



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
UNIDAD IZTAPALAPA

# **Solución a un problema de Víctor Neumann-Lara sobre la inconexión acíclica de torneos**

Presenta: **José Luis Cosme Álvarez**  
para obtener el grado de **maestro en ciencias**  
**(matemáticas)**

Asesor: Dr. Bernardo Llano Pérez

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de matemáticas

3 de junio de 2008

# Dedicatoria

A Rita e Irene

que son dos mujeres extraordinarias  
y que sin su ayuda, nada de esto hubiera sido posible

# Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecerle a una persona que admiro y quiero, por quien estoy, soy y llegaré a ser, a quien el hecho de ser una mujer de origen indígena, no le fue obstáculo para superar las dificultades que la vida le presentó y que antepuso sobre todo, incluso de ella misma, a quienes tuvimos la fortuna de ser sus hijos: A mi madre, la Sra. Rita Álvarez Santiago.

A mis hermanos: Alejandro y Filiberto por los momentos que hemos pasado juntos. A ti Irene porque siempre te he admirado porque al igual que mamá, eres una mujer extraordinaria. A ti Gustavo por acompañarme y soportarme todo este tiempo.

A la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, en particular al departamento de matemáticas y a sus profesores por haberme hecho parte de esta casa.

Al Dr. Bernardo Llano, quien sin conocerme, aceptó asesorar este trabajo y quien me ha hecho ver que la teoría de Gráficas es maravillosa y sorprendente. Gracias por su apoyo en todos los sentidos, sus enseñanzas, su guía y sobre todo su paciencia.

A las Doctoras Hortensia Galeana y Mika Olsen por haberse tomado la molestia de leer este trabajo, además de los comentarios y observaciones que hicieron para la mejora de la misma; Les reitero mi profunda admiración porque refuerzan la ya bastante que tengo por mujeres como ustedes, mi madre y mi hermana.

A todos mis compañeros de la sala de posgrado que aunque no tenían otra opción, me recibieron e hicieron de esta etapa algo más llevadero e inolvidable.

A toda aquella persona que de alguna u otra forma ha contribuido a este trabajo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	ii
<b>Introducción</b>	iv
<b>1. Terminología y Conceptos Básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Inconexión acíclica e inconexión libre de $\vec{C}_3$ en digráficas . . . . .	1
1.2. Inconexión acíclica e inconexión libre de $\vec{C}_3$ en torneos . . . . .	6
<b>2. Inconexión Acíclica en Torneos Regulares</b>	<b>12</b>
2.1. Tensión en 3-gráficas . . . . .	12
2.2. Tensión en torneos regulares . . . . .	14
<b>3. Solución a un Problema Sobre Inconexión Acíclica</b>	<b>25</b>
3.1. Cuatro familias infinitas especiales . . . . .	25
3.1.1. La familia $\mathfrak{B}$ . . . . .	26
3.1.2. La familia $\mathfrak{V}$ . . . . .	34
3.1.3. La familia $\mathfrak{L}$ . . . . .	37
3.1.4. La familia $\mathfrak{J}$ . . . . .	39
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# Introducción

En 1852 Francis Guthrie planteó el siguiente problema: ¿es posible colorear cualquier mapa con sólo cuatro colores de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color?, este problema que no fue resuelto sino hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, es conocido como el *problema de los cuatro colores* y es considerado uno de los detonantes en el surgimiento de la rama de las matemáticas conocida como *Teoría de Gráficas*, en particular la coloración en gráficas. Este problema introduce el concepto de *número cromático*  $\chi(G)$ , que es definido como el menor número de colores necesarios para colorear una gráfica  $G$ , de tal manera que cualquier par de vértices adyacentes no tengan el mismo color.

En 1982 Víctor Neumann-Lara (e independientemente por H. Meyniel) introduce en [NL82] el concepto de *número dicromático*  $dc(D)$  para una digráfica  $D$ , que es la generalización del número cromático y es definido como el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de  $D$  de tal manera que cada clase cromática sea acíclica. Este trabajo revoluciona el campo de estudio de la teoría de gráficas y es uno de los más importantes en esta área. En 1999 Neumann-Lara introduce en [NL99] otra invariante numérica que generaliza el número de componentes conexas  $\omega(G)$  de una gráfica  $G$ ; la *inconexión acíclica*  $\vec{\omega}(D)$  para una digráfica  $D$ , y es definida como el máximo número de componentes conexas de la subdigráfica obtenida al borrar un conjunto acíclico de arcos. Esta definición es equivalente a calcular el máximo número de colores necesarios en una coloración propia para colorear los vértices de  $D$  de tal forma que no se formen ciclos dirigidos bien coloreados. Ambos parámetros miden la estructura cíclica de las digráficas y derivan propiedades importantes, ya que mientras el número dicromático  $dc(D)$  crece proporcionalmente a medida que aumenta la complejidad de su estructura cíclica, en contraste, su inconexión acíclica  $\vec{\omega}(D)$  decrece a medida que aumenta dicha complejidad.

En el presente trabajo nos centramos en el estudio de la inconexión acíclica en torneos que son una clase especial de digráficas y se exponen algunos resultados acerca de este parámetro. En [NL99], Neumann-Lara proporciona dos conceptos relacionados para una digráfica  $D$ : la inconexión acíclica  $\vec{\omega}(D)$  que se ha definido anteriormente y la *inconexión libre de triángulos dirigidos* (o de  $\vec{C}_3$ )  $\vec{\omega}_3(D)$ . Este último se restringe a analizar sólo los triángulos dirigidos y proporciona una cota superior de la primera, es decir  $\vec{\omega}(D) \leq \vec{\omega}_3(D)$ . Muchos trabajos que tratan sobre inconexión acíclica y sus conceptos relacionados, han sido en la dirección de probar que los  $n$ -torneos regulares  $T_n$  que no son isomorfos a composiciones, tienen  $\vec{\omega}_3(T_n) = 2$  (llamados *tensos*).

Este trabajo está dividido de la siguiente forma:

**El capítulo 1** contiene las definiciones básica sobre inconexión acíclica e inconexión libre de  $\vec{C}_3$ , que utilizaremos para demostrar algunas propiedades en los capítulos posteriores. Algunos resultados son clásicos en la teoría de torneos y otros tantos son tomados de [NL99], en donde se exponen las generalizaciones de ambos parámetros. Así mismo, exponemos algunos resultados propios que nos facilitan las demostraciones posteriores.

**En el capítulo 2** hacemos una pequeña introducción al estudio de inconexión acíclica e inconexión libre de  $\vec{C}_3$  en torneos regulares, en particular hacemos un breve estudio sobre la tensión en torneos. Hacemos uso de algunos resultados expuestos en [NL99], [LlO07], [NLO], [GSNL00] y [LlNL07] sobre tensión de algunas clases especiales de torneos que refuerzan la Conjetura 2.1. Así mismo, mostramos que esta Conjetura es cierta para todo torneo regular de orden menor o igual a 9 que no sea isomorfo a una composición (llamado simple), esto con la ayuda de las gráficas de dominación.

**En el capítulo 3** retomamos el Ejemplo 4.2 de [NL99], en el que Neumann-Lara propone un 9-torneo no regular  $T_9$  y demuestra que  $\vec{w}(T_9) = 2$  y  $\vec{w}_3(T_9) = 3$ , lo que prueba que la desigualdad puede ser estricta, y plantea el siguiente problema: ([NL99] Problema 6.6) ¿existen otros torneos para los cuales  $\vec{w}=2$  y  $\vec{w}_3$  es arbitrariamente grande?. La respuesta es afirmativa y proponemos, describimos y demostramos las propiedades de cuatro familias infinitas de torneos;  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{L}$  y  $\mathfrak{J}$  que salvo la familia  $\mathfrak{L}$ , son una generalización del ejemplo propuesto por Neumann-Lara. La familia  $\mathfrak{B}$  contiene ejemplos interesantes de torneos que no son  $\vec{w}$ -agudos (resp.  $\vec{w}_3$ -agudos) y cumple que para todo  $n \geq 9$  existe un  $n$ -torneo  $T_n$  tal que  $\vec{w}(T_n) < \vec{w}_3(T_n)$ . La familia  $\vec{w}$ -aguda (resp.  $\vec{w}_3$ -aguda)  $\mathfrak{V}$ , cumple que dado  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el torneo  $T_{9n+1}$  cumple que  $|\vec{w}_3(T_{9n+1}) - \vec{w}(T_{9n+1})| \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . La familia  $\vec{w}$ -aguda (resp.  $\vec{w}_3$ -aguda)  $\mathfrak{L}$ , cumple la igualdad ( $\vec{w} = \vec{w}_3$ ), que a primera vista no presenta mayor interés, pero da origen a la construcción de la familia  $\vec{w}$ -aguda (resp.  $\vec{w}_3$ -aguda)  $\mathfrak{J}$ , que cumple que dado  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el torneo  $T_{4n+1}$  tiene  $\vec{w}(T_{4n+1}) = 2$  y  $\vec{w}_3(T_{4n+1}) = n$  que responde positivamente al problema planteado por Neumann-Lara. Esta última familia interesante por sí misma, proporciona uno de los resultados de mayor interés en este trabajo que se encuentra en el Teorema 3.8 que afirma que para todo par de enteros  $r, s$  con  $2 \leq r \leq s$ , existe un torneo  $T$ , tal que  $\vec{w}(T) = r$  y  $\vec{w}_3(T) = s$ .

Finalmente sólo resta decir, que este trabajo está dirigido a estudiantes de ciencias y aquellas personas que reconozcan en esta área un campo de investigación fértil y productivo.

# Terminología y Conceptos Básicos

En el presente capítulo proporcionamos un panorama general de los conceptos y herramientas que ayudarán a probar propiedades en los capítulos posteriores.

A lo largo del presente capítulo, cuando aparezca un concepto seguido de otro entre paréntesis precedido por “resp.” (respectivamente), daremos por entendido que es posible intercambiarlos para formar una nueva Definición, Teorema, etcétera, dependiendo del contexto en el que aparezca.

## 1.1. Inconexión acíclica e inconexión libre de $\vec{C}_3$ en digráficas

Sea  $\mathbb{Z}_n$  el conjunto de enteros módulo  $n$  e  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Una *gráfica*  $G = (V(G), E(G))$  es definida sobre un conjunto de *vértices*  $V(G)$  y *aristas*  $E(G)$ , si no existe confusión de cual gráfica se trata, entonces simplemente se denotarán por  $V$  y  $E$  respectivamente, su *orden*  $or(G)$  es el número de vértices que la componen, es decir  $or(G) = |V(G)|$ . Dos vértices son *adyacentes* si existe una arista que los une, dos aristas son *incidentes* si tienen al menos un vértice en común. Una *orientación* o *dirección* es la asignación de un sentido a las aristas (entonces llamados *arcos* o *flechas*). Una gráfica no orientada la consideraremos en general con ambos sentidos (bidireccional). Una *digráfica*  $D = (V(D), A(D))$  es una gráfica dirigida y es definida sobre un conjunto de vértices  $V(D)$  y arcos  $A(D)$ . Dados  $u, v \in V(D)$ , un arco que va de  $u$  a  $v$  la denotaremos como  $uv \in A(D)$ . Una *subgráfica*  $S$  (resp. *subdigráfica*) es una gráfica (resp. digráfica) contenida en la gráfica  $G$  (resp. digráfica  $D$ ). Diremos que una subdigráfica  $\vec{C}_n = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  es un ciclo dirigido de longitud  $n$  si  $u_{i-1}u_i \in A(D)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_n$ , en particular si  $n = 3$  ó  $n = 4$ , entonces diremos que son triángulos o cuadrados cíclicos respectivamente. Decimos que  $D$  es *acíclica* si no contiene ciclos como subdigráficas. Si  $S \subset V(D)$ , la *subdigráfica inducida*  $D[S]$  es definida como la digráfica con vértices  $S$  y arcos  $A(D[S]) = \{uv \in A(D) : u, v \in S\}$ ,  $S$  es *acíclico* si  $D[S]$  es acíclica. Un conjunto de arcos de  $D$  es *acíclico* (resp. *libre de  $\vec{C}_3$* ) si no contiene ciclos (resp. triángulos cíclicos). Más generalmente, si  $D$  no contiene a  $P$  como subdigráfica, entonces diremos que  $D$  es *libre de  $P$* .

Si  $vu \in A(D)$ , diremos que  $u$  es ex-vecino de  $v$  y que  $v$  es in-vecino de  $u$ . A los conjuntos de ex-vecinos e in-vecinos de  $v$  se denotarán por  $N^+(v, D)$  y  $N^-(v, D)$  respectivamente, el ex-grado e in-grado de  $v$  se definen como  $d^+(v, D) = |N^+(v, D)|$  y  $d^-(v, D) = |N^-(v, D)|$  respectivamente. Una digráfica  $D$  es *fuertemente conexa* si para cada par  $u, v \in V(D)$ , existe una trayectoria de  $u$  a  $v$  y una de  $v$  a  $u$ . Si sólo garantizamos que hay una de tales trayectorias diremos que es *débilmente conexa*. El número de componentes conexas (débiles) de una digráfica  $D$  se denota por  $\omega(D)$ .

Una gráfica es *completa* si entre cada par de vértices existe una arista entre ellos. Un *torneo*  $T$  es una orientación de la gráfica completa. El torneo  $T$  es *regular* si  $d^+(v, T) = d^-(v, T)$  para cada  $v \in V(T)$ ,  $T$  es *semiregular* si  $\max_{v \in V(T)} \{|d^+(v, T) - d^-(v, T)|\} = 1$ . Un torneo de orden  $n$  lo llamaremos *n-torneo* y lo denotaremos por  $T_n$ . Si  $T_n$  es regular entonces es de orden impar y lo denotaremos por  $R_n$ , similarmente si  $T_n$  es semiregular entonces es de orden par y lo denotaremos por  $SR_n$ . El *torneo transitivo*  $TT_n$  es el torneo acíclico de orden  $n$ .

Sea  $\mu$  una partición de  $V(D)$ , un arco  $uv \in A(D)$  se dice *interno* (resp. *externo*) si  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma clase (resp. distintas clases) de equivalencia de  $\mu$ ;  $\mu$  es *internamente* (resp. *externamente*) *acíclica* (resp. *libre de  $\vec{C}_3$* ) si el conjunto de arcos internos (resp. externos) es acíclico (resp. libre de  $\vec{C}_3$ ). La función  $\varphi : V(D) \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  es una *r-coloración* que va del conjunto de vértices de  $D$  a un conjunto de  $r$  colores distintos,  $\varphi$  se dirá *propia* si utiliza cada uno de los  $r$  colores. Una subdigráfica  $D_0$  de  $D$  está *bien coloreada* si todo par de vértices vecinos en  $D_0$  recibe distinto color. En general, si cada vértice de  $D_0$  recibe exactamente un color distinto entonces diremos que es *heterocromática* y si todos los vértices son del mismo color se dirá *monocromática*. Dado  $v \in V(D)$ , al suponer que  $\varphi(v) = c_i$  con  $i \in I_r$ , estaremos hablando indiferentemente del  $i$ -ésimo color o de la  $i$ -ésima clase cromática a la que pertenece.

Una subdigráfica generadora  $D_0$  de  $D$  es llamada  $\vec{C}$ -*transversal lineal* (resp.  $\vec{C}_3$ -*transversal lineal*) de  $D$  si para todo ciclo dirigido (resp. triángulo dirigido)  $\gamma$ , se tiene que  $A(D_0) \cap A(\gamma) \neq \emptyset$ . Al conjunto de  $\vec{C}$ -transversales lineales ( $\vec{C}_3$ -transversales lineales) se denotará por  $Tr(D)$  (resp.  $Tr_3(D)$ ). Notemos que  $D_0 \in Tr(D)$  (resp.  $D_0 \in Tr_3(D)$ ) si y sólo si  $D \setminus A(D_0)$  es acíclica (resp. libre de  $\vec{C}_3$ ).

**Definición 1.1.** La *inconexión acíclica*  $\vec{\omega}(D)$  de una digráfica  $D$ , se define como el máximo número de componentes conexas de la subdigráfica inducida de  $D$  al borrar un conjunto acíclico de arcos, es decir

$$\vec{\omega}(D) = \max\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es acíclico}\}.$$

**Proposición 1.1.** Las siguientes son definiciones equivalentes de  $\vec{\omega}(D)$ :

- i)  $\max\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es acíclico}\}$ .
- ii)  $\max\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr(D)\}$ .
- iii) La máxima cardinalidad de una partición de  $D$  externamente acíclica.
- iv) El máximo número de colores de una coloración propia de  $V(D)$  que no produce ciclos dirigidos bien coloreados.

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii). Sea  $F \subseteq A(D)$  acíclico tal que i) se alcanza, sea  $D_0 = D \setminus F$ , entonces dado  $\gamma$  un ciclo dirigido, se tiene que  $A(D \setminus F) \cap A(\gamma) \neq \emptyset$ , de lo contrario si fuera vacío,

$\gamma \subset F$  para todo ciclo dirigido  $\gamma$ , que es una contradicción al hecho que  $F$  es acíclico. Luego  $D_0 \in Tr(D)$  si y sólo si  $D \setminus F$  es acíclica. Por lo tanto se tiene que

$$\text{máx}\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es acíclico}\} = \text{máx}\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr(D)\}.$$

**ii)  $\Rightarrow$  iii).** Sea  $k = \text{máx}\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr(D)\}$ , entonces existen  $k$  componentes conexas que proporcionan una  $k$ -partición de  $A(D)$ . Como  $D \setminus A(D_0)$  es acíclica, entonces dicha partición es externamente acíclica.

**iii)  $\Rightarrow$  iv).** Sea  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$  una  $k$ -partición máxima externamente acíclica de  $D$ . Sea  $\varphi : \mu \rightarrow \{c_i : i \in I_k\}$  una  $k$ -coloración propia definida por  $\varphi(\mu_i) = c_i$ . Como  $\mu$  es externamente acíclica, entonces ningún ciclo dirigido está bien coloreado.

**iv)  $\Rightarrow$  i).** Sea  $\varphi : V(D) \rightarrow \{c_i : i \in I_k\}$  una  $k$ -coloración propia de  $V(D)$  óptima, sea

$$F = \{uv \in A(D) : u \in \varphi^{-1}(c_i), v \in \varphi^{-1}(c_j), i \neq j\},$$

entonces  $F$  es acíclico y  $k = \omega(D \setminus F)$  es máxima. □

Similarmente se tiene la siguiente

**Definición 1.2.** La *inconexión libre de  $\vec{C}_3$* ,  $\vec{\omega}_3(D)$  de una digráfica  $D$ , es el máximo número de componentes conexas de la subdigráfica inducida de  $D$  al borrar un conjunto de arcos libre de  $\vec{C}_3$ , es decir

$$\vec{\omega}_3(D) = \text{máx}\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es libre de } \vec{C}_3\}.$$

**Proposición 1.2.** Las siguientes son definiciones equivalentes de  $\vec{\omega}_3(D)$ :

**i)**  $\text{máx}\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es libre de } \vec{C}_3\}$ .

**ii)**  $\text{máx}\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr_3(D)\}$ .

**iii)** La máxima cardinalidad de una partición de  $D$  externamente libre de  $\vec{C}_3$ .

**iv)** El máximo número de colores de una coloración propia de  $V(D)$  que no produce triángulos dirigidos heterocromáticos.

*Demostración.* Similar a la Proposición 1.1. □

En lo sucesivo diremos que una partición es *óptima* si bajo ciertas condiciones no es posible aumentar el número de clases de equivalencia. Similarmente una coloración es *óptima* (o *maximal*) si realiza la inconexión acíclica (resp. la inconexión libre de  $\vec{C}_3$ ) y es imposible agregar un nuevo color sin inducir ciclos dirigidos bien coloreados (resp. triángulos dirigidos heterocromáticos).

**Observación 1.1.** Para toda digráfica  $D$  se cumple que  $\vec{\omega}(D) \leq \vec{\omega}_3(D)$ .

Si  $D$  es una digráfica,  $SC(D)$  denotará el conjunto de componentes conexas de  $D$  y  $D^\circ$  la subdigráfica inducida de  $D$  obtenida al borrar los vértices aislados.

**Proposición 1.3** (Proposición 3.1 en [NL99]). La inconexión acíclica (resp. libre de  $\vec{C}_3$ ) de una digráfica  $D$  es la suma de la inconexión acíclica (resp. libre de  $\vec{C}_3$ ) de cada una de sus componentes conexas, es decir

$$\vec{w}(D) = \sum_{\alpha \in SC(D)} \vec{w}(\alpha) \quad \left( \text{resp. } \vec{w}_3(D) = \sum_{\alpha \in SC(D)} \vec{w}_3(\alpha) \right).$$

**Definición 1.3** (Sumas de Zykov). Si  $D$  es una digráfica y  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in SC(D)}$  es una familia no vacía de digráficas disjuntas dos a dos, entonces la *suma de Zykov*  $\sigma(\alpha, D)$  es la digráfica definida por

$$\begin{aligned} V(\sigma(\alpha, D)) &= \bigcup_{i \in V(D)} V(\alpha_i), \\ A(\sigma(\alpha, D)) &= \bigcup_{i \in V(D)} A(\alpha_i) \cup \{uv : u \in V(\alpha_i), v \in V(\alpha_j), \text{ donde } ij \in A(D)\}. \end{aligned}$$

Si los miembros de la familia  $\alpha$  no son disjuntos dos a dos, entonces pueden sustituirse por copias isomorfas del mismo de tal manera que la familia está constituida por miembros disjuntos dos a dos.

