la superficie  $\mathcal{H}$  se verifica mientras que  $\mathcal{N}$  adopta la forma

$$\mathcal{N} : \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = -\frac{m^2}{m_c^2}. \quad (4.92)$$

Es fácil notar que  $-m^2/m_c^2 < 0$  y por tanto esperamos movimiento circulatorio. Este caso también surge del cuerpo rígido extendido con álgebra  $iso(1,1)$ . El paréntesis tiene perfil:

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = 8 \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_0 - e_2)(e_1 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \mathbb{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \quad (4.93)$$

mientras que la ecuación de movimiento es como (4.90) pero con signo negativo extra en el lado derecho. De nuevo, esta discordancia respecto a (4.48) se entiende por el uso del mapeo de momento (4.91) como continuación analítica de la coordenada  $u_3$ .

#### 4.4.3. Intersección de cilindro hiperbólico y elíptico II

Como caso final, consideramos las situaciones 1-6 y 1-7, para los cuales, el elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  es

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{c(e_1 - e_3)} & -\frac{e_1}{c(e_1 - e_3)} \\ c & -ce_2 \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Las integrales de movimiento o superficies invariantes son

$$\mathcal{H} : \quad k_2^2 u_2^2 + u_3^2 = \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}, \quad (4.95)$$

$$\mathcal{N} : \quad -k_2^2 u_1^2 + k_1^2 u_3^2 = \frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}. \quad (4.96)$$

La superficie  $\mathcal{H}$  es la misma expresión que (4.55) como debe ser, ya que estamos en la situación 1 del cuadro 4.2 que corresponde al cilindro elíptico.

- Péndulo con tiempo real y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : sea el mapeo (4.71)

$$u_1 \equiv \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{p}{2}, \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_3 \equiv \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Claramente, la superficie  $\mathcal{H}$  se verifica y

$$\mathcal{N} : \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{m^2}. \quad (4.97)$$

Para  $e_0 < e_2$ , el cociente  $1/m^2 < 1$  y por tanto  $\mathcal{N}$  representa el hamiltoniano del péndulo en movimiento oscilatorio mientras que en  $e_0 > e_2$ ,  $1/m^2 > 1$  y  $\mathcal{N}$  es hamiltoniano para el caso circulatorio (4.34). Los casos límite son  $e_0 = e_2$ ,  $1/m^2 = 1$  y representan el movimiento asintótico. Como se espera, en este caso el paréntesis coincide con (4.76). Ello implica que la ecuación de movimiento está dada por (4.77).

- Péndulo con tiempo imaginario y hamiltoniano  $\mathcal{N}$ : sea que se tiene (4.78)

$$u_1 \equiv i \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{\mathbb{P}}{2}, \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_3 \equiv \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right). \quad (4.98)$$

Bajo este mapeo,  $\mathcal{H}$  se verifica y  $\mathcal{N}$  adopta la forma

$$\mathcal{N} : \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = -\frac{m_c^2}{m^2}, \quad (4.99)$$

que es precisamente el hamiltoniano del péndulo simple con tiempo imaginario (4.48). Debido a que usamos el mismo espacio cotangente (4.55) y (4.95), el resto de cantidades físicas como el paréntesis y la ecuación de movimiento, coinciden con el caso anterior (4.79).

Siguiendo los casos anteriores, se sigue naturalmente que uno de los mapeos del cuerpo rígido es al espacio cotangente  $\mathcal{N}$  y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ . Por inspección de (4.96) esto se logra introduciendo una continuación analítica a una coordenada.

- Péndulo en régimen circulatorio, tiempo real, coordenada imaginaria y hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : consideremos el mapeo

$$u_1 \equiv \frac{i}{k_2} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{1}{k_1 k_2} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{p}{2}, \quad u_3 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.100)$$

Se asume que  $e_2 - e_0 > 0$  (situación 7 en el cuadro 4.3). Bajo este mapeo  $\mathcal{N}$  se verifica y  $\mathcal{H}$  es la siguiente expresión

$$\mathcal{H} : \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{m^2}{m_c^2}. \quad (4.101)$$

Para valores  $e_2 - e_0 > 0$ , el cociente  $1 < -m^2/m_c^2 < \infty$  (ver cuadro 4.1) y tenemos un péndulo en régimen circulatorio. El paréntesis adopta la forma

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = 8i \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_2 - e_0)(e_1 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \quad (4.102)$$

y la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 16 \frac{(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2}{(e_2 - e_0)(e_1 - e_3)} \sin\theta. \quad (4.103)$$

Como el caso de la sección (4.4.2), el signo negativo extra en (4.103) es debido a la continuación analítica en una coordenada (4.100). Para el caso  $e_0 > e_2$ , se obtiene también el movimiento circulatorio.

- Péndulo circulatorio con tiempo y coordenada imaginaria, hamiltoniano  $\mathcal{H}$ : sea el mapeo de momento (y asumimos  $e_2 > e_0$ )

$$u_1 \equiv \frac{i}{k_2} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right), \quad u_2 \equiv \frac{i}{k_1 k_2} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \frac{\mathbb{P}}{2}, \quad u_3 \equiv \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{e_2 - e_0}{e_1 - e_3}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right). \quad (4.104)$$

Bajo este mapeo,  $\mathcal{H}$  representa el hamiltoniano

$$\mathcal{H} : \left(\frac{\mathbb{P}}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{1}{m_c^2}. \quad (4.105)$$

Es claro que  $-\infty < 1/m_c^2 < 0$  y por tanto, tendremos únicamente movimiento circular. Por completez, el paréntesis es

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = -8 \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\sqrt{(e_2 - e_0)(e_1 - e_3)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \mathbb{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right), \quad (4.106)$$

y la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -16 \frac{(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2}{(e_2 - e_0)(e_1 - e_3)} \sin \theta. \quad (4.107)$$

Notemos una vez más el signo negativo.

## 4.5. El péndulo desde el cuerpo rígido extendido ( $c \neq 0$ and $d = 0$ )

Finalmente, analizamos el subcaso de  $SL(2, \mathbb{R})$  en cuanto a las condiciones expresadas en (4.49) con la segunda condición modificada a  $ce_i = 0$ . Ya que en este caso  $c \neq 0$ , necesariamente implica  $e_i = 0$ . Más aún, la restricción  $\kappa \in (0, \pi/3)$  impone la única posibilidad  $e_2 = 0$  y debido a las constricciones (4.19) tenemos también  $e_1 = -e_3 = \sqrt{3}/2$ . Concluimos que las condiciones (4.49) se verifican en dos situaciones ambas con  $e_2 = 0$  pero con  $ae_1 + b = 0$  o  $ae_3 + b = 0$ . Empero, debido a la relación entre  $e_1$  y  $e_3$ , estas dos situaciones corresponden a la transformación (4.3) con diferente signo en el coeficiente  $a$ . Así que, sin perder generalidad, podemos restringirnos al caso  $a > 0$  y analizar una sola de las situaciones arriba planteadas. El segundo caso puede obtenerse con las mismas expresiones pero con signo cambiado en  $a$ . Obtenemos entonces

$$ae_1 + b = 0, \quad e_2 = 0, \quad (4.108)$$

y un elemento  $SL(2, \mathbb{R})$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} \\ ce_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

Notemos que la transformación obtenida desde (4.94) módulo un factor de  $1/2$  en el primer renglón de la matriz, no cambia la geometría de  $\mathcal{H}$  y por tanto (4.94) corresponde a la transformación  $SL(2, \mathbb{R})$  que manda a cilindros elípticos e hiperbólicos. Para  $e_1 = -e_3$  y  $e_2 = 0$ , los cocientes (4.57) son iguales  $k_1^2 = k_2^2 = 1/2$ . No desarrollamos más este caso debido a que podemos obtenerlo como caso límite de los discutidos anteriormente. Aquí, tenemos dos situaciones,  $e_0 < 0$  (1-7 de la sección 4.4.3) o  $e_0 > 0$  (situación 1-6 de (4.4.3)).

# Capítulo 5

## Tópicos derivados de la investigación

Este capítulo expone algunas ideas y cálculos que realicé durante mi estancia en la UAM. Por diversas circunstancias no se logró profundizar en ellas lo suficiente como para derivar en publicaciones. Sin embargo considero pertinente expresarlas en esta Tesis como proyectos potenciales de investigación en tiempos venideros.

---

### 5.1. Introducción

Gran parte del trabajo doctoral fue el estudio de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  y sus consecuencias en los sistemas dinámicos que la admiten. El paradigma, del cual nos basamos, fue el sistema de Maxwell-Bloch [68]. Este conjunto de ecuaciones similares a las del cuerpo rígido, tienen aplicaciones a la óptica cuántica vista como un sistema cuántico de dos niveles. Por su naturaleza, el sistema tiene fase de Berry (y geométrica) no trivial [44]. Berry descubrió por primera vez que el sistema de espín  $1/2$  en presencia de un campo magnético, tiene fase de Berry no trivial.

Hoy en día se sabe que la fase de Berry tiene que ver con la *holonomía*, que es el cálculo de un loop en el espacio de parámetros de la teoría dentro del contexto de una evolución adiabática del sistema. Asociado a una fase de Berry, es posible calcular una *conexión* o campo de norma y su curvatura correspondiente. En este sistema de espín  $1/2$ , la conexión da lugar a un monopolo magnético en el espacio de parámetros (que es el campo magnético aplicado).

Es natural preguntarse si existen otros sistemas de dos niveles que tengan fase y conexión no trivial. Desde luego, el sistema Maxwell-Bloch, al ser uno de ellos (en su versión cuántica y compleja), tiene fase no trivial. Otros sistemas muy conocidos son el usado en Resonancia Magnética Nuclear y los sistemas de qubits en cómputo cuántico [69; 70; 71].

Dentro de la revisión bibliográfica, el trabajo [24] y su correspondiente suplemento [25] es muy interesante dentro de lo escrito líneas arriba. Los autores establecen una completa analogía entre la dinámica del cuerpo rígido, es decir las soluciones  $\Pi(t)$  elípticas en la esfera de energía, con la dinámica de un sistema de dos niveles a través de la llamada esfera de Bloch. Su idea se centra en que las soluciones del cuerpo rígido pueden implementarse en los sistemas de dos niveles como un mecanismo de control cuántico. En otras palabras, llevar al sistema bajo un *campo de control* de un estado a otro.

A su vez, modelan el efecto de la raqueta de tenis de manera cuántica. Este efecto relata la evolución clásica de una raqueta de tenis desde un estado inicial al mismo estado girando en el aire. Al llegar al

mismo perfil, la raqueta se encuentra *volteada*. Se requiere de una rotación de  $4\pi$  para que la raqueta regrese a su perfil original.

Se señala también la posibilidad de modelar una compuerta cuántica y su control asociado utilizando la fase de Montgomery. Esta fase es la fase geométrica (o de Hannay) clásica en el movimiento del cuerpo rígido [21].

La referencia [24] es un trabajo muy interesante y es viable hallar formas de extenderlo o completarlo. Antes de entrar en detalles, una lista de asertos en búsqueda de sentido físico.

- 1. Dada la analogía cuerpo rígido-sistema dos niveles, ¿qué es una conexión y por tanto un monopolo, desde el punto de vista clásico?
- 2. Incorporar la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  en el sistema cuántico de dos niveles.
- 3. El efecto de las transformaciones de módulo de las funciones elípticas en la idea de control del sistema dos niveles.
- 4. Sobre la estabilidad del cuerpo rígido colocando términos a las ecuaciones (feedbacks) de Euler [72], el efecto en el control del sistema cuántico será potencialmente significativo.
- 5. Si  $SL(2, \mathbb{R})$  tiene aplicación en estas ideas, entonces tendrá sentido codificar las ecuaciones de Bloch en términos de un paréntesis de Nambu o una estructura Lie-Poisson.
- 6. Si un sistema cuántico de dos niveles se parametriza usando funciones elípticas.
- 7. El pulso Eberlin-Allen puede describirse como campos de control usando el péndulo clásico.

Sabemos que en el primer punto, en efecto existe una conexión. En el péndulo de Foucault es la fuerza de coriolis. En la dinámica del cuerpo deformable, es la velocidad angular en el marco inercial. En el segundo punto hasta donde sabemos, no existe trabajo que lo explore. De ser posible, se lograría utilizarla para modelar una evolución controlada en el sistema cuántico utilizando ya no el cuerpo rígido sino el péndulo. En el tercer punto, el campo de control que menciona el artículo está en términos de funciones elípticas. Su módulo depende de los parámetros de inercia del cuerpo rígido. En el cuarto punto, los feedbacks podrían ayudar a mejorar el control del que hablan en este artículo. Hay feedbacks que mantienen la estabilidad y lo más importante, la estructura Lie-Poisson del cuerpo rígido. Para el quinto punto, en efecto, la llamada esfera de Bloch es la representación esférica de la dinámica de un sistema cuántico de dos niveles. Se podría dar una estructura Lie Poisson a las ecuaciones cuánticas usando la analogía entre la ecuación de Neumann-Liouville y el par de Lax para explorar esta posibilidad. Sobre el punto 6, las coordenadas esféricas se usan en la mayoría de los artículos estudiados para codificar la dinámica del sistema dos niveles. Se podría iniciar con elípticas y explorar consecuencias. En el último punto, el llamado pulso Eberlin-Allen invierte los niveles de población en el sistema láser. Tal pulso es la solución clásica asintótica del péndulo simple.

## 5.2. Cuerpo rígido como campo de control en sistemas de dos niveles

### 5.2.1. Fase de Berry y monopolos

El paradigma de las fases de Berry es el sistema cuántico de dos niveles que, para el caso de espín  $1/2$ , se obtiene un monopolo magnético en el espacio de parámetros. Para detalles, ver [44]. Consideremos el sistema de espín  $1/2$  con espacio de Hilbert de dos elementos<sup>1</sup>. La partícula está situada en un campo magnético  $\vec{B}$  y el hamiltoniano es

$$H = -\vec{B} \cdot \vec{\sigma} + B \tag{5.1}$$

---

<sup>1</sup>Suponemos constantes normalizadas a 1.

Con  $\sigma$  matrices de Pauli  $SU(2)$ . El sistema tiene dos estados con energías 0 y  $2B$ .

$$H|\downarrow\rangle = 0; \quad H|\uparrow\rangle = 2B|\uparrow\rangle \quad (5.2)$$

Los estados son no degenerados siempre que el campo no sea nulo pues hace las veces de parámetro. Para calcular la conexión  $\mathcal{A}_i$  y la curvatura  $\mathcal{F}_{ij}$  sobre el espacio de parámetros, usamos coordenadas esféricas.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \sin \theta \cos \phi \\ B \sin \theta \sin \phi \\ B \cos \theta. \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Y el hamiltoniano resulta

$$H = -B \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{+i\phi} \sin \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

En esta representación, los estados son

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta/2 \\ -\cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

bajo los cuales, las componentes de la conexión se calculan, de acuerdo con Berry,

$$\mathcal{A}_\theta = -i\langle\downarrow|\frac{\partial}{\partial\theta}|\downarrow\rangle = 0, \quad \mathcal{A}_\phi = -i\langle\downarrow|\frac{\partial}{\partial\phi}|\downarrow\rangle = -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.6)$$

y la curvatura

$$\mathcal{F}_{\theta\phi} = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{A}_\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}\mathcal{A}_\theta = -\sin\theta, \quad (5.7)$$

que en coordenadas cartesianas se nota más claro el monopolo

$$\mathcal{F}_{ij}(\vec{B}) = -\epsilon_{ijk} \frac{B^k}{2|\vec{B}|^3}. \quad (5.8)$$

Finalmente, la fase de Berry será<sup>2</sup>

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-i \int_S \mathcal{F}_{ij} dS^{ij}\right) = \exp\left(\frac{i\Omega}{2}\right) \quad (5.9)$$

Donde  $S$  es la superficie encerrada por la curva  $C$ .

Así pues, las coordenadas esféricas y la no degeneración juegan un papel esencial en este cálculo. El hamiltoniano (5.4), es típico de un sistema de dos niveles conservando su estructura ya sea se trate de Resonancia magnética, láser o cubit. Otro aspecto interesante es la representación en matrices de Pauli, es decir  $SU(2)$  y no  $SO(3)$ , propiedad genérica de los sistemas de espín semi entero.

### 5.2.2. Cuerpo rígido y sistema de dos niveles

Interesa averiguar qué significa la curvatura y la conexión en el cuerpo rígido. Dado el artículo [24], podemos ligar este sistema de dos niveles con el cuerpo rígido mediante teoría de control y calcular cantidades, como la fase. Más aún, en la descripción material del cuerpo rígido, la velocidad angular es una matriz y se comporta como un campo de norma abeliano (si el cuerpo es deformable, se comporta como un campo de norma no abeliano). El análogo de las entradas en el hamiltoniano (5.4) son las

<sup>2</sup>Las fórmulas empleadas pueden verse en la referencia [44].

componentes del momento angular y bajo el mapeo  $SU(2) \longrightarrow SO(3)$  podemos trasladar tales variables a cantidades del cuerpo rígido como lo sugiere el artículo (solo que se consideran como campos de control).

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\Omega_3 & \Omega e^{-i\eta} \\ \Omega e^{i\eta} & \Omega_3 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Por supuesto, se espera hallar una relación con la fase de Montgomery [21]. Presentamos un resumen de lo expuesto en [24]. Calculos específicos pueden encontrarse en [25].

Sea  $\vec{L}, \vec{\Omega}$  el momento angular y velocidad angular respectivamente. En el marco generado por  $(e_1, e_2, e_3)$  anclado al cuerpo, se tienen las ecuaciones de Euler,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (5.11)$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Las componentes de  $\vec{\Omega}$  en  $e_i, i = 1, 2, 3$  pueden escribirse como  $\Omega_i = \frac{L_i}{I_i}$ , siendo  $I_i$  los momentos de inercia. Más aún, se tienen las restricciones usuales (funciones de Casimir)

$$\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2E, \quad L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 1 \quad (5.13)$$

Ahora consideremos un sistema cuántico de dos niveles definido por el estado  $|\lambda(t)\rangle$  que satisface la ecuación de Schrödinger  $ih\partial_t|\lambda(t)\rangle = \hat{H}|\lambda(t)\rangle$  con hamiltoniano

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\Delta(t) & \Omega(t)e^{-i\eta(t)} \\ \Omega(t)e^{i\eta(t)} & \Delta(t) \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

En la teoría cuántica, las entradas  $\Omega(t), \eta(t)$  de  $\hat{H}$  son la fase y la amplitud (real) del campo de control, mientras que  $\Delta(t)$  es la diferencia de frecuencia entre el campo externo (por ejemplo, el campo eléctrico) y la frecuencia natural (o de Larmor). En [24] se describen dos casos de interés, uno con  $\eta = 0$ , para el cual

$$\hat{H}_A = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

El otro caso es en la condición de resonancia  $\Delta = 0$ ,

$$\hat{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

con  $\omega_1 = \Omega \cos \eta$  y  $\omega_2 = \Omega \sin \eta$  dos campos de control reales.

La idea principal es que la dinámica de un sistema cuántico de dos niveles puede codificarse con el llamado *vector de Bloch*  $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$  cuyas componentes definen, vía la matriz de densidad, el estado  $|\lambda(t)\rangle$ , es decir  $\hat{\rho} = |\lambda\rangle\langle\lambda|$ ,

$$\begin{aligned} M_1 &= \rho_{21} + \rho_{22} \\ M_2 &= i(\rho_{12} - \rho_{21}) \\ M_3 &= \rho_{11} - \rho_{22} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Las ecuaciones (5.17) son derivadas de la ecuación de Neumann-Liouville  $\hat{\rho} = -[H, \rho]i/\hbar$  y bajo el *mapeo estándar* (5.10), las dos posibilidades (5.42) y (5.45) pueden escribirse en términos de las ecuaciones de Bloch,

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta & 0 \\ \Delta & 0 & -\Omega \\ 0 & \Omega & 0 \end{pmatrix} \vec{M}, \quad \dot{\vec{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{M}. \quad (5.18)$$

Identificando  $\vec{M} = \vec{L}$  podemos definir una familia de campos de control para el sistema dos niveles e integrando las ecuaciones de Euler, derivar sus correspondientes parámetros para llevar un estado a otro de manera controlada.

### Caso A

En este caso, identificamos  $\Delta(t) = \Omega_3 = M_3/I_3$ ,  $\Omega = \Omega_1 = M_1/I_1$  y  $\Omega_2 = 0$ . Esta última condición induce un comportamiento asintótico  $I_2 \rightarrow \infty$ . Con esto, podemos normalizar  $I_1 = 1, I_3 = 1/k^2$  con  $k \in [0, 1]$  y sin pérdida de generalidad tenemos

$$\dot{M}_1 = -k^2 M_2 M_3, \quad \dot{M}_2 = -(1 - k^2) M_1 M_2, \quad \dot{M}_3 = M_1 M_2. \quad (5.19)$$

Sabemos cuáles son los perfiles de sus soluciones, ver figura (5.1). El cuadro (5.1) muestra la familia de soluciones y sus correspondientes campos de control en todos los regímenes: oscilatorio, rotatorio y asintótico. La simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  en este sistema está garantizada pues hablamos de las ecuaciones de

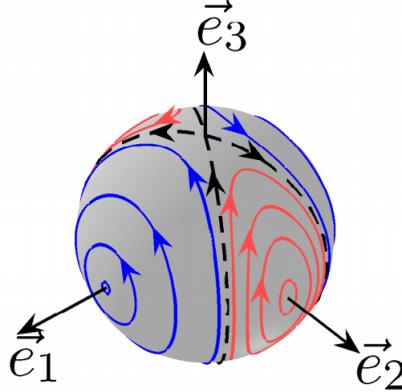


Figura 5.1: Trayectorias del vector  $\vec{M}$  correspondientes a diferentes niveles de energía para un valor fijo de  $k$ . Se muestra el movimiento oscilatorio ( $2E < k^2$ ), rotatorio ( $2E > k^2$ ) y la separatriz ( $2E = k^2$ ) [25].

Euler. Podemos realizar una reducción simpléctica para llevar al péndulo y explorar una solución en particular, la del régimen casi rotatorio en el abierto  $(-\pi, \pi)$  cuyas soluciones son funciones hiperbólicas. Esta solución vista como campo de control, es la llamada solución de Allen-Eberly en la teoría de sistemas cuánticos de dos niveles y control. Véase [73] y el artículo [24].

Es decir, con tal simetría podemos implementar más mecanismos de control para estos sistemas. A su vez, las soluciones tienen módulo y su complementario, y estas dependen del parámetro  $k$ . Dada la diversidad de transformaciones de módulo que poseen las funciones elípticas, conocidas como transformaciones de Landen (ver apéndice A) podemos extender la idea de [24] para definir con nuevos parámetros, los campos de control que ellos utilizan.

