



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

---

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA




NÚMERO DICROMÁTICO DE DIGRÁFICAS

TESIS QUE PRESENTA:

M. EN C. NAHID YELENE JAVIER NOL  
PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DIRECTOR DE TESIS  
DR. BERNARDO LLANO PÉREZ

SINODALES:

- DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
- DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA 
- DR. MIGUEL ÁNGEL PIZAÑA LÓPEZ 
- DR. EDUARDO RIVERA CAMPO 

CIUDAD DE MÉXICO, 1 DE FEBRERO DE 2018

Nahid Yelene Javier Nol  
Posgrado en Matemáticas  
Universidad Autónoma Metropolitana

---

# Número dicromático de digráficas

# Agradecimientos

Le doy gracias a Dios, por dejarme llegar hasta donde he llegado, pero sobre todo porque conocí a personas tan maravillosas como ustedes:

♣ Mis padres:

- ♠ Elvira gracias por pedirme implícitamente que siguiera estudiando, realmente no tengo palabras madre para agradecer todo lo que has hecho por mi, a veces me sorprendes sobre todo me sorprende tu fortaleza.
- ♠ Pedro gracias por decirme que estudiaré lo que a mi me gustará, gracias por impulsarme a salir adelante.

♣ A Fabian, mi amigo, compañero y esposo gracias por tu amistad, tolerancia, confianza, etc. Gracias a ti pude recuperar la información del capítulo 3 de mi tesis. Realmente no se que haría sin ti, ¿o a caso tú lo sabes?

♣ Mis sobrinos:

- ♠ Mirza sabes que tu fuiste un motivo para que yo me presionará y me doctorará. Gracias a tus últimos actos tenía que enfocarme en algo y fijarme una meta para no sentir tanta angustia y ya vez mi pequeña Mirza lo logré.
- ♠ Yabin gracias por ayudarme a relajarme invitandome a jugar una cascarita de basquetbol.
- ♠ Yerikov mi hijo adoptivo, gracias por tu sentido del humor, gracias por esas tazas de café que preparabas tan especialmente para mi. Gracias por tú compañía. Y no, "no conquiste al mundo", solo por fin termine la tesis de doctorado.
- ♠ Paloma y Cain gracias por hacerme compañía algunos fines de semana y vacaciones mientras yo trabajaba en la tesis ustedes me compartían su alegría y entusiasmo.

♣ Heilenn, Esau y Tabata, mis hermanos, gracias por su confianza y generosidad.

♣ Bernardo, gracias por todo el conocimiento que me brindó. Gracias por su tolerancia y paciencia. Gracias por el apoyo que me brindo para ir fortaleciendo mis conocimientos.

## AGRADECIMIENTOS

---

- ♣ Rita, gracias por brindarme tu confianza, gracias por enseñarme hacer paciente, tolerante, etc. Gracias por las oportunidades y apoyos que me brindaste. Gracias por enseñarme a fijarme nuevas metas.
- ♣ Ilán, José Luis, Julián mis compañeros de vida académica de quienes he aprendido bastantes cosas, gracias.
- ♣ Luz y Norma gracias por su apoyo.
- ♣ Gracias a Hortensia, Rita, Miguel, Eduardo por aceptar ser mis sinodales y regalarme parte de su tiempo para estar presentes en mi Disertación Pública.
- ♣ Gracias a la Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa.
- ♣ Gracias al Departamento de Matemáticas por dejarme formar parte de la planta de profesores, gracias a esto tuve algunas ventajas, además de que pude sobrevivir a la penumbra.
- ♣ Gracias al Posgrado de Matemáticas por su atracción.
- ♣ Gracias a la Escuela de Invierno de Matemáticas Discretas aprendí bastante en los cursos que se impartieron, pero sobre todo por que se hizo realidad uno de mis sueños "conocer a Richard Brualdi".
- ♣ Gracias al Seminario de Combinatoria porque medio la oportunidad de empapar-me de conocimientos e impulsarme a trabajar sobre nuevos temas.

# Índice general

Agradecimientos	I
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
<b>1. Introducción y preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes</b>	<b>13</b>
2.1. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$ . . . . .	15
2.2. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$ . . . . .	20
2.3. Número dicromático $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . . . . .	23
2.4. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ . . . . .	30
2.5. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , $k = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1, \dots, n$ . . . . .	31
2.6. El número $\xi(k)$ . . . . .	33
<b>3. Número dicromático de digráficas circulantes</b>	<b>41</b>
3.1. Número dicromático de digráficas circulantes con uno y dos saltos . . .	42
3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos . . . . .	49
3.2.1. Número dicromático de $\vec{C}_n(1, 2, n-3)$ . . . . .	50
3.2.2. Número dicromático de digráficas circulantes con saltos en pro- gresión aritmética . . . . .	52
3.2.3. Número dicromático de $\vec{C}_p(1, a, a^2)$ . . . . .	54
<b>4. Número dicromático de dos familias de gráficas circulantes planas</b>	<b>57</b>
4.1. Gráficas Mixtas con $H \in \mathfrak{N}_1$ . . . . .	63
4.2. Gráficas Mixtas con $H \in \mathfrak{N}_2$ . . . . .	65
<b>Conclusión</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>70</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>



# Índice de figuras

1.1. Diagramas de gráficas $G$ y $H$ . . . . .	2
1.2. Gráfica plana $G$ y digráfica plana $D$ . . . . .	2
1.3. Torneos $W = \vec{C}_3[K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3]$ y $W_0$ , respectivamente. . . . .	7
1.4. Torneos $W_1$ y $\vec{C}_7(1, 2, 4)$ , respectivamente. . . . .	7
1.5. Torneo transitivo $TT_n$ . . . . .	8
2.1. Torneo $\vec{C}_9\langle 2 \rangle \cong \vec{C}_3[\vec{C}_3]$ . . . . .	14
2.2. . . . .	15
2.3. $\vec{C}_3$ en $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$ y $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$ , respectivamente. . . . .	15
2.4. $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$ y partición de los vértices de $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$ en subtorneos acíclicos . . . . .	16
2.5. Partición del torneo $\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle$ . . . . .	20
2.6. Partición del torneo $\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle$ . . . . .	24
2.7. Torneo $ST_{13}$ . . . . .	25
2.8. $H, J$ y $K$ , del teorema 2.29. . . . .	32
2.9. Partición del torneo $\vec{C}_{17}\langle 3, 8 \rangle$ . . . . .	34
2.10. Partición del torneo $\vec{C}_{17}\langle 7, 8 \rangle$ . . . . .	35
2.11. Partición del torneo $\vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle$ . . . . .	36
2.12. Partición del torneo $\vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle$ . . . . .	37
2.13. $N^+(0)$ y $N^-(0)$ en $QR_{19}$ . . . . .	38
3.1. $\vec{C}_{12}(1, 3)$ . . . . .	41
3.2. $\vec{C}_{16}(2, 4)$ . . . . .	42
3.3. $\vec{C}_{16}(3, 4) \cong \vec{C}_{16}(1, 12)$ . . . . .	50
3.4. $\vec{C}_8(1, 2, 5)$ y dos subdigráficas acíclicas de $\vec{C}_8(1, 2, 5)$ . . . . .	51
3.5. $\vec{C}_{13}(1, 2, 10)$ . . . . .	53
3.6. $\vec{C}_{12}(3, 4, 5)$ y su dos partición. . . . .	53
4.1. Gráfica de Tutte. . . . .	57
4.2. Dual de la gráfica de Tutte la cual tiene arboricidad 3. . . . .	58
4.3. Gráfica plana cúbica 3-conexa no hamiltoniana de orden 38. . . . .	59
4.4. $G^*$ es el dual de $G$ de la figura 4.3, con $ G^*  = 21$ y $a(G^*) = 3$ , (gráfica de Raspaud-Wang). . . . .	60
4.5. $\vec{C}_{12}(1, 3)$ . . . . .	61

ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.6.	$\vec{C}_8(1, -2) \cong \vec{C}_8(1, 6)$ . . . . .	62
4.7.	$\vec{C}_5^P$ y $\vec{C}_5^I$ , respectivamente . . . . .	62
4.8.	$\vec{C}_{10}(1, 2)$ y $\vec{C}_{10}(1, 2) \cup G$ . . . . .	63
4.9.	$\vec{C}_{14}(1, -2) \cup G$ . . . . .	64
4.10.	Ciclos monocromáticos $\vec{C}_3$ y $\vec{C}_4$ en $H \in \mathfrak{N}_1$ . . . . .	65
4.11.	$\vec{C}_{14}(1, -2) \cup G$ . . . . .	67



# Índice de tablas

2.1. Número dicromático de torneos circulares distintos de orden 17 salvo isomorfismos . . . . .	33
2.2. Número dicromático de todos los torneos circulares de orden 19 salvo isomorfismos . . . . .	36
2.3. Número dicromático de torneos circulares . . . . .	40
A.1. Número dicromático de torneos circulares de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq n \leq 7$ y $k \in \{1, \dots, 7\}$ . . . . .	70



# Capítulo 1

## Introducción y preliminares

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica, donde  $V$  y  $E$  denotan el conjunto de vértices y el conjunto de aristas de  $G$ , respectivamente. Una digráfica es una orientación de la gráfica  $G$ , la cual se obtiene asignando a cada arista una de las dos orientaciones posibles (o quizás las dos). A esta orientación de una gráfica simple la llamaremos digráfica  $D = (V, A)$  donde  $V$  y  $A$  denotan el conjunto de vértices y el conjunto de arcos o flechas de  $D$ , respectivamente.

El *número dicromático de una digráfica*  $D$ , denotado por  $dc(D)$  se define como el mínimo número de colores que se requieren para colorear los vértices de  $D$  tal que las clases cromáticas (conjuntos de vértices con el mismo color) inducen subdigráficas acíclicas (sin ciclos dirigidos). Una definición equivalente del número dicromático de  $D$  es el mínimo número natural  $n$  tal que existe una  $n$ -coloración acíclica de  $D$  (véase la definición en la página 5, párrafo 5). El número dicromático de una digráfica es una generalización natural del *número cromático* de una gráfica simple  $G = (V, E)$ , denotado por  $\chi(G)$ . Este número se define como el mínimo número de colores que se requieren para colorear los vértices de  $G$  tal que vértices adyacentes (unidos por una arista) reciben distinto color. Sea  $G$  una gráfica y consideremos  $\vec{G}$ , la digráfica definida por  $V(\vec{G}) = V(G)$  y  $u \rightarrow v$  y  $v \rightarrow u$  pertenecen a  $\vec{G}$  si y solo si  $\{u, v\}$  (o brevemente,  $uv$ ) es una arista de  $G$ . Es fácil comprobar que  $dc(\vec{G}) = \chi(G)$ .

La definición de número dicromático apareció publicada por primera vez en 1982 por V. Neumann-Lara [31] e independientemente en 1983 por Jacob y Meyniel [24]. Cabe mencionar que los primeros resultados sobre número dicromático fueron divulgados en [31]. Sin embargo, esta noción había sido estudiada por V. Neumann-Lara muchos años antes. En su primera visita a México en 1977, Paul Erdős inició una colaboración con V. Neumann-Lara en este tema. La historia de este singular trabajo que duró varios años, así como los resultados y problemas abiertos muy interesantes pueden consultarse en [14] (pág. 17 y siguientes) y en [15]. En estos artículos se define el *número dicromático de una gráfica simple*  $G$  como

$$dc(G) = \max\{dc(\vec{G}) : \vec{G} \text{ es una orientación de } G\}.$$

Una *gráfica simple*  $G$  es *planar* si se puede dibujar en el plano sin que sus aristas se crucen. La figura 1.1 muestra dos ejemplos de gráficas planares.

Diremos que una *gráfica*  $G$  es *plana* si ya está dibujada en el plano sin cruces en sus aristas y que una *digráfica*  $D$  es *plana* si es una orientación de una gráfica plana, véase

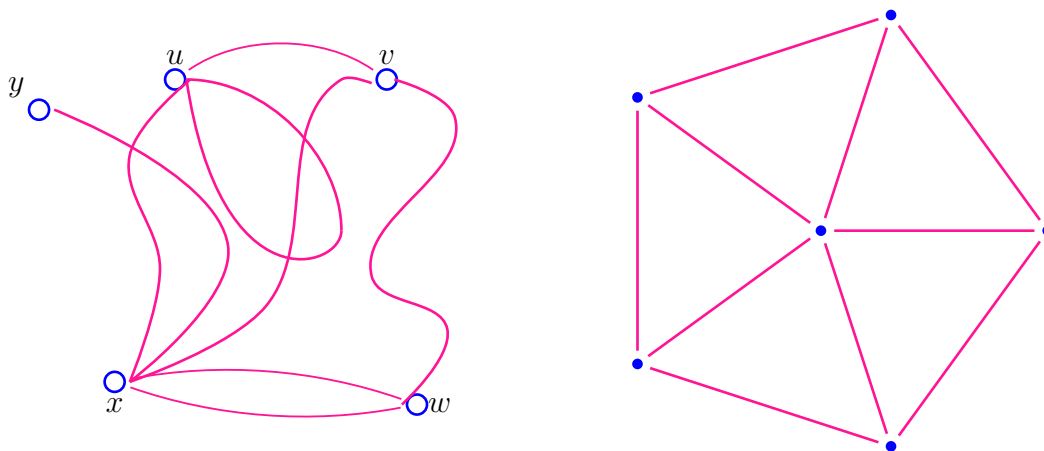


Figura 1.1. Diagramas de gráficas  $G$  y  $H$ .

figura 1.2.

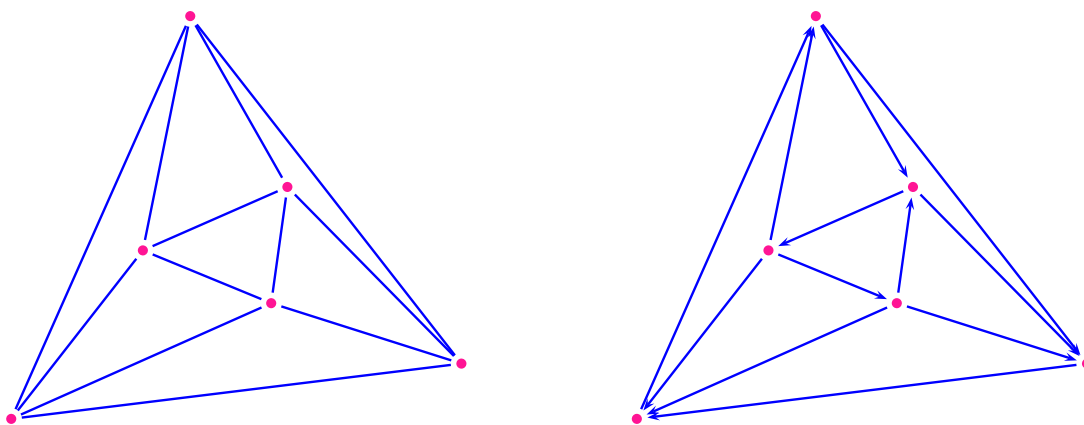


Figura 1.2. Gráfica plana  $G$  y digráfica plana  $D$

En 1982, V. Neumann-Lara propuso la conjetura siguiente (y de manera independientemente, Škrekovski en 2001 [46] y Bokal, Fijavž, Juvan, Kayll y Mohar en 2004 [5]).

**Conjetura 1.1** (V. Neumann-Lara ). *Sea  $D$  una digráfica planar. Entonces  $dc(D) = 2$ .*

Esta conjetura también ha sido mencionada por J. Bang-Jensen y G.Gutin en [4] pág. 73 y 548, por Neumann-Lara en [34] y en el libro [6] de Bondy y Murty pág. 591.

Es fácil ver que la conjetura siguiente también debida a V. Neumann-Lara, es consecuencia inmediata de la conjetura anterior.

**Conjetura 1.2.** *Sea  $G$  una gráfica planar. Entonces  $dc(G) = 2$ .*

En los artículos [14] de P. Erdős y [15] P. Erdős y V. Neumann-Lara, respectivamente, se obtienen algunos resultados asintóticos acerca del comportamiento del número

---

dicromático de las gráficas completas con  $n$  vértices. En [14], Erdős menciona: “es sorprendentemente difícil determinar  $dc(G)$  para gráficas simples”. Erdős y Neumann-Lara demostraron que si  $K_n$  es la gráfica completa de orden  $n$ , entonces existen  $c_1, c_2$  constantes reales positivas tales que

$$c_1 \frac{n}{\log n} < dc(K_n) < c_2 \frac{n}{\log n}.$$

En estos artículos se estudian otros parámetros relacionados con el número dicromático y se formulan varios problemas interesantes que han abierto el camino a nuevos resultados y estos a su vez a nuevos problemas. Por ejemplo, destacamos el siguiente resultado.

**Proposición 1.3** (Erdős, Neumann-Lara, 1979). *Si  $G$  tiene  $n^2$  vértices y  $\chi(G) = n$  entonces  $dc(G) < n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$*

Recordemos que la *composición o producto lexicográfico* de gráficas simples  $G$  y  $H$  es la gráfica simple  $G[H]$  con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  en el cual  $(u, v)$  es adyacente a  $(u', v')$  si y solo si  $uu' \in E(G)$  o  $u = u'$  y  $vv' \in E(H)$ . El *complemento*  $\overline{H}$  de  $H$  es la gráfica simple cuyo conjunto de vértices es  $V$  y cuyas aristas son los pares no ordenados de vértices no adyacentes de  $H$ . Observe que si  $K_n$  es la gráfica completa de orden  $n$  entonces  $\overline{K_n}$  no tiene aristas. Consideremos  $K_n[\overline{K_n}]$  ( $K_n[\overline{K_n}] \cong K_{n,n,\dots,n}$ ) como la gráfica completa  $n$ -partita con  $n$  vértices en cada parte. En el mismo trabajo, probaron que  $dc(K_n[\overline{K_n}]) = n$ . De hecho, demostraron un resultado más fuerte. Sea  $\nu(G)$  el máximo entero positivo tal que para toda orientación de  $G$ , existe un subconjunto de al menos  $\nu(G)$  vértices que no induce ciclos dirigidos. Entonces se cumple que  $\nu(K_n[\overline{K_n}]) = n + 1$ , lo cual consecuentemente implica que  $dc(K_n[\overline{K_n}]) = n$ . Definimos el *número de independencia* de  $G$  como la cardinalidad de un conjunto independiente maximal de vértices y lo denotaremos por  $\alpha(G)$ . Claramente  $\nu(G) \geq \alpha(G) + 1$ . Demostraron también que existe una constante real positiva  $c$  suficientemente grande tal que para toda  $n > n_0(c)$  existe una gráfica  $G$  con  $n$  vértices tal que

$$\alpha(G) < c \log n \quad \text{y} \quad \nu(G) = \alpha(G) + 1.$$

El concepto de número dicromático de una gráfica  $G$  está estrechamente relacionado con el de arboricidad en vértices (“point-arboricity or vertex arboricity”) de una gráfica  $G$ . El concepto de arboricidad en vértices empezó a ser estudiado por Chartrand, Kronk y Wall en 1968, véase [8]. Definimos la *arboricidad en vértices* de una gráfica simple  $G$  como el mínimo número de subconjuntos de una partición del conjunto de vértices de  $G$  donde cada subconjunto de vértices induce una subgráfica acíclica y la denotamos como  $a(G)$ . Por simplicidad, a la arboricidad en vértices la llamaremos simplemente *arboricidad*. Chartrand, Kronk y Wall probaron el siguiente resultado:

**Teorema 1.4** (Teorema 3, [8]). *Para toda gráfica planar  $G$ ,*

$$a(G) \leq 3. \tag{1.1}$$

El vínculo entre estos parámetros es el siguiente:

## 1. Introducción y preliminares

---

$$dc(G) \leq a(G) \leq \chi(G) \leq 2a(G).$$

Por la conjetura 1.2, el teorema 4.3 y las desigualdades anteriores, es claro que para toda gráfica planar  $G$  se cumple  $dc(G) \leq 3$ . Más tarde en [9], Chartrand y Kronk demostraron que la cota  $a(G) \leq 3$  es la mejor posible. Exhibieron un ejemplo de una gráfica planar con arboricidad tres de orden 25. Al igual, probaron que si  $G$  es una gráfica plana exterior, entonces  $a(G) \leq 2$ , donde una gráfica  $G$  se dice *planar exterior* (outerplanar) si puede dibujarse en el plano de manera que todos sus vértices estén en la frontera de la cara exterior.

La distancia  $dist(T, T')$  entre dos triángulos  $T$  y  $T'$  se define como el valor

$$\min\{dist(x, y) : x \in V(T) \text{ y } y \in V(T')\}.$$

Raspaud y Wang en [44] probaron que  $a(G) \leq 2$  siempre que  $G$  sea una gráfica planar y no tenga ciclos de orden 4, o bien, dos triángulos ( $C_3$ ) cualesquiera estén a distancia al menos tres. Además, mostraron un ejemplo de una gráfica de orden mínimo con arboricidad 3, que tiene 21 vértices, (véase figura 4.3).

Sea  $h(n)$  el menor entero para el cual existe una gráfica  $G$  de tamaño  $h(n)$  (número de aristas) y  $dc(G) = n$ . Erdős en [14], conjeturó que  $h(n)/n^2 \rightarrow \infty$ . De forma independiente, Neumann-Lara formuló dicha conjetura, véase [15]. En 1991, Erdős, Gimbel y Kratsch, véase [16], se aproximaron a la conjetura al probar que:

$$h(n) = \theta(n^2 \ln^2(n)).$$

Si  $u \rightarrow v$  es una flecha en  $D$ , diremos que  $v$  es *ex-vecino* de  $u$  y  $u$  es *in-vecino* de  $v$ . A los conjuntos de ex-vecinos e in-vecinos del vértice  $u$  los denotaremos por  $N^+(u, D)$  y  $N^-(u, D)$ , respectivamente. Cuando no hay confusión sobre cuál es la digráfica a la que nos referimos, simplemente denotamos por  $N^+(u)$  y  $N^-(u)$ . La *vecindad*  $N(u)$  de  $u$  es el conjunto de ex-vecinos e in-vecinos del vértice  $u$ , es decir  $N(u) = N^+(u) \cup N^-(u)$ . El *ex-grado* e *in-grado* de un vértice  $u$  se definen como  $|N^+(u)|$  y  $|N^-(u)|$ , respectivamente y se denotan simplemente por  $d^+(u)$  y  $d^-(u)$ .

Un *torneo* de  $n$  vértices es una orientación de la gráfica completa de  $n$  vértices. Un torneo  $T$  es *regular* si para todo  $v \in V(T)$ , se cumple que  $d^+(v) = d^-(v)$ . Así, un torneo regular tiene un número impar de vértices. Sea  $\mathbb{Z}_{2n+1}$  el conjunto de los enteros módulo  $2n+1$  y  $J$  un subconjunto de  $\mathbb{Z}_{2n+1} \setminus \{0\}$  tal que  $w \in J$  si y solo si  $-w \notin J$ , para todo  $w \in \mathbb{Z}_{2n+1} \setminus \{0\}$ , lo cual implica que  $|J| = n$ . Los *torneos circulares*  $\vec{C}_{2n+1}(J)$  están definidos por  $V(\vec{C}_{2n+1}(J)) = \mathbb{Z}_{2n+1}$  y

$$A(\vec{C}_{2n+1}(J)) = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_{2n+1} \text{ y } j - i \in J\}.$$

Observe que si  $2n+1$  es un número primo denotado por  $p$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  y  $J$  es el conjunto de residuos cuadráticos módulo  $p$ , entonces  $\vec{C}_p(J)$  es el *torneo de Paley* de orden  $p$  (denotado por  $QR_p$ ). Definimos

$$\begin{aligned} \vec{C}_{2n+1}(1, 2, \dots, n-2, n-1, n) &:= \vec{C}_{2n+1}(\emptyset) \quad \text{y} \\ \vec{C}_{2n+1}(1, \dots, j-1, j+1, \dots, 2n+1-j) &:= \vec{C}_{2n+1}(j). \end{aligned}$$

Una digráfica se llama  $r$ -dicromática si  $dc(D) = r$ . Diremos que  $D$  es  $r$ -dicromática crítica en vértices si  $dc(D) = r$  y  $dc(D - v) < r$  para todo  $v \in V(D)$ .

Los siguientes resultados dados por V. Neumann-Lara y J. Urrutia en [33] son fundamentales para nuestro trabajo, sobre todo para el capítulo 2, ya que caracterizaron los torneos regulares 2-dicromáticos y exhibieron una familia infinita de torneos circulantes 3-dicromáticos críticos en vértices.

**Teorema 1.5** (Teorema 1, [33]). *Si  $T_{2n+1}$  es un torneo regular, entonces  $dc(T_{2n+1}) = 2$  si y solo si  $T_{2n+1} \cong \vec{C}_{2n+1} \langle \emptyset \rangle$ .*

**Teorema 1.6** (Teorema 2, [33]).  *$\vec{C}_{2n+1} \langle n \rangle$  es un torneo 3-dicromático crítico en vértices para todo  $n \geq 3$ .*

Una  $n$ -coloración acíclica de una digráfica  $D$  es una función  $f : V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  tal que  $f^{-1}(i)$  induce una subdigráfica acíclica en  $D$  para toda  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Sea  $f : V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  una  $n$ -coloración acíclica de  $D$  y  $\pi$  una permutación de  $\mathbb{Z}_n$ . Una trayectoria  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$  en  $D$  es llamada una  $\pi$ -trayectoria si y solo si  $\pi(f(u_i)) = f(u_{i+1})$  para  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Consideremos  $D$  una digráfica. Decimos que  $D$  es  $n$ -dicromática minimal si  $dc(D) = n$  y  $dc(D_0) < n$  para toda subdigráfica propia  $D_0$  de  $D$ . Denotamos por  $c_0(s, m)$  al número máximo de ciclos disjuntos en aristas de longitud  $m$  en  $K_s$  que pasan por un vértice dado. Definimos  $c(s, m) = 2c_0(s, m)$  para  $2 < m \leq s$ . Neumann-Lara en [31] probó resultados acerca del número dicromático de digráficas del tipo:

**Teorema 1.7** (Teorema 4, [31]). *Sea  $D$  una digráfica  $(k+1)$ -dicromática minimal,  $k \geq 2$  y  $m$  un entero tal que  $2 \leq m \leq k$ . Entonces*

1. *para cualesquiera dos vértices adyacentes  $u$  y  $v$  de  $D$  existe un conjunto de  $c(k, m)$  trayectorias dirigidas de  $u$  a  $v$  disjuntas en flechas dos a dos y de longitud congruente con cero módulo  $m$ .*
2. *toda flecha  $(u, v) \in A(D)$  está contenida en  $c(k, m)$  ciclos de longitud congruente con 1 módulo  $m$  que satisfacen que cualesquiera dos tienen a  $(u, v)$  como flecha común.*
3. *todo vértice  $u \in V(D)$  está contenido en  $c(k, m)$  ciclos disjuntos dos a dos de longitud congruente con cero módulo  $m$ .*

**Corolario 1.8** (Corolario2, [31]). *Si  $D$  es una digráfica  $(k+1)$ -dicromática minimal con  $k \geq 2$ , entonces toda flecha  $(u, v) \in A(D)$  pertenece a un ciclo de longitud impar mayor o igual que  $k$ .*

El corolario 1.8 generaliza el siguiente resultado debido a Erdős y Hajnal [13].

**Teorema 1.9** (Teorema 7.7, [13]). *Si  $L \geq 3$  es la longitud máxima de un ciclo impar de orden máximo en  $G$ , entonces  $\chi(G) \leq L + 1$ .*

Como podemos notar, existe una conexión entre el número dicromático y la longitud de los ciclos, como demostró Neumann-Lara en el teorema 1.7. En [10], Chen, Ma y Zang probaron el siguiente resultado que generaliza el teorema 1.7

## 1. Introducción y preliminares

---

**Teorema 1.10** (Teorema 3, [10]). *Sean  $k$  y  $r$  dos enteros tal que  $k \geq 2$  y  $k \geq r \geq 1$ . Si una digráfica  $D$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $r$  módulo  $k$ , entonces  $dc(D) \leq k$ .*

Existe otra generalización del número dicromático de una digráfica dada por V. Neumann-Lara. Sea  $\mathcal{P}$  una clase de digráficas no vacías y distintas de las triviales. Una  $n$ -coloración relativa a  $\mathcal{P}$  de una digráfica  $D$  es una función  $f : V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  tal que para toda  $i \in \mathbb{Z}_n$ , la subdigráfica de  $D$  inducida por  $f^{-1}(i)$  no contiene subdigráficas isomorfas a un miembro de  $\mathcal{P}$ . El número  $\mathcal{P}$ -dicromático  $dc(D; \mathcal{P})$  de  $D$  es por definición, el mínimo número natural  $n$  tal que existe una  $n$ -coloración relativa a  $\mathcal{P}$  de  $D$ . La digráfica  $D$  es  $n$ -dicromática relativa a  $\mathcal{P}$  si  $dc(D; \mathcal{P}) = n$  y  $n$ -dicromática crítica relativa a  $\mathcal{P}$  si  $dc(D; \mathcal{P}) = n$  y  $dc(D_0; \mathcal{P}) < n$  para toda subdigráfica propia  $D_0$  en  $D$ . De la definición de número  $\mathcal{P}$ -dicromático se tiene que  $dc(D) = dc(D, \mathcal{C})$ , donde  $\mathcal{C}$  es la clase de todos los ciclos dirigidos. Sea  $f : V(D) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  una  $n$ -coloración relativa a  $\mathcal{P}$  de  $D$  y  $\pi$  una permutación de  $\mathbb{Z}_n$ . Por último, definimos  $\lambda(\mathcal{P}) = \min\{\lambda(P) : P \in \mathcal{P}\}$ , donde  $\lambda(P)$  denota la *conexidad en flechas* de  $P$  (esto es  $\lambda(P)$  es el número mínimo de flechas tal que al borrarlas de  $P$  se cumple que  $P$  es disconexa o  $P$  es trivial).

**Teorema 1.11** (V. Neumann-Lara, [32]). *Sean  $D$  una digráfica  $n$ -dicromática relativa a  $\mathcal{P}$  y  $u, v \in V(D)$ . Supongamos que para toda  $n$ -coloración relativa a  $\mathcal{P}$   $g$  de  $D$  se cumple que  $g(u) = g(v)$ . Sea  $f$  una  $n$ -coloración relativa a  $\mathcal{P}$  de  $D$  y  $\pi$  una permutación de  $\mathbb{Z}_n$ , que no fija a  $f(u)$  (esto es,  $f(u) \neq u$ ). Entonces, existe un conjunto de  $\lambda(\mathcal{P})$  flechas disjuntas y  $\pi$ -trayectorias en  $D$  que van de  $u$  a  $v$ .*

**Corolario 1.12** (Teorema 2, [31]). *Sean  $D$  una digráfica  $n$ -dicromática y  $u, v \in V(D)$ . Supongamos que  $g(u) = g(v)$  para toda  $n$ -coloración acíclica  $g$  de  $D$ . Sea  $f$  una  $n$ -coloración acíclica de  $D$  y  $\pi$  una permutación de  $\mathbb{Z}_n$  que no fija a  $f(u)$ . Entonces existe una  $\pi$ -trayectoria en  $D$  de  $u$  a  $v$ .*

Sea  $D$  una digráfica  $n$ -dicromática. Decimos que  $D$  es *únicamente coloreable* si toda  $n$ -coloración de  $D$  induce la misma partición de  $V(D)$ . En [35] Neumann Lara, Santoro y Urrutia obtuvieron dos familias de digráficas 2-dicromáticas únicamente coloreables y además, familias infinitas  $m$ -dicromáticas de digráficas únicamente coloreables para toda  $m \geq 2$ .

En [37], Neumann-Lara demostró que el torneo de Paley  $QR_7 = \vec{C}_7(1, 2, 4)$  es 3-dicromático y que existen exactamente otros tres torneos 3-dicromáticos  $W, W_0$  y  $W_1$  de orden 7 no isomorfos, véanse figuras 1.3 y 1.4. Además,  $W_0$  se obtiene de  $W$  al voltear un acoplamiento perfecto entre los triángulos. También se prueba que  $QR_{11} = \vec{C}_{11}(1, 3, 4, 5, 9)$  es el único torneo 4-dicromático de orden 11 y que  $dc(T) \leq 3$  para todo torneo  $T$  con  $|V(T)| \leq 10$ .

El siguiente resultado muestra una familia infinita de torneos circulantes 4-dicromáticos críticos en vértices dada por V. Neumann-Lara.

**Teorema 1.13** (Teorema [38]). *El torneo circulante  $\vec{C}_{6m+1}(2m)$  es 4-dicromático crítico en vértices para todo  $m \geq 2$ .*

En [33], Neumann-Lara y Urrutia construyeron familias infinitas de torneos regulares  $r$ -dicromáticos críticos en vértices para toda  $r \geq 3$  y  $r \neq 4$ . En 1997 Neumann-Lara propuso la siguiente conjetura:



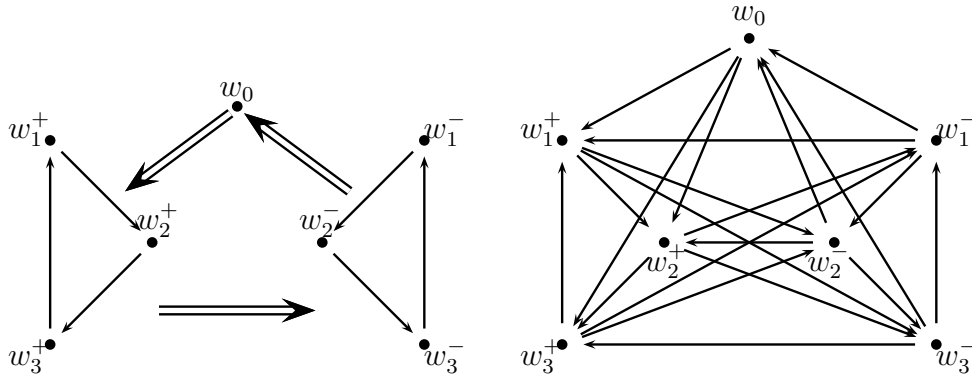


Figura 1.3. Torneos  $W = \vec{C}_3[K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3]$  y  $W_0$ , respectivamente.

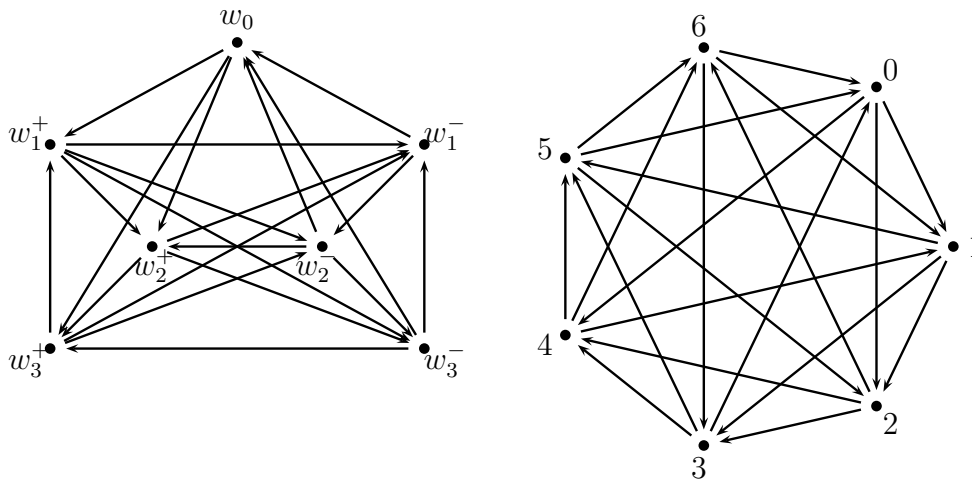


Figura 1.4. Torneos  $W_1$  y  $\vec{C}_7(1, 2, 4)$ , respectivamente.