**Definición 1.4.** La función  $\pi : \sigma(\alpha, D) \rightarrow D$  definida por  $\pi(\alpha_i) = i$  para todo  $i \in V(D)$  es un *epimorfismo reflexivo*, al cual nos referiremos como *proyección natural* de  $\sigma(\alpha, D)$  sobre  $D$ .

**Definición 1.5.** Si  $\alpha_i \cong B$  para alguna digráfica  $B$  y para cada  $i \in V(D)$ , entonces a  $\sigma(\alpha, D)$  la llamaremos la *composición* de  $D$  y  $B$  y la denotaremos por  $D[B]$ . Si una digráfica no es isomorfa a composición alguna, entonces se dirá *simple*.

**Lema 1.1.** Sea  $D$  una digráfica y  $\alpha$  una familia no vacía de digráficas, si  $D$  y cada  $\alpha_i$  son acíclicas, entonces  $\sigma(\alpha, D)$  es también acíclica.

**Teorema 1.1** (Teorema 3.4 en [NL99]). Sea  $D$  una digráfica y  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in V(D)}$  una familia no vacía de digráficas, entonces

$$\begin{aligned} \vec{w}(\sigma(\alpha, D)) &= \max_{W \in Tr(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{w}(\alpha_j) \right\} \\ \left( \text{resp. } \vec{w}_3(\sigma(\alpha, D)) &= \max_{W \in Tr_3(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{w}_3(\alpha_j) \right\} \right), \end{aligned}$$

donde  $J = V(D) \setminus V(W^\circ)$ .

*Demostración.* Este Teorema es un caso particular del Teorema 1.2 que se probará más adelante.  $\square$

**Definición 1.6.** Una digráfica  $D$  se dice  $\vec{\omega}$ -aguda (resp.  $\vec{\omega}_3$ -aguda) si

- i) existe una  $r$ -coloración propia óptima de  $V(D)$ ,
- ii) dicha coloración tiene exactamente una clase cromática singular y
- iii) no existe otra  $r$ -coloración propia que deje más de una clase cromática singular.

**Proposición 1.4** (Proposición 3.6 en [NL99]). Si  $D$  es  $\vec{\omega}$ -aguda (resp.  $\vec{\omega}_3$ -aguda), entonces tenemos las siguientes propiedades:

- i) Si  $B$  es una digráfica, entonces

$$\vec{\omega}(D[B]) = \vec{\omega}(D) + \vec{\omega}(B) - 1 \quad (\text{resp. } \vec{\omega}_3(D[B]) = \vec{\omega}_3(D) + \vec{\omega}_3(B) - 1).$$

- ii) Si  $B$  es  $\vec{\omega}$ -aguda (resp.  $\vec{\omega}_3$ -aguda), entonces  $D[B]$  es también  $\vec{\omega}$ -aguda (resp.  $\vec{\omega}_3$ -aguda).

*Demostración.* La Proposición 1.6 se demuestra más adelante y es la generalización de la Proposición anterior.  $\square$

**Observación 1.2.** Sean  $D$  una digráfica  $\vec{\omega}$ -aguda (resp.  $\vec{\omega}_3$ -aguda) y  $B$  una digráfica tales que  $\vec{\omega}(D) = r$  y  $\vec{\omega}(B) = s$  (resp.  $\vec{\omega}_3(D) = r$  y  $\vec{\omega}_3(B) = s$ ). Sean  $\varphi : V(D) \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  y  $\psi : V(B) \rightarrow \{c'_j : j \in I_s\}$  dos coloraciones propias óptimas respectivamente y tomemos la composición  $D[B]$ . Denotemos por  $B_v$  a la copia isomorfa de  $B$  tal que  $\pi(B_v) = v \in V(D)$ , donde  $\pi$  es la proyección natural dada en la Definición 1.4. Entonces una coloración propia óptima

$$\phi : V(D[B]) \rightarrow \{c_i \cup c'_j : i \in I_{r-1}, j \in I_s\}$$

en la Proposición 1.4, se obtiene de la siguiente forma:

- Si  $v$  no es el vértices singular y  $\varphi(v) = c_i$ , entonces  $\phi(B_v) = c_i$  para cada  $i \in I_{r-1}$ .
- Si  $v$  es el vértices singular y  $\psi(u) = c'_j$ , entonces  $\phi(u) = c'_j$  para cada  $u \in B_v$  y cada  $j \in I_s$ .

**Corolario 1.1.** Sean  $\{D_i\}_{i \in I_r}$  una familia no vacía de digráficas  $\vec{\omega}$ -agudas (resp.  $\vec{\omega}_3$ -agudas), entonces

$$\vec{\omega}(D_1[D_2[\dots D_{r-1}[D_r]\dots]]) = \sum_{i=1}^r \vec{\omega}(D_i) - (r-1)$$

$$\left( \text{resp. } \vec{\omega}_3(D_1[D_2[\dots D_{r-1}[D_r]\dots]]) = \sum_{i=1}^r \vec{\omega}_3(D_i) - (r-1) \right).$$

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 1.4 y la Observación 1.2.  $\square$

## 1.2. Inconexión acíclica e inconexión libre de $\vec{C}_3$ en torneos

Los torneos son una clase especial de digráficas ampliamente estudiados, cuyas áreas de aplicaciones comprende comparación de experimentos, dominación de sociedades animales, redes y comunicaciones, población y votaciones por mencionar algunos.

**Lema 1.2** (Alspach). Si  $T$  es un torneo regular, entonces todo arco de  $T$  está en un triángulo cíclico.

*Demostración.* Sea  $uv \in A(T)$  y sea  $n$  el orden de  $T$ . Como

$$\begin{aligned} n - 2 &\geq |N^+(v, T) \cup N^-(u, T)| = d^+(v, T) + d^-(u, T) - |N^+(v, T) \cap N^-(u, T)| \\ &= n - 1 - |N^+(v, T) \cap N^-(u, T)|, \end{aligned}$$

así,  $|N^+(v, T) \cap N^-(u, T)| \geq 1$ , por lo que  $uv$  está en al menos un triángulo cíclico.  $\square$

**Corolario 1.2.** Si  $T$  es un torneo regular, entonces toda partición externamente libre de  $\vec{C}_3$  de  $V(T)$  tiene a lo más una clase singular de equivalencia.

*Demostración.* Supongamos por contradicción que existe una partición  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\vec{\omega}_3(T)}\}$  con al menos dos clases singulares de equivalencia. Tomemos dos particiones singulares  $\mu_i = \{u\}$  y  $\mu_j = \{v\}$ , con  $i, j \in I_{\vec{\omega}_3(T)}$  e  $i \neq j$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $uv \in A(T)$ , entonces por el Lema 1.2 se tiene que  $uv$  está en un triángulo cíclico, es decir existe  $w \in \mu_k$ ,  $i \neq k \neq j$  tal que  $\vec{C}_3 = (w, u, v, w)$  que es una contradicción al hecho de ser una partición externamente libre de  $\vec{C}_3$ .  $\square$

**Observación 1.3.** Para todo torneo  $T$  se cumple que

$$2 \leq \vec{\omega}(T) \leq \vec{\omega}_3(T).$$

**Definición 1.7.** Sean  $D$  una digráfica y  $\vec{\omega}^+(D) = \vec{\omega}(D) + 1$  (resp.  $\vec{\omega}_3^+(D) = \vec{\omega}_3(D) + 1$ ), entonces  $\vec{\omega}^+(D)$  (resp.  $\vec{\omega}_3^+(D)$ ) es el mínimo número de colores necesarios, de tal forma que para toda  $\vec{\omega}^+(D)$ -coloración (resp.  $\vec{\omega}_3^+(D)$ -coloración) propia de  $V(D)$ , existe al menos un ciclo dirigido bien coloreado (resp.  $\vec{C}_3$  heterocromático).

**Definición 1.8.** Sea  $T$  un torneo,  $T$  se dirá *tenso* si  $\vec{\omega}_3(T) = 2$ .

**Observación 1.4.** Notemos que en la Definición 1.7,  $\vec{\omega}_3^+(T)$  es una forma alternativa de calcular la inconexión acíclica, ya que  $T$  es tenso si y sólo si  $\vec{\omega}_3(T) = 2$  si y sólo si  $\vec{\omega}_3^+(T) = 3$ .

**Definición 1.9.** Sea  $J \subset \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , la *digráfica circulante* (o *rotacional*)  $\vec{C}_n(J)$  es definida sobre los conjuntos

$$\begin{aligned} V(\vec{C}_n(J)) &= \mathbb{Z}_n, \\ A(\vec{C}_n(J)) &= \{ij : i, j \in \mathbb{Z}_n, j - i \in J\}. \end{aligned}$$

Notemos que  $\vec{C}_n(\{1\})$  es el ciclo dirigido  $\vec{C}_n$  y si  $J \subset \mathbb{Z}_{2n+1} \setminus \{0\}$  tal que  $|J| = n$ ,  $\vec{C}_{2n+1}(J)$  es un *torneo circulante* si y sólo si  $|\{j, -j\} \cap J| = 1$  para cada  $j \in \mathbb{Z}_{2n+1} \setminus \{0\}$ . Recordemos que una gráfica (resp. digráfica) es *transitiva en vértices* si para todo par de vértices  $u, v$  existe un automorfismo  $\phi : V(T) \rightarrow V(T)$ , tal que  $\phi(u) = v$ . Este conjunto forma un grupo y es llamado el *grupo de automorfismos* de un torneo circulante y es bien sabido que dicho grupo es transitivo en vértices.

Sean  $J$  un conjunto de índices y  $P = \{P_i\}_{i \in J}$  un conjunto no vacío de digráficas conexas. Una digráfica  $D$  se dirá una *P-digráfica* cuando  $D \cong P_i$  para alguna  $P_i \in P$ . Un conjunto de arcos  $S$  de una digráfica  $D$  se dirá *libre de P*, si  $D$  no contiene una *P-subdigráfica*  $D_0$  tal que  $A(D_0) \subseteq S$ . Una subdigráfica generadora  $W$  de  $D$  es una *W-arco transversal* de  $D$ , si para toda *P-subdigráfica*  $\Gamma$  de  $D$ , se tiene que  $A(D_0) \cap A(\Gamma) \neq \emptyset$ . Al conjunto de *P*-arcos transversales de  $D$  se denotará por  $Tr_P(D)$ . Es claro que  $D_0 \in Tr_P(D)$  si y sólo si  $D \setminus A(D_0)$  es libre de *P*.

*P* se dice  *$\sigma$ -adecuada* si siempre que  $\sigma(D, \{\alpha_i\}_{i \in V(D)})$  sea libre de *P*, entonces  $D$  y cada  $\alpha_i$  son libres de *P*.

**Definición 1.10.** La *inconexión libre de P* de una digráfica  $D$  es definida como

$$\vec{\omega}(D, P) = \max\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es libre de } P\}.$$

Notemos que si  $D_0$  es una digráfica generadora de  $D$ , entonces  $\vec{\omega}(D, P) \leq \vec{\omega}(D_0, P)$ .

La siguiente Proposición es una generalización de las Proposiciones 1.1 y 1.2.

**Proposición 1.5.** Las siguientes son definiciones equivalentes de  $\vec{\omega}(D, P)$ :

- i)  $\max\{\omega(D \setminus F) : F \subseteq A(D), F \text{ es libre de } P\}$ .
- ii)  $\max\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr_P(D)\}$ .
- iii) La máxima cardinalidad de una partición de  $D$  externamente libre de *P*.
- iv) El máximo número de colores de una coloración propia de  $V(D)$  que no produce *P*-subdigráficas bien coloreadas.

*Demostración.* **i)  $\Rightarrow$  ii).** Sea  $F \subseteq A(D)$  tal que  $D[F]$  es libre de *P* y donde **i)** se alcanza, sea  $D_0 = D \setminus F$ , entonces dada  $\gamma$  una *P-subdigráfica*, se tiene que  $A(D \setminus F) \cap A(\gamma) \neq \emptyset$ , de lo contrario si fuera vacío,  $\gamma \subset F$  para toda *P-subdigráfica*  $\gamma$ , que es una contradicción al hecho de que  $F$  es libre de *P*. Luego  $D_0 \in Tr_P(D)$  si y sólo si  $D \setminus F$  es libre de *P*.

**ii)  $\Rightarrow$  iii).** Sea  $k = \max\{\omega(D_0) : D_0 \in Tr_P(D)\}$ , entonces existen  $k$  componentes conexas que proporcionan una  $k$ -partición de  $A(D)$  libre de *P*. Como  $D \setminus A(D_0)$  es libre de *P*, entonces dicha partición es externamente libre de *P*.

**iii)  $\Rightarrow$  iv).** Sea  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$  una  $k$ -partición máxima de  $D$  externamente libre de *P*. Sea  $\varphi : \mu \rightarrow \{c_i : i \in I_k\}$  una  $k$ -coloración propia libre de *P* definida por  $\varphi(\mu_i) = c_i$ . Como  $\mu$  es externamente libre de *P*, entonces ninguna *P-subdigráfica* está bien coloreada.

**iv)  $\Rightarrow$  i).** Sea  $\varphi : V(D) \rightarrow \{c_i : i \in I_k\}$  una  $k$ -coloración propia libre de *P* de  $V(D)$ , sea  $F = \{uv \in A(D) : u \in \varphi^{-1}(c_i), v \in \varphi^{-1}(c_j), i \neq j\}$ , entonces  $F$  es libre de *P* y  $k = \omega(D \setminus F)$  es máxima.

□

**Teorema 1.2** (Teorema 6.2 en [NL99]). Sea  $D$  una digráfica y  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in V(D)}$  una familia no vacía de digráficas, si  $P$  es  $\sigma$ -adecuada entonces

$$\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P) = \max_{W \in Tr_P(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{\omega}(\alpha_j, P) \right\},$$

donde  $J = V(D) \setminus V(W^\circ)$ .

*Demostración.* Tomemos a  $W \in Tr_P(D)$ ,  $\alpha'_j \in Tr_P(\alpha_j)$  de tal forma que  $\vec{\omega}(D, P) = \omega(W)$  y  $\vec{\omega}(\alpha_j, P) = \omega(\alpha'_j)$  para cada  $j \in V(D)$ . Sea  $\alpha' = \{\alpha'_j\}_{j \in V(D)}$  y notemos que

$$\sigma(\alpha, D) \setminus A(\sigma(\alpha', W)) = \sigma(\{\alpha_j \setminus A(\alpha'_j)\}_{j \in V(D)}, D \setminus A(W))$$

y dado que  $D \setminus A(W)$  y  $\alpha_j \setminus A(\alpha'_j)$  son libres de  $P$ , entonces  $\sigma(\alpha, D) \setminus A(\sigma(\alpha', W))$  es libre de  $P$ , esto si y sólo si  $\sigma(\alpha', W) \in Tr_P(\sigma(\alpha, D))$  y es directo ver que

$$\omega(\sigma(\alpha', W)) = \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \omega(\alpha'_j),$$

por lo tanto

$$\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P) \geq \max_{W \in Tr_P(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{\omega}(\alpha_j, P) \right\}.$$

Sea  $\varphi : V(\sigma(\alpha, D)) \rightarrow \{c_i : i \in I_{\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P)}\}$  una  $\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P)$ -coloración propia óptima libre de  $P$ . Si para algún  $u \in V(D)$ , se tiene que  $\alpha_u$  no es monocromático y un color  $c_k$  que aparece en  $\alpha_u$  aparece también en algún  $\alpha_w$  con  $u \neq w$ , borremos los vértices de color  $c_k$  en  $\alpha_u$  conservando sin alteración a  $\alpha_w$ . Repitamos dicho procedimiento hasta no obtener reducción posible y dado que ningún color y ningún  $\alpha_u$  desaparece en el proceso, obtenemos una familia no vacía de digráficas  $\alpha' = \{\alpha'_u\}_{u \in V(D)}$  tal que  $\alpha'_u \subseteq \alpha_u$  para cada  $u \in V(D)$ , y satisface que la restricción de  $\varphi$  en  $\sigma(\alpha', D)$  es una  $\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P)$ -coloración propia. Sea  $\Gamma$  una  $P$ -subdigráfica en  $D$  y para cada  $w \in V(\Gamma)$ , tomemos un vértice  $v_w \in \alpha'_w$ . Claramente existe una  $P$ -subdigráfica  $\hat{\Gamma}$  en  $\sigma(\alpha', D)$  tal que  $V(\hat{\Gamma}) = \{v_w : w \in V(\Gamma)\}$  y  $\pi(\hat{\Gamma}) = \Gamma$ , donde  $\pi$  es la proyección natural. Dado que  $\varphi$  no deja  $P$ -subdigráficas, entonces existe un arco  $v_{u(\Gamma)}v_{w(\Gamma)} \in A(\hat{\Gamma})$  (por tanto un arco  $u(\Gamma)w(\Gamma) \in A(\Gamma)$ ) tal que  $\varphi(v_{u(\Gamma)}) = \varphi(v_{w(\Gamma)})$ . Como el proceso de reducción ha terminado, se sigue que  $\alpha'_{u(\Gamma)}$  y  $\alpha'_{w(\Gamma)}$  son monocromáticos. Sea  $W$  una subdigráfica generadora de  $D$  con  $A(W) = \{uz \in A(D) : \varphi(\alpha'_u) = \varphi(\alpha'_z)\}$ , entonces  $D \setminus A(W)$  es libre de  $P$ , por lo tanto  $W \in Tr_P(D)$ . Obtenemos que para toda componente no trivial  $Q$  de  $W$ ,  $\sigma(\{\alpha'_u\}_{u \in V(Q)}, Q)$  es monocromática. Por otro lado, el número de colores que aparecen en  $\alpha'_u$  es al menos  $\vec{\omega}(\alpha_u, P)$  para todo vértice aislado  $u$  de  $W$ . Se sigue que

$$\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P) \leq \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{\omega}(\alpha_j, P),$$

por lo que

$$\vec{\omega}(\sigma(\alpha, D), P) \leq \max_{W \in Tr_P(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{\omega}(\alpha_j, P) \right\}.$$

□

El siguiente resultado proporciona una herramienta para simplificar el cálculo de la inconexión acíclica en torneos, el cual afirma que no es necesario analizar todos los ciclos, basta considerar los triángulos y cuadrados cíclicos.

**Teorema 1.3** (Proposición 6.3 en [NL99]). Para todo torneo  $T$ , se tiene que

$$\vec{\omega}(T) = \vec{\omega}(T, \{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}).$$

*Demostración.* La desigualdad  $\vec{\omega}(T) \leq \vec{\omega}(T, \{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}) \leq \vec{\omega}(T, \vec{C}_3) = \vec{\omega}_3(T)$  es clara.

Mostremos ahora que  $\vec{\omega}(T, \{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}) \leq \vec{\omega}(T)$ . Sea  $\varphi : V(T) \rightarrow \{c_i : i \in I_{\vec{\omega}^+(T)}\}$  una  $\vec{\omega}^+(T)$ -coloración de  $V(T)$ , donde  $\vec{\omega}^+(T) \geq 3$ . Entonces existe al menos un ciclo dirigido bien coloreado  $\vec{C}_r = (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_0)$ . Tomemos dicho ciclo de longitud mínima y supongamos por contradicción que  $r \geq 5$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\varphi(u_0) = c_1$  y que  $\varphi(u_1) = c_2$ . Tenemos los siguientes casos:

- i)  $\varphi(u_2) = c_1$ . Observe que  $\varphi(u_3) \neq \varphi(u_0)$ .
  - Si  $u_0u_3 \in A(T)$ , entonces  $\vec{C}_{r-2} = (u_0, u_3, \dots, u_{r-1}, u_0)$  está bien coloreado, en contradicción a la selección de  $C_r$  de longitud mínima.
  - Si  $u_3u_0 \in A(T)$ , entonces  $\vec{C}_4 = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_0)$  está bien coloreado, que es una contradicción similar al caso anterior.
- ii)  $\varphi(u_2) \neq c_1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\varphi(u_2) = c_3$ , entonces
  - Si  $u_0u_2 \in A(T)$ , entonces  $\vec{C}_{r-1} = (u_0, u_2, \dots, u_{r-1}, u_0)$  está bien coloreado, que es una contradicción similar al inciso i).
  - Si  $u_2u_0 \in A(T)$ , entonces  $\vec{C}_3 = (u_0, u_1, u_2, u_0)$  es heterocromático, que es imposible.

Así, estos ciclos son de longitud menor a  $r$  que contradicen al hecho de que  $C_r$  es de longitud mínima.