El artículo también aborda la posibilidad de control de una compuerta lógica. Esto se ha explorado mucho en diversos artículos de control. Un problema radica en la imposibilidad de cancelar el término de fase

Soluciones de las ecuaciones de Euler

Oscilatorio	Rotatorio	Separatriz
$2E < k^2$	$2E > k^2$	$2E = k^2$
$M_1 = S\sqrt{2E}\text{cn}(t + \rho, m)$	$M_1 = S\sqrt{2E}\text{dn}(t + \rho, m)$	$M_1 = S_1k(t + \rho)$
$M_2 = S\frac{\omega}{k}\text{dn}(t + \rho, m)$	$M_2 = S\frac{\omega\sqrt{m}}{k}\text{cn}(t + \rho, m)$	$M_2 = S_2\frac{\omega}{k}(t + \rho)$
$M_3 = \frac{\sqrt{2E}}{k}\text{sn}(t + \rho, m)$	$M_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{k}\text{sn}(t + \rho, m)$	$M_3 = S_1S_2\tanh(t + \rho)$
$\omega = k\sqrt{1 - 2E}$	$\omega = \sqrt{2E(1 - k^2)}$	$\omega = k\sqrt{1 - k^2}$
$m = \frac{2E(1 - k^2)}{\omega^2}$	$m = \frac{k^2(1 - 2E)^2}{\omega}$	$S_1 = \text{sgn}(M_1(0))$
$S = \text{sgn}(M_2(0))$	$S = \text{sgn}(M_1(0))$	$S_2 = \text{sgn}(M_2(0))$

Campos de Control de la ecuación de Bloch

Oscilatorio	Rotatorio	Separatriz
$\Omega = \frac{S\sqrt{2E}}{k\sqrt{1 - 2E}}\text{cn}(t + \rho, m)$	$\Omega = \frac{S}{\sqrt{1 - k^2}}\text{dn}(t + \rho, m)$	$\Omega = \frac{S_1}{\sqrt{1 - k^2}}(t + \rho)$
$\Delta = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{1 - 2E}}\text{sn}(t + \rho, m)$	$\Delta = \frac{k\sqrt{m}}{\sqrt{1 - k^2}}\text{sn}(t + \rho, m)$	$\Delta = \frac{S_1S_2k}{\sqrt{1 - k^2}}\tanh(t + \rho)$

Cuadro 5.1: Soluciones de  $\vec{M}$  en (5.19) en el caso A con sus correspondientes campos de control. Nótese que  $\Omega(t) = M_1(t)/\omega$  y  $\Delta(t) = k^2M_3(t)/\omega$ . El tiempo es reescalado por un factor de  $\omega$  por simplicidad. El parámetro  $\rho$  es fase constante determinada por las condiciones iniciales [24].

dinámica en la esfera de bloch. Los autores argumentan que con este campo de control usando el cuerpo rígido es posible construir una trayectoria en la esfera de energía de tal manera que se cancele la fase dinámica de Montgomery y se queden solo con la geométrica. Por otro lado, los casos A y B explorados en el artículo [24] conducen a dos matrices que pueden codificarse con la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  que no está explorada de esa forma en [24]. Solo consideran mandar un momento de inercia a infinito para cancelar una entrada en la matriz  $SO(3)$ .

El vector de Bloch vive en la esfera. Por ejemplo si apunta completamente al norte, la interpretación física es que el estado está completamente colapsado (su función de onda) en el estado  $|\uparrow\rangle$ . El sur representaría colapso al estado  $|\downarrow\rangle$  y un punto arbitrario una combinación lineal de ambos. En resonancia magnética, se colocan dos campos de control en el eje XY (campos magnéticos).

La solución de Allen-Eberly (en óptica cuántica conduce al fenómeno de transparencia autoinducida) consiste en una trayectoria en la esfera de Bloch que invierte poblaciones, es decir, manda del polo norte al sur o viceversa a través del llamado *pulso*  $\pi$ . En esta construcción, tal pulso es una trayectoria en la separatriz que sabemos son funciones hiperbólicas que toman tiempo infinito de ir del norte al sur. Justo como en el péndulo que también son hiperbólicas en la separatriz. Otro aspecto interesante es elevar la discusión al paréntesis de Nambu y explorar las transformaciones canónicas.

Los artículos [74] ayudarían a codificar diversas ecuaciones de Bloch usando diversas geometrías equivalentes a la esfera y el elipsoide de revolución. Es decir, se podrían clasificar otras trayectorias debido a que estamos construyendo otras superficies. En efecto, la intersección de la esfera y el elipsoide es un invariante pero en [74] se sostiene que existe una plétora de hamiltonianos equivalentes al cuerpo rígido que conducen a diversas geometrías.

### 5.2.3. Pulso Allen-Eberly y reducción simpléctica

En esta sección revisaremos la reducción simpléctica del cuerpo rígido al sistema del péndulo desarrollado en [23]. Para ello, notemos que las ecuaciones de Euler pueden reescribirse usando las funciones de Casimir,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \nabla N \times \nabla K \quad (5.20)$$

Debido a que

$$\begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Tomando  $c = 1, d = -1/I_3, a = -I_1 I_3 / I_3 - I_1 < 0, b = I_3 / I_3 - I_1 < 0$  y la transformación canónica

$$L_1 = k_1 r \cos \theta, \quad L_2 = k_2 r \sin \theta, \quad L_3 = p \quad (5.22)$$

donde  $k_i$  está relacionado con el inverso de los momentos de inercia. Las superficies son ahora

$$K = \frac{1}{2} r^2, \quad N = \frac{1}{2} p^2 + \left( \frac{k_2^2}{2k_3^2} r^2 \right) \sin^2 \theta. \quad (5.23)$$

En estas variables es posible definir un nuevo hamiltoniano  $N/I_3$  definido en la estructura simpléctica  $1/k_1 k_2$  y se obtiene la ecuación de movimiento del péndulo

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{K}{I_3^2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \sin(2\theta). \quad (5.24)$$

Realizando un nuevo cambio de variables con  $\Sigma^2 \equiv \frac{K}{4I_3^2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right)$  y  $\alpha = 2\theta$  tenemos

$$\ddot{\alpha} + \Sigma^2 \sin \alpha = 0. \quad (5.25)$$

La energía es la primera integral de movimiento

$$E = \frac{(\dot{\alpha})^2}{2I_3} + \frac{k_2^2 r^2}{2k_3^2 I_3} \sin^2 \alpha, \quad (5.26)$$

y puede escribirse como

$$\left( \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 + \sin^2 \alpha = M_E, \quad (5.27)$$

siendo la variable *temporal*  $x = k_2 r / k_3$  y  $M_E = 2I_3 k_3^2 E / k_2^2 r^2$ . Las soluciones están perfectamente identificadas en la literatura y pueden consultarse en [28]. Enfatizamos que la ecuación de movimiento (5.27) y su solución asintótica es ya interpretada como campo de control del sistema dos niveles sin recurrir a tomar el límite  $I_i \mapsto \infty$  y por ello se diferencia de las expresiones plasmadas en el cuadro (5.1). En otras palabras, las soluciones correspondientes al *movimiento asintótico*, que en el cuerpo rígido son llamadas soluciones separatrices [24], son

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \pm \arcsin [\tanh(x - x_0)] \\ \omega(x) &= \dot{\alpha} = \pm \operatorname{sech}(x - x_0) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aquí, los parámetros son  $M_E = 1$  y  $\dot{\alpha} \neq 0$  que corresponde al intervalo abierto  $(-\pi, \pi)$ . El movimiento no es periódico en este límite.

Las soluciones están en perfecto acuerdo con el régimen de separatriz en el cuerpo rígido. Por tanto, el pulso Allen-Eberly puede verse también, como campo de control de este pulso tras la reducción simpléctica. Las diferencias principales en este tratamiento respecto a [24] es que, aquí no es necesario mandar un momento de inercia a infinito debido a la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ . Los campos de control  $\Delta, \Omega$  están codificados ahora en las variables  $\{\alpha, \dot{\alpha}\}$ .

## Justificación matemática

En el trabajo [24] se habla de la *matriz hamiltoniana*  $H(t)$  que codifica las ecuaciones de Euler. Existen diversas maneras de escribir estas ecuaciones dependiendo del contexto físico que se trate,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \epsilon_{ijk} \partial^j H \partial^k C \\ &= \Pi_{ij} x^j \\ &= X_H x_i\end{aligned}\tag{5.29}$$

Todas son equivalentes, sin embargo en [24], las ecuaciones son presentadas como  $\dot{x}_i = H(t)_{ij} x^j$  con  $H(t)$  dado por

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{5.30}$$

La expresión (5.30) está justificada si consideramos que el paréntesis de Poisson es

$$\dot{x}_k = X_H x_k = \{x_k, H\} = \delta_{kj} \sum_{rs} \Pi_{rs} \frac{\partial x_j}{\partial x_r} \frac{\partial H}{\partial x_s},\tag{5.31}$$

donde  $\Pi_{rs}$  es la llamada *matriz de Poisson* [75]. En orden de obtener las ecuaciones de Euler desde (5.31), la matriz de Poisson debe ser de la forma (5.12). Calculando explícitamente usando  $H = \sum_i \left( \frac{x_i^2}{2I_i} \right)$ , tenemos que  $\frac{\partial H}{\partial x_s} = \frac{x_s}{I_s}$  sin suma sobre  $s$ . Entonces, para la coordenada  $x_1$ , tenemos

$$\dot{x}_1 = \sum_{rs} \Pi_{rs} \delta_{1r} \frac{x_s}{I_s} = \sum_s \Pi_{1s} \frac{x_s}{I_s} = \Pi_{11} \frac{x_1}{I_1} + \Pi_{12} \frac{x_2}{I_2} + \Pi_{13} \frac{x_3}{I_3}.\tag{5.32}$$

Para que se satisfagan las ecuaciones de Euler para esta componente  $\dot{x}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2 x_3$  debemos tener

$$\Pi_{11} = 0, \quad \Pi_{12} = -x_3, \quad \Pi_{13} = x_2\tag{5.33}$$

El mismo argumento puede aplicarse para las otras componentes; obteniendo

$$\begin{array}{lll} \Pi_{21} = x_3 & \Pi_{22} = 0 & \Pi_{23} = -x_1 \\ \Pi_{31} = -x_2 & \Pi_{32} = x_1 & \Pi_{33} = 0 \end{array}\tag{5.34}$$

Todas estas entradas forman la matriz de Poisson (que es un elemento del grupo  $SO(3)$ ),

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{5.35}$$

Aplicar por tanto la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ , la matriz cambia por coeficientes y la elección a mano de ellos nos permite cancelar una de las coordenadas de momento angular sin requerir el argumento  $I_i \rightarrow \infty$ .

### 5.2.4. Usando $SL(2, \mathbb{R})$ en teoría de control

Lo primero a tratar es dotar al trabajo [24] de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  y reproducir sus cálculos. Esperamos hallar las mismas expresiones e interpretaciones pero ahora, presumiblemente sin argumentos heurísticos sobre la obtención de los campos de control. Después, utilizando la reducción de Marsden y Holm al

péndulo, reproducir los fenómenos de inversión de población y transparencia auto inducida, característicos del sistema dos niveles con pulso láser. Con esto se refuerza el argumento de que no solo el cuerpo rígido, sino el péndulo pueden ser usados como control en los sistemas cuánticos. Recordemos que las ecuaciones de Euler pueden escribirse como (5.12). Los autores en [24] toman la expresión  $\vec{X} = H(t)\vec{X}$  para calcular las ecuaciones (5.12) tal que la matriz  $H(t)$  pertenece al grupo  $SO(3)$ . Explícitamente

$$\begin{pmatrix} 0 & -X_3/I_3 & X_2/I_2 \\ X_3/I_3 & 0 & -X_1/I_1 \\ -X_2/I_2 & X_1/I_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Esta matriz está asociada a un vector mediante el isomorfismo  $hat^3 \mathbb{R}^3 \mapsto SO(3)$ ,

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

A su vez, sabemos que la dinámica del cuerpo rígido posee simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ . Para una función hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  existe un vector  $\nabla H$  y su correspondiente matriz (5.36). por tanto, si

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3} \right) \quad (5.38)$$

La función  $H$  se transforma en

$$N = aH + bL = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_1} + b \right) \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_2} + b \right) \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_3} + b \right) \Pi_3^2, \quad (5.39)$$

donde

$$\begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

En este análisis, la matriz hamiltoniana correspondiente y las ecuaciones que emanan de ella son

$$\vec{\dot{X}} = N\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{a}{I_3} + b\right)X_3 & \left(\frac{a}{I_2} + b\right)X_2 \\ \left(\frac{a}{I_3} + b\right)X_3 & 0 & -\left(\frac{a}{I_1} + b\right)X_1 \\ -\left(\frac{a}{I_2} + b\right)X_2 & \left(\frac{a}{I_1} + b\right)X_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}. \quad (5.41)$$

Con esta expresión, podemos elegir diferentes valores de los parámetros en  $SL(2, \mathbb{R})$  para tener los diferentes casos citados en [24].

### De regreso al Caso A

En [24] se describen dos casos. A) con  $\eta = 0$ , para el cual

$$\hat{H}_A = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

bajo el mapeo  $SU(2) \mapsto SO(3)$ , implica que podemos cancelar la componente 2, es decir  $a = -I_2b$  y la matriz  $SO(3)$  resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{a}{I_3} + b\right)X_3 & 0 \\ \left(\frac{a}{I_3} + b\right)X_3 & 0 & -\left(\frac{a}{I_1} + b\right)X_1 \\ 0 & \left(\frac{a}{I_1} + b\right)X_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

---

<sup>3</sup>Véase sección (2.5.2)

Las ecuaciones de Bloch correspondientes son

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta & 0 \\ \Delta & 0 & -\Omega \\ 0 & \Omega & 0 \end{pmatrix} \vec{M} \quad (5.44)$$

La identificación entre la dinámica implica que  $\Delta(t) = \Omega_3 = (a/I_3 + b)X_3(t)$ ,  $\Omega(t) = \Omega_1(t) = (a/I_1 + b)X_1(t)$ .

### Caso B

El caso B es áquel en que se trabaja en resonancia  $\Delta = 0$ ,

$$\hat{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Con  $\omega_1 = \Omega \cos \eta$  y  $\omega_2 = \Omega \sin \eta$  representando *dos campos de control reales*. Las ecuaciones de Bloch son entonces

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{M} \quad (5.46)$$

Requerimos considerar la elección  $\Omega_3 = 0$ , tal que  $a = -I_3 b$  y  $\omega_1(t) = \Omega_1(t) = (a/I_1 + b)X_1$ ,  $\omega_2(t) = \Omega_2(t) = (a/I_2 + b)X_2$ . En este punto debemos hacer el mismo análisis que [25] para obtener la misma física. En resumen, es posible considerar un momento de inercia nulo debido a  $SL(2, \mathbb{R})$  y no mediante  $I \mapsto \infty$ . Podría ser relevante, por otro lado, el hecho de que las soluciones están parametrizadas por  $k = f(I_i, E)$  y no por los momentos angulares mismos, la interpretación como campos de control es más clara. Un aspecto importante a desarrollar es la reducción de Lie-Poisson en este contexto. En las siguientes secciones presentamos algunas ideas sobre esto.

## 5.3. Decoherencia cuántica como término inestable en las ecuaciones de Euler

La interpretación física de un estado cuántico *puro* es que está aislado de sus alrededores. Por supuesto, en una situación realista, no se tiene aislamiento absoluto de un sistema físico. En este caso, el concepto de estado mixto se vuelve relevante. Para un estado mixto, tenemos

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (5.47)$$

La matriz de densidad  $\rho$  de un sistema de dos estados es una matriz positiva definida y hermitiana de  $2 \times 2$  componentes. Posee traza unitaria y  $p_i$  son los factores de peso que codifican el ensamble. La matriz de densidad puede entonces, escribirse como combinación lineal de las matrices de Pauli  $\sigma_i$  que generan el álgebra  $su(2)$  (junto con la identidad  $I/\sqrt{2}$ ).

$$\rho = (1/2)(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{r}). \quad (5.48)$$

Aquí  $\vec{r}$  es el vector de Bloch con  $|\vec{r}| = 1$  si y sólo si  $\rho$  es pura y  $|\vec{r}| < 1$  para estados mixtos. Debido a  $1/2 \leq \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$  dos valores límite  $1/2$  y  $1$  corresponden al estado máximamente mezclado y puro, respectivamente. En forma matricial respecto a la base  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ , la matriz de densidad es

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Las entradas del vector de Bloch  $(r_x, r_y, r_z)$  satisfacen  $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$  donde la igualdad se obtiene sólo para estados puros<sup>4</sup> y los estados impuros residen en el interior de la *bola* de Bloch (5.2).

<sup>4</sup>Esta es la razón por la cual esta cantidad es llamada *pureza*.

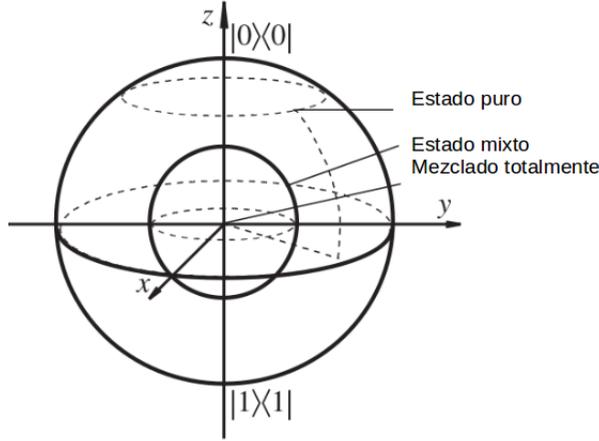


Figura 5.2: Estados puros y mixtos en la esfera de Bloch en donde el estado  $|0\rangle\langle 0|$  se sitúa en el polo norte. Los estados totalmente mezclados se ubican en el centro de la esfera [76].

### 5.3.1. Control de trayectorias en la Esfera de Bloch

Sea un sistema físico caracterizado por su vector de estado  $|\Psi(t)\rangle$  cuya dinámica está gobernada por

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle. \quad (5.50)$$

De esta ecuación, puede observarse que el operador de densidad satisface la ecuación de Liouville-Neumann

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] \quad (5.51)$$

Una *ecuación maestra* es una ecuación diferencial que describe un sistema cuántico en contacto con sus alrededores. Bajo ciertas condiciones, es posible derivar la llamada *ecuación de Linblad* [76],

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] + \mathcal{L}\rho, \quad (5.52)$$

donde el último término da cuenta de la ganancia en el mecanismo de amortiguamiento, relajación y decoherencia por la inclemencia de los alrededores. Este término tiene la forma de un *super operador de Liouville* que puede escribirse como

$$\mathcal{L}\rho = \sum \left[ F_i^\dagger F_i \rho + \rho F_i^\dagger F_i - 2F_i \rho F_i^\dagger \right]. \quad (5.53)$$

Los términos  $F_i$  forman una familia de operadores de creación y aniquilación generalizados que dependen del sistema en cuestión. Esta forma garantiza la interacción con el reservorio conservando la positividad del operador de densidad. En montajes experimentales, el sistema está usualmente expuesto a canales de ruido que generan decoherencia en la información cuántica. Debido a la decoherencia, no existe tal cosa como un estado puro (cubit perfecto o una compuerta lógica cuántica perfecta). Si un cubit está expuesto a un canal ruidoso es posible observar pérdida de coherencia y en general, resulta un problema abierto actualmente *si existen límites intrínsecos en la generación de decoherencia en un cubit*. El problema del ruido estocástico en un cubit puede cambiar dramáticamente las operaciones lógicas y esto es uno de los problemas centrales en la estabilización experimental dentro del contexto de la computación cuántica.

Debido al ruido, las propiedades estadísticas de un cubit puede cambiar. Por ejemplo, los estados puros de vuelven mixtos violando unitariedad en mecánica cuántica de sistemas aislados. Para una clase

de canales con ruido, uno puede preguntarse sobre la posibilidad de optimizar y/o minimizar los efectos de decoherencia.

### 5.3.2. Caso B para un sistema abierto

Podemos considerar el caso de un sistema cuyo ambiente induce *relajación*, para detalles véase [81]. Consideremos el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{x}{T_2} + u_y z, \\ \dot{y} &= -\frac{y}{T_2} - u_x z, \\ \dot{z} &= \frac{(1-z)}{T_1} + u_x y - u_y x. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Donde  $(u_x, u_y)$  son dos componentes del campo de control que se asume en resonancia con la frecuencia del sistema (Larmor), como en la sección previa. Para este sistema, el vector de Bloch  $\vec{X}$  describe la posición (a un tiempo dado) en la esfera de Bloch definida por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Corresponde a un caso particular de la ecuación de Lindblad, en donde el punto de equilibrio térmico es el polo norte de la esfera. Las cantidades  $T_1, T_2$  dan cuenta de los efectos de relajación temporal a lo largo de las direcciones longitudinales y transversales, respectivamente (ver figura 5.3).

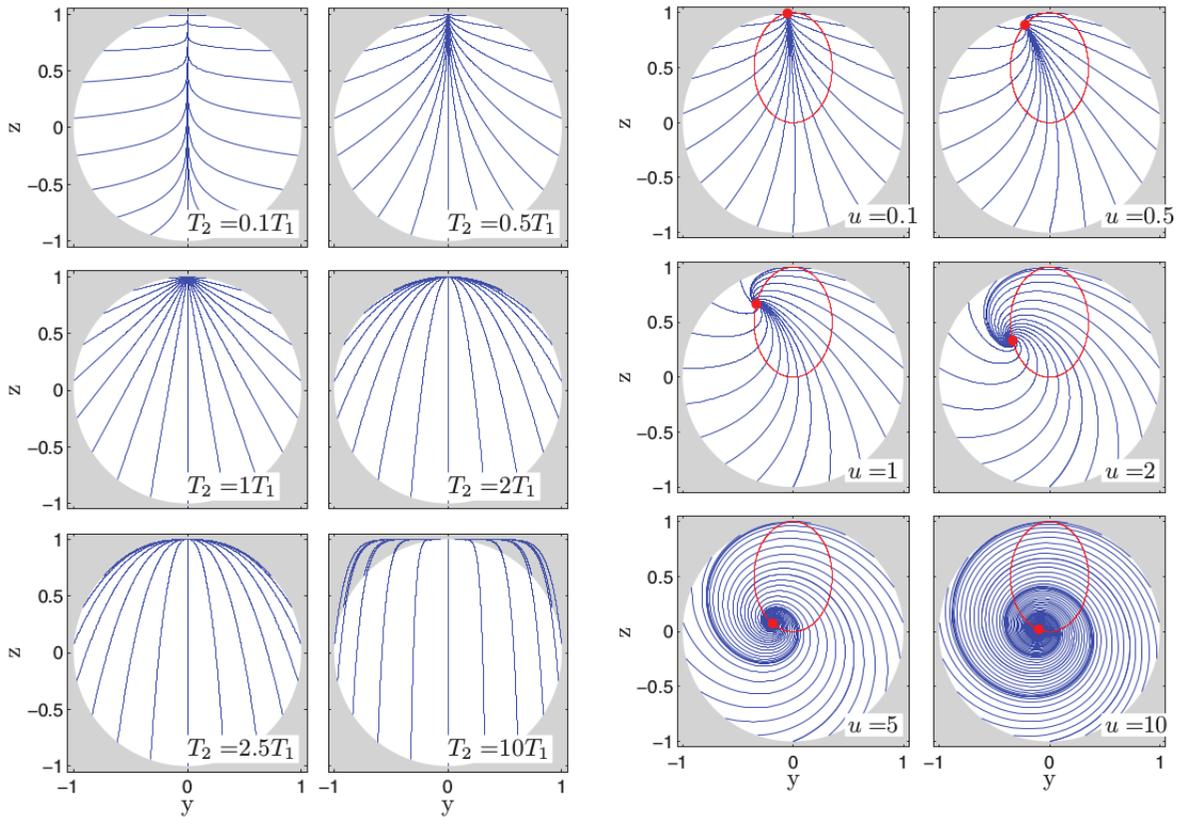


Figura 5.3: Dinámica en relajación espontánea para diferentes cocientes  $T_1/T_2$ . El punto inicial en las trayectorias está en la esfera de Bloch de radio 1. En la figura derecha, el campo  $u_x$  se considera constante. Nótese que, eventualmente, la dinámica sucede en el interior, propiedad característica de los sistemas abiertos [81].