**Conjetura 1.14** (Conjetura, [38]). *Existe una familia de torneos circulantes  $r$ -dicromáticos críticos en vértices para toda  $r \geq 3$ .*

Neumann-Lara en [40] demostró la conjetura para toda  $r \geq 3$  y  $r \neq 7$  usando composición de torneos. El caso faltante fue resuelto por Araujo-Pardo y Olsen, véase [3], en donde además construyeron otras familias infinitas de torneos regulares  $r$ -dicromáticos críticos en vértices para  $r \geq 3$  distintas a las ya conocidas. Es importante observar que incluyen el caso cuando  $r = 7$  lo cual completa la prueba de la conjetura antes mencionada.

Un torneo  $T$  es transitivo si  $(h, i), (i, j) \in A(T)$  implica que  $(h, j) \in A(T)$ . Si  $T$  es de orden  $n$ , lo denotamos como  $TT_n$  (véase figura 1.5). Para todo  $n$ , existe un único torneo  $TT_n$  salvo isomorfismo.

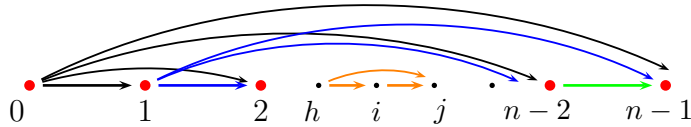


Figura 1.5. Torneo transitivo  $TT_n$

Sea  $\xi(k)$  el mínimo orden (número de vértices) posible de un torneo  $k$ -dicromático. El problema de determinar este valor es complicado. Se conocen los valores exactos  $\xi(3) = 7$  y  $\xi(4) = 11$  y se conjetura que  $\xi(5) = 17$ , véase [37]. Este problema está además relacionado con la conjetura siguiente planteada por Erdős y Moser.

**Conjetura 1.15** (Conjetura Erdős y Moser, [49]). *Para todo entero positivo  $k$  existe un torneo  $T$  de orden  $n = 2^{k-1} - 1$  que no contiene un  $TT_k$ .*

En [45], Reid y Parker demostraron que dicha conjetura es falsa para  $k = 5$ . Más aún, probaron que todo torneo de orden 14 tiene un subtorneo transitivo de orden 5. Además demostraron que existe un único torneo de orden 13 que no tiene un subtorneo transitivo de orden 5. En 1994, véase [36], Neumann-Lara dio una prueba más corta y estructural que la demostración dada por Reid y Parker en [45]. El problema actual consiste en determinar el mínimo orden  $f(k) = n$  de un torneo  $T$  que contenga un subtorneo isomorfo a  $TT_k$ .

En resumen se sabe que:

$$\begin{aligned} 4 &\leq f(3) \leq 7 \\ 8 &\leq f(4) \leq 13 \\ 14 &\leq f(5) \leq 27 \\ 27 &< f(6). \end{aligned}$$

Para más detalles véanse [37], [45] [48] y [49].

Una clase interesante de problemas en este tópico es la relación del número dicromático de una digráfica  $D$  con la inconexión acíclica de la misma. Denotemos por  $\vec{C}_3$  al triángulo dirigido de tres vértices. De acuerdo a V. Neumann-Lara, [39], un ciclo dirigido se dice *bien coloreado* si vértices adyacentes (unidos por una flecha) reciben distinto color. Un  $\vec{C}_3$  bien coloreado es *heterocromático* (todos los vértices tienen distinto color). La *inconexión acíclica* de  $D$  (respectivamente, la *inconexión acíclica libre de  $\vec{C}_3$* ) denotada por  $\vec{\omega}(D)$  (resp.,  $\vec{\omega}_3(D)$ ) es el máximo número de colores necesarios para colorear los vértices de  $D$  tal que no aparecen ciclos dirigidos bien coloreados (resp., triángulos dirigidos heterocromáticos). Sean  $D_0, D_1, D_2$  digráficas disjuntas. Definimos la *suma de Zykov*  $t(D_0, D_1, D_2)$  como la digráfica donde el conjunto de vértices está dado por  $\cup_{i=0}^2 V(D_i)$  y el conjunto de aristas por

$$\cup_{i=0}^2 E(D_i) \cup \{(u, v) | u \in V(D_i), v \in V(D_{i+1})\}$$

donde los índices son tomados módulo 3. Consideremos los siguientes resultados dados en [39].

---

**Proposición 1.16** (Proposición 3.6, [39]).

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &= 1 + \max\{\vec{\omega}(\alpha_i) : i \in \{1, 2, 3\}\} \text{ y} \\ \vec{\omega}_3(t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &= 1 + \max\{\vec{\omega}_3(\alpha_i) : i \in \{1, 2, 3\}\}.\end{aligned}$$

**Teorema 1.17** (Teorema 4.11, [39]). *Sea  $n \geq 2$ . Entonces*

$$\vec{\omega}(\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle) = 2,$$

para  $j \neq 2$  y  $n \neq 4$ .

Consideremos un torneo circulante  $\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle$  con  $j \neq 2$  y  $n \neq 4$ . La relación entre estos parámetros ( $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle)$ ,  $\vec{\omega}(\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle)$  y  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle)$ ) es que mientras estos torneos circulantes a los cuales se les voltea una flecha tienen inconexión acíclica e inconexión acíclica libre de  $\vec{C}_3$  dos, tienen número dicromático: dos, tres o cuatro (como se probará en el capítulo 2 de esta tesis). Un ejemplo de este vínculo es el siguiente: para los torneos circulantes  $\vec{C}_{6m+1}\langle 2m \rangle$  los cuales son 4-dicromáticos (ver teorema 1.13), se tiene que  $\vec{\omega}(\vec{C}_{6m+1}\langle 2m \rangle) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_{6m+1}\langle 2m \rangle) = 2$  por el teorema 1.17. Observe los valores de  $\vec{\omega}$  y  $\vec{\omega}_3$  para los siguientes torneos 3- y 4-dicromáticos. Recordemos que en [35] se probó que

$$dc(\vec{C}_7\langle 3 \rangle) = dc(\vec{C}_3[K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3] = W) = 3$$

y que  $dc(\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle) = 4$ . Por el teorema 1.17,

$$\vec{\omega}(\vec{C}_7\langle 3 \rangle) = \vec{\omega}(\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_7\langle 3 \rangle) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle) = 2$$

y por la proposición 1.16

$$\vec{\omega}(t(\vec{C}_3, \vec{C}_3, T_1)) = \vec{\omega}_3(t(\vec{C}_3, \vec{C}_3, T_1)) = 3.$$

Otro resultado que destacamos es el siguiente:

**Proposición 1.18** (Proposición 5.5, [39]). *Para toda pareja de enteros  $(r, s)$ , con  $r \geq s \geq 2$ , hay un conjunto infinito de torneos regulares  $W$  tal que*

$$r \leq dc(W) \leq r + 2 \text{ y } s \leq \vec{\omega}(W) \leq \vec{\omega}_3(W) \leq s + 1.$$

Más resultados de este tipo pueden encontrarse en [26], [27] y en [28]. En especial, los resultados conocidos se obtienen para torneos regulares.

Sea  $D$  una digráfica. Un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  se dice que es *independiente* si para cualesquiera dos vértices de  $S$  no existe la flecha  $(u, v)$  ni la flecha  $(v, u)$  en  $A(D)$ . Un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  se llama *absorbente* si para cada vértice  $v$  que no pertenece a  $S$ , existe  $w \in S$  tal que  $(w, v) \in A(D)$ . Un *núcleo*  $N$  en una digráfica  $D$  es un conjunto de vértices de  $D$  tal que es independiente y absorbente. Una digráfica es *núcleo-perfecta* si  $D$  tiene núcleo y toda subdigráfica inducida de la digráfica  $D$  tiene núcleo y es *núcleo-imperfecta crítica* si  $D$  no tiene núcleo, pero todas sus digráficas inducidas propias sí tienen núcleo.

## 1. Introducción y preliminares

---

Una digráfica es asimétrica si no tiene flechas simétricas. El número dicromático de digráficas se relaciona con la teoría de núcleos (véanse [17] y [18]). En [18], Galeana-Sánchez y Neumann-Lara probaron la existencia de digráficas asimétricas núcleo-perfectas con número dicromático arbitrariamente grande, cuyas gráficas subyacentes no contienen triángulos (esto es, gráficas de cuello al menos 4). También probaron la existencia de digráficas núcleo-imperfectas críticas con número dicromático arbitrariamente grande y sin flechas simétricas ni ciclos dirigidos de longitud 3.

Sean  $T$  un torneo y  $\{u, v\} \subset V(T)$ . Decimos que  $u, v \in V(T)$  son *discordantes* módulo  $S$  y lo denotamos por  $u|v(\text{mód}S)$ , si

$$\begin{aligned} N^+(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^-(v, S \setminus \{u, v\}) \quad \text{y} \\ N^-(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^+(v, S \setminus \{u, v\}). \end{aligned}$$

Decimos que  $\{u, v\}$  forman un *par discordante* si

$$N^+(u, T) \cup N^+(v, T) \cup \{u, v\} = V(T).$$

Definimos la digráfica de dominación de un torneo  $T$ , denotada por  $\mathfrak{D}(T)$ , como:

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{D}(T)) &= V(T) \quad \text{y} \\ A(\mathfrak{D}(T)) &= \{u \rightarrow v : \{u, v\} \text{ es un par discordante}\}. \end{aligned}$$

Decimos que  $M^T$  es un *molde* de  $T$ , si  $T$  es un torneo regular y toda trayectoria dirigida en  $\mathfrak{D}(T)$  es de orden a lo más dos. Note que un molde  $M^T$  de un torneo circulante no cíclico  $T$  es el torneo regular inducido por  $V(T) \setminus \{u, v\}$ . Un molde es *manso* si  $T \langle V(T) \setminus \{u, v\} \rangle \cong \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ . Un torneo  $T$  es manso si  $M^T$  es manso. Llano y Olsen en [26] probaron que los torneos  $T$  con moldes mansos satisfacen que  $\vec{w}(T) = \overleftarrow{w}(T) = 2$ . Olsen y Neumann-Lara en [41] probaron que todo torneo manso es 3-dicromático.

Más recientemente, el número dicromático ha sido estudiado en relación con los valores propios asociados a una digráfica en el marco de la teoría espectral de gráficas (véase [30]).

Considere una lista de  $k$  colores y una gráfica  $G$ . Asignamos un color de la lista a todo vértice de  $G$  para tener una coloración propia de los vértices de  $G$ . Entonces, al menor entero  $k$  para el cual se cumple lo anterior se le denomina *número de elección* de  $G$ , denotado por  $ch(G)$ . El *número de dielección* de una gráfica ( $dch(G)$ ) se define como:

$$dch(G) = \text{mín} \{ch(\vec{G}) : \vec{G} \text{ es una orientación de } G\}$$

y además cada clase cromática no tiene ciclos dirigidos. Sali y Simonyi en [47] dieron una relación entre el número cromático. Como  $dch(T) = 1$  para todo árbol  $T$ , entonces puede ocurrir que  $dch(G) < \chi(G)$ . Al igual muestran la existencia de gráficas bipartitas con número de dielección arbitrariamente grande. Note que años atrás, Erdős y Neumann-Lara en [14] hicieron una relación similar para el número cromático y el número dicromático en gráficas, véase la proposición 1.3. Es interesante observar que dado un árbol  $T$ , se tiene que  $dch(T) = 1 = dc(T) < \chi(T) = 2$ .

Cabe mencionar que Thomassen en [51] demostró que si  $G$  es una gráfica planar entonces  $ch(G) = 5$ . Con estos antecedentes, podemos concluir que si  $G$  es una gráfica

---

planar, entonces

$$dc(G) \leq a(G) \leq \chi(G) < ch(G) \leq 2a(G).$$

Igualmente, el número dicromático aparece en el estudio de coloraciones de juegos en digráficas y las coloraciones circulares de gráficas, véase el excelente survey dinámico de Yang y Zhu [52] de 2010.

Esta tesis se compone de los siguientes resultados. En el capítulo 2, determinamos que el número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes a los cuales se les voltea una flecha es 3 o 4. Más aún, caracterizamos los torneos  $\vec{C}_{2n+1}(k)$  críticos en vértices para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . El proceso de determinar cuáles torneos circulantes son críticos en vértices se basa en la construcción de la partición de los vértices que realiza el número dicromático. Estos resultados se encuentran publicados en [25]. Además probamos que ningún torneo circulante de orden 17 es 5-dicromático.

En el capítulo 3, trabajamos con algunas familias de digráficas circulantes, donde el conjunto de saltos cumple condiciones específicas. Note que si la digráfica circulante es de orden  $n$ , el conjunto de saltos es de cardinalidad a lo más  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . De hecho, cuando la cardinalidad del conjunto de saltos es menor que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , el número de flechas disminuye. Con base en este hecho, uno pensaría que es más fácil determinar el número dicromático de estas digráficas. Sin embargo, no es así ya que mostrar la partición que realiza el número dicromático puede ser complicado. En la sección 3.2.2 obtenemos como corolario que el torneo circulante cíclico de orden  $2k + 1$  es dos dicromático para  $k \geq 1$ . Este es uno de los dos resultados que concluyeron V. Neumann-Lara y J. Urrutia en el teorema 1.5.

En el capítulo 4 construimos dos familias de gráficas mixtas planas maximales que tienen número dicromático dos. Estas gráficas mixtas básicamente tienen como base alguna digráfica circulante del tipo  $\vec{C}_{2m}(1, 2)$  o  $\vec{C}_{2m}(1, -2)$  y le agregamos aristas de una manera especial, tal que la gráficas mixtas obtenidas sean planas maximales.

En el apéndice A, mostramos una tabla con los números dicromáticos de los torneos circulantes para  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$  y en el apéndice B mostramos todos los isomorfismos de los torneos circulantes de orden  $2n+1$ , con  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Una lista amplia de referencias bibliográficas de los temas tratados concluye este trabajo de investigación, donde concurren teoría de gráficas, teoría de digráficas, teoría de números y geometría combinatoria.

Como es usual, las matemáticas son un mundo lleno de desafíos intelectuales en cualesquiera de sus áreas. Es impresionante la interrelación entre diversos tipos de problemas y sus antecedentes, como ocurre con nuestros tópicos aquí tratados: algunos problemas se resuelven como relámpagos cubiertos de ideas, muchos otros solo se comprenden, menos se descubren y otros quedan planteados para retos futuros.



# Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

En lo que sigue estudiaremos y probaremos los siguientes tipos de resultados:

- (i) Determinación del número dicromático de  $\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle$  para toda  $j = 1, \dots, n$ .
- (ii) Caracterización de los torneos circulantes  $n$ -dicromáticos críticos en vértices de la familia  $\vec{C}_{2n+1}\langle j \rangle$ .
- (iii) Prueba de que ningún torneo circulante de 17 vértices es 5-dicromático.

Sean  $D$  y  $F$  digráficas y  $F_v$  una familia de copias mutuamente disjuntas e isomorfas a  $F$  para todo  $v \in V(D)$ . Definimos la composición  $D[F]$  (o producto lexicográfico  $D \circ F$ , véase [20]) de las digráficas  $D$  y  $F$  como

$$V(D[F]) = \bigcup_{v \in V(D)} V(F_v) \quad \text{y}$$

$$A(D[F]) = \bigcup_{v \in V(D)} A(F_v) \cup \{(i, j) : i \in V(F_v), j \in V(F_w), (v, w) \in A(D)\}.$$

Un ejemplo se ilustra en la figura 2.1. La exvecindad de cualquier vértice  $v \in V$  es el conjunto

$$N^+(v) := \{u \in V : v \rightarrow u \in A\}.$$

Análogamente la invecindad de  $v$  es  $N^-(v) := \{u \in V : u \rightarrow v \in A\}$ .

**Observación 1.** *Salvo isomorfismos, (de acuerdo a McKay [29] y al apéndice B):*

- (i) *Existe un único torneo regular circulante de orden 5 que es:*

$$\vec{C}_5(1, 2) = \vec{C}_5\langle \emptyset \rangle.$$

- (ii) *Existen dos torneos regulares circulantes de orden 7 que son*

$$\vec{C}_7(1, 2, 3) = \vec{C}_7\langle \emptyset \rangle \cong \vec{C}_7\langle 1 \rangle \cong \vec{C}_7\langle 2 \rangle \quad \text{y}$$

$$\vec{C}_7(1, 2, 4) = \vec{C}_7\langle 3 \rangle.$$

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

(iii) Existen tres torneos circulantes de orden 9, los cuales son

$$\begin{aligned}\vec{C}_9(1, 2, 3, 4) &= \vec{C}_9\langle\emptyset\rangle, \\ \vec{C}_9(1, 2, 3, 5) &= \vec{C}_9\langle 4 \rangle \cong \vec{C}_9\langle 1 \rangle \cong \vec{C}_9\langle 3 \rangle \quad y \\ \vec{C}_9(1, 3, 4, 7) &= \vec{C}_9\langle 2 \rangle,\end{aligned}$$

(donde  $\vec{C}_9\langle 2 \rangle \cong \vec{C}_3[\vec{C}_3]$  es la composición de  $\vec{C}_3$  y  $\vec{C}_3$ , ver figura 2.1).

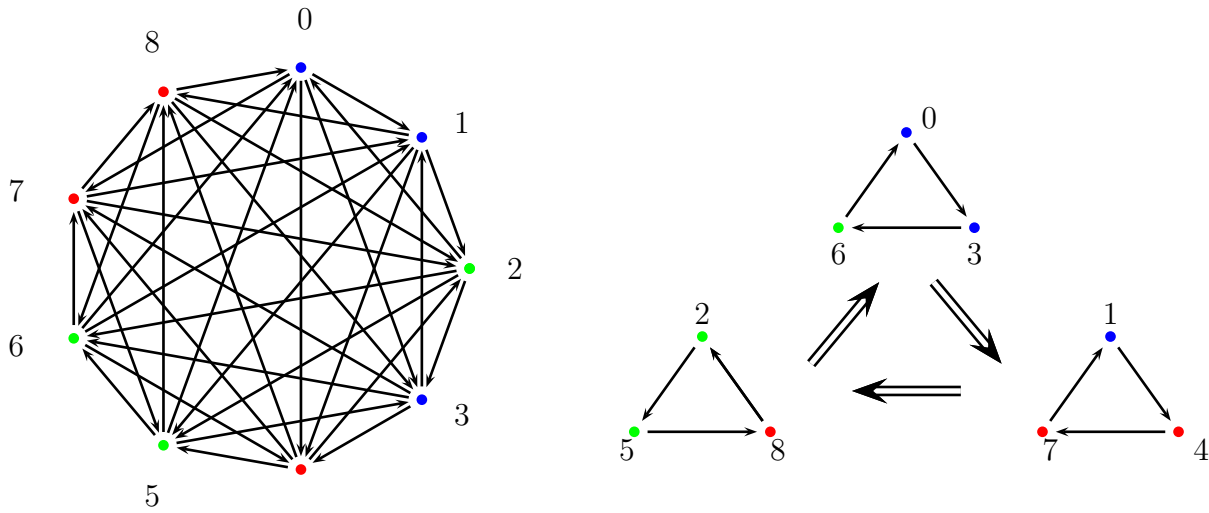


Figura 2.1. Torneo  $\vec{C}_9\langle 2 \rangle \cong \vec{C}_3[\vec{C}_3]$

### Observación 2.

(i)  $dc(\vec{C}_3) = dc(\vec{C}_5(1, 2)) = dc(\vec{C}_7(1, 2, 3)) = dc(\vec{C}_9(1, 2, 3, 4)) = 2$ , por el teorema 1.5.

(ii)  $dc(\vec{C}_7\langle 2 \rangle) = 3$ , por la observación 1 (ii) y el teorema 1.6.

(iii)  $dc(\vec{C}_9\langle 2 \rangle) = 3$ , por el teorema 8 [31].

(iv)  $dc(\vec{C}_9\langle 1 \rangle) = 3$ , por la observación 1 (iii) y por el teorema 1.6 .

**Observación 3.** Todo torneo circulante es transitivo en vértices, esto es,  $\text{Aut}(T)$  (el grupo de automorfismos de  $T$ ) actúa transitivamente en  $V(T)$ , es decir, para todo par  $u, v \in V(T)$  existe  $\varphi \in \text{Aut}(T)$  tal que  $\varphi(u) = v$ . En el caso de  $T = \vec{C}_{2n+1}(J)$  se tiene que

$$\text{Aut}(T) = \{\varphi : V(T) \rightarrow V(T) : \varphi \text{ es biyectiva y } \varphi(i) = i+j \text{ mod } (2n+1) \forall j \in \mathbb{Z}_{2n+1}\}.$$



En las siguientes secciones determinaremos los valores exactos de  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle)$  para todos  $n, k \in \mathbb{N}$ . Subdividimos los cálculos en cinco casos (los casos se ilustran en la figura 2.2):

- (i)  $k = 1,$
- (ii)  $k = 2,$
- (iii)  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil,$
- (iv)  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  y
- (v)  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1 \leq k \leq n.$

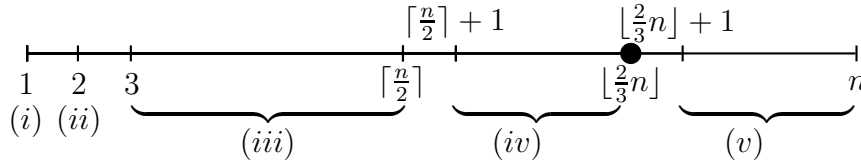


Figura 2.2.

## 2.1. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$

Diremos que un subtorneo transitivo contenido en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es *maximal* si su orden (número de vértices) es máximo. En esta sección, la construcción del primer subtorneo transitivo maximal se hace por casos con base en las congruencias módulo tres. Observe que un subtorneo transitivo maximal no es necesariamente único. En esta sección y la siguiente, las demostraciones son similares pero, las hacemos por separado porque los subconjuntos de vértices que inducen los torneos transitivos maximales son de la misma cardinalidad pero los subconjuntos que los inducen son distintos en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  y  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$ . Observemos lo siguiente:

### Observación 4.

- (i) Para toda  $j \in \mathbb{Z}_{2n+1}$ , el conjunto de vértices  $\{j-2, j-1, j\}$  induce un  $\vec{C}_3$  en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  y  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$ , respectivamente.

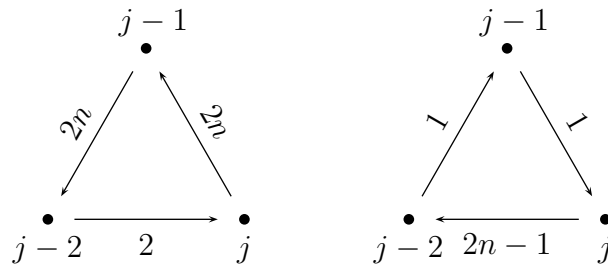


Figura 2.3.  $\vec{C}_3$  en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  y  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$ , respectivamente

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulares

(ii)  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle \cong \vec{C}_{11}\langle 4 \rangle$ , véase apéndice B

(iii)  $\vec{C}_{13}\langle 1 \rangle \cong \vec{C}_{13}\langle 3 \rangle$ .

**Proposición 2.1.**  $dc(\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle) = dc(\vec{C}_{13}\langle 1 \rangle) = dc(\vec{C}_{15}\langle 1 \rangle) = 3$ .

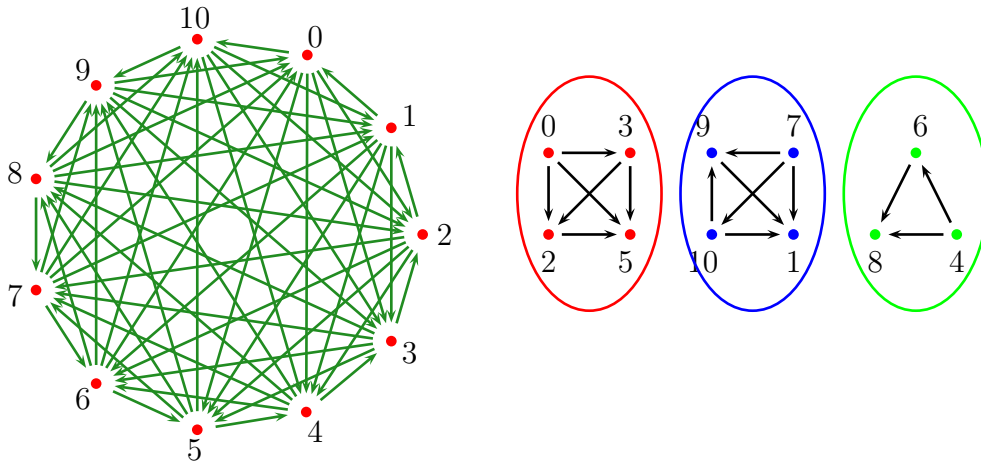


Figura 2.4.  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$  y partición de los vértices de  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$  en subtorneos acíclicos

*Demostración.* Considere  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$ , véase figura 2.4. Observe que como  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle \not\cong \vec{C}_{11}\langle \emptyset \rangle$ , véase apéndice B y por el teorema 1.5,  $dc(\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle) \geq 3$ . Para completar la prueba, mostramos una partición de los vértices de  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$  dada por

$$P_1 = \{0, 3, 2, 5\}, P_2 = \{7, 10, 9, 1\} \text{ y } P_3 = \{4, 6, 8\}.$$

Observe que  $P_1$  y  $P_2$  inducen un  $TT_4$  y  $P_3$  induce un  $TT_3$  en  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$ , respectivamente. Por la observación 4(ii),  $dc(\vec{C}_{11}\langle 4 \rangle) = 3$ . Note que los subtorneos transitivos inducidos por  $P_1, P_2$  y  $P_3$  son maximales. En otro caso, si  $\langle P_1 \rangle$  no fuera un subtorneo transitivo maximal, entonces el único vértice que podemos agregar es el vértice 10, pero  $(2, 5, 10, 2) \cong \vec{C}_3$ . Entonces,  $P_1$  induce un subtorneo transitivo maximal. Los argumentos son similares para  $P_2$  y  $P_3$ . Análogamente probamos los casos  $n = 6$  y  $n = 7$ .  $\square$

Los siguientes lemas son una herramienta útil para probar el teorema 2.6. Sean  $a$  y  $b$  enteros no negativos tales que  $0 \leq a < b \leq n$ . Definimos los intervalos

$$[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}, X_0 = [0, n], X_3 = [0, 2n] \text{ y}$$

$$Y_0 = \{j \in X_0 : j \equiv 1 \pmod{3}\}.$$

**Lema 2.2.** *El torneo  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  contiene un subtorneo transitivo maximal de orden  $n + 1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  si  $n \equiv 0 \pmod{3}$  y de  $n + 2 - \lceil \frac{n}{3} \rceil$  vértices si  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .*

## 2.1. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$

*Demostración.* Considere  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle = \vec{C}_{2n+1}(2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, 2n)$ . Por la observación 3, basta considerar un subtorneo transitivo maximal que contenga al vértice 0. Observe que

$$N^+(0) = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, 2n\}.$$

Para la construcción del subtorneo transitivo maximal analizamos dos casos:

- Caso 1:  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Sea  $n = 3k$  donde  $k \in \mathbb{N}$ . Note que el subconjunto de vértices  $j \equiv 0, 2 \pmod{3}$  pertenecen al conjunto  $X_0$  e inducen un subtorneo transitivo

$$H_0 = \langle X_0 \setminus Y_0 \rangle$$

por la observación 4(i). Observe que  $|Y_0| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y  $|H_0| = n + 1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2k + 1$ . El resto de la prueba consiste en probar que  $H_0$  es maximal.

Si  $H_0$  no fuera maximal, entonces el único vértice que podemos agregar es  $2n$  por la observación 4(i). Observe que el subconjunto de vértices  $\{n, 2n, n - 4\}$  induce un  $\vec{C}_3$  en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$ , lo cual implica que  $H_0 \cup \{2n\}$  no puede inducir un subtorneo transitivo maximal.

- Caso 2:  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Este caso es análogo al caso 1. El subtorneo transitivo maximal es

$$H_1 = \langle (X_0 \cup \{2n\}) \setminus Y_0 \rangle.$$

□

**Lema 2.3.** Sea  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  tal que  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ . Entonces los subtorneos inducidos por

$$\begin{aligned} X_3 \setminus (X_0 \setminus Y_0) & \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ y} \\ X_3 \setminus ((X_0 \cup \{2n\}) \setminus Y_0) & \text{ si } n \equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

contienen un torneo transitivo maximal de orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  vértices, respectivamente.

*Demostración.* Supongamos que  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Por el lema 2.2,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  contiene al subtorneo transitivo  $H_0$ . Considere  $X_1 = [n + 1, 2n]$  y definimos

$$Y_1 = \{j \in X_1 : j \equiv 2 \pmod{3}\} \text{ y } J_0 = \langle X_1 \setminus Y_1 \rangle.$$

Por la observación 4(i),  $J_0$  es transitivo. Note que  $J_0$  tiene orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . Para probar que  $J_0$  es maximal, la demostración es similar a la prueba del lema 2.2. Por contradicción, si  $J_0$  no fuera maximal, entonces al único vértice que podemos adherir es el vértice 1 por la observación 4(i). Observe que en este caso, el conjunto  $\{1, n + 1, n + 3\}$  induce un  $\vec{C}_3$  en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$ , lo cual implica que  $J_0 \cup \{1\}$  no induce un subtorneo transitivo maximal. Cuando  $n \equiv 1 \pmod{3}$  los argumentos son similares. El subtorneo transitivo maximal es

$$J_1 = \langle X_1 \setminus (Y_2 \cup \{2n\}) \rangle,$$

donde  $Y_2 = \{j \in X_1 : j \equiv 0 \pmod{3}\}$ .

□

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

---

**Lema 2.4.** *Un torneo transitivo maximal contenido en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es de orden  $n+1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , si  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .*

*Demostración.* La prueba es similar a la del lema 2.2. El subtorneo transitivo es

$$H_2 = \langle X_0 \setminus Y_0 \rangle.$$

Para verificar que es maximal, supongamos que no lo es. Entonces por la observación 4(i), el único vértice que podemos agregar es  $2n$ . Observe que el subconjunto de vértices  $\{n, 2n, n-5\}$  induce un  $\vec{C}_3$ , por lo que se tiene una contradicción a la transitividad. Por lo tanto,  $H_2$  es un subtorneo transitivo maximal.  $\square$

**Lema 2.5.** *Sea  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  tal que  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Entonces el subtorneo inducido por:*

$$X_3 \setminus H_2$$

*contiene un subtorneo transitivo maximal de orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .*

*Demostración.* Es similar al lema 2.3. En este caso, todo vértice  $j \equiv 0, 1 \pmod{3}$  en  $X_1$  induce un subtorneo transitivo

$$J_2 = \langle X_1 \setminus Y_3 \rangle,$$

donde  $Y_3 = \{j \in X_1 : j \equiv 2 \pmod{3}\}$ .  $\square$

**Teorema 2.6.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = 4$  para toda  $n \geq 8$ .*

*Demostración.* Por el teorema 1.5, tenemos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) \geq 3$ . En primer lugar, demostraremos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) \geq 4$ . Por contradicción, supongamos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = 3$ . Así,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  tiene una partición de sus vértices que inducen tres subtorneos transitivos. Supongamos que  $n \equiv 0 \pmod{3}$  (es similar cuando  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ). Por los lemas 2.2 y 2.3, los subtorneos transitivos maximales en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  son  $H_0$  y  $J_0$ . Por lo tanto, el resto del conjunto de vértices

$$X_3 \setminus \{V(H_0) \cup V(J_0)\} = \{1, 4, 7, \dots, n+2, n+5, \dots\},$$

inducen el tercer subtorneo transitivo. Observe que el conjunto de vértices  $\{1, 7, n+2\}$  induce un  $\vec{C}_3$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  no puede partirse en tres subtorneos transitivos y así  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) \geq 4$ . Probaremos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = 4$ . Por los lemas 2.2 y 2.3, tenemos que los dos subtorneos transitivos maximales  $H_0$  y  $J_0$  tienen cardinalidad  $n+1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , respectivamente. Definimos un tercer subtorneo

$$K_0 = \langle \{1\} \cup Y_1 \rangle.$$

Note que  $|K_0| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$  y  $K_0$  es transitivo por la definición de  $Y_1$ . Falta probar que  $K_0$  es un subtorneo transitivo maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle \setminus \{H_0 \cup J_0\}$ . Si  $K_0$  no fuera un subtorneo transitivo maximal, entonces podemos adherir al menos uno de los vértices de  $Y_0 \setminus \{1\}$ . Note que si  $i \in Y_0 \setminus \{1\}$ , tenemos que  $(i, i+n-2, i+n+1, i) \cong \vec{C}_3$ . Por lo tanto,  $K_0$  es un subtorneo transitivo maximal. Finalmente, el subtorneo  $L_0 = \langle Y_0 \setminus \{1\} \rangle$

## 2.1. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$

es transitivo por la definición de  $Y_0$  y es maximal. Así  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = 4$ . La prueba es completamente análoga para los casos cuando  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ . La partición en los subtorneos transitivos es

$$H_1 = \langle (X_0 \cup \{2n\}) \setminus Y_0 \rangle, J_1 = \langle X_1 \setminus Y_2 \cup \{2n\} \rangle, K_1 = \langle Y_2 \cup \{1\} \rangle, L_1 = \langle Y_0 \setminus \{1\} \rangle$$

para  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Para  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , tenemos que

$$H_2 = \langle X_0 \setminus Y_0 \rangle, J_2 = \langle X_1 \setminus Y_3 \rangle, K_2 = \langle (Y_3 \cup \{1\}) \rangle, L_2 = \langle Y_0 \setminus \{1\} \rangle.$$

□

De la proposición 2.1, los teoremas 1.5, 1.6 y 2.6 y la observación 1(iii), obtenemos la siguiente consecuencia.

**Corolario 2.7.**

$$dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 3 \\ 3 & \text{si } 4 \leq n \leq 7 \\ 4 & \text{si } n \geq 8. \end{cases}$$

Recuerde que  $D$  es  $r$ -dicromática crítica en vértices si  $dc(D) = r$  y  $dc(D - v) < r$  para todo  $v \in V(D)$ .

**Teorema 2.8.** *Sea  $r \in \{2, 3, 4\}$ . Entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es un torneo circulante  $r$ -dicromático crítico en vértices si y solo si  $n \in \{1, 4\}$ .*

*Demostración.* Si  $r = 2$ , claramente  $\vec{C}_3\langle 1 \rangle$  es 2-dicromático crítico en vértices.

Si  $r = 3$ , necesitamos verificar para cuáles valores de  $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ , el torneo circulante  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es 3-dicromático crítico en vértices. Note que si  $n = 4$ ,  $\vec{C}_9\langle 1 \rangle \cong \vec{C}_9\langle 4 \rangle$  por la observación 1(iii).  $\vec{C}_9\langle 1 \rangle$  es 3-dicromático crítico en vértices por el teorema 1.6. Para  $n = 5$ , el torneo circulante  $\vec{C}_{11}\langle 1 \rangle$  es 3-dicromático pero no es crítico en vértices por la proposición 2.1. Usando argumentos análogos, los torneos  $\vec{C}_{13}\langle 1 \rangle$  y  $\vec{C}_{15}\langle 1 \rangle$  no son críticos en vértices.

Si  $r = 4$ , el torneo circulante  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es 4-dicromático para toda  $n \geq 8$  por el teorema 2.6. Los vértices de  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  se parten en cuatro subtorneos transitivos maximales con  $|L_i| = \min\{|H_i|, |J_i|, |K_i|, |L_i|\}$  para  $i = 0, 1, 2$ . Note que  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es 4-dicromático crítico en vértices si la cardinalidad de  $L_i$  es igual a uno para  $i = 0, 1, 2$ . Como  $|L_i| = |Y_0| - 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ , tenemos que  $|L_i| = 1$  si y solo si  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2$ . Esto ocurre cuando  $n = 6, 7$  u 8. Por el teorema 2.6, esto solamente es posible para  $n \geq 8$ . Observe que  $|L_2| \geq 2$  para  $T = \vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  si  $n \geq 8$ . Como esta partición es maximal,  $T$  no es crítico en vértices.