En todos los casos se obtiene un ciclo de longitud menor a  $r \geq 5$ , por lo que concluimos que  $\vec{\omega}(T, \{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}) \leq \vec{\omega}(T)$ .  $\square$

**Corolario 1.3.** Para todo torneo  $T$ ,  $\vec{\omega}(T)$  es el máximo número de colores de una coloración propia de  $V(T)$  que no produce  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados.

*Demostración.* Es consecuencia directa del Teorema 1.3 y la Proposición 1.1.  $\square$

La siguiente Definición es una generalización de la Definición 1.6.

**Definición 1.11.** Una  $r$ -coloración se dirá  $P$ -óptima si realiza la inconexión libre de  $P$ . Una digráfica  $D$  se dice  $P$ -aguda si

- i) existe una  $r$ -coloración propia de  $V(D)$   $P$ -óptima,
- ii) dicha coloración tiene exactamente una clase cromática singular y

iii) no existe otra  $r$ -coloración propia que deje más de una clase cromática singular.

**Proposición 1.6** (Proposición 6.4 en [NL99]). Supongamos que  $P$  es  $\sigma$ -adecuada.

i) Si  $D$  es una digráfica  $P$ -aguda y  $B$  una digráfica, entonces

$$\vec{\omega}(D[B], P) = \vec{\omega}(D, P) + \vec{\omega}(B, P) - 1.$$

ii) Si  $D$  y  $B$  son  $P$ -agudas, entonces  $D[B]$  es también  $P$ -aguda.

iii) Si  $T$  es un torneo circulante  $P$ -agudo y  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in V(T)}$  es una familia no vacía de digráficas, entonces

$$\vec{\omega}(\sigma(\alpha, T), P) = \vec{\omega}(T, P) + \max_{i \in V(T)} \{\vec{\omega}(\alpha_i, P)\} - 1.$$

*Demostración.* **i).** Tomemos  $W \in Tr_P(D)$ , como  $D$  es  $P$ -aguda entonces tomemos una partición con el vértice singular  $u$ , por lo que  $J = V(D) \setminus V(W^\circ) = \{u\}$ , así  $W^\circ = V(D) \setminus \{u\}$  y  $\omega(W^\circ) = \vec{\omega}(D, P) - 1$ . Por otra parte como  $D[B] = \sigma(\alpha, D)$  y cada  $\alpha_j \cong B$ , entonces por el Teorema 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(D[B], P) &= \max_{W \in Tr_P(D)} \left\{ \omega(W^\circ) + \sum_{j \in J} \vec{\omega}(\alpha_j, P) \right\} \\ &= \max_{W \in Tr_P(D)} \{ \omega(D, P) - 1 + \vec{\omega}(B, P) \} = \vec{\omega}(D, P) + \vec{\omega}(B, P) - 1. \end{aligned}$$

**ii).** Supongamos por contradicción que existen al menos 2 vértices singulares  $u, v \in V(D[B])$  (en copias distintas de  $B$ ). Sea  $\pi$  la proyección natural de  $D[B]$  sobre  $D$  y denotemos por  $B_u$  (resp.  $B_v$ ) a la copia isomorfa de  $B$  tal que  $\pi(B_u) = u$  (resp.  $\pi(B_v) = v$ ). Sea  $\varphi : V(D[B]) \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  una coloración propia  $P$ -óptima con  $r \geq 3$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $\varphi(u) = A$  y  $\varphi(v) = R$ . Notemos que como  $u$  (resp.  $v$ ) no está en ninguna  $P$ -subdigráfica, entonces para cada  $w \in V(B_u)$  (resp.  $w \in V(B_v)$ ), se tiene que  $w$  tampoco está en ninguna  $P$ -subdigráfica, por lo que podemos asignar  $\varphi(B_u) = A$  y  $\varphi(B_v) = R$  sin inducir  $P$ -subdigráficas bien coloreadas, por lo que  $u$  y  $v$  serían vértices singulares en  $\pi(D[B]) = D$ , que es una contradicción al hecho de que  $D$  es  $P$ -agudo. La Observación 1.2 es válida para digráficas  $P$ -agudas y nos proporciona una coloración con un vértice singular, por lo que  $D[B]$  es  $P$ -aguda.

**iii).** De manera similar a **i)**, si  $W^\circ = V(D) \setminus \{u\}$ , entonces  $J = V(D) \setminus V(W^\circ) = \{u\}$  y  $\omega(W^\circ) = \vec{\omega}(D, P) - 1$ . Además notemos que

$$\max_{W \in Tr_P(D)} \{ \omega(W^\circ) + \vec{\omega}(\alpha_i, P) \} = \omega(W^\circ) + \max \{ \vec{\omega}(\alpha_i, P) : i \in V(T) \},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\sigma(\alpha, T), P) &= \omega(W^\circ) + \max_{i \in V(T)} \{ \vec{\omega}(\alpha_i, P) \} \\ &= \vec{\omega}(T, P) + \max_{i \in V(T)} \{ \vec{\omega}(\alpha_i, P) \} - 1. \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.7.** Sea  $T$  un torneo y  $S \subseteq V(T)$ , entonces

$$\vec{\omega}(T) \leq \vec{\omega}(T[S]) + \vec{\omega}(T[T \setminus S]) \quad (\text{resp. } \vec{\omega}_3(T) \leq \vec{\omega}_3(T[S]) + \vec{\omega}_3(T[T \setminus S])).$$

*Demostración.* Sea  $\varphi : V(T) \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  una  $r$ -coloración propia óptima (es decir libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados). Es claro que  $|\varphi(T[S])| \leq \vec{\omega}(T[S])$  y  $|\varphi(T[T \setminus S])| \leq \vec{\omega}(T[T \setminus S])$ , por lo que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(T) &= |\varphi(T[S]) \cup \varphi(T[T \setminus S])| \leq |\varphi(T[S])| + |\varphi(T[T \setminus S])| \\ &\leq \vec{\omega}(T[S]) + \vec{\omega}(T[T \setminus S]). \end{aligned}$$

Se prueba de manera análoga para  $\vec{\omega}_3$ . □

**Corolario 1.4.** Sean  $T$  un torneo,  $v \in V(T)$  y  $T' = T[T \setminus \{v\}]$  tal que  $\vec{\omega}(T') = r$  (resp.  $\vec{\omega}_3(T') = r$ ). Sea  $\varphi : V(T') \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  una  $r$ -coloración propia óptima, entonces

$$\vec{\omega}(T) \leq r + 1 \quad (\text{resp. } \vec{\omega}_3(T) \leq r + 1).$$

Más aún, si para todo  $\vec{C}_3 = (v, u_1, u_2, v)$  y  $\vec{C}_4 = (v, w_1, w_2, w_3, v)$ , con  $u_i, w_j \in V(T')$ ,  $i \in I_2$  y  $j \in I_3$  se cumple que  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$  y  $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$  ó  $\varphi(w_2) = \varphi(w_3)$ , entonces

$$\vec{\omega}(T) = r + 1 \quad (\text{resp. } \vec{\omega}_3(T) = r + 1).$$

*Demostración.* Notemos que al vértice  $v$  se le puede asignar un color  $(r + 1)$  distinto a los existentes sin inducir  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados. De manera análoga se cumple para  $\vec{\omega}_3$  al restringirse a analizar sólo los  $\vec{C}_3$ . □

**Observación 1.5.** En general no necesariamente se sostiene la igualdad en la Proposición 1.7, por ejemplo para el torneo regular circulante de orden 5,  $R_5 = \vec{C}_5(I_2)$  que es único salvo isomorfismos, se probará más adelante que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_5(I_2)) = \vec{\omega}(\vec{C}_5(I_2)) = 2$ , pero para  $S = \{0, 1\}$ ,  $\vec{\omega}(T[S]) = \vec{\omega}(T[T \setminus S]) = 2$  se tiene que

$$\vec{\omega}(\vec{C}_5(I_2)) \leq \vec{\omega}(\vec{C}_3) + \vec{\omega}(\{0, 1\}) = 4,$$

que es una cota sobrada.

**Observación 1.6.** Dado un torneo  $T$ , para probar que  $\vec{\omega}(T) = r$  (resp.  $\vec{\omega}_3(T) = r$ ), es suficiente con probar que  $\vec{\omega}(T) \leq r$  (resp.  $\vec{\omega}_3(T) \leq r$ ) y exhibir una  $r$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados (resp. libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos), es decir óptima, de tal manera que se sobrentiende que  $\vec{\omega}(T)$  (resp.  $\vec{\omega}_3(T)$ ) se alcanza exactamente en  $r$ .

## Inconexión Acíclica en Torneos Regulares

La tensión en hipergráficas ha sido uno de los principales problemas que se han abordado en los últimos años, sobre todo la tensión relacionada a los torneos regulares. Varios artículos que han estudiado dicho tema, se han enfocado en probar que los torneos regulares que no son composiciones son tensos y se ha probado que algunas clases especiales de torneos lo son. Este problema es particularmente difícil de abordar debido a la gran cantidad de torneos regulares que existen sin un patrón común aparente. Se han obtenido resultados parciales sin que se hayan logrado obtener resultados generales.

### 2.1. Tensión en 3-gráficas

En lo sucesivo daremos por entendido que al tomar una  $r$ -coloración propia óptima, nos estaremos refiriendo a una  $r$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados que realiza la inconexión acíclica o una  $r$ -coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos que realiza la inconexión libre de  $\vec{C}_3$ , dependiendo del contexto en el que se encuentre. Como lo habíamos mencionado anteriormente, denotaremos por  $R_i^{(j)}$  al  $j$ -ésimo torneo regular de orden  $i$ .

**Definición 2.1.** Sea  $T$  un torneo, una 3-gráfica  $H_3(T) = (V(T), \tau_3(T))$  cuyo conjunto de aristas es definido por  $\tau_3(T) = \{S \subseteq V(T) : T[S] \cong \vec{C}_3\}$ . El número heterocromático  $hc(H)$  de una 3-gráfica  $H = (V, E)$  es el menor número de colores  $r$  de tal forma que cada coloración propia de  $V$  deja al menos una 3-arista heterocromática.  $T$  se dirá *tenso* si  $hc(H_3(T)) = 3$ , en correspondencia con la Definición 1.8.

**Observación 2.1.** Sea  $T$  un torneo y  $\vec{\omega}_3^+(T) = \vec{\omega}_3 + 1$  como en la Definición 1.7. Notemos que el número heterocromático de una 3-gráfica  $H_3(T) = (V(T), \tau_3(T))$  coincide con  $\vec{\omega}_3^+(T)$ , es decir  $hc(H_3(T)) = \vec{\omega}_3^+(T)$  (para los detalles sobre tensión de 3-gráficas véase [ABNL92]), así  $H_3(T)$  es tenso si y sólo si  $\vec{\omega}_3^+(T) = 3$  si y sólo si  $\vec{\omega}_3(T) = 2$ .

Por simplificación, si  $j \in I_n$ , definamos al conjunto  $I_{n,j} = (I_n \cup \{2n+1-j\}) \setminus \{j\}$ . Recordemos

que un torneo circulante  $\vec{C}_{2n+1}(J)$  es definido sobre los conjuntos

$$\begin{aligned} V(\vec{C}_{2n+1}(J)) &= \mathbb{Z}_{2n+1}, \\ A(\vec{C}_{2n+1}(J)) &= \{ij : i, j \in \mathbb{Z}_{2n+1}, j - i \in J\}. \end{aligned}$$

tal que  $J \subset \mathbb{Z}_{2n+1} \setminus \{0\}$  y  $|J \cap \{j, -j\}| = 1$ , para cada  $j \in \mathbb{Z}_{2n+1}$ . Un torneo circulante es regular y su grupo de automorfismos actúa transitivamente en el conjunto de vértices.

**Proposición 2.1** (Proposición 3.3 en [NL99]). La composición de digráficas (resp. torneos) circulantes es una digráfica (resp. un torneo) circulante.

*Demostración.* Sean  $\vec{C}_{2r+1}(K)$  y  $\vec{C}_{2s+1}(J)$  dos digráficas circulantes. Sea

$$H = \vec{C}_{(2r+1)(2s+1)}((2r+1)J \cup (K + (2r+1)I_{2s+1}))$$

y probemos que  $\vec{C}_{2r+1}(K)[\vec{C}_{2s+1}(J)] \cong H$ . Sea  $\pi : H \rightarrow \vec{C}_{2r+1}(K)$  el epimorfismo reflexivo definido al tomar a  $\pi(i)$  como el residuo de  $i$  módulo  $(2r+1)$ . Notemos que para cada  $j \in V(\vec{C}_{2r+1}(K))$ , se tiene que  $\pi^{-1}(j) = j + (2r+1)I_{2s+1}$  induce una copia isomorfa de  $\vec{C}_{2s+1}(J)$ . Si  $\pi^{-1}(j)\pi^{-1}(j')$  es un arco en  $H$ , entonces  $ii' \in A(H)$  para cada  $i \in \pi^{-1}(j)$  e  $i' \in \pi^{-1}(j')$ , lo que prueba que  $\pi$  es la proyección natural de  $H$  sobre  $\vec{C}_{2r+1}(K)$ .

Si  $\vec{C}_{2r+1}(K)$  y  $\vec{C}_{2s+1}(J)$  son dos torneos, es fácil ver que  $\vec{C}_{2r+1}(K)[\vec{C}_{2s+1}(J)]$  es también un torneo.  $\square$

**Teorema 2.1** ([NL99], Teorema 4.11). Sea  $n \geq 2$ , entonces

- i)  $\vec{\omega}(\vec{C}_{2n+1}(I_n)) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_{2n+1}(I_n)) = 2$ .
- ii)  $\vec{\omega}(\vec{C}_{2n+1}(I_{n,j})) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_{2n+1}(I_{n,j})) = 2$ , siempre que  $(n, j) \neq (4, 2)$ .
- iii)  $\vec{\omega}(\vec{C}_9(I_{4,2})) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_9(I_{4,2})) = 3$ .

**Observación 2.2.** El Teorema 2.1 nos dice que si al construir el torneo circulante, volteamos un arco entonces todo torneo de la forma  $\vec{C}_{2n+1}(I_{n,j})$  es tenso salvo el isomorfo a  $\vec{C}_3[\vec{C}_3]$ , ya que por la Proposición 1.4 se tiene que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_3[\vec{C}_3]) = 3$ . En [GSNL00] se demuestra que si se voltean dos arcos entonces todo torneo circulante es tenso, salvo los isomorfos a  $\vec{C}_3[\vec{C}_5]$ ,  $\vec{C}_5[\vec{C}_3]$  y por supuesto  $\vec{C}_3[\vec{C}_3]$ . En la Figura 2.1 se muestra una coloración propia óptima de  $\vec{C}_9(I_{4,2})$  y su isomorfismo como composición, en donde los arcos más gruesos significan, por ejemplo, que dados  $u \in \{0, 3, 6\}$  y  $v \in \{1, 4, 7\}$ , entonces  $uv \in A(\vec{C}_3[\vec{C}_3])$ .

Recordemos que un torneo  $T$  es simple si no es isomorfo a composición alguna. Notemos que por la Proposición 1.4, si  $T$  no es simple entonces  $T$  no es tenso. En base a esto y a la Proposición 2.1, Neumann-Lara formuló la siguiente Conjetura sin llegar a publicarla.

**Conjetura 2.1** (Neumann-Lara). Todo torneo regular es simple si y sólo si es tenso.

De esta Conjetura se sabe que la suficiencia es cierta, pero la necesidad no ha podido ser demostrada o refutada. Esta misma conjetura ha sido reforzada fuertemente con los resultados parciales obtenidos en [LIO07], [NLO], [GSNL00] y [LINL07] de clases especiales de torneos que son tensos.

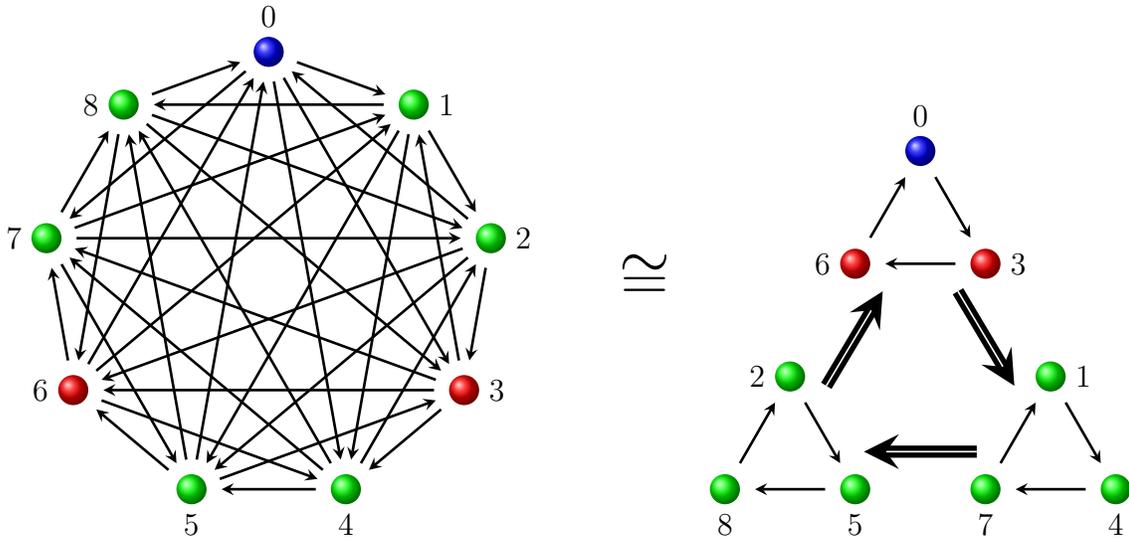


Figura 2.1: Torneo  $R_9^{(1)} = \vec{C}(I_{4,2}) \cong \vec{C}_3[\vec{C}_3]$ .

## 2.2. Tensión en torneos regulares

En lo sucesivo nos enfocaremos en probar que todos los torneos regulares simples de orden menor o igual a 9 son tensos. Notemos en el Cuadro 2.1 el crecimiento exponencial del número de torneos regulares no isomorfos en función de su orden<sup>1</sup>.

Orden del torneo	3	5	7	9	11	13
No. de torneos no isomorfos	1	1	3	15	1223	1495297

Cuadro 2.1: Número de torneos regulares no isomorfos de orden dado.

**Definición 2.2.** Sean  $T$  un torneo y  $\{u, v\} \in V(T)$ , decimos que  $\{u, v\}$  forman un *par dominante* si

$$N^+(u, T) \cup N^+(v, T) \cup \{u, v\} = V(T).$$

La *gráfica de dominación*  $dom(T)$  es la gráfica definida sobre los conjuntos

$$\begin{aligned} V(dom(T)) &= V(T), \\ A(dom(T)) &= \{uv : \{u, v\} \text{ forman un par dominante}\}. \end{aligned}$$

**Observación 2.3.** Equivalentemente, un par dominante  $\{u, v\}$  se puede definir como aquellos que cumplen que

$$N^+(u, T \setminus \{u, v\}) = N^-(v, T \setminus \{u, v\}).$$

**Definición 2.3** ([NLO]). Sean  $T$  un torneo y  $S \subset V(T)$ , decimos que  $u, v \in V(D)$  son *discordantes* módulo  $S$  y lo denotamos por  $u|v$  (mód  $S$ ), si

$$\begin{aligned} N^+(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^-(v, S \setminus \{u, v\}) \quad \text{y} \\ N^-(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^+(v, S \setminus \{u, v\}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En [CD] se puede encontrar una base de datos sobre torneos.

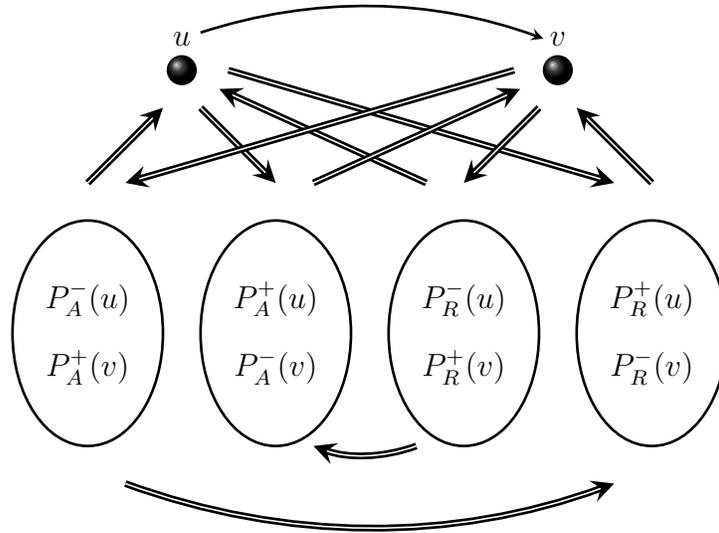


Figura 2.2: El torneo  $T$  y el par dominante  $\{u, v\}$ .