Al reescribir (5.54) como ecuación matricial

$$\vec{\dot{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/T_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/T_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/T_1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

La teoría de control puede aplicarse para la primera matriz corresponde al caso B en (5.46). La segunda matriz y el vector constante  $(0, 0, 1/T_1)^T$ , da cuenta del ambiente que produce efectos de relajación. Ahora, consideremos el siguiente sistema que describe un cuerpo rígido con torca [80]<sup>5</sup>,

$$\begin{aligned} \dot{G}_x &= (a_3 - a_2)G_y G_z - \gamma a_1(t)G_x, \\ \dot{G}_y &= (a_1(t) - a_3)G_x G_z - \gamma a_2 G_y, \\ \dot{G}_z &= (a_2 - a_1)G_x G_y - \gamma a_3 G_z \end{aligned} \quad (5.56)$$

La idea puede entonces resumirse en el siguiente aserto:

- *Si podemos escribir (5.56) como ecuación matricial y comparar con (5.55) es posible considerar los términos de relajación como torcas en el sistema clásico del cuerpo rígido.*

Este posible camino a investigar requiere estar en completo acuerdo con [24]. Para lograrlo, necesitamos primero identificar bajo teoría de control, qué significan los tiempos de relajación en el lenguaje del cuerpo rígido con torca. En particular, necesitamos observar si la evolución dinámica del momento angular en presencia de torcas es capaz de reproducir dinámica controlada en el sistema de dos niveles abierto.

### 5.3.3. Ejemplo de ecuación maestra

El sistema cuántico más simple es el de dos niveles cuyo espacio de Hilbert está generado por solo dos estados: excitado  $|e\rangle$  y base  $|g\rangle$ <sup>6</sup>. El espacio de Hilbert para este sistema es equivalente a aquél de espín 1/2. Con los operadores de Pauli,

$$\sigma_1 = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \quad \sigma_2 = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|, \quad \sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (5.57)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$  (y los anticonmutadores  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ ). Definiendo

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e| = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \quad (5.58)$$

las representaciones correspondientes de estos operadores (en la base  $\{e, g\}$ ) son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

y

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Ahora, tomemos el hamiltoniano del sistema libre  $H_s$ , que es diagonal en esta base. Bajo una elección apropiada de la energía basal, tenemos

$$H_s = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_3, \quad (5.61)$$

<sup>5</sup>En el artículo [80] asumen algunos momentos de inercia dependientes del tiempo en búsqueda de límites caóticos. Aquí no analizamos tal situación.

<sup>6</sup>Ver [77] para detalles en el formalismo.

donde  $\omega_0 > 0$  es la frecuencia de transición.

Físicamente, tal sistema surge cuando la dinámica bajo estudio está confinada de manera efectiva en un sub espacio 2-dimensional que bajo ciertas condiciones, pueden despreciarse transiciones a niveles más altos (en la imagen de interacción). Los operadores de Pauli  $\sigma_{\pm}$  representan operadores propios del hamiltoniano ya que

$$[H_s, \sigma_-] = -\omega_0 \sigma_-, \quad [H_s, \sigma_+] = +\omega_0 \sigma_+, \quad (5.62)$$

y por tanto  $\sigma_{\pm}$  cambia la energía por un monto  $\pm\omega_0$ , correspondiente a procesos *absorción* y *emisión*, respectivamente. Los operadores de Lindblad (5.53) son

$$\vec{F}(\omega_0) \equiv \vec{F} = \vec{d}\sigma_-, \quad \vec{F}(-\omega_0) \equiv \vec{F}^\dagger = \vec{d}^*\sigma_+, \quad (5.63)$$

donde  $\vec{d} = \langle g|\vec{D}|e \rangle$  son los elementos de la matriz de transición del operador de dipolo. Dentro de la aproximación de dos niveles, el operador dipolo atómico en la imagen de interacción es

$$\vec{D}(t) = \vec{d}\sigma_- e^{-i\omega_0 t} + \vec{d}^*\sigma_+ e^{+i\omega_0 t}. \quad (5.64)$$

Despreciando la contribución del efecto Stark y Lamb, podemos escribir la ecuación de Lindblad (5.53) en la forma

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \gamma_0(N+1) \left( \sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) + \gamma_0 N \left( \sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right), \quad (5.65)$$

con ritmo de emisión espontánea

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}|^2}{2\hbar c^3}. \quad (5.66)$$

El disipador de la ecuación maestra describe procesos de emisión espontánea a ritmo  $\gamma_0$  así como emisión y absorción térmica inducida a ritmo  $\gamma_0 N$ . El ritmo de transición total es denotado por  $\gamma = \gamma_0(2N+1)$  donde  $N(\omega_0)$  es la distribución de Planck en la frecuencia de transición. Para resolver (5.65) es conveniente representar la matriz de densidad como

$$\rho(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \langle \vec{\sigma} \rangle \cdot \vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3 \rangle) & \langle \sigma_- \rangle \\ \langle \sigma_+ \rangle & \frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_3 \rangle) \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

donde el vector de Bloch es

$$\vec{v}(t) \equiv \langle \vec{\sigma} \rangle = Tr [\vec{\sigma} \rho(t)]. \quad (5.68)$$

Con esta expresión podemos definir un nuevo vector de Bloch que codifique efectos de decoherencia e interacciones con otras clases de baños térmicos o incluso algún tipo de ruido.

La idea de investigación es incorporar la estructura Lie-Poisson en orden de codificar estos efectos cuánticos. Todo ello en el mismo espíritu que [24]. Para ello, requerimos identificar cómo escribir las entradas de la matriz (5.67) en términos de campos de control con la ayuda de la representación de Bloch, que es la conexión con la dinámica del cuerpo rígido.

### 5.3.4. Adición de términos lineales al cuerpo rígido de Lagrange

Marsden et. al. trabajaron en la posibilidad de añadir términos cuadráticos a las ecuaciones de Euler que podrían tener sentido físico (como una torca) pero por lo demás genéricos, conocidos en teoría de control y mecánica como *feedbacks* [72; 23; 79]. Construyeron un método muy poderoso, llamado *Casimir-Energía* para darle claridad a la cuestión sobre qué tipo de términos rompen la estabilidad de los cuerpos rígidos. Una investigación posible, por tanto, es averiguar qué *feedbacks* mantienen la estructura Lie-Poisson y que consecuencias tiene para la interpretación de campos de control en sistemas de dos niveles.

En el contexto de canales con ruido que rompen la evolución unitaria debido a los alrededores, sería posible caracterizar este ruido usando términos inestables en las ecuaciones de Euler.

En problemas de mecánica clásica, un término proporcional a la velocidad causa disipación de energía. Existe un sistema con tal término en el contexto de la dinámica del cuerpo rígido. El llamado girostato de Lagrange<sup>7</sup> [47]. Para este sistema la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}\lambda_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3\Omega_3^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{\alpha} + \Omega_2)^2 \quad (5.69)$$

donde,  $\vec{\Omega}$  es el vector de velocidad angular,  $\dot{\alpha}$  la frecuencia rotacional del girostato en torno al eje intermedio principal de inercia y  $\lambda_i, I_2, J_2$  son constantes positivas.

Una transformación de Legendre de esta lagrangiana permite obtener el hamiltoniano en términos del momento angular  $\vec{\Pi} = \partial L / \partial \vec{\Omega} \in \mathbb{R}^3$  y  $l_2 = \partial L / \partial \dot{\alpha} \in \mathbb{R}$  del cuerpo rígido con girostato, respectivamente,

$$H(\vec{\Pi}, l_2) = \frac{P_1^2}{2\lambda_1} + \frac{\Pi_3^2}{2\lambda_3} + \frac{1}{2I_2}(\Pi_2 - l_2)^2 + \frac{l_2^2}{2J_2}. \quad (5.70)$$

Notar el desfase en  $\Pi_2$ . Las ecuaciones de movimiento se siguen del paréntesis

$$\{F, H\} = -\vec{\Pi} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{\Pi}} \times \frac{\partial H}{\partial \vec{\Pi}} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial H}{\partial_2} - \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial l_2} \right). \quad (5.71)$$

Y de aquí, las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 &= \{\Pi_1, H\} = \left( \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{I_2} \right) \Pi_2 \Pi_3 + \frac{l_2}{I_2} \Pi_3, \\ \dot{\Pi}_2 &= \{\Pi_2, H\} = \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right) \Pi_1 \Pi_3, \\ \dot{\Pi}_3 &= \{\Pi_3, H\} = \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \Pi_1 \Pi_2 - \frac{l_2}{I_2} \Pi_1. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Por otro lado, podemos añadir algún término lineal adecuado directamente a las ecuaciones de movimiento (ver [82]).

Otro sistema interesante es presentado en [78] donde se añaden términos  $U$  a las ecuaciones de Euler de la forma

$$\dot{m} = m \times J^{-1}m + N + U \quad (5.73)$$

donde se han usado algunas definiciones:  $U = m \times (J_c^{-1} - J_c^{-1})m - N$  y  $J_c^{-1} = 1/2(WJ^{-1} + J^{-1}W)$ . Aquí  $W$  es alguna matriz constante no singular que permite escribir

$$[J_c]^{-1} = \begin{pmatrix} a & a_1 & b_1 \\ a_1 & b & c_1 \\ b_1 & c_1 & c \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

La generalización Lie-Poisson de las ecuaciones de Euler serán

$$\dot{m}_1 = (c - b)m_2m_3 + b_1m_1m_2 - a_1m_1m_3 + c_1(m_2^2 - m_3^2), \quad (5.75)$$

e igual para las otras coordenadas. Lo interesante de este sistema es que posee estructura Lie-Poisson con matriz exactamente igual a (5.12) pero con diferente hamiltoniano. La función de Casimir asociada es la misma que el cuerpo rígido estándar. Con esta estructura podríamos en principio utilizar la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  para obtener ideas sobre la modelación bajo control de sistemas cuánticos de dos niveles con ruido.

<sup>7</sup>O en inglés Rigid Body with flywheel.

### 5.3.5. El Péndulo de Foucault y su fase geométrica

Sabemos que el cuerpo rígido se reduce al péndulo. La pregunta es, ¿qué sucede con la fase geométrica?. Si añadimos un término a la ecuación del péndulo para tener fase geométrica podemos hablar de compuertas lógicas. Sin embargo el péndulo simple no tiene fase geométrica pero el *péndulo de Foucault* tiene esta propiedad debida a un término asociado a la fuerza de Coriolis. El péndulo de Foucault tiene fase de Hannay o geométrica. Físicamente es debido a la rotación de la tierra (fuerza de Coriolis) o geoméricamente es debido al transporte paralelo en una variedad con curvatura (holonomía). En este sentido, si logramos reducir el cuerpo rígido con feedback, al péndulo con término de Coriolis, el campo de control asociado representaría clásicamente una 'fuerza de coriolis' y cuánticamente una posible fase de Berry. En otras palabras, ¿qué feedback colocar en las ecuaciones de Euler de tal manera que, al reducir al péndulo, represente una fase de Berry (pues sabemos que representa una fase geométrica en el régimen clásico)?.

Como se ha mencionado, la hipótesis es usar el péndulo y su fase geométrica en sistemas de dos niveles bajo el formalismo de control. El trabajo [24] explota la posibilidad de usar la fase de Montgomery del cuerpo rígido y algunas trayectorias clásicas de éste, para cancelar la parte dinámica de la fase total. Esto es interesante ya que, la fase geométrica pura puede ser usada para diseñar mecanismos de control y modelar compuertas lógicas (también llamadas *compuertas de Hardman*) en computación cuántica.

La idea importante es entonces conectar la fase del péndulo de Foucault con la fase de Montgomery usando la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ . Si podemos construir un hamiltoniano y un formalismo Lie-Poisson con el mismo Casimir que el cuerpo rígido pero con diferente hamiltoniano, podemos reproducir el término debido a Coriolis al momento de reducir por simetría. Otra posibilidad es añadir términos a las ecuaciones de Euler para obtener el péndulo de Foucault. De hecho, muchos autores exploran los sistemas Lie-Poisson con diferentes hamiltonianos, todos equivalentes al cuerpo rígido pero con diferentes reducciones (ver por ejemplo [79; 78; 74]). La idea es entonces, en primera instancia, usar estos sistemas. En pocas palabras, la afirmación es: *El término de Coriolis en el péndulo de Foucault es un término añadido a las ecuaciones de Euler que permiten estructura Lie-Poisson.*

## 5.4. Otras reducciones simplécticas

### 5.4.1. Mapeo de momento para el álgebra $so(1,1)$

Interesante es la relación entre el álgebra de Lie-Poisson para los vectores hamiltonianos y el mapeo de momento asociado para  $so(1,1)$ . Sabemos que  $se(2)$  es el álgebra en la reducción para el péndulo [83; 27]. Construyamos la misma idea para  $so(1,1)$ . Comenzando con la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  que genera los invariantes

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{I_1} + d \right) \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{I_2} + d \right) \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{I_3} + d \right) \Pi_3^2; \\ N &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_1} + b \right) \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_2} + b \right) \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{I_3} + b \right) \Pi_3^2 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Usando el generador del álgebra para alguna función dinámica  $G : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $X_G = \nabla G \times \nabla K \cdot \nabla$  tenemos

$$\begin{aligned} X_1 &= f_2 \Pi_2 \partial_3 - f_3 \Pi_3 \partial_2; \\ X_2 &= f_3 \Pi_3 \partial_1 - f_1 \Pi_1 \partial_3; \\ X_3 &= f_1 \Pi_1 \partial_2 - f_2 \Pi_2 \partial_1, \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde hemos sustituido  $G$  por las coordenadas  $\Pi_i$  y definido  $f_i = (c/I_i + d)$ ,  $\forall i$  como se realiza en [68]. Si no elegimos valores específicos para  $a, b, c, d$  de la matriz  $SL(2, \mathbb{R})$  el álgebra es

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -f_3 X_3; \\ [X_2, X_3] &= -f_1 X_1; \\ [X_3, X_1] &= -f_2 X_2, \end{aligned} \quad (5.78)$$

es decir, el álgebra  $so(3)$ , como se esperaba. Para obtener  $so(1,1)$  podemos asignar a  $f_3 < 0$ ,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 > 0$ . Luego,  $c = 1$  implica  $d = -1/I_1$  y

$$\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} < 0, \quad \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} > 0.$$

Otra restricción (debido al determinante unitario de la matriz) es  $I_1(1+b) + a = 0$ . Todo esto implica el ordenamiento  $I_2 < I_1 < I_3$ . Tenemos un parámetro más a fijar para reducir el sistema, elegimos  $b = \frac{I_1}{I_2 - I_1}$  para cancelar la coordenada  $\Pi_2$  en la función  $N$ . Los invariantes son entonces,

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2}\Pi_1^2 + \frac{I_1}{2I_3} \left( \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} \right) \Pi_3^2; \\ K &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \Pi_3^2. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Ahora, consideremos las definiciones siguientes

$$-\frac{1}{k_1^2} \equiv \frac{I_1}{I_3} \left( \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} \right), \quad \frac{1}{k_2^2} \equiv \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} > 0, \quad -\frac{1}{k_3^2} \equiv \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} < 0, \quad K^2 \equiv r/2 \quad (5.80)$$

Entonces, los invariantes (5.79) son

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2}\Pi_1^2 - \frac{1}{2k_1^2}\Pi_3^2; \\ K &= \frac{1}{2k_2^2}\Pi_2^2 - \frac{1}{2k_3^2}\Pi_3^2. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Esta expresión sugiere la introducción del mapeo de momento

$$\Pi_1 = p, \quad \Pi_2 = k_2 r \cosh \theta, \quad \Pi_3 = k_3 r \sinh \theta, \quad (5.82)$$

resultando la reducción en los invariantes  $K$  y  $N$ ,

$$\begin{aligned} K &= -r^2/2; \\ N &= -\frac{p^2}{2} - \frac{k_2^2 r^2}{2k_1^2} \sinh^2 \theta \end{aligned} \quad (5.83)$$

Ahora requerimos calcular el paréntesis de Lie-Poisson en la hoja simpléctica  $K = cte$ :  $\{F_1, F_2\} = -\nabla K \cdot \nabla F_1 \times \nabla F_2$ . Obteniendo

$$\{F_1, F_2\} = - \left[ \frac{r \cosh \theta}{k_2} \frac{\partial \theta}{\partial \Pi_3} + \frac{r \sinh \theta}{k_3} \frac{\partial \theta}{\partial \Pi_2} \right] \cdot \{F_1, F_2\}_{\text{simpléctico}} \quad (5.84)$$

Realizando las derivadas correspondientes en las viejas coordenadas<sup>8</sup>

$$\{F_1, F_2\} = -\frac{2}{k_2 k_3} \{F_1, F_2\}_{\text{simpléctico}}, \quad (5.85)$$

las nuevas variables son canónicas

$$\{\theta, p\} = -\frac{2}{k_2 k_3}, \quad (5.86)$$

---

<sup>8</sup> $\theta(\Pi_3) = \text{Arc sinh} \left( \frac{\Pi_3}{rk_3} \right)$  y su derivada  $\partial_3 \theta = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$ .

y una función de Casimir  $H$  es<sup>9</sup>

$$H = \frac{I_1^2}{I_2 - I_1} K - \frac{N}{I_1} = \frac{I_1^2}{I_2 - I_1} K - \frac{1}{I_1} \left[ \frac{p^2}{2} - \frac{k_2^2 r^2}{2k_1^2} \sinh^2 \theta \right]. \quad (5.87)$$

Entonces, la función  $N/I_1$  es el hamiltoniano en la hoja simpléctica  $K$ . Usando las ecuaciones de movimiento  $\dot{u} = \{u, N/I_1\}$ , obtenemos

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{4r^2}{(k_2 k_3)^2 k_1 I_1 I_3^2} \right) \sinh(2\theta) = 0 \quad (5.88)$$

Estamos tentados a interpretar esta ecuación como el análogo complejo del péndulo simple obtenido bajo reducción del cuerpo rígido con álgebra  $so(1, 1)$ . Sin embargo esto no parece ser correcto pues la dependencia temporal imaginaria está en el tiempo, específicamente  $\theta = \theta(t)$ . Sin embargo, es interesante la relación entre funciones circulares (que conduce al péndulo usual en mapeo de momento, con  $se(2)$  como álgebra) y las hiperbólicas (que conduce a la ecuación (5.88) con  $so(1, 1)$  como álgebra).

#### 5.4.2. Mapeo de momento elíptico para el álgebra $iso(2)$

Al igual que las funciones circulares, las funciones elípticas verifican un conjunto de identidades que pueden ser utilizadas para la reducción simpléctica en el cuerpo rígido. Estudiar el péndulo elíptico, donde la función  $\sin x$  se sustituye por  $\text{sn}(x, m)$  en el contexto de la simetría  $\mathcal{PT}$  en variables complejas, da a lugar a nuevas trayectorias dinámicas en el espacio fase que clásicamente se omiten por ser de variable compleja. Sin embargo, al exigir tal simetría, estas nuevas trayectorias aparecen como constricciones físicas al sistema. En mecánica cuántica, se sabe hoy en día que los operadores Hermíticos es una condición suficiente pero no necesaria para obtener eigenvalores reales. Los sistemas cuánticos con simetría  $\mathcal{PT}$  también pueden reproducir espectro real. En [128] se ha estudiado este fenómeno utilizando entre otras cosas, el péndulo elíptico. Aquí abordaremos este sistema en el contexto del paréntesis de Lie-Poisson. Considerando de nuevo las ecuaciones de las funciones de Casimir (5.76), pero imponiendo el ordenamiento  $I_1 < I_2 < I_3$  y  $c = 1$ ,  $d = -1/I_3$ ,  $a = -I_3 I_1 / I_3 - I_1$  que implica  $b = I_3 / I_3 - I_1 < 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) \Pi_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) \Pi_2^2, \\ N &= \frac{I_3}{2I_2} \left( \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1} \right) \Pi_2^2 + \frac{1}{2} \Pi_3^2. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Ahora, definiendo las  $k$ 's apropiadamente y aplicando el mapeo de momento

$$\Pi_1 = k_1 r \text{sn}(x|\tau), \quad \Pi_2 = k_2 r \text{cn}(x|\tau), \quad \Pi_3 = p, \quad (5.90)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} K &= \frac{r^2}{2} (\text{sn}^2 + \text{cn}^2) \\ N &= \frac{k_2^2 r^2}{2k_3^2} \text{cn}^2(x|\tau) + \frac{1}{2} p^2. \end{aligned} \quad (5.91)$$

El cálculo para obtener el paréntesis simpléctico desde el paréntesis Lie-Poisson, es similar al caso de funciones circulares, solo hay que considerar las *identidades elípticas* de las funciones de Jacobi, a saber

$$\{F_1, F_2\}_K = \frac{2}{k_1 k_2} \left( \frac{1}{\text{dn}(x|\tau)} \right) \{F_1, F_2\}_{\text{simpléctico}}, \quad (5.92)$$

<sup>9</sup>usando  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $H = \frac{1}{ad - bc} (dN - bK)$ .

obteniéndose la ecuación del péndulo elíptico

$$\ddot{y} + \omega^2 \text{sn}(y|\tau) = 0, \quad (5.93)$$

con  $\omega^2 = 4r^2/k_1^2 k_3^2 I_3^2$ .

La ecuación (5.93) tiene trayectorias  $\mathcal{PT}$  simétricas interesantes como veremos en la sección (5.6). Notamos que las funciones de Casimir (tras la aplicación de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ ) otorga una ecuación cuadrática. Una lista de funciones con identidades entre ellas que parametrizan a  $S^1$  (en coordenadas reales o complejas)  $x^2 + y^2 = 1$  es pertinente en este contexto (5.2). El último caso en la lista, corresponde a la llamada parametrización con funciones racionales, donde  $t = \tan \phi/2$ ,  $\phi \in \mathbb{C}$ . Al momento de escribir esta tesis, intento calcular la ecuación de movimiento y su paréntesis asociado.

álgebra	mapeo de momento	Ecuación de movimiento	paréntesis
$iso(2)$	$\sin, \cos$	$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin 2\theta = 0$	$\{p, \theta\} = \frac{1}{k_1 k_2}$
$so(1, 1)$	$\sinh, \cosh$	$\ddot{\theta} + \omega^2 \sinh(2\theta) = 0$	$\{\theta, p\} = -\frac{2}{k_2 k_3}$
$iso(2)$	$\text{cn}, \text{sn}$	$\ddot{y} + \omega^2 \text{sn}(y \tau) = 0$	$\{y, p\} = \frac{2}{k_1 k_2} \left( \frac{1}{\text{dn}(y \tau)} \right)$
?	$\Pi_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \Pi_2 = \frac{2t}{1+t^2}, t \in \mathbb{C}$	?	?

Cuadro 5.2: Álgebras de Lie asociadas a mapeos de momento que otorgan reducciones canónicas a partir de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Las funciones usadas en los mapeos de momento verifican la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  con  $x, y \in \mathbb{C}$  y/o  $\mathbb{R}$ .