Por lo tanto,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle$  es un torneo circulante  $r$ -dicromático crítico con  $r \in \{2, 3, 4\}$  en vértices si y solo si  $n$  es 1 o 4. □

## 2.2. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$

Recordemos que:

**Observación 5.**  $\vec{C}_9\langle 2 \rangle = \vec{C}_3[\vec{C}_3]$  es 3-dicromático, véase apéndice A. Este es un caso particular del teorema 8 de [31]. Note que no es crítico en vértices.

**Observación 6.** (Teorema 2.6 de [37])  $\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle$  es 4-dicromático crítico en vértices.

**Proposición 2.9.** Si  $n = 6$  y  $7$ , entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 3$ .

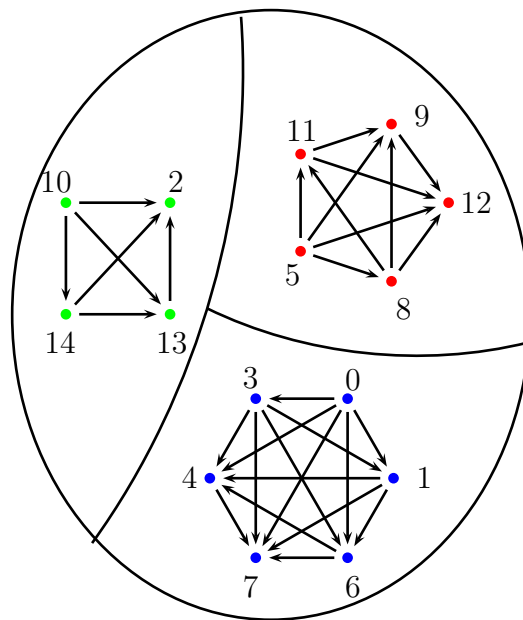


Figura 2.5. Partición del torneo  $\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle$

*Demostración.* Observe que  $\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle \not\cong \vec{C}_{15}\langle \emptyset \rangle$ , véase apéndice B. Entonces por el teorema 1.5,  $dc(\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle) \geq 3$ . Considere la siguiente partición de  $V(\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle)$ :

$$P_1 = \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}, P_2 = \{5, 8, 9, 11, 12\} \text{ and } P_3 = \{2, 10, 13, 14\}.$$

Tenemos que  $\langle P_1 \rangle \cong TT_6$ ,  $\langle P_2 \rangle \cong TT_5$  y  $\langle P_3 \rangle \cong TT_4$ . Por lo tanto  $dc(\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle) = 3$ . Note que los subtorneos transitivos inducidos por  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son maximales. Si  $\langle P_1 \rangle$  no fuera un subtorneo transitivo maximal, entonces el único vértice que podemos adherir es el vértice 13. No podemos agregar al vértice 5 por la observación 4(i). Observe que  $(4, 7, 13, 4) \cong \vec{C}_3$ . Entonces,  $P_1$  induce un subtorneo transitivo maximal. La conclusión anterior también es válida para  $P_2$  y  $P_3$ . Observe que  $\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle$  no es crítico en vértices. La prueba es análoga para  $n = 6$ .  $\square$

**Lema 2.10.** *El torneo  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  contiene un subtorneo transitivo maximal de  $n+1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  vértices, si  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle = \vec{C}_{2n+1}(1, 3, 4, \dots, n, 2n-1)$ . Por la observación 3, basta considerar un torneo transitivo maximal que contenga el vértice 0. Observe que  $N^+(0) = \{1, 3, 4, 5, 6, \dots, n, 2n-1\}$ . Note que todo vértice  $j \equiv 0, 1 \pmod{3}$  con  $j = 0, 1, \dots, n$  induce un subtorneo transitivo. Por la observación 4(i), no podemos tomar tres vértices consecutivos. Así del conjunto de vértices  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  eliminamos el conjunto de vértices  $Y_4 = \{j \in X_0 : j \equiv 2 \pmod{3}\}$ . Por lo tanto, los subtorneos transitivos son:

$$H_0 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3},$$

$$H_1 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle \text{ si } n \equiv 1 \pmod{3}.$$

Así,  $H_0$  y  $H_1$  tienen cardinalidad  $n+1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2k+1$ . Note que la diferencia entre  $H_0$  y  $H_1$  son los últimos vértices de estos conjuntos. Verificaremos que son maximales. Supongamos que no lo son. Entonces por la observación 4(i), el único vértice que podemos agregar es el vértice  $2n-1$ , pero el subconjunto de vértices  $\{n, 2n-1, n-3\}$  induce un  $\vec{C}_3$ , contradicción. Por lo tanto los torneos  $H_0$  y  $H_1$  son transitivos maximales.  $\square$

**Lema 2.11.** *Sea  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  tal que  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ . Entonces los subtorneos inducidos por*

$$\begin{array}{ll} X_3 \setminus H_0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ y} \\ X_3 \setminus H_1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \end{array}$$

*contienen un torneo transitivo maximal de orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Entonces por el lema 2.10,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  contiene el subtorneo transitivo inducido por  $H_0$ . Consideremos  $X_1 = [n+1, 2n]$ . Recordemos que

$$Y_2 = \{j \in X_1 : j \equiv 0 \pmod{3}\} \text{ y } J_0 = \langle X_1 \setminus Y_2 \rangle \quad (2.1)$$

Por la observación 4(i),  $J_0$  es transitivo de orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2k$ . Para determinar que es maximal, supongamos por contradicción que no lo es. Entonces podríamos agregar al menos uno de los vértices restantes. Sin pérdida de generalidad, agreguemos al vértice 2 (porque  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es transitivo en vértices), pero el subconjunto de vértices  $\{2, n+1, n+4\}$  induce un  $\vec{C}_3$ , lo cual contradice la transitividad. En el caso  $n \equiv 1 \pmod{3}$  los argumentos son similares y el subtorneo transitivo maximal es

$$J_1 = \langle X_1 \setminus Y_5 \rangle \text{ donde } Y_5 = \{j \in X_1 : j \equiv 1 \pmod{3}\}. \quad (2.2)$$

$\square$

**Lema 2.12.** *Un subtorneo transitivo maximal contenido en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es de orden:*

$$n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \text{ si } n \equiv 2 \pmod{3}.$$

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

---

*Demostración.* La demostración es similar a la del lema 2.10. El subtorneo transitivo maximal es

$$H_2 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle.$$

□

**Lema 2.13.** Sea  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  tal que  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Entonces el subtorneo inducido por

$$X_3 \setminus H_2$$

contiene un subtorneo transitivo maximal de orden  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

*Demostración.* La prueba es análoga a la del lema 2.11, donde el subtorneo transitivo es

$$J_2 = \langle (X_1 \cup \{n\}) \setminus Y_6 \rangle \text{ donde } Y_6 = \{j \in X_1 : j \equiv 1 \pmod{3}\}.$$

□

**Teorema 2.14.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 4$ , para toda  $n \geq 8$ .

*Demostración.* Por el teorema 1.5, se tiene que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) \geq 3$ . Primeramente, demostraremos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) \geq 4$ . Por contradicción, supongamos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 3$ , así  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  tiene una partición de sus vértices, la cual consiste de tres subtorneos transitivos. Supongamos que  $n \equiv 0 \pmod{3}$  (se hace de manera similar para cuando  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ). Por los lemas 2.10 y 2.11, se tiene que los subtorneos transitivos maximales que se pueden encontrar en  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  son  $H_0$  y  $J_0$ . Así los vértices  $\{2, 5, 8, \dots, n-1, n+3, \dots, 2n\}$  inducen el tercer subtorneo transitivo. Observemos que el subconjunto de vértices  $\{2, n-1, n+3\}$  induce un  $\vec{C}_3$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  no puede partirse en tres subtorneos transitivos por lo que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) \geq 4$ . Probaremos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 4$ . Por los lemas 2.10 y 2.11, tenemos que  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  tiene dos subtorneos transitivos maximales  $H_0$  y  $J_0$  de cardinalidad  $n+1 - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  y  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , respectivamente. El tercer subtorneo es  $K_0 = \langle Y_2 \cup \{2\} \rangle$ , donde  $|K_0| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ . El cuarto subtorneo es

$$L_0 = \langle Y_4 \setminus \{2\} \rangle \text{ donde } Y_4 = \{j \in X_0 : j \equiv 2 \pmod{3}\}.$$

Note que el subtorneo  $L_0$  es transitivo. Así  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 4$ . La partición correspondiente de los vértices del torneo  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es:

(i)  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , definimos  $Y_4 = \{j \in X_0 : j \equiv 2 \pmod{3}\}$

$$H_0 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle, J_0 = \langle X_1 \setminus Y_2 \rangle, K_0 = \langle Y_2 \cup \{2\} \rangle, L_0 = \langle Y_4 \setminus \{2\} \rangle.$$

(ii)  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , definimos  $Y_5 = \{j \in X_1 : j \equiv 1 \pmod{3}\}$

$$H_1 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle, J_1 = \langle X_1 \setminus Y_5 \rangle, K_1 = \langle Y_5 \cup \{2\} \rangle, L_1 = \langle Y_4 \setminus \{2\} \rangle.$$



### 2.3. Número dicromático $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

(iii)  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , definimos  $Y_6 = \{j \in X_1 : j \equiv 1 \pmod{3}\}$

$$H_2 = \langle X_0 \setminus Y_4 \rangle, \quad J_2 = \langle (X_1 \cup \{n\}) \setminus Y_6 \rangle, \quad K_2 = \langle Y_6 \rangle, \quad L_2 = \langle Y_4 \setminus \{n\} \rangle.$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de las observaciones 1(ii)–(iii), 5, 6, proposición 2.9 y teoremas 1.5, 1.6 y 2.14.

**Corolario 2.15.**

$$dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 3 \\ 3 & \text{si } n = 4, 6, 7 \\ 4 & \text{si } n = 5 \text{ y } n \geq 8. \end{cases}$$

**Teorema 2.16.** Sea  $r \in \{2, 3, 4\}$ . Entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es un torneo circulante  $r$ -dicromático crítico en vértices si y solo si  $n = 5$ .

*Demostración.* Si  $r = 2$ , por el teorema 1.5,  $\vec{C}_7\langle 2 \rangle \cong \vec{C}_7\langle \emptyset \rangle$  es 2-dicromático, pero no es crítico en vértices.

Sea  $r = 3$ . Para  $n = 4$ , tenemos que  $\vec{C}_9\langle 2 \rangle$  no es crítico en vértices por la observación 5. Para  $n = 6$  y  $7$ , por la proposición 2.9,  $\vec{C}_{13}\langle 2 \rangle$  y  $\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle$  no son críticos en vértices.

Si  $r = 4$ , entonces por la observación 6,  $\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle$  es crítico en vértices. Por el teorema 2.14,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es 4-dicromático para toda  $n \geq 8$ . Los vértices de  $\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle$  se parten en cuatro subtorneos transitivos maximales, donde

$$|L_i| = \min\{|H_i|, |J_i|, |K_i|, |L_i|\} \text{ para } i = 0, 1, 2.$$

Note que  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es 4-dicromático crítico en vértices si la cardinalidad de  $L_i$  es igual a uno para  $i = 0, 1, 2$ . Como  $|L_i| = |Y_4| - 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ , tenemos que  $|L_i| = 1$  si y solo si  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2$ . Esto ocurre cuando  $n = 6, 7$  o  $8$ . Por el teorema 2.14, esto es solamente posible para  $n \geq 8$ . Observe que  $|L_2| \geq 2$  para  $T = \vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  si  $n \geq 8$ . Como esta partición es maximal,  $T$  no es crítico en vértices. Por lo tanto,  $\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle$  es crítico en vértices si y solo si  $n = 5$ . □

### 2.3. Número dicromático $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Anteriormente probamos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 1 \rangle) = 4$  para toda  $n \geq 8$  y  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle 2 \rangle) = 4$  para toda  $n \geq 5$ . En esta parte demostramos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle l \rangle) = 4$  con  $3 \leq l \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  y  $n \geq 7$ .

**Proposición 2.17.**

(i) Sea  $n = 5$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle \cong \vec{C}_{11}\langle 5 \rangle) = 3$ .

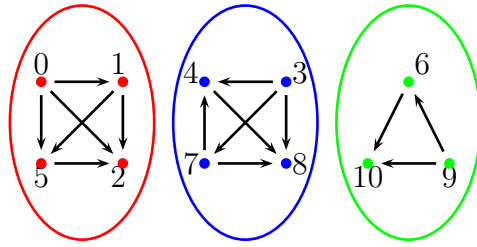


Figura 2.6. Partición del torneo  $\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle$

(ii) Sea  $n = 6$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{13}\langle 3 \rangle) = 3$ .

*Demostración.* (i) Para  $n = 5$ , como  $\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle \cong \vec{C}_{11}\langle 5 \rangle$ , por el teorema 1.6,  $dc(\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle) = 3$ . La figura 2.3 muestra la partición de los vértices de  $\vec{C}_{11}\langle 3 \rangle$ .

(ii) Para  $n = 6$ , por la observación 4(iii),  $\vec{C}_{13}\langle 3 \rangle \cong \vec{C}_{13}\langle 1 \rangle$  y por la proposición 2.1,  $dc(\vec{C}_{13}\langle 3 \rangle) = 3$ . □

**Proposición 2.18.**

(i) Sea  $n = 6$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{13}\langle 4 \rangle) = dc(ST_{13}) = 4$ .

(ii) Sea  $n = 7$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{15}\langle 4 \rangle) = 4$  y es crítico en vértices.

*Demostración.* (i) Para  $n = 6$ , tenemos a  $\vec{C}_{13}\langle 4 \rangle$ , denotado por  $ST_{13}$  en [38] (ver figura 2.7) y que es el único torneo de orden 13 (salvo isomorfismos) que no tiene subtorneos transitivos de orden 5. Además por el teorema 1.13 con  $m = 2$ ,  $dc(\vec{C}_{13}\langle 4 \rangle) = 4$ .

(ii) Para  $n = 7$ , tenemos a  $T = \vec{C}_{15}\langle 4 \rangle$ . Por el teorema 1.5,  $dc(T) \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición:

$$P_1 = \{0, 1, 2, 3, 7, 11\}, P_2 = \{4, 8, 12, 13, 14\}, P_3 = \{5, 6, 10\} \text{ y } P_4 = \{9\}.$$

Las subdigráficas inducidas por esta partición son isomorfas a un  $TT_6$ , a un  $TT_5$ , a un  $TT_3$  y a un  $TT_1$  respectivamente, luego  $dc(\vec{C}_{15}\langle 4 \rangle) = 4$ . □

**Lema 2.19.** Si  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene un subtorneo transitivo maximal  $H$ .

*Demostración.* Sean  $n$  y  $k$  enteros no negativos y considere el intervalo  $[0, n]$ . Aplicamos el algoritmo de la división de Euclides para  $n + 1$  y  $2k - 1$ . Entonces, existen únicos  $\alpha, r \in \mathbb{N}$  tales que

$$n + 1 = \alpha(2k - 1) + r \text{ con } 0 \leq r < 2k - 1.$$

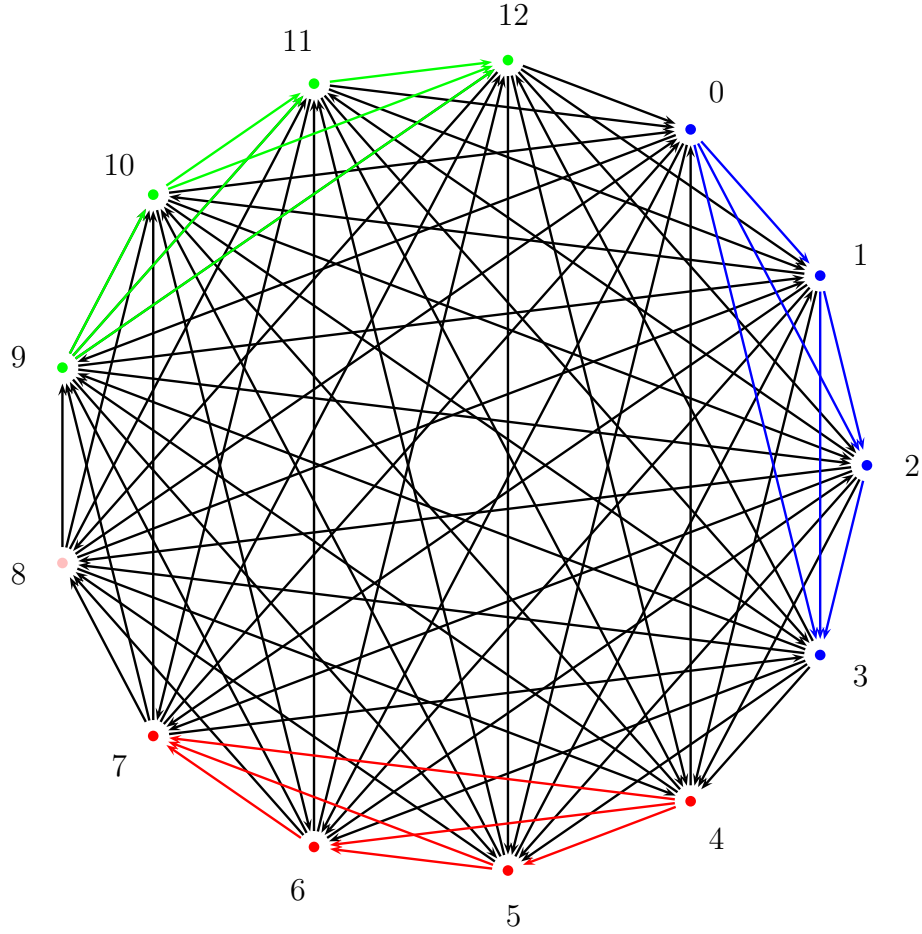


Figura 2.7. Torneo  $ST_{13}$

Consideramos la partición del intervalo  $[0, 2k - 2] = [0, k - 1] \cup [k, 2k - 2]$  y definimos

$$n + 1 = \begin{cases} \alpha(2k - 1) + s_1 & \text{si } s_1 \in [0, k - 1] \\ \alpha(2k - 1) + s_2 & \text{si } s_2 \in [k, 2k - 2]. \end{cases}$$

Observe que como  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , tenemos que  $s_1 \in [1, k - 1]$ .

Sea

$$W = \bigcup_{i=0}^{\alpha-1} [i(2k - 1), i(2k - 1) + (k - 1)].$$

Definimos al subtorneo  $H$  de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  de la siguiente forma:

- (i) Si  $s_1 \in [1, k - 1]$ , entonces  $H = \langle W \cup [\alpha(2k - 1), n] \rangle$ . Más aún, si  $k = \frac{n+1}{2}$  y  $n$  es impar, entonces  $H = \langle W \cup \{n, 2n + 1 - k\} \rangle$ .
- (ii)  $H = \langle W \cup [\alpha(2k - 1), \alpha(2k - 1) + k - 1] \rangle$  para toda  $s_2 \in [k, 2k - 2]$ .

Note que  $H$  es un subtorneo transitivo por construcción, porque este conjunto de vértices no contiene  $\vec{C}_3$ 's inducidos. Probaremos que  $H$  es maximal por contradicción.

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulares

Como  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es transitivo en vértices, sin pérdida de generalidad, elegimos el vértice 0. Observe que

$$N^+(0) = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, 2n+1-k\} \text{ y}$$

$$N^+(0) \setminus V(H) = (X_0 \cup \{2n+1-k\}) \setminus (V(H) \cup \{k\}).$$

Para todo vértice  $x \in N^+(0) \setminus V(H)$  existen  $h_1, h_2 \in V(H)$  tales que el conjunto de vértices  $\{h_1, h_2, x\}$  induce un  $\vec{C}_3$  (por ejemplo,  $x = k+1$ ,  $h_1 = 1$  y  $h_2 = k-1$ ), una contradicción. Por lo tanto,  $H$  es maximal.  $\square$

**Lema 2.20.** *Si  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , entonces  $X_3 \setminus V(H)$  contiene un subtorneo transitivo maximal  $J$ , donde  $H$  es el subtorneo definido en el lema 2.19.*

*Demostración.* La construcción de  $J$  se obtiene similarmente como en el lema 2.19 para  $H$ , pero tenemos dos formas para definir  $J$ .

■ Caso 1.  $\alpha = 1$ .

(i) Si  $s_1 \in [1, k-1]$ , entonces  $J = [k, 2k-2] \cup [3k-2, 3k+s_1-2]$ . Note que  $k = \frac{n+1}{2}$  con  $n$  impar si y solo si  $s_1 = 1$ . Entonces  $J = [k, 2k-2] \cup \{3k-2\}$  por la construcción de  $H$ .

(ii) Si  $s_2 \in [k, 2k-2]$ , entonces  $J = [k, 2k-2] \cup [3k-1, 4k-2]$ .

■ Caso 2.  $\alpha > 1$ . Sea

$$U = \bigcup_{i=0}^{\alpha-1} [(n+1) + i(2k-1), (n+1) + i(2k-1) + (k-1)].$$

(i) Si  $s_1 \in [1, k-1]$ , entonces  $J = \langle U \cup [(n+1) + \alpha(2k-1), 2n] \rangle$ .

(ii)  $J = \langle U \cup [(n+1) + \alpha(2k-1), (n+1) + \alpha(2k-1) + k-1] \rangle$  para toda  $s_2 \in [k, 2k-2]$ .

Observe que  $H$  es un subtorneo transitivo maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  por el lema 2.19. Afirmamos que  $J$  es maximal en  $V(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \setminus V(H)$ . Si  $J$  no fuera maximal, podemos adherir al menos un vértice de  $V(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \setminus (V(H) \cup V(J))$ .

Para el caso 1, considere

$$\{n+k+1, 3k-3\} \subseteq V(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \setminus (V(H) \cup V(J)).$$

Tenemos que  $(k, n+k, n+k+1, k) \cong \vec{C}_3$  o  $(2k-2, 3k-3, 3k-2, 2k-2) \cong \vec{C}_3$ . Por lo tanto,  $J$  es maximal.

Para el caso 2, considere

$$k \in V(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \setminus (V(H) \cup V(J)).$$

Tenemos que  $(k, n+k, n+2k+1, k) \cong \vec{C}_3$ . Así,  $J$  es maximal.  $\square$

### 2.3. Número dicromático $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

**Teorema 2.21.** *Si  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$  para  $n \geq 7$ .*

*Demostración.* Considere  $T = \vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ . Por el teorema 1.5,  $dc(T) \geq 3$ . Probaremos que el  $dc(T) = 4$ . Por contradicción, supongamos que  $dc(T) = 3$ . Así,  $T$  tiene una partición de sus vértices que consiste de tres subtorneos transitivos. Por los lemas 2.19 y 2.20, dos subtorneos ajenos transitivos maximales en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  son  $H$  y  $J$ . Entonces el resto del conjunto de vértices  $X_3 \setminus (V(H) \cup V(J))$  induce el tercer subtorneo transitivo.

Consideramos tres casos.

- Caso 1.  $J = \langle [k, 2k - 2] \cup [3k - 2, 3k + s_1 - 2] \rangle$  obtenido por el caso 1(i) del lema 2.20. Por lo tanto,  $K = \langle [3k + s_1 - 1, 2n] \rangle$ . Más aún,  $|J| = k + s_1$  y  $|H| = n - k + 2$ . Como  $k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , tenemos que

$$|K| = 2n + 1 - (|H| + |J|) = 2k - 3 > k.$$

En este caso,  $K$  es inducido por al menos  $k + 1$  vértices consecutivos. Por lo tanto  $K$  no puede ser un subtorneo transitivo por la definición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ . Entonces  $dc(T) \geq 4$ . Los casos siguientes son necesarios porque la estructura de  $K$  y  $L$  cambia para diferentes valores de  $s_1$ :

- (i) Si  $s_1 = 1, 2$  ó  $3$ , entonces

$$K = \langle [n + 1, 3k - 3] \cup [4k - 3, 2n] \rangle \text{ y } L = \langle [3k + s_1 - 1, 4k - 4] \rangle.$$

- (ii) Si  $s_1 \in [4, k - 5]$ , entonces

$$\begin{aligned} K &= \langle [n + 1, 3k - 3] \cup [4k - 3, 5k - 4] \rangle \text{ y} \\ L &= \langle [3k + s_1 - 1, 4k - 4] \cup [5k - 3, 2n] \rangle. \end{aligned}$$

- (iii) Si  $s_1 = k - 4$ , entonces

$$\begin{aligned} K &= \langle [n + 1 = 3k - 4, 3k - 3] \cup [4k - 3, 5k - 4] \rangle \text{ y} \\ L &= \langle [4k - 5, 4k - 4] \cup [5k - 3, 2n] \rangle. \end{aligned}$$

- (iv) Si  $s_1 = k - 3$ , entonces

$$\begin{aligned} K &= \langle [n + 1 = 3k - 5, 3k - 3] \cup [4k - 3, 5k - 4] \rangle \text{ y} \\ L &= \langle \{4k - 4\} \cup [5k - 3, 2n] \rangle. \end{aligned}$$

- (v) Si  $s_1 = k - 1$  ó  $k - 2$ , entonces

$$K = \langle [n + k + 1, n + 2k] \rangle \text{ y } L = \langle [n + 2k + 1, 2n] \rangle.$$

Por construcción y la definición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , los subtorneos  $K$  y  $L$  son transitivos. Observe que si  $s_1 \in [1, k - 3]$ , entonces  $4k - 4 \notin V(K)$  y

$$(4k - 4, 4k - 3, 3k - 3, 4k - 4) \cong \vec{C}_3.$$

Por lo tanto,  $K$  es maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle \setminus (H \cup J)$ . Si  $s_1 = k - 1$  o  $k - 2$ , entonces  $n + 2k + 1 \notin V(K)$  y

$$(n + k + 1, n + 2k, n + 2k + 1, n + k + 1) \cong \vec{C}_3.$$

Luego,  $K$  es maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle \setminus (H \cup J)$ . Así  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$ .

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

- Caso 2.  $J = [k, 2k - 2] \cup [3k - 1, 4k - 2]$  obtenido del caso 1(ii) del lema 2.20. Tenemos que  $X_3 \setminus (V(H) \cup V(J)) = [4k - 1, 2n]$ , pero  $2n - 4k + 2 > k$  implica que el subtorneo inducido por  $X_3 \setminus (V(H) \cup V(J))$  tiene al menos  $k + 1$  vértices consecutivos y un  $\vec{C}_3$  es inducido en  $X_3 \setminus (V(H) \cup V(J))$ . Por lo tanto,  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \geq 4$ . Los casos siguientes muestran la partición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  en subtorneos transitivos.

(i) Si  $s_2 = k$ , entonces

$$K = \langle [4k - 1, 5k - 2] \rangle \text{ y } L = \langle [5k - 1, 2n] \rangle.$$

(ii) Si  $s_2 = k + 1$ , entonces

$$K = \langle [4k - 1, 5k - 2] \cup \{6k - 2 = 2n\} \rangle \text{ y } L = \langle [5k - 1, 6k - 3] \rangle.$$

(iii) Si  $s_2 = k + 2$ , entonces

$$K = \langle [4k - 1, 5k - 2] \cup [6k - 2, 6k] \rangle \text{ y } L = \langle [5k - 1, 6k - 3] \rangle.$$

(iv) Si  $s_2 \in [k + 3, 2k - 2]$ , entonces

a) si  $2n \leq 7k - 3$ , tenemos que

$$\begin{aligned} K &= \langle [4k - 1, 5k - 2] \cup [6k - 2, 2n] \rangle \text{ y} \\ L &= \langle [5k - 1, 6k - 3] \rangle, \end{aligned}$$

b) si  $2n > 7k - 3$ , entonces

$$\begin{aligned} K &= \langle [4k - 1, 5k - 2] \cup [6k - 2, 7k - 3] \rangle \text{ y} \\ L &= \langle [5k - 1, 6k - 3] \cup [7k - 2, 2n] \rangle. \end{aligned}$$

Por construcción y la definición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , los subtorneos  $K$  y  $L$  son transitivos. Observe que  $5k - 1 \notin V(K)$  y  $(4k - 1, 5k - 2, 5k - 1, 4k - 1) \cong \vec{C}_3$ . Por lo tanto,  $K$  es maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle \setminus (H \cup J)$ . Así,  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$ .

- Caso 3.  $J$  se obtiene por el caso 2(i) y 2(ii) del lema 2.20. Si  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 3$ , entonces  $X_3 \setminus (V(H) \cup V(J))$  induce un subtorneo transitivo, pero el conjunto de vértices  $\{k, 3k - 1, n + k + 1\} \subseteq X_3 \setminus (V(H) \cup V(J))$  induce un  $\vec{C}_3$ . Por lo tanto  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \geq 4$ . La partición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  en subtorneos transitivos es  $H$ ,  $J$ ,  $K = \langle X_1 \cup \{k\} \setminus V(J) \rangle$  y

$$L = \langle X_3 \setminus (V(H) \cup V(J) \cup V(K)) \rangle.$$

Por construcción y por la definición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , los subtorneos  $K$  y  $L$  son transitivos maximales. Observe que  $k + 1 \notin V(K)$ . Entonces, el conjunto de vértices  $\{k, k + 1, n + k + 1\}$  induce un  $\vec{C}_3$ . Por lo tanto,  $K$  es maximal en  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle \setminus (H \cup J)$ .

### 2.3. Número dicromático $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Esto prueba que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$ . □

**Ejemplo 1.** *El siguiente ejemplo ilustra el teorema 2.21, caso 2(ii). El torneo  $\vec{C}_{29}\langle 5 \rangle$  se parte en los siguientes cuatro subtorneos transitivos*

$$H = \langle [0, 4] \cup [9, 13] \rangle, \quad K = \langle [5, 8] \cup [14, 18] \rangle, \quad J = \langle [19, 23] \cup \{28\} \rangle \quad \text{y} \quad L = \langle [24, 27] \rangle.$$

Observe que  $H \cong TT_{10}$ ,  $J \cong TT_9$ ,  $K \cong TT_6$  y  $L \cong TT_4$ .

**Teorema 2.22.** *Si  $3 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es un torneo circulante 4-dicromático crítico en vértices si y solo si*

- (i)  $n = 7$  y  $k \in \{3, 4\}$ ,
- (ii)  $n = 9$  y  $k = 4$ ,
- (iii)  $n = 10$  y  $k = 5$ ,
- (iv)  $n = 13$  y  $k = 6$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.21,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es 4-dicromático, donde  $H, J, K$  y  $L$  son subtorneos transitivos maximales. Note que por la partición de los vértices de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , los casos a considerar son cuando  $\alpha = 1$ . En este caso el orden de  $L$  puede ser uno y  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es un torneo circulante 4-dicromático crítico en vértices. Tenemos dos casos cuando  $\alpha = 1$ .

■ Caso 1.  $s_1 \in [1, k - 1]$ .

- (i) Si  $s_1 = 1, 2, 3$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 1(i), tenemos que el torneo es crítico en vértices si

$$L = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 & \text{y } n = 7 \\ k = 5 & \text{y } n = 10 \\ k = 6 & \text{y } n = 13. \end{cases}$$

- (ii) Si  $s_1 = k - 3$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 1(iv), este es crítico en vértices si y solo si  $|L| = 1$ , si y solo si  $2n = 5k - 4$  y  $n = 3k - 5$ , si y solo si  $k = 6$  y  $n = 13$ .
- (iii) Si  $s_1 = k - 2$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 1(v), tenemos que  $|L| = k - 2$ . Este es crítico en vértices si y solo si  $|L| = 1$  si y solo si  $k = 3$  y  $n = 7$ .
- (iv) Si  $s_1 = k - 1$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 1(v), tenemos que  $|L| = n - 2k$ . Este es crítico en vértices si y solo si  $|L| = 1$  si y solo si  $n = 2k + 1$  y  $n = 3k - 3$ , si y solo si  $k = 4$  y  $n = 9$ .

■ Caso 2.  $s_2 \in [k, 2k - 2]$

- (i) Si  $s_2 = k$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 2(i), tenemos que  $|L| = k - 2$ . Este es crítico en vértices si y solo si  $|L| = 1$  si y solo si  $k = 3$  y  $n = 7$ .

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

- (ii) Si  $s_2 \in [k+1, 2k-2]$ , entonces por la demostración del teorema 2.21 caso 2(ii)–(iv)(a), tenemos que  $|L| = k-2$ , pero este no es necesariamente crítico en vértices si  $|L| = 1$ , porque los últimos vértices quedan en  $K$ . Cuando  $L$  se obtiene mediante la demostración del teorema 2.21 caso 2(iv)(b),  $|L|$  nunca es uno. En cualquier caso,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  no es un torneo circulante 4-dicromático crítico en vértices.

□

### 2.4. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ para $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$

En esta parte demostramos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle l \rangle) = 4$  si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$

**Lema 2.23.** *Si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ , entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene un subtorneo transitivo maximal de  $k$  vértices.*

*Demostración.* Como  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es transitivo en vértices, es suficiente considerar un subtorneo transitivo maximal que contenga al vértice 0. Observe que

$$N^+(0) = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, 2n+1-k\}.$$

Definimos  $H = \langle [0, k-1] \rangle$ . Este torneo es transitivo por la definición de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ . Si  $H$  no fuera maximal, entonces podemos adherir un vértice de  $N^+(0) \setminus [0, k-1]$ . Sea  $j \in [k+1, n]$ . Sin pérdida de generalidad, seleccionemos  $j = k+1$ . Así, el conjunto de vértices  $\{1, t, k+1\}$  con  $t \in [2, k-1]$  induce un  $\vec{C}_3$ . Lo mismo ocurre para el vértice  $2n+1-k$ . Observe que  $(3, k-1, 2n+1-k, 3) \cong \vec{C}_3$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $H$  es maximal.

□

**Lema 2.24.** *Si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ , entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene tres subtorneos transitivos maximales de orden  $k$ .*

*Demostración.* Por el lema 2.23,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene un subtorneo transitivo maximal  $H$ . Note que  $|N^+(0)| - |H| < k$ . Considere los subtorneos siguientes

$$J = \langle [k, 2k-1] \rangle \quad \text{y} \quad K = \langle [2k, 3k-1] \rangle.$$

Observe que  $J$  y  $K$  son isomorfos a  $H$ . Sean  $\varphi_1 : H \rightarrow J$  tal que  $\varphi_1(j) = j+k$ ,  $\varphi_2 : H \rightarrow K$  tal que  $\varphi_2(j) = j+2k$  con  $0 \leq j \leq k-1$ , ( $\varphi_1, \varphi_2$ , son biyectivas por lo que es claro que  $H$  es isomorfo a  $J$  y  $H$  es isomorfo a  $K$ , respectivamente). Como en el lema 2.23, podemos probar que  $J$  y  $K$  son subtorneos transitivos maximales. Entonces,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene tres subtorneos transitivos maximales de  $k$  vértices.