**Proposición 2.2** (Lema 6 en [NLO]). Si  $T$  es un  $(2n+1)$ -torneo regular y  $u, v \in V(T)$ , entonces el torneo residual  $T' = T[T \setminus \{u, v\}]$  es regular si y sólo si  $u|v$  (mód  $T$ ).

*Demostración.* Es claro que al borrar el conjunto  $\{u, v\}$  al torneo  $T$ , a cada  $w \in V(T) \setminus \{u, v\}$  se le ha quitado un ex-vecino y un in-vecino, es decir  $d^+(w, T') = d^-(w, T') = n - 1$ , esto si y sólo si  $N^+(u, T') = N^-(v, T')$  y  $N^-(u, T') = N^+(v, T')$  si y sólo si  $u|v$  (mód  $T$ ).  $\square$

**Teorema 2.2.** Sean  $T$  un torneo regular,  $\{u, v\}$  un par dominante y  $T' = T[T \setminus \{u, v\}]$ . Si  $T'$  es tenso, entonces  $T$  también es tenso.

*Demostración.* Sea  $T$  un  $(2n + 1)$ -torneo regular, entonces por la Proposición 2.2 se tiene que el torneo residual  $T' = T[T \setminus \{u, v\}]$  es un  $(2n - 1)$ -torneo regular. Supongamos que  $T'$  es tenso y sea  $\varphi : V(T') \rightarrow \{A, R\}$  una 2-coloración propia óptima. Definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} P_c^+(u) &= \{w \in V(T') : w \in N^+(u, T) \text{ y } \varphi(w) = c\}, \\ P_c^-(u) &= \{w \in V(T') : w \in N^-(u, T) \text{ y } \varphi(w) = c\}. \end{aligned}$$

Notemos que  $P_A^-(u) = P_A^+(v)$ ,  $P_A^+(u) = P_A^-(v)$ ,  $P_R^-(u) = P_R^+(v)$  y  $P_R^+(u) = P_R^-(v)$  y que son disjuntos dos a dos (véase la Figura 2.2). Supongamos por contradicción que  $T$  no es tenso, es decir  $\vec{\omega}_3(T) \geq 3$ , por lo que existe una 3-coloración propia óptima  $\psi : V(T) \rightarrow \{A, R, V\}$ . Por hipótesis se tiene que ningún vértice de  $T'$  es de color  $V$ , por lo que  $\psi(u) = V$  ó  $\psi(v) = V$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $uv \in A(T)$  y que  $\psi(u) = V$ .

Observemos lo siguiente:

- i) Para cada  $w_1 \in P_A^-(u)$  y  $w_2 \in P_R^+(u)$ , se tiene que  $w_1 w_2 \in V(T')$ , ya que en caso contrario  $\vec{C}_3 = (u, w_2, w_1, u)$  sería heterocromático. Se tiene un caso similar para cada  $w_1 \in P_R^-(u)$  y  $w_2 \in P_A^+(u)$ .

- ii) Por construcción  $P_A^-(u)$  y  $P_A^+(u)$  no pueden ser vacíos al mismo tiempo. Se tiene un caso similar para  $P_R^-(u)$  y  $P_R^+(u)$ .
- iii)  $P_A^-(u)$  y  $P_R^-(u)$  no pueden ser vacíos al mismo tiempo, pues sería una contradicción a la regularidad de  $T$ . De manera similar se cumple lo mismo para  $P_A^+(u)$  y  $P_R^+(u)$ .
- iv) Por los incisos ii) y iii) tenemos que
  - Si  $P_A^-(u) = \emptyset$  ó  $P_R^+(u) = \emptyset$ , entonces  $P_A^+(u) \neq \emptyset$  y  $P_R^-(u) \neq \emptyset$ .
  - Si  $P_A^+(u) = \emptyset$  ó  $P_R^-(u) = \emptyset$ , entonces  $P_A^-(u) \neq \emptyset$  y  $P_R^+(u) \neq \emptyset$ .

Por el inciso iii) tenemos que  $\psi(v) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (u, v, w, u)$  sería heterocromático para  $w \in P_A^-(u)$  ó  $w \in P_R^-(u)$ . Por lo tanto  $\psi(v) = V$ , que es una contradicción a iv), dado que para  $w_1 \in P_A^-(u)$ ,  $w_2 \in P_A^+(u)$ ,  $w_3 \in P_R^-(u)$  y  $w_4 \in P_R^+(u)$  se tendría que de  $\vec{C}_3 = (v, w_1, w_4, v)$  ó  $\vec{C}_3 = (v, w_3, w_2, v)$  al menos uno sería heterocromático. Por lo tanto tal coloración no existe y se prueba que  $T$  también es tenso.  $\square$

**Observación 2.4.** El Teorema anterior es un caso particular del expuesto en [LIO07] donde se demuestra la tensión en tipos especiales de torneos regulares y se exponen conceptos como *moldes mansos* (véase [NLO]) y *torneos amplios*.

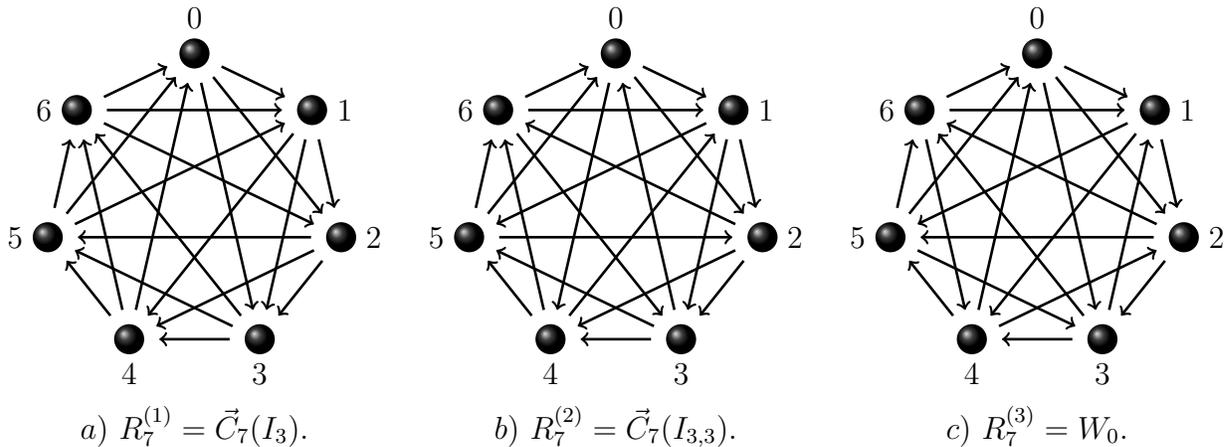


Figura 2.3: Torneos regulares de orden 7.

**Teorema 2.3.** Para cada  $n \leq 9$ , el torneo regular simple  $R_n$  es tenso.

*Demostración.* Dividamos la demostración de acuerdo al número de vértices.

**Caso n=3.** Es claro que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_3) = 2$ , por lo que es tenso.

**Caso n=5.** El torneo regular  $R_5 \cong \vec{C}_5(I_2)$  es único salvo isomorfismos y es un torneo circulante. Por el Teorema 2.1 tenemos que es tenso.

**Caso n=7.** Existen 3 torneos regulares no isomorfos de orden 7 a los cuales nos referiremos como  $R_7^{(1)}$ ,  $R_7^{(2)}$  y  $R_7^{(3)}$  (véase la Figura 2.3). Notemos que los dos primeros son los circulares  $\vec{C}_7(I_3)$  y  $\vec{C}_7(I_{3,3})$ , este último también llamado de *Paley* o de *residuos cuadráticos* (véase [R04]) y por el Teorema 2.1 se tiene que son tenso. El tercero es también llamado  $W_0$  y notemos que  $R_5 \cong R_7^{(3)}[R_7^{(3)} \setminus \{4, 3\}]$ . Por el Teorema 2.2 tenemos que es tenso.

**Caso n=9.** Existen 15 torneos regulares de orden 9, de los cuales 3 son circulares (Figuras 2.1 y 2.4). Para  $R_9^{(1)}$  se tiene por el Teorema 2.1 inciso **iii**) que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_9(I_{4,2})) = \vec{\omega}_3(\vec{C}_3[\vec{C}_3]) = 3$ , que no es tenso por ser composición. Para los dos restantes se tiene que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_9(I_4)) = 2$  y  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_9(I_{4,4})) = 2$  que son consecuencia del mismo Teorema en los incisos **i**) y **ii**) respectivamente.

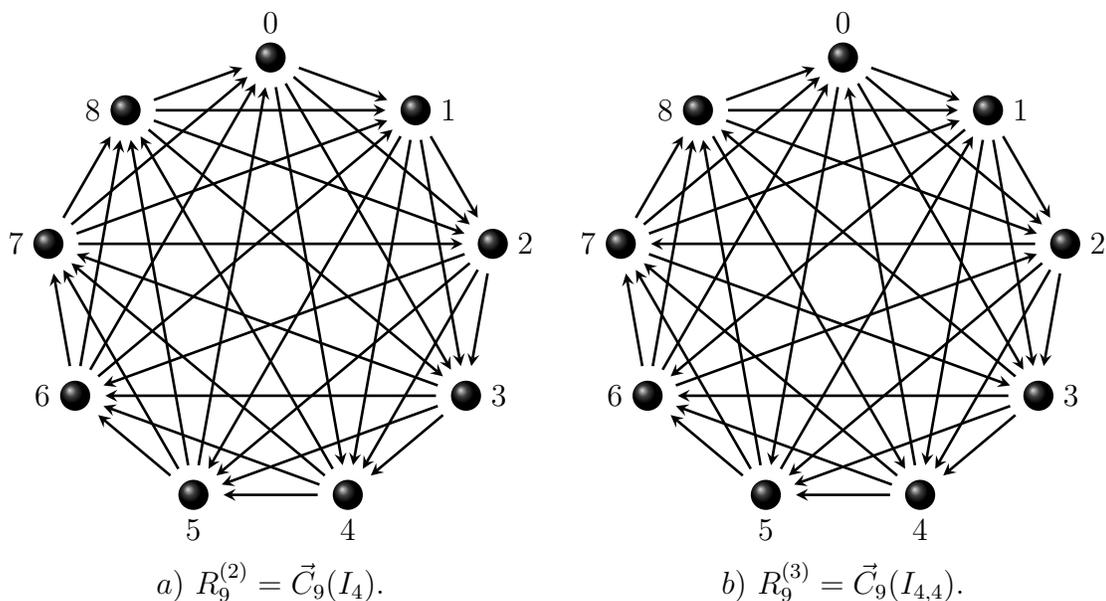


Figura 2.4: Torneos circulares tenso de orden 9.

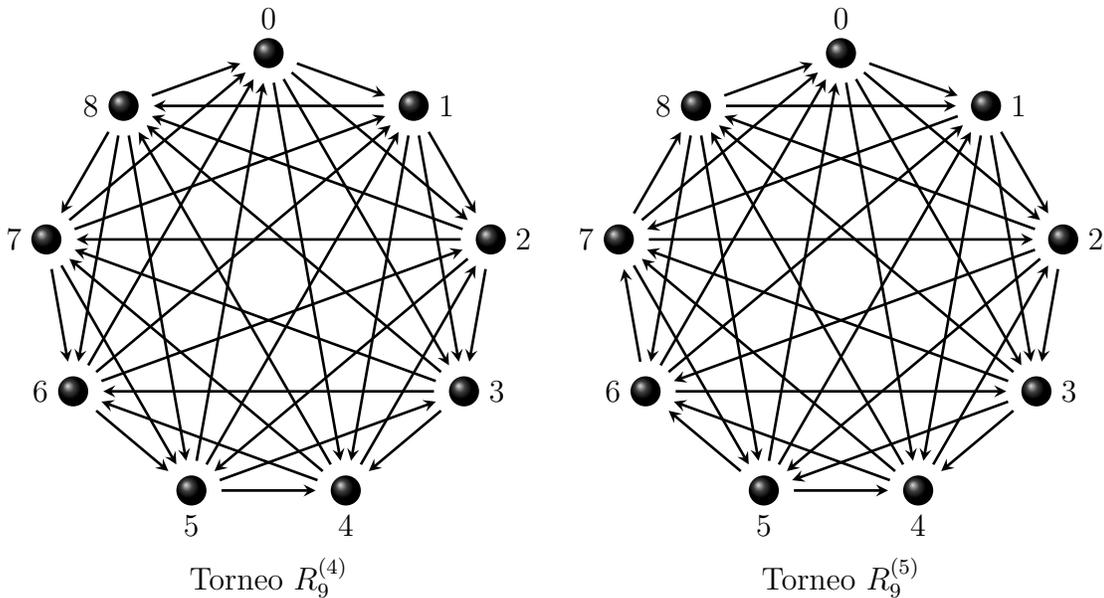
Notemos que para cada torneo  $R_9^{(i)}$  con  $4 \leq i \leq 12$  (véase las Figuras en las páginas siguientes), es posible encontrar un par dominante en  $V(R_9^{(i)})$  y el torneo residual resultante es isomorfo a algún torneo de orden 7, los cuales son todos tenso. Luego por el Teorema 2.2 resultan ser tenso. En la Tabla 2.2 se muestran los pares dominantes que se pueden traducir como aristas de  $dom(R_9^{(i)})$  y el 7-torneo regular residual.

Sólo falta analizar aquellos torneos que no son circulares y que tampoco es aplicable el Teorema 2.2.

Para el torneo  $R_9^{(13)}$ , supongamos por contradicción que no es tenso, por lo que existe una 3-coloración propia óptima  $\psi : V(R_9^{(13)}) \rightarrow \{A, R, V\}$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\psi(0) = A$ , entonces  $\psi(4) = A$  ó  $\psi(4) = R$ .

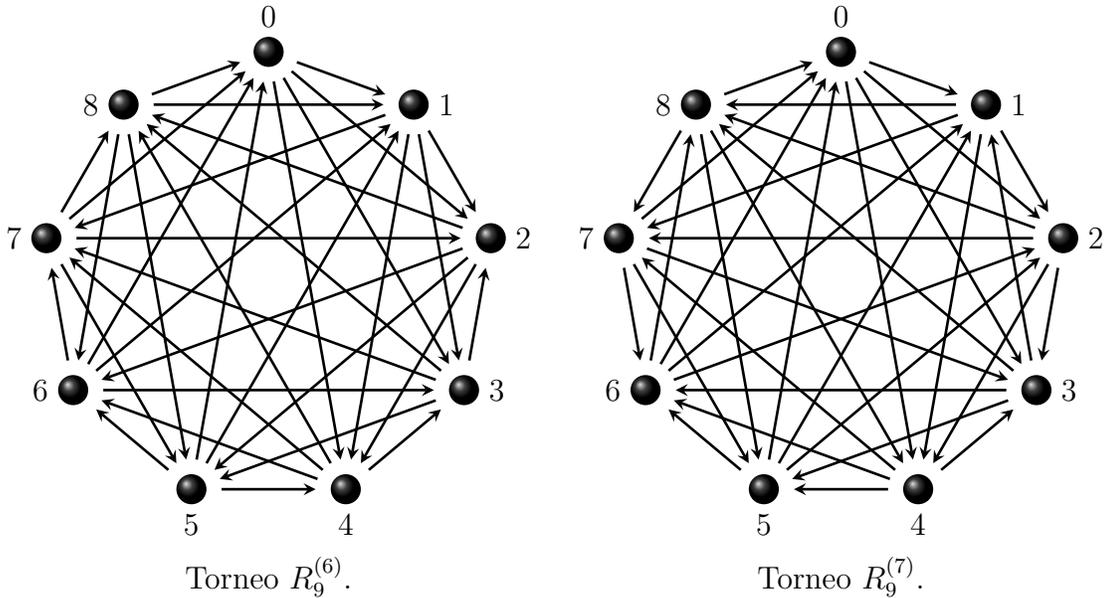
Torneo	Pares dominantes	Torneo residual
$R_9^{(4)}$	$\{0, 8\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$	$W_0, W_0, W_0, \vec{C}_7(I_3), \vec{C}_7(I_3)$
$R_9^{(5)}$	$\{1, 8\}$	$\vec{C}_7(I_{3,3})$
$R_9^{(6)}$	$\{1, 8\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$	$W_0, \vec{C}_7(I_3), W_0$
$R_9^{(7)}$	$\{1, 7\}, \{2, 5\}, \{4, 6\}$	$W_0, W_0, W_0$
$R_9^{(8)}$	$\{2, 7\}, \{4, 5\}$	$W_0, W_0$
$R_9^{(9)}$	$\{0, 4\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$	$W_0, \vec{C}_7(I_3), \vec{C}_7(I_3), \vec{C}_7(I_3), W_0$
$R_9^{(10)}$	$\{0, 4\}, \{4, 5\}$	$\vec{C}_7(I_{3,3}), \vec{C}_7(I_{3,3})$
$R_9^{(11)}$	$\{1, 7\}, \{4, 5\}$	$W_0, W_0$
$R_9^{(12)}$	$\{2, 5\}$	$W_0$

Cuadro 2.2: Los 9-torneos y su 7-torneo residual.



Caso  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = A$ . Tenemos los siguientes subcasos.

- Si  $\psi(2) = R$ , dado  $u \in \{3, 6, 8\}$  ó  $u \in \{5, 7\}$  tenemos que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 2, u, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 4, u, 2)$  sería heterocromático respectivamente. Por lo tanto  $V \notin \{\psi(3), \psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$  y así  $V = \emptyset$ , que es imposible. Por lo que concluimos que  $\psi(2) \neq R$ .
- Si  $\psi(3) = R$ , dado  $u \in \{2, 5\}$  ó  $u \in \{6, 7, 8\}$  tenemos que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, u, 3, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 3, u, 0)$  sería heterocromático respectivamente. Por lo tanto  $V \notin \{\psi(2), \psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$  y así  $V = \emptyset$  que es imposible. Por lo que concluimos que  $\psi(3) \neq R$ .
- Si  $\psi(5) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(6)\}$  y por los incisos anteriores llegamos a que  $\psi(\{2, 3\}) = A$ , lo cual nos lleva a que  $V \notin \{\psi(7), \psi(8)\}$ , de lo contrario dado  $u \in \{7, 8\}$ ,  $\vec{C}_3 = (3, u, 5, 3)$  sería heterocromático, que es una contradicción. Así  $\psi(5) \neq R$ .

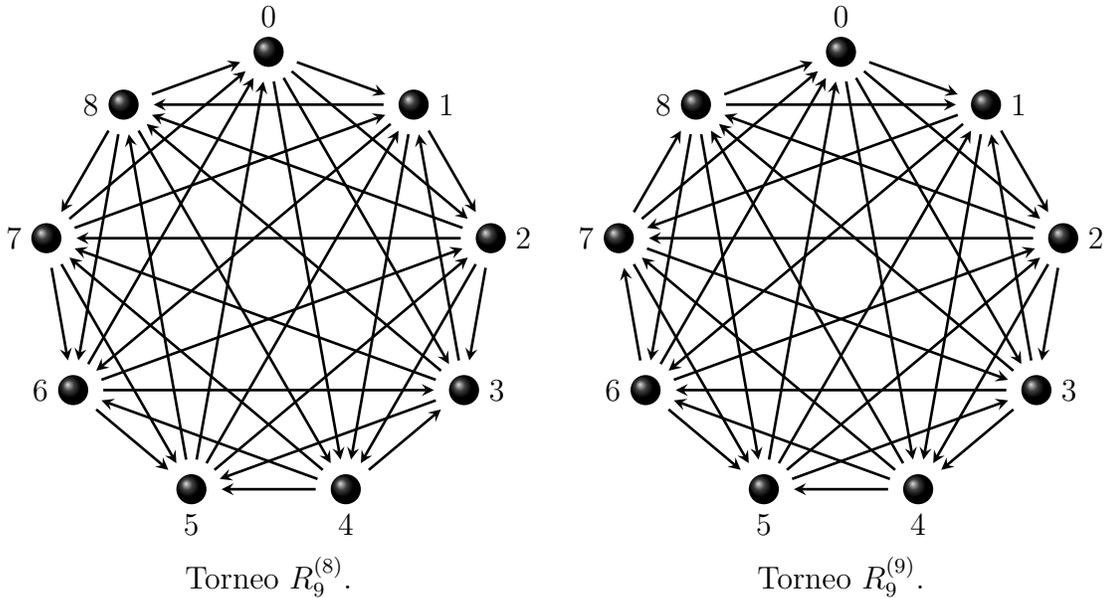


- Si  $\psi(6) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(5), \psi(8)\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 5, 6, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (4, 8, 6, 4)$  sería heterocromático,  $V \notin \{\psi(2), \psi(3)\}$ , de lo contrario dado  $u \in \{2, 3\}$  se tendría que  $\vec{C}_3 = (0, u, 6, 0)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(2) = A$  y así  $\psi(7) \neq V$ , por lo que  $V = \emptyset$ , que es imposible. Así  $\psi(6) \neq R$ .
- Si  $\psi(7) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(5)\}$ , de lo contrario para  $u \in \{2, 5\}$  se tendría que  $\vec{C}_3 = (4, 7, u, 4)$  sería heterocromático. Dado  $u \in \{6, 8\}$  se tiene que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 7, u, 1)$  sería heterocromático y finalmente  $\psi(3) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (0, 3, 7, 0)$  sería heterocromático. Por lo que  $V = \emptyset$  que es imposible. Así  $\psi(7) \neq R$ .
- Si  $\psi(8) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(6), \psi(7)\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (4, 8, 6, 4)$  ó  $\vec{C}_3 = (1, 7, 6, 1)$  sería heterocromático respectivamente. Dado  $u \in \{2, 3\}$ , se tiene que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (0, u, 8, 0)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(3) = A$  y así  $\psi(5) \neq V$ , ya que en otro caso  $\vec{C}_3 = (3, 8, 5, 3)$  sería heterocromático, por lo que  $V = \emptyset$  que es imposible. Así  $\psi(8) \neq R$ .