## 5.5. El grupo de Heisenberg y un corolario

Atención especial merece la situación 1 – 8 de los cuadros (4.2) y (4.3) de la sección (4.4). El trabajo original de Marsden [23] afirma el siguiente lema *Si  $K$  es singular, entonces la estructura del álgebra de Lie es la euclídiana  $iso(2)$ , si  $\mathbf{K}$  tiene signatura  $(+, +, 0)$ . Si el cuerpo es de lagrange, con dos momentos de inercia iguales, el grupo de Heisenberg ocurre también.* Al grupo de Heisenberg le corresponde  $\mathbf{K}$  con signatura  $(+, 0, 0)$ . Para ver esto, los generadores pueden escribirse como

$$X_G = \vec{\Pi} \cdot \mathbf{K} (\nabla G \times \nabla) \quad (5.94)$$

O en componentes

$$X_i = \frac{1}{2} f_r \Pi^n K_{nm} \epsilon_{jk}^m \delta_i^j \partial^k \quad (5.95)$$

donde  $f_r = c/I_r + d$ . Con signatura  $(+, +, 0)$ , la matriz  $\mathbf{K}$ , tiene la forma

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$

Y los generadores son

$$X_1 = f_2 \Pi_2 \partial_3, \quad X_2 = f_1 \Pi_1 \partial_3, \quad X_3 = -f_1 \Pi_1 \partial_2 - f_2 \Pi_2 \partial_1, \quad (5.97)$$

que verifican el álgebra  $se(2)$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = f_1 X_1, \quad [X_3, X_1] = -f_2 X_2 \quad (5.98)$$

En completo acuerdo con el lema de [23]. Por otro lado, para la signatura  $(+, 0, 0)$  tenemos

$$X_1 = 0, \quad X_2 = f_1 \Pi_1 \partial_3, \quad X_3 = -f_1 \Pi_1 \partial_2, \quad (5.99)$$

con el conmutador trivial  $[X_i, X_j] = 0 \quad \forall i, j$ . Se sigue que el lema falla en este caso. Si el cuerpo es de Lagrange, el grupo de Heisenberg y su álgebra implicarían  $f_1 = f_2$ , con conmutador nulo.

### 5.5.1. Comentarios sobre el grupo de Heisenberg

El consenso general es que el grupo de Heisenberg y su álgebra debe ocurrir en algún límite. Podemos probar usando otra función de Casimir que reproduzca correctamente la dinámica del cuerpo rígido y al mismo tiempo, tenga como límite el grupo de Heisenberg. Si dos momentos de inercia son iguales, digamos  $I_1 = I_2 \equiv I \neq I_3 \equiv I'$ , tenemos la situación límite

$$\dot{\Pi}_1 = -\lambda \Pi_2, \quad \dot{\Pi}_2 = \lambda \Pi_1, \quad \dot{\Pi}_3 = 0. \quad (5.100)$$

El valor constante  $\Pi_3$  puede absorberse en  $\lambda$ . Ahora, nos preguntamos sobre qué tipo de función de Casimir reproduce estas ecuaciones. La respuesta es si consideramos el siguiente sistema bi-hamiltoniano

$$h = \frac{1}{2I} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2) + \frac{1}{2I'} \Pi_3^2, \quad l = \gamma \Pi_3, \quad (5.101)$$

Con este sistema, buscamos un grupo  $G \subset SL(2, \mathbb{R})$  bajo el cual  $\vec{\Pi} = \nabla l \times \nabla h$  reproduzca el límite deseado (5.100). El grupo es  $AN = NA$  de la descomposición *KAM* y tiene la forma

$$g = \begin{pmatrix} -I/c & 0 \\ I/a & -c/I \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

Sin embargo, el álgebra asociada a este sistema bi-hamiltoniano no puede producir el álgebra de Heisenberg. Algunos comentarios y preguntas abiertas:

- Existe otra función de Casimir que reproduce las ecuaciones en este límite, el cuadrado de una componente de momento angular pero el grupo asociado  $g \subset SL(2, \mathbb{R})$  no puede identificarse en términos de la descomposición de Iwasawa.
- Para un Casimir cuadrático, las ecuaciones de movimiento para el cuerpo de Lagrange, son invariantes bajo el intercambio  $x_1 \rightarrow -x_2$ . Si notamos que la función de Casimir es también invariante ante esta transformación, podemos afirmar que los generadores tienen simetría explícita  $\mathbb{Z}_2$ :

$$X_1 = -\alpha \Pi_2 \partial_3; \quad X_2 = \alpha \Pi_1 \partial_3; \quad X_3 = 2\alpha \Pi_1 \partial_2 \quad (5.103)$$

Aquí  $\alpha \equiv 1/2(c/I + d)$  y elegimos  $a/I + b = 0 = c/I' + d$ . Las ecuaciones (5.103) reproducen el álgebra de Heisenberg si la coordenada  $\Pi_3$  es constante de movimiento, como debería ser. La correspondiente matriz  $SL(2, \mathbb{R})$  es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -aI \\ I & 1 \\ -\frac{a}{a(1-II')} & \frac{-aI}{a(1-II')} \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

En donde no se tiene una descomposición *KAN* obvia. Si comparamos (5.103) con lo obtenido en (5.97) algún argumento es plausible:

- El grupo de Heisenberg puede obtenerse con cualquier función de Casimir cuadrático y en el mismo sentido es isomorfo a  $se(2)/\mathbb{Z}_2$ .

- El grupo de Heisenberg es imposible de obtener con funciones de Casimir lineales.
- Se podría explorar la simetría  $SL(3, \mathbb{R})$  en mecánica de Nambu y explorar la posible existencia del grupo de Heisenberg como uno de sus subgrupos.

Finalmente, pondremos de manera más transparente la idea de la simetría  $\mathbb{Z}_2$  que subyace. Primero, requerimos probar la consistencia usando las ecuaciones de movimiento. Tomando la fórmula  $\Pi_G = (\nabla G \times \nabla L) \cdot \nabla$  tratemos de reproducir las ecuaciones de movimiento para el límite del cuerpo de Lagrange. Antes de la aplicación de  $SL(2\mathbb{R})$ , tenemos que para el sistema bi-hamiltoniano

$$H = f_1 \Pi_1^2 + f_2 \Pi_2^2 + f_3 \Pi_3^2, \quad (5.105)$$

$$L = g_1 \Pi_1^2 + g_2 \Pi_2^2 + g_3 \Pi_3^2, \quad (5.106)$$

con  $f_i = \frac{1}{2}(a/I_1 + b)$ ,  $g_1 = \frac{1}{2}(c/I_1 + d)$ . Tomemos  $g_3 = 0$  (que es el caso cuando Marsden halla la ecuación del péndulo) y la hipótesis ( $g_1 = g_2 \equiv g$ ), el flujo hamiltoniano es de la forma

$$X_H = 4gf_3\Pi_3 [\Pi_1\partial_2 - \Pi_2\partial_1] + 4g\Pi_2\Pi_1(f_1 - f_2)\partial_3 \quad (5.107)$$

Con objeto de reproducir las ecuaciones (5.100) debemos tener  $f_1 = f_2$  que es, de hecho, una consecuencia de tomar  $g_1 = g_2$ . Aún tenemos el problema de que los generadores asociados con este flujo hamiltoniano, que obedecen el álgebra  $se(2)$  en lugar de la de Heisenberg. Empero, lo interesante es que bajo la simetría  $\mathbb{Z}_2$ , el Flujo hamiltoniano es también invariante. Esta simetría puede realizarse de dos maneras:

- $\Pi_1 \leftrightarrow -\Pi_2$  y absorber el signo negativo en el parámetro  $\lambda$ . De hecho, este parámetro es una función de las entradas de la matriz  $SL(2, \mathbb{R})$  y del valor constante  $\Pi_3$ . El signo entonces puede colocarse en estas dos cantidades.
- Simetría de paridad seguido del intercambio en coordenadas  $\Pi_1, \Pi_2$ .

Para este último caso, la simetría de paridad reduce el espacio fase lo cual tiene sentido ya que el paraboloides de momento angular tiene un manto mientras que el hamiltoniano elíptico cubre dos regiones.

### 5.5.2. Un pequeño corolario

El análisis hecho hasta ahora comienza con una elección específica de función de Casimir. Exploremos entonces el proceso inverso, es decir, partiendo del álgebra de Heisenberg, qué podemos decir del perfil de las funciones de Casimir. Algunos cálculos efectuados por el autor de esta tesis, pueden esgrimirse en la siguiente afirmación

*Junto con la invariancia de norma del operador gradiente, la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  reproduce el álgebra de Heisenberg para cualquier sistema bi-hamiltoniano si las formas cuadráticas de Casimir asociadas tienen componentes*

$$l^{33} = -\frac{c}{d}h^{33}, \quad l^{22} = \frac{1 - ch^{33}}{d} \quad (5.108)$$

*para cualquier par de números  $c > 0, d > 0$  no nulos y cualquier  $l^{11}, h^{11}$ .*

*Dem.* De acuerdo con [23], el paréntesis de Lie-Poisson del cuerpo rígido es

$$\{F_1, F_2\} = -\mathbf{u} \cdot (\nabla F_1 \times \nabla F_2). \quad (5.109)$$

Y los generadores para una función  $G$  pueden expresarse como

$$X_G = \mathbf{u} \cdot [\mathbf{K}] \cdot (\nabla G \times \nabla), \quad (5.110)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz asociada a la combinación  $SL(2, \mathbb{R})$  de las funciones de Casimir  $h$  y  $l$  (ver 5.21). Es decir  $[\mathbf{K}]^{ij} = ch^{ij} + dh^{ij}$ . Los generadores pueden escribirse como

$$X_G = u_i [\mathbf{K}]^{ij} \epsilon_{jkl} \partial^k G \partial^l \quad (5.111)$$

y por tanto, en el parche coordinado  $\{u_1, u_2, u_3\}$  tendremos  $X_{u_\alpha} = u_i [\mathbf{K}]^{ij} \epsilon_{j\alpha l} \partial^l$ .

Los conmutadores de estos generadores pueden escribirse como un tensor  $(2,0)$  antisimétrico

$$\mathcal{Q}_{ij} \equiv [X_i, X_j] = 2\Sigma_{[ij} \partial^l \Sigma_{j]p} \partial^p, \quad (5.112)$$

con  $\Sigma_{kl} \equiv u_i [\mathbf{K}]^{ij} \epsilon_{jkl}$ .

Una álgebra de Heisenberg se obtendría si los generadores cumplen  $X_1 \propto u_3 \partial^2$ ,  $X_2 \propto -u_3 \partial^1$ ,  $X_3 \propto u_2 \partial^1$  ya que

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2 \quad (5.113)$$

En nuestra expresión (5.111) implica

$$\begin{aligned} X_1 &= u_3 [\mathbf{K}]^{3j} \epsilon_{j12} \partial^2 \\ X_2 &= u_3 [\mathbf{K}]^{3j} \epsilon_{j21} \partial^1 \\ X_3 &= u_2 [\mathbf{K}]^{2j} \epsilon_{j31} \partial^1, \end{aligned} \quad (5.114)$$

con lo que obtenemos un par de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= ch^{33} + dl^{33} \\ 1 &= ch^{22} + dl^{22} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.115)$$

La importancia de este resultado es debida a la aparente independencia de la componente  $[\mathbf{K}]^{11}$  en la combinación lineal de las matrices asociadas a las funciones de Casimir. Podemos considerar cierta función que reproduce alguna dinámica y mapear (vía  $SL(3, \mathbb{R})$ ) a la dinámica del cuerpo de Lagrange. Este argumento no es único en el sentido de que hay otras maneras de cerrar el álgebra de Heisenberg. Otro problema es que requerimos construir ciertas funciones  $l$  y  $h$  que reproduzcan el cuerpo de Lagrange y satisfagan el álgebra (5.113). Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema

$$h = \frac{1}{2I_1} \Pi_2^2 + \frac{1}{2I} (\Pi_2^3 + \Pi_3^2), \quad l = \frac{\Pi_2^2}{2} + \frac{\Pi_3^2}{2} + \gamma \Pi_3 \quad (5.116)$$

bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ , los generadores satisfacen el álgebra (5.113) pero es incapaz de reproducir sus ecuaciones de movimiento asociadas (cuerpo de Lagrange). La simetría  $SL(3, \mathbb{R})$  debe ser el siguiente paso en el análisis.

### 5.5.3. Sistemas hamiltonianos generalizados en $O(K)*$

Usando el isomorfismo entre  $O(k)*$  y  $\mathbb{R}^3$  (hat-map), un sistema hamiltoniano cuadrático en  $O(k)*$  es representado por un hamiltoniano cuadrático en  $\mathbb{R}^3$  como sigue:

$$(\mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_K, H_{(A, \vec{a})})$$

Donde el hamiltoniano es  $H_{(A, \vec{a})}(u) = \frac{1}{2} u^T A u + u^T \vec{a}$ , con  $A \in \text{Sym}(3)$  y  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ . Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{u} = \nabla C_K(u) \times \nabla H_{(A, \vec{a})}(u)$$

o equivalentemente

$$\dot{u} = (Ku) \times (Au + \vec{a}), \quad u \in \mathbb{R}^3. \quad (5.117)$$

Esta dinámica admite una familia de estructuras de Lie-Poisson parametrizadas por  $SL(2, \mathbb{R})$ . Más específicamente,  $(\mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}_{\alpha, \beta}, H^{\gamma, \delta})$  es una realización Hamiltoniana de la dinámica, donde

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

El paréntesis se define como

$$\{f, g\}_{\alpha, \beta} \equiv -\nabla C^{\alpha, \beta} \cdot (\nabla f \times \nabla g).$$

Usando este resultado, Tudoran et. al. [74; 135], halla todas las estructuras Lie-Poisson asociadas. Los Casimir, posterior a la aplicación de  $SL(2, \mathbb{R})$  son

$$C^{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} [u^T (\alpha K + \beta A) u] + u^T (\alpha \vec{k} + \beta \vec{a}), \quad H^{\delta, \gamma} = \frac{1}{2} [u^T (\gamma K + \delta A) u] + u^T (\gamma \vec{k} + \delta \vec{a}) \quad (5.118)$$

Definiendo  $I_i^{-1} \equiv \lambda_i$ , usando  $\dot{u} = \nabla H \nabla C$  y las matrices

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

Las ecuaciones de movimiento son (componente  $i = 1$ )

$$\dot{u}_1 = (\lambda_2 - \lambda_3) u_2 u_3 + (\lambda_2 k_3 - a_3) u_2 + (a_3 - \lambda_3 k_2) u_3 + a_2 k_3 - a_3 k_2 \quad (5.120)$$

Y los generadores

$$X_1 = (\Sigma_2) \partial_3 - (\Sigma_3) \partial_2, \quad (5.121)$$

$$X_2 = (\Sigma_3) \partial_1 - (\Sigma_1) \partial_3, \quad (5.122)$$

$$X_3 = (\Sigma_1) \partial_2 - (\Sigma_2) \partial_1, \quad (5.123)$$

donde  $\Sigma_i = (\alpha + \beta \lambda_1) u_i + (\alpha k_i + \beta a_1)$ . El álgebra resulta ser

$$[X_1, X_2] = -\Sigma'_3 X_3, \quad [X_2, X_3] = -\Sigma'_1 X_1, \quad [X_3, X_1] = -\Sigma'_2 X_2. \quad (5.124)$$

donde  $\Sigma'_i = \alpha + \beta \lambda_i$ . La adición de términos lineales a las funciones de Casimir pueden dar lugar al álgebra de Heisenberg. Se continuará explorando esta posibilidad.

## 5.6. La Simetría $\mathcal{PT}$ del cuerpo rígido

Muchos sistemas dinámicos como las ecuaciones de Euler pueden construirse de tal modo que sean  $\mathcal{PT}$  simétricas. Las soluciones reales de este sistema son bien conocidas. Sin embargo, sólo son un subconjunto infinitesimal dentro del conjunto completo de soluciones complejas. En [128] se analiza el subconjunto de soluciones reales que sean  $\mathcal{PT}$  simétricas. Se enfatiza que la simetría  $\mathcal{PT}$  selecciona las soluciones que sean complejas y periódicas. Después de hacer un análisis de varios sistemas dinámicos, en [128] se extiende el momento angular del cuerpo rígido en el marco anclado, a valores complejos. Es decir, considera  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{C}^3$ , con

$$\dot{\mathbf{L}} = \nabla C \times \nabla E, \quad (5.125)$$

donde  $C(\mathbf{L})$  y  $E(\mathbf{L})$  son las funciones de Casimir y energía respectivamente. Las ecuaciones que emanan de (5.125) son  $\mathcal{PT}$  simétricas, es decir, son invariantes ante reflexiones espaciales de las componentes del momento angular  $P : \mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}$  compuesta con inversión temporal  $T : \mathbf{L}(t) \mapsto \mathbf{L}(-t)$ <sup>10</sup>. Se hace la simplificación eligiendo la matriz de inercia como  $\mathbb{I}^{-1} \equiv \text{diag}(1, 2, 3)$  que reduce las ecuaciones de Euler a la forma

$$\dot{L}_1 = L_2 L_3, \quad \dot{L}_2 = -2L_1 L_3, \quad \dot{L}_3 = L_1 L_2. \quad (5.126)$$

Lo importante para nuestros propósitos es que [128] usa la siguiente expresión para reescribir las ecuaciones de Euler,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times \mathbf{K}\mathbf{L}, \quad \text{con} \quad \mathbf{K} \equiv \text{diag}(-1, 0, 1). \quad (5.127)$$

Ahora, extendiendo a valores complejos  $\mathbf{L} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  se obtienen cuatro leyes de conservación, las partes real e imaginaria del Casimir y la energía,

$$C(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad H(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{K}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot \mathbf{K}\mathbf{y} + i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}\mathbf{y}. \quad (5.128)$$

Las soluciones de las ecuaciones de Euler ya la conocemos. Se obtienen considerando la parte imaginaria nula ( $\mathbf{y} = 0$ ) y las leyes de conservación se reducen a solo dos,

$$C = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad H = \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2. \quad (5.129)$$

Sabemos muy bien como se comportan las soluciones en el espacio de momento, La dinámica en la intersección, sus trayectorias, puntos críticos, etc. Sin embargo, al considerar valores complejos, surgen dos constricciones producto de imponer simetría  $\mathcal{PT}$  a las ecuaciones, es decir, imponer

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}\mathbf{y} = 0 \quad (5.130)$$

Estas dos constricciones bilineales se pueden utilizar para eliminar  $\mathbf{y}$  en favor de  $\mathbf{x}$ . Al realizar este cálculo se obtienen las ecuaciones para  $C$  en la variedad-constricción  $\mathcal{PT}$  simétrica

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.131)$$

La función escalar  $M = PN/D$  tiene perfil no trivial,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= 2x_1 x_2 x_3, \\ N(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1, \\ D(\mathbf{x}) &= [\text{Re}(\nabla C \times \nabla H)]^2 = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + 4x_1^2 x_3^2. \end{aligned} \quad (5.132)$$

El autor menciona que esta forma es útil a la hora de considerar el problema de espín cuántico  $\mathcal{PT}$  simétrico. Las ecuaciones de *Euler* que surgen a partir de (5.132) son interesantes,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 (1 + 2x_1^2 N/D), \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 x_3 (1 - x_2^2 N/D), \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 (1 + 2x_3^2 N/D) \end{aligned} \quad (5.133)$$

Sobre dos superficies conservadas

$$A = \frac{(N+D)^2 N}{D}, \quad B = \frac{x_1^2 - x_3^2}{D} (2x_2^2 x_3^2 + 4x_1^2 x_3^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 - x_2^2). \quad (5.134)$$

Se muestran en la figura (5.4) algunos perfiles de las intersecciones.

*La idea consiste entonces en realizar la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  o  $\mathbb{C}$ ) para obtener nuevas expresiones para la matriz  $K$  que es la que codifica el perfil de las soluciones dinámicas.* A su vez construir las álgebras y los paréntesis de Poisson con valores complejos. En mi experiencia, cuando se hacia las reducciones simplécticas en el cuerpo rígido real, y usaba mapeos complejos, en ocasiones se eliminaba la parte imaginaria resultando un paréntesis completamente real.

<sup>10</sup>La aplicación compuesta  $\mathcal{PT}$  sería de la forma  $PT(L_i(t)) \mapsto -L_i(-t)$ .

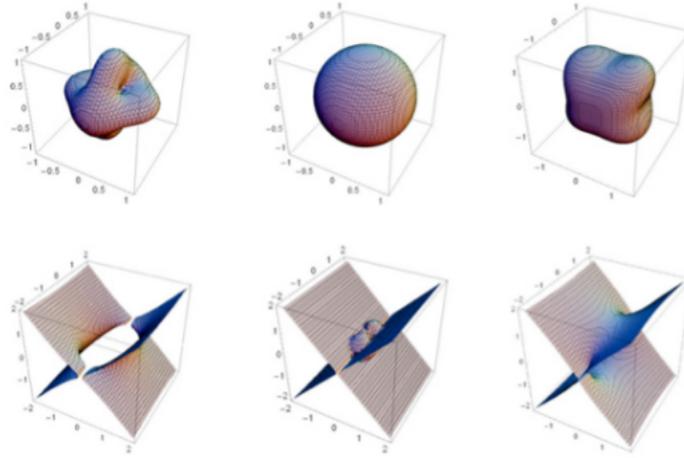


Figura 5.4: Superficies en  $(x_1, x_2, x_3)$  para las dos constantes de movimiento  $A = -1, 0, 1$  (figuras superiores) y  $B = -1, 0, 1$  (para las figuras inferiores) [128].

## 5.7. Motivaciones en trabajos posteriores

Aunado a las ideas exploradas durante la estancia doctoral y que están esgrimidas en el capítulo 5 podemos abordar las propiedades de las funciones elípticas de Jacobi y Weierstrass que aparecen en varios sistemas físicos importantes dentro del marco de la mecánica clásica. Son soluciones a las ecuaciones de movimiento del péndulo plano, el cuerpo rígido (asimétrico), partícula en potencial cúbico y cuártico así como el péndulo esférico, entre otros. El péndulo plano es particularmente interesante para establecer una conexión entre las funciones elípticas de Jacobi y Weierstrass<sup>11</sup>. Relevante para el propósito de este proyecto tentativo, es que las funciones de Jacobi y Weierstrass poseen propiedades analíticas que pueden codificarse en el lenguaje de teoría de grupos, donde es posible analizar un sistema físico estudiando las propiedades de transformación de estas funciones bajo la acción de los generadores de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , llamado *grupo modular*. Las funciones elípticas tienen argumento complejo (o real) y un parámetro extra denominado *módulo*. Al ser doblemente periódicas, existen dos módulos que están relacionados entre sí. Es posible realizar ciertas transformaciones sobre el módulo y codificarlas en el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Las funciones elípticas cambian también bajo la acción de tal grupo conservando su estructura analítica como la doble periodicidad. En aplicaciones físicas, los módulos están asociados a observables como la energía en el caso del péndulo o cocientes de momentos de inercia en el cuerpo rígido. Aplicaciones de las funciones de Jacobi y Weierstrass aparecen también en sistemas gravitacionales, teoría de cuerdas y materia condensada, como mencionaremos más adelante (véase [88]-[101]).

El objetivo de este posible proyecto consistiría, en primera instancia, en analizar los sistemas clásicos antes mencionados en donde están involucradas las funciones elípticas desde el punto de vista de sus propiedades de transformación bajo la acción del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  y dar un enfoque nuevo o distinto de la física involucrada en ellos. Para avanzar en este propósito, es importante analizar a detalle el péndulo plano y cuerpo rígido (además de otros sistemas clásicos) para que sirvan de punto de partida al momento de abordar sistemas en otras áreas de la física.