□

**Teorema 2.25.** *Si  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ , entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$ .*



## 2.5. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , $k = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1, \dots, n$

*Demostración.* Primero probamos que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \geq 4$ . Por el lema 2.24, tenemos que  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  contiene tres subtorneos transitivos maximales de  $k$  vértices. Entonces  $|\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle| - 3k > 0$ , así  $V(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle)$  no puede ser partido en tres subtorneos transitivos. Luego  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \geq 4$ . Falta verificar que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 4$ . Por el lema 2.24, tenemos que  $H$ ,  $J$  y  $K$  son subtorneos transitivos maximales de orden  $k$ . El cuarto subtorneo transitivo es  $L = \langle [3k, 2n] \rangle$ . Por lo tanto  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es 4-dicromático.  $\square$

**Teorema 2.26.** *Si  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ , entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es un torneo circulante 4-dicromático crítico en vértices si y solo si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .*

*Demostración.* Por el teorema 2.25,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es 4-dicromático. Observe que el orden de  $H$ ,  $J$  y  $K$  es  $k$  y  $|L| = 2n - 3k + 1$ . Note que  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es 4-dicromático crítico en vértices si la cardinalidad de  $L$  es igual a uno y esto ocurre si y solo si  $k = \frac{2}{3}n$  cuando  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

**Corolario 2.27** (Neumann-Lara [38]).  *$\vec{C}_{6m+1}\langle 2m \rangle$  es un torneo circulante 4-dicromático crítico en vértices con  $m \geq 2$ .*

## 2.5. Número dicromático de $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ , $k = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1, \dots, n$

**Proposición 2.28.**

(i) *Sea  $n = 8$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{17}\langle 5 \rangle) = 4$ .*

(ii) *Sea  $n = 9$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{19}\langle 6 \rangle) = 4$  y es crítico en vértices.*

*Demostración.* Observe que por el teorema 1.5, se tiene que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle n-3 \rangle) \geq 3$  para  $n \geq 4$ , por lo que en adelante sólo nos concentraremos en probar que  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle n-3 \rangle)$  es igual a 3 o 4. Consideremos el torneo  $\vec{C}_{17}\langle 5 \rangle$ . Se tiene la siguiente partición de los vértices del torneo  $P_1 = \{0, 1, 4, 7, 8\}$ ,  $P_2 = \{2, 3, 6, 9, 10\}$ ,  $P_3 = \{5, 11, 12, 13\}$  y  $P_4 = \{14, 15, 16\}$ , donde las subdigráficas inducidas que se forman con los subconjuntos de vértices dados son dos  $TT_5$ , un  $TT_4$  y un  $TT_3$  respectivamente, así  $dc(\vec{C}_{17}\langle 5 \rangle) = 4$ . Consideremos el torneo  $\vec{C}_{19}\langle 6 \rangle$  por el teorema 1.13,  $\vec{C}_{19}\langle 6 \rangle$  es 4-dicromático crítico en vértices. La partición de los vértices del torneo en cuatro subconjuntos:  $P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $P_2 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ,  $P_3 = \{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$  y  $P_4 = \{18\}$  los cuales inducen tres  $TT_6$  y un  $TT_1$ .  $\square$

La proposición 2.28 completa los casos faltantes, que nos llevan al siguiente resultado:

**Teorema 2.29.** *Sea  $n \geq 3$ . Entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 3$  para  $k = \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor + 1, \dots, n$ .*

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulares

*Demostración.* Sea  $n \geq 3$ . Por el teorema 1.5,  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición de los vértices de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$ :

$$H = [0, k-1], J = [k, 2k-1] \text{ y } K = [2k, 2n].$$

Observe que  $H$  induce un  $TT_k$  porque  $N^+(0) = \{1, 2, \dots, k\}$ . También  $J$  y  $K$  inducen un  $TT_k$  y un  $TT_{2n-2k+1}$ , respectivamente. Entonces  $dc(\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle) = 3$ .  $\square$

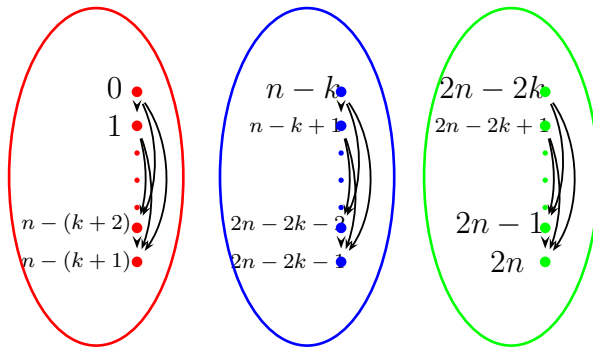


Figura 2.8.  $H, J$  y  $K$ , del teorema 2.29

**Teorema 2.30.** Si  $k = \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor + 1, \dots, n$ ,  $n \geq 3$ . Entonces  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es un torneo circular 3-dicromático crítico en vértices si y solo si  $n = k$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.29,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es 3-dicromático y se parte en tres subtorneos transitivos maximales donde

$$|H| = |J| = k \text{ y } |K| = 2n - 2k + 1.$$

Como  $k = \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor + 1, \dots, n$ , tenemos que  $k \geq 2n - 2k + 1$ . Por lo tanto,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es crítico en vértices si y solo si  $2n - 2k + 1 = 1$ , si y solo si  $n = k$ .  $\square$

**Corolario 2.31** ([33], teorema 2).  $\vec{C}_{2n+1}\langle n \rangle$  es un torneo circular 3-dicromático crítico en vértices para  $n \geq 3$ .

Por los teoremas 2.8, 2.16, 2.22, 2.26 y 2.30 se tiene la siguiente caracterización:

**Teorema 2.32.** Sea  $r \in \{2, 3, 4\}$ ,  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  es  $r$ -dicromático crítico en vértices si y solo si

- (i)  $r = 2, n = 1$  y  $k = 1,$
- (ii)  $r = 3,$ 
  - (a)  $n = 4$  y  $k = 1,$
  - (b)  $n \geq 3$  y  $k = n;$
- (iii)  $r = 4,$ 
  - (a)  $n = 5$  y  $k = 2,$
  - (b)  $n = 7$  y  $k \in \{3, 4\}$
  - (c)  $n = 9$  y  $k = 4,$
  - (d)  $n = 10$  y  $k = 5,$
  - (e)  $n = 13$  y  $k = 6,$
  - (f)  $n = 3m$  y  $k = 2m$  ( $m \geq 2$ ).

La tabla 2.3 de la página 40 muestra un panorama general del número dicromático de los torneos circulantes. Observe que los números dados en rojo son los resultados conocidos anteriormente y los números dados en azul son los que hemos probado en este trabajo.

## 2.6. El número $\xi(k)$

En 1994, V. Neumann-Lara definió  $\xi(k)$  como el mínimo orden posible de un torneo  $k$ -dicromático. Además demostró que  $\xi(3) = 7$  y  $\xi(4) = 11$  (véase página 8 de la introducción).

Neumann-Lara probó que  $17 \leq \xi(5) \leq 19$  y conjeturó que  $\xi(5) = 17$ . Este problema es muy complicado y cualquier avance es de suma importancia porque implica además un avance para el problema de Erdős y Moser que consiste en determinar el mínimo orden  $f(k) = n$  de un torneo que contenga un subtorneo isomorfo a  $TT_k$ , ver [37] y [48].

**Proposición 2.33.** *Ningún torneo circulante de orden 17 es 5-dicromático.*

Observe que hay 16 torneos circulantes distintos salvo isomorfismos, véase apéndice B.

$dc(\vec{C}_{17}(\emptyset)) = 2$ , por teorema 1.5	$dc(\vec{C}_{17}(1)) = 4$ , por teorema 2.6
$dc(\vec{C}_{17}(8)) = 3$ , por teorema 1.6	$dc(\vec{C}_{17}(7, 8)) = 3$ (*)
$dc(\vec{C}_{17}(7)) = 3$ , por el teorema 2.29	$dc(\vec{C}_{17}(6, 8)) = 3$
$dc(\vec{C}_{17}(6)) = 3$ , por teorema 2.29	$dc(\vec{C}_{17}(6, 7)) = 3$
$dc(\vec{C}_{17}(5)) = 4$ , por proposición 2.28	$dc(\vec{C}_{17}(5, 6)) = 4$
$dc(\vec{C}_{17}(4)) = 4$ , por teorema 2.21	$dc(\vec{C}_{17}(4, 6)) = 4$
$dc(\vec{C}_{17}(3)) = 4$ , por teorema 2.21	$dc(\vec{C}_{17}(3, 8)) = 4$ (**)
$dc(\vec{C}_{17}(2)) = 4$ , por teorema 2.14	$dc(\vec{C}_{17}(1, 8)) = 3$

Tabla 2.1. Número dicromático de torneos circulantes distintos de orden 17 salvo isomorfismos

## 2. Número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes

*Demostración.* Consideramos torneos de orden 17 a los cuales se les voltean dos flechas. Como ejemplos, consideremos a (\*) y a (\*\*). Tomemos al torneo  $T = \vec{C}_{17}\langle 3, 8 \rangle$ . Por el teorema 1.5, se tiene que  $dc(T) \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición de los vértices de  $T$  dada por:

$$P_1 = \{0, 14, 2, 4, 6\}, P_2 = \{1, 3, 5, 7, 15\} P_3 = \{8, 9, 13, 10\} \text{ y } P_4 = \{11, 12, 16\}.$$

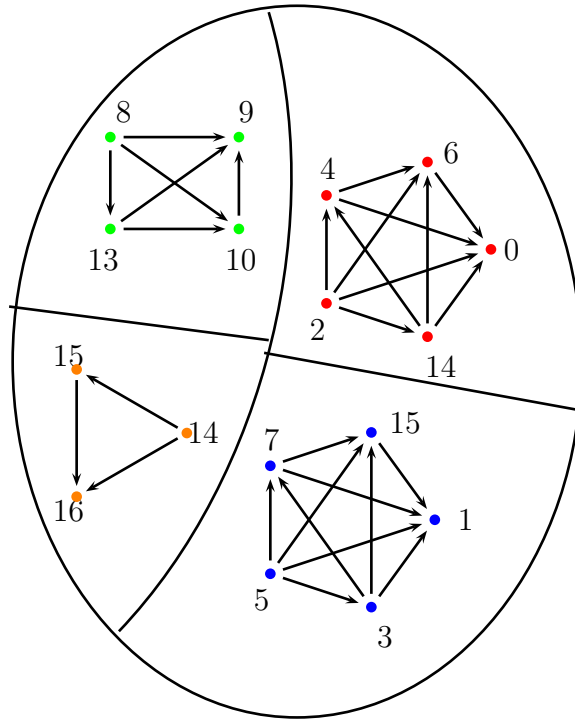


Figura 2.9. Partición del torneo  $\vec{C}_{17}\langle 3, 8 \rangle$

Los torneos inducidos por  $P_1$  y  $P_2$  son isomorfos a  $TT_5$ , el inducido por  $P_3$  es isomorfo a un  $TT_4$  y el inducido por  $P_4$  es isomorfo a un  $TT_3$ , véase figura 2.9. Por lo tanto,  $dc(\vec{C}_{17}\langle 3, 8 \rangle) = 4$ . Consideremos el torneo  $T' = \vec{C}_{17}\langle 7, 8 \rangle$ . Por el teorema 1.5, se tiene que  $dc(T') \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición de los vértices de  $T'$  dada por:

$$P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P_2 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}, \text{ y } P_3 = \{14, 15, 16\}.$$

Los torneos inducidos por  $P_1$  y  $P_2$  son isomorfos a un  $TT_7$  y el torneo inducido por  $P_3$  es isomorfo a un  $TT_3$ , véase figura 2.10.

Por lo tanto,  $dc(\vec{C}_{17}\langle 7, 8 \rangle) = 3$ . El resto de los casos se demuestran similarmente.  $\square$

**Conjetura 2.34** (Neumann-Lara, [37]). *Existe un torneo regular 5-dicromático con 17 vértices.*

Para ilustrar la dificultad de la conjetura 2.34 consideramos los siguientes resultados y comparaciones.

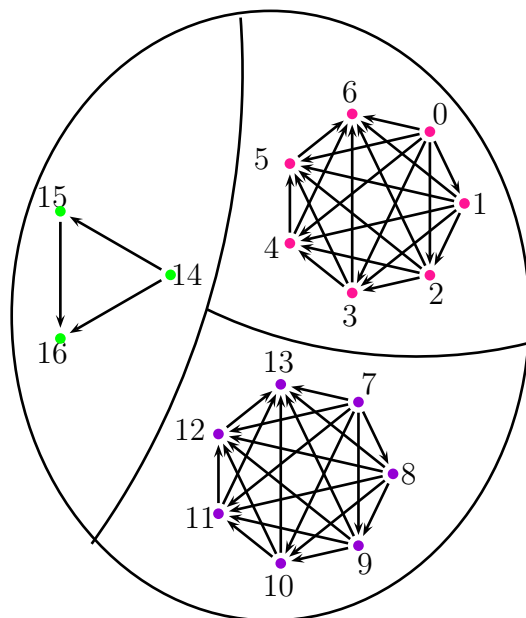


Figura 2.10. Partición del torneo  $\vec{C}_{17}\langle 7, 8 \rangle$

**Teorema 2.35** (Teorema 6, Spencer [49]). Sean  $n = 2m + 1$  y  $R_n$  el número de torneos regulares de orden  $n$ . Entonces

$$\left( \frac{R_n}{2^{\binom{n}{2}}} \right)^{1/n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} (1 + o(1)).$$

Sea  $R^*(n)$  el número de torneos regulares salvo isomorfismos, véase Spencer [49] pág. 120. Entonces

$$R^*(n) = 2^{\binom{n}{2}} \left( \frac{e\sqrt{2}(1 + o(1))}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} \right)^n > 2^{\binom{n}{2}} \left( \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} \right)^n.$$

Así,

$$R^*(17) > 1,903,790,000,000,000.$$

Note que el número de movimientos que se tienen que hacer en el juego de las torres de Hanoi con 50 y 64 discos es:

$$2^{50} - 1 = 1125899906842623, \quad 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Mientras que el número de estrellas en el universo es:

$$10^{22} = 10000000000000000000000.$$

Así,

$$10^{22} > 2^{64} - 1 > R^* > 2^{50} - 1.$$

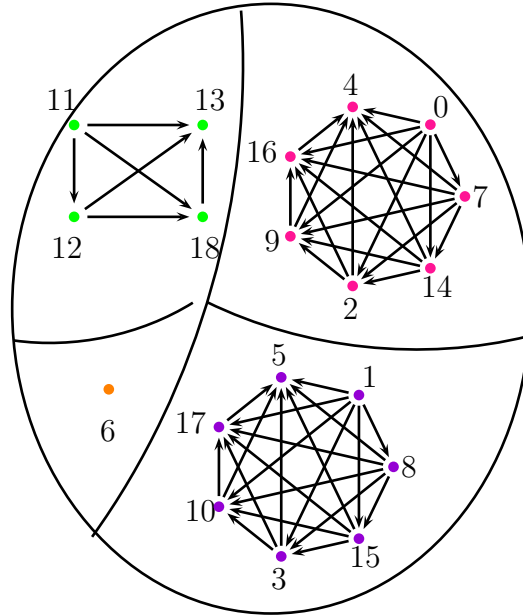


Figura 2.11. Partición del torneo  $\vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle$

**Proposición 2.36.** *Los números dicromáticos de todos los torneos circulares de orden 19 salvo isomorfismos se muestran en la tabla 2.2.*

$dc(\vec{C}_{19}\langle \emptyset \rangle) = 2$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 2 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 3, 6 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 1 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 3 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle) = 3$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 2 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 5 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 4, 9 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 3 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 6 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 5, 8 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 4 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 8 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 5, 9 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 5 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 9 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 6, 9 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 6 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 2, 3 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 7, 9 \rangle) = 3$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 7 \rangle) = 3$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 2, 4 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 2, 8 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 8 \rangle) = 3$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 2, 9 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 1, 2, 9 \rangle) = 4$
$dc(\vec{C}_{19}\langle 9 \rangle) = 3$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle) = 4$	$dc(\vec{C}_{19}\langle 2, 3, 8 \rangle) = 5$

Tabla 2.2. Número dicromático de todos los torneos circulares de orden 19 salvo isomorfismos

*Demostración.* Daremos una demostración de algunos de los casos. Los demás se demuestran similarmente. Por el teorema 1.5,  $dc(\vec{C}_{19}\langle \emptyset \rangle) = 2$ . Por los teoremas 1.6, 1.13,

2.6, 2.14, 2.21, 2.25, 2.29 el número dicromático de  $\vec{C}_{19}\langle l \rangle$  para toda  $1 \leq l \leq 9$  está determinado y es igual a 3 o 4. Sea el torneo  $T' = \vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle$ . Por el teorema 1.5,  $dc(T') \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición de los vértices de  $T'$  dada por:

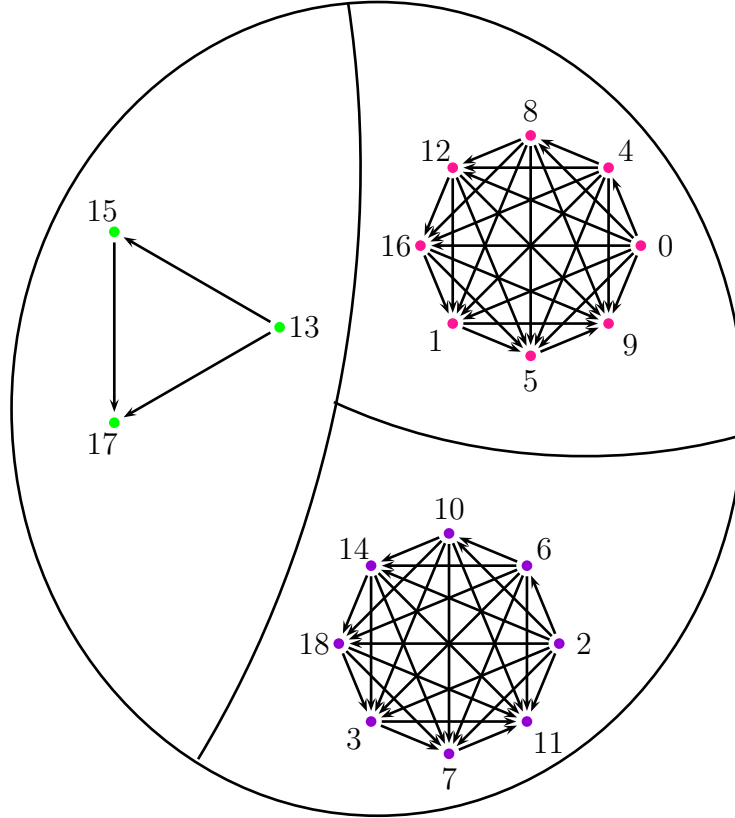


Figura 2.12. Partición del torneo  $\vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle$

$$P_1 = \{0, 7, 14, 2, 9, 16, 4\}, P_2 = \{1, 8, 15, 3, 10, 17, 5\}, P_3 = \{11, 12, 18, 13\}$$

$$\text{y } P_4 = \{6\}.$$

Los torneos inducidos por  $P_1$  y  $P_2$  son isomorfos a un  $TT_7$ , el torneo inducido por  $P_3$  es isomorfo a un  $TT_4$  y el torneo inducido por  $P_4$  es isomorfo a un  $TT_1$ , véase figura 2.11. Por lo tanto,  $dc(\vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle) = 4$ . Análogamente,  $dc(\vec{C}_{19}\langle i, j \rangle) = 4$  con  $1 \leq i, j \leq 9$ , siempre que  $i \neq 3, j \neq 7$ . Consideremos al torneo  $T'' = \vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle$ . Este caso lo consideramos especial, pues es el único torneo que al voltear dos flechas, se tiene que  $dc(T'') = 3$ . Por el teorema 1.5,  $dc(T'') \geq 3$ . Consideremos la siguiente partición de los vértices de  $T''$  dada por:

$$P_1 = \{0, 4, 8, 12, 16, 1, 5, 9\}, P_2 = \{2, 6, 10, 14, 18, 3, 7, 11\} \text{ y } P_3 = \{13, 15, 17\}.$$

Los torneos inducidos por  $P_1$  y  $P_2$  son isomorfos a un  $TT_8$  y el torneo inducido por  $P_3$  es isomorfo a un  $TT_3$ , véase figura 2.12. Por lo tanto,  $dc(\vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle) = 3$ .  $\square$

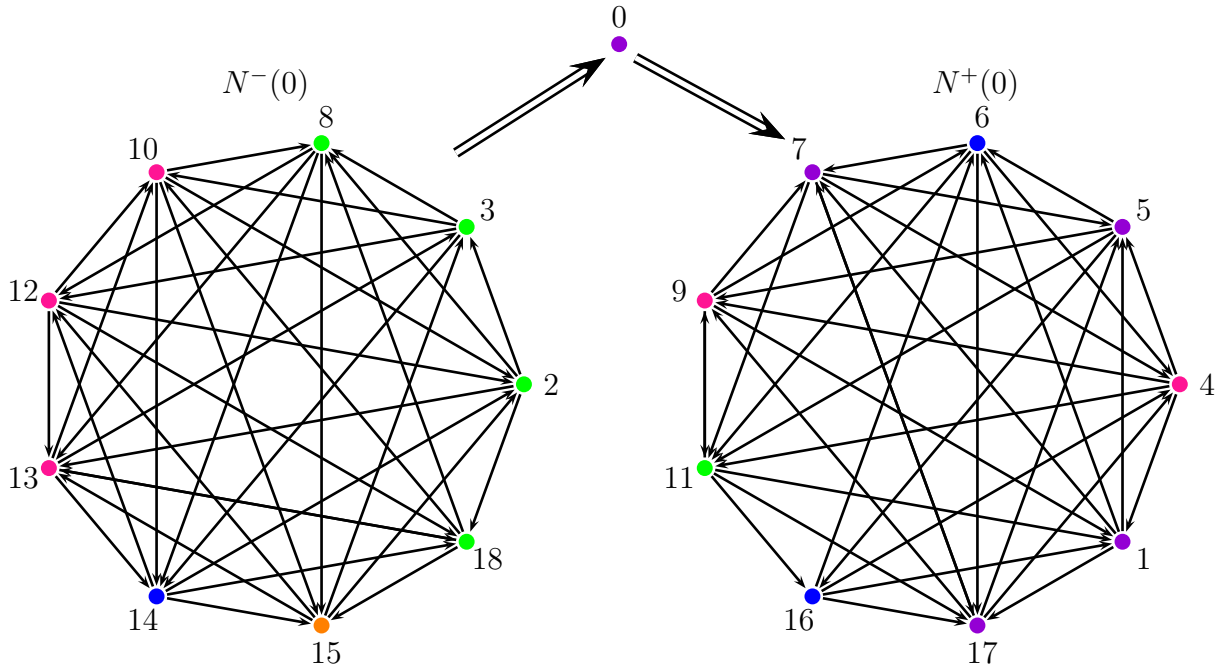


Figura 2.13.  $N^+(0)$  y  $N^-(0)$  en  $QR_{19}$

Por último consideremos el siguiente resultado conocido por V. Neumann-Lara, pero sin prueba publicada.

**Teorema 2.37.**  $dc(QR_{19} = \vec{C}_{19}\langle 2, 3, 8 \rangle) = 5$  y es crítico en vértices.

*Demostración.* Note que  $QR_{19} \not\cong \vec{C}_{19}\langle \emptyset \rangle$  entonces, por el teorema 1.5,  $dc(QR_{19}) \geq 3$ . Sabemos que  $QR_{19}$  es un torneo doblemente regular, y para todo vértice  $x \in V(QR_{19})$  se tiene que  $\langle N^+(x) \rangle \cong \langle N^-(x) \rangle \cong \vec{C}_9\langle 4 \rangle = \vec{C}_9\langle 1, 2, 3, 5 \rangle$ . Si  $x = 0$ ,

$$\langle N^+(0) \rangle \cong \langle N^-(0) \rangle \cong \vec{C}_9\langle 4 \rangle \text{ (véase figura 2.13).}$$

Sabemos que,  $dc(\vec{C}_9\langle 4 \rangle) = 3$  y además es crítico en vértices por la observación 2. Entonces la partición de los vértices de  $\langle N^-(0) \rangle$  en subtorneos aciclicos es la siguiente:

$$P_1 = \{15, 12, 2, 13\}, P_2 = \{3, 10, 8, 14\} \text{ y } P_3 = \{18\}.$$

Observe que el subtorneo transitivo maximal en  $\langle N^-(0) \rangle$  es un  $TT_4$ . Por lo tanto un torneo transitivo maximal contenido en  $QR_{19}$  es un  $TT_5$ . Luego  $\lceil \frac{19}{5} \rceil = 4$ , por lo que  $dc(QR_{19}) \geq 4$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $TT_5^1 = \langle \{0, 1, 17, 7, 5\} \rangle$  (note que los vértices  $1, 17, 7, 5 \in N^+(0)$ ). De aquí que  $V(QR_{19}) \setminus V(TT_5^1)$  induce un torneo de orden 14. Llamemos  $T_{14} = \langle V(QR_{19}) \setminus V(TT_5^1) \rangle$ . Demostraremos que  $dc(T_{14}) \leq 4$ , como  $\langle N^-(0) \rangle \subset T_{14}$ , entonces  $dc(T_{14}) \geq 3$ . Observe que como  $T_{14} \subset QR_{19}$ , el torneo transitivo maximal que puede contener es un  $TT_5$  y en efecto lo contiene. Llamemos  $TT_5^2 = \langle \{2, 11, 18, 3, 8\} \rangle$ . Luego  $\langle V(T_{14}) \setminus V(TT_5^2) \rangle = T_9$ , donde  $T_9$  es un torneo con nueve vértices. Note que, este torneo es fuertemente conexo y no es isomorfo a  $\vec{C}_9\langle \emptyset \rangle$ , por el teorema 1.5  $dc(T_9) \geq 3$ . Considere la siguiente partición de los vértices de  $T_9$



$$P_1 = \{12, 4, 9, 13, 10\}, P_2 = \{16, 14, 6\} \text{ y } P_3 = \{15\}.$$

Por lo tanto,  $dc(T_9) = 3$  y es crítico en vértices. Luego,  $dc(T_{14}) = 4$ . Así  $dc(QR_{19}) \leq 5$ . Considere la siguiente partición

$$P_1 = \{0, 1, 17, 7, 5\}, P_2 = \{2, 11, 18, 3, 8\}, P_3 = \{12, 4, 9, 13, 10\}, \\ P_4 = \{16, 14, 6\} \text{ y } P_5 = \{15\}.$$

Los torneos inducidos por la partición anterior son isomorfos a 3  $TT_5$ , a un  $TT_3$  y a un  $TT_1$ , respectivamente. Por lo tanto,  $dc(QR_{19}) = 5$ , más aún  $QR_{19}$  es 5-dicromático crítico en vértices.

□



## Capítulo 3

# Número dicromático de digráficas circulares

En este capítulo determinamos el número dicromático de algunas familias de digráficas circulares conexas. Para definir las digráficas circulares, consideramos  $\mathbb{Z}_n$  el conjunto de los enteros módulo  $n$  y  $J$  un subconjunto de  $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$  tal que  $w \in J$  si y solo si  $-w \notin J$ , para todo  $w \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , lo cual implica que  $|J| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . El conjunto  $J$  lo llamaremos el conjunto de saltos. Observe que, cuando se cumple la igualdad  $|J| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  se habla de torneos circulares, y en el capítulo anterior estudiamos el número dicromático de algunas familias infinitas de torneos circulares.

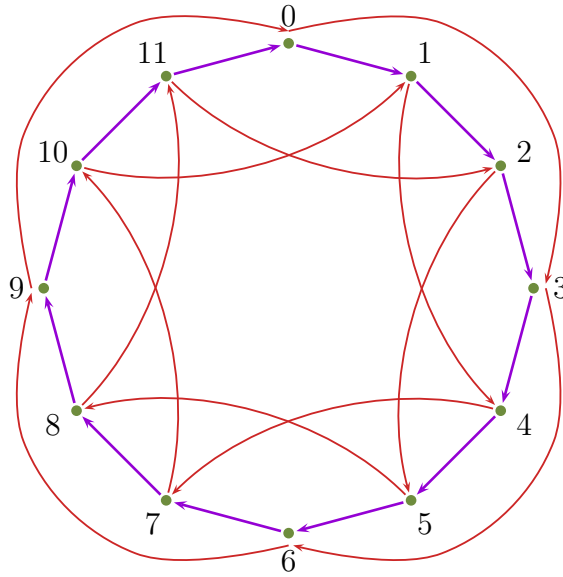


Figura 3.1.  $\vec{C}_{12}(1,3)$

Las **digráficas circulares**  $\vec{C}_n(J)$  están dadas por

$$V(\vec{C}_n(J)) = \mathbb{Z}_n,$$

$$A(\vec{C}_n(J)) = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_n \text{ y } j - i \in J\}.$$

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

Un ejemplo de digráfica circulante se muestra en la figura 3.1.

Observe que las digráficas circulantes son regulares. En lo que sigue consideraremos digráficas circulantes  $\vec{C}_n(J)$  sin flechas simétricas, esto es,  $w \in J$  si y solo si  $-w \notin J$ , para todo  $w \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ . La siguiente proposición garantiza que digráficas circulantes son conexas.

**Lema 3.1** (Proposición 2.14.1, [4]). *Sea  $\vec{C}_n(J)$  donde  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ . Entonces  $\vec{C}_n(J)$  es conexa si y solo si  $J$  genera a  $\mathbb{Z}_n$ , esto es, si y solo si  $\text{mcd}(n, j_1, j_2, \dots, j_k) = 1$ .*

Observe que si  $\text{mcd}(n, j_1, j_2, \dots, j_k) = d$ , entonces  $\vec{C}_n(J)$  tiene  $d$  componentes conexas donde cada una de ellas es también una digráfica circulante isomorfa a

$$\vec{C}_n\left(\frac{j_1}{d}, \frac{j_2}{d}, \dots, \frac{j_k}{d}\right).$$

La siguiente digráfica circulante  $\vec{C}_{16}(2, 4)$  (ver figura 3.2) no es conexa. Note que  $\text{mcd}(16, 2, 4) = 2$ , así  $\vec{C}_{16}(2, 4)$  tiene dos componentes conexas.

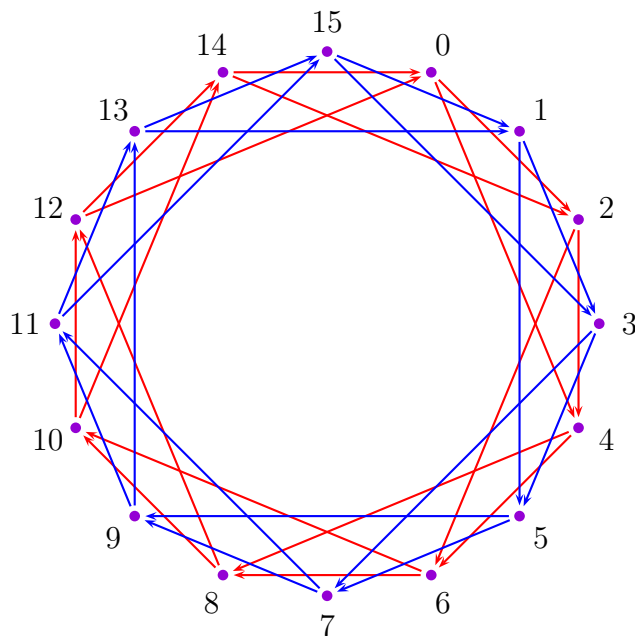


Figura 3.2.  $\vec{C}_{16}(2, 4)$

### 3.1. Número dicromático de digráficas circulantes con uno y dos saltos

**Proposición 3.2.**  $dc(\vec{C}_n) = 2$  para toda  $n \geq 3$ .

### 3.1. Número dicromático de digráficas circulantes con uno y dos saltos

*Demostración.* Note que  $dc(\vec{C}_n)$  no puede ser uno, pues  $\vec{C}_n$  es un ciclo, entonces por lo menos necesitamos dos colores. Considere la siguiente partición de los vértices de  $\vec{C}_n$  la cual realiza el número dicromático  $P_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ ,  $P_2 = \{n-1\}$ . Por lo tanto  $dc(\vec{C}_n) = 2$ .  $\square$

Sea  $\mathbb{Z}_n^* = \{\lambda \in \mathbb{Z}_n : mcd(n, \lambda) = 1\}$  el grupo de las unidades de  $\mathbb{Z}_n$  (el conjunto de los elementos invertibles en  $\mathbb{Z}_n$ ). Definimos

$$\lambda\{i_1, i_2, \dots, i_k\} = \{\lambda i_1, \lambda i_2, \dots, \lambda i_k\} \text{ mód } n,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  e  $i_j \in \mathbb{Z}_n$ . Observe que si existe  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  tal que  $K = \lambda J \Leftrightarrow J = \lambda^{-1}K$ , entonces  $\vec{C}_n(J) \cong \vec{C}_n(K)$ . Ejemplo  $\vec{C}_9(1, 4) \cong \vec{C}_9(1, 7)$  porque

$$7 \cdot \{1, 4\} = \{1, 7\} \text{ mód } 9 \Leftrightarrow 4 \cdot \{1, 7\} = \{1, 4\} \text{ mód } 9.$$

La siguiente observación es una generalización del lema 5 en [22].

**Observación 7.** Si  $\vec{C}_n(i, j)$  es una digráfica circulante conexa, entonces

$$\vec{C}_n(i, j) \cong \begin{cases} \vec{C}_n(1, i^{-1}j \text{ mód } n) & \text{si } mcd(i, n) = 1, \\ \vec{C}_n(1, j^{-1}i \text{ mód } n) & \text{si } mcd(j, n) = 1. \end{cases}$$

Ejemplos:

1.  $\vec{C}_{18}(5, 8) \cong \vec{C}_{18}(1, 16)$  porque

$$11 \cdot \{5, 8\} = \{1, 16\} \text{ mód } 18 \Leftrightarrow 5 \cdot \{1, 16\} = \{5, 8\} \text{ mód } 18.$$

2.  $\vec{C}_{27}(7, 17) \cong \vec{C}_{27}(1, 14)$  porque

$$4 \cdot \{7, 17\} = \{1, 14\} \text{ mód } 27 \Leftrightarrow 7 \cdot \{1, 14\} = \{7, 17\} \text{ mód } 27.$$

3.  $\vec{C}_{33}(11, 17) \cong \vec{C}_{33}(1, 22)$  porque

$$2 \cdot \{11, 17\} = \{1, 22\} \text{ mód } 33 \Leftrightarrow 17 \cdot \{1, 22\} = \{11, 17\} \text{ mód } 33.$$

Cabe notar que, no todas las digráficas  $\vec{C}_n(i, j)$  conexas cumplen que  $mcd(i, n) = 1$  o  $mcd(j, n) = 1$ , es decir, existen digráficas conexas  $\vec{C}_n(i, j)$  donde  $mcd(i, n) \geq 2$  o  $mcd(j, n) \geq 2$ . Considere los siguientes ejemplos:

1.  $\vec{C}_{12}(3, 4)$  note que  $mcd(12, 3, 4) = 1$ ,  $mcd(12, 3) = 3$  y  $mcd(12, 4) = 4$ .

2.  $\vec{C}_{15}(5, 6)$ ,  $mcd(15, 5, 6) = 1$ ,  $mcd(15, 6) = 3$  y  $mcd(15, 5) = 5$ .

Si  $a, b \in \mathbb{Z}_n$ , entonces diremos que  $a > b$  si  $a > b$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Antes de hacer la demostración del teorema 3.6 es conveniente recordar los resultados siguientes de teoría de números. Al máximo común divisor de  $a$  y  $b$  lo denotamos como  $mcd(a, b)$ . Considere  $a, b, x, y, d, n \in \mathbb{Z}$  con  $n > 2$ . Diremos que  $a$  es congruente con  $b$  módulo  $n$  si  $n|a - b$  y lo denotamos como  $a \equiv b \text{ mód } n$ .

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

---

**Teorema 3.3** (Teorema 2.1.2, [42]). *Si  $d = \text{mcd}(a, n)$ , entonces  $ax \equiv ay \pmod n$  si y solo si  $x \equiv y \pmod{\frac{n}{d}}$ .*

**Teorema 3.4** (Lema 2.2.2, [42]). *Consideremos la congruencia  $ax \equiv b \pmod n$  y sea  $d = \text{mcd}(a, n)$ . Entonces  $ax \equiv b \pmod n$  tiene solución si y solo si  $d|b$ .*

Para resolver el sistema de congruencias 3.1 podemos utilizar el teorema chino del residuo siempre y cuando  $\text{mcd}(m_1, m_2) = 1$ , pero no es el caso para la prueba del teorema 3.6. Por lo tanto, enunciamos el siguiente resultado, el cual es, una generalización del teorema chino del residuo.