De los puntos anteriores se concluye que  $R = \emptyset$ , que es una contradicción al hecho de ser una coloración propia. Finalmente tenemos que  $\psi(1) \neq A$ .

**Caso**  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = R$ . Dado  $u \in \{3, 8\}$  ó  $u \in \{5, 7\}$  se tiene que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 4, u, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 1, u, 0)$  sería heterocromático respectivamente. Luego  $V \in \{\psi(2), \psi(6)\}$ .

- Si  $\psi(2) = V$ , entonces  $\psi(8) \notin \{A, R\}$ , en otro caso dado  $u \in \{0, 1\}$ ,  $\vec{C}_3 = (8, u, 2, 8)$  sería heterocromático. Por lo que  $\psi(8)$  no pertenecería a clase cromática alguna, que es imposible. Así  $\psi(2) \neq V$ .
- Si  $\psi(6) = V$ , entonces  $\psi(5) \notin \{A, R\}$ , en otro caso dado  $u \in \{1, 4\}$ ,  $\vec{C}_3 = (6, u, 5, 6)$  sería heterocromático. Por lo que  $\psi(5)$  no pertenecería a clase cromática alguna, que



es imposible. Así  $\psi(6) \neq V$ .

Por lo tanto  $V = \emptyset$ , que es imposible y así  $\psi(1) \neq R$ . Con el caso anterior tenemos finalmente que  $\psi(4) \neq A$ .

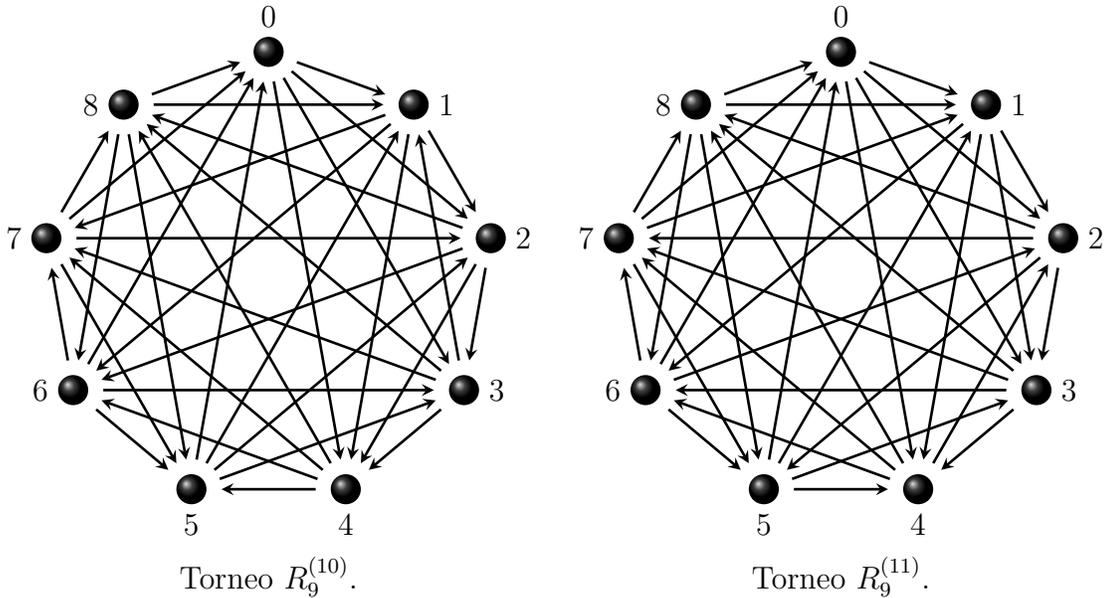
**Caso**  $\psi(4) = R$ . Notemos que para  $u \in \{5, 7, 8\}$ ,  $\psi(u) \neq V$  de lo contrario  $\vec{C}_3 = (0, 4, u, 0)$  sería heterocromático. Luego  $\psi(8) \in \{A, R\}$ .

- Si  $\psi(8) = A$ , dado  $u \in \{1, 6\}$  se tiene que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (4, 8, u, 4)$  sería heterocromático. Así  $V \in \{\psi(2), \psi(3)\}$ .
  - El caso  $\psi(2) = V$  es imposible, ya que al suponer lo contrario tendríamos que  $\psi(5) \notin \{A, R\}$ , pues  $\vec{C}_3 = (2, 4, 5, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (3, 8, 5, 3)$  sería heterocromático. Luego  $\psi(5)$  no pertenece a ninguna clase cromática.
  - El caso  $\psi(3) = V$  es también imposible, en otro caso  $\psi(6) \notin \{A, R\}$  pues  $\vec{C}_3 = (3, 6, 4, 3)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 3, 6, 0)$  sería heterocromático, contradicción similar al punto anterior.

Por lo tanto llegamos a que  $\psi(8) \neq A$ .

- Si  $\psi(8) = R$ , entonces dado  $u \in \{\psi(2), \psi(3)\}$ , se tiene que  $\psi(u) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (0, u, 8, 0)$  sería heterocromático. Así  $V \in \{\psi(1), \psi(6)\}$ .
  - Si  $\psi(1) = V$ , entonces  $\psi(5) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 7, 8, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 1, 7, 0)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(5)$  no pertenece a ninguna clase cromática que es una contradicción.
  - Si  $\psi(6) = V$ , entonces  $\psi(3) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (3, 6, 4, 3)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 3, 6, 0)$  sería heterocromático, que es una contradicción similar al inciso anterior.

Por lo tanto llegamos a que  $\psi(8) \neq A$  y que  $\psi(4) \neq R$ .



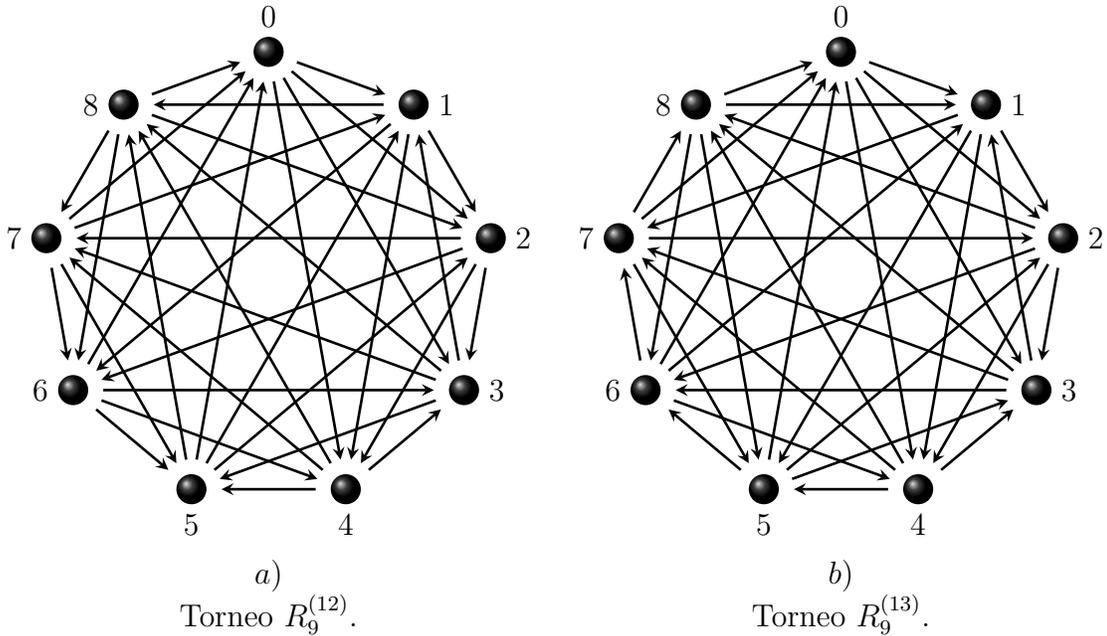
De los puntos anteriores se concluye que dicha 3-coloración  $\psi$  no existe y por lo tanto  $R_9^{(13)}$  es tenso.

En la demostración anterior se expone a detalle las contradicciones a las que se llegan y sus consecuencias, pero en las siguientes demostraciones se omitirán algunos comentarios sobre dichas contradicciones, pero se sobrentenderá que al llegar a alguna contradicción, el caso en cuestión se sabrá falso.

Al igual que la demostración anterior, supongamos que  $R_9^{(14)}$  no es tenso y que existe una 3-coloración  $\psi : V(R_9^{(14)}) \rightarrow \{A, R, V\}$  propia óptima. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\psi(0) = A$ . Entonces  $\psi(4) = A$  ó  $\psi(4) = R$ .

**Caso  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = A$ .** Tenemos los siguientes casos:

- Si  $\psi(2) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(3), \psi(5), \psi(7), \psi(8)\}$ , por lo que  $\psi(6) = V$ . Notemos que  $\psi(3) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (2, 3, 6, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 3, 6, 0)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(2) \neq R$ .
- Si  $\psi(3) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ , por lo que  $\psi(5) = V$ . Notemos que  $\psi(8) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (4, 8, 5, 4)$  ó  $\vec{C}_3 = (3, 8, 5, 3)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(3) \neq R$ .
- Si  $\psi(5) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ , por lo que  $\psi(3) = V$ . Notemos que  $\psi(8) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (0, 3, 8, 0)$  ó  $\vec{C}_3 = (3, 8, 5)$  sería heterocromático. Por lo tanto  $\psi(5) \neq R$ .
- Si  $\psi(6) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(5)\}$  y con los puntos anteriores tenemos que  $\psi(2) = A$ . Así  $V \notin \{\psi(7), \psi(8)\}$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .
- Si  $\psi(7) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(5)\}$  y con los puntos anteriores tenemos que  $\psi(5) = A$ . Así  $V \notin \{\psi(6), \psi(8)\}$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .



- Si  $\psi(8) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(5)\}$  y con los puntos anteriores tenemos que  $\psi(2) = A$ . Así  $\psi(6) \neq V$  y  $\psi(7) \neq V$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .

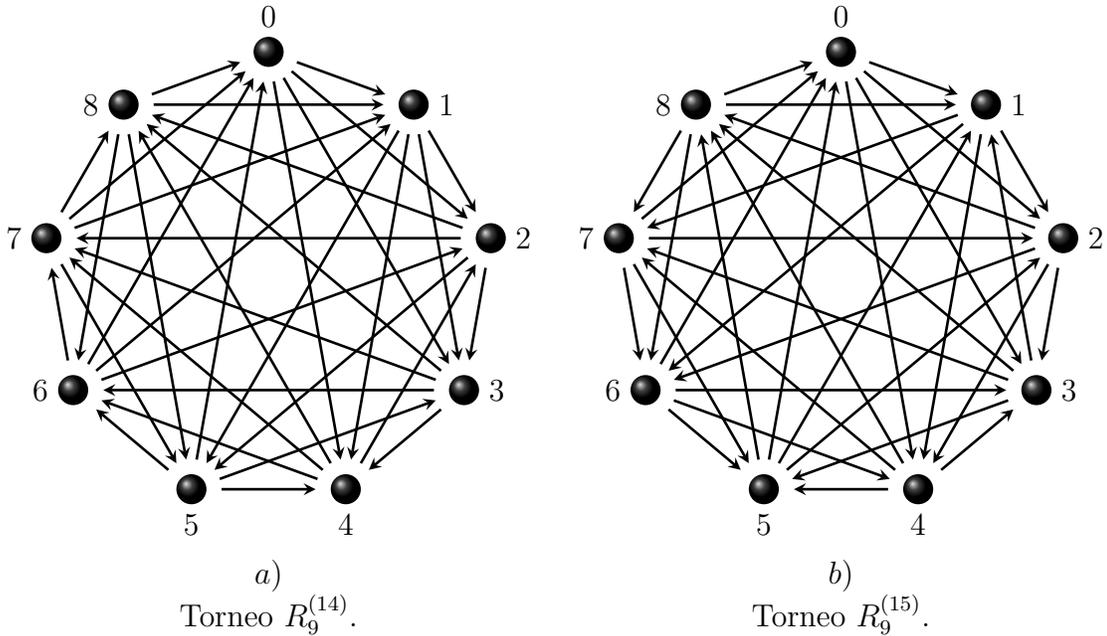
**Caso  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = R$ .** Notemos que  $V \notin \{\psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ , lo cual implica que  $V \in \{\psi(2), \psi(3)\}$ , que es imposible, de lo contrario  $\psi(8) \notin \{A, R\}$  ya que dado  $u \in \{2, 3\}$ , tendríamos que  $\vec{C}_3 = (1, u, 8, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (u, 4, 8, u)$  sería heterocromático respectivamente.

**Caso  $\psi(4) = R$ .** Notemos que  $V \notin \{\psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ .

- Supongamos que  $\psi(8) = A$ , por lo que  $V \notin \{\psi(1), \psi(5)\}$ .
  - Si  $\psi(2) = V$ , entonces  $\psi(5) \notin \{A, R\}$ , en caso contrario  $\vec{C}_3 = (0, 2, 5, 0)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 5, 4, 2)$  sería heterocromático respectivamente.
  - Si  $\psi(3) = V$ , entonces  $\psi(2) \neq A$ . Por lo que  $\psi(6) = A$ , lo cual nos lleva a que  $\psi(2) \notin \{R, V\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (2, 3, 6, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 3, 4, 2)$  sería heterocromático respectivamente.
- Supongamos que  $\psi(8) = R$ , por lo que  $V \notin \{\psi(2), \psi(3)\}$ .
  - Si  $\psi(1) = V$ , entonces  $R \notin \{\psi(5), \psi(6)\}$ , por lo que  $\psi(6) = R$  y  $\psi(5) = V$ . Entonces tenemos que  $\psi(2) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (2, 5, 6, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 2, 5, 0)$  sería heterocromático respectivamente.
  - Si  $\psi(5) = V$ , entonces  $\psi(2) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (2, 4, 5, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 2, 5, 0)$  sería heterocromático respectivamente.

Supongamos que  $R_9^{(15)}$  no es tenso y que existe una 3-coloración  $\psi : V(R_9^{(15)}) \rightarrow \{A, R, V\}$  propia óptima. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\psi(0) = A$ , entonces  $\psi(4) = A$  ó  $\psi(4) = R$ .

**Caso  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = A$ .** Tenemos los siguientes subcasos:



- Si  $\psi(2) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(3), \psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ , por lo que  $V = \emptyset$ .
- Si  $\psi(3) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$ , por lo que  $V = \emptyset$ .
- Si  $\psi(5) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(6), \psi(7)\}$ , por lo que  $\psi(8) = V$ . Por otra parte  $\psi(7) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (5, 8, 7, 5)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 8, 7, 2)$  sería heterocromático.
- Si  $\psi(6) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(5)\}$ , por lo que  $\psi(3) = A$ . Por otra parte  $V \notin \{\psi(7), \psi(8)\}$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .
- Si  $\psi(7) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(5), \psi(5), \psi(6)\}$ , por lo que  $\psi(2) = A$ . Por otra parte  $\psi(8) \neq V$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .
- Si  $\psi(8) = R$ , entonces  $V \notin \{\psi(2), \psi(3), \psi(5), \psi(6)\}$ , por lo que  $\psi(2) = A$ . Por otra parte  $\psi(7) \neq V$  y por lo tanto  $V = \emptyset$ .

**Caso  $\psi(4) = A$  y  $\psi(1) = R$ .** Notemos que  $V \notin \{\psi(3), \psi(5), \psi(6), \psi(7), \psi(8)\}$  y por lo tanto  $\psi(2) = V$ . Pero  $\psi(8) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 2, 8, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 2, 8, 0)$  sería heterocromático respectivamente.

**Caso  $\psi(4) = R$ .** Notemos que  $V \notin \{\psi(5), \psi(7), \psi(8)\}$ .

- Supongamos que  $\psi(8) = A$ , por lo que  $V \notin \{\psi(1), \psi(6)\}$ .
  - Si  $\psi(2) = V$ , entonces  $\psi(7) \notin \{A, R\}$ , en caso contrario  $\vec{C}_3 = (2, 4, 7, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 8, 7, 2)$  sería heterocromático respectivamente.
  - Si  $\psi(3) = V$ , entonces  $\psi(1) = R$ , por lo que  $\psi(6) \notin \{A, R\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 6, 3, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (3, 8, 6, 3)$  sería heterocromático respectivamente.
- Supongamos que  $\psi(8) = R$ , por lo que  $V \notin \{\psi(2), \psi(3)\}$ .

- Si  $\psi(1) = V$ , entonces  $\psi(5) = R$ , por lo que  $\psi(6) \notin \{A, R\}$  de lo contrario  $\vec{C}_3 = (1, 6, 5, 1)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 1, 6, 0)$  sería heterocromático respectivamente. Por lo tanto  $\psi(6) = V$ , pero  $\psi(2) \notin \{A, R\}$  de lo contrario  $\vec{C}_3 = (2, 6, 5, 2)$  ó  $\vec{C}_3 = (0, 2, 6, 0)$  sería heterocromático respectivamente.
- Si  $\psi(6) = V$ , entonces  $\psi(2) = A$ , pero  $\psi(5) \notin \{A, R\}$  de lo contrario  $\vec{C}_3 = (5, 8, 6, 5)$  ó  $\vec{C}_3 = (2, 6, 5, 2)$  sería heterocromático respectivamente.

□

Con este Teorema damos evidencia que la Conjetura 2.1 es cierta para estos casos especiales, pero se ignora la respuesta para torneos regulares de mayor orden, es decir, si existen torneos regulares simples que no sean tensos. Hasta el momento la evidencia apunta a la veracidad de la Conjetura, pero sigue siendo un problema abierto de gran interés y dificultad enorme, que se ha contestado parcialmente. Quien está interesado en consultar los orígenes y la definición general de la tensión en  $k$ -gráficas, puede consultar [ABNL92] y [ABNL95].

## Solución a un Problema Sobre Inconexión Acíclica

Anteriormente se ha mencionado que dado un torneo  $T$ , se cumple que  $\vec{\omega}(T) \leq \vec{\omega}_3(T)$ . El principal objetivo del presente capítulo es el de responder a la pregunta:

¿Qué tan grande puede ser  $|\vec{\omega}(T) - \vec{\omega}_3(T)|$ ?

En lo siguiente propondremos algunos ejemplos de familias infinitas, que son generalizaciones del ejemplo propuesto por Neumann-Lara en [NL99], para los cuales  $\vec{\omega}(T) < \vec{\omega}_3(T)$  se cumple. Más aún, respondemos afirmativamente al siguiente problema:

**Problema 3.1** (Problema 6.6 en [NL99]). ¿Existen torneos  $T$  para los cuales  $\vec{\omega}(T) = 2$  e  $\vec{\omega}_3(T)$  es arbitrariamente grande?

### 3.1. Cuatro familias infinitas especiales

En este capítulo exhibimos algunos resultados acerca de la inconexión acíclica, propondremos, describiremos y demostraremos algunas propiedades sobre las familias  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{L}$  y  $\mathfrak{J}$ , para ello haremos uso de los siguientes resultados.

En lo sucesivo denotaremos simplemente por  $\mathbf{i}$  al conjunto  $\{(i, 1), (i, 2)\}$  con  $i \in \mathbb{N}$ . Sean  $T_{2n} = (I_n \times I_2, A(T_{2n}))$  y  $D_n = (I_n, A(D_n))$  un torneo de orden  $2n$  y una digráfica de orden  $n$  respectivamente, asociados de la siguiente forma: Sea  $\pi : V(T_{2n}) \rightarrow V(D_n)$  un epimorfismo reflexivo, definido por

$$\pi(\mathbf{i}) = i, \quad (3.1)$$

con las siguientes propiedades

$$(i, 1)(i, 2) \in A(T_{2n}), \quad (3.2a)$$

$$\text{Si } ij, ji \in A(D_n), \text{ entonces } A(\vec{C}_4 = ((i, 1), (j, 1), (i, 2), (j, 2), (i, 1))) \subset A(T_{2n}), \quad (3.2b)$$

$$\text{Si } ij \in A(D_n) \text{ y } ji \notin A(D_n), \text{ entonces } uv \in A(T_{2n}), \text{ donde } u \in \mathbf{i} \text{ y } v \in \mathbf{j}. \quad (3.2c)$$

Si se cumplen (3.2a) y (3.2b), entonces  $T[\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}] \cong SR_4$  y de manera similar, si se cumplen (3.2a) y (3.2c) entonces  $T[\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}] \cong TT_4$ . En otras palabras, si tenemos un arco doble en  $D_n$ ,

entonces es la imagen de un 4-torneo semiregular y si es un arco simple, entonces es imagen de un 4-torneo transitivo (que son únicos salvo isomorfismos, véase la Figura 3.1).