La segunda fase del proyecto doctoral consiste en realizar una revisión exhaustiva de los sistemas físicos *elípticos* en mecánica cuántica. Un primer acercamiento es analizar el formalismo para hallar el espectro de la molécula asimétrica[123]. Las referencias [92; 14; 111; 123; 18] parametrizan el espacio de configuración de la molécula utilizando funciones elípticas pero no se hace referencia alguna a las propiedades modulares

<sup>11</sup>Esta conexión es estudiada en textos matemáticos de funciones elípticas [87; 111; 112].

que poseen y sus posibles interpretaciones<sup>12</sup>. Si bien es posible hallar en la literatura estudios de estas ideas, se espera obtener un panorama muy amplio del efecto del grupo modular para avanzar a una tercera fase: estudio formal de las formas modulares.

Formas modulares<sup>13</sup> aparecen en sistemas físicos como consecuencia de *dualidades*. Es decir, como invariancia de la teoría o como una relación entre dos teorías otrora distintas bajo ciertas transformaciones discretas en los parámetros (como el módulo en los sistemas físicos descritos arriba). Uno de los primeros ejemplos es la dualidad eléctrica-magnética de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que son invariantes ante el intercambio de los campos eléctricos por magnéticos. Esta dualidad se generalizó a la llamada dualidad de Montonen-Olive en el marco de las teorías de norma abelianas y culmina con la dualidad de Seiberg-Witten en teorías de norma no abelianas y supersimétricas como  $\mathcal{N} = 4$  súper Yang-Mills [105]. En esta última, la dualidad se codifica en el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  y actúa sobre el parámetro complejo  $\tau = \theta/2\pi + 4\pi i/g^2$ , donde  $\theta$  es el ángulo de vacío y  $g$  la constante de acoplamiento. Actuando sobre el parámetro  $\tau$ , una transformación modular puede dar acceso a regiones no perturbativas de la teoría. En mecánica estadística, la dualidad Kramers-Wannier [107] predice la existencia de una temperatura crítica  $T_c$  que separa la fase ferromagnética ( $T < T_c$ ) de la fase paramagnética ( $T > T_c$ ) dentro del marco del modelo de Ising en dos dimensiones. La función de partición canónica<sup>14</sup> puede expresarse en términos de formas modulares. Se conocen actualmente una diversidad de ejemplos en gravitación y teoría de cuerdas en donde el grupo modular actúa sobre los parámetros que las caracterizan asociados a configuraciones gravitacionales, en particular los llamados *instantones*. Estos objetos, son soluciones a ecuaciones no lineales en donde se considera el tiempo imaginario vía una continuación analítica  $t \rightarrow it'$  a partir de la acción euclídeana  $S[\phi]$ .

Genéricamente, las teorías de campo exhiben instantones y emergen originalmente en las teorías de Yang-Mills y en Relatividad General. En este último caso, son útiles para la descripción de transiciones cuánticas, si bien existen actualmente inconsistencias en la descripción cuántica de la gravedad. A pesar de ello, el uso de instantones en las teorías modernas de gravedad, súpergravedad (SUGRA) y teoría de cuerdas son interesantes al menos por dos razones.

En primer lugar, instantones gravitacionales pertenecen a la clase de espacios llamados asintóticamente euclídeanos y tienen propiedades que sirven como punto de partida para compactificar teorías de súper cuerdas en diez dimensiones. Como ejemplo de esta clase están los instantones de Eguchi-Hanson [104] y el multi instantón de Gibbons-Hawking.

La segunda razón es que las teorías de cuerdas poseen una familia de campos escalares llamados módulos. Su dinámica se codifica en modelos sigma no lineales en fondos gravitacionales instantónicos como Taub-NUT, Atiyah-Hitchin, Fubini-Study, Pedersen-Calderbank<sup>15</sup>. Estas soluciones poseen dualidades que pueden ser codificadas en términos de formas (cuasi) modulares, resultando relevantes para el propósito de esta investigación.

Específicamente, al resolver las ecuaciones de Einstein en 4 dimensiones con signatura Euclídeana, siguiendo el paradigma de las teorías de Yang-Mills al requerir una condición de *auto dualidad* sobre los campos, se obtiene un conjunto de ecuaciones que en muchos casos son integrables. Uno de ellos es el sistema llamado *lagrangiano*

$$\dot{\Omega}^1 = \Omega^2 \Omega^3, \quad \dot{\Omega}^2 = \Omega^3 \Omega^1, \quad \dot{\Omega}^3 = \Omega^1 \Omega^2,$$

donde  $\Omega^i$  son funciones arbitrarias de las coordenadas espacio temporales y codifican una métrica con simetría  $SU(2)$ <sup>16</sup>. Tal conjunto de ecuaciones son exactamente las mismas que surgen en el cuerpo rígido a partir de las ecuaciones de Euler y poseen soluciones elípticas de Jacobi. Resulta sensato indagar

<sup>12</sup>Los operadores asociados a observables, también pueden ser susceptibles de analizarse en términos del grupo modular.

<sup>13</sup>Soluciones a ecuaciones de movimiento que transforman de manera específica bajo el grupo modular.

<sup>14</sup>Calculada por primera vez por Lars Onsager en 1944 [124].

<sup>15</sup>Para una revisión de estas soluciones gravitacionales, ver [104; 105].

<sup>16</sup>Por tanto pertenecen a la clase Bianchi IX.

todas las propiedades modulares que en el caso gravitacional han sido exhaustivamente estudiadas y trasladar tales resultados al sistema del cuerpo rígido. En este sistema, podemos preguntarnos si tiene alguna interpretación física la condición de auto dualidad o si existe una continuación analítica análoga al instantón gravitacional. Otro sistema interesante es el llamado *Darboux-Halphen*[105],

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}^1 &= \Omega^2\Omega^3 - \Omega^1(\Omega^2 + \Omega^3), \\ \dot{\Omega}^2 &= \Omega^3\Omega^1 - \Omega^2(\Omega^3 + \Omega^1) \\ \dot{\Omega}^3 &= \Omega^1\Omega^2 - \Omega^3(\Omega^1 + \Omega^2).\end{aligned}$$

Resuelto por Halphen usando funciones  $\theta$  de Jacobi con las cuales se definen las funciones elípticas. Este tipo de ecuaciones surgen también en reducciones de Yang-Mills auto duales con sus correspondientes propiedades modulares [105]. En el sistema del cuerpo rígido, el análogo de las funciones  $\Omega$  son las componentes del momento angular y la simetría del cuerpo se refleja en los valores relativos de sus momentos de inercia. El caso más general (que posee soluciones elípticas), en donde los tres momentos de inercia son diferentes, es análogo a una generalización del instantón de Eguchi-Hanson. Tenemos entonces, al menos tres sistemas físicos completamente distintos (cuerpo rígido, soluciones gravitacionales y soluciones de Yang-Mills) que poseen la misma estructura subyacente, con propiedades modulares en común. La simetría asociada a tales sistemas, codificada en el lenguaje de grupos de Lie y sus álgebras asociadas, puede dar pistas sobre la posibilidad de un formalismo ulterior que describe todos en conjunto y dependiendo de la elección de parámetros es cuando se *proyecta* tal formalismo en una de estas teorías en particular.

Una pista muy interesante a este respecto es el sistema conocido como Maxwell-Bloch[68],

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1x_2, \quad \dot{x}_3 = -x_1x_2;$$

que surge en la ecuación de Maxwell-Schrödinger. Dependiendo de la elección de entradas de cierta matriz que codifica la invariancia del hamiltoniano y un casimir bajo el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ , es posible hallar diversas ecuaciones de movimiento como el sistema de Duffing y el péndulo plano. Otro resultado en esta dirección es que la dinámica del cuerpo rígido y el péndulo plano están relacionados bajo el formalismo de reducción de Lie-Poisson [55; 68]. La lección que nos deja este análisis es la posibilidad de hallar, desde el formalismo de grupos y sus álgebras, diversas manifestaciones físicas de un mismo sistema relacionados entre sí por una estructura de grupo subyacente<sup>17</sup>. La simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  está presente también en el cuerpo rígido. Por esta razón, es posible estudiar en términos de la descomposición de Iwasawa [127] los diversos casos límite de este sistema e incorporar las lecciones aprendidas en [20; 23; 68]. La descomposición de Iwasawa se utiliza en reducciones dimensionales de la teoría IIB en el marco de la teoría de cuerdas [126].

Los grupos que se han mencionado, como el grupo modular, son lineales. Es interesante preguntarse si existen transformaciones no lineales sobre los argumentos de las funciones elípticas. En[94; 95] se generalizan las transformaciones de Landen<sup>18</sup> con interpretaciones físicas en sistemas concretos. Un estudio sobre tales transformaciones aplicados a los sistemas citados aquí puede complementar el entendimiento del problema general.

### 5.7.1. Aplicaciones de las funciones elípticas en el marco de la Física moderna

Paralelo al estudio formal de la simetría modular (y simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ ) en el cuerpo rígido, instantones gravitacionales y soluciones de Yang-Mills, es plausible revisar en la literatura sistemas en donde están involucradas las funciones elípticas y realizar un análisis sobre la aplicación de nuestras ideas en sistemas específicos, si acaso no se han llevado a cabo en los mismos. En este sentido, presentamos en este

<sup>17</sup>Esta hipótesis de trabajo forma parte del monumental programa de Shopus Lie y en versión moderna del proyecto Langlands. Ver [125].

<sup>18</sup>Transformaciones del módulo de las funciones elípticas que no son lineales.

capítulo algunos sistemas físicos hallados en la literatura. Cabe mencionar que la mayoría de los artículos siguientes corresponden al área de gravitación, que es un tema familiar para el sustentante. En [90] se exploran soluciones elípticas de Weierstrass a las ecuaciones de Friedmann en cosmología<sup>19</sup>. Se establece una conexión directa entre la ecuación de Friedmann y la fórmula de Cardy<sup>20</sup> en virtud de las propiedades analíticas de las funciones de Weierstrass. En [91] se estudia el rol de la constante cosmológica  $\Lambda$  en la descripción holográfica de la era del universo dominada por radiación. Se establecen relaciones entre la entropía y la energía de esa era. La constante cosmológica juega el papel de parámetro modular en las soluciones gravitacionales, que son elípticas.

En [92] se estudia el movimiento en tres dimensiones sobre una esfera de manera cuántica. Se utilizan coordenadas elípticas y las funciones de onda se construyen en estas coordenadas. En [14], desde el formalismo de teoría de grupos se derivan todo el conjunto de observables en la 3-esfera encajada en un espacio 4 dimensional. Se muestra que existen seis conjuntos diferentes de observables y el más general es asociado con un sistema elíptico coordinado en este espacio. Se analiza en [93] un escenario de inflación producto de un solo campo que está descrito en términos de las funciones de Jacobi. Se explotan algunas de las propiedades de las funciones elípticas de Jacobi para promover nuevas soluciones analíticas. En [95] se utilizan las propiedades de las funciones de Jacobi en el contexto de las soluciones a las ecuaciones de Korteweg-de-Vries y la teoría  $\lambda\phi^4$  para obtener soluciones adicionales con periodos y velocidades distintos. Se encuentra un principio de superposición débil en virtud de las identidades que satisfacen las funciones elípticas.

Se sabe que el problema de Kepler es separable en 6 coordenadas distintas. En [96] se exploran los estados ligados del átomo de hidrógeno en coordenadas parabólicas. Al resolver el problema en coordenadas elípticas en donde están involucradas las funciones de Jacobi, es plausible analizar sus propiedades modulares desde el espacio de configuración.

El efecto Stark es un corrimiento y esparcimiento de las líneas espectrales de los átomos y moléculas en presencia de un campo eléctrico externo. Se estudia tal problema en [98] con soluciones tridimensionales usando las funciones de Weierstrass. En [99] se estudia la estructura geodésica de un agujero negro de Lifshitz en 3 dimensiones. El movimiento de una partícula (masiva y sin masa) cuya solución son geodésicas en términos de funciones de Weierstrass presentan propiedades interesantes, por ejemplo, un observador externo ve fotones con movimiento radial arribando en un tiempo finito al infinito espacial. En [101] se estudia la ecuación BMM<sup>21</sup>. Al añadir un término de viscosidad, sus soluciones son ondas periódicas elípticas. En [13] se halla un conjunto completo de observables cuánticos en la 2-esfera en términos de coordenadas elípticas. Se halla el espectro de los primeros estados excitados. No se hace referencia alguna a la estructura modular de las funciones elípticas. En [121] se hallan soluciones analíticas para las geodésicas en un espacio tiempo con agujero negro en el contexto de las teorías  $f(R)$  gravitatorias. Las diferentes soluciones y sus parámetros etiquetan la conservación de momento angular y la constante cosmológica.

Finalmente, cabe mencionar los estudios realizados en maestría sobre las teorías holográficas, particularmente la correspondencia AdS/CFT. Ella es particularmente interesante para analizar sistemas de materia condensada en donde están involucradas también las funciones elípticas. Es plausible entonces estudiar desde el punto de vista holográfico el papel de estas soluciones y sus propiedades modulares [115; 116; 117; 118; 119; 120].

---

<sup>19</sup>La ecuación de Friedmann codifica la evolución de la constante de Hubble en el modelo de Robertson-Walker-Friedmann.

<sup>20</sup>Con la fórmula de Cardy se obtiene la entropía de los agujeros negros dado un fondo gravitacional.

<sup>21</sup>Ecuación diferencial parcial que describe el movimiento de una onda larga de pequeña amplitud. Útil en estudios de ondas gravitacionales.

# Conclusiones generales

Detallamos y revisamos la relación entre el cuerpo rígido y el péndulo simple (capítulo 4) con el objetivo de dar una lista exhaustiva de las diferentes maneras de obtener la relación dinámica entre ambos sistemas. Trabajamos con tiempos reales e imaginarios bajo la justificación física de inversión del campo gravitacional. Comenzamos en el capítulo 3 revisando el cuerpo rígido en una parametrización diferente:  $e_0$  y  $\kappa$  que representan parámetros de energía y de momento de inercia, respectivamente. Se justificó esta parametrización ya que permite mayor control como se detalla en el artículo publicado en [27].

Se revisó la construcción original discutida en [23] bajo una parametrización diferente de los momentos de inercia y energía. La simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  de las ecuaciones de Euler nos permitió considerar más casos de geometría de las superficies. Casos específicos de esta simetría nos permitió dilucidar que los generadores hamiltonianos verifican diferentes álgebras, en particular  $iso(2)$ . Mediante un cambio de variable apropiado es posible obtener ecuaciones de movimiento idénticas a las del péndulo simple. El espacio fase del péndulo se reproduce completamente a partir del cuerpo rígido y la variedad cuyo parche coordinado son los momentos angulares. Tal cambio de variable tiene muchas conotaciones en mecánica. Nambu la etiquetó como transformaciones  $SL(3, \mathbb{R})$ . En libros de mecánica geométrica suele llamarse mapeos de momento en el contexto general de la teoría de reducción por simetría. Las superficies que definen las integrales de movimiento también reciben varios nombres en diferentes literaturas. En el contexto de extensiones de la mecánica a campos suele llamarse funciones de Casimir que conmutan con el hamiltoniano bajo el paréntesis de Poisson. Marsden los llama superficies simplécticas pues, tras efectuar el mapeo de momento, definen una variedad sobre la cual, la mecánica es canónica. Aquí usamos el término espacio cotangente pues, dada una variedad que define la mecánica en formulación de Hamilton, se sabe que el espacio cotangente asociado define el espacio de configuración asociado al espacio fase.

En el capítulo (3) se ha realizado una clasificación completa de la simetría de norma  $SL(2, \mathbb{R})$  aplicada a las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido usando la mecánica generalizada de Nambu. Estas transformaciones afectan la geometría de las funciones de Casimir pero dejan invariante sus intersecciones donde ocurre la dinámica y donde los vectores hamiltonianos generan la órbita dinámica. Tales vectores generan un álgebra de Lie tres dimensional. Algunos resultados generales se han reportado anteriormente en la literatura [26; 135] y aquí se construye explícitamente todas las álgebras en el contexto de la clasificación de Bianchi en donde algunas no habian sido completamente detalladas en la literatura. Nuestro análisis es clásico y puede ser considerado como un primer paso hacia resultados cuánticos obtenidos para cuerpos rígidos simétricos [26] y extenderlos al caso asimétrico. De hecho, existen algunos resultados recientes en el estudio del espectro de moléculas asimétricas [16; 17; 58; 19; 34] que pueden ser generalizados al caso del cuerpo rígido extendido y ayudar a mejorar el entendimiento de la cuantización de sistemas usando la dinámica de Nambu para casos completamente asimétricos. A pesar de que el cuerpo rígido asimétrico ha sido estudiado extensamente durante años, desde el punto de vista mecánico clásico posee interesantes aspectos que aún pueden ser estudiados. Algunos de ellos son el establecer la naturaleza de la funcional generadora de las transformaciones canónicas usadas aquí como coordenadas de ángulo-acción para cuerpos rígidos extendidos. Un estudio similar fue recientemente realizado para el péndulo simple [67] y se establece que la dinámica del cuerpo rígido se reduce a la del péndulo simple

cuando el álgebra de Lie es del tipo Bianchi  $VII_0$  ( $iso(2)$ ). Otra posibilidad es estudiar la simetría de transformaciones canónicas codificadas en  $SL(3, \mathbb{R})$  en el contexto de la dinámica bi-hamiltoniana y determinar qué transformaciones de este tipo generan ordenamiento en los parámetros de inercia, ya que como se discutió en ese capítulo, con  $SL(2, \mathbb{R})$  sólo es posible el intercambio de parámetros  $e_1 \leftrightarrow e_3$ . Este análisis debería ser posible ya que para casos asimétricos las funciones elípticas de Jacobi incorporan de manera natural las transformaciones de los seis casos del cuadro (3.6). Para una revisión reciente en el caso del péndulo simple léase [28]. Un análisis muy interesante que puede darse en el futuro es encontrar la relación entre las diferentes transformaciones de norma estudiadas aquí pero ahora en el contexto de la teoría de Hamilton-Jacobi generalizada para la mecánica de Nambu [40].

Como trabajo futuro, será interesante implementar la cuantización del sistema del cuerpo rígido en este formalismo. Esperamos que este análisis pueda producir física interesante y relaciones funcionales entre la ecuación diferencial de Lamé que gobierna el cuerpo rígido cuántico y la ecuación de Mathieu, que describe el péndulo cuántico. Es decir, ¿tal simetría entre ambos sistemas se respeta a orden cuántico? si es así, ¿qué relación guardan ambas funciones?. ¿El sistema presentará anomalías cuánticas, si formulamos la versión lagrangiana?. Otra dirección posible es analizar la dinámica de estos sistemas en este formalismo pero en el contexto de teoría de control en donde diversos autores señalan la posibilidad de implementar mecanismos de control para compuertas cuánticas usando el sistema dinámico del cuerpo rígido clásico [24].

Refiriéndonos a la lista de la introducción (página 9):

- T.1** La revisión de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  se efectuó en la parametrización  $e_i$  y  $\kappa$ , obteniendo mayor número de superficies (funciones de Casimir) concentradas en los cuadros (3.2) y (3.3).
- T.2** En la parametrización utilizada, el mecanismo de reducción simpléctica de [23], permitió considerar nuevas transformaciones (mapeos de momento o transformaciones  $SL(3, \mathbb{R})$ ) incluidos casos donde las variables son complejas.
- T.3** Esperamos que lo esgrimido aquí, en particular en la página 47 contribuya al entendimiento de la cuantización del cuerpo rígido. En ese sentido, este trabajo puede ser útil como revisión para ese propósito.
- T.4** Se estudió con detalle el caso del subgrupo  $iso(1, 1)$  ( o Bianchi  $VI_0$ ) y su álgebra (sección 3.8.1).
- T.5** En este punto, demostramos que no es posible obtener el álgebra con tres parámetros de inercia diferentes bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ . En el capítulo 5 sobre tópicos que se discutieron, se enfatiza un poco en este punto encontrando condiciones suficientes pero no necesarias para obtener tal álgebra para una elección específica de funciones Casimir (5.5.2).
- T.6** En (5.4) se estudian otras transformaciones  $SL(3, \mathbb{R})$  para obtener un paréntesis simpléctico a partir de Casimir cuadráticos. Las ecuaciones de movimiento que resultan no tienen significado físico hasta donde el autor conoce (5.2).
- T.7** En [24] se utiliza el cuerpo rígido para simular campos de control en un sistema cuántico de dos niveles. Pero argumentan mapear un momento de inercia a infinito. En este trabajo se muestra que, bajo  $SL(2, \mathbb{R})$  no es necesario tal argumento ya que, desde el punto de vista del autor, podría ser patológico (5.2.4).
- T.8** La idea de contracciones de grupo utilizada en este trabajo estriba en la eliminación de un parámetro de inercia usando  $SL(2, \mathbb{R})$  permitiendo a los generadores hamiltonianos conmutar de manera diferente a  $so(3)$ , es decir, se establecen nuevas constantes de estructura para sus subálgebras.

Es pertinente mencionar que, respecto a **T5**, **T6** y **T7**, estos resultados no fueron publicados.

Respecto a las preguntas planteadas en la estancia doctoral (página 10):

- P.1** En estricto sentido, en el trabajo [23] sí se completa la clasificación. Nuestro trabajo constituye entonces una manera diferente de realizar las reducciones y sus álgebras. Hacia la cuantización del cuerpo rígido, este trabajo podría ser útil pues ya contiene la parametrización adecuada para su construcción canónica.
- P.2** Este trabajo realizó reducciones simplécticas con coordenadas complejas obteniendo aún así, la ecuación física del péndulo simple.
- P.3** Nuestro análisis nos permite estudiar otros sistemas dinámicos que posean simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  y establecer sus álgebras de Lie y sus paréntesis de Lie-Poisson. Se puede revertir el proceso, es decir, partir de un álgebra ya establecida y estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que las funciones de Casimir las genere. Por funciones de Casimir podemos referirnos al objeto matemático cuyo paréntesis de Poisson conmuta con cualquier función. Es decir, la interpretación física puede relajarse.
- P.4** En definitiva, el autor considera que las ecuaciones de Euler juegan un papel importante en la literatura actual pues constituye un sistema con alta simetría bajo el cual pueden considerarse extensiones analíticas o bajo alguna clase de aproximación perturbativa. Es el análogo del oscilador armónico o el potencial central que constituyen, permítaseme la frase *caballitos de batalla* hacia una física de frontera.
- P.5** En la literatura se estudian muchos sistemas dinámicos semejantes a las ecuaciones de Euler: Maxwell-Bloch, Lotka-Volterra, Trompo simétrico, Lorentz, Kermac-Mackendric, Rabinovich. El autor considera interesante estudiar estos sistemas en el contexto planteado en esta tesis.

# Apéndices

Las siguientes secciones contienen tópicos asociados a la mecánica clásica del sistema cuerpo rígido y su sistema relacionado mediante reducción simpléctica, a saber, el péndulo simple. Soluciones explícitas a ambos sistemas son dados en formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano. Se discute las propiedades más importantes de las funciones elípticas que son soluciones analíticas del cuerpo rígido y péndulo así como algunas propiedades de su celda unitaria en el espacio complejo. En el lenguaje de grupos, se enfatizan las transformaciones  $S$  y  $T$  bajo las cuales se genera todo el dominio de las funciones elípticas.

# Apéndice A

## Funciones elípticas

Una función  $F(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es doblemente periódica, con periodos  $\eta$  y  $\eta'$  (tal que  $\mathcal{I}m(\eta/\eta') > 0$ ) si

$$F(z + m\eta + n\eta') = F(z), \quad (\text{A.1})$$

para  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (pero no  $m = n = 0$ ). La figura (A.1) muestra la *celda unitaria* formada por las esquinas  $z = 0, \eta, \eta'$  y  $\eta + \eta'$  sobre el plano complejo. En el límite  $\lim |\eta'| \rightarrow \infty$ , la función  $F(z)$  posee un periodo  $\eta$ . Las funciones elípticas son doblemente periódicas con dos ceros simples por celda unitaria y con un polo de segundo orden (Weierstrass) o dos polos de primer orden (Jacobi).