**Teorema 3.5** (Lema 2.3.4, [42]). *Sean  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  y  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ . Entonces el sistema*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

*tiene solución si y solo si  $\text{mcd}(m_1, m_2) | a_1 - a_2$ .*

La solución del sistema de congruencias 3.1 es de la forma:

$$X \equiv x_{12} \pmod{\text{mcm}(m_1, m_2)}$$

y  $x_{12} = a_1 + m_1x_1t = a_2 + m_2x_2t$  con  $t, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ , es decir  $x_{12} = a_1 + m_1x_1t + \text{mcm}(m_1, m_2)l$  con  $l \in \mathbb{Z}$ .

Para demostrar que las digráficas circulantes con dos saltos tienen número dicromático dos, necesitamos el resultado siguiente:

**Teorema 3.6.** *Sea  $\vec{C}_n(i, j)$  conexa,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 12$ , tal que*

$$(i) \text{ mcd}(n, i) \geq 2 \text{ y } \text{mcd}(n, j) \geq 2,$$

$$(ii) j + i \neq n \text{ e}$$

$$(iii) i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ y } j > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

*Entonces existe  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  tal que  $\lambda i \pmod n < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y  $\lambda j \pmod n < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .*

*Demostración.* Como  $\vec{C}_n(i, j)$  es conexa se cumple que  $\text{mcd}(n, j, i) = 1$ . Definimos  $d_1 = \text{mcd}(n, i) \geq 2$  y  $d_2 = \text{mcd}(n, j) \geq 2$ . Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. El sistema de congruencias

$$\begin{cases} i\lambda \equiv d_1 \pmod n \\ j\lambda \equiv d_2 \pmod n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Cuando  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  tiene solución  $d_1|i$ ,  $d_1|n$ ,  $d_2|j$  y  $d_2|n$ . Por el teorema 3.3 el sistema de congruencias 3.2 es equivalente a resolver

$$\begin{cases} \frac{i}{d_1}\lambda \equiv 1 \pmod{\frac{n}{d_1}} \\ \frac{j}{d_2}\lambda \equiv 1 \pmod{\frac{n}{d_2}}. \end{cases} \tag{3.3}$$

### 3.1. Número dicromático de digráficas circulantes con uno y dos saltos

Considere  $\left(\frac{i}{d_1}\right)^{-1} \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{d_1}}^*$  y  $\left(\frac{j}{d_2}\right)^{-1} \in \mathbb{Z}_{\frac{n}{d_2}}^*$  tal que resolver el sistema de congruencias 3.3 es equivalente a resolver

$$\begin{cases} \lambda \equiv \left(\frac{i}{d_1}\right)^{-1} \pmod{\frac{n}{d_1}} \\ \lambda \equiv \left(\frac{j}{d_2}\right)^{-1} \pmod{\frac{n}{d_2}}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Observe que  $\text{mcd}\left(\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) > 1$ , entonces para resolver el sistema de congruencias 3.4 no podemos usar el teorema chino del residuo, pero por el teorema 3.5 sabemos que el sistema 3.4 tiene solución si y solo si

$$\text{mcd}\left(\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) \text{ divide a } \left(\frac{i}{d_1}\right)^{-1} - \left(\frac{j}{d_2}\right)^{-1}.$$

El sistema 3.4 tiene solución, esta es:

$$\lambda = \left(\frac{j}{d_2}\right)^{-1} + \left(\frac{n}{d_1}\right) \left(\frac{n}{d_2}\right) t \text{ con } t \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto hemos demostrado que si el sistema de congruencias 3.2 tiene solución, entonces existe  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ , tal que  $\vec{C}_n(i, j) \cong \vec{C}_n(i\lambda, j\lambda) = \vec{C}_n(d_1, d_2)$  y además  $d_1, d_2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Caso 2. El sistema de congruencias 3.1 no tiene solución. Por definición de digráfica circulante, si  $i, j \in J$ , entonces  $-i, -j \notin J$ . Observe que  $\text{mcd}(n, n-1) = 1$ , entonces  $(n-1) \in \mathbb{Z}_n^*$ . Así,  $\vec{C}_n(i, j) \cong \vec{C}_n((n-1)i, (n-1)j) \cong \vec{C}_n(-j, -i)$  y además  $-i, -j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

□

Considere  $n = 2k + 1$  para  $k \geq 2$ , denotamos por

$$\begin{aligned} P &= \{v \in \mathbb{Z}_n : v \equiv 0 \pmod{2}\} = \{0, 2, \dots, 2k-2, 2k\}, \\ I &= \{v \in \mathbb{Z}_n : v \equiv 1 \pmod{2}\} = \{1, 3, \dots, 2k-3, 2k-1\}. \end{aligned}$$

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \subset \mathbb{Z}_n$ ,  $b \in \mathbb{Z}_n$  definimos

$$b + A = \{b + a_1, b + a_2, \dots, b + a_l\} \pmod{n}.$$

**Lema 3.7.** *Sea  $\vec{C}_n(i, j)$  conexa, para toda  $n = 2k + 1$ , con  $k \geq 2$ . Entonces  $\vec{C}_n(i, j)$  contiene dos subdigráficas acíclicas inducidas por  $P$  e  $I$ .*

*Demostración.* Considere los siguientes conjuntos, los cuales muestran las adyacencias de los conjuntos  $P$  e  $I$  en  $\vec{C}_n(i, j)$ , con respecto al salto  $i$  (análogamente se hace para el salto  $j$ ).

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

(i) Si  $i$  es par,

$$\begin{aligned}
 i + P &= i + \{0, 2, 4, \dots, 2k - i - 2, 2k - i, 2k - i + 2, \dots, 2k - 2, 2k\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + P &= \{0 + i, 2 + i, 4 + i, \dots, 2k - i - 2 + i, 2k - i + i, 2k - i + 2 + i, \\
 &\quad \dots, 2k - 2 + i, 2k + i\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + P &= \underbrace{\{i, 2 + i, 4 + i, \dots, 2k - 2, 2k\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, i - 1, i + 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(ii) Si  $i$  es impar,

$$\begin{aligned}
 i + P &= i + \{0, 2, 4, \dots, 2k - i - 3, 2k - i - 1, 2k - i + 1, 2k - i + 3, \dots, \\
 &\quad 2k - 2, 2k\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + P &= \{0 + i, 2 + i, 4 + i, \dots, 2k - i - 3 + i, 2k - i - 1 + i, 2k - i + 1 + i, \\
 &\quad 2k - i + 3, \dots, 2k - 2 + i, 2k + i\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + P &= \underbrace{\{i, 2 + i, 4 + i, \dots, 2k - 3, 2k - 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{0, 2, \dots, i - 3, i - 1\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(iii) Si  $j$  es par,

$$\begin{aligned}
 j + P &= j + \{0, 2, 4, \dots, 2k - j - 2, 2k - j, 2k - j + 2, \dots, 2k - 2, 2k\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + P &= \{0 + j, 2 + j, 4 + j, \dots, 2k - j - 2 + j, 2k - j + j, 2k - j + 2 + j, \\
 &\quad \dots, 2k - 2 + j, 2k + j\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + P &= \underbrace{\{j, 2 + j, 4 + j, \dots, 2k - 2, 2k\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, j - 1, j + 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(iv) Si  $j$  es impar,

$$\begin{aligned}
 j + P &= j + \{0, 2, 4, \dots, 2k - j - 3, 2k - j - 1, 2k - j + 1, 2k - j + 3, \dots, \\
 &\quad 2k - 2, 2k\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + P &= \{0 + j, 2 + j, 4 + j, \dots, 2k - j - 3 + j, 2k - j - 1 + j, 2k - j + 1 + j, \\
 &\quad 2k - j + 3, \dots, 2k - 2 + j, 2k + j\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + P &= \underbrace{\{j, 2 + j, 4 + j, \dots, 2k - 3, 2k - 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{0, 2, \dots, j - 3, j - 1\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(v) Si  $i$  es par,

$$\begin{aligned}
 i + I &= i + \{1, 3, \dots, 2k - i - 3, 2k - i - 1, 2k - i + 1, \dots, \\
 &\quad 2k - 3, 2k - 1\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + I &= \{1 + i, 3 + i, \dots, 2k - i - 3 + i, 2k - i - 1 + i, 2k - i + 1 + i, \\
 &\quad \dots, 2k - 3 + i, 2k - 1 + i\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + I &= \underbrace{\{1 + i, 3 + i, \dots, 2k - 3, 2k - 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{0, 2, \dots, i - 4, i - 2\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(vi) Si  $i$  es impar,

$$\begin{aligned}
 i + I &= i + \{1, 3, \dots, 2k - i - 2, 2k - i, 2k - i + 2, \dots, 2k - 3, \\
 &\quad 2k - 1\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + I &= \{1 + i, 3 + i, \dots, 2k - i - 2 + i, 2k - i + i, 2k - i + 2 + i, \\
 &\quad \dots, 2k - 3 + i, 2k - 1 + i\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 i + I &= \underbrace{\{1 + i, 3 + i, \dots, 2k - 2, 0\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, i - 4, i - 2\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$



### 3.1. Número dicromático de digráficas circulantes con uno y dos saltos

(vii) Si  $j$  es par,

$$\begin{aligned}
 j + I &= j + \{1, 3, \dots, 2k - j - 3, 2k - j - 1, 2k - j + 1, \dots, \\
 &\quad 2k - 3, 2k - 1\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + I &= \{1 + j, 3 + j, \dots, 2k - j - 3 + j, 2k - j - 1 + j, 2k - j + 1 + j, \\
 &\quad \dots, 2k - 3 + j, 2k - 1 + j\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + I &= \underbrace{\{1 + j, 3 + j, \dots, 2k - 3, 2k - 1\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{0, 2, \dots, j - 4, j - 2\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

(viii) Si  $j$  es impar,

$$\begin{aligned}
 j + I &= j + \{1, 3, \dots, 2k - j - 2, 2k - j, 2k - j + 2, \dots, 2k - 3, \\
 &\quad 2k - 1\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + I &= \{1 + j, 3 + j, \dots, 2k - j - 2 + j, 2k - j + j, 2k - j + 2 + j, \\
 &\quad \dots, 2k - 3 + j, 2k - 1 + j\} \text{ mód } 2k + 1 \\
 j + I &= \underbrace{\{1 + j, 3 + j, \dots, 2k - 2, 0\}}_{\equiv 0 \text{ mód } 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, j - 4, j - 2\}}_{\equiv 1 \text{ mód } 2}
 \end{aligned}$$

Supongamos que  $i$  es impar y  $j$  es par. Entonces las adyacencias que se tienen en  $\vec{C}_n(i, j)$ , con respecto a  $P$  e  $I$  se muestran en (ii), (iii), (vi) y (vii). Observe que las únicas adyacencias que se encuentran en la subdigráfica inducida por  $P$  son aquellas congruentes con 0 módulo 2 en (ii) y congruentes con 0 módulo 2 en (iii), respectivamente, esto es,

$$\begin{array}{ccc}
 2k - i + 1 & \rightarrow & 0 & & 0 & \rightarrow & j \\
 2k - i + 3 & \rightarrow & 2 & & 2 & \rightarrow & j + 2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 2k & \rightarrow & i - 1 & & k - j & \rightarrow & 2k.
 \end{array}$$

La columna de la izquierda representa las adyacencias que se obtienen del salto  $i$  y la columna de la derecha representa las adyacencias que se obtienen del salto  $j$ .

Las únicas adyacencias que se encuentran en la subdigráfica inducida por  $I$  son aquellas que congruentes con 1 módulo 2 en (vi) y congruentes con 1 módulo 2 en (vii), respectivamente, esto es,

$$\begin{array}{ccc}
 2k - i + 2 & \rightarrow & 1 & & 1 & \rightarrow & j + 1 \\
 2k - i + 4 & \rightarrow & 3 & & 3 & \rightarrow & j + 3 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 2k - 1 & \rightarrow & i - 2 & & i & \rightarrow & j + i.
 \end{array}$$

La columna de la izquierda representa las adyacencias que se obtienen del salto  $i$  y la columna de la derecha representa las adyacencias que se obtienen del salto  $j$ .

Note que no se forman ciclos dirigidos en las digráficas inducidas por los conjuntos  $P$  e  $I$ . Procedemos de manera análoga para todas las combinaciones de  $i$  y  $j$ . Por lo tanto  $\vec{C}_n(i, j)$  contiene dos subdigráficas acíclicas inducidas por  $P$  e  $I$ .  $\square$

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

---

El siguiente teorema caracteriza el número dicromático de las digráficas circulantes conexas con dos saltos.

**Teorema 3.8.** *Sea  $\vec{C}_n(i, j)$  conexas. Entonces  $dc(\vec{C}_n(i, j)) = 2$  para toda digráfica circulante  $\vec{C}_n(i, j)$  con  $n \geq 5$ .*

*Demostración.* Como  $\vec{C}_n(i, j)$  es conexas tenemos que  $dc(\vec{C}_n(i, j)) \geq 2$ . La prueba consiste en encontrar una partición en dos partes que realice el número dicromático.

Caso 1. Si  $n = 2k + 1$ , considere la siguiente partición de los vértices

$$\begin{aligned} P &= \{x \in V(\vec{C}_n(i, j)) : x \equiv 0 \text{ mód } 2\}, \\ I &= \{x \in V(\vec{C}_n(i, j)) : x \equiv 1 \text{ mód } 2\}. \end{aligned}$$

Por el lema 3.7, esta partición de los vértices de  $\vec{C}_n(i, j)$  es acíclica, por lo tanto realiza el número dicromático. Así  $dc(\vec{C}_n(i, j)) = 2$ . Observe que  $P$  e  $I$  no es una buena partición para los vértices de  $\vec{C}_{2k}(i, j)$ , porque si uno de los saltos  $i, j$  fuese par o impar los conjuntos de vértices inducidos por  $P$  e  $I$  formarían ciclos.

Caso 2. Si  $n = 2k$ , consideremos dos casos

Caso 2.1. Si  $mcd(j, n) = 1$  o  $mcd(k, n) = 1$ , considere  $D = \vec{C}_n(1, m)$ , donde  $m$ , por la observación 7, es  $m = j^{-1}k \text{ mód } n$  o  $m = k^{-1}j \text{ mód } n$ , note que  $m \neq k$  porque  $\vec{C}_n(i, j)$  no contiene flechas simétricas.

Caso 2.1.1.  $m \geq k$ . Sea  $l = n - m$ , note que  $l$  y  $n$  son positivos y considere el intervalo  $[0, n - 1]$ . Aplicamos el algoritmo de Euclides para  $n$  y  $2l$ , entonces existen  $\alpha, r \in \mathbb{N}$  tales que

$$n = \alpha(2l) + r \text{ con } 0 \leq r < 2l.$$

Definimos

$$n = \begin{cases} \alpha(2l) + s_1 & \text{si } s_1 \in [0, l] \\ \alpha(2l) + s_2 & \text{si } s_2 \in [l + 1, 2l - 1]. \end{cases}$$

Caso 2.1.1.1.  $s_1 = 0$ , la partición de los vértices de  $D$  es la siguiente

$$\begin{aligned} P_1 &= [0, l - 1] \cup \dots \cup [\alpha l, (\alpha + 1)l - 1], \\ P_2 &= [l, 2l - 1] \cup \dots \cup [(\alpha + 1)l, n - 1]. \end{aligned}$$

Caso 2.1.1.2.  $0 < s_1 \leq l$ , la partición de  $V(D)$  es la siguiente

$$\begin{aligned} P_1 &= [0, l - 1] \cup \dots \cup [\alpha l, (\alpha + 1)l - 1] \cup \\ &\quad [(\alpha + 2)l, (\alpha + 2)l + (\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1)], \\ P_2 &= [l, 2l - 1] \cup \dots \cup [(\alpha + 1)l, (\alpha + 2)l - 1] \cup \\ &\quad [(\alpha + 2)l + \lceil \frac{l}{2} \rceil, n - 1]. \end{aligned}$$

### 3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos

---

Caso 2.1.1.3.  $r = s_2$ , la partición de  $V(D)$  es la siguiente

$$\begin{aligned} P_1 &= [0, l-1] \cup \dots \cup [\alpha l, (\alpha+1)l-1] \cup [(\alpha+2)l, (\alpha+3)l-1], \\ P_2 &= [l, 2l-1] \cup \dots \cup [(\alpha+1)l, (\alpha+2)l-1] \cup [(\alpha+3)l, n-1]. \end{aligned}$$

Note que las particiones son acíclicas por lo tanto  $dc(D) = 2$ .

Caso 2.1.2.  $m \leq k$ , observe que  $m \geq 2$ . Considere  $l = m$  y retomamos la demostración del caso 2.1.1.

Caso 2.2. Si  $\gcd(j, n) \geq 2$  o  $\gcd(k, n) \geq 2$ , considere  $\vec{C}_n(j, k)$  conexa.

Caso 2.2.1. Si  $j, k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  entonces tomamos  $l = k$  y se cumplen las condiciones del caso 2.1.1.

Caso 2.2.2. Si  $j > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  o  $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  o  $j, k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , entonces por el teorema 3.6, tomamos  $\lambda \in \mathbb{Z}^*$  tal que  $\lambda \cdot j = j'$  y  $\lambda \cdot k = k'$  donde  $j' < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y  $k' < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Así  $\vec{C}_n(j, k) \cong \vec{C}_n(j', k')$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $k' > j'$ , entonces tomamos  $l = k'$  y se cumplen las condiciones del caso 2.1.1.

□

Ejemplos:

- $\vec{C}_{16}(3, 4) \cong \vec{C}_{16}(1, 12)$

$$P_1 = [0, 3] \cup [8, 11] \text{ y } P_2 = [4, 7] \cup [12, 15].$$

- $\vec{C}_{24}(15, 20) \cong \vec{C}_{24}(3, 4)$

$$P_1 = [0, 3] \cup [8, 11] \cup [16, 19] \text{ y } P_2 = [4, 7] \cup [12, 15] \cup [20, 23].$$

### 3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos

En la sección anterior determinamos el número dicromático de digráficas circulantes con uno o dos saltos. Por tal motivo nos preguntamos, ¿cuál será el número dicromático de las digráficas circulantes con tres saltos? En la presente sección damos respuesta a dicha pregunta, pero sólo para algunas digráficas de este tipo tales como digráficas circulantes con tres saltos que no cumplen la conjetura de Ádám, digráficas circulantes con tres saltos donde los saltos forman una progresión aritmética y digráficas circulantes donde los saltos tienen alguna característica en especial.

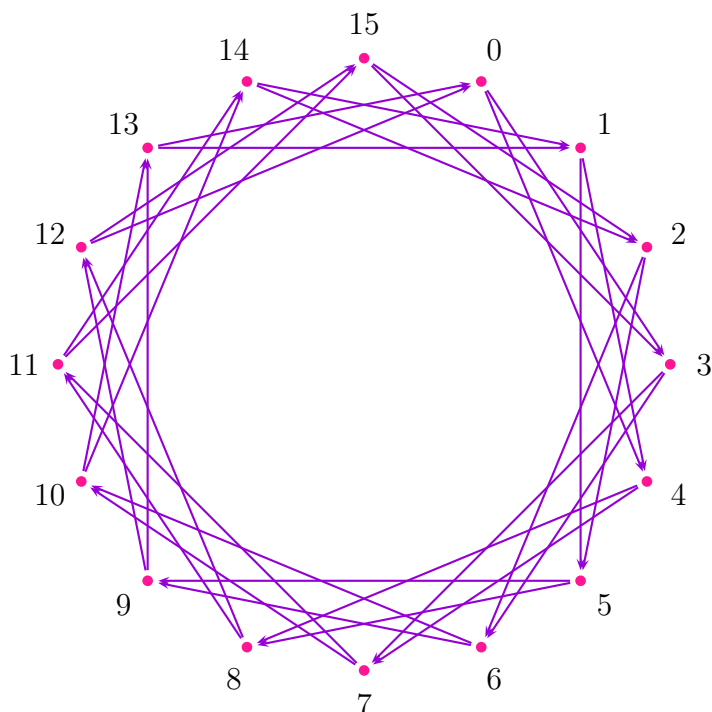


Figura 3.3.  $\vec{C}_{16}(3, 4) \cong \vec{C}_{16}(1, 12)$

### 3.2.1. Número dicromático de $\vec{C}_n(1, 2, n-3)$

Primero trabajaremos con digráficas circulantes relacionadas con la conjetura de Ádám.

**Conjetura 3.9** (Ádám, [1]). *Si  $\vec{C}_n(J) \cong \vec{C}_n(K)$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{Z}_n^*$  tal que  $K = \lambda J$  ( $\Leftrightarrow J = \lambda^{-1}K$ ).*

Diremos que el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$  es de Ádám si

$$\vec{C}_n(J) \cong \vec{C}_n(K) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}_n^* : K = \lambda J.$$

Note que cualquier isomorfismo entre dos digráficas no necesariamente es un isomorfismo de Ádám. En [1], Ádám conjeturó que existe un isomorfismo. Elspas y Turner en [11] dieron el primer contraejemplo de una digráfica circulante que no cumple la conjetura de Ádám es  $\vec{C}_8(1, 2, 5)$ . Observe que

$$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}, \vec{C}_8(1, 2, 5) \cong \vec{C}_8(1, 5, 6) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \{1, 2, 5\} &= \{3, 6, 7\} \text{ mód } 8, \\ 5 \cdot \{1, 2, 5\} &= \{1, 2, 5\} \text{ mód } 8 \text{ y} \\ 7 \cdot \{1, 2, 5\} &= \{3, 7, 2\} \text{ mód } 8 \end{aligned}$$

### 3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos

Por lo que no existe un  $\lambda \in \mathbb{Z}_8^*$  tal que  $\lambda \cdot \{1, 2, 5\} = \{1, 5, 6\}$  mód 8. El isomorfismo está dado por la función

$$f : V(\vec{C}_8(1, 2, 5)) \rightarrow V(\vec{C}_8(1, 5, 6)),$$

definida por  $f(i) = i$  si  $i$  es par y  $f(i) = i + 4$  mód 8 si  $i$  es impar, véase figura 3.4. B. Alspach y T.D. Parsons en [2], demostraron que existe un subconjunto  $S \subseteq \mathbb{Z}_n$  tal que  $\vec{C}_n(S)$  no satisface la conjetura de Ádám si  $p^2 | n$ , donde  $p$  es un número primo. Con base en esta conjetura, se propone otro problema, caracterizar las digráficas circulantes que no satisfacen la conjetura de Ádám. Claramente  $\vec{C}_n(S)$  satisface la conjetura de Ádám si  $|S| = 1$ . Cuando  $|S| = 2$ , Sun Liang probó que  $\vec{C}_n(S)$  también cumple la conjetura de Ádám, véase [50].

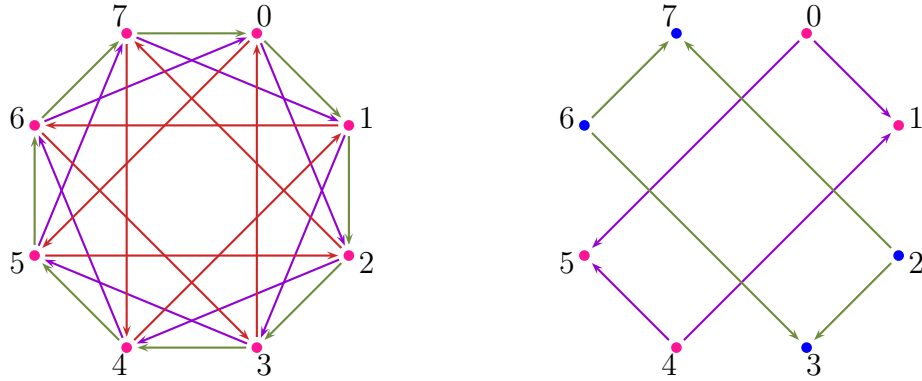


Figura 3.4.  $\vec{C}_8(1, 2, 5)$  y dos subdigráficas aciclicas de  $\vec{C}_8(1, 2, 5)$

Sean  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  un subconjunto donde  $2a_1 \neq a_2 + a_3$  y  $2a_2 = 2a_3$ , el  $\text{mcd}(a_1, n) = \beta$  y  $\mathbb{Z}_n^*(\{a_2, a_3\}) = \{\lambda \in \mathbb{Z}_n^* : \lambda\{a_2, a_3\} = \{a_2, a_3\}\}$ , el conjunto  $A$  es llamado un *subconjunto de Ádám* si existe un  $\lambda^* \in \mathbb{Z}_n^*$  tal que

$$(\lambda^* - 1)\beta a_2 \in \{0, \frac{n}{2}\} \text{ y } \lambda^* a_1 \notin \{\lambda \in \mathbb{Z}_n^*(\{a_2, a_3\})\}.$$

En [43] prueban que si  $|S| = 3$ , entonces  $\vec{C}_n(S)$  satisface la conjetura de Ádám si y solo si  $S$  no es un subconjunto de Ádám. De hecho la conjetura de Ádám no es válida en general para  $|S| \geq 3$ .

Observe que el conjunto de saltos  $J = \{1, 2, 5\}$  de  $\vec{C}_8(1, 2, 5)$ , tiene una característica especial  $1 + 2 + 5 = 8$ . Esta cuestión tan simple fue el antecedente a la siguiente pregunta ¿Cuál será el número dicromático de las digráficas circulantes  $\vec{C}_n(J)$ , donde  $J = \{1, 2, n-3\}$ ? La respuesta, se encuentra en la presente sección, donde determinamos el número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos para toda  $n > 7$  ver figura 3.5. Observe que para  $n = 7$ ,  $\vec{C}_7(1, 2, 4) \cong QR_7$  y es 3-dicromática (véase la observación 1 (ii) y el teorema 1.6).

**Teorema 3.10.** Si  $D = \vec{C}_n(1, 2, -3) = \vec{C}_n(1, 2, n-3)$ . Entonces  $dc(D) = 2, \forall n > 7$ .

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

*Demostración.* Note que  $dc(\vec{C}_n(1, 2, n-3)) \geq 2$ . La partición de  $V(\vec{C}_n(1, 2, n-3))$  en dos subconjuntos depende de la congruencia de  $n$  módulo seis.

1. Si  $n \equiv 0 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-6, n-5, n-4\}, P_2 = \{3, 4, 5, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

2. Si  $n \equiv 1 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, 4, 5, \dots, n-5, n-4, n-3\}, P_2 = \{2, 3, 6, 7, \dots, n-2, n-1\}.$$

3. Si  $n \equiv 2 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, 4, 5, \dots, n-6, n-5, n-4\}, P_2 = \{2, 3, 6, 7, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

4. Si  $n \equiv 3 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, 2, 5, 6, \dots, n-6, n-5, n-4\}, P_2 = \{3, 4, 7, 8, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

5. Si  $n \equiv 4 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, \dots, n-6, n-5, n-4\}, P_2 = \{2, 3, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

6. Si  $n \equiv 5 \pmod{6}$ , entonces la partición es:

$$P_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-6, n-5, n-4\}, P_2 = \{3, 4, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

Las particiones anteriores son acíclicas por lo tanto el  $dc(D) = 2$ . □

Por ejemplo, en las figuras 3.4 y 3.5 se ilustra el teorema 3.10 para  $\vec{C}_8(1, 2, 5)$  y  $\vec{C}_{13}(1, 2, 10)$ .

#### 3.2.2. Número dicromático de digráficas circulantes con saltos en progresión aritmética

**Problema:**

¿Cuál es el número dicromático de las digráficas circulantes donde el conjunto de saltos está en progresión aritmética?

Por ejemplo, considere la digráfica circulante, de la figura 3.6. El siguiente teorema garantiza que estas digráficas circulantes tienen número dicromático dos.

**Observación 8.** Para evitar flechas simétricas, consideramos lo siguiente:

1. Si  $\vec{C}_{2m}(k, k+1, k+2)$ , entonces  $k+i \neq m$  con  $i \in \{0, 1, 2\}$ .

### 3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos

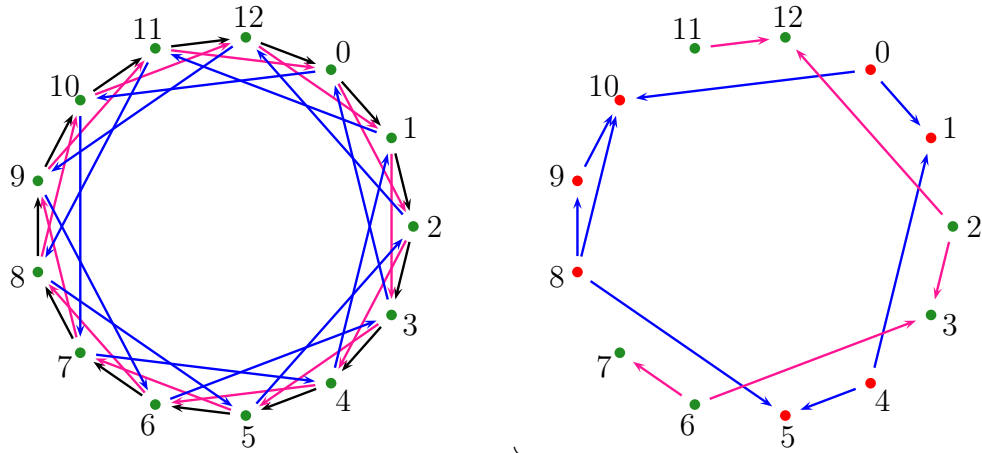


Figura 3.5.  $\vec{C}_{13}(1, 2, 10)$

2. Si  $\vec{C}_{2m+1}(k, k+1, k+2)$  y  $k = m$ , entonces no se puede considerar el salto  $k+1$ .

**Teorema 3.11.** Sea  $D = \vec{C}_n(k, k+1, k+2)$  conexa para toda  $n \geq 7$ . Entonces  $dc(D) = 2$ .

*Demostración.* Es claro que  $dc(D) \geq 2$ . La siguiente partición realiza el número dicromático

$$P_1 = \{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, P_2 = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \dots, n-3, n-2, n-1\}.$$

□

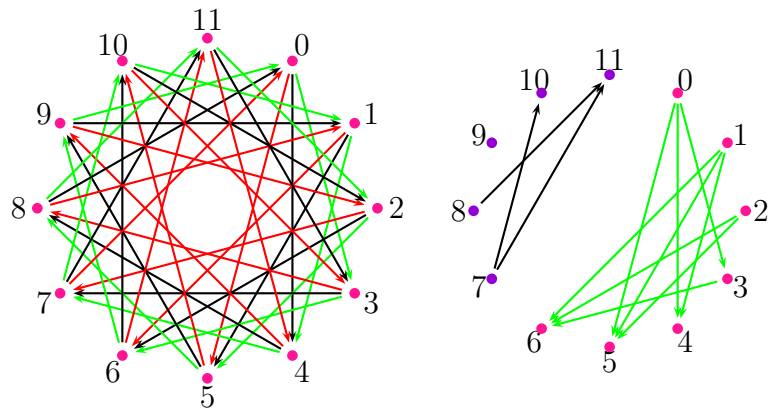


Figura 3.6.  $\vec{C}_{12}(3, 4, 5)$  y su dos partición

**Teorema 3.12.** Sea  $D = \vec{C}(1, 2, \dots, k)$  conexa para toda  $n \geq 5$  y  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Entonces  $dc(D) = 2$ .

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

*Demostración.* Note que  $dc(D) \geq 2$ . Considere la siguiente partición de los vértices de  $D$

$$P_1 = [0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], P_2 = [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n - 1],$$

está partición es acíclica, por lo tanto  $dc(D) = 2$ .  $\square$

Recuerde que

$$\vec{C}_{2n+1}(1, 2, 3, 4, 5, \dots, n - 3, n - 2, n - 1, n) := \vec{C}_{2n+1}\langle \emptyset \rangle.$$

Concluimos esta sección con el corolario siguiente, primera parte del teorema 1.5 de V. Neumann-Lara, J. Urrutia.

**Corolario 3.13** (Teorema 1, 1984). *El torneo circulante  $\vec{C}_{2n+1}\langle \emptyset \rangle$  es dos dicromático.*

#### 3.2.3. Número dicromático de $\vec{C}_p(1, a, a^2)$

Consideremos el conjunto  $\mathbb{Z}_p$  de enteros módulo  $p$ , donde  $p$  es un primo de la forma  $6k + 1$ , con  $k \in \mathbb{N}$  y  $S_3 \subset \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  con  $|S_3| = 3$ . Además  $S_3 = \{1, a, j\}$ , donde  $j \equiv a^2 \pmod{p}$ , es un subgrupo de  $\mathbb{Z}_p^*$ . Sabemos que  $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . En esta sección determinamos el número dicromático de la digráficas circulantes  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$ . Note que, cuando  $p = 7$ ,  $\vec{C}_7(1, 2, 4) \cong QR_7$  la cual es 3-dicromática crítica en vértices.

**Observación 9.** *Consideremos  $p \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $\{1, a, a^2\} \subset \mathbb{Z}_p^*$ .*

(i) *Si  $a \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces  $a^2 \equiv 0 \pmod{2}$ .*

(i) *Si  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $a^2 \equiv 1 \pmod{2}$ .*

**Lema 3.14.** *Sean  $p = 6k + 1$  un primo con  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \equiv 0 \pmod{2}$  y  $\{1, a, a^2\} \subset \mathbb{Z}_p^*$  tal que  $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Entonces  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$  contiene una subdigráfica acíclica maximal inducida por*

$$P_0 = \{v \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} : v \equiv 0 \pmod{2}\} = \{2, 4, \dots, 6k - 2, 6k\}.$$

*Demostración.* Consideremos

$$P_0 = \{2, 4, \dots, 6k - 2, 6k\}.$$

el conjunto de los vértices congruentes con cero módulo dos sin el cero. Por la observación 9(i),  $a^2 \equiv 0 \pmod{2}$ , así  $a^2 \in P_0$  y  $a + a^2 \in P_0$ . La demostración será por contradicción. Supongamos que  $P_0$  no induce una subdigráfica acíclica maximal en  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$ . Entonces podemos agregar otro vértice al conjunto  $P_0$ . Sin perder generalidad, sea 0 el vértice que agregaremos al conjunto  $P_0$ . Considere  $P = P_0 \cup \{0\}$ . Observe que  $\{0, a^2, a^2 + a\} \subset P$  induce un  $\vec{C}_3$  en  $\langle P \rangle$ , contradicción. Por lo tanto  $P_0$  induce una subdigráfica acíclica maximal.  $\square$



### 3.2. Número dicromático de digráficas circulantes con tres saltos

**Lema 3.15.** Sean  $p = 6k + 1$  un primo con  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \equiv 0 \pmod{2}$  y  $\{1, a, a^2\} \subset \mathbb{Z}_p^*$ . Entonces  $\vec{C}_p(1, a, a^2) \setminus \langle P_0 \rangle$  contiene una subdigráfica acíclica maximal inducida por

$$I = \{v \in \mathbb{Z}_p : v \equiv 1 \pmod{2}\} = \{1, 3, \dots, 6k - 3, 6k - 1\}.$$

*Demostración.* Consideremos

$$I = \{1, 3, \dots, 6k - 3, 6k - 1\}.$$

el conjunto de los vértices congruentes con uno módulo dos. La demostración será por contradicción, supongamos que  $I = \{1, 3, \dots, 6k - 3, 6k - 1\}$  no es subdigráfica acíclica maximal de  $\vec{C}_p(1, a, a^2) \setminus \langle P_0 \rangle$  entonces podemos agregar otro vértice al conjunto  $I$ , sin perder generalidad, sea  $0$  el vértice que agregaremos a dicho conjunto. Consideremos  $I_0 = I \cup \{0\}$ . Observe que  $\{0, 1, a^2 + 1\} \subset I_0$  induce un  $\vec{C}_3$  en  $\langle I_0 \rangle$ , contradicción. Por lo tanto  $I$  induce una subdigráfica acíclica maximal.  $\square$

**Teorema 3.16.** Sean  $p = 6k + 1$  un primo con  $k \in \mathbb{N}$  y  $\{1, a, a^2\} \subset \mathbb{Z}_p^*$  tal que  $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ .

(i) Si  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $dc(\vec{C}_p(1, a, a^2)) = 2$ ,

(ii) Si  $a \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces  $dc(\vec{C}_p(1, a, a^2)) = 3$  y además es crítico en vértices.

*Demostración.* Como  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$  es conexa, el número dicromático de  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$  es al menos dos. Note que  $a + a^2 = 6k - 1 \equiv 0 \pmod{2}$ .

(i) Si  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $a^2 \equiv 1 \pmod{2}$ . Demostremos que  $dc(\vec{C}_p(1, a, a^2)) = 2$ .

Considere la coloración de los vértices de  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$  de manera alternada, la cual da origen a la siguiente partición de los vértices:

$$\begin{aligned} P &= \{0, 2, 4, \dots, 6k - 2, 6k\}, \\ I &= \{1, 3, 5, \dots, 6k - 3, 6k - 1\}. \end{aligned}$$

Considere los siguientes conjuntos, los cuales nos muestran las adyacencias de  $P$  e  $I$  en la digráfica  $\vec{C}_p(1, a, a^2)$ .

$$\begin{aligned} 1 + P &= \{1, 3, 5, \dots, 6k - 1, 0\} = \{0\} \cup I, \\ 1 + I &= \{2, 4, 6, \dots, 6k - 2, 6k\} = P \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + P &= a + \{0, 2, 4, \dots, a^2 + 1, a^2 + 3, \dots, 6k - 2, 6k\} = \\ &= \{a, a + 2, a + 4, \dots, a^2 - 1 + a, a^2 + 1 + a, a^2 + 3 + a, \dots, 6k - 2 + a, 6k + a\} = \\ &= \underbrace{\{0, 2, \dots, a - 1\}}_{\equiv 0 \pmod{2}} \cup \underbrace{\{a, a + 2, \dots, a^2 + a - 1\}}_{\equiv 1 \pmod{2}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3. Número dicromático de digráficas circulantes

$$\begin{aligned}
 a^2 + P &= a^2 + \{0, 2, 4, \dots, a-1, a+1, a+3, \dots, 6k-2, 6k\} = \\
 &= \{a^2, a^2+2, a^2+4, \dots, a-1+a^2, a^2+1+a, a^2+3+a, \dots, 6k-2+a^2, 6k+a^2\} = \\
 &= \underbrace{\{0, 2, \dots, a^2-1\}}_{\equiv 0 \pmod 2} \cup \underbrace{\{a^2, a^2+2, \dots, a-1+a^2\}}_{\equiv 1 \pmod 2},
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 a + I &= a + \{1, 3, 5, \dots, a, a+2, \dots, 6k-3, 6k-1\} = \\
 &= \{a+1, a+3, a+5, \dots, 2a, 2a+2, \dots, 6k-3+a, 6k-1+a\} = \\
 &= \underbrace{\{1+a, 3+a, \dots, a^2+a\}}_{\equiv 0 \pmod 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, a-2\}}_{\equiv 1 \pmod 2},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 + I &= a^2 + \{1, 3, 5, \dots, a, a+2, \dots, 6k-3, 6k-1\} = \\
 &= \{a^2+1, a^2+3, a^2+5, \dots, a+a^2, a+a^2+2, \dots, 6k-3+a^2, 6k-1+a^2\} = \\
 &= \underbrace{\{1+a^2, 3+a^2, \dots, a+a^2\}}_{\equiv 0 \pmod 2} \cup \underbrace{\{1, 3, \dots, a^2-2\}}_{\equiv 1 \pmod 2}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observe que la subdigráfica inducida por  $P$  tiene las adyacencias de los conjuntos  $a + P$  y  $a^2 + P$  que son congruentes con 0 módulo 2, véase 3.5 y 3.6. La subdigráfica inducida por  $I$  tiene las adyacencias de los conjuntos  $a + I$  y  $a^2 + I$  que son congruentes con 1 módulo 2, véase 3.7 y 3.8. Observe que estas adyacencias inducen subdigráficas acíclicas. Entonces  $\vec{C}_p(S_3) \leq 2$ . Por lo tanto  $\vec{C}_p(S_3) = 2$ . Así, la subdigráficas inducidas por  $P$  e  $I$  son acíclicas.

- (ii) Si  $a \equiv 0 \pmod 2$ , claramente  $a^2 \equiv 0 \pmod 2$ . Por los lemas 3.14 y 3.15  $P_0$  e  $I$  inducen dos subdigráficas acíclicas maximales. Por lo tanto

$$V(\vec{C}_p(S_3)) = P_0 \cup I \cup \{0\}$$

es una partición de los vértices de  $\vec{C}_p(S_3)$ . Concluimos que  $\vec{C}_p(S_3)$  es 3-dicromática crítica en vértices.

□

Los siguientes ejemplos ilustran el teorema 3.16:

1.  $\vec{C}_{19}(1, 7, 11)$ , como  $a = 7 \equiv 1 \pmod 2$ , por el teorema 3.16(i), los conjuntos  $P$  e  $I$  inducen subdigráficas acíclicas

$$P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 16, 18\} \text{ e } I = \{1, 3, 5, \dots, 15, 17\}.$$

Por lo tanto  $dc(\vec{C}_{19}(1, 7, 11)) = 2$ .

2.  $\vec{C}_{37}(1, 10, 26)$ , como  $a = 10 \equiv 0 \pmod 2$ , por el teorema 3.16(ii), los conjuntos  $P_0$  e  $I$  inducen subdigráficas acíclicas,

$$P_0 = \{2, 4, 6, \dots, 34, 36\}, I = \{1, 3, 5, \dots, 33, 35\} \text{ y } \{0\}.$$

Así,  $\vec{C}_{37}(1, 10, 26)$  es 3-dicromática crítica en vértices.

# Número dicromático de dos familias de gráficas circulantes planas

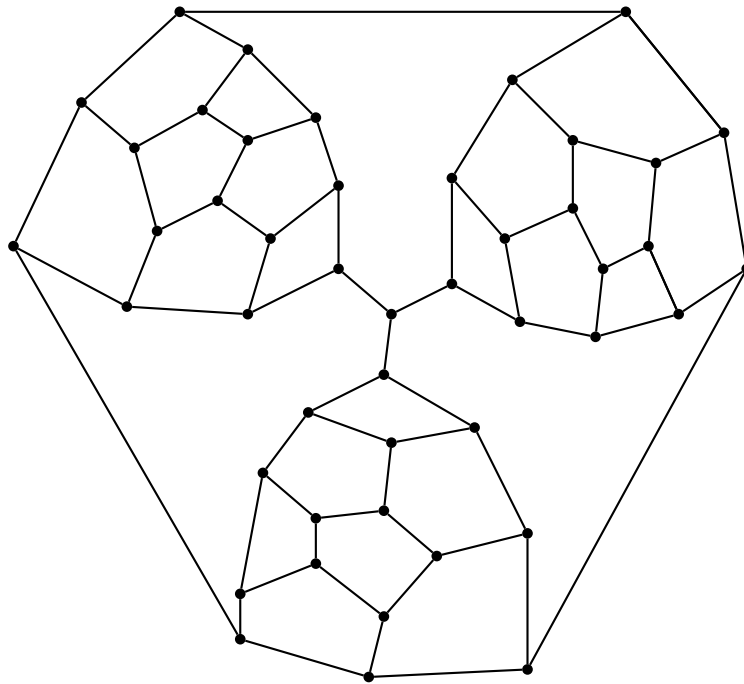


Figura 4.1. Gráfica de Tutte

Recordemos las conjeturas que se enunciaron en la introducción y los preliminares. En 1982, V. Neumann-Lara propuso la conjetura siguiente (y de manera independiente Škrekovski (2001) [46], Bokal, Fijavž, Juvan, Kayll y Mohar (2004) [4]).

**Conjetura 4.1** (V. Neumann-Lara ). *Sea  $D$  una digráfica planar. Entonces  $dc(D) = 2$ .*

Esta conjetura también ha sido mencionada en [4] pág. 73 y 548, [6] pág. 591 y [34]. Es fácil ver que la siguiente conjetura también debida a V. Neumann-Lara es consecuencia inmediata de la conjetura 4.1.

**Conjetura 4.2.** *Sea  $G$  una gráfica planar. Entonces  $dc(G) = 2$ .*

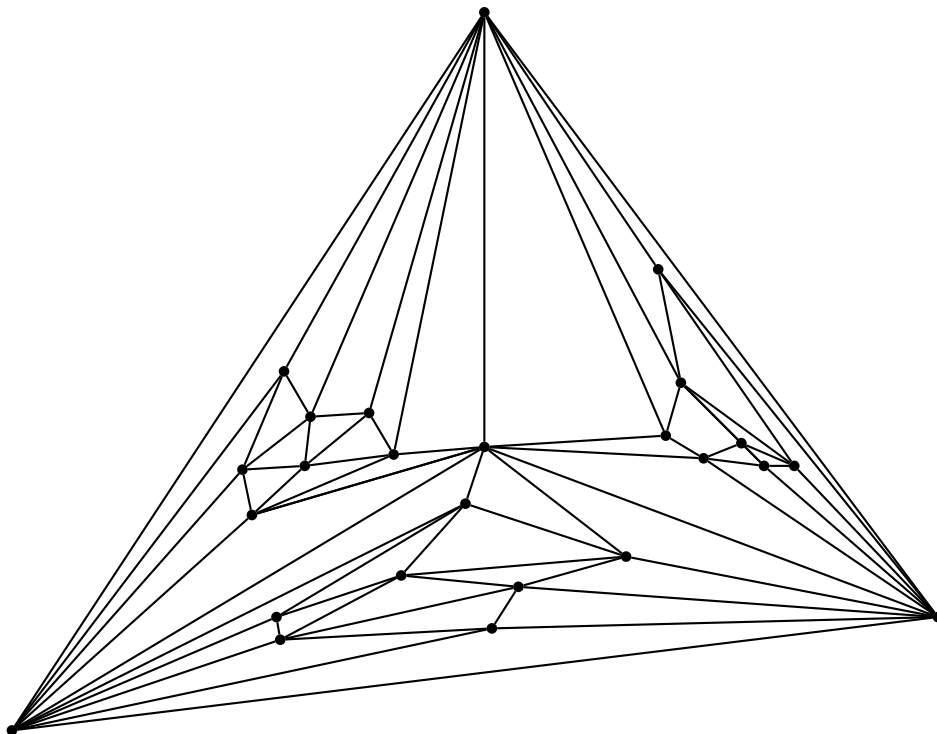


Figura 4.2. Dual de la gráfica de Tutte la cual tiene arboricidad 3

Observe la relación de estos dos problemas: si se prueba la conjetura 4.1, consecuentemente se obtiene la conjetura 4.2.

El concepto de número dicromático de una gráfica  $G$  está estrechamente relacionado con el de arboricidad de una gráfica  $G$ . Note que

$$dc(G) \leq a(G) \leq \chi(G) \leq 2a(G).$$

Chartrand, Kronk y Wall obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 4.3** (Teorema 3, [8]). *Para toda gráfica planar  $G$ ,  $a(G) \leq 3$ .*

Más tarde, en 1969, Chartrand y Kronk, véase [9], demostraron que esta cota es lo mejor posible. Exhibieron un ejemplo de una gráfica plana la cual tiene arboricidad tres. Al igual, demostraron que si  $G$  es una gráfica planar exterior (outerplanar), entonces tiene arboricidad a lo más dos.

Dicho ejemplo, gráfica plana con arboricidad 3, es una gráfica descubierta por el profesor W. T. Tutte, la cual se usó para demostrar la falsedad de la conjetura de P.G. Tait de que la gráfica de todo poliedro convexo cúbico es hamiltoniana. Sea  $G$  plana, recordemos que el *dual*  $G^*$  de  $G$  es la gráfica plana que se obtiene asociando un punto a cada región de  $G$  y uniendo dos puntos de  $G^*$  por una arista siempre que dos regiones compartan una arista. Considere la gráfica de Tutte, véase figura 4.1. Observe que es una gráfica plana cuyo dual tiene arboricidad 3, véase figura 4.2.

En 1988, Holton y McKay probaron en [23] que toda gráfica plana cúbica 3-conexa de orden a lo más 36 es hamiltoniana. Esta cota es la mejor posible, ya que existen gráficas planas cúbicas 3-conexas de orden 38 las cuales no son hamiltonianas, véase figura 4.3.

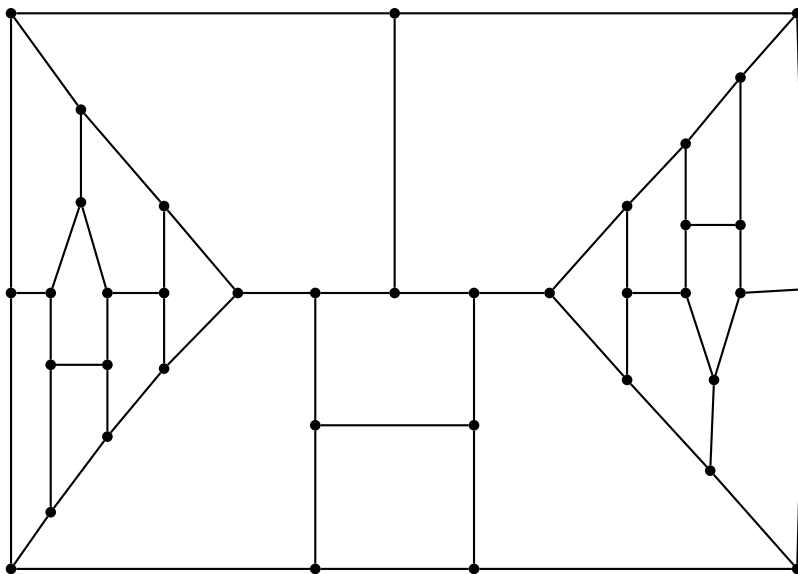


Figura 4.3. Gráfica plana cúbica 3-conexa no hamiltoniana de orden 38

En 1991, Goddard (véase [19]) presentó una mejora del resultado que se obtuvo en [9]. De hecho, probó que el conjunto de vértices de una gráfica planar puede ser partido en tres conjuntos tales que cada uno de estos induce un *bosque lineal*, donde un bosque lineal es aquel donde cada componente es una trayectoria.

El grado promedio máximo de una gráfica  $G$ , denotado por  $mad(G)$ , se define como el máximo de los grados promedios  $ad(H) = 2|E(H)|/|V(H)|$  tomados de todas las subgráficas  $H$  de  $G$ . En 1999, Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud y Sopena relacionaron los conceptos de número dicromático de una gráfica  $G$  y el grado promedio máximo de  $G$ , véase [7]. Obtuvieron resultados como:

**Teorema 4.4** (Teorema 1, [7]). 1.  $dc(G) \leq 5$  para toda gráfica  $G$  con  $mad(G) < \frac{7}{3}$ .

2.  $dc(G) \leq 7$  para toda gráfica  $G$  con  $mad(G) < \frac{11}{4}$  y cuello  $g(G) \geq 5$ .

3.  $dc(G) \leq 11$  para toda gráfica  $G$  con  $mad(G) < 3$ .

4.  $dc(G) \leq 19$  para toda gráfica  $G$  con  $mad(G) < \frac{10}{3}$ .

**Observación 10** (Observación 1, [7]).  $mad(G) < 2g/(g - 2)$  para toda gráfica planar  $G$  con cuello al menos  $g$ .

#### 4. Número dicromático de dos familias de gráficas circulantes planas

---

Considere  $G$  una gráfica donde  $a(G) = k$  y toda subgráfica propia de  $G$  tiene arboricidad menor que  $k$ , entonces  $G$  es una *gráfica  $k$ -crítica* (con respecto a la arboricidad). En 2002, Škrekovski en [46] trabajó sobre la arboricidad en gráficas y determinó cuáles de estas son críticas con respecto a la arboricidad. De hecho, determinó dos cotas inferiores para el número de aristas de gráficas  $k$ -críticas en arboricidad.

En [44], Raspaud y Wang probaron que  $a(G) \leq 2$  siempre que  $G$  sea una gráfica planar y no tenga ciclos de longitud 4 o dos triángulos cualesquiera estén a distancia al menos tres. Además, mostraron un ejemplo de una gráfica de 21 vértices con arboricidad 3, veáse figura 4.4 la cual es el dual de la gráfica obtenida por Holton y McKay en [23]. El resultado que obtuvieron Raspaud y Wang es el siguiente:

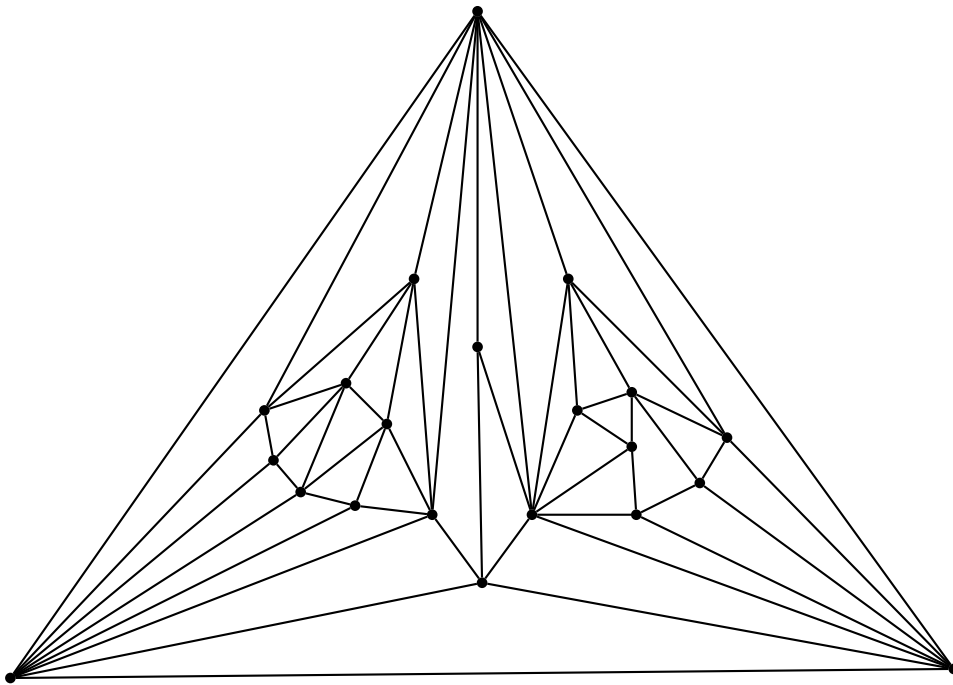


Figura 4.4.  $G^*$  es el dual de  $G$  de la figura 4.3, con  $|G^*| = 21$  y  $a(G^*) = 3$ , (gráfica de Raspaud-Wang)

**Teorema 4.5** (Teorema 12, [44]).

1. Si  $G$  es una gráfica planar con  $|G| \leq 20$ , entonces  $a(G) \leq 2$ .
2. Existe una gráfica planar  $G$  con  $|G| = 21$  tal que  $a(G) = 3$ .

Considere  $G$  una gráfica y  $V_1, V_2, \dots, V_k$  una partición de los vértices de  $G$ . Esta partición es una *partición arbórea* si toda  $V_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) induce un bosque en  $G$ . Una función  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  se llama una  *$k$ -coloración arbórea* si

$$V_i = f^{-1}(i), i = 1, \dots, k,$$

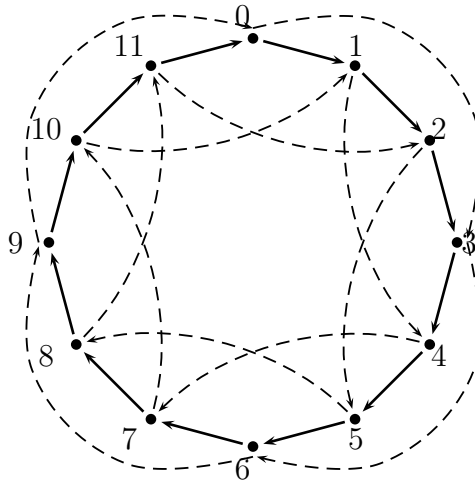


Figura 4.5.  $\vec{C}_{12}(1,3)$

forma una partición arbórea. Se sabe que toda gráfica planar puede ser coloreada con tres colores, donde cada clase cromática induce un bosque. En 2012, Harutyunyan y Mohar (véase [21]) determinaron que hay un número exponencial de 3-coloraciones de gráficas planares, esto es:

**Teorema 4.6.** *Toda gráfica planar de orden  $n$  tiene al menos  $2^{n/9}$  3-coloraciones arbóreas.*

Hasta estos momentos, se conocen gráficas planares con arboricidad 3, pero no se han encontrado digráficas planares  $D$  (sin flechas simétricas) con  $dc(D) > 2$ . Por lo tanto, las gráficas planas  $G$  satisfacen que

$$dc(G) \leq a(G) \leq 3.$$

En este capítulo determinamos el número dicromático de algunas gráficas planas maximales que tienen como subgráficas generadoras las gráficas circulantes planas  $\vec{C}_m(1,2)$  y  $\vec{C}_m(1,-2)$ . Observe que no todas las digráficas  $\vec{C}_m(i,j)$  son planas, por ejemplo  $\vec{C}_{12}(1,3)$  no es plana, véase figura 4.5. El siguiente teorema garantiza que gráficas  $C_n(a_1, \dots, a_m)$  son planas.

**Teorema 4.7** (Teorema 23, [22]). *Sea  $G = C_m(a_1, \dots, a_k)$ .  $G$  es plana si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple:*

- (i)  $k = 1$ ,
- (ii)  $k = 2, a_i \equiv \pm 2a_j \pmod{m}$ , y  $2|m$ , donde  $(i,j) = (1,2)$  o  $(i,j) = (2,1)$ ,
- (iii)  $k = 2, a_i = m/2$ , y  $2|a_j$ , donde  $(i,j) = (1,2)$  o  $(i,j) = (2,1)$ .

#### 4. Número dicromático de dos familias de gráficas circulantes planas

Cuando  $k = 1$  tenemos los ciclos  $\vec{C}_n$  los cuales son digráficas planas dos dicromáticas véase capítulo 3. Para  $k = 2$  se tienen las digráficas  $\vec{C}_n(i, j)$  en el capítulo 3 determinamos que estas tienen número dicromático dos, las digráficas que se obtienen del teorema 4.7 (iii) no son digráficas de nuestro interés ya que tienen flechas simétricas. Por lo tanto sólo tomamos a digráficas que se obtienen a partir del teorema 4.7 (ii), observe que éstas son digráficas del tipo  $\vec{C}_m(1, 2)$  y  $\vec{C}_m(1, -2)$ .

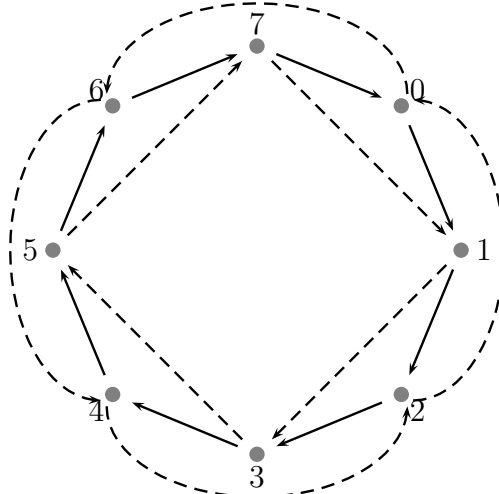


Figura 4.6.  $\vec{C}_8(1, -2) \cong \vec{C}_8(1, 6)$

**Observación 11.**  $\vec{C}_n(1, -2) \cong \vec{C}_n(1, n - 2)$ , véase figura 4.6.

Distinguimos dos ciclos de  $\vec{C}_{2m}(1, j)$  donde  $j = 2$  o  $j = -2$ . El ciclo dirigido inducido por  $\{0, 2, \dots, 2m - 2\}$  al que definimos como  $\vec{C}_m^P$  (ciclo externo o ciclo par) y el ciclo inducido por el conjunto de vértices impares  $\{1, 3, \dots, 2m - 1\}$  definido por  $\vec{C}_m^I$  (ciclo interno o ciclo impar), véase figura 4.7.

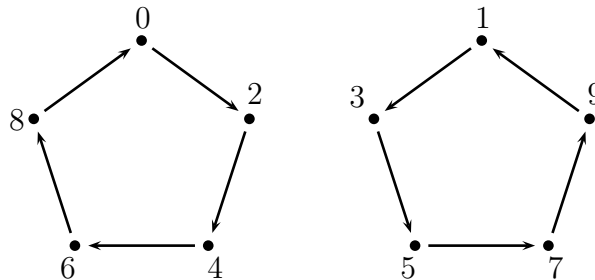


Figura 4.7.  $\vec{C}_5^P$  y  $\vec{C}_5^I$ , respectivamente

Denotamos la familia de gráficas mixtas que tienen como base a  $\vec{C}_{2m}(1, 2)$  como  $\mathfrak{N}_1 = \vec{C}_{2m}(1, 2) \cup G$ , véase figura 4.8, donde  $G$  se define como

$$V(G) = \mathbb{Z}_{2m} \text{ y } E(G) = E^P(G) \cup E^I(G),$$



donde  $E^P(G)$  es el conjunto de aristas interiores en  $\vec{C}_m^P$  que junto con las flechas de  $\vec{C}_m^P$  forman una triangulación en el interior de  $\vec{C}_m^P$  e  $E^I(G)$  es el conjunto de aristas interiores en  $\vec{C}_m^I$  que junto con las flechas de  $\vec{C}_m^I$  forman una triangulación en el interior  $\vec{C}_m^I$ . Así  $\mathfrak{N}_1$  es una familia de gráficas planas maximales.

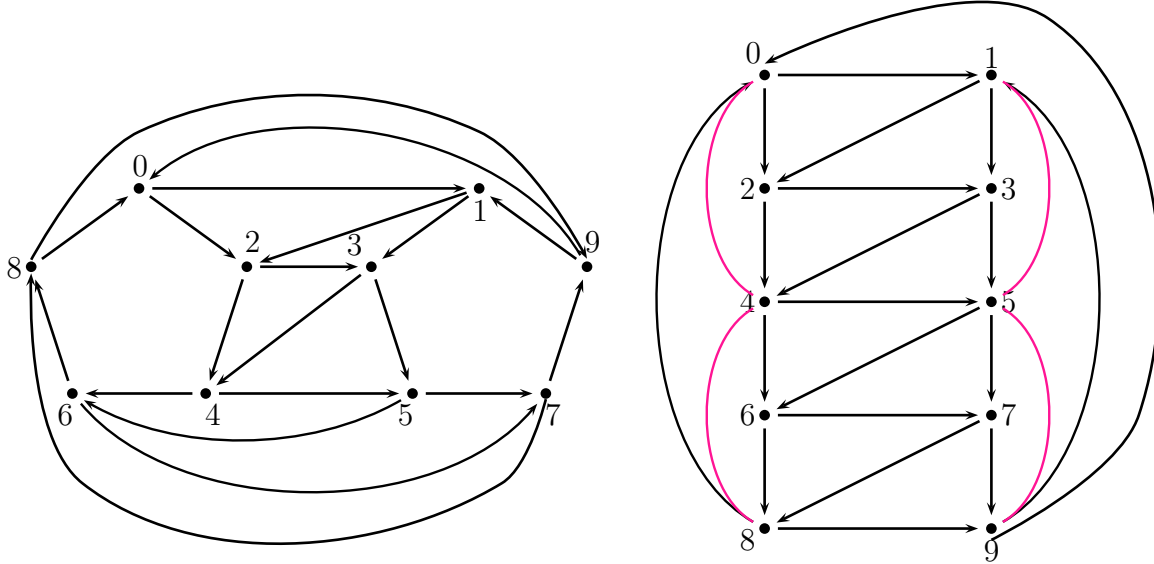


Figura 4.8.  $\vec{C}_{10}(1, 2)$  y  $\vec{C}_{10}(1, 2) \cup G$

Análogamente definimos las gráficas mixtas que tienen como base a  $\vec{C}_{2m}(1, -2)$  y las denotamos como  $\mathfrak{N}_2 = \vec{C}_{2m}(1, -2) \cup G$ , véase figura 4.9.

## 4.1. Gráficas Mixtas con $H \in \mathfrak{N}_1$

**Observación 12.** *Considere  $H \in \mathfrak{N}_1$ . Si existe una arista en  $H$  del vértice  $i$  al vértice  $i + 4$ , entonces*

1. *no pueden colorearse con el mismo color los vértices  $i, i + 2, i + 4$ , porque se formaría un  $\vec{C}_3$  inducido por el conjunto de vértices  $\{i, i + 2, i + 4\}$  y*
2. *no pueden colorearse con el mismo color los vértices  $i, i + 1, i + 3, i + 4$ , porque se formaría un  $\vec{C}_4$  inducido por el conjunto de vértices  $\{i, i + 1, i + 3, i + 4\}$ .*

**Definición 4.8.** *Definimos una función biyectiva  $\varphi : V(C_m^P) \rightarrow V(C_m^I)$  como*

$$\varphi(i) = i + 1 \pmod{2m}, \text{ donde}$$

$$C_m^P = \vec{C}_m^P \cup \langle E^P(G) \rangle,$$

$$C_m^I = \vec{C}_m^I \cup \langle E^I(G) \rangle$$

*y  $\{a, b\} \in E^P(G)$  si y solo si  $\{a + 1, b + 1\} \in E^I(G)$  (la suma módulo  $2m$ ).*

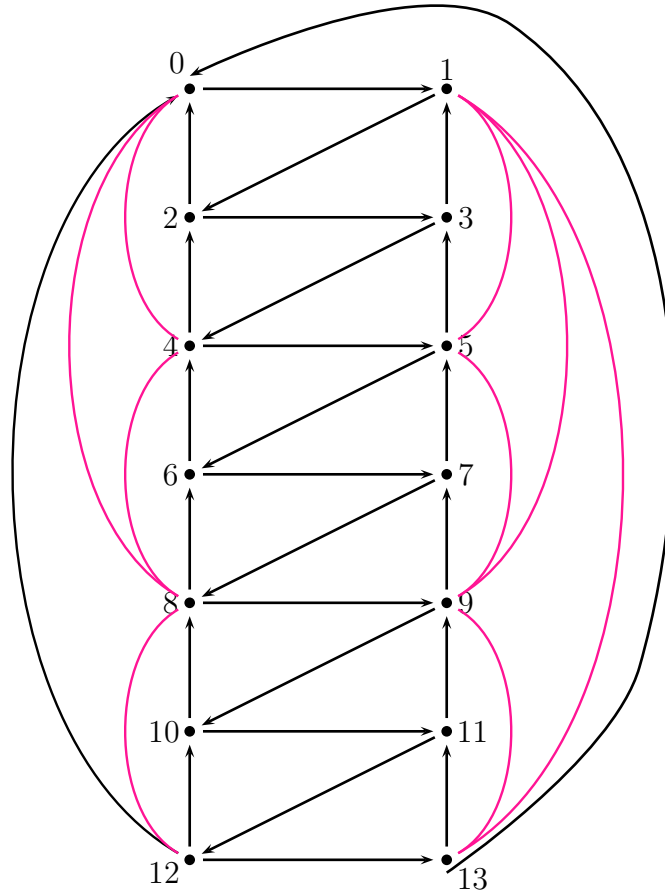


Figura 4.9.  $\vec{C}_{14}(1, -2) \cup G$

El siguiente teorema determina el número dicromático de las gráficas mixtas con base  $\vec{C}_{2m}(1, 2)$ . Sea  $v \in V(G)$  y definimos  $N_G^k(v) = \underbrace{N(N(N \dots N(v)))}_k$ .

**Teorema 4.9.** *Sea  $H \in \mathfrak{N}_1$ . Entonces  $H$  es 2-dicromática.*

*Demostración.* Sea  $S = \{A, R\}$  un conjunto de dos colores. Dado que diferenciamos el ciclo par del impar, primero asignamos colores a los vértices del ciclo par ( $C_m^P$ ). Consideramos  $v$  un vértice en  $C_m^P$  y lo coloreamos de  $A$ . Coloreamos de  $R$  a los vértices que pertenecen a  $N_G^1(v)$ , es decir, coloreamos de  $R$  a los vértices que están a distancia 1 de  $v$ . Ahora, tomamos los vértices que pertenecen a la vecindad de  $N_G^1(v)$ , es decir los vértices que están a distancia 2 de  $v$ , y los coloreamos de  $A$ . Continuamos con este proceso hasta haber coloreado todos los vértices con aristas incidentes en  $C_m^P$ . Con esta asignación de colores a los vértices que tienen aristas incidentes en  $C_m^P$  se elimina la posibilidad de que se formen ciclos monocromáticos en  $C_m^P$ . Supongamos que se forma algún  $C_3 = (v_i, v_j, v_k, v_i)$  monocromático, sin perder generalidad supongamos que  $C_3$  es  $A$ . Entonces se tendría que  $d(v_i, v) \equiv d(v_j, v) \equiv d(v_k, v) \equiv 0 \pmod{2}$ . Tenemos los siguientes casos

Caso 1.  $d(v_i, v) = d(v_j, v) = d(v_k, v)$ , es decir, los vértices  $v_i, v_j$  y  $v_k$  se encuentran a la misma distancia del vértice  $v$ . Pueden existir las aristas  $v_i v_j$  y  $v_j v_k$ , pero no la

arista  $v_k v_i$  porque la gráfica es plana maximal, es decir, la forma de ir de  $v_i$  a  $v_k$  es a través de la trayectoria dirigida  $v_i \rightsquigarrow v_k$  por lo tanto no hay  $C_3$  monocromáticos.

Caso 2.  $d(v_j, v) = d(v_k, v) \neq d(v_i, v)$ . Note que  $d(v, v_j) = l = d(v, v_k)$  y  $d(v, v_i) = l + 1$ , luego  $l \equiv 0 \pmod{2}$  y  $l + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ , lo cual contradice que  $d(v_j, v) \equiv d(v, v_i)$ . Por lo tanto no hay  $C_3$  monocromáticos.

Caso 3. Si  $d(v_j, v) \neq d(v_k, v) \neq d(v_i, v)$ . Se prueba de manera análoga al caso anterior.