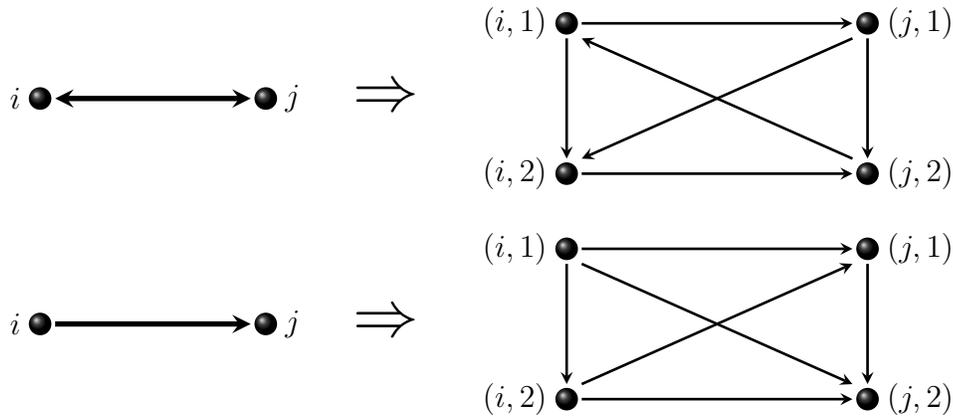


Figura 3.1: El epimorfismo  $\pi(\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}) = \{i, j\}$ ,  $T[\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}] \cong SR_4$  y  $T[\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}] \cong TT_4$ .

Daremos por entendido que si estamos hablando de  $i$  en el contexto de alguna digráfica  $D_m$ , entonces es el vértice resultante de haber aplicado el epimorfismo reflexivo descrito en (3.1) al conjunto  $\mathbf{i} = \{(i, 1), (i, 2)\}$ , y si hablamos de  $\mathbf{i}$  en el contexto de algún torneo  $T_n$ , será el conjunto antes dicho. Similarmente se define el conjunto  $\mathbf{i} + \mathbf{j} = \{(i + j, 1), (i + j, 2)\}$ .

**Proposición 3.1.**  $\vec{\omega}(SR_4) = \vec{\omega}_3(SR_4) = 3$ .

*Demostración.* Sea  $SR_4$  como en la Figura 3.1. Es claro que la única coloración propia óptima  $\varphi : V(SR_4) \rightarrow \{A, R, V\}$  es la siguiente:

$$\varphi(u) = \begin{cases} A & \text{si } u \in \{(i, 1), (j, 2)\}, \\ R & \text{si } u = (i, 2), \\ V & \text{si } u = (j, 1), \end{cases}$$

y es imposible agregar un cuarto color. □

### 3.1.1. La familia $\mathfrak{B}$

Definamos la familia de torneos  $\mathfrak{B} = \{T_n : n \geq 8\}$  como sigue. Sea

$$n = \begin{cases} 2m & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2m + 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Construyamos la digráfica asociada  $D_m = (V(D_m), A(D_m))$ , definida sobre los conjuntos

$$V(D_m) = I_m \cup \delta(*),$$

donde

$$\delta(*) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{*\} & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

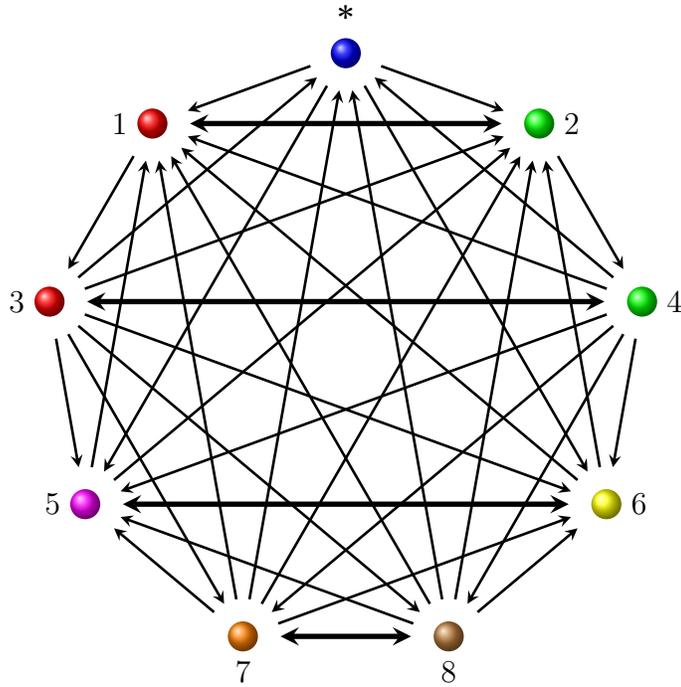


Figura 3.2: Digráfica  $D_8$  asociada al torneo  $T_{17} \in \mathfrak{B}$ .

y

$$A(D_m) = \{ij : i \equiv 0, 3 \pmod{4}, 3 \leq i < j \leq m\} \cup \{13, 24\} \cup \{i(i-1) : i \equiv 0 \pmod{2}\} \\ \cup \{ji : i \equiv 1, 2 \pmod{4}, 1 \leq i < j \leq m, (i, j) \notin \{(1, 3), (2, 4)\}\} \cup \alpha(*),$$

donde

$$\alpha(*) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{*i, j* : i \equiv 1, 2 \pmod{4}, j \equiv 0, 3 \pmod{4}\} & \text{si es } n \text{ impar.} \end{cases}$$

El torneo  $T_n = (V(T_n), A(T_n))$  es construido sobre los conjuntos

$$V(T_n) = (I_m \times I_2) \cup \delta(*), \\ A(T_n) = \{\pi^{-1}(ij) : i, j \in V(D_m)\},$$

donde la función  $\pi : V(T_n) \rightarrow V(D_m)$  es un epimorfismo reflexivo de  $T_n$  en  $D_m$ , definido de la siguiente forma

$$\pi(v) = \begin{cases} i & \text{si } v \in \mathbf{i}, \\ \delta(*) & \text{si } v = \delta(*), \end{cases}$$

que cumple sobre  $A(T_n)$  las propiedades descritas en (3.2). La Figura 3.2 muestra la digráfica  $D_8$  asociada al torneo  $T_{17}$ .

**Observación 3.1.** Notemos la simetría en  $D_m$  entre  $i-1$  e  $i$  para cada  $i$  par, esto es debido a que el grupo de automorfismos actúa simétricamente, es decir, si  $\phi : V(D_m) \rightarrow V(D_m)$  es un automorfismo tal que  $\phi(i-1) = i$ , entonces toda coloración se comporta de la misma manera en los vértices pares e impares (salvo el color que se les haya asignado).

**Proposición 3.2.** Sea  $T_8 \in \mathfrak{B}$ , entonces  $\vec{\omega}_3(T_8) = 2$ .

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}_3(T_8) \geq 3$ , por lo que existe una 3-coloración  $\psi : V(T_8) \rightarrow \{A, R, V\}$  propia óptima, es decir libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos.

Notemos que  $T_8[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}] \cong SR_4$  y  $T_8[\{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}] \cong SR_4$ , entonces por las Proposiciones 1.7 y 3.1, se tiene que  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| \leq 3$ . Consideremos los siguientes 3 casos:

**Caso i)**  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| = 3$ . Por la Proposición 3.1, la única 3-coloración para  $T_8[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}]$  libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos es

$$\psi(v) = \begin{cases} A & \text{si } v \in \{(1, 1), (2, 2)\}, \\ R & \text{si } v = (1, 2), \\ V & \text{si } v = (2, 1). \end{cases}$$

Dado  $v \in \mathbf{4}$ , se tiene que  $\psi(v) \notin \{R, V\}$ , en caso contrario  $\vec{C}_3 = ((1, 2), (2, 2), v, (1, 2))$  ó  $\vec{C}_3 = ((1, 1), (2, 1), v, (1, 1))$  sería heterocromático respectivamente y por lo tanto  $\psi(\mathbf{4}) = A$ . Por otra parte, dado  $v \in \mathbf{3}$  y  $u \in \mathbf{4}$ , entonces  $\psi(v) \notin \{A, R, V\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = ((1, 2), v, (2, 1), (1, 2))$ ,  $\vec{C}_3 = ((1, 2), v, u, (1, 2))$  ó  $\vec{C}_3 = ((2, 2), u, v, (2, 2))$  serían heterocromáticos respectivamente, por lo que  $\psi(\mathbf{4})$  no pertenecerían a clase cromática alguna, que es imposible.

**Caso ii)**  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| = 2$ . Existen 4 subcasos a considerar

- Si  $\psi(\mathbf{1}) = A$  y  $\psi(\mathbf{2}) = R$ , dado  $v \in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ,  $\psi(v) \neq V$  de lo contrario para  $w \in \mathbf{1}$  y  $u \in \mathbf{2}$ ,  $\vec{C}_3 = (w, u, v, w)$  sería heterocromático.
- Si  $\psi(\{(1, 1), (2, 1)\}) = A$  y  $\psi(\{(1, 2), (2, 2)\}) = R$ , dado  $v \in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ , se tiene que  $\psi(v) \neq V$ , en otro caso  $\vec{C}_3 = ((1, 1), v, (2, 2), (1, 1))$  ó  $\vec{C}_3 = ((1, 2), v, (2, 1), (1, 2))$  sería heterocromático respectivamente.
- Si  $\psi(\{\mathbf{1}, (2, 1)\}) = A$  y  $\psi((2, 2)) = R$ , dado  $v \in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ,  $\psi(v) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = ((1, 1), v, (2, 2), (1, 1))$  ó  $\vec{C}_3 = ((1, 2), (2, 2), v, (1, 2))$  sería heterocromático respectivamente.
- Si  $\psi(\{\mathbf{1}, (2, 2)\}) = A$  y  $\psi((2, 1)) = R$ , dado  $v \in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ,  $\psi(v) \neq V$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = ((1, 2), v, (2, 1), (1, 2))$  ó  $\vec{C}_3 = ((1, 1), (2, 1), v, (1, 1))$  sería heterocromático respectivamente.

**Caso iii)**  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| = 1$ . Si  $\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}) = A$ , entonces  $\psi(\{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}) = \{R, V\}$  y debido a que  $T_8[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}] \cong T_8[\{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}]$ , resulta similar a **ii**).

Por lo tanto tal 3-coloración  $\psi$  no existe, por lo que se concluye que  $\vec{C}_3(T_8) = 2$ . Tomemos  $\varphi : V(T_8) \rightarrow \{A, R\}$  una 2-coloración propia óptima (no necesariamente única) definida como

$$\varphi(v) = \begin{cases} A & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ R & \text{si } v \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}. \end{cases}$$

□

**Corolario 3.1.**  $\vec{\omega}(T_8) = 2$ .

*Demostración.* Es inmediata de la Proposición anterior, ya que  $2 \leq \vec{\omega}(T_8) \leq \vec{\omega}_3(T_8) = 2$ .  $\square$

**Proposición 3.3.** Sea  $T_9 \in \mathfrak{B}$ , entonces  $\vec{\omega}(T_9) = 2$ .

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}(T_9) \geq 3$ , por lo que existe una 3-coloración  $\psi : V(T_9) \rightarrow \{A, R, V\}$  propia óptima, es decir libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\psi(*) = A$  y notemos que por la construcción de  $\mathfrak{B}$ ,  $T_9[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}] \cong T_8 \in \mathfrak{B}$ . Por el Corolario 3.1 tenemos que  $|\psi(T_9[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}])| = 2$ , es decir  $\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}) = \{R, V\}$  y que  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| \leq 2$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso i)**  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| = 1$ . Si  $\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}) = R$ , entonces existe  $v \in \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}$  tal que  $\psi(v) = V$ , pero dado  $u \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ , tendríamos que  $\vec{C}_3 = (*, u, v, *)$  ó  $\vec{C}_3 = (*, v, u, *)$  sería heterocromático.

**Caso ii)**  $|\psi(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\})| = 2$ . Existen 4 casos a considerar.

- Si  $\psi(\mathbf{1}) = R$  y  $\psi(\mathbf{2}) = V$ , se induce un  $\vec{C}_4 = ((1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1))$  bien coloreado.
- Si  $\psi(\{(1, 1), (2, 1)\}) = R$  y  $\psi(\{(1, 2), (2, 2)\}) = V$ , entonces para  $v \in \mathbf{3}$  se tiene que  $\psi(v) \notin \{R, V\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (*, (1, 2), v, *)$  ó  $\vec{C}_3 = (*, (1, 1), v, *)$  sería heterocromático respectivamente, por lo que  $\mathbf{3}$  no pertenece a clase cromática alguna, que es una contradicción al hecho de ser una coloración propia.
- Si  $\psi(\{\mathbf{1}, (2, 1)\}) = R$  y  $\psi((2, 2)) = V$ , dado  $v \in \mathbf{4}$  se tiene que  $\psi(v) \notin \{R, V\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (*, (2, 2), v, *)$  ó  $\vec{C}_3 = (*, (2, 1), v, *)$  sería heterocromático respectivamente, que es una contradicción similar al inciso anterior.
- Si  $\psi(\{\mathbf{1}, (2, 2)\}) = R$  y  $\psi((2, 1)) = V$ , dado  $v \in \mathbf{4}$ , se tiene que  $\psi(v) \notin \{R, V\}$ , de lo contrario  $\vec{C}_3 = (*, (2, 1), v, *)$  ó  $\vec{C}_3 = (*, (2, 2), v, *)$  sería heterocromático respectivamente.

Por la Observación 1.6 para probar que  $\vec{\omega}(T_9) = 2$ , basta exhibir una coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados donde se alcance la inconexión acíclica. Sea  $\varphi : V(T_9) \rightarrow \{A, R\}$  una 2-coloración definida por

$$\varphi(v) = \begin{cases} A & \text{si } v = \{*\}, \\ R & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \end{cases}$$

que es una coloración óptima.  $\square$

**Teorema 3.1.** Sea  $T_n \in \mathfrak{B}$ , con  $n \geq 8$ , entonces

$$\vec{\omega}_3(T_n) = n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 4. \quad (3.3)$$

donde el símbolo  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota el entero menor o igual.

*Demostración.* Sean  $r = n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 4$  y  $\varphi : V(T_n) \rightarrow \{c_i : i \in I_r\}$  una  $r$ -coloración propia óptima como se define en cada caso.

**Caso 1)**  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . La prueba es por inducción sobre el número de vértices.

- Para el caso base de inducción  $n = 8$ , por la Proposición 3.2 se tiene que

$$\vec{\omega}_3(T_8) = 8 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor - 4 = 2.$$

- Supongamos que el Teorema se cumple para  $T_{n-4}$  y mostremos que se cumple para  $T_n$ , es decir

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_3(T_n) &= n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 4 = (n-4) - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor - 1 \\ &= \left( (n-4) - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor - 4 \right) + 3 = \vec{\omega}_3(T_{n-4}) + 3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observemos que si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , entonces  $\lfloor \frac{n+i}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  para cada  $i \in I_3$ . Por la construcción de  $\mathfrak{B}$ , notemos que  $T_n[T_n \setminus \{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_{n-4}$  y  $T_n[\{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong SR_4$ . Por las Proposiciones 1.7 y 3.1, tenemos que

$$\vec{\omega}_3(T_n) \leq \vec{\omega}_3(T_{n-4}) + \vec{\omega}_3(SR_4) = \vec{\omega}_3(T_{n-4}) + 3.$$

Por la Observación 1.6, para probar que  $\vec{\omega}_3(T_n) = \vec{\omega}_3(T_{n-4}) + 3$ , basta exhibir una  $r$ -coloración propia óptima. Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 3 \leq k \leq r, l \text{ par}, \end{cases} \quad (3.5)$$

lo que prueba que  $\vec{\omega}_3(T_n)$  se alcanza en  $\vec{\omega}_3(T_{n-4}) + 3$ .

**Caso 2)**  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Por construcción tenemos que  $T_n[T_n \setminus \{*\}] \cong T_{n-1}$ , al agregar el vértice  $\{*\}$ , entonces por el **Caso 1)** y el Corolario 1.4 tenemos que  $\vec{\omega}_3(T_n) \leq \vec{\omega}_3(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 3 \leq k \leq r-1, l \text{ par}, \\ c_r & \text{si } v = \{*\}, \end{cases} \quad (3.6)$$

que es una  $r$ -coloración propia óptima, y por la Observación 1.6 se tiene lo deseado. Notemos que (3.3) se cumple de igual forma como en (3.4).

**Caso 3)**  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Tenemos que  $T_n[T_n \setminus \{(n, 2)\}] \cong T_{n-1}$  al hacer  $\{*\} = (n, 1)$  y agregar el vértice  $(n, 2)$ . Por el **Caso 2)** y el Corolario 1.4 tenemos que  $\vec{\omega}_3(T_n) \leq \vec{\omega}_3(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n-1, 3 \leq k \leq r-2, l \text{ par}, \\ c_{r-1} & \text{si } v = (n, 1), \\ c_r & \text{si } v = (n, 2), \end{cases}$$

que es una  $r$ -coloración propia óptima. Notemos que (3.3) se cumple de igual forma como en (3.4).

**Caso 4)**  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Notemos que  $T_{n+4}[T_n \setminus \{*\}] \cong T_{n-1}$  al agregar el vértice  $\{*\}$ , entonces por el **caso 3)** y el Corolario 1.4, se tiene que  $\vec{\omega}_3(T_n) \leq \vec{\omega}_3(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n - 1, 3 \leq k \leq r - 3, l \text{ par}, \\ c_{r-2} & \text{si } v = (n, 1), \\ c_{r-1} & \text{si } v = (n, 2), \\ c_r & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

que es una  $r$ -coloración propia óptima.

En las Figuras 3.3 y 3.4 se muestran la digráfica auxiliar  $D_7$  y el torneo  $T_{13} \in \mathfrak{B}$  respectivamente con una coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  descrita en (3.6). Notemos que esta coloración no es libre de  $\vec{C}_4$ , por lo que una coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  es cuando  $\{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}$ , pertenecen a la misma clase cromática que  $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}$ .  $\square$

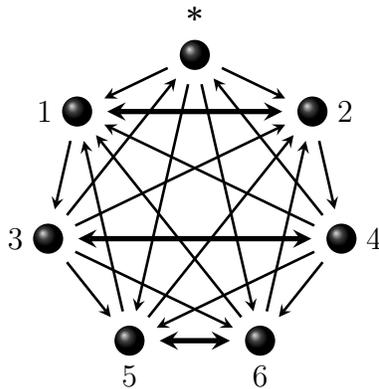


Figura 3.3: Digráfica auxiliar  $D_7 \in \mathfrak{B}$ .

**Observación 3.2.** Para  $T_9 \in \mathfrak{B}$ , la coloración dada en (3.6) es única, salvo el color que se les haya asignado.

**Teorema 3.2.** Sea  $T_n \in \mathfrak{B}$ , con  $n \geq 9$ , entonces

$$\vec{\omega}(T_n) = \vec{\omega}_3(T_n) - 1.$$

*Demostración.* La prueba se sigue de manera similar a la del Teorema 3.1 tomando como base la Proposición 3.3. Sean  $r' = \vec{\omega}_3(T_n) - 1 = n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 5$  y  $\varphi : V(T_n) \rightarrow \{c_i : i \in I_{r'}\}$  una  $r'$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados definido en cada caso.

**Caso 1)**  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . La prueba es por inducción sobre el número de vértices.