Las funciones elípticas  $y(x; a)$  pueden definirse como soluciones de la ecuación diferencial no lineal

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sum_{i=0}^4 a_i y^i, \quad (\text{A.2})$$

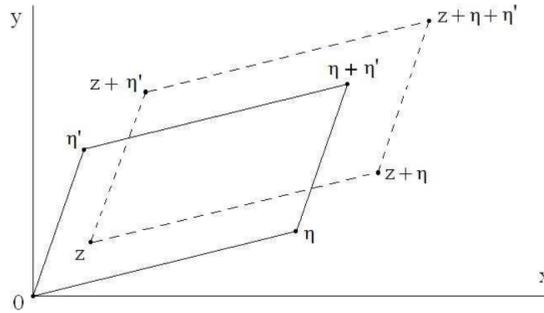


Figura A.1: Celda unitaria de una función doblemente periódica [84].

con  $\mathbf{a} \equiv (a_0, a_1, \dots, a_4)$  vector de componentes constantes. La función inversa (solución) tiene como cuadratura

$$x(y; \mathbf{a}) = x_0 \pm \int_{y_0(\mathbf{a})}^y \frac{ds}{\sqrt{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $y_0(\mathbf{a})$  es una raíz del polinomio cuártico  $a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0$  y  $x(y_0; \mathbf{a}) = x_0$ . Si el polinomio no posee término cúbico ( $a_3 = 0$ ) es posible escribirlo como  $(1 - y^2)(1 - m y^2)$  ( $m$  constante positiva) que define la función elíptica de Jacobi como solución de la ecuación (A.2) sin término cúbico. Análogamente, si el polinomio no posee término cuadrático ni cuártico, será de la forma  $4y^3 - g_2 y - g_3$  (con  $g_{2,3}$  constantes) y define la función elíptica de Weierstrass como solución a la ecuación (A.2).

## A.1. Funciones elípticas de Jacobi

La función elíptica de Jacobi  $\text{sn}(z, k)$  está definida en términos de la fórmula de inversión

$$z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2(\theta)}} = \int_0^{\sin(\phi)} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - m^2 y^2)}} \equiv \text{sn}^{-1}(\sin \phi, m), \quad (\text{A.4})$$

donde el módulo  $m^2$  es un número positivo<sup>1</sup> y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Se sigue que  $\text{sn}^{-1}(\sin \phi, 0) = \sin^{-1}(\sin \phi) = \phi$ . La solución a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - m^2 y^2), \quad (\text{A.5})$$

se expresa en términos de la función de Jacobi

$$y(z) = \begin{cases} \text{sn}(z, m) & (\text{para } m^2 < 1) \\ m^{-1/2} \text{sn}(m^{1/2} z, m^{-1}) & (\text{para } m^2 > 1) \end{cases}. \quad (\text{A.6})$$

Bajo la transformación  $y = \sin \phi$ , la ecuación diferencial de Jacobi (A.5) resulta

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = 1 - m^2 \sin^2 \phi, \quad (\text{A.7})$$

con solución  $\phi(z) = \sin^{-1}(\text{sn}(z, m))$  para  $m^2 < 1$ .

La función  $\text{sn}(z, m)$  posee periodo real puro  $4K$  donde

$$K \equiv K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.8})$$

y un periodo imaginario puro  $2iK_c$ ,

$$iK_c \equiv iK(m_c) = i \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m_c^2 \sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.9})$$

siendo el módulo complementario

$$m_c^2 \equiv 1 - m^2. \quad (\text{A.10})$$

La figura (A.2) muestra la doble periodicidad de la función de Jacobi para un valor particular de  $m^2$  que alterna entre  $(-1, 1)$  para valores reales de  $z$  con ceros en  $2nK$  y exhibe singularidades para valores imaginarios de  $z$  en  $(2nK + 1)iK$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Si  $m^2 \rightarrow 0$  ( $m_c^2 \rightarrow 1$ ),  $K \rightarrow \pi/2$  ( $|K_c| \rightarrow \infty$ ). En la figura (A.3) se muestra que, bajo este límite,  $\text{sn}(z)$  tiende a  $\sin(z)$  y se vuelve uniperiódica.

Existen funciones elípticas de Jacobi adicionales  $\text{cn}(z, m)$  y  $\text{dn}(z, m)$  definidas como

$$z = \int_{\text{cn}(z, m)}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(m_c^2 + m^2 y^2)}} = \int_{\text{dn}(z, m)}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(y^2 - m_c^2)}}, \quad (\text{A.11})$$

y que tienen como propiedades  $\text{cn}(z, m) = \cos \phi$ ,  $\text{dn}(z, m) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}$  y  $\text{sn}^2(z, m) + \text{cn}^2(z, m) = 1 = \text{dn}^2(z, m) + m^2 \text{sn}^2(z, m)$ . Es posible demostrar los comportamientos asintóticos  $m^2 = 0$  y  $m^2 = 1$ :

<sup>1</sup>Importante señalar que estamos usando una notación diferente a la mayoría de la literatura sobre funciones elípticas, en donde  $m = k^2$ . El módulo y módulo complementario verifican  $m + m' = 1$ . En estos apéndices, consideramos  $m^2 = k$ . La razón es para mantener la misma notación usada en esta tesis y en los artículos publicados que lo sustentan. Pido disculpas al lector si se presta a confusión.

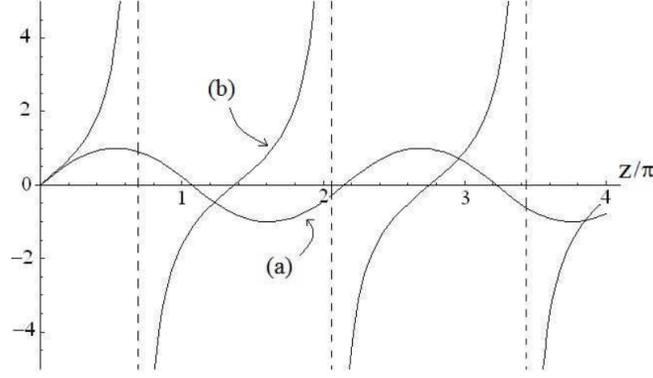


Figura A.2: Curvas de  $\text{sn}(z, m)$  (a) y  $-i\text{sn}(iz, m)$  (b) para  $m^2 = 1/16$ . Se muestran los periodos reales  $4K(m)$ [84].

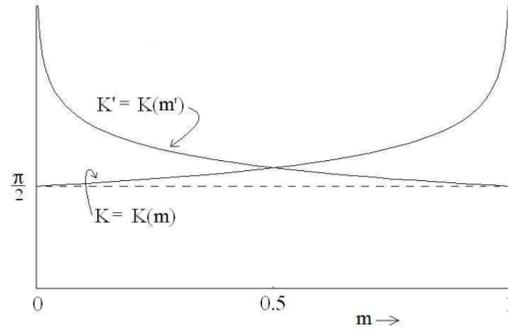


Figura A.3: Periodos  $K$  y  $K'$  y sus limites cuando  $m \rightarrow 1$ [84].

$$\begin{cases} \text{sn}(z, 0) = \sin z \\ \text{cn}(z, 0) = \cos z \\ \text{dn}(z, 0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{sn}(z, 1) = \tan z \\ \text{cn}(z, 1) = z \\ \text{dn}(z, 1) = z \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Las derivadas respecto a  $z$ ,  $f'(z) \equiv \frac{d}{dz}$  están bien definidas, a saber

$$\begin{cases} \text{sn}'(z, m) = \text{cn}(z, m)\text{dn}(z, m) \\ \text{cn}'(z, m) = -\text{sn}(z, m)\text{dn}(z, m) \\ \text{dn}'(z, m) = -m^2 \text{cn}(z, m)\text{sn}(z, m) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Importante para este trabajo son las siguientes identidades cuando el módulo  $m^2 > 1$ ,

$$\begin{cases} \text{sn}(z, m) = m^{-1} \text{sn}(m^{1/2}z, m^{-1}) \\ \text{cn}(z, m) = \text{dn}(m^{1/2}z, m^{-1}) \\ \text{dn}(z, m) = \text{cn}(m^{1/2}z, m^{-1}) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

## A.2. Funciones elípticas de Weierstrass

Las funciones elípticas de Weierstrass  $\mathcal{P}(z; g_2, g_3)$  están definidas como solución a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 \equiv 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3), \quad (\text{A.15})$$

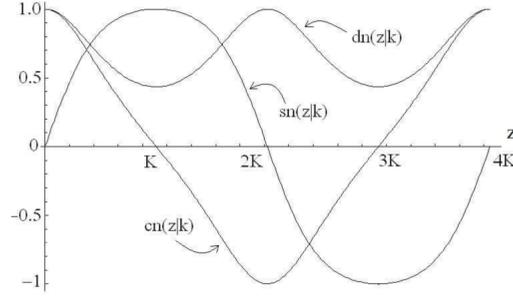


Figura A.4: Curvas de sn, cn y dn en  $z \in [0, 4K]$  y  $m^2 = 0,9$ [84].

en donde la terna  $(e_1, e_2, e_3)$  son las raíces del polinomio cúbico  $4s^3 - g_2s - g_3$  (que satisfacen  $\sum_{i=1}^3 e_i = 0$ ) y los invariantes  $g_2, g_3$  son definidos a través de las raíces cúbicas

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 2 \left( \sum_{i=1}^3 e_i^2 \right); \quad g_3 = 4e_1e_2e_3, \quad (\text{A.16})$$

junto con el parámetro llamado *discriminante modular*  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ . En aplicaciones físicas los invariantes  $g_2, g_3$  son siempre reales (con  $g_2 > 0$ ), por tanto, las tres raíces son reales o una de ellas es real (digamos  $e_a$ ) y las otras son complejas conjugadas  $(e_b, e_b^*)$  con  $\Re(e_b) = -e_a/2$ .

Las funciones de Weierstrass pueden analizarse en términos de los signos de la dupla

$$(g_3, \Delta) = [(-, -), (-, +), (+, -), (+, +)],$$

con dos casos especiales:  $(g_3 \neq 0, \Delta = 0)$  y  $g_3 = 0, \Delta > 0$ .

Realizando una serie de reparametrizaciones<sup>2</sup>, es posible definir el determinante como

$$\Delta = g_2^3(1 - \epsilon^2), \quad (\text{A.17})$$

y las raíces resultan

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\psi - \pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\psi + \pi}{3}\right) \\ -\cos(\psi/3) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Las tres raíces están conectadas suavemente (ver figura A.5) siguiendo una trayectoria en el plano complejo parametrizado por  $\psi$  (ver fig A.6).

Dependiendo de los valores de  $\epsilon$ , el parámetro  $\psi$  adquiere valores imaginarios o reales, resultando en valores reales o imaginarios para las raíces del polinomio cúbico así como un valor positivo o negativo del discriminante modular. Un caso especial se tiene cuando  $e_2 = 0$  ( $e_1 = \sqrt{3}\alpha = -e_3$  para  $g_3 = 0$  llamado *caso lemniscata*[85]).

Cuando  $0 < \epsilon < 1$  ( $\Delta > 0$ ), la función de Weierstrass  $\mathcal{P}(z)$  posee dos periodos  $2\omega$  y  $2\omega'$  sobre el eje real e imaginario donde

$$\omega(g_2, g_3) = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}, \quad \omega'(g_2, g_3) = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{|4s^3 - g_2s - g_3|}}. \quad (\text{A.19})$$

<sup>2</sup> $\alpha \equiv \sqrt{g_2/12}$ ,  $\epsilon \equiv (3/g_2)^{3/2}$  y una nueva reparametrización  $\epsilon = -\cos \psi$ .

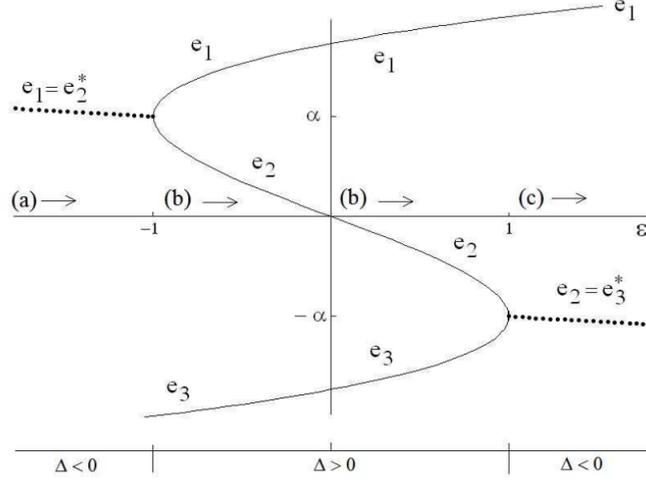


Figura A.5: Raíces cúbicas ( $e_1, e_2, e_3$ ) como función de  $\epsilon$  con valor  $\alpha$  fijo. Las regiones (a),(b),(c) sobre el eje  $\epsilon$  corresponde a los segmentos de trayectoria de la figura A.6

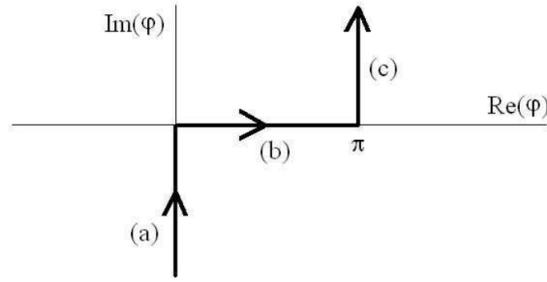


Figura A.6: Plano complejo para el parámetro  $\psi$ : (a)  $\epsilon \leq -1$ , (b)  $-1 \leq \epsilon \leq 1$  y (c)  $\epsilon \geq 1$ [84].

Mientras que para  $\epsilon > 1$  ( $\Delta < 0$ ),  $\mathcal{P}(z)$  tiene periodos diferentes  $2\Omega$  y  $2\Omega'$  sobre el eje real e imaginario, donde

$$\Omega(g_2, g_3) = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}, \quad \Omega'(g_2, g_3) = i \int_{-\infty}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{|4s^3 - g_2s - g_3|}}. \quad (\text{A.20})$$

En la figura (A.7) se muestra la trayectoria de integración usada para calcular  $(\omega, \omega')$  para  $\Delta > 0$  y  $(\Omega, \Omega')$  para  $\Delta < 0$ . Dada la terna de raíces  $e_i = (e_1, e_2, e_3)$  los periodos asociados se definen como

$$\omega_i(g_2, g_3) \int_{e_i}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}} = \int_{e_i}^{\infty} \frac{ds}{2\sqrt{(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}}. \quad (\text{A.21})$$

Resulta interesante que el par  $(e_i, \omega_i)$  satisface las siguientes propiedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\omega_i) = e_i; \\ \mathcal{P}(z + \omega_i) = e_i + \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\mathcal{P}(z) - e_i}; \\ \mathcal{P}(z + 2\omega_i) = \mathcal{P}(z), \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

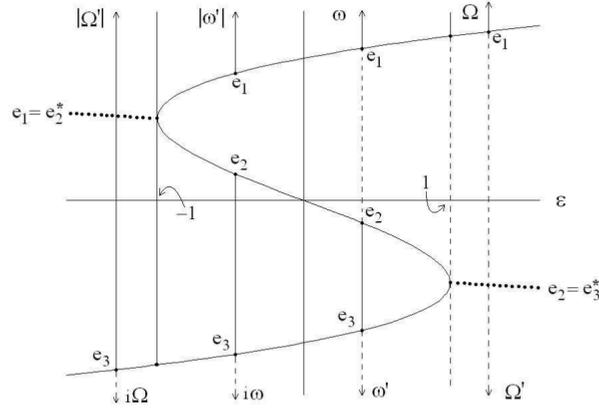


Figura A.7: Camino de integración para el cálculo de  $(\omega, \omega')$  para  $\Delta > 0$  y  $(\Omega, \Omega')$  para  $\Delta < 0$ . Las líneas sólidas (punteadas) indican dónde el polinomio  $4t^3 - g_2t - g_3$  es positivo (negativo)[84].

donde  $i \neq j \neq k$  de tal manera que  $\mathcal{P}(\omega_i + \omega_j) = e_k$ . Los valores para las raíces y sus frecuencias asociadas se resumen en el cuadro (A.1). Además de las propiedades (A.22), las funciones elípticas de Weierstrass

$(g_3, \Delta)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$\omega_1$	$\omega_2 \equiv \omega_1 + \omega_3$	$\omega_3$
$(-, -)$	$a - ib$	$a + ib$	$-2a < -1$	$ \Omega'  + i\Omega/2$	$ \Omega'  - i\Omega/2$	$-i\Omega$
$(-, +)$	$d > 0$	$c - d > 0$	$-c < 0$	$ \omega' $	$-i\omega +  \omega' $	$-i\omega$
$(+, +)$	$c > 0$	$d - c < 0$	$-d < 0$	$\omega$	$\omega + \omega'$	$\omega'$
$(+, -)$	$2a > 1$	$-a - ib$	$-a + ib$	$\Omega$	$\Omega/2 + \Omega'$	$-\Omega/2 + \Omega'$

Cuadro A.1: Raíces cúbicas y periodos asociados para  $g_2 = 3$  y  $\alpha = 1/2$ [86]

obedecen una relación de homogeneidad

$$\mathcal{P}(\lambda z; \lambda^{-4}g_2, \lambda^{-6}g_3) = \lambda^{-2}\mathcal{P}(z; g_2, g_3) \quad \forall \lambda \neq 0, \quad (\text{A.23})$$

En particular, para  $\lambda = -1$  se verifica que  $\mathcal{P}(-z; g_2, g_3) = \mathcal{P}(z; g_2, g_3)$  (función par) y para  $\lambda = i$  se encuentran los semiperiodos del cuadro (A.1) para  $g_3 < 0$ , ya que

$$\mathcal{P}(z; g_2, g_3) = -\mathcal{P}(iz; g_2, |g_3|). \quad (\text{A.24})$$

La inversión en  $g_3$  (A.24) se utiliza en el cuadro A.1 para obtener las siguientes transformaciones  $e_i^+(g_3 > 0) \rightarrow e_i^-(g_3 < 0)$  para las raíces de Weierstrass (fijando  $g_2, \Delta$ )<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} e_1^- \\ e_2^- \\ e_3^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\omega_1^-; g_2, g_3) \\ \mathcal{P}(\omega_2^-; g_2, g_3) \\ \mathcal{P}(\omega_3^-; g_2, g_3) \end{pmatrix} \equiv - \begin{pmatrix} \mathcal{P}(i\omega_1^-; g_2, |g_3|) \\ \mathcal{P}(i\omega_2^-; g_2, |g_3|) \\ \mathcal{P}(i\omega_3^-; g_2, |g_3|) \end{pmatrix} \equiv - \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\omega_3^+; g_2, |g_3|) \\ \mathcal{P}(\omega_2^+; g_2, |g_3|) \\ \mathcal{P}(\omega_1^+; g_2, |g_3|) \end{pmatrix} \equiv - \begin{pmatrix} e_3^+ \\ e_2^+ \\ e_1^+ \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

que hace uso de la transformación

$$(\omega_1^-, \omega_2^-, \omega_3^-) \equiv -i(\omega_3^+, \omega_2^+, \omega_1^+). \quad (\text{A.26})$$

Debemos hacer notar, en contraste con el perfil de la celda fundamental de las ecuaciones elípticas de Jacobi, la celda fundamental de las funciones de Weierstrass  $(0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3)$  cambia de forma dependiendo de los signos de  $(g_3, \Delta)$  en el cuadro A.1.

<sup>3</sup>El arreglo de los  $e_i$  no representa un vector columna sino solo un agrupamiento.

### A.3. Funciones elípticas y el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$

### A.4. Grupo modular

El *grupo modular*  $PSL(2, \mathbb{Z})$  codifica las transformaciones racionales de la forma

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.27})$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  que satisfacen  $ad - bc = 1$ . Pensando a la operación de grupo como composición de la función (A.27), este mapeo es invariante para cualquier  $\tau$  con parte imaginaria nula y mapea valores racionales en racionales. Los generadores del grupo son

$$S(\tau) \equiv -1/\tau, \quad T(\tau) \equiv 1 + \tau. \quad (\text{A.28})$$

Una representación del grupo  $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$  consiste de aquellas matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

con  $\det A = 1$  y  $A, -A$  consideradas idénticas. La representación matricial de (A.27) es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

que satisfacen  $S^2 = (ST)^3 = -\mathbb{I} \sim \mathbb{I}$  y  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

En el espacio definido como  $\mathcal{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ , es decir, el plano complejo superior, todos los elementos de  $\mathcal{H}$  pueden generarse a partir del *dominio fundamental*  $\mathcal{F}$  (ver figura A.8) aplicando combinaciones de los generadores  $S$  y  $T$  a un número complejo en  $\mathcal{F}$  como se muestra en la figura.

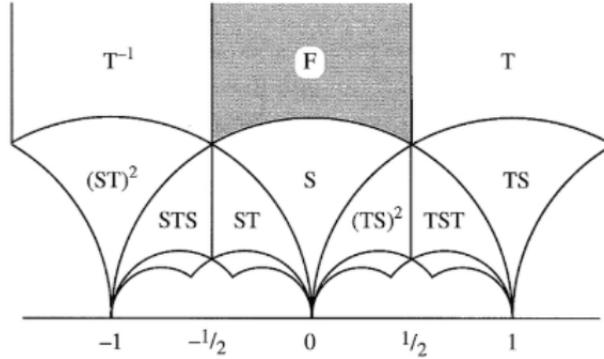


Figura A.8: Dominio fundamental  $\mathcal{F}$

La región  $\mathcal{F}$  satisface

- $\mathcal{F}$  es conexo. Dos puntos en  $\mathcal{F}$  no pueden ser relacionados bajo la transformación A.27.
- Para cada punto  $\tau$  de  $\mathcal{H}$  existe un elemento  $g \in SL(2, \mathbb{Z})$  tal que  $g\tau \in \mathcal{F}$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>El conjunto  $\mathcal{F}$  no es único, se puede tomar otra región como dominio fundamental sin embargo,  $\mathcal{F}$  es la estándar.

Geométricamente,  $T$  representa un desplazamiento unidad mientras que  $S$  representa una inversión en torno al círculo unitario, seguido de una reflexión respecto al eje imaginario. Podemos construir la transformación (A.27) transformando el par  $(\omega_1, \omega_2), \omega_i \in \mathbb{C}$  en  $(\omega'_1, \omega'_2)$  mediante

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2. \quad (\text{A.31})$$

Definiendo  $\tau = \omega_2/\omega_1$  y  $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$  encontramos que  $\tau$  y  $\tau'$  están relacionadas mediante (A.27). Finalmente, utilizando la notación  $\Omega' = M\Omega$  con

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega' = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Con  $M$  de la forma (A.29) que satisface las propiedades deseadas. Son justamente las variables  $\omega$  que juegan el papel de semi periodos en las funciones elípticas.