Note que solo resta por colorear los vértices que no tienen aristas incidentes y de estos vértices por lo menos existen dos (por las triangulaciones que se forman). El color que se les asigna depende del color de los vértices a los cuales son adyacentes en  $\vec{C}_m(1, 2)$  y de la observación 12. Esto evita la formación de ciclos mixtos monocromáticos en  $C_m^P$ . Para el ciclo de vértices impares  $C_m^I$  es un procedimiento análogo, salvo que se invierten los colores, es decir los vértices que en  $C_m^P$  se colorearon de  $A$  en  $C_m^I$  se colorean de  $R$  y los vértices que en  $C_m^P$  se colorearon de  $R$  en  $C_m^I$  se colorean de  $A$ . Note que por la asignación de la coloración en  $C_m^P$  y en  $C_m^I$  no se forman ciclos monocromáticos mixtos entre  $C_m^P$  y  $C_m^I$ . Supongamos que se forman ciclos dirigidos monocromáticos  $C_k$ . Si  $v_i \in V(C_m^P)$  necesitaríamos flechas del tipo  $v_i \rightarrow v_{i+3}$ , lo cual no es posible, porque solo tenemos flechas del tipo  $i \rightarrow i + 1$  e  $i \rightarrow i + 2$ . Si  $v_i \in V(C_m^I)$  necesitaríamos flechas del tipo  $v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_{i+2}$ . Entonces tendríamos que  $v_{i+2}$  es adyacente a  $v_{i+3}$  o a  $v_{i+4}$ , pero  $v_{i+2}$  no puede ser adyacente a  $v_{i+3}$  por la coloración asignada. Análogamente si  $v_{i+2}$  es adyacente a  $v_4$ . Entonces la única forma de que exista el ciclo monocromático es si  $\varphi(v_i) = \varphi(v_{i+1})$ , lo cual es imposible por la coloración asignada. Por lo tanto dicha coloración realiza el número dicromático.  $\square$

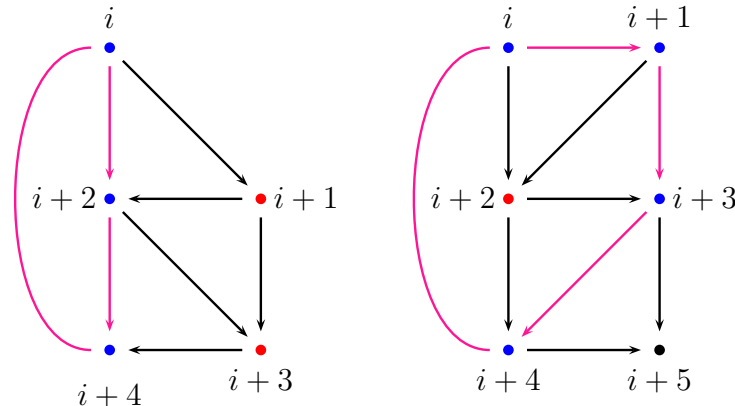


Figura 4.10. Ciclos monocromáticos  $\vec{C}_3$  y  $\vec{C}_4$  en  $H \in \mathfrak{N}_1$

## 4.2. Gráficas Mixtas con $H \in \mathfrak{N}_2$

**Observación 13.** Note que si  $H \in \mathfrak{N}_2$  no puede haber tres vértices consecutivos del mismo color en  $\vec{C}_{2m}(1, 2m - 2)$ , porque si hubiera tres vértices consecutivos del mismo color se formaría un  $\vec{C}_3$  monocromático, véase figura 4.9.

#### 4. Número dicromático de dos familias de gráficas circulantes planas

El siguiente teorema determina el número dicromático de las gráficas mixtas con base  $\vec{C}_{2m}^P(1, 2m - 2)$ , para  $m$  par y que satisfacen la definición 4.8.

**Teorema 4.10.** *Sea  $H \in \mathfrak{N}_2$ . Entonces  $H$  es 2-dicromática.*

*Demostración.* Por el teorema 3.8,  $dc(H) \geq 2$ . Demostraremos que  $dc(H) = 2$ . Sea  $S = \{A, R\}$  un conjunto de dos colores. Primero asignaremos colores a los vértices de  $C_m^P$ . Consideramos un vértice  $v$  en  $V(C_m^P)$  el cuál tiene aristas incidentes y lo coloreamos de  $A$  y coloreamos de  $R$  a los vértices que pertenecen a  $N_G^1(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Consideramos los vértices adyacentes al conjunto de vértices que pertenecen a  $N_G(v)$ , es decir los vértices que están a distancia dos de  $v$  ( $N_G^2(v)$ ) y les asignamos el color  $A$ . Tomamos a la vecindad de  $N_G^2(v)$  y les asignamos el color  $R$ . Continuamos con este proceso hasta colorear los vértices de  $\vec{C}_m^P(1, -2)$  que tengan aristas incidentes. Con esta asignación de colores a los vértices que tienen aristas incidentes en  $C_m^P$  se elimina la posibilidad de que se formen ciclos monocromáticos en  $C_m^P$ . Supongamos que se forma algún  $C_3 = (v_i, v_j, v_k, v_i)$  monocromático, sin perder generalidad supongamos que  $C_3$  es  $A$ . Entonces se tendría que  $d(v_i, v) \equiv d(v_j, v) \equiv d(v_k, v) \equiv 0 \pmod{2}$ . Tenemos los siguientes casos

- Caso 1.  $d(v_i, v) = d(v_j, v) = d(v_k, v)$ , es decir, los vértices  $v_i, v_j$  y  $v_k$  se encuentran a la misma distancia del vértice  $v$ . Pueden existir las aristas  $v_i v_j$  y  $v_j v_k$ , pero no la arista  $v_k v_i$  porque la gráfica es plana maximal, es decir, la forma de ir de  $v_i$  a  $v_k$  es a través de la trayectoria dirigida  $v_i \rightsquigarrow v_k$  por lo tanto no hay  $C_3$  monocromáticos.
- Caso 2.  $d(v_j, v) = d(v_k, v) \neq d(v_i, v)$ . Note que  $d(v, v_j) = l = d(v, v_k)$  y  $d(v, v_i) = l + 1$ , luego  $l \equiv 0 \pmod{2}$  y  $l + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ , lo cual contradice que  $d(v_j, v) \equiv d(v, v_i)$ . Por lo tanto no hay  $C_3$  monocromáticos.
- Caso 3. Si  $d(v_j, v) \neq d(v_k, v) \neq d(v_i, v)$ . Se prueba de manera análoga al caso anterior.

Por lo tanto, solo faltan colorear algunos vértices. Sin embargo, la forma de colorear a estos vértices es casi fija, es decir tenemos que tomar en cuenta qué color tienen asignado los vértices a los cuales son adyacentes y de esta forma quedarían coloreados todos los vértices de  $\vec{C}_m^P$ .

Observe que las coloraciones de los dos primeros casos nos impiden ciclos monocromáticos en  $\vec{C}_m^P(1, -2)$  y colorear de manera adecuada los últimos vértices nos impiden los ciclos mixtos monocromáticos en  $\vec{C}_m^P(1, -2)$ . Para el ciclo de vértices impares  $C_m^I(1, -2)$  es un procedimiento análogo, salvo que los colores se invierten, es decir los vértices que en  $C_m^P(1, -2)$  se colorearon de  $A$  en  $C_m^I(1, -2)$  se colorean de  $R$  y los vértices que en  $C_m^P(1, -2)$  se colorearon de  $R$  en  $C_m^I(1, -2)$  se colorean de  $A$ .

Note que por la asignación de la coloración en  $C_m^P$  y en  $C_m^I$  no se forman ciclos monocromáticos mixtos entre  $C_m^P$  y  $C_m^I$ . Supongamos que se forma un  $\rightarrow C_3$  monocromático, sin perder generalidad, supongamos que es  $A$ . Si  $v_i \in V(C_m^I)$  entonces se tiene la flecha  $v_i \rightarrow v_{i+1}$ , donde  $v_{i+1} \in V(C_m^P)$ , luego existe la arista  $v_{i+1} v_{i-1}$ , la cual orientamos de la forma  $v_{i+1} \rightarrow v_{i-1}$  donde  $v_{i-1} \in V(C_m^P)$ ,  $v_{i-1} \rightarrow v_i$ , pero por la coloración asignada si  $\varphi(v_i) = A$  entonces  $\varphi(v_{i-1}) = R$  contradicción, por lo tanto no se forma un  $C_3$  monocromático. Por lo tanto dicha coloración realiza el número dicromático.  $\square$

El resultado siguiente se desprende de los teoremas 4.9 y 4.10, véase figura 4.11.

**Corolario 4.11.** Sean  $H \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2$  y  $v$  un vértice de  $V(H)$  el cual no tienen aristas incidentes. Entonces  $dc(V(H) \setminus \{v\}) = 2$ .

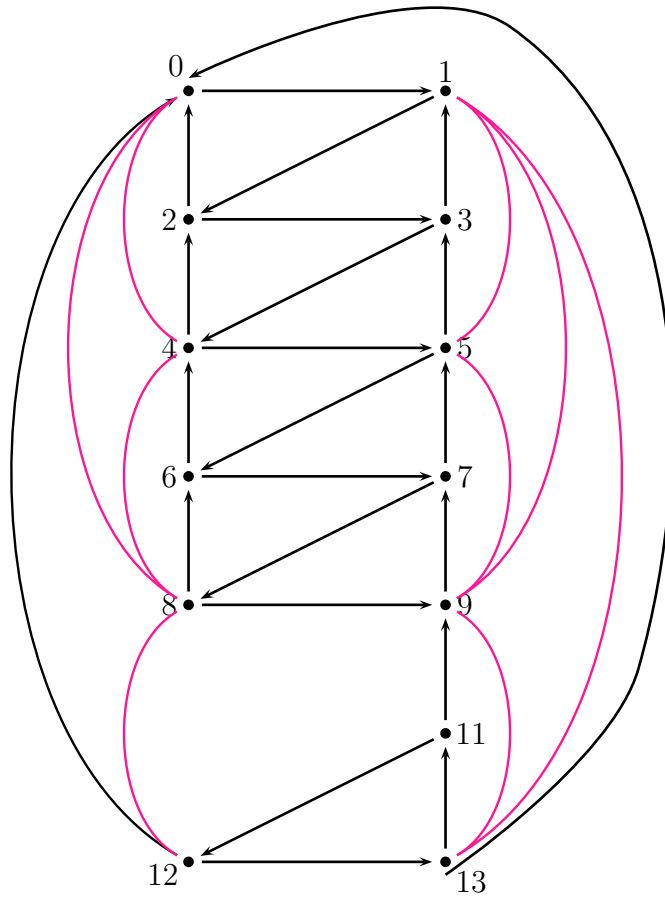


Figura 4.11.  $\vec{C}_{14}(1, -2) \cup G$



# Conclusiones

Determinar el número dicromático es un arduo trabajo. En esta tesis mostramos los avances significativos del número dicromático de: torneos circulantes, digráficas circulantes y de gráficas mixtas maximales.

Verificamos el número dicromático de familias infinitas de torneos circulantes a los cuales se les voltea una flecha y caracterizamos aquellos torneos circulantes que son críticos en vértices. Además mostramos todos los isomorfismos de los torneos circulantes  $\vec{C}_{2n+1}(J)$  para  $3 \leq n \leq 9$ , véase apéndice B.

En el capítulo 3 obtuvimos el teorema 3.12, el cual determina el número dicromático de las digráficas circulantes.

En el capítulo 4 determinamos el número dicromático de dos familias infinitas de gráficas planas maximales, lo cual reafirma la conjetura 4.1.

Planteamos algunos problemas interesantes que serían una excelente continuación a este trabajo.

- **Problema 1.** Determinar el número dicromático de los torneos circulantes  $\vec{C}\langle i, j \rangle$ .
- **Problema 2.** Determinar el número dicromático de las digráficas circulantes con tres saltos a las cuales se les voltea una flecha.
- **Problema 3.** Establecer alguna regla y si se puede determinar el número dicromático de los torneos de Paley.
- **Problema 4.** Para torneos con número par de vértices no se conoce ningún resultado, en especial sería de interés conocer la existencia de torneos  $T$  semirregulares o casi regulares (aquellos para los que  $|d^+(v) - d^-(v)| = 1$  para todo vértice  $v$  del torneo  $T$ )  $r$ -dicromáticos críticos en vértices.
- **Problema 5.** Sea  $G$  una gráfica. ¿Será cierto que, si  $d(v) \leq n$  para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $dc(G) = o(n)$ , véase [14]?
- **Problema 6.** ¿Existen torneos  $r$ -dicromáticos únicamente coloreables con un número par de vértices, (véase [35])?
- **Problema 7.** Clasificar las digráficas (torneos) circulantes que satisfacen la conjetura de Ádám.
- **Problema 8.** Demostrar la conjetura 4.1.

# Apéndice A

Número dicromático de torneos circulantes de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  para  $3 \leq n \leq 7$  y  $k \in \{1, \dots, 7\}$ .

$dc(\vec{C}_7\langle \emptyset \rangle) = 2$ , por el teorema 1.5
$dc(\vec{C}_7\langle 3 \rangle \cong QR_7) = 3$ , por corolario 2.15
$dc(\vec{C}_9\langle \emptyset \rangle) = 2$ , por teorema 1.5
$dc(\vec{C}_9\langle 4 \rangle) = 3$ , por observación 2
$dc(\vec{C}_9\langle 2 \rangle \cong \vec{C}_3[\vec{C}_3]) = 3$ , por el corolario 2.15
$dc(\vec{C}_{11}\langle \emptyset \rangle) = 2$ , por teorema 1.5
$dc(\vec{C}_{11}\langle 5 \rangle) = 3$ , por teorema 1.6
$dc(\vec{C}_{11}\langle 4 \rangle) = 3$ , por proposición 2.1
$dc(\vec{C}_{11}\langle 2 \rangle \cong QR_{11} \cong ST_{11}) = 4$ , por teorema 2.14
$dc(\vec{C}_{13}\langle \emptyset \rangle) = 2$ , por teorema 1.5
$dc(\vec{C}_{13}\langle 6 \rangle) = 3$ , por teorema 1.6
$dc(\vec{C}_{13}\langle 5 \rangle) = 3$ , por teorema 2.29
$dc(\vec{C}_{13}\langle 4 \rangle \cong ST_{13}) = 4$ , por proposición 2.18
$dc(\vec{C}_{13}\langle 3 \rangle) = 3$ , por proposición 2.1
$dc(\vec{C}_{13}\langle 2 \rangle) = 4$ , por teorema 2.14
$dc(\vec{C}_{15}\langle \emptyset \rangle) = 2$ , por teorema 1.5
$dc(\vec{C}_{15}\langle 7 \rangle) = 3$ , por teorema 1.6
$dc(\vec{C}_{15}\langle 6 \rangle) = 3$ , por teorema 2.29
$dc(\vec{C}_{15}\langle 5 \rangle) = 3$ , por teorema 2.29
$dc(\vec{C}_{15}\langle 4 \rangle) = 4$ , por proposición 2.18
$dc(\vec{C}_{15}\langle 3 \rangle) = 4$ , por teorema 2.21
$dc(\vec{C}_{15}\langle 2 \rangle) = 4$ , por teorema 2.14
$dc(\vec{C}_{15}\langle 1 \rangle) = 3$ , por proposición 2.1

Tabla A.1. Número dicromático de torneos circulantes de  $\vec{C}_{2n+1}\langle k \rangle$  para  $3 \leq n \leq 7$  y  $k \in \{1, \dots, 7\}$ .



# Apéndice B

Este apéndice muestra los isomorfismos de los torneos circulares de orden  $2n + 1$  con  $3 \leq n \leq 9$ . Recuerde la notación siguiente

$$\vec{\mathcal{C}}_{2n+1}(1, 2, \dots, n-2, n-1, n) := \vec{\mathcal{C}}_{2n+1}\langle\emptyset\rangle.$$

$$\vec{\mathcal{C}}_7(J) \cong \vec{\mathcal{C}}_7\langle S \rangle$$

$$\vec{\mathcal{C}}_7(1, 2, 3) \cong \vec{\mathcal{C}}_7\langle\emptyset\rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_7(1, 2, 4) \cong \vec{\mathcal{C}}_7\langle 3 \rangle$$

J	S	J	S
(2, 4, 6)	$\langle 1, 3 \rangle$	(1, 2, 4)	$\langle 3 \rangle$
(2, 3, 6)	$\langle 1 \rangle$	(3, 5, 6)	$\langle 1, 2 \rangle$
(1, 4, 5)	$\langle 2, 3 \rangle$		
(1, 3, 5)	$\langle 2 \rangle$		
(4, 5, 6)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$		

$$\vec{\mathcal{C}}_9(J) \cong \vec{\mathcal{C}}_9\langle S \rangle$$

$$\vec{\mathcal{C}}_9(1, 2, 3, 4) \cong \vec{\mathcal{C}}_9\langle\emptyset\rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_9(1, 2, 3, 5) \cong \vec{\mathcal{C}}_9\langle 4 \rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_9(1, 3, 4, 7) \cong \vec{\mathcal{C}}_9\langle 2 \rangle$$

J	S	J	S	J	S
(2, 4, 6, 8)	$\langle 1, 3 \rangle$	(1, 2, 4, 6)	$\langle 3 \rangle$	(2, 5, 6, 8)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(3, 4, 7, 8)	$\langle 1, 2 \rangle$	(2, 3, 4, 8)	$\langle 1 \rangle$	(2, 3, 5, 8)	$\langle 1, 4 \rangle$
(1, 2, 5, 6)	$\langle 3, 4 \rangle$	(1, 5, 6, 7)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$	(1, 4, 6, 7)	$\langle 2, 3 \rangle$
(1, 3, 5, 7)	$\langle 2, 4 \rangle$	(3, 5, 7, 8)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$		
(5, 6, 7, 8)	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$	(4, 6, 7, 8)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$		

Observe que  $\vec{\mathcal{C}}_9(1, 3, 4, 7) \cong \vec{\mathcal{C}}_9\langle 2, 3 \rangle \cong \vec{\mathcal{C}}_3[\vec{\mathcal{C}}_3]$

$$\vec{\mathcal{C}}_{11}(J) \cong \vec{\mathcal{C}}_{11}\langle S \rangle$$

$$\vec{\mathcal{C}}_{11}(1, 2, 3, 4, 5) \cong \vec{\mathcal{C}}_{11}(\emptyset) \qquad \vec{\mathcal{C}}_{11}(1, 2, 3, 4, 6) \cong \vec{\mathcal{C}}_{11}\langle 5 \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 8, 10)	$\langle 1, 3, 5 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 9)	$\langle 2, 5 \rangle$
(1, 4, 5, 8, 9)	$\langle 2, 3 \rangle$
(3, 4, 5, 9, 10)	$\langle 1, 2 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 8)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 10)	$\langle 1, 4, 5 \rangle$
(2, 5, 7, 8, 10)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 9)	$\langle 2, 4 \rangle$
(6, 7, 8, 9, 10)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$

J	S
(1, 2, 4, 6, 8)	$\langle 3, 5 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 9)	$\langle 2, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 8)	$\langle 3 \rangle$
(4, 5, 8, 9, 10)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7)	$\langle 4, 5 \rangle$
(3, 6, 7, 9, 10)	$\langle 1, 2, 4, 5 \rangle$
(2, 4, 5, 8, 10)	$\langle 1, 3 \rangle$
(3, 5, 7, 9, 10)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$
(5, 7, 8, 9, 10)	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{11}(1, 2, 3, 5, 7) \cong \vec{\mathcal{C}}_{11}\langle 4 \rangle \qquad \vec{\mathcal{C}}_{11}(1, 3, 4, 5, 9) \cong \vec{\mathcal{C}}_{11}\langle 2 \rangle$$

J	S
(2, 3, 4, 6, 10)	$\langle 1, 5 \rangle$
(3, 4, 6, 9, 10)	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 9)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 9)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 10)	$\langle 1 \rangle$
(1, 6, 7, 8, 9)	$\langle 2, 3, 5, 7, 10 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 8)	$\langle 3, 4 \rangle$
(1, 5, 7, 8, 9)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
(4, 6, 8, 9, 10)	$\langle 1, 2, 3, 5 \rangle$

J	S
(1, 3, 4, 5, 9)	$\langle 2 \rangle$
(2, 6, 7, 8, 10)	$\langle 1, 3, 4, 5 \rangle$

Observe que  $\vec{\mathcal{C}}_{11}(1, 3, 4, 5, 9) = QR_{11}$ .

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(J) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle S \rangle$$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}(\emptyset) \qquad \vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 2, 3, 4, 5, 6) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 8, 10, 12)	$\langle 1, 3, 5 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 9, 12)	$\langle 1, 4 \rangle$
(3, 4, 7, 8, 11, 12)	$\langle 1, 2, 5, 6 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 10, 12)	$\langle 1, 3, 6 \rangle$
(4, 5, 6, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 8, 9)	$\langle 4, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 6, 8, 9, 11)	$\langle 2, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 9, 10)	$\langle 3, 4 \rangle$
(1, 4, 7, 8, 10, 11)	$\langle 2, 3, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 9, 11)	$\langle 2, 4, 6 \rangle$
(7, 8, 9, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$

J	S
(1, 2, 4, 6, 8, 10)	$\langle 3, 5 \rangle$
(2, 3, 6, 8, 9, 12)	$\langle 1, 4, 5 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 8, 12)	$\langle 1, 5, 6 \rangle$
(2, 5, 7, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4, 6 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 11, 12)	$\langle 1, 2 \rangle$
(1, 2, 7, 8, 9, 10)	$\langle 3, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 8, 11)	$\langle 2, 5 \rangle$
(1, 5, 6, 9, 10, 11)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 10, 11)	$\langle 2, 3, 6 \rangle$
(3, 5, 7, 9, 11, 12)	$\langle 1, 2, 4, 6 \rangle$
(6, 8, 9, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 2, 3, 4, 6, 8) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 5 \rangle$$

J	S
(2, 3, 4, 6, 8, 12)	$\langle 1, 5 \rangle$
(3, 5, 6, 9, 11, 12)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$
(3, 4, 6, 8, 11, 12)	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 7, 10)	$\langle 3, 6 \rangle$
(5, 6, 9, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 8)	$\langle 5, 6 \rangle$
(3, 6, 8, 9, 11, 12)	$\langle 1, 2, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 9, 10)	$\langle 3, 4, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 8, 10)	$\langle 3, 5, 6 \rangle$
(1, 5, 7, 9, 10, 11)	$\langle 2, 3, 4, 6 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 8, 12)	$\langle 1, 5 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 2, 3, 5, 6, 9) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 4 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 6, 10, 12)	$\langle 3, 5 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 9)	$\langle 4 \rangle$
(4, 7, 8, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 7, 8, 9, 11)	$\langle 2, 4, 5, 6 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 2, 4, 5, 6, 10) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 3 \rangle$$

J	S
(2, 4, 7, 8, 10, 12)	$\langle 1, 3, 5, 6 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 12)	$\langle 1 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 8, 11)	$\langle 2, 5, 6 \rangle$
(4, 5, 7, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 6 \rangle$
(4, 6, 8, 10, 11, 12)	$\langle 1, 2, 3, 5 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 9)	$\langle 4, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 8, 9)	$\langle 4, 5 \rangle$
(2, 5, 6, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(1, 7, 8, 9, 10, 11)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 9, 11)	$\langle 2, 4 \rangle$
(3, 7, 8, 9, 11, 12)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 3, 4, 5, 6, 11) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 2 \rangle$$

J	S
(2, 6, 8, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4, 5 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 9, 12)	$\langle 1, 4, 6 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 11, 12)	$\langle 1, 2, 6 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 12)	$\langle 1, 6 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 10, 11)	$\langle 2, 3 \rangle$
(2, 3, 7, 8, 9, 12)	$\langle 1, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 6, 8, 9, 10, 11)	$\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 6, 8, 9, 10)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 10, 11)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 11)	$\langle 2, 6 \rangle$
(2, 7, 8, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{13}(1, 3, 4, 5, 6, 11) \cong \vec{\mathcal{C}}_{13}\langle 2 \rangle$$

J	S
(2, 6, 8, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4, 5 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 9, 12)	$\langle 1, 4, 6 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 11, 12)	$\langle 1, 2, 6 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 12)	$\langle 1, 6 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 10, 11)	$\langle 2, 3 \rangle$
(2, 3, 7, 8, 9, 12)	$\langle 1, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 6, 8, 9, 10, 11)	$\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 6, 8, 9, 10)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 10, 11)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 11)	$\langle 2, 6 \rangle$
(2, 7, 8, 9, 10, 12)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{15}(J) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle S \rangle$$

$\vec{C}_{15}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \cong \vec{C}_{15}\langle\emptyset\rangle$	$\vec{C}_{15}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8) \cong \vec{C}_{15}\langle 7\rangle$																																						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 4, 5, 8, 9, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 5, 6, 7, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 8, 9, 10, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 6, 7, 10, 11, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 4, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5, 7\rangle$	(1, 4, 5, 8, 9, 12, 13)	$\langle 2, 3, 6, 7\rangle$	(4, 5, 6, 7, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3\rangle$	(1, 2, 3, 8, 9, 10, 11)	$\langle 4, 5, 6, 7\rangle$	(2, 3, 6, 7, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5\rangle$	(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)	$\langle 2, 4, 6\rangle$	(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 4, 6, 8, 10)</td><td style="border: none;"><math>\langle 3, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 6, 8, 9, 12)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 4, 7, 8, 12)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 5, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 4, 6, 8, 10, 12)</td><td style="border: none;"><math>\langle 3, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 4, 5, 8, 9, 12)</td><td style="border: none;"><math>\langle 3, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(5, 6, 7, 11, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 4\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 4, 8, 9, 10)</td><td style="border: none;"><math>\langle 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(3, 6, 7, 10, 11, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 4, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(3, 5, 7, 9, 11, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 4, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(1, 2, 4, 6, 8, 10)	$\langle 3, 5\rangle$	(2, 3, 6, 8, 9, 12)	$\langle 1, 4, 5\rangle$	(2, 3, 4, 7, 8, 12)	$\langle 1, 5, 6\rangle$	(1, 2, 4, 6, 8, 10, 12)	$\langle 3, 5, 7\rangle$	(1, 2, 4, 5, 8, 9, 12)	$\langle 3, 6, 7\rangle$	(5, 6, 7, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4\rangle$	(1, 2, 3, 4, 8, 9, 10)	$\langle 5, 6, 7\rangle$	(3, 6, 7, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5\rangle$	(3, 5, 7, 9, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 6\rangle$	(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle$
J	S																																						
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5, 7\rangle$																																						
(1, 4, 5, 8, 9, 12, 13)	$\langle 2, 3, 6, 7\rangle$																																						
(4, 5, 6, 7, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3\rangle$																																						
(1, 2, 3, 8, 9, 10, 11)	$\langle 4, 5, 6, 7\rangle$																																						
(2, 3, 6, 7, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5\rangle$																																						
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)	$\langle 2, 4, 6\rangle$																																						
(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$																																						
J	S																																						
(1, 2, 4, 6, 8, 10)	$\langle 3, 5\rangle$																																						
(2, 3, 6, 8, 9, 12)	$\langle 1, 4, 5\rangle$																																						
(2, 3, 4, 7, 8, 12)	$\langle 1, 5, 6\rangle$																																						
(1, 2, 4, 6, 8, 10, 12)	$\langle 3, 5, 7\rangle$																																						
(1, 2, 4, 5, 8, 9, 12)	$\langle 3, 6, 7\rangle$																																						
(5, 6, 7, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4\rangle$																																						
(1, 2, 3, 4, 8, 9, 10)	$\langle 5, 6, 7\rangle$																																						
(3, 6, 7, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5\rangle$																																						
(3, 5, 7, 9, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 6\rangle$																																						
(7, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle$																																						

$\vec{C}_{15}(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9) \cong \vec{C}_{15}\langle 6\rangle$	$\vec{C}_{15}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 10) \cong \vec{C}_{15}\langle 5\rangle$																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 4, 6, 8, 10, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 4, 5, 6, 8, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 8, 9, 10, 11, 12)</td><td style="border: none;"><math>\langle 3, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4, 5, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 5, 7, 9, 11, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 4, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(6, 8, 10, 11, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 3, 4, 6, 8, 10, 14)	$\langle 1, 5, 7\rangle$	(1, 4, 5, 6, 8, 12, 13)	$\langle 2, 3, 7\rangle$	(3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)	$\langle 1, 2\rangle$	(1, 2, 8, 9, 10, 11, 12)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7\rangle$	(2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 6\rangle$	(1, 5, 7, 9, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 6\rangle$	(6, 8, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7\rangle$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 4, 5, 6, 8, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 4, 8, 9, 10, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 6, 7, 10, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 5, 8, 9, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 4, 5, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(5, 8, 9, 11, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 4, 5, 6, 8, 12, 14)	$\langle 1, 3, 7\rangle$	(1, 4, 8, 9, 10, 12, 13)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7\rangle$	(4, 6, 7, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5\rangle$	(1, 2, 3, 5, 8, 9, 11)	$\langle 4, 6, 7\rangle$	(2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)	$\langle 1, 4\rangle$	(1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5, 6\rangle$	(5, 8, 9, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7\rangle$
J	S																																
(2, 3, 4, 6, 8, 10, 14)	$\langle 1, 5, 7\rangle$																																
(1, 4, 5, 6, 8, 12, 13)	$\langle 2, 3, 7\rangle$																																
(3, 4, 5, 6, 7, 13, 14)	$\langle 1, 2\rangle$																																
(1, 2, 8, 9, 10, 11, 12)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7\rangle$																																
(2, 3, 7, 9, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 6\rangle$																																
(1, 5, 7, 9, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 6\rangle$																																
(6, 8, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7\rangle$																																
J	S																																
(2, 4, 5, 6, 8, 12, 14)	$\langle 1, 3, 7\rangle$																																
(1, 4, 8, 9, 10, 12, 13)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7\rangle$																																
(4, 6, 7, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5\rangle$																																
(1, 2, 3, 5, 8, 9, 11)	$\langle 4, 6, 7\rangle$																																
(2, 3, 5, 6, 7, 11, 14)	$\langle 1, 4\rangle$																																
(1, 3, 7, 9, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5, 6\rangle$																																
(5, 8, 9, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7\rangle$																																

$\vec{C}_{15}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 11) \cong \vec{C}_{15}\langle 4\rangle$	$\vec{C}_{15}(1, 2, 4, 5, 6, 7, 12) \cong \vec{C}_{15}\langle 3\rangle$																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 4, 6, 7, 10, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 5, 8, 9, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 4, 5, 6, 7, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 8, 9, 10, 11, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 6, 7, 10, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 5, 8, 9, 11, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 4, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 8, 9, 10, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 4, 6, 7, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5\rangle$	(4, 5, 8, 9, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7\rangle$	(2, 4, 5, 6, 7, 12, 14)	$\langle 1, 3\rangle$	(1, 3, 8, 9, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7\rangle$	(1, 2, 3, 6, 7, 10, 11)	$\langle 4, 5\rangle$	(1, 3, 5, 8, 9, 11, 13)	$\langle 2, 4, 6, 7\rangle$	(4, 8, 9, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7\rangle$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 4, 8, 9, 10, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 4, 5, 8, 9, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 5, 7, 9, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 6, 8, 10, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 6, 7, 10, 11, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 4, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 5, 6, 7, 11, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 4\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 4, 8, 9, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7\rangle$	(1, 3, 4, 5, 8, 9, 13)	$\langle 2, 6, 7\rangle$	(4, 5, 7, 9, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 6\rangle$	(1, 2, 3, 6, 8, 10, 11)	$\langle 4, 5, 7\rangle$	(2, 6, 7, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5\rangle$	(1, 3, 5, 6, 7, 11, 13)	$\langle 2, 4\rangle$	(3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7\rangle$
J	S																																
(2, 4, 6, 7, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5\rangle$																																
(4, 5, 8, 9, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7\rangle$																																
(2, 4, 5, 6, 7, 12, 14)	$\langle 1, 3\rangle$																																
(1, 3, 8, 9, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7\rangle$																																
(1, 2, 3, 6, 7, 10, 11)	$\langle 4, 5\rangle$																																
(1, 3, 5, 8, 9, 11, 13)	$\langle 2, 4, 6, 7\rangle$																																
(4, 8, 9, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7\rangle$																																
J	S																																
(2, 4, 8, 9, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7\rangle$																																
(1, 3, 4, 5, 8, 9, 13)	$\langle 2, 6, 7\rangle$																																
(4, 5, 7, 9, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 6\rangle$																																
(1, 2, 3, 6, 8, 10, 11)	$\langle 4, 5, 7\rangle$																																
(2, 6, 7, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5\rangle$																																
(1, 3, 5, 6, 7, 11, 13)	$\langle 2, 4\rangle$																																
(3, 8, 9, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7\rangle$																																

$\vec{C}_{15}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 13) \cong \vec{C}_{15}\langle 2\rangle$	$\vec{C}_{15}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 14) \cong \vec{C}_{15}\langle 1\rangle$																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(2, 6, 8, 10, 11, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 4, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 4, 5, 7, 9, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 4, 5, 6, 7, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 8, 9, 10, 11, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 6, 8, 10, 11, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 4, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 3, 4, 5, 7, 9, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 8, 9, 10, 11, 12, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(2, 6, 8, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7\rangle$	(1, 4, 5, 7, 9, 12, 13)	$\langle 2, 3, 6\rangle$	(1, 4, 5, 6, 7, 12, 13)	$\langle 2, 3\rangle$	(2, 3, 8, 9, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7\rangle$	(2, 3, 6, 8, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 7\rangle$	(1, 3, 4, 5, 7, 9, 13)	$\langle 2, 6\rangle$	(2, 8, 9, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">J</th> <th style="width: 50%; text-align: center; border: none;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none;">(4, 6, 8, 10, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 5, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 5, 8, 9, 11, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 4, 6, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(4, 5, 6, 8, 12, 13, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 2, 3, 7\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 7, 9, 10, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 5, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(2, 3, 4, 6, 7, 10, 14)</td><td style="border: none;"><math>\langle 1, 5\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11)</td><td style="border: none;"><math>\langle 4, 6\rangle</math></td></tr> <tr><td style="border: none;">(1, 8, 9, 10, 11, 12, 13)</td><td style="border: none;"><math>\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle</math></td></tr> </tbody> </table>	J	S	(4, 6, 8, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7\rangle$	(1, 5, 8, 9, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7\rangle$	(4, 5, 6, 8, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 7\rangle$	(1, 2, 3, 7, 9, 10, 11)	$\langle 4, 5, 6\rangle$	(2, 3, 4, 6, 7, 10, 14)	$\langle 1, 5\rangle$	(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11)	$\langle 4, 6\rangle$	(1, 8, 9, 10, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$
J	S																																
(2, 6, 8, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7\rangle$																																
(1, 4, 5, 7, 9, 12, 13)	$\langle 2, 3, 6\rangle$																																
(1, 4, 5, 6, 7, 12, 13)	$\langle 2, 3\rangle$																																
(2, 3, 8, 9, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7\rangle$																																
(2, 3, 6, 8, 10, 11, 14)	$\langle 1, 4, 5, 7\rangle$																																
(1, 3, 4, 5, 7, 9, 13)	$\langle 2, 6\rangle$																																
(2, 8, 9, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$																																
J	S																																
(4, 6, 8, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7\rangle$																																
(1, 5, 8, 9, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7\rangle$																																
(4, 5, 6, 8, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 7\rangle$																																
(1, 2, 3, 7, 9, 10, 11)	$\langle 4, 5, 6\rangle$																																
(2, 3, 4, 6, 7, 10, 14)	$\langle 1, 5\rangle$																																
(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11)	$\langle 4, 6\rangle$																																
(1, 8, 9, 10, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle$																																

$$\vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 3, 4, 5, 8, 9) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 6, 7 \rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 3, 4, 7, 9, 10) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 5, 6 \rangle$$

J	S
(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10)	$\langle 5, 7 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 8, 12)	$\langle 3, 7 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$
(1, 2, 4, 8, 9, 10, 12)	$\langle 3, 5, 6, 7 \rangle$
(3, 7, 9, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$
(5, 7, 9, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6 \rangle$
(6, 7, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$

J	S
(2, 3, 4, 5, 6, 8, 14)	$\langle 1, 7 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 10, 12, 13)	$\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 10, 13, 14)	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
(1, 2, 5, 8, 9, 11, 12)	$\langle 3, 4, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 9, 11, 14)	$\langle 1, 4, 6 \rangle$
(1, 7, 9, 10, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(5, 6, 8, 11, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 3, 5, 6, 8, 11) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 4, 7 \rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 4, 5, 7, 9, 12) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 3, 6 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 7, 10, 12)	$\langle 3, 5 \rangle$
(2, 4, 5, 8, 9, 12, 14)	$\langle 1, 3, 6, 7 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(1, 3, 4, 8, 9, 10, 13)	$\langle 2, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5 \rangle$
(3, 5, 8, 9, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7 \rangle$
(4, 7, 9, 10, 12, 13, 14)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6 \rangle$

J	S
(2, 3, 4, 8, 9, 10, 14)	$\langle 1, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 8, 13)	$\langle 2, 7 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 9, 13, 14)	$\langle 1, 2, 6 \rangle$
(1, 2, 6, 8, 10, 11, 12)	$\langle 3, 4, 5, 7 \rangle$
(2, 7, 9, 10, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
(3, 6, 8, 10, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7 \rangle$

$$\vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 5, 6, 7, 11, 12) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 3, 4 \rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 3, 4, 6, 7, 10, 13) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 2, 5 \rangle$$

J	S
(2, 4, 7, 9, 10, 12, 14)	$\langle 1, 3, 5, 6 \rangle$
(3, 4, 5, 8, 9, 13, 14)	$\langle 1, 2, 6, 7 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 9, 12, 14)	$\langle 1, 3, 6 \rangle$
(1, 3, 6, 8, 10, 11, 13)	$\langle 2, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 10, 11, 12)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 8, 11, 13)	$\langle 2, 4, 7 \rangle$
(3, 4, 8, 9, 10, 13, 14)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7 \rangle$

J	S
(2, 5, 6, 8, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 7 \rangle$
(1, 4, 7, 9, 10, 12, 13)	$\langle 2, 3, 5, 6 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 10, 12, 13)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(2, 3, 5, 8, 9, 11, 14)	$\langle 1, 4, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 8, 11, 14)	$\langle 1, 4, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 9, 10, 13)	$\langle 2, 5, 6 \rangle$
(2, 5, 8, 9, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7 \rangle$

Observe que  $\vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 5, 6, 7, 11, 12) = \vec{\mathcal{C}}_5(1, 2)[\vec{\mathcal{C}}_3]$  y  $\vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 3, 4, 6, 7, 10, 13) = \vec{\mathcal{C}}_3[\vec{\mathcal{C}}_5(1, 2)]$ .

$$\vec{\mathcal{C}}_{15}(2, 3, 4, 5, 7, 9, 14) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 1, 6 \rangle \quad \vec{\mathcal{C}}_{15}(1, 2, 4, 7, 9, 10, 12) \cong \vec{\mathcal{C}}_{15}\langle 3, 5, 6 \rangle$$

J	S
(3, 4, 6, 8, 10, 13, 14)	$\langle 1, 2, 5, 7 \rangle$
(1, 5, 6, 8, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 7 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 8, 13, 14)	$\langle 1, 2, 7 \rangle$
(1, 2, 7, 9, 10, 11, 12)	$\langle 3, 4, 5, 6 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 9, 10, 14)	$\langle 1, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 9, 11, 12)	$\langle 3, 4, 6 \rangle$
(1, 6, 8, 10, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7 \rangle$

J	S
(2, 3, 4, 5, 8, 9, 14)	$\langle 1, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 8, 10, 13)	$\langle 2, 5, 7 \rangle$
(3, 4, 7, 9, 10, 13, 14)	$\langle 1, 2, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 8, 11, 12)	$\langle 3, 4, 7 \rangle$
(2, 5, 7, 9, 11, 12, 14)	$\langle 1, 3, 4, 6 \rangle$
(1, 6, 7, 10, 11, 12, 13)	$\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$
(3, 5, 6, 8, 11, 13, 14)	$\langle 1, 2, 4, 7 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(J) \cong \vec{C}_{17}\langle S \rangle$$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \cong \vec{C}_{17}\langle \emptyset \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 15)	$\langle 2, 5, 7 \rangle$
(3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 15)	$\langle 2, 4, 7 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 8, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 15)	$\langle 2, 3, 6 \rangle$
(5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12)	$\langle 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16)	$\langle 1, 2, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14)	$\langle 3, 4, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)	$\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$
(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9) \cong \vec{C}_{17}\langle 8 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)	$\langle 3, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 15)	$\langle 2, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 16)	$\langle 1, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 15)	$\langle 2, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7, 8, 12, 13)	$\langle 4, 5 \rangle$
(1, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 6 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$
(1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13)	$\langle 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 16)	$\langle 1, 4, 7, 8 \rangle$
(4, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 8 \rangle$
(1, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 6 \rangle$
(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 6, 8 \rangle$
(8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10) \cong \vec{C}_{17}\langle 7 \rangle$$

J	S
(2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16)	$\langle 1, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 8 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 8, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
(3, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 7 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 9, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14)	$\langle 3, 6 \rangle$
(6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11)	$\langle 6, 7, 8 \rangle$
(3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 8, 10, 11, 15, 16)	$\langle 1, 2, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 9, 11, 12, 14)	$\langle 3, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 9, 10, 11, 13, 14)	$\langle 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 8, 10, 11, 14, 16)	$\langle 1, 3, 6, 7 \rangle$
(1, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11) \cong \vec{C}_{17}\langle 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 16)	$\langle 1, 3, 7 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 9, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 8 \rangle$
(3, 4, 8, 10, 11, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15)	$\langle 2, 7 \rangle$
(1, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 15)	$\langle 2, 3, 6, 8 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 8, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$
(1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 14)	$\langle 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 6, 8, 10, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 16)	$\langle 1, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 7, 9, 13, 14)	$\langle 3, 4, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 8, 10, 11, 13, 14)	$\langle 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$

$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12) \cong \vec{C}_{17}\langle 5 \rangle$		$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 13) \cong \vec{C}_{17}\langle 4 \rangle$	
J	S	J	S
(2, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5 \rangle$	(2, 4, 6, 9, 10, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12)	$\langle 5, 8 \rangle$	(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 15)	$\langle 2, 8 \rangle$
(4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6 \rangle$	(1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15)	$\langle 2, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15)	$\langle 2, 4, 7, 8 \rangle$	(1, 5, 6, 8, 10, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 7 \rangle$
(1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 14)	$\langle 3, 5 \rangle$	(1, 2, 6, 8, 10, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 7 \rangle$
(4, 5, 7, 8, 11, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 6 \rangle$	(1, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15)	$\langle 2, 3 \rangle$
(5, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6 \rangle$	(2, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 12)	$\langle 5, 7, 8 \rangle$	(1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 15)	$\langle 2, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 9, 10, 12, 13)	$\langle 4, 5, 7, 8 \rangle$	(2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(3, 5, 9, 10, 11, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, 8 \rangle$	(3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 16)	$\langle 1, 2, 6, 8 \rangle$
(2, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 6 \rangle$	(2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 16)	$\langle 1, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13)	$\langle 4, 7, 8 \rangle$	(2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 7, 8 \rangle$
(5, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7 \rangle$	(2, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 5, 9, 10, 11, 13, 15)	$\langle 2, 4, 6, 7, 8 \rangle$	(1, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 15)	$\langle 2, 4, 6 \rangle$
(5, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$	(4, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$\vec{C}_{17}(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 14) \cong \vec{C}_{17}\langle 3 \rangle$		$\vec{C}_{17}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15) \cong \vec{C}_{17}\langle 2 \rangle$	
J	S	J	S
(2, 4, 8, 10, 11, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7 \rangle$	(2, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 15)	$\langle 2, 5 \rangle$	(1, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 15)	$\langle 2, 5, 6, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 8, 11, 15, 16)	$\langle 1, 2, 6 \rangle$	(3, 4, 7, 9, 11, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 13)	$\langle 4, 7 \rangle$	(1, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 15)	$\langle 2, 4 \rangle$
(2, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5 \rangle$	(1, 2, 5, 6, 7, 8, 13, 14)	$\langle 3, 4 \rangle$
(1, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 6 \rangle$	(1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 15)	$\langle 2, 6 \rangle$
(5, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7 \rangle$	(1, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12)	$\langle 5, 6, 8 \rangle$	(2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 16)	$\langle 1, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 16)	$\langle 1, 5, 7, 8 \rangle$	(2, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15)	$\langle 2, 6, 7, 8 \rangle$	(3, 4, 9, 10, 11, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(4, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 8 \rangle$	(2, 4, 9, 10, 11, 12, 14, 16)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 6, 9, 10, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$	(1, 2, 5, 6, 8, 10, 13, 14)	$\langle 3, 4, 7 \rangle$
(2, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$	(2, 5, 6, 8, 10, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 7 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 7, 9, 13, 15)	$\langle 2, 4, 8 \rangle$	(1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15)	$\langle 2, 6, 8 \rangle$
(3, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$	(2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$\vec{C}_{17}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16) \cong \vec{C}_{17}\langle 1 \rangle$		$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10) \cong \vec{C}_{17}\langle 7, 8 \rangle$	
J	S	J	S
(4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7 \rangle$	(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12)	$\langle 5, 7 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 8 \rangle$	(1, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(3, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$	(2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 16)	$\langle 1, 5 \rangle$
(1, 3, 6, 8, 10, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 7 \rangle$	(3, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 7, 8, 11, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 6 \rangle$	(1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 13)	$\langle 4, 5, 8 \rangle$
(1, 4, 5, 8, 10, 11, 14, 15)	$\langle 2, 3, 6, 7 \rangle$	(1, 2, 4, 7, 8, 11, 12, 14)	$\langle 3, 5, 6 \rangle$
(5, 6, 7, 9, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 8 \rangle$	(4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 12)	$\langle 5, 6, 7 \rangle$	(1, 2, 3, 5, 9, 10, 11, 13)	$\langle 4, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 8 \rangle$	(3, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 9, 10, 15, 16)	$\langle 1, 2, 7, 8 \rangle$	(4, 5, 8, 10, 11, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 16)	$\langle 1, 3, 6, 8 \rangle$	(1, 2, 4, 6, 7, 9, 12, 14)	$\langle 3, 5, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 14)	$\langle 3, 7, 8 \rangle$	(1, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16)	$\langle 1, 4, 6, 7 \rangle$	(2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 16)	$\langle 1, 3, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13)	$\langle 4, 6, 8 \rangle$	(5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$	(7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$

$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11) \cong \vec{C}_{17}\langle 6, 8 \rangle$		$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11) \cong \vec{C}_{17}\langle 6, 7 \rangle$	
J	S	J	S
(1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 14)	$\langle 3, 7 \rangle$	(2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 16)	$\langle 1, 7 \rangle$
(3, 4, 6, 9, 10, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 7, 8 \rangle$	(3, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 16)	$\langle 1, 5, 6, 7 \rangle$	(3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 16)	$\langle 1, 2, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 15)	$\langle 2, 6, 7 \rangle$	(3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16)	$\langle 1, 2, 7 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5 \rangle$	(1, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 8 \rangle$
(1, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 6, 8 \rangle$	(1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 14)	$\langle 3, 6, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 7, 8, 15, 16)	$\langle 1, 2 \rangle$	(3, 6, 7, 8, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$	(1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 14)	$\langle 3, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 16)	$\langle 1, 4, 7 \rangle$	(3, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7 \rangle$
(2, 4, 5, 9, 10, 14, 16)	$\langle 1, 3, 6, 7, 8 \rangle$	(2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 16)	$\langle 1, 6, 7 \rangle$
(2, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 8 \rangle$	(1, 2, 7, 9, 11, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 9, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 8 \rangle$	(1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 14)	$\langle 3, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 8, 11, 13, 14)	$\langle 3, 4, 6 \rangle$	(1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 14)	$\langle 3, 6, 7 \rangle$
(3, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 8 \rangle$	(1, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7 \rangle$	(6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 8 \rangle$



$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12) \cong \vec{C}_{17}\langle 5, 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 16)	$\langle 1, 3 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 16)	$\langle 1, 5, 8 \rangle$
(4, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15)	$\langle 2, 7, 8 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(4, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 6, 8 \rangle$
(3, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 6, 9, 10, 12, 14)	$\langle 3, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 8, 10, 12, 13)	$\langle 4, 5, 7 \rangle$
(2, 3, 5, 9, 10, 11, 13, 16)	$\langle 1, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 7, 8, 11, 12, 13, 16)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13)	$\langle 4, 8 \rangle$
(1, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13) \cong \vec{C}_{17}\langle 4, 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 6, 9, 10, 14, 16)	$\langle 1, 3, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 7, 9, 15, 16)	$\langle 1, 2, 8 \rangle$
(1, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 15)	$\langle 2, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 15)	$\langle 2, 3, 7 \rangle$
(1, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 7, 9, 14, 15)	$\langle 2, 3, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 16)	$\langle 1, 4 \rangle$
(1, 4, 9, 10, 11, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 16)	$\langle 1, 6, 8 \rangle$
(2, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 9, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 8 \rangle$
(1, 2, 8, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 7, 8, 11, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 6 \rangle$
(4, 6, 9, 10, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 14) \cong \vec{C}_{17}\langle 3, 8 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 8, 10, 11, 12, 14)	$\langle 3, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15)	$\langle 2, 5, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 16)	$\langle 1, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13)	$\langle 4, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5 \rangle$
(1, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(4, 5, 6, 8, 10, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13)	$\langle 4, 5, 6, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 16)	$\langle 1, 7, 8 \rangle$
(1, 4, 5, 9, 10, 11, 14, 15)	$\langle 2, 3, 6, 7, 8 \rangle$
(4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 5, 8 \rangle$
(1, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16)	$\langle 1, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 9, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 8 \rangle$
(3, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7 \rangle$

$$\vec{C}_{17}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16) \cong \vec{C}_{17}\langle 1, 8 \rangle$$

J	S
(1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$
(1, 4, 6, 9, 10, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 7, 8, 11, 12, 13, 16)	$\langle 1, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 15)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 13)	$\langle 4, 5, 6 \rangle$
(1, 4, 8, 10, 11, 12, 14, 15)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 9, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 13)	$\langle 4, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 9, 13, 16)	$\langle 1, 4, 8 \rangle$
(4, 5, 6, 9, 10, 14, 15, 16)	$\langle 1, 2, 3, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 7, 9, 14, 16)	$\langle 1, 3, 8 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 9, 10, 14, 15)	$\langle 2, 3, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16)	$\langle 1, 4, 6 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16)	$\langle 1, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(J) \cong \vec{C}_{19}\langle S \rangle$$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \cong \vec{C}_{19}\langle\emptyset\rangle$$

J	S
(2,4,6,8,10,12,14,16,18)	$\langle 1, 3, 5, 7, 9 \rangle$
(2,3,5,6,8,9,12,15,18)	$\langle 1, 4, 7 \rangle$
(1,4,5,8,9,12,13,16,17)	$\langle 2, 3, 6, 7 \rangle$
(1,2,5,6,7,10,11,15,16)	$\langle 3, 4, 8, 9 \rangle$
(4,5,6,10,11,12,16,17,18)	$\langle 1, 3, 7, 8, 9 \rangle$
(2,4,6,7,9,11,14,16,18)	$\langle 1, 3, 5, 8 \rangle$
(2, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 9 \rangle$
(5, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14)	$\langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1,3,4,6,9,11,12,14,17)	$\langle 2, 5, 7, 8 \rangle$
(1,3,5,8,10,12,13,15,17)	$\langle 2, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(1,2,3,7,8,9,13,14,15)	$\langle 4, 5, 6 \rangle$
(3,4,8,9,12,13,14,17,18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7 \rangle$
(2,3,6,7,10,11,14,15,18)	$\langle 1, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(1,4,7,10,11,13,14,16,17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$
(10,11,12,13,14,15,16,17,18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1 \rangle$$

J	S
(4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 7 \rangle$
(1,5,8,9,12,13,15,16,17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1,2,6,7,10,11,14,15,16)	$\langle 3, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(2,4,6,9,11,12,14,16,18)	$\langle 1, 3, 5, 7, 8 \rangle$
(2,5,7,10,11,13,15,16,18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(5,6,7,8,10,15,16,17,18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 9 \rangle$
(1,2,3,4,9,11,12,13,14)	$\langle 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1,3,4,6,8,9,12,14,17)	$\langle 2, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15)	$\langle 4, 5 \rangle$
(3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 18)	$\langle 1, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)	$\langle 4, 6, 8 \rangle$
(1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17) \cong \vec{C}_{19}\langle 2 \rangle$$

J	S
(2, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 16)	$\langle 3, 4, 8 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 10, 11, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 18)	$\langle 1, 3, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 9 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4 \rangle$
(2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 7 \rangle$
(3, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 9 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17)	$\langle 2, 6, 8 \rangle$
(2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16) \cong \vec{C}_{19}\langle 3 \rangle$$

J	S
(2, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18)	$\langle 1, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 16)	$\langle 3, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17)	$\langle 2, 3, 7, 8, 9 \rangle$
(4, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 8 \rangle$
(2, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(5, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 8, 10, 12, 13, 14)	$\langle 5, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 17)	$\langle 2, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 15)	$\langle 4, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 17)	$\langle 2, 4, 8 \rangle$
(3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 15) \cong \vec{C}_{19}\langle 4 \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 18)	$\langle 1, 4 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 17)	$\langle 2, 6, 7 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 8, 9 \rangle$
(4, 6, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 8, 9 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 9 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4 \rangle$
(1, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 13, 15)	$\langle 4, 6 \rangle$
(1, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6 \rangle$
(4, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14) \cong \vec{C}_{19}\langle 5 \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 18)	$\langle 1, 7 \rangle$
(4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 18)	$\langle 1, 5, 8 \rangle$
(5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 9 \rangle$
(5, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 13, 14)	$\langle 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14)	$\langle 5, 7, 8 \rangle$
(1, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 9, 11, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 8 \rangle$
(3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(5, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13) \cong \vec{C}_{19}\langle 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 15)	$\langle 4, 7 \rangle$
(1, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 16)	$\langle 3, 4, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 18)	$\langle 1, 3, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 8 \rangle$
(2, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4 \rangle$
(1, 2, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 17)	$\langle 2, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 17)	$\langle 2, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 18)	$\langle 1, 4, 8, 9 \rangle$
(4, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$
(6, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12) \cong \vec{C}_{19}\langle 7 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 18)	$\langle 1, 3, 7, 9 \rangle$
(3, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 7 \rangle$
(1, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15)	$\langle 4, 8, 9 \rangle$
(5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 9 \rangle$
(5, 7, 8, 9, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 14)	$\langle 5, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 17)	$\langle 2, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14)	$\langle 5, 6 \rangle$
(4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11) \cong \vec{C}_{19}\langle 8 \rangle$$

J	S
(2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18)	$\langle 1, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 17)	$\langle 2, 3, 7 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 6, 9, 11, 12, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 16)	$\langle 3, 5, 8 \rangle$
(2, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3 \rangle$
(1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 17)	$\langle 2, 5, 8 \rangle$
(3, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 8, 10, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10) \cong \vec{C}_{19}\langle 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)	$\langle 3, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 18)	$\langle 1, 4, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16)	$\langle 3, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16)	$\langle 3, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 18)	$\langle 1, 2, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 9 \rangle$
(6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13)	$\langle 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17)	$\langle 2, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6 \rangle$
(3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 9 \rangle$
(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 8 \rangle$
(9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}() \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 2 \rangle$$

J	S
(6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 8 \rangle$
(4, 5, 7, 10, 11, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 16, 18)	$\langle 1, 3, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 8, 9, 12, 14, 15)	$\langle 4, 5, 7 \rangle$
(3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 18)	$\langle 1, 5, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 17)	$\langle 2, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13)	$\langle 6, 8 \rangle$
(1, 2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 3 \rangle$$

J	S
(4, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 16)	$\langle 3, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(4, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(5, 6, 7, 10, 11, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 14)	$\langle 5, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 17)	$\langle 2, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15)	$\langle 4, 6, 9 \rangle$
(2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5 \rangle$
(3, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 18)	$\langle 1, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 15)	$\langle 4, 8 \rangle$
(1, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 5 \rangle$$

J	S
(4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 7 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 18)	$\langle 1, 3, 7 \rangle$
(5, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 8, 10, 12, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 18)	$\langle 1, 5, 7, 8 \rangle$
(5, 7, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14)	$\langle 5, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14)	$\langle 5, 7 \rangle$
(1, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15)	$\langle 4, 5, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 17, 18)	$\langle 1, 2, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14)	$\langle 5, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15)	$\langle 4, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 6 \rangle$$

J	S
(4, 6, 7, 8, 10, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 9 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 16)	$\langle 3, 4, 7 \rangle$
(1, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 9 \rangle$
(1, 2, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17)	$\langle 2, 5, 7, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 17)	$\langle 2, 6, 9 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5 \rangle$
(3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 18)	$\langle 1, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 15)	$\langle 4, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$



$$\vec{C}_{19}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 8 \rangle$$

J	S
(3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 7 \rangle$
(1, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 16)	$\langle 3, 5, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 8, 10, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 17)	$\langle 2, 5 \rangle$
(3, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 14, 15)	$\langle 4, 5, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 18)	$\langle 1, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 17)	$\langle 2, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 9 \rangle$$

J	S
(1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 8, 9 \rangle$
(6, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 12, 13)	$\langle 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 17)	$\langle 2, 4, 9 \rangle$
(1, 2, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17) \cong \vec{C}_{19}\langle 2, 3 \rangle$$

J	S
(2, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16)	$\langle 3, 8 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 16, 17)	$\langle 2, 3, 8, 9 \rangle$
(4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 8 \rangle$
(2, 3, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(1, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 16, 17)	$\langle 2, 3, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 8 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 17)	$\langle 2, 8 \rangle$
(2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 17) \cong \vec{C}_{19}\langle 2, 4 \rangle$$

J	S
(2, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 17)	$\langle 2, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 8 \rangle$
(4, 6, 7, 10, 11, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 16, 18)	$\langle 1, 3, 8, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 18)	$\langle 1, 4, 9 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 16)	$\langle 3, 4 \rangle$
(3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 15)	$\langle 4, 6, 7 \rangle$
(1, 3, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 9 \rangle$
(1, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 17)	$\langle 2, 6 \rangle$
(2, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 17) \cong \vec{C}_{19}\langle 2, 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 16)	$\langle 3, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 16)	$\langle 3, 4, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 17, 18)	$\langle 1, 2, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 18)	$\langle 1, 6, 9 \rangle$
(1, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 18)	$\langle 1, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(3, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 9 \rangle$
(3, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 9 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 9 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 8 \rangle$
(2, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 16) \cong \vec{C}_{19}\langle 3, 5 \rangle$$

J	S
(2, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 18)	$\langle 1, 7, 9 \rangle$
(4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 16)	$\langle 3, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 17)	$\langle 2, 3, 7, 9 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 8 \rangle$
(7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(5, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 13, 14)	$\langle 5, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12)	$\langle 7, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 10, 11, 12, 14, 15)	$\langle 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 17)	$\langle 2, 4, 8, 9 \rangle$
(3, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 16) \cong \vec{C}_{19}\langle 3, 6 \rangle$$

J	S
(2, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15)	$\langle 4, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16)	$\langle 3, 9 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16)	$\langle 3, 7, 8, 9 \rangle$
(6, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 8 \rangle$
(2, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 17)	$\langle 2, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13)	$\langle 6, 7, 9 \rangle$
(3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 18)	$\langle 1, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(4, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 17)	$\langle 2, 4, 7, 8 \rangle$
(3, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 16) \cong \vec{C}_{19}\langle 3, 7 \rangle$$

J	S
(2, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 7, 9 \rangle$
(3, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 17)	$\langle 2, 3, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11)	$\langle 8, 9 \rangle$
(1, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(4, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5 \rangle$
(1, 2, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14)	$\langle 5, 7, 9 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 17, 18)	$\langle 1, 2, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 15)	$\langle 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6 \rangle$
(8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(2, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 8 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 8 \rangle$
(3, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 15) \cong \vec{C}_{19}\langle 4, 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 16)	$\langle 3, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 18)	$\langle 1, 4, 8 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13)	$\langle 6, 7 \rangle$
(2, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16, 18)	$\langle 1, 3, 9 \rangle$
(2, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 17)	$\langle 2, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 17)	$\langle 2, 4, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6 \rangle$
(1, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 17)	$\langle 2, 5, 6 \rangle$
(6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(3, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6 \rangle$
(4, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14) \cong \vec{C}_{19}\langle 5, 8 \rangle$$

J	S
(2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 18)	$\langle 1, 5, 7 \rangle$
(4, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 7 \rangle$
(1, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14)	$\langle 5, 8 \rangle$
(5, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 7, 10, 11, 13, 14, 15)	$\langle 4, 5, 6, 8, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14) \cong \vec{C}_{19}\langle 5, 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16)	$\langle 3, 5, 7 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 18)	$\langle 1, 7, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 17, 18)	$\langle 1, 2, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 8 \rangle$
(4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 9 \rangle$
(6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13)	$\langle 6, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15)	$\langle 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 8, 9 \rangle$
(1, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 8, 9 \rangle$
(5, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13) \cong \vec{C}_{19}\langle 6, 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 16)	$\langle 3, 5, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 15)	$\langle 4, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16)	$\langle 3, 4, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 18)	$\langle 1, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(2, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6 \rangle$
(3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 16)	$\langle 3, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 17)	$\langle 2, 7, 9 \rangle$
(1, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 6, 8 \rangle$
(3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 8, 9 \rangle$
(4, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6, 9 \rangle$
(3, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(6, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12) \cong \vec{C}_{19}\langle 7, 9 \rangle$$

J	S
(1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16)	$\langle 3, 7, 9 \rangle$
(3, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 16)	$\langle 3, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 15)	$\langle 4, 7, 8, 9 \rangle$
(3, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 18)	$\langle 1, 3, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16)	$\langle 3, 6, 9 \rangle$
(7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12)	$\langle 7, 8, 9 \rangle$
(3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(1, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 17)	$\langle 2, 4, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6 \rangle$
(4, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 5, 6 \rangle$
(3, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16)	$\langle 3, 5, 6, 9 \rangle$
(3, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 8 \rangle$
(7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 17, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 2, 8 \rangle$$

J	S
(3, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$
(1, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 7, 8 \rangle$
(1, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 8 \rangle$
(4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18)	$\langle 1, 2, 3, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 16)	$\langle 3, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 18)	$\langle 1, 4, 6, 7, 8, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16, 17)	$\langle 2, 3, 9 \rangle$
(2, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 17)	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
(3, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 17, 18)	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 9 \rangle$
(1, 2, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 15)	$\langle 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 18)	$\langle 1, 6, 7, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 18)	$\langle 1, 5, 6, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 17)	$\langle 2, 8, 9 \rangle$
(1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16)	$\langle 3, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 17, 18) \cong \vec{C}_{19}\langle 1, 2, 9 \rangle$$

J	S
(1, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7, 9 \rangle$
(2, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18)	$\langle 1, 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 5, 9, 11, 12, 13, 15, 16)	$\langle 3, 4, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 2, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 7, 8 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 8, 9 \rangle$
(2, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 16, 18)	$\langle 1, 3, 6, 7, 8 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 18)	$\langle 1, 6, 8, 9 \rangle$
(1, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 18)	$\langle 1, 6, 7, 8 \rangle$
(1, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 17)	$\langle 2, 3, 4, 5, 7 \rangle$
(1, 3, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 17)	$\langle 2, 4, 5, 9 \rangle$
(1, 2, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 7 \rangle$
(3, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 17, 18)	$\langle 1, 2, 6, 9 \rangle$
(3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 17, 18)	$\langle 1, 2, 5, 9 \rangle$
(1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 14, 17)	$\langle 2, 5, 9 \rangle$
(2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 18)	$\langle 1, 6, 8 \rangle$
(1, 2, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16)	$\langle 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$

$$\vec{C}_{19}(1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17) \cong \vec{C}_{19}\langle 2, 3, 8 \rangle = QR_{19}$$

J	S
(2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18)	$\langle 1, 4, 5, 6, 7, 9 \rangle$
(1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17)	$\langle 2, 3, 8 \rangle$



# Bibliografía

- [1] A. Ádám, *Research problem 2-10*, J. Combin. Theory. **2** (1967), 393.
- [2] B. Alspach y T.D. Parsons, *Isomorphism of circulant graphs and digraphs*, Discrete Math. **25** (1979) 97–108.
- [3] G. Araujo-Pardo y M. Olsen, *A conjecture of Neumann-Lara on infinite families of  $(n + 1)$ -dichromatic vertex critical circulant tournaments*, Discrete Math. **310** no. 3 (2010) 489–492.
- [4] J. Bang-Jensen y G. Gutin, *Digraphs. Theory, algorithms and applications*, Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd. London, 2009 xxii+795 pp. ISBN: 978-1-84800-997-4.
- [5] D. Bokal, G. Fijavž, M. Juvan, P.M. Kayll y B. Mohar, *The circular chromatic number of a digraph*, J. Graph Theory. **46** (2004) 227–240.
- [6] J. A. Bondy y U. S. R. Murty *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics. 244. Springer, New York, 2008. xii+651 pp. ISBN: 978-1-84628-969-9
- [7] O. V. Borodin, A.V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud y E. Sopena, *On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph*, Discrete Mathematics. **206** (1999) 77–89.
- [8] G. Chartrand, H.V. Kronk y C. E. Wall, *The point-arboricity of a graph*, Israel J. Math. **6** (1968) 169–175.
- [9] G. Chartrand y H.V. Kronk, *The point-arboricity of planar graphs*, J. London Math. Soc. **44** (1969) 612–616.
- [10] Z. Chen, J. Ma y W. Zang, *Coloring digraphs with forbidden cycles*, J. Combin. Theory Ser. B. **115** (2015) 210–223.
- [11] B. Elspas y J. Turner, *Theory of Cellular Logic Networks and Machines*, Stanford Res. Inst. Final Rept., January. (1968).
- [12] P. Erdős y L. Moser, *On the representation of directed graphs as unions of ordering*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **9** (1964) 125–132.
- [13] P. Erdős y A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set-system*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1966) 61–99.

- 
- [14] P. Erdős, *Problems and results in number theory and graph theory*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1979), pp. 3–21, Congress. Numer., XXVII, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1979.
- [15] P. Erdős y V. Neumann-Lara, *On the dichromatic number of a graph*, (manuscrito).
- [16] P. Erdős, J. Gimbel y D. Kratsch, *Some Extremal Results in Cochromatic and Dichromatic Theory*, Journal of Graph Theory. Vol. **15**, No. 6 (1991) 579–585.
- [17] H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Math. **59** no. 3 (1986) 257–265.
- [18] H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara, *On the dichromatic number in kernel theory*, Math. Slovaca **48** no. 3 (1998) 213–219.
- [19] W. Goddard, *Acyclic coloring of planar graphs*, Discrete Mathematics. **91** (1991) 91–94.
- [20] R. Hammack, W Imrich y S. Klavžar, *Handbook of product graphs*, Second edition. With a foreword by Peter Winkler. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011. xviii+518 pp.
- [21] A. Harutyunyan y B. Mohar, *Planar graphs have exponentially many 3-arboricities*, SIAM J. Discrete Math. Vol. **26** No.3 (2012) 1269–1280.
- [22] C. Heuberger, *On planarity and colorability of circulant graphs*, Discrete Mathematics **268** (2003) 153–169.
- [23] D.A. Holton y B.D. McKay, *The smallest non-hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices*, J. Combin. Theory Ser. B. **45** (1988) no. 3, 305–319; J. Combin. Theory Ser. B **47** (1989) 248 (erratum).
- [24] H. Jacob y H. Meyniel, *Extension of Turán's and Brooks' theorems and new notions of stability and coloring in digraphs*, Combinatorial mathematics (Marseille-Luminy, 1981), 365–370, North-Holland Math. Stud., 75, Ann. Discrete Math., 17, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [25] N. Javier y B. Llano, *The Dichromatic Number of Infinite Families of Circulant Tournaments*, Discuss. Math. Graph Theory **37** (2017) no. 1 221–238.
- [26] B. Llano, B. y M. Olsen, *Infinite families of tight regular tournaments*, Discuss. Math. Graph Theory. **27** (2007) no. 2 299–311.
- [27] B. Llano y M. Olsen, *On a conjecture of Víctor Neumann-Lara*, The IV Latin-American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium, 207–212, Electron. Notes Discrete Math., **30**, Elsevier, Amsterdam, 2008.
- [28] B. Llano y M. Olsen, *Disproof of a conjecture of Neumann-Lara*, Electron. J. Combin. **24** (2017) no. 4, paper 4.5, 15pp.

- 
- [29] B. McKay, *Combinatorial Data*, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html>
- [30] B. Mohar, *Eigenvalues and colorings of digraphs*, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 9, 2273–2277.
- [31] V. Neumann-Lara, *The dichromatic number of a digraph*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **33** (1982) 265–270.
- [32] V. Neumann Lara, *The generalized dichromatic number of a digraph*, *Finite and infinite sets, Vol. I, II* (Eger, 1981), 601–606, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 37, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [33] V. Neumann-Lara y J. Urrutia, *Vertex critical  $r$ -dichromatic tournaments*, *Discrete Mathematics.* **49** No. 1 (1984) 83–87.
- [34] V. Neumann-Lara, *Vertex colourings in digraphs. Some problems. Technical report*, University of Waterloo (1985).
- [35] V. Neumann Lara, N. Santoro y J. Urrutia, *Uniquely colourable  $m$ -dichromatic oriented graphs*, *Discrete Math.* **62** no. 1 (1986) 65–70.
- [36] V. Neumann-Lara, *A short proof of a theorem of Reid and Parker on tournaments*, *Graphs Combin.* **10** (1994) no. 4 363–366.
- [37] V. Neumann-Lara, *The 3- and 4-dichromatic tournaments of minimum order*, *Discrete Mathematics* **135** no. 1-3 (1994) 233–243.
- [38] V. Neumann-Lara, *Vertex critical 4-dichromatic circulant tournaments*, *Discrete Mathematics.* **170** (1997) 289–291.
- [39] V. Neumann-Lara, *The acyclic disconnection of a digraph*, 16th British Combinatorial Conference (London, 1997). *Discrete Math.* **197/198** (1999) 617–632.
- [40] V. Neumann-Lara, *Dichromatic number, circulant tournaments and Zykov sums of digraphs*, *Discuss. Math. Graph Theory* **20** no. 2 (2000) 197-207.
- [41] V. Neumann-Lara y M. Olsen, *Enumeration and dichromatic number of tame tournaments*, *Australas. J. Combin.* **45** (2009), 25–35.
- [42] M. Pineda, *Enteros, aritmética modular y grupos finitos*, Primera Edición 2014. UAM-UNIDAD IZTAPALAPA, México D.F. viii+208 ISBN:9786072802957
- [43] H. Qiongxiang y D. Zhihua, *Isomorphisms of circulant digraphs of degree 3*, *Appl. Math.-JCU* **11** B (1996), 115–123.
- [44] A. Raspaud y W. Wang, *On the vertex-arboricity of planar graphs*, *European Journal of Combinatorics* **29** (2008), 1064–1075.
- [45] K. B. Reid y E. T. Parker, *Disproof of a conjecture of Erdős and Moser on tournaments*, *J. Combinatorial Theory.* **9** (1970) 225–238.

- 
- [46] Riste Škrekovski, *On the critical point-arboricity graphs*, J. Graph Theory **39** (2002) no. 1 50–61.
- [47] A. Sali y G. Simonyi, *Oriented list colouring of undirected graphs*, Contemporary trends in discrete mathematics (Štiřín Castle, 1997) 307–316, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1999.
- [48] A. Sanchez-Flores, *On tournaments free of large transitive subtournaments*, Graphs Combin. **14** (1998), no. 2, 181–200.
- [49] J.H. Spencer, *Random regular tournaments*, Period. Math. Hungar. **5** (1974), 105–120.
- [50] Sun Liang., *Isomorphisms of circulants with degree 2*. J. Beijing Institute of Technology, 9:4 (1989), 42–46.
- [51] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, Journal of Combinatorial Theory, Series B. **62** (1994), 180–181.
- [52] D. Yang y X. Zhu, *Game colouring directed graphs*, Electron. J. Combin. **17** (2010), no.1 Research Paper, 11–19 pp.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00055

Matricula: 210280159

NÚMERO DICROMÁTICO DE DIGRÁFICAS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 1 del mes de febrero del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. EDUARDO RIVERA CAMPO  
DR MIGUEL ANGEL PIZAÑA LOPEZ  
DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ  
DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA  
DR. BERNARDO LLANO PEREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: NAHID YELENE JAVIER NOL

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



NAHID YELENE JAVIER NOL  
ALUMNA

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. EDUARDO RIVERA CAMPO

VOCAL

DR MIGUEL ANGEL PIZAÑA LOPEZ

VOCAL

*CANCELADO*

DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

VOCAL

DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

SECRETARIO

DR. BERNARDO LLANO PEREZ