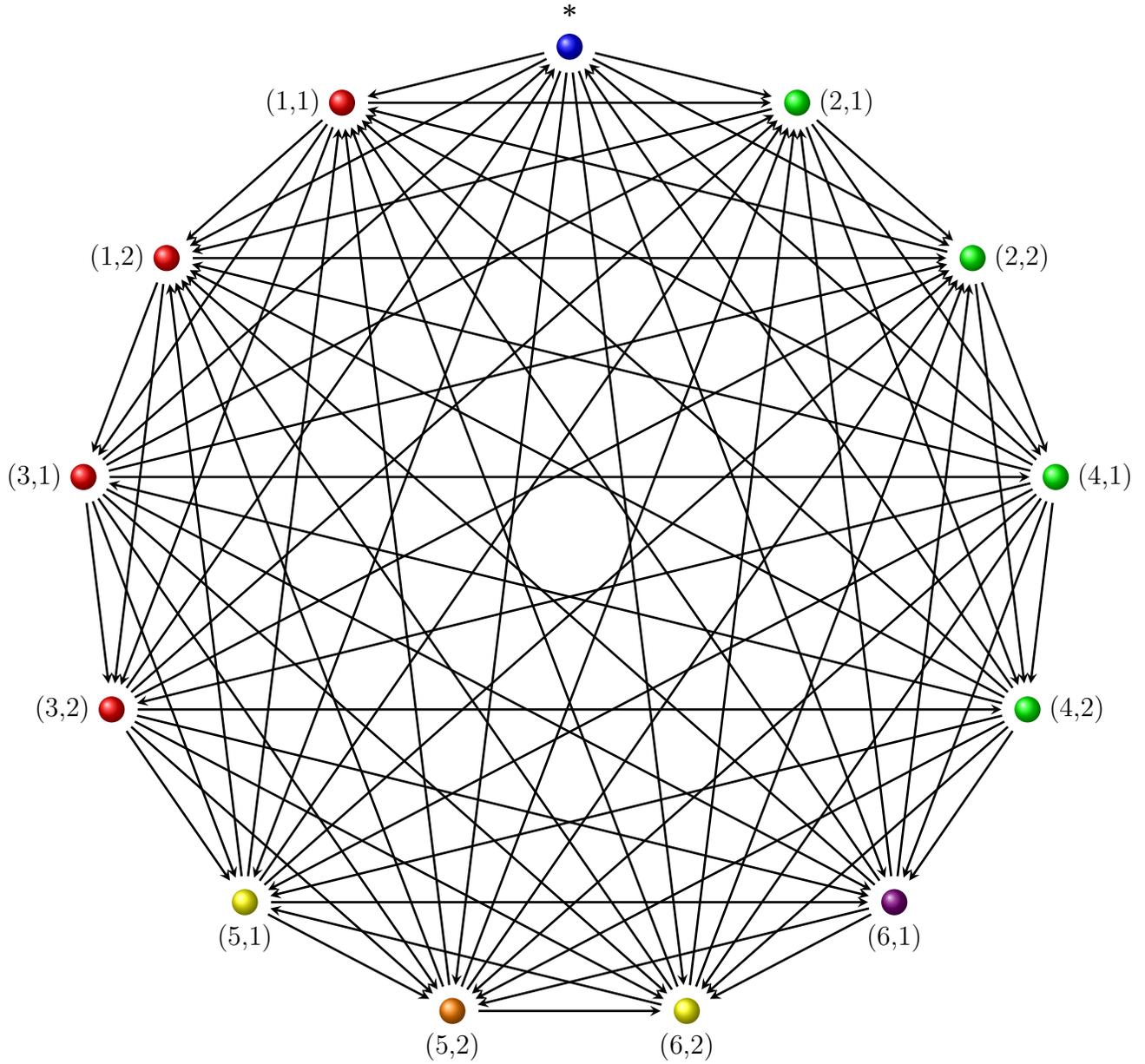


Figura 3.4: Torneo  $T_{13} \in \mathfrak{B}$  con  $\vec{\omega}_3(T) = 6$  y  $\vec{\omega}(T) = 5$ .

- Para el caso base de inducción  $n = 12$ , notemos que  $T_{12}[\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, (5, 2)\}] \cong T_9$  y por las Proposiciones 1.7 y 3.3 y el Teorema 3.1, tenemos que

$$\vec{\omega}(T_{12}) \leq \vec{\omega}(T_9) + \vec{\omega}(\vec{C}_3) = 4 = 12 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor - 5 = \vec{\omega}_3(T_{12}) - 1.$$

- Supongamos que el Teorema es válido para  $T_{n-4}$  y mostremos que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(T_n) &= n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 5 = (n-4) - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor - 2 = \left( (n-4) - \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor - 5 \right) + 3 \\ &= \vec{\omega}(T_{n-4}) + 3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por la construcción de la familia  $\mathfrak{B}$ , tenemos que  $T_n[T_n \setminus \{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_{n-4}$  y que  $T_n[\{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong SR_4$ . Por las Proposiciones 1.7 y 3.1 llegamos a que

$$\vec{\omega}(T_n) \leq \vec{\omega}(T_{n-4}) + \vec{\omega}(SR_4) = \vec{\omega}(T_{n-4}) + 3.$$

Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq r', l \text{ par}, \end{cases}$$

que es una  $r'$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados y por la Observación 1.6, se prueba la igualdad. Notemos que esta coloración tiene un color menos que (3.5), por lo que se prueba también que  $\vec{\omega}(T_n) = \vec{\omega}_3(T_n) - 1$ .

**Caso 2)**  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Por construcción tenemos que  $T_n[T_n \setminus \{*\}] \cong T_{n-1}$ , al agregar el vértice  $\{*\}$ . Por el **Caso 1)** y el Corolario 1.4 tenemos que  $\vec{\omega}(T_n) \leq \vec{\omega}(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq r' - 1, l \text{ par}, \\ c_{r'} & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

que es una  $r'$ -coloración propia óptima, y por la Observación 1.6 se tiene lo deseado. Notemos que (3.7) se cumple.

**Caso 3)**  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Por construcción tenemos que  $T_n[T_n \setminus \{(n, 2)\}] \cong T_{n-1}$ , al hacer  $\{*\} = (n, 1)$  y agregar el vértice  $(n, 2)$ . Por el **Caso 2)** y el Corolario 1.4 tenemos que  $\vec{\omega}(T_n) \leq \vec{\omega}(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq r' - 2, l \text{ par}, \\ c_{r'-1} & \text{si } v = (n, 1), \\ c_{r'} & \text{si } v = (n, 2), \end{cases}$$

que es una  $r'$ -coloración propia óptima. Notemos que (3.7) se cumple.

**Caso 4)**  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Notemos que  $T_{n+4}[T_n \setminus \{*\}] \cong T_{n-1}$  al agregar los vértices  $\{*\}$ , entonces por el **Caso 3)** y el Corolario 1.4, se tiene que  $\vec{\omega}(T_n) \leq \vec{\omega}(T_{n-1}) + 1$ . Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \\ c_k & \text{si } v = (i, j), k \equiv l + j - i \pmod{3}, 5 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq r' - 3, l \text{ par}, \\ c_{r'-2} & \text{si } v = (n, 1), \\ c_{r'-1} & \text{si } v = (n, 2), \\ c_{r'} & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

que es una  $r'$ -coloración propia óptima.

□

Notemos que la coloración en el Teorema 3.1 es libre de  $\vec{C}_3$ , pero no de  $\vec{C}_4$ , lo que nos lleva a que la coloración en el Teorema 3.2 tiene que tener al menos un color menos. En la Figura 3.5 podemos observar la relación entre la inconexión acíclica (denotado con  $\star$ ) y la inconexión libre de  $\vec{C}_3$  (denotado con  $*$ ) para los primeros  $n$ -torneos en la familia  $\mathfrak{B}$ .

**Observación 3.3.** El caso  $n = 8$  se excluye, debido a que  $2 \leq \vec{\omega}(T_8) \leq \vec{\omega}_3(T_8) = 2$ , por lo que no hay nada que probar.

**Observación 3.4.** Notemos que en esta familia existe más de una clase cromática singular, por lo que para cada  $n \geq 10$ , los miembros de  $\mathfrak{B}$  no son  $\vec{\omega}$ -agudos (resp.  $\vec{\omega}_3$ -agudos).

**Observación 3.5.** V. Neumann-Lara propone en [NL99] al torneo  $T_9$  como ejemplo para mostrar que  $\vec{\omega}(T_9) < \vec{\omega}_3(T_9)$ . En la Proposición 3.3 y en el caso  $n = 9$  del Teorema 3.1, damos pruebas distintas a las ofrecidas por él.

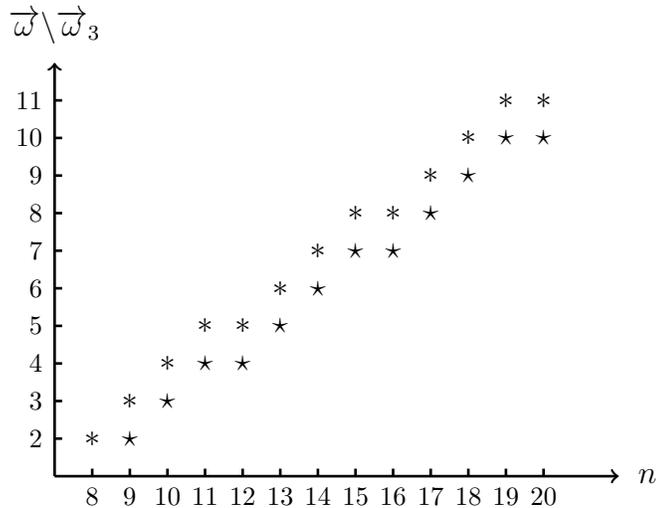


Figura 3.5: Crecimiento de  $\vec{\omega}(T_n)$  y  $\vec{\omega}_3(T_n)$ , con  $T_n \in \mathfrak{B}$ .

### 3.1.2. La familia $\mathfrak{B}$

Definamos la familia de torneos  $\mathfrak{B}$  como sigue. Dado  $n \geq 1$ , construyamos la digráfica auxiliar  $D_{4n+1} = (V(D_{4n+1}), A(D_{4n+1}))$ , sobre los conjuntos

$$\begin{aligned}
 V(D_{4n+1}) &= I_{4n} \cup \{*\}, \\
 A(D_{4n+1}) &= \{ij : i \equiv 0, 3 \pmod{4}, 3 \leq i < j \leq 4n\} \cup \{i(i+2) : i \equiv 1, 2 \pmod{4}\} \cup \\
 &\quad \{ji : i \equiv 1, 2 \pmod{4}, 1 \leq i < j \leq 4n, j - i \neq 2\} \cup \{i(i-1) : i \text{ es par}\} \cup \\
 &\quad \{*i, j* : i \equiv 1, 2 \pmod{4}, j \equiv 0, 3 \pmod{4}\}.
 \end{aligned}$$

El torneo  $T_{8n+1} = (V(T_{8n+1}), A(T_{8n+1}))$  es construido sobre los conjuntos

$$\begin{aligned}
 V(T_{8n+1}) &= (I_{4n} \times I_2) \cup \{*\}, \\
 A(T_{8n+1}) &= \{\pi^{-1}(ij) : i, j \in V(D_{4n+1})\},
 \end{aligned}$$

donde la función  $\pi : V(T_{8n+1}) \rightarrow V(D_{4n+1})$  es el epimorfismo reflexivo definido de la siguiente forma

$$\pi(v) = \begin{cases} i & \text{si } v \in \mathbf{i}, \\ * & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

que cumple sobre  $A(T_{8n+1})$  las propiedades descritas en (3.2).

La familia  $\mathfrak{V} = \{T_{8n+1} = (V(T_{8n+1}), A(T_{8n+1})), \text{ con } n \geq 1\}$ .

**Teorema 3.3.** Sea  $T_{8n+1} \in \mathfrak{V}$  con  $n \geq 1$ , entonces

$$\vec{\omega}_3(T_{8n+1}) = 2n + 1.$$

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre  $n$ .

- Para  $n = 1$ , por el caso  $n = 9$  del Teorema 3.1, el torneo  $T_9 \in \mathfrak{V}$  cumple que  $\vec{\omega}_3(T_9) = 2(1) + 1 = 3$ .
- Supongamos que el Teorema es válido para  $T_{8(n-1)+1}$ , es decir  $\vec{\omega}_3(T_{8(n-1)+1}) = 2n - 1$ . Notemos que por la construcción de la familia  $\mathfrak{V}$ ,  $T_{8n+1}[T_{8n+1} \setminus \{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_{8n-7}$  y que  $T_{8n+1}[\{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_8$ , Por la Proposición 1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_3(T_{8n+1}) &\leq \vec{\omega}_3(T_{8n+1}[T_{8n+1} \setminus \{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}]) + \vec{\omega}_3(T_{8n+1}[\{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}]) \\ &= \vec{\omega}_3(T_{8n-7}) + \vec{\omega}_3(T_8) = 2n - 1 + 2 = 2n + 1. \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $\vec{\omega}_3(T_{8n+1}) \leq 2n + 1$ . Por la Observación 1.6, tomemos

$$\varphi : V(T_{8n+1}) \rightarrow \{c_i : i \in I_{2n+1}\}$$

definida por

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_i & \text{si } v \in \{\mathbf{i} - \mathbf{2}, \mathbf{i} : i \equiv 0, 3 \pmod{4}, 1 \leq i \leq 2n\}, \\ c_{2n+1} & \text{si } v = \{*\}, \end{cases} \quad (3.8)$$

que proporciona una  $(2n + 1)$ -coloración propia óptima, por lo que  $\vec{\omega}_3(T_{8n+1})$  se alcanza en  $2n + 1$ .

□

**Teorema 3.4.** Sea  $T_{8n+1} \in \mathfrak{V}$  con  $n \geq 1$ , entonces

$$\vec{\omega}(T_{8n+1}) = n + 1.$$

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre  $n$ .

- Para  $n = 1$ , se ha mostrado en la Proposición 3.3 que el torneo  $T_9 \in \mathfrak{V}$  cumple que  $\vec{\omega}(T_9) = (1) + 1 = 2$ .
- Supongamos que  $\vec{\omega}_3(T_{8(n-1)+1}) = n - 1$ . Al igual que en la proposición anterior, tenemos que  $T_{8n+1}[T_{8n+1} \setminus \{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_{8n-7}$  y que  $T_{8n+1}[\{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_8$ , Por la Proposición 1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(T_{8n+1}) &\leq \vec{\omega}(T_{8n+1}[T_{8n+1} \setminus \{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}]) + \vec{\omega}(T_{8n+1}[\{\mathbf{n-3}, \mathbf{n-2}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}]) \\ &= \vec{\omega}(T_{8n-7}) + \vec{\omega}(T_8) = n - 1 + 2 = n + 1. \end{aligned}$$

Sea  $\varphi : V(T_{8n+1}) \rightarrow \{c_i : i \in I_{n+1}\}$  definida por

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_i & \text{si } v \in \{\mathbf{i} - \mathbf{3}, \mathbf{i} - \mathbf{2}, \mathbf{i} - \mathbf{1}, \mathbf{i} : i \equiv 0 \pmod{4}, 1 \leq i \leq n\}, \\ c_{n+1} & \text{si } v = \{*\}, \end{cases} \quad (3.9)$$

que proporciona una  $(n + 1)$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados, por lo que  $\vec{\omega}(T_{8n+1})$  se alcanza en  $n + 1$ .

□

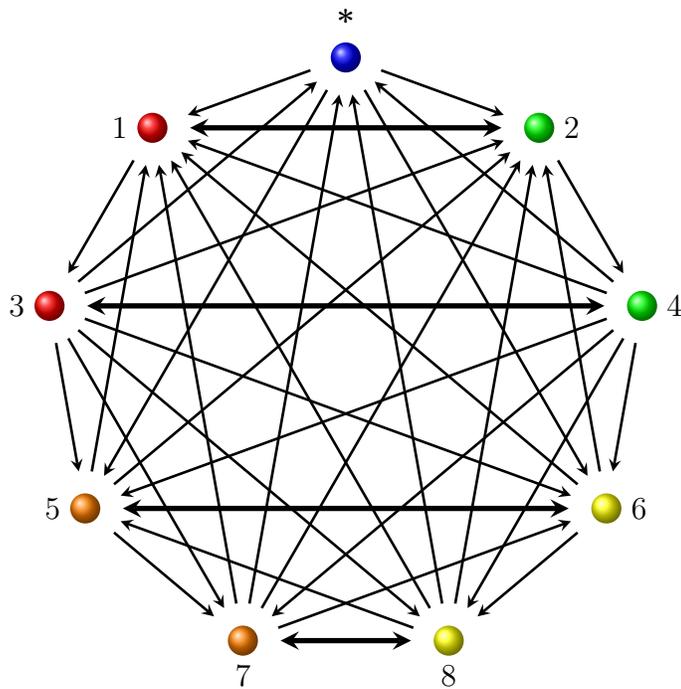


Figura 3.6: Digráfica  $D_9$  asociada a  $T_{19} \in \mathfrak{A}$ .

**Corolario 3.2.** La familia  $\mathfrak{A}$  es  $\vec{\omega}$ -aguda y  $\vec{\omega}_3$ -aguda.

*Demostración.* El vértice  $\{*\}$  es singular en las coloraciones (3.9) y (3.8) respectivamente. □

**Corolario 3.3.** Sea  $T_{8n+1} \in \mathfrak{A}$ , entonces

$$|\vec{\omega}_3(T_{8n+1}) - \vec{\omega}(T_{8n+1})| \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como ya lo habíamos mencionado, Neumann-Lara propone en [NL99] al torneo  $T_9 \in \mathfrak{A}$ , para el cual se ha demostrado que  $\vec{\omega}(T_9) = 2$  y  $\vec{\omega}_3(T_9) = 3$ , y con esto demuestra lo siguiente.

**Proposición 3.4** ([NL99] Proposición 4.3). Definamos  $T^{(1)} = T_9$  y  $T^{(n+1)} = T^{(1)}[T^{(n)}]$ , entonces

$$\vec{\omega}_3(T^{(n)}) = 2n + 1 \text{ y } \vec{\omega}(T^{(n)}) = n + 1.$$

*Demostración.* La prueba es directa del Corolario 1.1, ya que

$$\vec{\omega}_3(T^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_3(T_9) - (n-1) = 3n - n + 1 = 2n + 1$$

y

$$\vec{\omega}(T^{(n)}) = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}(T_9) - (n-1) = 2n - n + 1 = n + 1.$$

□

Notemos que con esta Proposición y con la familia  $\mathfrak{V}$  llegamos a la misma propiedad en la inconexión acíclica e inconexión libre de  $\vec{C}_3$ , pero con la diferencia que el torneo  $T^{(n)}$  es un  $9^n$ -torneo contra un  $(8n+1)$ -torneo en la familia  $\mathfrak{V}$ . La Figura 3.6 muestra un ejemplo de esta familia de torneos.

### 3.1.3. La familia $\mathfrak{L}$

Sea la familia de torneos  $\mathfrak{L} = \{T_{2n+1} : n \geq 0\}$  definida recursivamente como sigue.

i)  $T_1 = \vec{C}_3 = (*, (1, 1), (1, 2), *)$ .

ii)  $T_{2n+1} = (V(T_{2n+1}), A(T_{2n+1}))$ , para  $n \geq 2$  definido por

$$\begin{aligned} V(T_{2n+1}) &= V(T_{2n-1}) \cup \{\mathbf{n}\} = (I_n \times I_2) \cup \{*\}, \\ A(T_{2n+1}) &= A(T_{2n-1}) \cup \{u(n, 1), (n, 2)u : u \in \mathbf{i}, i \in I_{n-1}\} \cup \{(n, 1)(n, 2), *(n, 1), (n, 2)*\}. \end{aligned}$$

A manera de ejemplo tomemos  $n = 2$ , y analicemos la forma de colorear esta familia.

**Proposición 3.5.** Sea  $T_5 \in \mathfrak{L}$ , entonces  $\vec{\omega}_3(T_5) = \vec{\omega}(T_5) = 3$ .

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}_3(T_5) \geq 4$ , por lo que existe una 4-coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos  $\psi : V(T_5) \rightarrow \{A, R, V, N\}$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\psi(*) = A$ , entonces existen 2 casos.

**Caso i)**  $\psi((1, 1)) = A$ . Notemos que  $\psi((1, 2)) \neq A$ , de lo contrario no tendríamos una coloración propia, así  $\psi((1, 2)) = R$ , por lo que obligaríamos a que  $\psi((2, 1)) = V$  y  $\psi((2, 2)) = N$ , que induce un  $\vec{C}_3 = (*, (2, 1), (2, 2), *)$  heterocromático, que es imposible.

**Caso ii)**  $\psi((1, 1)) = R$ . Es imposible, ya que si  $\psi((1, 2)) \in \{A, R\}$ , entonces ambos casos nos conducen a que  $\psi((2, 1)) = V$  y  $\psi((2, 2)) = N$ , que induce un  $\vec{C}_3 = (*, (2, 1), (2, 2), *)$  heterocromático.

Por lo concluimos que  $\vec{\omega}_3(T_5) \leq 4$ . Sea  $\varphi : V(T_5) \rightarrow \{A, R, V\}$  definido por

$$\varphi(v) = \begin{cases} A & \text{si } v = \{*\}, \\ R & \text{si } v \in \mathbf{1}, \\ V & \text{si } v \in \mathbf{2}, \end{cases}$$

que es una 3-coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos, por lo que  $\vec{\omega}_3(T_5)$  se alcanza en 3. Notemos que esta misma coloración es libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  heterocromáticos, entonces por el Teorema 1.3, esta coloración es óptima. Por lo tanto  $\vec{\omega}_3(T_5) = \vec{\omega}(T_5) = 3$ . La Figura 3.7 muestra el caso anterior.  $\square$

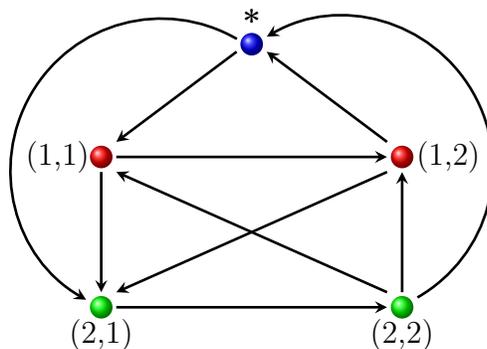


Figura 3.7: Torneo  $T_5 \in \mathcal{L}$ .