## A.5. Red doble

Una red  $L$  es una región de números complejos con dos propiedades. (i) posee estructura de grupo respecto a la adición y (ii) las magnitudes absolutas de los elementos no nulos están acotados por abajo. Las funciones de Jacobi y Weierstrass son funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$  con periodicidad en dos direcciones:  $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$  y debido a esto, generan *redes dobles* que consisten de todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros de dos generadores o *periodos primitivos*  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  cuya razón es imaginaria (ver figura A.1).

$$L(\omega_1, \omega_2) = \{n\omega_1 + m\omega_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad f(z) = f(z + n\omega_1 + m\omega_2). \quad (\text{A.33})$$

En las soluciones del péndulo,  $m^2$  y  $m_c^2$  están asociadas a la energía en diferentes regímenes. El cociente  $\tau = iK_c/K$  es sobre el que actúan las transformaciones  $SL(2, \mathbb{Z})$  y relacionan los diferentes movimientos del péndulo plano<sup>5</sup>.

## A.6. Transformaciones modulares sobre funciones de Jacobi

Si  $m^2$  y  $m_c^2$  denota el módulo y módulo complementario asociado con el parámetro  $\tau \rightarrow 1 + \tau$ , la transformación (A.27) sobre las funciones de Jacobi implican

$$\text{sn}(z, m_c) = m_c^2 \text{sd}(z/m_c, m^2), \quad \text{cn}(z, m_c) = \text{nd}(z/m_c, m^2), \quad \text{dn}(z, m_c) = \text{nd}(z/m_c, m), \quad (\text{A.34})$$

donde se definen nueve funciones elípticas tomando recíprocos y cocientes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ns}(z, m) = \frac{1}{\text{sn}(z, m)}, \quad \text{nc}(z, m) = \frac{1}{\text{cn}(z, m)}, \quad \text{nd}(z, m) = \frac{1}{\text{dn}(z, m)}, \\ \text{sc}(z, m) = \frac{\text{sn}(z, m)}{\text{cn}(z, m)}, \quad \text{cd}(z, m) = \frac{\text{cn}(z, m)}{\text{dn}(z, m)}, \quad \text{ds}(z, m) = \frac{\text{dn}(z, m)}{\text{sn}(z, m)} \\ \text{cs}(z, m) = \frac{\text{cn}(z, m)}{\text{sn}(z, m)}, \quad \text{dc}(z, m) = \frac{\text{dn}(z, m)}{\text{cn}(z, m)}, \quad \text{sd}(z, m) = \frac{\text{sn}(z, m)}{\text{dn}(z, m)} \end{array} \right. \quad (\text{A.35})$$

<sup>5</sup>Recordando que los parámetros  $K$  y  $K_c$  definen los semiperiodos de las funciones elípticas y por tanto la red fundamental.

Reemplazando  $z \rightarrow m_c z$  estas transformaciones se presentan en su forma estándar [112],

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(m_c z, im/m_c) = m_c^2 \operatorname{sd}(z, m) \\ \operatorname{cn}(m_c z, im/m_c) = \operatorname{cd}(z, m) \\ \operatorname{dn}(m_c z, im/m_c) = \operatorname{nd}(z, m). \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Si  $K$  e  $iK_c$  son los semiperiodos de las funciones elípticas (ver A.1), bajo la transformación (A.27) tenemos

$$iK_c = \tau' K_c = (1 + \tau) m_c^2 K = m_c^2 (K + iK_c). \quad (\text{A.37})$$

Bajo la transformación  $\tau \rightarrow -1/\tau$ , las funciones de Jacobi verifican

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(z, m_c) = -isc(iz, m) \\ \operatorname{cn}(z, m_c) = \operatorname{nc}(iz, m) \\ \operatorname{dn}(z, m_c) = \operatorname{dc}(iz, m). \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

Estas transformaciones permiten calcular el efecto de cualquier transformación del grupo modular y sus posibles combinaciones como se muestra en la figura (A.8). Como ejemplo, consideremos la transformación modular  $\tau_3 = \tau/(1 - \tau)$ , que puede verse como la composición de las siguientes:

$$\tau_3 = -1/\tau_2, \quad \tau_2 = 1 + \tau_1, \quad \tau_1 = -1/\tau. \quad (\text{A.39})$$

Realizando las transformaciones comenzando por la primera se encuentra que [112]

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(z, m_3) = k \operatorname{sn}(z/m, m), \\ \operatorname{cn}(z, m_3) = \operatorname{dn}(z/m, m), \\ \operatorname{dn}(z, m_3) = \operatorname{cn}(z/m, m). \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Interesantes son las llamadas transformaciones de Landen [65] (pag. 96)

$$\begin{cases} \operatorname{dn} \left[ (1 + m_c)z, \left( \frac{1 - m_c}{1 + m_c} \right)^2 \right] = \frac{1 - (1 - m_c) \operatorname{sn}^2(z, m)}{\operatorname{dn}(z, m)}, \\ \operatorname{cn} \left[ (1 + m_c)z, \left( \frac{1 - m_c}{1 + m_c} \right)^2 \right] = \frac{1 - (1 + m_c) \operatorname{sn}^2(z, m)}{\operatorname{dn}(z, m)}, \\ \operatorname{sn} \left[ (1 + m_c)z, \left( \frac{1 - m_c}{1 + m_c} \right)^2 \right] = \frac{(1 + m_c) \operatorname{sn}(z, m) \operatorname{cn}(z, m)}{\operatorname{dn}(z, m)}, \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

con  $m_c \equiv \sqrt{1 - m^2}$ . Estas relaciones ya no son lineales (y por lo tanto no pueden ser generadas bajo combinaciones de generadores  $S$  y  $T$  del grupo lineal  $SL(2, \mathbb{Z})$ ). Sin embargo, en [94; 95], se estudian soluciones elípticas relacionadas bajo estos tipos de transformaciones en ecuaciones de Korteweg–de Vries y la teoría de campo  $\lambda\phi^4$ .

## Apéndice B

# Soluciones explícitas de la ecuación de Euler

Las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido asimétrico con momentos principales de inercia  $I_1 > I_2 > I_3$  son [61]

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

con velocidad angular<sup>1</sup>  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{1} + \omega_2 \hat{2} + \omega_3 \hat{3}$ . La conservación de la energía cinética y el momento angular nos permiten definir

$$\kappa = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \equiv \frac{1}{2} I_0^2 \Omega_0^2, \quad (\text{B.2})$$

$$l^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \equiv I_0^2 \Omega_0^2,$$

por lo cual  $I_0 \equiv l^2/2\kappa$  y  $\Omega_0 \equiv 2\kappa/l$ . Con estas definiciones podemos introducir los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau) &= -\sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_3)}{I_1(I_1 - I_3)}} \Omega_0 \sqrt{1 - y^2(\tau)} \equiv -\Omega_1(I_0) \sqrt{1 - y^2(\tau)}, \\ \omega_2(\tau) &= \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_3)}{I_2(I_2 - I_3)}} \Omega_0 y(\tau) \equiv \Omega_2(I_0) y(\tau), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\omega_3(\tau) = \sqrt{\frac{I_0(I_1 - I_0)}{I_3(I_1 - I_3)}} \Omega_0 \sqrt{1 - m^2 y^2(\tau)} \equiv \Omega_3(I_0) \sqrt{1 - m^2 y^2(\tau)},$$

donde  $\tau = [(I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3/I_2\Omega_2] t$  es el tiempo adimensional y

$$m^2(I_0) \equiv \frac{(I_0 - I_3)(I_1 - I_2)}{(I_2 - I_3)(I_1 - I_0)}. \quad (\text{B.4})$$

Requiriendo que el módulo  $m^2$  sea positivo,  $I_0$  debe satisfacer  $I_3 < I_0 < I_1$  que implica  $0 \leq m^2 \leq 1$  para  $I_3 \leq I_0 \leq I_2$  y  $m^2 > 1$  para  $I_2 < I_0 < I_1$ . Nótese que  $m^2 \rightarrow \infty$  cuando  $I_0 \rightarrow I_1$ .

Al sustituir  $\omega_2 = \Omega_2(I_0)y(\tau)$  en las ecuaciones de Euler (B.1) obtenemos la ecuación diferencial de Jacobi (A.5) que al integrar bajo las condiciones iniciales  $(\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0)) = (-\Omega_1, 0, \Omega_3)$  se obtiene [60]

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-\Omega_1 \text{cn}(\tau, m), \Omega_2 \text{sn}(\tau, m), \Omega_3 \text{dn}(\tau, m)). \quad (\text{B.5})$$

<sup>1</sup>Descompuesto a lo largo de los ejes principales de inercia.

La solución separatriz ( $m^2 = 1$ ) corresponde a  $I_0 = I_2$ , es decir,  $\Omega_2 \equiv \Omega_0$ . La solución separatriz será

$$\begin{aligned}\omega_1(\tau) &= -\sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_3)}{I_1(I_1 - I_3)}}\Omega_0\tau, \\ \omega_2(\tau) &= \Omega_0 \tanh \tau, \\ \omega_3(\tau) &= \sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_1 - I_3)}}\Omega_0\tau.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Finalmente, el cuerpo simétrico ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) corresponde al límite  $m^2 = 0$  ( $\Omega_2 = \Omega_3$ ). Soluciones Jacobianas en este caso son  $(\omega_{i=1,2,3}) = (-\Omega_1 \cos \tau, \Omega_1 \sin \tau, \Omega_3)$ , donde se han usado las identidades (A.12) y  $\tau = (1 - I_3/I_1)\Omega_3 t$ .

# Apéndice C

## El Péndulo

### C.1. El péndulo y las funciones Elípticas

La función seno y coseno son analíticas en todo el plano complejo y periódicas en una dirección. Es natural preguntarse si existen funciones que sean periódicas en dos direcciones en la variedad  $\mathbb{C}$ . Tales funciones no podrían ser analíticas en todo el plano complejo, es decir debe contener polos ya que, de otra manera estarían acotadas. La propiedad meromorfa debe cumplirse excepto en polos que forman una *red* en el plano  $\mathbb{C}$ . Tales funciones reciben el nombre de *elípticas* y algunos ejemplos de ellas se han discutido en estos apéndices. En vista de que una red en el plano tiene topología de un toro  $\mathbb{T}$ , podemos imaginar a la función elíptica como un mapeo del toro a la esfera de Riemann.

Jacobi, Weierstras y otros matemáticos estudiaron estas funciones en el siglo XVII y poseen varias aplicaciones en teoría de números que condujo a resultados profundos como la demostración del último teorema de Fermat (realizada por Wiles). En Física, la aplicación más simple es en el sistema del péndulo plano.

El péndulo plano consiste en una partícula de masa  $M$  constreñida a moverse en un círculo de radio  $r$  en el plano  $xz$  debido a que está atada a una cuerda (considerada inextensible y sin masa). La posición del

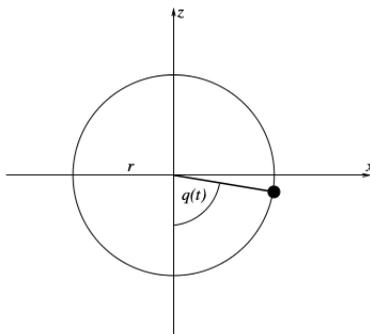


Figura C.1: Potencial para el péndulo con variable real (imaginaria) en color azul (rojo).

péndulo es una función

$$q : \mathbb{R} \mapsto S^1$$

Concretamente, consideramos  $q(t)$  como el ángulo medido contra reloj respecto al eje  $z$ . Sin embargo, podemos tratar este ángulo como un número real siempre que tengamos en mente que dos ángulos describen la misma posición de la partícula cuando difieren en fase por un múltiplo entero de  $2\pi$ . Solo entonces,  $q(t)$  es un número real que pertenece no a  $\mathbb{R}$  sino al grupo cociente  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , que es una manera de pensar en el círculo  $S^1$ .

En vista de que la posición del péndulo al tiempo  $t$  es  $q(t) \in S^1$ , se sigue que  $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}S^1$ . Análogamente, el momento lineal  $p(t) \in T_{q(t)}^*S^1$ . El estado mecánico del péndulo está descrito por un punto  $(q(t), p(t)) \in T^*S^1$ . A su vez, es posible considerar la derivada temporal de un ángulo como un número real usando el isomorfismo  $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  y por tanto  $T_{q(t)}S^1 \cong \mathbb{R} \cong T_{q(t)}^*S^1$ . Obtenemos por tanto

$$T^*S^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$$

y el punto  $(q(t), p(t))$  pertenece a  $S^1 \times \mathbb{R}$  [51].

## C.2. Integral elíptica en formalismo hamiltoniano

Considerando la función *energía cinética*  $K(\dot{q}) = \frac{1}{2}Mr^2\dot{q}^2$  y la función *energía potencial*  $V(q) = -MG \cos q$ , podemos construir el hamiltoniano del sistema  $H: T^*S^1 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2Mr^2} - MG \cos q. \quad (\text{C.1})$$

En el formalismo hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{Mr^2} \\ \dot{p} &= -MG \sin q, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

y por tanto  $\ddot{q} = -\frac{G}{r^2} \sin q$ , donde  $\dot{q}$  y  $p = Mr^2\dot{q}$  son la velocidad angular y momento angular respectivamente. En el regimen de pequeñas oscilaciones, suele usarse la aproximación  $\sin q \simeq q$  para obtener el *oscilador armónico*  $\ddot{q} = -(G/r^2)q$ . Sin embargo, cuando el ángulo es grande, el péndulo se comporta muy diferente al oscilador armónico. Comenzando en  $q = \pi, p = 0$  al tiempo  $t = 0$  el péndulo se mantiene en equilibrio inestable en el punto más alto del círculo. Como el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo,

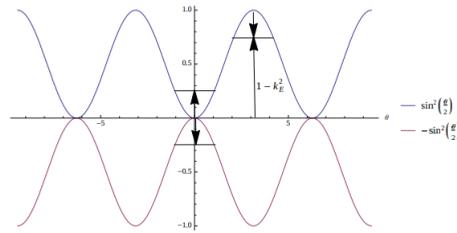


Figura C.2: Potencial para el péndulo con variable real (imaginaria) en color azul (rojo).

representa la energía del sistema. A un valor dado  $E \in \mathbb{R}$ , podemos resolver para  $\dot{q}$  para obtener

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{Mr^2} (E + MG \cos q)}, \quad (\text{C.3})$$

concentrandonos en las variables dinámicas, consideremos  $Mr^2 = MG = 1$ . La expresión (C.3) tiene cuadratura

$$t = \int \frac{dq}{\sqrt{2(E + \cos q)}}. \quad (\text{C.4})$$

La integral no puede resolverse usando antiderivadas elementales y constituye la llamada *integral elíptica*. Para mostrarla en la forma de Jacobi, consideremos la transformación

$$x = \sqrt{\frac{2}{E+1}} \sin(q/2), \quad m^2 = \frac{E+1}{2}. \quad (\text{C.5})$$

La derivada temporal respecto de  $x$  es

$$\dot{x} = \sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}, \quad (\text{C.6})$$

y el tiempo en (C.4) resulta

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}. \quad (\text{C.7})$$

llamada *integral elíptica de Jacobi de primera clase*. La solución  $x(t)$  representa entonces la *función elíptica*.

### C.3. Integral elíptica en formalismo lagrangiano

La función Lagrangiana para este sistema es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}Mr^2\dot{q}^2 - MGr(1 - \cos q), \quad (\text{C.8})$$

Tomando el cero de potencial en la posición vertical mínima para el cual  $q = 2\pi n \in \mathbb{Z}$ , la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\ddot{q} + \frac{G}{r} \sin q = 0. \quad (\text{C.9})$$

Integrando una vez obtenemos una ecuación diferencial de primer orden que físicamente representa la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}Mr^2\dot{q}^2 + MGr(1 - \cos q). \quad (\text{C.10})$$

Soluciones físicas ocurren sólo si  $E \geq 0$ . Podemos reescribir esta ecuación en forma adimensional en términos del parámetro adimensional de energía  $k_E^2 \equiv \frac{E}{MGr}$  y el tiempo adimensional  $x \equiv \sqrt{\frac{G}{r}}t = \omega_0 t \in \mathbb{R}$ ,

$$k_E^2 = \frac{r}{2g}\dot{q}^2 + (1 - \cos q). \quad (\text{C.11})$$

Reescribiendo esta última usando identidad trigonométrica, tenemos

$$k_E^2\omega_0^2 = 2\omega_0^2(\phi' + \sin^2 \phi). \quad (\text{C.12})$$

En cuadratura, la integral involucrada es

$$x(\phi) \equiv \omega_0 t(\phi) = \pm \int_0^\phi \frac{du}{\sqrt{k_E^2/2 - \sin^2 u}}, \quad (\text{C.13})$$

donde consideramos  $x(0) = 0$ . Se ha definido a su vez  $\phi \equiv q/2$ . El signo positivo (negativo) se toma al considerar el movimiento en sentido antihorario (horario).

## C.4. Soluciones reales para el péndulo

La ecuación (C.12) representa una elipse en el espacio fase  $(\phi, \dot{\phi})$  parametrizado por el valor de la energía adimensional  $k_E^2$ . Estudiemos los casos por separado.

- **I.**  $0 < k_E^2 < 2$ . De la ecuación (C.12),  $\dot{\phi}$  se anula a lo largo de la trayectoria de la partícula en los puntos de retorno. Este régimen es de oscilación. Si definimos  $k_E^2 = 2 \sin^2 \alpha$  y  $\sin \phi = \sin \alpha \sin \xi$ , la integral resulta

$$x(\phi) = \int_0^{\arcsin(m^{-1/2} \sin \phi)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \xi}} = \operatorname{sn}^{-1}(m^{-1/2} \sin \phi, m), \quad (\text{C.14})$$

siendo el módulo  $m^2 \equiv \sin^2 \alpha = k_E^2/2$ . Las soluciones en este caso están dadas por funciones elípticas de Jacobi

$$\sin \phi(x) = \operatorname{msn}(x, m). \quad (\text{C.15})$$

- **II.**  $k_E^2 > 2$ . En este caso  $\dot{\phi} \neq 0$ , representa movimiento rotatorio. La energía es suficiente para que la partícula alcance el punto más alto de su trayectoria y rote sin cesar. Para este caso, tenemos  $m^{-2} = 2/k_E^2 < 1$ , por tanto

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{k_E^2}} \int_0^\psi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}} \equiv m^{-1} \operatorname{sn}^{-1}(\sin \psi, m^{-1}). \quad (\text{C.16})$$

En este caso las soluciones están determinadas por la función elíptica de Jacobi

$$\sin \phi(x) = \operatorname{sn}(m^{1/2} x, m^{-1}), \quad (\text{C.17})$$

## C.5. Rotación de Wick e inversión de fuerzas

Se ha mencionado que las funciones elípticas de Jacobi están definidas en todo el plano complejo y poseen dos periodos. En el sistema del péndulo, cuyas soluciones deben permanecer reales, cabe preguntarse si existe alguna propiedad con interpretación física en la extensión a valores complejos de la función de Jacobi. En efecto, la hay.

El remplazo  $t \mapsto it$ , comúnmente llamada *rotación de Wick* es equivalente a revertir el signo de todas las fuerzas. En este sentido, el péndulo da una explicación física del hecho de que las funciones elípticas son periódicas en dos direcciones del plano complejo.

Considerando el cambio en el campo gravitatorio  $g \mapsto -g$ , el potencial se invierte (reflexión respecto al eje horizontal), véase (C.2). La ecuación de movimiento es ahora

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} - \frac{g}{r} \sin q = 0 \quad (\text{C.18})$$

donde se ha considerado la rotación  $\tau \equiv \pm it$ . Para escribir la ecuación sin dimensiones, es útil el cambio  $y \equiv \tau \sqrt{g/r} = \pm ix$ . La primera integral de movimiento (análoga a C.12) es

$$\frac{1}{4} \left( \frac{dq}{dy} \right)^2 - \sin^2 \left( \frac{q}{2} \right) = E', \quad (\text{C.19})$$

Que es la ecuación con potencial invertido que mantiene la invariancia de la segunda ley de Newton.

### C.5.1. Soluciones imaginarias

Para resolver la ecuación (C.19) en términos del tiempo imaginario, es útil reescribir tal ecuación para que tenga perfil similar a (C.12) que ya ha sido resuelta en la sección anterior. Para ello desplazemos el potencial asociado al sistema una unidad tal que su mínimo sea cero (ver figura C.2). Luego añadimos una unidad en ambos lados de (C.19) para obtener

$$\frac{1}{4} \left( \frac{dq}{dy} \right)^2 + \cos^2 \left( \frac{q}{2} \right) = 1 - k_E^2. \quad (\text{C.20})$$

Traslademos ahora el potencial para que coincida con el potencial asociado a las soluciones reales. Esto se logra mediante una traslación por un valor  $\pi/2$  hacia la derecha en la coordenada generalizada  $q$ . Es decir  $q' = q - \pi$ , con lo cual

$$\frac{1}{4} \left( \frac{dq'}{dy} \right)^2 + \sin^2 \left( \frac{q'}{2} \right) = 1 - k_E^2. \quad (\text{C.21})$$

Esta ecuación tiene solución formal

$$\sin \left( \frac{q'}{2} \right) = \pm \sqrt{1 - k_E^2} \operatorname{sn} \left( y - \tilde{y}, \sqrt{1 - k_E^2} \right). \quad (\text{C.22})$$

En términos de la coordenada original  $q(x)$ , obtenemos

$$q(x) = \pm 2 \operatorname{sgn} \left[ \sqrt{1 - k_E^2} \operatorname{sn} \left( t - \tilde{y}, \sqrt{1 - k_E^2} \right) \times \arcsin \left( \operatorname{dn} \left( y - \tilde{y}, \sqrt{1 - k_E^2} \right) \right) \right]. \quad (\text{C.23})$$

Se ha asumido que la identidad  $k_E^2 \operatorname{sn}^2(x, k_E) + \operatorname{dn}^2(x, k_E) = 1$  es válida para todos los valores de la *energía*  $k_E^2 \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  o bien,  $1 - k_E^2 \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ . A su vez, se debe recalcar que  $1 - k_E^2$  ya no puede ser interpretada como parámetro de energía ya que  $\tilde{y} \in \mathbb{C}$  no es necesariamente un número imaginario puro ya que la integración en el plano complejo requiere de elegir contornos adecuados en orden de tratar los polos de las funciones de Jacobi.

# Agradecimientos

*Anábasis del cuerpo rígido* es la culminación de una serie de momentos de inercia en mi lucha por suscribir el apotegma: *estudiar para hacerle frente a la vida*, ideología con la que crecí, privilegiado en todo momento.

Y a mitad del camino de mi vida, encontrándome en una selva negra, parte generada por mi, parte impuesta y sin entender aún lo venidero, celebro esta página con aquellos que me acompañaron. Dedico esta tesis, principalmente a dos mujeres: una me dio la vida; otra me la cambió para siempre. A mi madre, María Guadalupe López Negrete, por su inagotable voluntad de vivir para sus hijos y su trabajo. En tiempos de Covid-19 en donde terminé esta tesis, su ayuda fue absoluta. En algún modo, yo sólo me senté a hacer ecuaciones bonitas en medio de la soledad y aislamiento que siempre me acompañó mientras ella, se encargó de mi subsistencia y existencia. A Marianita de la Cruz Espino, que con su luz nos iluminó a todos, en particular, impulsó mi deseo de ser mejor persona.

Para ellas, de aquí... a la eternidad.

Gracias sempiternas a mi padre y ejemplo, José Manuel de la Cruz Jasso y la hermosa familia que lo acompaña: Margarita; la mujer más inteligente que conozco, Cecilia; que me enseña sobre lo bello y sublime, José María y Adolfo Sánchez de la Cruz. Patricia de la Cruz; que siempre me alimentó de cariño y comida, Mercedes Andrea de la Cruz; un orgullo profesional e inspiración. A Josefina Jasso, Elva Negrete Martínez y Manuel de la Cruz, mis abuelos que están en la otra vida pero conservo su esencia en mi mente, José María, Salvador y Mariano de la Cruz. A Natalia, Regina y Sebastián. Gracias a todos por creer en mi.