**Teorema 3.5.** Sea  $T_{2n+1} \in \mathcal{L}$ , entonces  $\vec{\omega}(T_{2n+1}) = \vec{\omega}_3(T_{2n+1}) = n + 1$ .

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre el número de vértices.

- i). Para  $n = 1$ , se tiene que  $T_3 = \vec{C}_3$  y es claro que  $\vec{\omega}_3(\vec{C}_3) = 2$ .
- ii). Supongamos que  $\vec{\omega}_3(T_{2n-1}) = n$  y mostremos que  $\vec{\omega}_3(T_{2n+1}) = n + 1$ . Supongamos por contradicción que existe una  $(n + 2)$ -coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos  $\psi : V(T_{2n+1}) \rightarrow \{c_i : i \in I_{n+2}\}$ .

Por hipótesis de inducción  $\vec{C}_3(T_{2n-1}) = n$ , por lo que es imposible agregar un nuevo color, entonces los colores  $c_{n+1}$  y  $c_{n+2}$  deben ser asignados en  $\{(n, 1), (n, 2)\}$ , que es imposible, ya que  $\vec{C}_3 = (*, (n, 1), (n, 2), *)$  sería heterocromático. Luego  $\vec{C}_3(T_{2n+1}) \leq n + 1$ .

Sea  $\varphi : V(T_{2n+1}) \rightarrow \{c_i : i \in I_{n+1}\}$  definida por

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_i & \text{si } v \in \mathbf{i}, \text{ para } i \in I_n, \\ c_{n+1} & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

que es una  $(n + 1)$ -coloración propia libre de  $\vec{C}_3$  heterocromáticos. Más aún, es una  $(n + 1)$ -coloración propia libre de  $\{\vec{C}_3, \vec{C}_4\}$  bien coloreados, lo que muestra que  $\vec{\omega}_3(T_{2n+1})$  y  $\vec{\omega}(T_{2n+1})$  se alcanza en  $n + 1$ . La Figura 3.8 muestra la construcción del  $(2n + 1)$ -torneo, en la que los arcos dobles indican la in-vecindad (resp. ex-vecindad) de toda la nueva copia isomorfa de  $SR_4$  que se agrega a  $T_{2n-1}$ .  $\square$

**Corolario 3.4.** La familia  $\mathcal{L}$  es  $\vec{\omega}$ -aguda y  $\vec{\omega}_3$ -aguda.

*Demostración.* El vértices  $\{*\}$  es singular único.  $\square$

A esta familia la podemos extender a la digráfica auxiliar de la siguiente familia que a continuación se describe.

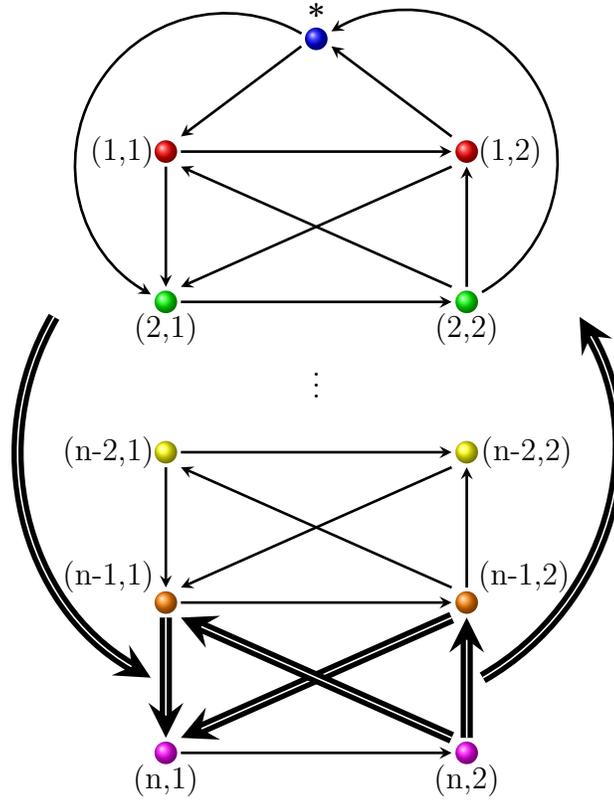


Figura 3.8: Torneo  $T_{2n+1} \in \mathcal{L}$ .

### 3.1.4. La familia $\mathfrak{J}$

Definamos la familia  $\mathfrak{J}$  como a continuación se describe. Para cada  $n \geq 1$ , construyamos la digráfica auxiliar  $D_{2n+1} = (V(D_{2n+1}), A(D_{2n+1}))$  sobre los conjuntos

$$V(D_{2n+1}) = I_{2n} \cup \{*\}$$

y

$$\begin{aligned} A(D_{2n+1}) = & \{ij : i, j \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq i < j \leq 2n - 1\} \cup \{ji : j = i + 2, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ & \{ji : i, j \equiv 0 \pmod{2}, 2 \leq i < j \leq 2n\} \cup \{ij : i = j + 2, i \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \\ & \{ij : i \equiv 0 \pmod{2}, j \neq i - 1\} \cup \{(i - 1)i : i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ & \{*i, j* : i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

El torneo  $T_{4n+1} = (V(T_{4n+1}), A(T_{4n+1}))$  es construido sobre los conjuntos

$$\begin{aligned} V(T_{4n+1}) &= (I_{2n} \times I_2) \cup \{*\}, \\ A(T_{4n+1}) &= \{\pi^{-1}(ij) : i, j \in V(D_{2n+1})\}, \end{aligned}$$

donde la función  $\pi : V(T_{4n+1}) \rightarrow V(D_{2n+1})$  es el epimorfismo reflexivo definido en (3.1)

$$\pi(v) = \begin{cases} i & \text{si } v \in \mathbf{i}, \\ * & \text{si } v = \{*\}, \end{cases}$$

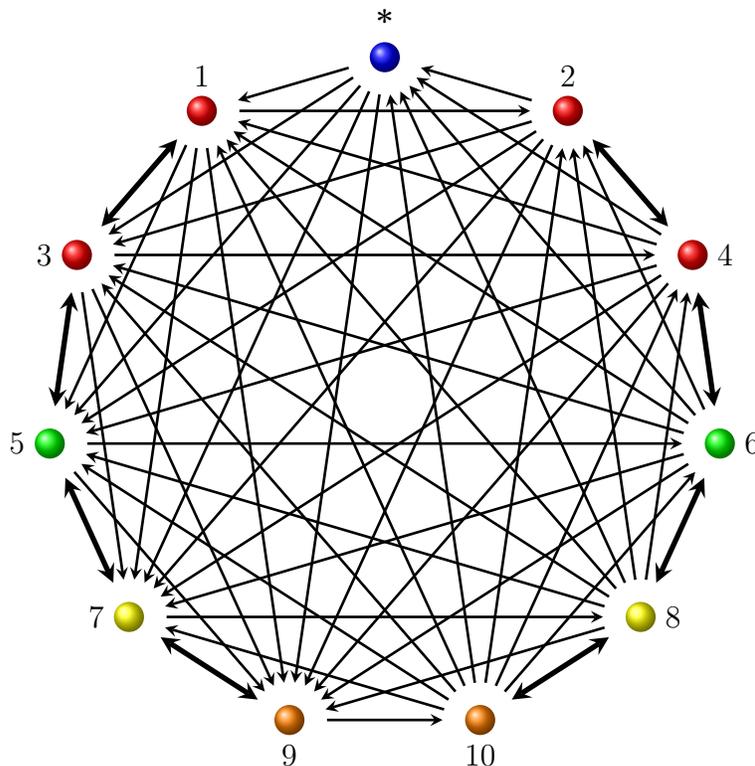


Figura 3.9: Digráfica  $D_{11}$  asociada al torneo  $T_{21} \in \mathfrak{J}$ .

que cumple las propiedades sobre  $A(T_{4n+1})$  descritas en (3.2). La Figura 3.9 muestra un ejemplo de la digráfica auxiliar  $D_{11}$  asociada al torneo  $T_{21}$ .

La familia  $\mathfrak{J} = \{T_{4n+1} = (V(T_{4n+1}), A(T_{4n+1})) : n \geq 1\}$ .

**Observación 3.6.** La digráfica auxiliar  $D_{2n+1}$  asociada al torneo  $T_{4n+1} \in \mathfrak{J}$  proviene del torneo  $T_{2n+1} \in \mathfrak{L}$  (omitiendo las etiquetas) al agregar el arco  $(i+1, j)(i, j)$ , donde  $1 \leq i < 2n$  y  $j \in I_2$ , resultando el arco bidireccional entre  $i$  e  $(i-2)$  con  $2 \leq i \leq n$ .

**Teorema 3.6.** Sea  $T_{4n+1} \in \mathfrak{J}$  con  $n \geq 3$ , entonces

$$\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) = n.$$

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre  $n$ .

i). Para el caso  $n = 3$ , demostremos que  $\vec{\omega}_3(T_{13}) = 3$ . Supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}_3(T_{13}) \geq 4$ , por lo que existe  $\psi : V(T_{13}) \rightarrow \{A, R, V, N\}$  una 4-coloración propia óptima. Como  $T_{13}[\{*, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}] \cong T_9$  y  $T_{13}[\{*, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}] \cong T_9$  con  $T_9 \in \mathfrak{B}$ , entonces por el Teorema 3.1 en el caso  $n = 9$ , tenemos que  $|\psi(T_{13}[\{*, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}])| \leq 3$ , por lo que tenemos los siguientes casos.

- Si  $\psi(T_{13}[\{*, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}]) = \{A, R, V\}$ , por la Observación 3.2, la única coloración posible es

$$\psi(u) = \begin{cases} A & \text{si } v = \{*\}, \\ R & \text{si } v = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \\ V & \text{si } v = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \end{cases}$$

por lo que existe  $v \in \{5, 6\}$  tal que  $\psi(v) = N$ , pero si  $v \in 5$ , entonces  $\vec{C}_3(u, v, w, u)$  es heterocromático donde  $u \in 1$ ,  $w \in 3$ . Si  $v \in 6$ , entonces  $\vec{C}_3(u, w, v, u)$  es heterocromático, donde  $u \in 2$  y  $w \in 4$ , que es imposible.

- Si  $\psi(T_{13}[\{*, 1, 2, 3, 4\}]) = \{A, R\}$  entonces  $\psi(T_{13}[\{5, 6\}]) = \{V, N\}$ , que es imposible ya que  $\vec{C}_3(*, v, u, *)$  con  $v \in 5$  y  $w \in 6$  sería heterocromático de cualquier forma que se 2-coloree a  $T_{13}[\{5, 6\}]$ .
- El caso  $\psi(T_{13}[\{*, 1, 2, 3, 4\}]) = A$  se reduce al primer caso.

ii). Supongamos que el Teorema se cumple para  $n-1$ , es decir  $\vec{\omega}_3(T_{4n-3}) = n-1$  y mostremos que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) = n$ , supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) \geq n+1$ , por lo que existe  $\psi : V(T_{4n+1}) \rightarrow \{c_i : i \in I_{n+1}\}$  una  $(n+1)$ -coloración propia óptima. Por hipótesis de inducción tenemos que  $\vec{\omega}_3(T_{4n-3}) = n-1$  y es imposible agregar un nuevo color, por lo que los colores  $c_n$  y  $c_{n+1}$  deben ser asignados en  $T_{4n+1}[\{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong SR_4$  que es imposible ya que  $\vec{C}_3(*, v, u, *)$  con  $v \in \mathbf{n-1}$  y  $u \in \mathbf{n}$ , sería heterocromático de cualquier forma que se 2-coloree. Por lo tanto  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) \leq n$ .

Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v = \{*\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ c_i & \text{si } v \in \{\mathbf{i-1}, \mathbf{i}\}, \text{ para } i \text{ par, } 4 \leq i \leq n, \end{cases} \quad (3.10)$$

que proporciona una  $n$ -coloración propia óptima, lo que prueba que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1})$  se alcanza en  $n$ .

□

**Observación 3.7.** El caso  $n = 2$  se reduce a  $T_9 \in \mathfrak{B}$  y es un caso especial que no satisface la conclusión del Teorema anterior.

**Observación 3.8.** Notemos que en la Figura 3.9, al aplica la imagen inversa  $\pi^{-1}(D_{11})$  y obtener el torneo  $T_{21}$ , la coloración dada en (3.10) es libre de  $\vec{C}_3$ , pero no de  $\vec{C}_4$ , por lo que  $\vec{\omega}(T_{21})$  debe ser mucho menor. Esto lo podemos enunciar con el siguiente

**Teorema 3.7.** Sea  $T_{4n+1} \in \mathfrak{J}$  con  $n \geq 1$ , entonces

$$\vec{\omega}(T_{4n+1}) = 2.$$

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre  $n$ .

- i). El caso  $n = 1$  es obvio ya que si  $\psi(*) = A$ , entonces de cualquier forma que se 2-coloree a  $\{1, 2\}$ , se tendría un  $\vec{C}_3 = (*, v, u, *)$  heterocromático, para algún  $v \in 1$  y algún  $u \in 2$ .
- ii). Supongamos que el Teorema se cumple para  $n-1$ , es decir  $\vec{\omega}_3(T_{4n-3}) = 2$  y supongamos por contradicción que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) \geq 3$ , por lo que existe una 3-coloración propia óptima  $\psi : V(T_{4n+1}) \rightarrow \{A, R, V\}$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\vec{\omega}_3(T_{4n-3}) = 2$  y es imposible agregar un nuevo color, por lo que el color  $V$  debe ser asignado en  $T_{4n+5}[\{\mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}]$ , pero como  $T_{4n+5}[\{*, \mathbf{i-1}, \mathbf{i}, \mathbf{n-1}, \mathbf{n}\}] \cong T_9 \in \mathfrak{B}$  para  $1 \leq i \leq n-1$ , entonces tenemos que  $|\psi(T_{4n+5}[\{*, \mathbf{i-1}, \mathbf{i}, \mathbf{n+1}, \mathbf{n+2}\}])| = 3$ , que es una contradicción a la Proposición 3.3. Por lo tanto  $\vec{\omega}_3(T_{4n+5}) = 2$ . Así tenemos que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) \leq 2$  y es directo ver que  $\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) = 2$ .

Sea

$$\varphi(v) = \begin{cases} c_1 & \text{si } v = \{*\}, \\ c_2 & \text{si } v \in \mathbf{i}, \text{ con } \mathbf{i} \in I_{2n}, \end{cases} \quad (3.11)$$

que es una 2-coloración propia óptima. □

**Corolario 3.5.** La familia  $\mathfrak{J}$  es  $\vec{\omega}$ -aguda y  $\vec{\omega}_3$ -aguda.

*Demostración.* Notemos que  $\{*\}$  en (3.10) y en (3.11) es un vértices singular único. □

**Corolario 3.6.** Sea  $T_{4n+1} \in \mathfrak{J}$ , entonces

$$|\vec{\omega}_3(T_{4n+1}) - \vec{\omega}(T_{4n+1})| \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

La familia  $\mathfrak{J}$  nos proporciona uno de los resultados que consideramos de mayor interés en este trabajo, como ya se ha comentado, responde de manera afirmativa al problema planteado en [NL99] (Problema 6.6). Una consecuencia directa de esta familia es el siguiente Teorema que es un resultado de especial interés.

**Teorema 3.8.** Para todo par de enteros  $r, s$  con  $2 \leq r \leq s$ , existe un torneo  $T$  tal que  $\vec{\omega}(T) = r$  y  $\vec{\omega}_3(T) = s$ .

*Demostración.* Sea  $k = s - r$  y sea  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1}$  una descomposición de  $k$  en  $r - 1$  sumandos no negativos.

Observemos que para cada  $n \geq 3$ ,  $\phi : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbb{N}$  es una biyección definida como sigue: Dado  $T_{4n+1} \in \mathfrak{J}$ , asociamos el orden de  $T_{4n+1}$  con su inconexión acíclica, es decir

$$\phi(4n + 1) = n.$$

Sean  $T_{4(k_1+2)+1}, T_{4(k_2+2)+1}, \dots, T_{4(k_{r-2}+2)+1}, T_{4(k_{r-1}+2)+1}$ ,  $(r - 1)$  torneos donde

$$T_{4(k_i+2)+1} = \begin{cases} \vec{C}_3 & \text{si } k_i = 0, \\ T_{4(k_i+2)+1} \in \mathfrak{J} & \text{si } k_i \geq 1. \end{cases}$$

Sea  $T$  el torneo resultante de la composición de los  $(r - 1)$  torneos, es decir

$$T = T_{4(k_1+2)+1}[T_{4(k_2+2)+1}[\dots[T_{4(k_{r-2}+2)+1}[T_{4(k_{r-1}+2)+1}]] \dots]].$$

Notemos que  $\vec{\omega}(T_{4(k_i+2)+1}) = 2$  y  $\vec{\omega}_3(T_{4(k_i+2)+1}) = k_i + 2$ , para cada  $i \in I_{r-1}$  y debido a que  $\mathfrak{J}$  es  $\vec{\omega}$ -aguda y  $\vec{\omega}_3$ -aguda entonces por el Corolario 1.1, se tiene que

$$\vec{\omega}(T) = 2(r - 1) - (r - 2) = r.$$

Similarmente para  $\vec{\omega}_3(T)$

$$\vec{\omega}_3(T) = \sum_{i=1}^{r-1} (k_i + 2) - (r - 2) = \sum_{i=1}^{r-1} k_i + 2(r - 1) - (r - 2) = s.$$

□

**Observación 3.9.** Como la composición de torneos no es necesariamente conmutativa, entonces  $T$  depende de la descomposición de  $k$ , por lo que el Teorema 3.8 nos proporciona

$$\binom{k+r-2}{k}$$

formas diferentes de hacer la composición.

# Bibliografía

- [ABNL92] J. Arocha, J. Bracho and V. Neumann-Lara, *On the minimum size of tight hiper-graphs*, J. Graph Theory **16** (1992) 319-326.
- [ABNL95] J. Arocha, J. Bracho and V. Neumann-Lara, *Tight and untight triangulated surfaces*, J. Combin. Theory **B** 63 (1995) 185-199.
- [BJG01] J. Bang-Jensen and G. Gutting *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag London Ltd, 2001.
- [BR79] L. W. Beineke and K. B. Reid, *Tournaments*, in L. W. Beineke, R. J. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, New York, 1979, 169-204.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elservier Pub. Co., 1976.
- [BCL99] S. Bowser, C. Cable and R. Lumberg, *Niche graphs and mixed pair graphs of tournaments*, J. Graph Theory **31** (1999) 319-332.
- [CDKL98] H. Cho, F. Doherty, S-R. Kim and R. Lundgren, *Domination graphs of regular tournaments II*, Congr. Numer. **130** (1998) 95-111.
- [CDKL98] H. Cho, S-R. Kim and R. Lundgren, *Domination graphs of regular tournaments*, Discrete Math. **252** (2002) 57-71.
- [FGLMR01] D. C. Fisher, D. Guichard, J. R. Lundgren, S. K. Merz and K. B. Reid, *Domination graphs whith nontrivial components*, Graphs Combin. **17** (2001) 227-236.
- [FL99] D. C. Fisher and J. R. Lundgren, *Connected domination graphs of tournaments*, J. Combin. Math. Combin. Comp. **31** (1999) 169-176.
- [FLMR98] D. C. Fisher, J. R. Lundgren, S. K. Merz and K. B. Reid, *The domination and competition graphs of a tournament* J. Graph Theory **29** (1998) 103-110.
- [GSNL00] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *A class of tight circulant tournaments*, Discuss. Math. Graph Theory **20** (2000) 190-228.

- [LIO07] B. Llano and M. Olsen, *Infinite families of tight regular tournaments* Discuss. Math. Graph Theory, **27** (2007) 299-311.
- [LINL07] B. Llano and V. Neumann-Lara, *Circulante tournaments of prime order are tight*, Discrete Math. (2007), Por aparecer.
- [MJW68] J. W. Moon, *Topics on Tournamets*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1968.
- [NL82] V. Neumann-Lara, *The dichromatic number of a digraph*, J. Combin. Theory (B) **33** (1982) 256-270.
- [NL99] V. Neumann-Lara, *The acyclic disconnection of a digraph*, Discrete Math. **197/198** (1999) 617-632.
- [NLO] V. Neumann-Lara and M. Olsen, *Tame tournaments and their dichromatic number*, (submitted).
- [R04] K. B. Reid, *Tournaments*, in: Jonathan Gross, Jay Yellen (eds.), Handbook of Graph Theory (CRC Press, 2004) 156-182
- [CD] Combinatorial Data, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html>