Diego de la Cruz, que este trabajo sea una humilde inspiración, una vela, en tu camino hacia el conocimiento cuyo límite, solo tú conoces.

A mis colegas científicos Emilio de la Cruz y Gabriela Espino, que alimentan mi espíritu de biólogo de closet. Para mi amigo y el mejor físico del mundo, Andrés Luna Godoy, del que más aprendí. A su familia maravillosa.

Mi tutor y colega de muchos años, Román Linares, inspiración profesional, gracias por tus consejos.

Para ustedes amigos: María, Jessica y su hermosa familia; Fernando, Tenoch, Gibrán, Naim, Emil y familia Mubárqui Guevara; Fabian Zeller, Eréndida, Daniel, Melina, Claudia, Melissa, Abigail, Sergio, Brisa, Axel y muchos más. Gracias por el tiempo, cariño y aprendizaje que me dieron, las veladas llenas de risas enriquecedoras y momentos de felicidad.

Al colectivo *meza* de café zapatista UAMI y sus miembros por permitirme colaborar en la lucha por un mundo donde quepan muchos mundos.

A Ana Denhi Martínez Farfán cuyo feliz paso por su vida me definió como hombre, ser humano y científico. A su entrañable familia.

Al sistema de becas de la Universidad Autónoma Metropolitana, posgrado en Física. Este trabajo culmina con el apoyo económico que me otorgó.

A la Universidad Autónoma Metropolitana, mi alma mater. Al maravilloso pueblo del que soy parte, a México.

Deseando que al abrir los párpados, vea un mundo creado por mi y apoyado de sus miradas,

Manuel de la Cruz López

Agosto 2020.

# Bibliografía

- [1] Abel, N. C., Recherches sur les fonctions élliptiques, *Journ. fur Math.*, 1827, vol. 2, pp. 101–181.
- [2] Jacobi, C. G. J., Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis, *Astronomische Nachrichten*, 1827, vol. 6, no. 10, pp. 133–141.
- [3] Jacobi, C. G. J., *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Sumtibus Fratrum, 1829.
- [4] Condon, E. U., The Physical Pendulum in Quantum Mechanics, *Phys. Rev.*, 1928, vol. 31, no. 5, pp. 891–894.
- [5] Pradhan, T. and Khare. A. V., Plane Pendulum in Quantum Mechanics, *Am. J. of Phys.*, 1973, vol. 41, no. 1, pp. 59–66.
- [6] Aldrovandi, R. and Leal Ferreira. P., Quantum pendulum, *Am. J. of Phys.*, 1980, vol. 48, no. 8, pp. 660–664.
- [7] Euler, L., Du mouvement de rotation des corps solides autour d'eun axe variable, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 1758, vol. 14, pp. 154–193.
- [8] Poinsot, L., *Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, Bachelier, Paris, 1834.
- [9] Kramers, H. A. and Ittmann, G. P., Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels, *Zs. f. Phys.*, 1929, vol. 53, pp. 553.
- [10] King, G. W., The Asymmetric Rotor. VI. Calculation of Higher Energy Levels by Means of the Correspondence Principle, *J. Chem. Phys.*, 1947, vol. 15, no. 11, pp. 820–830.
- [11] Spence, R. D., Angular Momentum in sphero-conal coordinates, *Am. J. Phys.*, 1959, vol. 27, pp. 329–335.
- [12] I. Lukac, A. Smorodinskii. The wave functions of an asymmetric top, *Soviet Phys. JETP*, 1970, vol. 30, pp. 728–730.
- [13] I. Lukacs. *A complete set of quantum mechanical observables on a two dimensional sphere*. Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, vol 14, No 3 (1973), p 366-380.
- [14] I. Lukac. *Complete sets of observables on the sphere in four-dimensional Euclidean space*. Theor.Math.Phys. 31 (1977).
- [15] Patera, J. and Winternitz, P., A new basis for the representation of the rotation group. Lamé and Heun Polinomials, *J. of Math. Phys.*, 1973, vol. 14, pp. 1130.
- [16] Piña, E., Some properties of the spectra of asymmetric molecules, *Teochem*, 1999, vol. 493, pp. 159–170.
- [17] Valdés, M. T., and Piña, E, The rotational spectra of the most asymmetric molecules, *Rev. Mex. Fis*, 2006, vol. 52, pp. 220–229.
- [18] Méndez-Fragoso, R., and Ley-Koo, E., Rotations of Asymmetric Molecules and the Hydrogen Atom, *Adv. Quantum Chem.*, 2011, vol. 62, pp. 137–213.
- [19] R. Méndez-Fragoso, E. Ley-Koo, in: J.R. Sabin, R. Cabrera-Trujillo (Eds.), Concepts of Mathematical Physics in Chemistry: A Tribute to Frank E. Harris — Part A, in: *Advances in Quantum Chemistry*, vol. 71, Academic Press, 2015, pp. 115–152.

- [20] Nambu, Y., Generalized Hamiltonian dynamics, *Phys. Rev. D*, 1973, vol. 7, pp. 2405–2412. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.7.2405>.
- [21] R. Montgomery. *How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century*, *Am. J. of Phys.*, 1991, vol. 59, pp. 394–398.
- [22] Deprit A., Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane, *Am. J. Phys.*, 1967, vol. 35, no. 5, pp. 424–428.
- [23] Holm, D.D., and Marsden, J.E, The Rotor and the Pendulum, *Symplectic geometry and mathematical physics, Progr. Math.*, 99, Birkhauser Boston, Boston, MA.1991, pp. 189–203.
- [24] L. Van Damme, D. Leiner, P. Mardešić, S. J. Glase D. Sugny. *Linking the rotation of a rigid body to the Schrödinger equation: The quantum tennis racket effect and beyond*. <https://www.nature.com/articles/s41598-017-04174-x>.
- [25] L. Van Damme, D. Leiner, P. Mardešić, S. J. Glase D. Sugny. *Supplementary material of the paper: Linking the rotation of a rigid body to the Schrodinger equation: The quantum tennis racket effect and beyond*. [file:///home/manuel/Descargas/41598\\_2017\\_4174\\_MOESM1\\_ESM.pdf](file:///home/manuel/Descargas/41598_2017_4174_MOESM1_ESM.pdf).
- [26] Iwai, T., and Tarama, D., Classical and quantum dynamics for an extended free rigid body , *Differential Geometry and its Applications*, 2010, vol. 28, no. 5, pp. 501–517.
- [27] de la Cruz, M., Gaspar, N., Jiménez-Lara, L., and Linares, R., Classification of the classical  $SL(2, \mathbb{R})$  gauge transformations in the rigid body, *Annals Phys.*, 2017, vol. 379, pp. 112–130.
- [28] Linares, R., Duality symmetries behind solutions of the classical simple pendulum, *Rev. Mex. Fís. E*, 2018, vol. 64, pp. 205–221.
- [29] T. Curtright, C.K. Zachos, AIP Conf. Proc. 672 (2003) 165–182. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1594404>.
- [30] T. Curtright, C.K. Zachos, Phys. Rev. D 68 (2003) 085001. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.68.085001>.
- [31] L. Takhtajan, Comm. Math. Phys. 160 (1994) 295–316. <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02103278>.
- [32] P.-M. Ho, Y. Matsuo, Nambu Memorial Symposium, Vol. 2016, Osaka, Japan, September 29, 2015, 2016, p. 06A104. arXiv:1603.09534.
- [33] L. Bianchi, Gen. Relativity Gravitation 33 (12) (2001) 2171–2253.
- [34] E. Ley-Koo, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 597, IOP Publishing, 2015, 012055.
- [35] H. Awata, M. Li, D. Minic, T. Yoneya, J. On the quantization of Nambu brackets. High Energy Phys. 02 (2001) 013. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1126-6708/2001/02/013>.
- [36] D. Minic. M-theory and Deformation Quantization arXiv:hep-th/9909022.
- [37] D. Minic, H.C. Tze, Phys. Lett. B 536 (2002) 305–314.
- [38] D. Minic. Nambu quantum mechanics: a nonlinear generalization of geometric quantum mechanics. Physics Letters B Volume 536, Issues 3–4, 6 June 2002.
- [39] T. Yoneya. Generalized Hamilton–Jacobi theory of Nambu mechanics. Progress of Theoretical and Experimental Physics, Volume 2017, Issue 2, February 2017, 023A01, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptx008>
- [40] T. Yoneya. Lectures on Higher-Gauge Symmetries from Nambu Brackets and Covariantized M(atrix) Theory. <https://arxiv.org/abs/1612.08513>.

- [41] P.-M. Ho, Y. Matsuo, Nambu Memorial Symposium, Vol. 2016, Osaka, Japan, September 29, 2015, 2016, p. 06A104
- [42] I. Naruki, D. Tarama, *Differential Geom. Appl.* 29 (Supplement 1) (2011) S170–S182.
- [43] D. Tong. *Lectures Notes on Classical Mechanics*. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html>
- [44] D. Tong. *Lectures notes on the Quantum Hall Effect*. <https://arxiv.org/abs/1606.06687v2>.
- [45] A.M Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer: Interdisciplinary Applied Mathematics v24, U.S.A, 2003.
- [46] G. W. Gibbons. *Applications of Differential Geometry to Physics*, Cambridge, U.K, 2006. [http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/members/gibbons/gwgPartIII\\_DGeometry2011-1.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/members/gibbons/gwgPartIII_DGeometry2011-1.pdf).
- [47] D. Holm. *Geometric Mechanics II*, orld Scientific: Imperial College Press, Singapore, 2011.
- [48] D. Holm, T. Schmah, C. Stoica. *Geometric Mechanics and Symmetry*. Oxford University Press. 2009.
- [49] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, second edition. Springer, (1993).
- [50] Abraham, Ralph, Marsden, J.E., Ratiu, Tudor. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer (1988).
- [51] John. Baez, Derek K. Wise. *Lecture notes on Classical Mechanics*. <http://math.ucr.edu/home/baez/classical/>.
- [52] L. Takhtajan, *Comm. Math. Phys.* 160 (1994) 295–316
- [53] de la Cruz M., Gaspar N., Linares R., The Extended Rigid Body and the Pendulum Revisited, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2020, Vol. 16, no. 1, pp. 133-159 DOI:10.20537/nd200111.
- [54] I. Naruki, D. Tarama, *Differential Geom. Appl.* 29 (Supplement 1) (2011) S170–S182.
- [55] J. Marsden, T. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, second edition, Springer (2002).
- [56] D.D. Holm, J.E. Marsden, In Honor of J.-M. Souriau, 1991, pp. 1–15.
- [57] E. Piña, *Dinámica de Rotaciones*, Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1996.
- [58] E. Ley-Koo, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 597, IOP Publishing, 2015, 012055.
- [59] F. Reiche, *Phys. Z.* 19 (1918) 394–399.
- [60] A.J. Brizard, *Eur. J. Phys.* 30 (4) (2009) 729. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/30/4/007>.
- [61] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Mechanics*, in: *Course of Theoretical Physics*, vol. 1, Pergamon Press, 1956.
- [62] E. Piña, *Rev. Mex. Fís.* 43 (1997) 205–218.
- [63] E. Piña, *Rev. Mex. Fís. E* 54 (2008) 92–103.
- [64] E. Piña. A new parametrization of the rotation matrix. *American Journal of Physics* 51, 375 (1983).
- [65] N. I. Akhiezer. *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, American Mathematical Society, 1990.
- [66] M. Sugiura, *Unitary Representations and Harmonic Analysis: An Introduction*, 1990.
- [67] A.J. Brizard, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18 (3) (2013) 511–518

- [68] David, D., Holm, D.D. Multiple lie-poisson structures, reductions, and geometric phases for the Maxwell-Bloch travelling wave equations. *J Nonlinear Sci* 2, 241–262 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF02429857>
- [69] T.P. Orlando. *Lecture notes on Two-Level System with Static and Dynamic Coupling*. Department of Electrical Engineering and Computer Science Massachusetts Institute of Technology, 2004. <https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-728-applied-quantum-and-statistical-physics-fall-2006/study-materials/twolevel04.pdf>.
- [70] M. P. A. Jones. *Atom Light Interactions lecture notes*. <http://atomchip.org/wp-content/uploads/2010/10/AtomLight.pdf>.
- [71] R. Loudon. *The Quantum Theory of light*. ISBN-13: 9780198501763. OXFORD. Septiembre 2000.
- [72] J.Marsden. *Estabilization of rigid body dynamics by the energy-camsimir method*. *Systems Control Letters* Volume 14, Issue 4, Abril 1990.
- [73] F. T. Hioe. *Solution of Bloch equations involving amplitude and frequency modulations*. *Phys. Rev. A* 30, 2100. 1984
- [74] Biggs, R., Remsing, C.C. Quadratic Hamilton–Poisson Systems in Three Dimensions: Equivalence, Stability, and Integration. *Acta Appl Math* 148, 1–59 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10440-016-0074-1>.
- [75] Camille Laurent-Gengoux. *Poisson structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [76] Shuang Cong. *Control of quantum systems. Theory and Methods*. Wiley 2014.
- [77] H.P Breuer, F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford 2003
- [78] M. Puta, I. Casu. *Geometrical aspects in the Rigid Body dynamics with three quadratic controls*. Proceedings of the International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Ivailo M. Mladenov and Gregory L. Naber, eds. (Sofia: Coral Press Scientific Publishing, 2000), 209 - 224.
- [79] M. Puta. *Maxwell-Bloch equations with cuadratic feedbacks*. Second International Conference on Geometry, Integrability and Quantization June 7–15, 2000, Varna, Bulgaria.
- [80] M. Irrañea, et. Al. *Chaotic Rotations of an Asymmetric Body with Time-Dependent Moments of Inertia and Viscous Drag*. *International Journal of Bifurcation and Chaos* Vol. 13, No. 02, pp. 393-409 (2003).
- [81] M. Lapert, E. Assémat, S. J. Glaser, and D. Sugny. Understanding the global structure of two-level quantum systems with relaxation: Vector fields organized through the magic plane and the steady-state ellipsoid. *Phys. Rev. A* 88, 033407, 2013.
- [82] M. Puta. *Three dimensional real-valued Maxwell-Block Equations with controls*. *Reports on Mathematical Physics* Volume 37, Issue 3, June 1996, Pages 337-348.
- [83] J. Marsden, T. Rathi. *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*. Festschrift in Honor of Alan Weinstein. Birkhäuser Science, 2005.
- [84] A. J. Brizard, *A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics*, arXiv:0711.4064 [physics.class-ph].
- [85] M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, New York, USA. Dover Publications Inc. Chapter 18.
- [86] A. G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions*. Dover Publications Inc (1972).
- [87] P. Appell, E. Lacour, *Principles de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, 1897.
- [88] C.P Burgess, B. Dolan. *Particle-Vortex Duality and the Modular Group: Applications to the Quantum Hall Effect and Other 2-D Systems*, *Phys.Rev.B*63:155309,2001, hep-th/0010246.

- [89] G. V. Kraniotis, S.B. Whitehouse . *General Relativity, the Cosmological Constant and Modular Forms*, Class.Quant.Grav.19:5073-5100 (2002), gr-qc/0105022.
- [90] Elcio Abdalla, L. Alejandro Correa-Borbonet. *The Elliptic Solutions to the Friedmann equation and the Verlinde's Maps*, hep-th/0212205.
- [91] Y. S. Myung. *Role of the cosmological constant in the holographic description of the early universe*. Phys.Lett. B578 (2004) 7-15, hep-th/0306180.
- [92] C. Grosche, Kh H Karayan, et al. *Quantum motion on the three-dimensional sphere: the ellipso-cylindrical bases*. J. Phys. A: Math. Gen. **30** 1629 (1997).
- [93] J.R Villanueva, E. Gallo. *A Jacobian elliptic single-field inflation*. Eur. Phys. J. C (2015) 75: 256, arXiv:1505.03096 [gr-qc].
- [94] A. Khare, U. Sukhatme. *Connecting Jacobi elliptic functions with different modulus parameters*. Springer (2004).
- [95] A. Khare, U. Sukhatme. *Linear Superposition in Nonlinear Equations*. Phys. Rev. Lett. **88**, (2002).
- [96] G.F. Torres del Castillo, E. Navarro Morales. *Bound states of the hydrogen atom in parabolic coordinates*. Rev. Mex. Fís. **54**, (2008).
- [97] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Realse 1.0.10 of 2015-08-07. Online companion to [OLBC10].
- [98] F. Biscani, D. Izzo. *The Stark problem in the Weierstrassian formalism*, arXiv:1306.6442 [math-ph].
- [99] M. Olivares, Y. Vásquez, J.R. Villanueva, F. Moncada. *Motion of particles on a  $z=2$  Lifshitz black hole in  $3+1$  dimensions*. Celest Mech Dyn Astr (2014), arXiv:1306.5285 [gr-qc].
- [100] Norman Cruz, Marco Olivares, J. R. Villanueva. *Geodesic Structure of Lifshitz Black Holes in  $2+1$  Dimensions*. Eur.Phys.J. C73 (2013), arXiv:1305.2133 [gr-qc].
- [101] Stefan C. Mancas, Greg Spradlin, Harihar Khanal. *Weierstrass solutions for dissipative BBM equation*. Journal of Mathematical Physics 54 (8). (2013).
- [102] P. Moon, D.E. Spencer *Field Theory Handbook*. Springer-verlag (1971).
- [103] Bruno Cordani. *The Kepler Problem, group theoretical aspects*. Progress in Mathematical Physics vol 29, (2003).
- [104] T. Eguchi, A. Hanson. *Self-Dual solutions to Euclidean Gravity*. Annals of Physics (New York), p. 82-106.
- [105] P. M. Petropoulos, P. Vanhove. *Gravity, strings, modular and quasimodular forms*, arXiv:1206.0571 [math-ph].
- [106] J. Cervero, L. Jacobs, C. Nohl. *Elliptic solutions of classical Yang-Mills Theory*. Phys. Let B **69**, (1977).
- [107] H. A. Kramers, G. H. Wannier. *Statistics of the two-dimensional ferromagnet*. Phys. Rev. 60 (1941) 252.
- [108] A. Neumaier, D. Westra. *Classical and Quantum Mechanics via Lie algebras*, arXiv:0810.1019 [quant-ph].
- [109] R. Askey, T.H. Kornwinder, W. Schempp. *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications*. Reidel Publishing Company, (1984).
- [110] N. Vilenkin, A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions*. Kluwer Academic Publishers, (1995).
- [111] J. V. Armitage, W.F. Eberlein. *Elliptic Functions*. Cambridge University Press, (2006).
- [112] D. Lawden. *Elliptic Functions and Applications*. Applied Mathematicas Sciences 80. Springer, (1989).

- [113] Appell, P., Sur une interpretation des valeurs imaginaires du temps en Mecanique, Comptes Rendus Hebdomadaires des Sceances de l'Academie des Sciences, 1878, vol. 87.
- [114] M. Eichler, D. Zaiger. *On the Zeros of the Weierstrass P-funcion*. Math. Ann **258**, (1982).
- [115] T. Inami, H. Konno. *Integrable XYZ spin chain with boundaries*. J. Phys. A: Math. Gen. 27 L913 (1994).
- [116] M. B. Fogel, S. E. Trullinger, et al. *Classical Particlelike Behavior of Sine-Gordon Solitons in Scattering Potentials and Applied Fields*. Phys. Rev. Lett. **36**, (1976).
- [117] Kazushige Machida, Hiizu Nakanishi. *Superconductivity under a ferromagnetic molecular field*. Phys. Rev. B **30**, (1984).
- [118] Zeid I. A. Al-Muhammed, E. Abdel-Salam. *Generalized Jacobi Elliptic Function Solution to a Class of Nonlinear Schrödinger-Type Equations*. Mathematical Problems in Engineering vol 2011, (2010).
- [119] Kengo Maeda, Makoto Natsuume, Takashi Okamura. *Vortex lattice for a holographic superconductor*. Phys. Rev. D **81**, (2010).
- [120] G. Horowitz, J. Santos, D. Tong. *Optical Conductivity with Holographic Lattices*, arXiv:1204.0519 [hep-th].
- [121] S. Soroushfar, R. Saffari, J. Kunz, C. Lämmerzahl. *Analytical solutions of the geodesic equation in the spacetime of a black hole in  $f(R)$  gravity*. Phys. Rev. D **92**, (2015).
- [122] E. T. Whittaker, E. Taylor. *A Trataise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, four edition 1917, Dover. Digitizing sponsor University of California Libraries.
- [123] R. Méndez-Fragoso, E. Ley-Koo. *Lamé Spheroconal Harmonics in Atoms and Molecules*. International Journal of Quantum Chemistry, vol 110, (2010).
- [124] L. Onsager. *Crystal statistics I: A two-dimensional model with an order-disorder transition*. Phys. Rev. 65 (1944)117.
- [125] S. Gelbart. *An elementary introduction to the Langlands program*. Bull. Amer. Math. Soc, Volume 10 (2), (1984).
- [126] P. Meessen, T. Ortin. *An  $Sl(2, Z)$  Multiplet of Nine-Dimensional Type II Supergravity Theories*, Nucl.Phys. B541 (1999).
- [127] A. W. Knap. *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhauser, second edition (2002). p 360.
- [128] C. Bender, D. Holm, D. Hook. *Complexified Dynamical Systems*.
- [129] R. Gilmore, *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, 2008.
- [130] A.J. Brizard, Eur. J. Phys. 30 (4) (2009) 729.
- [131] Lang, S., *Elliptic Functions*, Springer Verlag, 1973.
- [132] McKean, H. and Moll, V., *Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge University Press, 1999.
- [133] Beléndez, A., Pascual, C., Méndez, D.I., Beléndez, T. and Neipp, C., Exact solution for the nonlinear pendulum, *Rev. Bras. Ensino Fís.*, 2007, vol. 29, pp.645–648.
- [134] Ochs, K., A comprehensive analytical solution of the nonlinear pendulum, *Eur. J. Phys.*, 2011, vol. 32, pp. 479–490.
- [135] R. Tudoran. *On a class of three-dimensional quadratic Hamiltonian systems*, Applied Mathematics Letters Volume 25, Issue 9, September 2012. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089396591200119X?via%3Dihub>.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00053

Matrícula: 2151800754

Análisis del cuerpo rígido.



*[Handwritten signature]*  
MANUEL DE LA CRUZ LOPEZ  
ALUMNO

REVISÓ  
*[Handwritten signature]*  
MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI  
*[Handwritten signature]*  
DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 13:00 horas del día 3 del mes de septiembre del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. EDUARDO PIÑA GARZA  
DR. ADRIAN MAURICIO ESCOBAR RUIZ  
DR. RICARDO MENDEZ FRAGOSO  
DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER  
DR. ROMAN LINARES ROMERO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

DE: MANUEL DE LA CRUZ LOPEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

**APROBAR**

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

PRESIDENTE  
*[Handwritten signature]*  
DR. EDUARDO PIÑA GARZA

VOCAL  
*[Handwritten signature]*  
DR. ADRIAN MAURICIO ESCOBAR RUIZ

VOCAL  
*[Handwritten signature]*  
DR. RICARDO MENDEZ FRAGOSO

VOCAL  
*[Handwritten signature]*  
DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

SECRETARIO  
*[Handwritten signature]*  
DR. ROMAN LINARES ROMERO

El presente documento cuenta con la firma –autégrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella