División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Ultrafiltros y $0^\sharp$

por Édgar Alonso Valenzuela Nuncio

Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Asesor Dr. Luis Miguel Villegas Silva

Sinodales
Dr. Luis Miguel Villegas Silva
Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez
Dr. Héctor Gabriel Salazar Pedroza.

Presentada en la UAM Unidad Iztapalapa,
en el edificio AT salón AT-003.
El día 21 de noviembre del año 2019 a las 14:00.

Índice general

A mi bonita.

Agradecimientos

Quiero agradecer a CONACYT por el soporte económico brindado que ha sido medular para la continuación de mis estudios. Igual de importantes han sido las horas de discución y corrección brindadas por mi director el Doctor Luis Miguel Villegas Silva. También agradezco sobremanera el tiempo, las correcciones y las observaciones de mis sinodales el Doctor Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez y el Doctor Héctor Gabriel Salazar Pedroza. Así como al Doctor Jouko Väänanen de la Universidad de Helsinki por la revisión del documento. Finalmente agradezco al núcleo académico de la Maestría en Ciencias (Matemáticas) de la Universidad Autónoma Metropolitana por la fundamental labor en mi formación como científico.

PRÓLOGO

La relación entre $0^\sharp$ y la existencia de un ultrafiltro κ-completo, o bien normal, es bien conocida: con un L-ultrafiltro iterable generamos una sucesión $\langle \kappa_\alpha : \alpha \in Or \rangle$ de indiscernibles para L. Pero el lazo entre ultrafiltros y $0^\sharp$ es más amplio. Con hipótesis de ultrafiltros "más débiles" podemos generar a $0^\sharp$. Este trabajo explora la relación de ultrafiltros y $0^\sharp$, está basado en los estudios llevados a cabo en los años 70 por Silver [22], Ketonen [12], Kanamori [9], [10], Prikry [18], Jensen y Koppelberg [6]; además de presentar resultados de la teoría de ultrafiltros por su interés en solitario.

El trabajo comienza enunciando resultados de teoría de ultrafiltros, muchos de los cuales se usan en el capítulo 2 para probar resultados relativos a $0^\sharp$ y a la teoría de grandes cardinales. Este primer capítulo comienza con una breve sección de filtros normales débiles; aquí enfatizamos la diferencia entre normal y normal débil, aunque el nombre sugiera que normal débil es una consecuencia de normalidad, enfatizamos que este no es el caso. Después pasamos a la sección 1.2 dedicada a la desmontabilidad, donde además trabajamos con filtros descendientemente incompletos, mostrando su equivalencia con desmontabilidad bajo una restricción de regularidad, lema 1.2.2. Asimismo se establecen muchas de las bases para el capítulo 2, sección 1, se obtienen resultados de grandes cardinales, lemas 1.2.11 y 1.2.13, y deducimos que la convergencia de sucesiones se traduce al ultraproducto bajo ultrafiltros no desmontables, lema 1.2.12.

El capítulo termina con una sección dedicada a la regularidad de ultrafiltros donde se fundamenta mucho del capítulo 2, secciones 2 y 3. Se especifican conclusiones de inaccesibilidad bajo irregularidad teorema 1.3.11. Esta sección cierra con un apartado que trata la irregularidad con nociones de ideales, donde generalizamos el lema 1.3.2. vía el lema 1.3.22.

En el segundo capítulo se prueban resultados relativos a $0^\sharp$. Para este fin lo definimos y enunciamos un teorema fundamental que provee mucho entendimiento sobre $0^\sharp$.

Definición. $0^\sharp$ *es una sucesión (clase) de cardinales indiscernibles para* L*, es decir* $0^\sharp = \langle \kappa_\alpha \mid \alpha \in Or\rangle$*, donde para cada fórmula de primer orden* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *y cualesquiera dos subsucesiones de* $0^\sharp$*,* $\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}, \kappa_{\beta_1}, \ldots, \kappa_{\beta_n}$ *tenemos*

$$(\varphi[\vec{\kappa}_\alpha] \leftrightarrow \varphi[\vec{\kappa}_\beta])^L.$$

Teorema (Kunen [15])**.** *Los siguientes son equivalentes:*

1. *Existe* $0^\sharp$*.*
2. *Existe un encaje elemental* $j : L \prec L$*.*
3. *Existen* α, β *y* $j : L_\alpha \prec L_\beta$*, con* $crit(j) \leq |\alpha|$*.*
4. *Existe un* L*-ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *con* $Ult(L,\mathcal{U})$ *está bien fundado.*
5. *Existe un* L*-ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *iterable.*
6. *Existe un* L*-ultrafiltro* $\mathcal{U}$ ω_1*-completo.*

Ejemplo. Si κ es medible, es decir tenemos un ultrafiltro κ-completo $\mathcal{U}$ en κ entonces $\langle L^1,\mathcal{U}_1\rangle = Ult(L,\mathcal{U})$ está bien fundada, podemos pensarla como transitiva, $\pi_{01} : \langle L, \in,\mathcal{U}\rangle \prec \langle L^1,\mathcal{U}_1\rangle$ tiene punto crítico κ y hacemos $\kappa_1 = \pi(\kappa), \kappa_0 = \kappa$. Entonces $\mathcal{U}_0 = \{X \subset \kappa_0 \mid \kappa_0 \in \pi_{01}(X)\} = \mathcal{U}$. Luego resulta que $\mathcal{U}_1$ tiene que ser un ultrafiltro κ_1-completo en κ_1 y podemos volver a aplicar la operación de ultrapotencia para obtener $Ult(L^1,\mathcal{U}_1) = \langle L^2,\mathcal{U}_2\rangle$ y $\mathcal{U}_1 = \{X \subset \kappa_1 \mid \kappa_1 \in \pi_{12}(X)\}$. Luego podemos repetir esto con $\mathcal{U}_2$; y continuar esto ad infinitum. Al llegar a la etapa ω tomamos el producto directo de los niveles anterior y este resultará en una estructura $\langle L,\mathcal{U}_\omega\rangle$ que se puede probar que es transitiva y entonces continuamos con la etapa $\omega + 1$... Así, para cualquier ordinal α podemos encontrar $\mathcal{U}_\alpha, \kappa_\alpha$ donde $\mathcal{U}_\alpha$ es un ultrafiltro κ_α-completo en κ_α. La sucesión resultante $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha \in Or\rangle$ resulta una clase de indiscernibles para L.[1] Y esta,

[1] Es decir una clase tal que para cualquier $\in$-fórmula tenemos

$$\varphi^L[\kappa_{\xi_1}, \ldots, \kappa_{\xi_n}] \leftrightarrow \varphi^L[\kappa_{\zeta_1}, \ldots, \kappa_{\zeta_n}]$$

para cualesquier $\vec{\xi}, \vec{\zeta}$. Es decir que son lógicamente indistinguibles.

como ya se mencionó, es una de las representaciones que se le suele dar a $0^\sharp$.

Ya conociendo estas equivalencias de $0^\sharp$ la idea para la deducción de $0^\sharp$ es sencilla. En el capítulo 2, tomamos un ultrafiltro no desmontable $\mathcal{D}$ en un cardinal inaccesible κ generamos la ultrapotencia $M = L^\kappa/\mathcal{D}$ de L con este ultrafiltro y encontramos un M-ultrafiltro ω_1-completo. Luego el teorema de Łoś, véase el teorema 2.8.3 del ápendice, nos permite encontrar un L-ultrafiltro ω_1-completo. Vimos en el ejemplo que la idea, cuando está bien fundada, es colapsar nuestra estructura a una transitiva; podemos tomar esta idea pero en lugar de colapsar a una estructura transitiva colapsamos a algo más maleable, i.e. encontraremos una estructura más familiar y un isomorfismo entre la ultrapotencia y dicha estructura. Así obtenemos:

$$L^\kappa/\mathcal{D} \simeq L^\omega/\mathcal{U}$$

donde $\mathcal{D}$ no es desmontable sobre κ y $\mathcal{U}$ "codifica" a $\mathcal{D}$ en ω. Esto nos dará la herramienta final para probar

Teorema. *Si κ es inaccesible fuerte y $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es un ultrafiltro no desmontable sobre κ, entonces $0^\sharp$ existe.*

Siguiendo este método de Silver, [22], el capítulo continua tomando κ regular y un ultrafiltro normal débil y (μ, κ)-irregular $\mathcal{D}$, donde $\mu < \kappa$. Luego formamos una reducción $Ult^*(L, \mathcal{D})$ de la ultrapotencia $Ult(L, \mathcal{D}) = \{f \mid f : \kappa \to L \wedge f \in L\}$, de tal forma que

$$Ult^*(L, \mathcal{D}) \prec Ult(L, \mathcal{D})$$

Esto nos permitirá probar que κ es inaccesible en L y usar esto para ulteriormente probar el siguiente resultado:

Teorema. *Sea κ regular. Si κ posee un ultrafiltro $\mathcal{D}$ que es normal débil y (μ, κ)-irregular para todo $\mu < \kappa$ entonces $0^\sharp$ existe.*

En ambos casos nuestro ultrafiltro $\mathcal{D}$ no es κ-completo, por lo cual no podemos asegurar que la ultrapotencia M esté bien fundada. Con este fin definimos los M-ultrafiltros cuando M no está bien fundada.

Definición. *Dado M un ϵ-modelo de ZF. Decimos que $\mathcal{U}$ es un M-ultrafiltro en μ cuando*

- $M \models \mu$ es un cardinal.

- $M \models x, y \subset \mu \to \big((x \subset y \wedge x\epsilon\mathcal{U} \to y\epsilon\mathcal{U}) \wedge (x, y\epsilon\mathcal{U} \to x \cap y\epsilon\mathcal{U}) \wedge (x\epsilon\mathcal{U} \leftrightarrow \neg\mu \setminus x\epsilon\mathcal{U}) \wedge |x| = \mu\big)$.
- $M \models Fun(f) \wedge dom(f) = \mu \to (\exists c)c = \{\xi\epsilon\mu \mid f(\xi) \in \mathcal{U}\}$.
- $M \models Fun(f) \wedge dom(f) = \mu \wedge \{\xi < \mu \mid f(\xi)\epsilon\xi\} \in \mathcal{U} \to (\exists y\epsilon\mu) f^{-1}[\{y\}] \in \mathcal{U}$.
- $M \models \nu\epsilon\mu \wedge \{x_\xi \mid \xi\epsilon\nu\} \subset \mathcal{U} \to \bigcap_{\xi\epsilon\nu} x_\xi \in \mathcal{U}$

Otra equivalencia renombrada de $0^\sharp$ es:

Teorema (Jensen)**.** *Las siguientes son equivalentes:*

1. *No existe* $0^\sharp$.
2. *Para cada conjunto* $X \subset Or$ *existe* $Y \in L$ *tal que* $X \subset Y$ *y* $|Y| \leq |X| + \aleph_1$.
3. *Si* $\pi : L \to L$ *es un encaje elemental entonces* $\pi = id$.

Este resultado se conoce como el lema de Cubierta de Jensen. Usamos una consecuencia de este lema para probar la existencia de $0^\sharp$ con un plan más simple: por contrapositiva, pensamos que no existe $0^\sharp$ y entonces obtenemos, usando ideas de Ketonen y Benda en [14], que ciertos ultrafiltros no pueden existir bajo esta hipótesis.

Aparte de estudiar $0^\sharp$ se exploran las relaciones entre ultrafiltros y grandes cardinales (no necesariamente medibles). Ketonen [12] prueba inefabilidad en L cuando κ posee un ultrafiltro con gran grado de irregularidad. Jensen [6] usa una variante de su método para probar el mismo resultado y extenderlo a

Teorema. *Pensemos que* $2^{\underset{\smile}{\kappa}} = \kappa$. *Sea* $\gamma < \kappa$ *y* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro* (γ^+, κ)*-regular pero no* (γ, κ)*-regular. Entonces* κ *es inefable en* L.

Usando las técnicas de Jensen [6] fortalecemos ambos resultados mostrando que κ es inefable completo.

Notación

Cuando tratamos con estructuras, digamos $\mathcal{A}$ una estructura en un cierto vocabulario, denotamos como A su dominio, es decir $\mathcal{A} = \langle A, \langle f_\iota \rangle_{\iota < \mu} \rangle$. Si tenemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en κ y una sucesión de clases $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$, pudiendo ser clases propias, denotamos como $\prod X_\xi/\mathcal{U}$ o bien $\prod_\mathcal{U} X_\xi$, al ultraproducto usual de las clases. Si la sucesión fuera constante denotamos la ultrapotencia como $\prod_\mathcal{U} X = \prod X/\mathcal{U} = X^\kappa/\mathcal{U} = X^\kappa_\mathcal{U}$. A sus clases de equivalencia las escribimos como $[f]_\mathcal{U} = \{g : \kappa \to \bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi \mid g(\xi) \in X_\xi \wedge \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}\}$ y si el contexto nos lo permite como $[f]$.

En la literatura es común referirse a un ultrafiltro normal – sobre κ – como normal y κ-completo. Aquí se abordarán la completud y la normalidad de forma independiente. Por lo demás, la notación y los conceptos básicos son las habituales. Cualquier duda en la notación remitimos al lector al apéndice.

Capítulo 1

TEORÍA DE ULTRAFILTROS

1.1. Normalidad Débil.

La mayor parte de estos resultados son debidos a Kanamori [10] y [9].

Para definir normalidad débil primero especificamos en qué condiciones una función no está acotada y lo que es una primera función, módulo el filtro. Como convención pensaremos que cualquier cardinal κ es regular y cualquier filtro $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\kappa)$, a menos que se diga lo contrario, contiene a los segmentos finales $\{\xi < \kappa \mid \alpha < \xi\}$, $\alpha < \kappa$.

Definición. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre κ; decimos que $f : \kappa \to \kappa$ no está acotada si para cada $\eta < \kappa$ el conjunto $\{\xi < \kappa \mid \eta < f(\xi)\}$ tiene medida positiva (módulo $\mathcal{F}$)*[1]*. Y decimos que $f : \kappa \to \kappa$ es una primera función, módulo $\mathcal{F}$, cuando no está acotada pero si $g : \kappa \to \kappa$ es tal que $\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < f(\xi)\} \in \mathcal{F}$ entonces g está acotada*[2]*, según $\mathcal{F}$.*

Definición. *Decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro normal débil si cualquier $f : \kappa \to \kappa$ regresiva, módulo $\mathcal{F}$, está acotada.*

Equivalentemente, $\mathcal{F}$ es normal débil si $id : \kappa \to \kappa$ es una primera función para $\mathcal{F}$: si $id : \kappa \to \kappa$ es una primera función entonces

[1] X tiene medida positiva según $\mathcal{F}$ si para cada $Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y \neq \emptyset$.

[2] Decimos que f está acotada según $\mathcal{F}$, si no es el caso que no esté acotada, es decir que existe $\eta < \kappa$ tal que $X = \{\xi < \kappa \mid \eta < f(\xi)\}$ no tiene medida positiva, por tanto existe $S \in \mathcal{F}$ tal que $S \cap X = \emptyset$, es decir $S \subset \kappa \setminus X$, de lo cual se deduce $\kappa \setminus \mathcal{F} = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \eta\} \in \mathcal{F}$

cualquier f con $[f] < [id] \leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\}$ está acotada. Y el argumento es reversible.

Nota. Destacamos que normalidad no necesariamente implica normalidad débil. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro normal en κ entonces es normal débil, pero si $\mathcal{F}$ solo es un filtro esta implicación no es necesaria. Para ver qué es lo que falla utilizamos una equivalencia de normalidad. Sea $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro normal, esto es

$$\text{para } \{X_\xi \mid \xi < \kappa\} \subset \mathcal{F} \text{ tenemos,}$$
$$\triangle_{\xi<\kappa} X_\xi \in \mathcal{F}.$$

Sea $f : \kappa \to \kappa$ regresiva en un conjunto $X \in \mathcal{F}$. Supongamos que no es normal débil, así que no existe $\eta < \kappa$ tal que $X_\eta = f^{-1}[\eta] \in \mathcal{F}$,

$$\textit{es decir para cada } \eta < \kappa, \kappa \setminus X_\eta \in \mathcal{U} \tag{✻}$$

y por tanto $\triangle_{\eta<\kappa}(\kappa \setminus X_\eta) \in \mathcal{F}$. Sea $\alpha \in X \cap \triangle_{\eta<\kappa}(\kappa \setminus X_\eta)$, entonces

$$f(\alpha) < \alpha \wedge \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} (\kappa \setminus X_\xi)$$

Pero $\kappa \setminus X_\xi = \kappa \setminus f^{-1}[\xi] = f^{-1}[\kappa \setminus \xi] = f^{-1}[[\xi, \kappa)]$ así que $\bigcap_{\xi<\alpha}(\kappa \setminus X_\xi) = \bigcap_{\xi<\alpha} f^{-1}[[\xi,\kappa)] = f^{-1}[\bigcap_{\xi<\alpha}[\xi,\kappa)] = f^{-1}[[\alpha,\kappa)]$, por tanto $\alpha \in f^{-1}[[\alpha,\kappa)]$ es decir que $f(\alpha) \in [\alpha,\kappa)$, una contradicción. Se sigue que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es normal débil.

Si $\mathcal{F}$ no es ultrafiltro, (✻) no necesariamente se satisface, además $\{\xi < \kappa \mid \eta < f(\xi)\}$ y $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \eta\}$ podrían tener medida positiva, lo cual imposibilita la ocurrencia de la normalidad débil.

Luego veremos que al tomar tal κ suponiendo la *HGC* entonces κ resulta ser inaccesible y además es ω-Mahlo.

Lema 1.1.1. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en κ con una primera función $f : \kappa \to \kappa$ entonces $\mathcal{D} = \{X \subset \kappa \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$ es normal débil.*

Demostración. Sea $g : \kappa \to \kappa$ regresiva según $\mathcal{D}$. Entonces $f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\}] \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\}] = \{\xi < \kappa \mid (\exists \zeta < \kappa)(\xi = f(\zeta) \wedge g(\xi) < \xi)\} = \{\zeta < \kappa \mid g(f(\zeta)) < f(\zeta)\}$, por hipótesis $g \circ f$ está acotada módulo $\mathcal{U}$. Digamos que $[g \circ f]_\mathcal{U} \leq [\eta]_\mathcal{U}$, luego

$$\{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) \leq \eta\} \in \mathcal{U}.$$

Pero

$$\{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) \leq \eta\} = f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) \leq \eta\}],$$

por lo cual

$$\{\xi < \kappa \mid g(\xi) \leq \eta\} \in \mathcal{D}$$

es decir que g está acotada según $\mathcal{D}$. □

Antes de pasar a diferentes caracterizaciones de los filtros normales débiles definimos un concepto que resultará equivalente:

Definición. *Decimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es un filtro p-punto si cualquier función $f : \kappa \to \kappa$ no acotada módulo $\mathcal{F}$ satisface que: existe X de medida positiva tal que para cada $\xi < \kappa$ $|f^{-1}[\{\xi\}] \cap X| < \kappa$.*

Nota. Ser p-punto es equivalente a la siguiente afirmación: Para cualquier partición $\{P_\xi \mid \xi < \kappa\}$ que satisface $|\{\xi < \kappa \mid P_\xi \cap X\}| = \kappa$ para $X \in \mathcal{F}$ arbitrario podemos encontrar Y de medida positiva con $|Y \cap P_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < \kappa$.

Porque si $f : \kappa \to \kappa$ no está acotada módulo $\mathcal{F}$ podemos encontrar X de medida positiva tal que $|f^{-1}[\{\xi\}] \cap X| < \kappa$ para $\xi < \kappa$ y entonces la partición $P_\xi = f^{-1}[\{\xi\}]$ de κ es tal que $|\{\xi < \kappa \mid P_\xi \cap Z\}| = \kappa, Z \in \mathcal{F}$ porque f no está acotada. Aún más, por definición de P_ξ: $|P_\xi \cap X| < \kappa$ para $\xi < \kappa$.

Y si $\{P_\xi \mid \xi < \kappa\}$ es una partición como antes entonces $f : \kappa \to \kappa$ definida como $f(\alpha) = \xi$ si y solo si $\xi \in P_\alpha$ no está acotada porque $P_\xi = f^{-1}[\{\xi\}], |\{\xi < \kappa \mid f^{-1}[\{\xi\}] \cap X\}| = \kappa$ para $X \in \mathcal{F}$ y $|P_\xi \cap X| < \kappa$ para $\xi < \kappa$ por hipótesis.

Proposición 1.1.2. *Sea κ un cardinal y $\mathcal{F}$ un filtro en κ. Las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es normal débil.*
2. *Cualquier extensión de $\mathcal{F}$ es normal débil.*
3. *Si $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ es una sucesión de conjuntos de medida positiva que además es decreciente entonces $\triangle_{\xi<\kappa} X_\xi = \{\zeta < \kappa \mid \xi < \zeta \to \zeta \in X_\xi\}$ tiene medida positiva.*
4. *$\mathcal{F}$ es un p-punto que extiende a $\mathcal{C}_\kappa$, el filtro club.*

Demostración. $1 \to 2$. Sean $\mathcal{D}$ un filtro extendiendo a $\mathcal{F}$ y $f : \kappa \to \kappa$ regresiva en algún $X \in \mathcal{D}$. Definimos $g : \kappa \to \kappa$ como

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & cuando\ \xi \in X \\ 0 & de\ otra\ forma \end{cases}$$

g es regresiva en $(0,k) \in \mathcal{F}$, por tanto g es regresiva módulo $\mathcal{F}$ y existe $\eta < \kappa$ con $Y = \{\xi < \kappa \mid g(\xi) \leq \eta\} \in \mathcal{F}$. (Para ver que de hecho pertenece a $\mathcal{F}$, en principio solo sabemos que su complemento $\kappa \setminus Y = \{\xi < \kappa : g(\xi) > \eta\}$ no tiene medida positiva módulo $\mathcal{F}$, entonces existe $S \in \mathcal{F}$ con $\kappa \backslash Y \subset \kappa \backslash S$, es decir que $S \subset Y$, por tanto $Y \in \mathcal{F}$). Luego $Y \in \mathcal{D}$, entonces g está acotada según $\mathcal{D}$, aún más $(X \cap Y) \subset \{\xi < \kappa \mid f(x) \leq \eta\}$, por tanto $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \eta\} \in \mathcal{D}$. Y f resulta acotada según $\mathcal{D}$.

$2 \to 3$. Sean $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ como en 3 y $\mathcal{D}$ el filtro generado por[3] $\mathcal{F} \cup \{X_\xi \mid \xi < \kappa\}$; entonces $\mathcal{D}$ es normal débil. Supongamos que la intersección diagonal no tiene medida positiva, entonces $Y = \{\zeta < \kappa \mid (\exists \xi < \zeta)\zeta \notin X_\xi\} \in \mathcal{D}$ y definamos $f : Y \to \kappa$ de tal forma que $f(\xi)$ atestigüe que $\xi \in Y$, es decir $f(\xi) < \xi$ es tal que $\xi \notin X_{f(\xi)}$. Como f es regresiva según $\mathcal{D}$ entonces resulta estar acotada en algún $Z \in \mathcal{D}$, sin perder la generalidad pensemos que $Z = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \gamma\}$. Sea $\delta > \gamma$, entonces $Z \cap Y \cap X_\delta \subset Z \cap Y \cap X_\gamma$; tomemos $\alpha \in Z \cap Y \cap X_\delta$ luego

$$f(\alpha) \leq \gamma \ \wedge (f(\alpha) < \alpha \wedge \alpha \notin X_{f(\alpha)}) \wedge \alpha \in X_\delta$$

que implica que

$$f(\alpha) \leq \gamma \ \wedge (f(\alpha) < \alpha \wedge \alpha \notin X_{f(\alpha)}) \wedge \alpha \in X_\gamma.$$

Pero $X_\gamma \subset X_{f(\alpha)}$, entonces resulta una contradicción.

$3 \to 4$. Primero mostremos que es un p-punto. Tomemos $f : \kappa \to \kappa$ no acotada módulo $\mathcal{F}$ y $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ como $X_\xi = \{\zeta < \kappa \mid \xi < f(\zeta)\}$, que es una sucesión decreciente y todos sus términos son de medida positiva. Entonces $X = \triangle_{\xi<\kappa} X_\xi$ es de medida positiva y para $\xi \in f^{-1}[\{\alpha\}] \cap X$, tenemos $f(\xi) = \alpha \wedge (\zeta < \xi \to \xi \in X_\zeta)$ que equivale a $\zeta < \xi \to \zeta < f(\xi) = \alpha$, es decir $\xi \leq \alpha$, así que $|f^{-1}[\{\alpha\}] \cap X| \leq \alpha < \kappa$. Ahora pensemos que no extiende al filtro club. Por tanto existe un club $C \notin \mathcal{F}$ y de este club hacemos $Y = \kappa \setminus C$ que es de medida positiva. Definamos $f : \kappa \to \kappa$ como $f(\xi) = \sup(\xi \cap C)$ que es regresiva en Y y además $|f^{-1}[\{\xi\}]| \leq \xi < \kappa$ para $\xi \in Y$. Tomando $\triangle_{\xi<\kappa}(X_\xi \cap Y) = \triangle_{\xi<\kappa}\{\zeta \in Y \mid \xi < f(\zeta)\}$ como antes, sabemos que tiene medida positiva porque al tomar $\alpha < \kappa$ siendo C un club podemos encontrar $\alpha < \xi \in C$, de lo cual se deduce inmediatamente que $f(\zeta) \geq \xi > \alpha$ para $\zeta > \xi$.

[3]Como cada X_ξ es de medida positiva entonces satisface la propiedad de intersección finita, además $X_\xi \cap X_\zeta = X_{\text{máx}\{\xi,\zeta\}}$.

Pero si $\zeta \in \triangle_{\xi<\kappa}(X_\xi \cap Y)$ entonces $\zeta \in \bigcap_{\xi<\zeta}(X_\xi \cap Y)$ que implica $(\forall \xi < \zeta)(\zeta \in Y \wedge \xi < f(\zeta))$, que a su vez implica $\zeta \leq \bigcup_{\xi<\zeta} \xi \leq f(\zeta)$ para ζ, lo cual contradice la que f sea regresiva en Y.

$4 \to 1$. Tomemos $f : \kappa \to \kappa$ regresiva. Piénsese que no está acotada, entonces para cada $\xi < \kappa$ el conjunto $X_\xi = \{\alpha < \kappa \mid \xi < f(\alpha)\}$ tiene medida positiva. Como $\mathcal{F}$ es p-punto podemos encontrar Y de medida positiva con $|f^{-1}[\{\alpha\}] \cap Y| < \kappa$ para $\alpha < \kappa$. Al ser Y de medida positiva y $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}_\kappa$, Y debe ser estacionario y como f es regresiva entonces debe ser constante en algún $S \subset Y$ estacionario, lo cual contradice que $|f^{-1}[\{\alpha\}] \cap Y| < \kappa$. □

Definición. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en κ. Decimos que $\mathcal{I}$ es ρ-saturado si en el álgebra cociente $\mathcal{P}(\kappa)/\mathcal{I} = \{[Y] \mid Y \subset \kappa \wedge [Y] = \{X \subset \kappa \mid X \triangle Y \in \mathcal{I}\}\}$ para cualquier familia de conjuntos ajenos $\{[X_\xi] \mid \xi < \rho\}$ podemos encontrar $\xi < \rho$ con $[X_\xi] = [0]$.*

Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es ρ-saturado si su ideal asociado lo es.

Veamos que esta definición es equivalente a una con familias casi ajenas módulo[4] $\mathcal{I}$:

Lema 1.1.3. *$\mathcal{I}$ es λ-saturado cuando y solo cuando para cualquier familia casi ajena según $\mathcal{I}$, $\{X_\xi \mid \xi < \lambda\}$ podemos encontrar $\zeta < \lambda$ con $X_\zeta \in \mathcal{I}$.*

Demostración. Primero notamos que

$$[X] \cap [Y] = [0] \leftrightarrow [X \cap Y] = [0] \leftrightarrow (X \cap Y) \triangle 0 \in \mathcal{I}, \text{ pero}$$
$$(X \cap Y) \triangle 0 = ((X \cap Y) \setminus 0) \cup (0 \setminus (X \cap Y)) = (X \cap Y) \cup 0 = X \cap Y,$$

entonces es equivalente a que $X \cap Y \in \mathcal{I}$. Pensemos que $\mathcal{I}$ es λ-saturado. Entonces si $\{X_\xi \mid \xi < \lambda\}$ es casi ajena según $\mathcal{I}$, tenemos $[X_\xi] \cap [X_\zeta] = [0]$ para toda $\xi < \zeta < \lambda$ así que es ajena en el álgebra cociente y por λ-saturación podemos encontrar $\xi < \lambda$ con $[X_\xi] = [0]$ es decir que $X_\xi \cap X_\xi = X_\xi \in \mathcal{I}$.

Y ahora supongamos que cualquier familia casi ajena cumple lo estipulado. Sea $\{[X_\xi] \mid \xi < \lambda\}$ ajena en el álgebra cociente. Como $[X_\xi] \cap [X_\zeta] = [0]$ tenemos $X_\xi \cap X_\zeta \in \mathcal{I}$, así que $\{X_\xi \mid \xi < \lambda\}$ es casi ajena según $\mathcal{I}$. Por tanto podemos encontrar $\xi < \lambda$ con $X_\xi \in \mathcal{I}$, es decir que $X_\xi \triangle 0 = X_\in \in \mathcal{I}$ y $[X_\xi] = [0]$ □

Notemos que cualquier familia ajena es casi ajena módulo $\mathcal{I}$ ya que $\emptyset \in \mathcal{I}$. Así, obtenemos

[4] X, Y son casi ajenos módulo $\mathcal{I}$ cuando $X \cap Y \in \mathcal{I}$.

Corolario 1.1.4. Si $\mathcal{I}$ es un ideal κ-completo y $\lambda \leq \kappa$ entonces las siguientes son equivalentes:

1. $\mathcal{I}$ es λ-saturado

2. para cualquier familia ajena $\{X_\xi \mid \xi < \lambda\}$ podemos encontrar $\xi < \lambda$ con $X_\xi \in \mathcal{I}$

Demostración. $1 \to 2$ es inmediato de la observación previa al corolario.
$2 \to 1$. Pensemos que se cumple 2. Usamos la equivalencia del lema anterior. Sea $\{Y_\xi \mid \xi < \lambda\}$ casi ajena módulo $\mathcal{I}$. Definimos $X_\xi = Y_\xi \setminus \bigcup_{\iota<\xi} Y_\iota$, entonces es ajena y por hipótesis existe $\xi < \lambda$ con $X_\xi \in \mathcal{I}$. Pero por definición de X_ξ: $Y_\xi \subset X_\xi \cup \bigcup_{\iota<\xi}(Y_\iota \cap Y_\xi)$ además $Y_\iota \cap Y_\xi \in \mathcal{I}$, gracias a que $\{Y_\xi \mid \xi < \lambda\}$ es una familia casi ajena módulo $\mathcal{I}$. Luego, gracias a la κ-completud $\bigcup_\iota (Y_\xi \cap Y_\xi) \in \mathcal{I}$ y por tanto Y_ξ es subconjunto de un elemento de $\mathcal{I}$ así que $Y_\xi \in \mathcal{I}$, para este mismo ξ. □

Teorema 1.1.5. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro κ-completo sobre κ. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es normal débil.*

2. *$\mathcal{F}$ es normal y κ-saturado.*

Demostración. $1 \to 2$. Sea $f : \kappa \to \kappa$ regresiva, por hipótesis existe $\alpha < \kappa$ de tal forma que $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \alpha\}$ tiene medida positiva. Hagamos $X_\zeta = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \zeta\}$ para $\zeta < \alpha$. Por κ-completud, como $\bigcup_{\zeta<\alpha} X_\zeta = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \alpha\}$ tiene medida positiva, podemos encontrar $\zeta < \alpha$ tal que X_ζ tiene medida positiva. Para ver la κ-saturación pensemos que no ocurre: sea $\langle P_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ una partición de κ tal que cada P_α tiene medida positiva. Podemos pensar que si $\xi \in P_\alpha$ entonces $\xi > \alpha$, porque al tener medida positiva intersectan a cada club en κ entonces son estacionarios aún más, no están acotados. Definamos $g(\xi) = \alpha$ cuando y solo cuando $\xi \in P_\alpha$, entonces $g(\xi) < \xi$, así que la función debe estar acotada: existe $\eta < \kappa$ de tal manera que $Y = \{\xi < \kappa \mid g(\xi) \leq \eta\}$ tiene medida positiva, pero g no está acotada.

$2 \to 1$. Sea $f : \kappa \to \kappa$ regresiva. $M = \{\xi < \kappa \mid f^{-1}(\{\alpha\})$ tiene medida positiva$\}$. Por κ-saturación $|M| < \kappa$, sea $\sup M = \eta$. Afirmamos $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \eta\} \in \mathcal{F}$; si este no fuera el caso,

$\{\xi < \kappa \mid \xi > f(\xi) > \eta\}$ tiene medida positiva y por normalidad existe $\eta < \rho < \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\rho\})$ tiene medida positiva, pero ningún $\zeta > \eta$ satisface esto por definición de $\eta = \sup M$. $\square$

1.2. Desmontabilidad y un Grado de Completud.

Definición. *Sea κ un cardinal. Decimos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es λ-desmontable si existe $\langle I_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$, con $\bigcup_{\xi<\lambda} I_\xi \in \mathcal{U}$, tal que para $S \subset \lambda$, $|S| < \lambda$ arbitrario, $\bigcup_{\xi\in S} I_\xi \notin \mathcal{U}$. Decimos que $\mathcal{U}$ no es desmontable cuando no lo es para ningún $\lambda < \kappa$ y es uniforme.*

Equivalentemente, $\mathcal{U}$ no es desmontable si podemos encontrar $C \subset \kappa$ numerable con $\bigcup_{\xi\in C} I_\xi \in \mathcal{U}$. Pensemos que $\mathcal{U}$ no es desmontable. Sean $\lambda < \kappa$ y $\bigcup_{\xi<\lambda} I_\xi \in \mathcal{U}$. Si S_0 es tal que $|S_0| < \lambda$ y $\bigcup_{\xi\in S_0} I_\xi \in \mathcal{U}$, siendo $\mathcal{U}$ no desmontable podemos encontrar S_1 con $|S_1| < |S_0|$ y $\bigcup_{\xi\in S_1} I_\xi \in \mathcal{U}$. En general, por recursión definimos: si $\omega < |S_\zeta| < |S_\xi|$ para $\xi < \zeta$ entonces podemos encontrar $S_{\zeta+1} \subset S_\zeta$ con $\omega \leq |S_{\zeta+1}| < |S_\zeta|$. Cuando λ es límite y $\omega < |S_\xi|$ para cada $\xi < \lambda$ podemos encontrar S_λ con $\omega \leq |S_\lambda| < |S_\xi|$ para toda $\xi < \lambda$. Así generamos una sucesión $\langle S_\xi \mid \xi < \mu + 1\rangle$, para algún $\mu < \kappa$ y $|S_\mu| = \omega$.

A la inversa, si $\bigcup_{\xi<\lambda} I_\xi \in \mathcal{U}$ y $C \subset \lambda$ es numerable con $\bigcup_{\xi\in C} I_\xi \in \mathcal{U}$ entonces para cualquier $\omega < \lambda < \kappa$, $|C| < \lambda$ satisface que $\mathcal{U}$ no es λ-desmontable.

Si tenemos una partición $\langle I_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ en κ y $\mathcal{U}$ no es desmontable, entonces podemos "traducir" este ultrafiltro a uno en λ: $\mathcal{D} = \{S \subset \lambda \mid \bigcup_{\xi\in S} I_\xi \in \mathcal{U}\}$. Primero por ser no desmontable esto no es vacío. Luego, sean $X \in \mathcal{D}$ y $X \subset Y$, entonces

$$\bigcup_{\xi\in X} I_\xi \subset \bigcup_{\xi\in Y} I_\xi \to \bigcup_{\xi\in Y} I_\xi \in \mathcal{U}.$$

Así que $Y \in \mathcal{D}$. Ahora si $X, Y \in \mathcal{D}$, entonces

$$\bigcup_{\xi\in X} I_\xi \cap \bigcup_{\xi\in Y} I_\xi \in \mathcal{U}$$

Luego:

$$\begin{gathered}\alpha \in \bigcup_{\xi\in X} I_\xi \cap \bigcup_{\xi\in Y} I_\xi \text{ si y solo si}\\ \alpha \in \bigcup_{\xi\in X} I_\xi \wedge \alpha \in \bigcup_{\xi\in Y} I_\xi \text{ si y solo si}\\ (\exists\xi \in X)\alpha \in I_\xi \wedge (\exists\chi \in Y)\alpha \in I_\chi\end{gathered}$$

Tomando tales $\xi \in X, \chi \in Y$, resulta $\alpha \in I_\xi \cap I_\chi$, pero los I_β forman una partición, entonces $\xi = \chi$. Así que resulta equivalente a $(\exists \xi \in X \cap Y)\alpha \in I_\xi$. Por lo cual $X \cap Y \in \mathcal{D}$. Finalmente si $\lambda \setminus X \notin \mathcal{D}$, entonces $\bigcup_{\xi \in \lambda \setminus X} I_\xi \notin \mathcal{U}$. De nuevo por propiedades de partición, $\kappa \setminus \bigcup_{\xi \in \lambda \setminus X} I_\xi = \bigcup_{\xi \in X} I_\xi \in \mathcal{U}$, de lo cual concluimos $X \in \mathcal{D}$.

Lema 1.2.1. *Sea μ cualquier cardinal y $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ no λ-desmontable para $\lambda \in (\mu, 2^{(2^\mu)^+}]$.*

- *Para $n \geq 1$, $|\prod_{\mathcal{D}} \mu^{(n)}| \leq \mu^{(n)} \cdot 2^\mu$.*
- *Para cualquier ordinal ν: $\prod_{\mathcal{D}} \nu$ no posee una sucesión decreciente de longitud $(2^\mu)^+$.*

Demostración. Lo probamos para $n = 1$. Supongamos $|\prod_{\mathcal{D}} \mu| > \mu^{(n)} \cdot 2^\mu$. Entonces podemos encontrar $f_\alpha \in {}^\kappa\mu$, $\alpha < (2^\mu)^+$ tal que para $\alpha, \beta < (2^\mu)^+$, si $\alpha \neq \beta$ entonces $[f_\alpha] \neq [f_\beta]$. Para $\xi < \kappa$ sea:

$$F_\xi = \{\{\alpha, \beta\} \mid f_\alpha(\xi) \neq f_\beta(\xi)\}.$$

Para $F \subset [(2^\mu)^+]^2$ hacemos:

$$X_F = \{\xi < \kappa \mid F = F_\xi\}.$$

De esto nace una partición de κ en a lo más $2^{(2^\mu)^+}$ partes. Sabemos que $\mathcal{D}$ no es λ-desmontable, para $\lambda \in (\mu, 2^{(2^\mu)^+}]$, entonces podemos encontrar $F^\zeta \subset [(2^\mu)^+]^2$, $\zeta < \mu$ con

$$X = \bigcup \{X_{F^\zeta} \mid \zeta < \mu\} \in \mathcal{D}.$$

Ahora nótese que $\bigcup_{\zeta < \mu} F^\zeta = [2^{(2^\mu)^+}]^2$ debido a que: para $\{\alpha, \beta\} \in [2^{(2^\mu)^+}]^2$, existe algún $\xi \in X$ tal que[5] $f_\alpha(\xi) \neq f_\beta(\xi)$. Por lo cual $\{\alpha, \beta\} \in F_\xi$. Pero, $\xi \in X$ implica la existencia de algún $\zeta < \mu$ con $\xi \in X_{F^\zeta}$. Así $F^\zeta = F_\xi$ y $\{\alpha, \beta\} \in F^\zeta$. La otra contención es inmediata.

Con la última observación podemos usar el teorema Erdős-Rado para hallar un $F \subset 2^{(2^\mu)^+}$ tal que $|F| = \mu^+$ y $[F]^2 \subset F^\zeta$, para un $\zeta < \mu$. Pero existe $\xi < \kappa$ satisfaciendo $F^\zeta = F_\xi$, de lo cual se concluye $f_\alpha(\xi) \neq f_\beta(\xi)$ para $\{\alpha, \beta\} \in [Z]^2$, por tanto μ tiene μ^+ elementos distintos, contradicción clara.

[5]Como $X \in \mathcal{D}$ e $Y = \{\xi < \kappa : f_\alpha(\xi) \neq f_\beta(\xi)\}$ se sigue que $X \cap Y \neq \emptyset$ y $\in \mathcal{D}$.

El lema se sigue notando lo siguiente.

$$\prod_{\mathcal{D}} \mu^{(n)} = \bigcup_{\nu<\mu^{(n)}} \prod_{\mathcal{D}} \nu.$$

ya que $\mathcal{D}$ no es $\mu^{(n)}$-desmontable para $n \geq 1$:

Tomemos $[f] \in \bigcup_{\nu<\mu^{(n)}} \prod_{\mathcal{D}} \nu$, entonces para algún $\nu < \mu^{(n)}$, $[f] \in \prod_{\mathcal{D}} \nu$, así $f : \kappa \to \nu$, definimos $g : \kappa \to \mu^{(n)}$:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{para } \alpha < \nu \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $[g] = [f]$, así que $[f] \in \prod_{\mathcal{D}} \mu^{(n)}$. Ahora tomemos $f : \kappa \to \mu^{(n)}$ y mostraremos que f está acotada módulo $\mathcal{D}$; esto debería bastar ya que teniéndolo podemos definir:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \alpha \in X \\ 0 & \alpha \notin X. \end{cases}$$

Donde $X \in \mathcal{D}$ hace a f acotada. Y así $[f] = [g] \in \bigcup_{\alpha<\mu^{(n)}} \prod_{\mathcal{D}} \alpha$. Sean $n \geq 1$ y $X_\alpha = \{\eta < \kappa : f(\eta) < \alpha\}$, $\alpha < \mu^{(n)}$; nótese que $\langle X_\alpha \rangle_{\alpha<\mu^{(n)}}$ es una sucesión decreciente. Al no ser $\mathcal{D}$ $\mu^{(n)}$-desmontable, existe $s \in [\mu^{(n)}]^{<\mu^{(n)}}$ con $\bigcup_{\alpha \in s} X_\alpha \in \mathcal{D}$. Siendo $\mu^{(n)}$ regular, $\nu = \sup s < \mu^{(n)}$ y $\bigcup_{\alpha \in s} X_\alpha = X_\nu$. De donde que f esté acotada según $\mathcal{D}$.

La otra afirmación se sigue análogamente: piénsese que no. Definimos una sucesión decreciente módulo $\mathcal{D}$, $\langle f_\alpha : \alpha < (2^\mu)^+ \rangle$. Y definimos $F_\xi = \{\{\alpha, \beta\} : f_\alpha(\xi) < f_\beta(\xi)\}$, X_F, F^ζ, X son definidos equivalentemente. De nuevo por Erdős-Rado encontramos $\zeta < \mu$ y $F \subset (2^\mu)^+$ con $[F]^2 \subset F^\zeta$ y $|F| = \mu^+$. Así que para algún $\xi < \kappa$, $f_\alpha(\xi) < f_\beta(\xi)$, $\alpha, \beta \in F$, $\beta < \alpha$. Esto crea una sucesión decreciente de ordinales, de longitud μ^+. $\square$

En este lema anterior usamos que $\mathcal{D}$ no era $\mu^{(n)}$-desmontable para $n \geq 1$, lo cual no necesariamente se desprende de nuestra hipótesis, i.e. no ser λ-desmotable para $\lambda \in (\mu, 2^{(2^\mu)^+}]$. Para ver esto usaremos que la no desmontabilidad es equivalente a un cierto grado de completud:

Definición. *Decimos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es λ-decreciente completo, λ-dc, si cualquier sucesión decreciente $\langle E_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ de elementos de $\mathcal{D}$, satisface $\bigcap_{\xi<\lambda} E_\xi \in \mathcal{D}$.*

Nota. Esto es equivalente a:

Cada sucesión decreciente $\langle E_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ con $E_\xi \in \mathcal{D}$ cumple:

$$\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi \neq \emptyset.$$

Supongamos que $\mathcal{D}$ es α-dc. Debido a que $\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi \in \mathcal{D}$, $\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi \neq \emptyset$.
A la inversa, si $\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi \neq \emptyset$ y $X \in \mathcal{D}$

$$(\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi) \cap X = \bigcap_{\xi<\alpha} (E_\xi \cap X)$$

Dado que $E_\xi \in \mathcal{D}$ entonces $E_\xi \cap X \in \mathcal{D}$, además $\langle E_\xi \cap X \mid \xi < \alpha\rangle$ es una sucesión decreciente cuyos términos son elementos de $\mathcal{D}$; así que $\bigcap_{\xi<\alpha}(E_\xi \cap X) \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{\xi<\alpha} E_\xi$ intersecta a cada elemento del ultrafiltro, tiene que ser un elemento del ultrafiltro.

Lema 1.2.2. *Para α regular, un ultrafiltro $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es α-di*[6] *si y solo si es α-desmontable.*

Demostración. Supongamos que no es α-desmontable. Sea $\langle I_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ una sucesión decreciente en $\mathcal{D}$. Si $\bigcap_{\xi<\alpha} I_\xi \notin \mathcal{D}$, entonces su complemento sí pertenece, $\bigcup_{\xi<\alpha} \kappa \setminus I_\xi \in \mathcal{D}$. Podemos encontrar $C \subset \alpha$, $|C| < \alpha$ con $\bigcup_{\xi\in C} \kappa \setminus I_\xi \in \mathcal{D}$. Pero $\langle \kappa \setminus I_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ es un sucesión decreciente, así que $\bigcup_{\xi\in C} \kappa \setminus I_\xi = \kappa \setminus I_\gamma$, donde $\gamma = \sup C$ y por regularidad es $< \alpha$. Así que $I_\gamma \notin \mathcal{D}$.

A la inversa, supongamos que es α-dc. Tomemos $\langle I_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ con $\bigcup_{\xi<\alpha} I_\alpha = \kappa$. Podemos pensar esta sucesión como creciente. Para obtener una contradicción suponemos que es α-desmontable; así que para cualquier $\xi < \alpha$, $I_\xi \notin \mathcal{D}$. Por lo cual $\langle \kappa \setminus I_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{D}$, entonces $\bigcap_{\xi<\alpha} \kappa \setminus I_\xi \in \mathcal{D}$ y además no es κ. Para cada $\xi \in E = E^\alpha_\omega = \{\eta < \alpha \mid cf(\eta) = \omega\}$ sea $C_\xi \subset \xi$ numerable cofinal con $\bigcup_{\nu\in C_\xi} I_\nu \notin \mathcal{D}$. Entonces

$$\bigcap_{\nu\in C_\xi} \kappa \setminus I_\nu = \bigcap_{\nu<\xi} \kappa \setminus I_\nu \in \mathcal{D}.$$

Y la sucesión $\langle J_\xi \mid \xi \in E\rangle$ es decreciente y pertenece a $\mathcal{D}$, donde $J_\xi = \bigcap_{\nu\in C_\xi} \kappa \setminus I_\nu$. Pero $\bigcap_{\xi\in E} J_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha} \kappa \setminus I_\alpha \in \mathcal{D}$ y siendo decreciente propia sabemos $\kappa \setminus \bigcap_{\xi\in E} J_\xi \neq \kappa$, pero por otro lado

[6] α-decreciente incompleto, i.e. no α-decreciente completo

$$\kappa \setminus \bigcap_{\xi\in E} J_\xi = \bigcup_{\xi\in E} \kappa \setminus J_\xi = \bigcup_{\xi\in E} \kappa \setminus (\bigcap_{\nu\in C_\xi} I_\nu) =$$
$$\bigcup_{\xi\in E} \bigcup_{\nu\in C_\xi} \kappa \setminus \kappa \setminus I_\nu = \bigcup_{\xi\in E} \bigcup_{\nu\in C_\xi} I_\nu = \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi = \kappa.$$

Una clara contradicción. □

Corolario 1.2.3. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ no es desmontable cuando y solo cuando es α-dc para $\omega < \alpha < \kappa$ regular.

Lema 1.2.4. *$\mathcal{D}$ es α-dc si y solo si es $cf(\alpha)$-dc.*

Demostración. Supóngase la $cf(\alpha)$-completud decreciente. Sea $\langle I_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ decreciente en $\mathcal{D}$ y $f : cf(\alpha) \overset{cof}{\to} \alpha$, entonces $\bigcap_{\xi<\alpha} I_\xi = \bigcap_{\xi<cf(\alpha)} I_{f(\xi)} \in \mathcal{D}$.

Ahora supongamos que es α-dc, tomemos $\langle I_\xi \mid \xi < cf(\alpha)\rangle$ decreciente y $f : cf(\alpha) \overset{cof}{\to} \alpha$, definimos $\langle J_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ como: $J_\eta = I_\xi$ para $f(\xi) \leq \eta < f(\xi + 1)$, entonces es decreciente y cada elemento está en $\mathcal{D}$. Además $\bigcap_{\xi<cf(\alpha)} I_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha} J_\xi \in \mathcal{D}$.

□

Prikry y Kunen probaron que una vez que se reconoce completud decreciente para un cardinal regular, se reconoce a sus sucesores.

Teorema 1.2.5. *Si κ es regular y $\mathcal{D}$ es κ-dc entonces también es κ^+-dc. Así que es $\kappa^{(n)}$-dc para $n < \omega$.*

Demostración. Mostraremos algo más fuerte: Sea κ arbitrario. Si $\mathcal{D}$ es κ^+-di entonces:

1. $\mathcal{D}$ es $cf(\kappa)$-di o
2. Existe $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ y $\alpha \leq \kappa$ regular con $|\mathcal{E}| = \kappa^+$, y si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ es tal que $|\mathcal{F}| = \alpha$ entonces[7] $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Primero notemos que si β es regular y $\mathcal{D}$ posee una sucesión $\langle Y_\xi \mid \xi < \beta\rangle$ con

$$(\forall s \in [\beta]^\beta) \bigcap_{\xi\in s} Y_\xi = \emptyset,$$

entonces resulta ser β-di: para cada $\nu < \beta$ hacemos $X_\nu = \bigcup_{\nu<\eta<\beta} Y_\eta$. Claramente son decrecientes y son elementos de $\mathcal{D}$. Notemos que es vacío, por que si tomamos $\zeta \in \bigcap_{\nu<\beta} X_\nu$, entonces

[7]Más adelante veremos que en realidad este es un concepto muy común –(α, κ^+)-regularidad– en la teoría de ultrafiltros.

$$\zeta \in \bigcap_{\nu<\beta} X_\nu \text{ si y solo si } (\forall \nu < \beta)\zeta \in X_\nu \text{ si y solo si } (\forall \nu < \beta)(\exists \xi < \beta)(\nu < \xi \wedge \zeta \in Y_\xi)$$

es decir que $s = \{\xi < \beta \mid \zeta \in Y_\xi\}$ tiene tamaño β, y $\bigcap_{\nu<\beta} X_\nu \subset \bigcap_{\xi\in s} Y_\xi = \emptyset$.

Ahora tomemos una (κ^+, κ)-matriz de Ulam $\langle M^\xi_\rho \mid \xi < \kappa^+, \rho < \kappa\rangle$, i.e.

1. $M^\xi_\rho \subset \kappa^+$ para cualesquier $\rho < \kappa$, $\xi < \kappa^+$;
2. Para $\rho < \kappa$ y $\xi \neq \zeta, \xi, \zeta < \kappa^+$: $M^\xi_\rho \cap M^\zeta_\rho = \emptyset$;
3. $|\kappa^+ \setminus \bigcup_{\rho<\kappa} M^\xi_\rho| \leq \kappa$, para $\xi < \kappa^+$.

De esta matriz definamos una sucesión $B^\xi_\nu = \bigcup_{\rho<\nu} M^\xi_\rho$. Ahora notemos que si $\nu < \kappa$ y $S \subset \kappa^+$ es tal que $|S| > \nu$ entonces $\bigcap_{\xi\in S} B^\xi_\nu = \emptyset$. Para ver esto tómese $\tau \in \bigcap_{\xi\in S} B^\xi_\nu$, entonces $\tau \in B^\xi_\nu$ para cada $\xi \in S$ y por definición de B^ξ_ν, para cada $\xi \in S$ existe $\rho_\xi < \nu$ con $\tau \in M^\xi_{\rho_\xi}$. Como $|S| > \nu$, podemos encontrar $\xi \neq \zeta, \xi, \zeta \in S$ satisfaciendo $\rho_\xi = \rho_\zeta$. Así que $\tau \in M^\xi_{\rho_\xi} \cap M^\zeta_{\rho_\zeta}$, contradiciendo que los M^ξ_ρ formen una matriz de Ulam.

Ahora veremos que podemos pensar, sin pérdida generalidad, que $\mathcal{D}$ es uniforme en κ^+:

Afirmación. Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre κ^+ uniforme, que codifica a $\mathcal{D}$.

Prueba. Sea $\langle Y_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$ decreciente con $\bigcap_{\xi<\kappa^+} Y_\xi = \emptyset$; podemos suponer que $Y_0 = \mu = \bigcup \mathcal{D}$. De esta sucesión definamos $X_\xi = (\bigcap_{\rho<\xi} Y_\rho) \setminus Y_\xi$, que resulta no pertenecer a $\mathcal{D}$ y además es una partición: $\xi \neq \zeta$ y $\delta \in X_\xi \cap X_\zeta$ luego $\delta \in [(\bigcap_{\rho<\xi} Y_\rho) \setminus Y_\xi] \cap [(\bigcap_{\rho<\zeta} Y_\rho) \setminus Y_\zeta]$, aquí supongamos $\xi < \zeta$, entonces $Y_\zeta \subset Y_\xi$ y, por un lado, $\delta \in (\bigcap_{\rho<\zeta} Y_\rho) \setminus Y_\zeta$ implica $\delta \in Y_\xi$ mientras que por otro lado $\delta \in (\bigcap_{\rho<\xi} Y_\rho) \setminus Y_\xi$ implica $\delta \notin Y_\xi$. Definamos $\mathcal{U} = \{A \mid \bigcup_{\xi\in A} X_\xi \in \mathcal{D}\}$. Como se hizo en la observación que sucede a la definición de desmontabilidad $\mathcal{U}$ resulta ser un ultrafiltro. Para ver que es uniforme tomemos $X \subset \kappa^+$ con $|X| \leq \kappa$, claramente existe un $\eta < \kappa^+$ con $(\forall \xi \in X)\xi < \eta$. Así que:

$$Y_\eta \cap (\bigcup_{\xi\in X} X_\xi) = \emptyset,$$

por lo cual $X \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ debe ser uniforme. ■.

Trabajemos con $\mathcal{U}$, restan dos casos para ver el resultado:

1. Existe un $\xi < \kappa^+$ con $B^\xi_\nu \notin \mathcal{U}$. De ser este el caso, tomando

$$Y = \kappa^+ \setminus \bigcup_{\zeta<\kappa} A^\xi_\zeta = \kappa^+ \setminus \bigcup_{\zeta<\kappa} B^\xi_\zeta,$$

se tiene $|Y| \leq \kappa$; sea $X_\zeta = \kappa^+ \setminus (Y \cup B^\xi_\zeta)$. Entonces $\{X_\zeta \mid \zeta < \kappa\} \subset \mathcal{U}$, $\rho < \nu < \kappa$ implica $Y \cup B^\xi_\rho \subset Y \cup B^\xi_\nu$ que a su vez implica $\kappa^+ \setminus Y \cup B^\xi_\nu \subset \kappa^+ \setminus Y \cup B^\xi_\rho$ y

$$\begin{gathered}
\alpha \in \bigcap_{\zeta<\kappa} X_\zeta \text{ si y solo si } (\forall\zeta<\kappa)\alpha \in X_\zeta \text{ si y solo si}\\
(\forall\zeta<\kappa)(\alpha \notin Y \wedge \alpha \notin B^\xi_\zeta) \text{ si y solo si}\\
(\forall\zeta<\kappa)(\exists\rho<\zeta)(\alpha \notin Y \wedge \alpha \notin A^\xi_\rho) \text{ si y solo si}\\
(\forall\zeta<\kappa)(\exists\rho<\zeta)(\alpha \notin \bigcap_{\nu<\kappa} \kappa \setminus A^\xi_\nu \wedge \alpha \notin A^\xi_\rho) \text{ si y solo si}\\
(\forall\zeta<\kappa)(\exists\rho<\zeta)(\forall\nu<\kappa)(\alpha \notin \kappa \setminus A^\xi_\nu \wedge \alpha \notin A^\xi_\rho) \text{ si y solo si}\\
(\forall\zeta<\kappa)(\exists\rho<\zeta)(\forall\nu<\kappa)(\alpha \in A^\xi_\nu \wedge \alpha \notin A^\xi_\rho).
\end{gathered}$$

Lo cual claramente no es el caso. De donde se sigue que $\mathcal{U}$ sea κ-di y por ende $cf(\kappa)$-di.

2. Lo anterior no se cumple. Para cada $\xi < \kappa^+$ podemos encontrar ρ_ξ con $B^\xi_{\rho_\xi} \in \mathcal{U}$. Entonces podemos encontrar $S \subset \kappa^+$ con $|S| = \kappa^+$ y $\rho_\xi = \rho_\zeta$ para $\xi, \zeta \in S$. Tomemos $\xi \in S$, $\rho = \rho_\xi$, hágase $|\rho|^+ = \alpha \leq \kappa$ y $\mathcal{E} = \{B^\xi_\rho \mid \xi \in S\} \subset \mathcal{U}$. Claramente $|\mathcal{E}| = \kappa^+$ y si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ es tal que $|\mathcal{F}| = \alpha$ entonces, como notamos anteriormente, $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Finalmente veamos que si $\mathcal{U}$ satisface 1,2 del teorema entonces también $\mathcal{D}$ lo hace. Primero pensemos que es $cf(\kappa)$-di y tomemos $\{A_\xi \mid \xi < cf(\kappa)\} \subset \mathcal{U}$ un testigo de la $cf(\kappa)$-di. Entonces $\{B_\xi \mid \xi < cf(\kappa)\} \subset \mathcal{D}$ donde $B_\xi = \bigcup_{\zeta\in A_\xi} X_\zeta$. Como los A_ξ son decrecientes, también lo son los B_ξ. Ahora pensemos que $\bigcap_{\xi<cf(\kappa)} B_\xi \in \mathcal{D}$, así que

$$\begin{gathered}
\mu \setminus \bigcap_{\xi<cf(\kappa)} B_\xi \notin \mathcal{D} \text{ si y solo si } \bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \mu \setminus B_\xi \notin \mathcal{D} \text{ si y solo si}\\
\bigcup_{\xi<cf(\kappa)}(\mu \setminus \bigcup_{\zeta\in A_\xi} X_\zeta) \notin \mathcal{D} \text{ si y solo si}\\
\bigcup_{\xi<cf(\kappa)}(\bigcap_{\zeta\in A_\xi} \mu \setminus X_\zeta) \notin \mathcal{D} \text{ si y solo si}\\
\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \left(\bigcap_{\zeta\in A_\xi}[\mu \setminus (\bigcap_{\rho<\zeta} Y_\rho \cap (\mu \setminus Y_\zeta))]\right) \notin \mathcal{D} \text{ si y solo si}\\
\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \left(\bigcap_{\zeta\in A_\xi}[(\bigcup_{\rho<\zeta}(\mu \setminus Y_\rho) \cup Y_\zeta)]\right) \notin \mathcal{D};
\end{gathered}$$

pero $\bigcup_{\rho<\zeta}(\mu \setminus Y_\rho) \cup Y_\zeta = \mu$, entonces $\mu \notin \mathcal{D}$. Lo cual claramente no es el caso.

Para ver el caso dos, la prueba corre análogamente porque al tomar $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ como en la definición, se desprende $\mathcal{E}' = \{\bigcup_{\xi\in A} X_\xi \mid A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{D}$ y como $|\mathcal{E}| = \kappa^+$, así $|\mathcal{E}'| = \kappa^+$. Luego al tomar $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}'$ y pensar $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{D}$ obtenemos una contradicción como antes. $\square$

Del resultado anterior se sigue fácilmente que si $\mathcal{D}$ no es α-desmontable, entonces no es α^+-desmontable y con eso ni $\alpha^{(n)}$-desmontable, siempre que α sea regular.

Existe una noción de normalidad para ultrafiltros no desmontables:

Definición. *Decimos que un ultrafiltro $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es normal no desmontable si para cada función $f : \kappa \to \kappa$ regresiva módulo $\mathcal{D}$ existe $C \subset \kappa$ numerable con $f^{-1}[C] \in \mathcal{D}$.*

Nota. Es fácil ver que cualquier $\mathcal{D}$ normal no desmontable no es desmontable: Si $\bigcup_{\nu<\lambda} I_\nu = \kappa$ y $f : \kappa \to \lambda$ es una función tal que $f^{-1}[\{\nu\}] = I_\nu$, para $\nu < \lambda$. Como $\lambda < \kappa$ entonces para $\nu > \lambda$, $f(\nu) < \nu$ así que es regresiva según el ultrafiltro y podemos encontrar $C \subset \lambda$ numerable con $f^{-1}[C] \in \mathcal{D}$, pero $f^{-1}[C] = f^{-1}[\bigcup_{\nu\in C}\{\nu\}] = \bigcup_{\nu\in C} f^{-1}[\{\nu\}] = \bigcup_{\nu\in C} I_\nu \in \mathcal{D}$.

Más aún cualquier ultrafiltro normal no desmontable es un ultrafiltro normal débil:

Nota. Si κ es tal que $cf(\kappa) > \omega$ y $\mathcal{D}$ es normal no desmontable sobre κ entonces $\mathcal{D}$ es normal débil: si $f : \kappa \to \kappa$ es regresiva módulo $\mathcal{D}$ entonces existe $N \subset \kappa$ numerable tal que $f^{-1}[N] \in \mathcal{D}$; como $cf(\kappa) > \omega$ tenemos $\nu = \sup N + 1 < \kappa$, sabemos que $f^{-1}[N] \cap \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi \wedge f(\xi) \in N\} \in \mathcal{D}$ entonces $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \nu\} \in \mathcal{D}$.

Para inaccesibles podemos encontrar siempre un ultrafiltro normal no desmontable:

Teorema 1.2.6. *Sean κ inaccesible y $\mathcal{D}$ no desmontable en κ. Entonces $S = \{[f] \in \kappa^\kappa_{\mathcal{D}} \mid \forall g : \kappa \to \kappa \exists \lambda < \kappa (g[\kappa] \subset \lambda \to [g] < [f])\}$ tiene un menor elemento. Si h es tal elemento entonces $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa \mid h^{-1}[X] \in \mathcal{D}\}$ es normal no desmontable.*

Demostración. Antes de comenzar definamos lo siguiente.

Definición. *Dado un conjunto ordenado $\langle K, < \rangle$ decimos que K tiene cofinalidad $\geq \rho$, y escribimos $cf(K) \geq \rho$, si para cada $H \subset K$ tal que $|H| < \rho$ se puede encontrar $k \in K$ con $h < k$, para $h \in H$.*

Sea $K = \{[f] \in \kappa^{\kappa}_{\mathcal{D}} \mid f$ está acotada$\}$.

Afirmación 1.2.7. *$cf(K) \geq \kappa$.*

Prueba. Dado $H \subset K$ con $H = \{[g_\alpha] \mid \alpha < \lambda\}$ para alguna $\lambda < \kappa$, definimos:

$$g(\xi) = \sup\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha < \lambda\} + 1,\ \xi < \kappa.$$

Por regularidad, $g(\xi) < \kappa$ para cada $\xi < \kappa$, y por construcción es fácil ver: $[g] > [f_\alpha]$ para $\alpha < \lambda$ arbitrario. Finalmente $g \in K$, ya que: $g[\kappa] \subset \sup\{f_\alpha[\kappa] \mid \alpha < \lambda\}$ y una vez más por regularidad $\sup_{\alpha<\lambda} f_\alpha[\kappa] < \kappa$. ■

Especialmente, $cf(K) \geq \mu$ para cualquier $\mu < \kappa$.

Sea $\mu < \kappa$ un cardinal. Pensemos que el teorema no se cumple, es decir no existe tal menor elemento. Entonces podemos encontrar un cardinal $\lambda < (2^\mu)^+ < \kappa$ y una sucesión decreciente, módulo $\mathcal{D}$, $\langle g_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ con:

1. $g_\alpha : \kappa \to \kappa$, $[g_\alpha]$ es cota superior de K, $\alpha < \lambda$;
2. Para cualquier g, $[g_\alpha] < [g]$ $\alpha < \lambda$, siempre que $[g]$ sea una cota de K.

En seguida hacemos: $G_i = \{g_\alpha(i) \mid \alpha < \lambda\}$, que resulta $|G_i| \leq \lambda < (2^\mu)^+$ y además:

$$|\prod G_i/\mathcal{D}| < (2^\mu)^+.$$

Así que hacemos:

$$G = \{[g] \in \prod G_i/\mathcal{D} \mid (\exists [k] \in K)[k] > [g]\}.$$

Entonces, G es el subconjunto de $\prod G_i/\mathcal{D}$ que consiste en elementos K-acotados. Se sigue que $|G| < (2^\mu)^+$, recordando que $cf(K) \geq (2^\mu)^+$. Y cualquier función constante (módulo $\mathcal{D}$) está en G, por lo cual $G \neq \emptyset$; sea $[k_0] \in K$ una cota superior para $[g] \in G$ y

$$I_\alpha = \{i < \kappa \mid g_\alpha(i) > k_0(i)\},\ \alpha < \lambda.$$

Claramente $I_\alpha \in \mathcal{D}$; hacemos:

$$h(i) = \text{mín}\{g_\alpha(i) \mid i \in I_\alpha\},$$

la cual está definida, módulo $\mathcal{D}$, ya que está definida en I_0: $i \in I_0$ implica $g_0(i) > k_0(i)$, así $\text{mín}_{i \in I_0} g_0(i) \geq k_0(i)$. Aun más $[h] < [g]$. Es inmediato que $[h] < [g_\alpha]$, para $\alpha < \lambda$, porque:

$$\begin{gathered} i \in I_{\alpha+1} \text{ cuando y solo cuando} \\ g_{\alpha+1}(i) > k_0(i), \text{ lo cual implica} \\ \text{mín}_{i \in I_{\alpha+1}} g_{\alpha+1}(i) \geq k_0(i) \text{ que a su vez implica} \\ [h] \leq [g_{\alpha+1}] < [g_\alpha]. \end{gathered}$$

Por 2 podemos encontrar: $[k] \in K$ tal que $[h] < [k]$ y $[h] \in \prod G_i/\mathcal{D}$ por lo cual $[h] \in G$. Entonces $[h] < [g] < [k_0]$. Así que podemos afirmar: $[h] > [k_0]$, ya que h está definida exactamente donde esto ocurre. ¡Una clara contradicción!

Ahora tomemos $[h]$ tal mínimo y hagamos $\mathcal{U} = \{A \subset \kappa \mid h^{-1}[A] \in \mathcal{D}\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es normal no desmontable: sea $f \in \kappa^\kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in \mathcal{U}$. Primero notemos que $\{\alpha < \kappa \mid f(h(\alpha)) < h(\alpha)\} \in \mathcal{D}$ entonces $[fh]_\mathcal{D} < [h]_\mathcal{D}$ y fh tiene que estar acotada, digamos que por $\lambda < \kappa$. Como $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} I_\xi$, donde $I_\xi = (f \circ h)^{-1}[\{\xi\}]$, podemos encontrar $C \subset \lambda$ numerable con $\bigcup_{\xi \in C} I_\xi \in \mathcal{D}$. Pero $\bigcup_{\xi \in C} I_\xi = \bigcup_{\xi \in C} (f \circ h)^{-1}[\{\xi\}] = (f \circ h)^{-1}[\bigcup_{\xi \in C}\{\xi\}] = (f \circ h)^{-1}[C] \in \mathcal{D}$ es decir $f^{-1}[C] \in \mathcal{U}$. $\square$

En relación a la no desmontabilidad siempre podemos encontrar una partición más pequeña módulo el ultrafiltro. Para ver eso definamos:

Definición. *Dadas dos particiones $\mathscr{P}, \mathscr{Q}$, de algún conjunto, decimos que $\mathscr{P}$ refina a $\mathscr{Q}$ cuando y solo cuando $(\forall x \in \mathscr{P})(\exists y \in \mathscr{Q}) x \subset y$. Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre el mismo dominio que las particiones y $\mathscr{P}$ refina a $\mathscr{Q}$ entonces decimos que es un refinamiento esencial, módulo $\mathcal{D}$, cuando no existe $c : \mathscr{Q} \to \mathscr{P}$ tal que*

$$(\forall x \in \mathscr{Q}) c(x) \subset x \ y \bigcup_{x \in \mathscr{Q}} c(x) \in \mathcal{D}$$

Teorema 1.2.8. *Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es un ultrafiltro ω_1-incompleto que no es desmontable, para $\kappa > 2^{\aleph_1}$, entonces existe una partición $\mathscr{P} = \{E_n \mid n < \omega\}$ de κ con $E_n \notin \mathcal{D}$ y ninguna partición de tamaño menor a κ refina esencialmente a $\mathscr{P}$, módulo $\mathcal{D}$.*

Demostración. Supongamos que no existe tal partición. Con esta hipótesis construimos un árbol donde cada nivel es una partición de tamaño $\leq 2^{\aleph_1}$ y ningún nodo pertenece a $\mathcal{D}$. Sea $T_0 = \{x \in T \mid rk_T(x) = 0\} = \{P_i \mid i < \omega\}$ (donde $rk_T(x)$ es el rango de x en el árbol) cualquier partición numerable cuyos elementos no pertenecen a $\mathcal{D}$. Por hipótesis sabemos que podemos refinar esencialmente esto. Aún más, podemos continuar esto: para $\alpha \leq \omega_1$, hacemos $T_{\alpha+1}$ el refinamiento esencial de T_α, cuyos elementos no están en $\mathcal{D}$. Ahora, para α límite, tomamos T_α como el máximo refinamiento común de sus niveles predecesores: denotamos con p_n^γ, $\gamma < \alpha$ y $n \leq 2^{\aleph_1}$, el n-ésimo elemento del γ-ésimo nivel; para cada $\gamma < \alpha$, si existe un $n < 2^{\aleph_1}$ tal que para cada $\beta < \alpha$ no existe $B \in T_\beta$ con $B \subset p_n^\gamma$ entonces hacemos $p_n^\gamma \in T_\alpha$. Por construcción T_α refina cada T_β, $\beta < \alpha$.

Al final terminamos con un árbol de altura $\omega_1 + 1$ y cada nivel refina a sus niveles previos. En seguida, como $\bigcup T_\alpha = \kappa$ para $\alpha < \omega_1 + 1$ y $\mathcal{D}$ no es desmontable entonces podemos encontrar $C \subset T_{\omega_1}$ numerable, tal que $\bigcup C \in \mathcal{D}$. Por refinamiento de cada nivel, existe $\alpha < \omega_1$ tal que cada elemento de C está contenido en algún $E \in T_\alpha$. Entonces $T_{\alpha+1}$ no puede refinar esencialmente a T_α, porque T_{ω_1} es un refinamiento de $T_\alpha, T_{\alpha+1}$, entonces cada $X \in C$ es subconjunto de un $Y_X \in T_\alpha + 1$ y $\bigcup C \subset \bigcup_{X \in C} Y_X \in \mathcal{D}$; por lo cual podemos definir una $c : T_\alpha \to T_{\alpha+1}$ tal que[8] $c(X) \subset X \wedge \bigcup_{X \in T_\alpha} c(X) \in \mathcal{D}$. ¡Una contradicción! □

Ya sabemos que bajo no desmontabilidad podemos traducir el ultrafiltro a uno en un cardinal menor y sabemos que existe una partición "mínima", que además es numerable; con esto construimos un isomorfismo:

Lema 1.2.9. *Sea $\kappa > 2^{\aleph_1}$ y $\mathcal{D}$ no desmontable y ω_1-incompleto. Sea $\{E_n \mid n < \omega\}$ la partición como en el lema anterior. Para $\beta < \kappa$ tenemos $\langle \beta, < \rangle^\omega / \mathcal{U} \simeq \langle \beta, < \rangle^\kappa / \mathcal{D}$, donde $\mathcal{U} = \{S \subset \omega \mid \bigcup_{n \in S} E_n \in \mathcal{D}\}$.*

Demostración. Tomemos $f : \kappa \to \beta$, definamos $F([f]_\mathcal{D}) = [g]_\mathcal{U}$, donde $g : \omega \to \beta$ es tal que:

$$\bigcup_{i<\omega} \{\alpha \in E_i \mid f(\alpha) = g(i)\} \in \mathcal{D}$$

[8]Para cada $X \in C$ tomamos $Z_X \in T_\alpha$ tal que $X \subset Z_X$ y definimos $c : T_\alpha \to T_{\alpha+1}$ como $c(Z_X) = Y_X$ para $X \in C$ y $c(Z)$ es cualquier $Y \in T_{\alpha+1}$ con $Y \subset Z$.

Nótese que

$$\bigcup_{i\in S} E_i \supset \bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i \mid f(\alpha) = g(i)\}.$$

donde $S = \{n < \omega \mid (\exists \alpha < \kappa) f(\alpha) = g(n)\}$:

$$\begin{gathered} x \in \textstyle\bigcup_{n<\omega}\{\alpha \in E_n \mid f(\alpha) = g(n)\} \text{ si y solo si} \\ (\exists n < \omega) x \in \{\alpha \in E_n \mid f(\alpha) = g(n)\} \text{ si y solo si} \\ (\exists n < \omega)(x \in E_n \wedge f(x) = g(n)) \text{ entonces} \\ (\exists n < \omega)(\exists \alpha < \kappa)(x \in E_n \wedge f(\alpha) = g(n)), \text{ tomando } x = \alpha \\ \text{por lo cual } (\exists n \in S) x \in E_n. \end{gathered}$$

Por la elección de $\langle E_n \rangle_{n<\omega}$ siempre podemos encontrar tal $g : \omega \to \beta$. Ahora hacemos $[f_1]_{\mathcal{D}} < [f_2]_{\mathcal{D}}$, entonces:

$$\{\alpha < \kappa \mid f_1(\alpha) < f_2(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Sean $F([f_1]_{\mathcal{D}}) = [g_1]_{\mathcal{U}}, F([f_2]_{\mathcal{D}}) = [g_2]_{\mathcal{U}}$, así:

$$\bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i \mid f_1(\alpha) = g_1(i)\}, \bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i : f_2(\alpha) = g_2(i)\} \in \mathcal{D}.$$

La interseccón de estos tres conjuntos está en $\mathcal{D}$, con propiedades booleanas y de partición obtenemos[9]:

$$\bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i \mid f_1(\alpha) = g_1(i) \wedge f_2(\alpha) = g_2(i) \wedge f_1(\alpha) < f_2(\alpha)\}$$

Y claramente esto está contenido en:

$$\bigcup_{n\in T} E_i$$

para $T = \{n < \omega \mid g_1(n) < g_2(n)\}$. Entonces la función preserva el orden y es inyectiva. En seguida sea $g : \omega \to \beta$; definamos $f : \kappa \to \beta$ como

$$f(\alpha) = g(n) \text{ cuando y solo cuando } \alpha \in E_n.$$

De nuevo, por propiedades de partición, esto está bien definido y claramente resulta que $F([f]_{\mathcal{D}}) = [g]_{\mathcal{U}}$. □

Corolario 1.2.10. Para $\mathcal{D}, \kappa, \beta$ como anteriormente, $|\beta^\kappa/\mathcal{D}| \leq \beta^\omega$.

[9] $x \in \bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i \mid f_1(\alpha) = g_1(i)\} \cap \bigcup_{i<\omega}\{\alpha \in E_i \mid f_2(\alpha) = g_2(i)\} \cap \{\alpha < \kappa \mid f_1(\alpha) < f_2(\alpha)\}$ es equivalente a $(\exists n < \omega)(x \in E_n \wedge f_1(x) = g_2(n)) \wedge (\exists m < \omega)(x \in E_m \wedge f_2(x) = g_2(m)) \wedge f_1(x) < f_2(x)$ si $n \neq m$, entonces $x \in E_n \cap E_m = \emptyset$, así que es equivalente a $(\exists n < \omega)(x \in E_n \wedge f_1(x) = g_2(n) \wedge f_2(x) = g_2(n) \wedge f_1(x) < f_2(x))$.

Una pregunta natural al fijarse en ultrafiltros no desmontables es ¿quiénes admiten uno?, para responder esto definimos:

Definición. *Por recursión definimos α-Mahlo:*

1. *κ es 0-Mahlo cuando y solo cuando es inaccesible (fuerte);*

2. *κ es $\alpha + 1$-Mahlo si y solo si es α-Mahlo y $\{\mu < \kappa \mid \mu$ es α-Mahlo$\}$ es estacionario en κ.*

3. *κ es α-Mahlo si y solo si lo es para cada $\beta < \alpha$.*

Teorema 1.2.11 (Prikry [18]). *Sean κ inaccesible fuerte pero no Mahlo (i.e. 1-Mahlo) y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en κ. Entonces para cada $\alpha < \kappa$ existe un $\lambda \in (\alpha, \kappa)$ tal que $\mathcal{U}$ es λ-desmontable.*

Demostración. Supongamos lo contrario; entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que para cada λ con $\alpha < \lambda < \kappa$ y $\mathcal{U}$ no es λ-desmontable. Primero veamos que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $\mathcal{D}$ es otro tal que $X \in \mathcal{D}$ cuando y solo cuando $f^{-1}[X] \in \mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{D}$ no es α-desmontable para los mismos α que $\mathcal{U}$: si $\langle I_\nu \mid \nu < \alpha\rangle$ es tal que $\bigcup_{\nu<\alpha} I_\nu = \kappa$ entonces $f^{-1}[\kappa] = f^{-1}[\bigcup_{\nu<\alpha} I_\nu] = \bigcup_{\nu<\alpha} f^{-1}[I_\nu] = \kappa$. entonces podemos encontrar $C \subset \kappa$ numerable con $f^{-1}[\bigcup_{\nu\in C} I_\nu] = \bigcup_{\nu\in C} f^{-1}[I_\nu] \in \mathcal{U}$ y por tanto $\bigcup_{\nu\in C} I_\nu = \bigcup_{\nu\in C} I_\nu \in \mathcal{D}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme en κ tal que existe μ con $\mathcal{U}$ no λ-desmontable para $\mu < \lambda < 2^{(2^\mu)^+}$ entonces podemos encontrar $\mathcal{F}$ normal débil y que no es α-desmontable para los mismo α que $\mathcal{D}$. Para ver esto tomemos $K = \{[\xi] \mid \xi < \kappa\}$ el conjunto de las clases constantes según $\mathcal{D}$. Queremos ver que este conjunto tiene una función mínima que lo acota. Con tal fin fijémonos en su cofinalidad: $cf(K) \geq \kappa$ y sea $H \subset K$ con $|H| < \kappa$, digamos $H = \{[\gamma_\xi] \mid \xi < \rho\}$; hagamos $h : \kappa \to \kappa$. Como $h(\eta) = \sup_{\xi<\rho} \gamma_\xi + 1$ para todo $\eta < \kappa$, la regularidad asegura de hecho que $h(\eta) < \kappa$ y además es constante.

En seguida supongamos que no existe tal mínimo, entonces podemos encontrar $\lambda < (2^\mu)^+$ y una suceción $\langle h_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$, decreciente módulo el ultrafiltro $\mathcal{U}$, tal que para $h_\alpha \in \kappa^\kappa$, $[h_\alpha]$ acota K y además si $[f]$ acota K existe α tal que $[h_\alpha] < [f]$. Ahora hagamos $H_\xi = \{h_\alpha(\xi) \mid \alpha < \lambda\}$, entonces $|H_i| \leq \lambda$, $|\prod H_\xi/\mathcal{U}| < (2^\mu)^+$ y

$$H = \{[h] \in \prod H_\xi/\mathcal{U} \mid (\exists x \in K) x > [h]\}.$$

Se sigue que $|H| < (2^\mu)^+$. Dado que $cf(K) \geq \kappa$, podemos encontrar $[k] \in K$ con $[k] > [h]$ para todo $[h] \in H$. Ahora para $\alpha < \lambda$ hacemos $I_\alpha = \{\xi < \kappa \mid f_\alpha(\xi) > k(\xi)\}$, así que $I_\alpha \in \mathcal{U}$. Defínase $g : \kappa \to \kappa$ como $g(\xi) = \text{mín}\{h_\alpha(\xi) \mid \xi \in I_\alpha\}$, se sigue que está definida en I_α. Aún más, $g(\xi) \leq h_{\alpha+1}(\xi)$ para $\xi \in I_{\alpha+1}$, de donde que $[g] < [h_\alpha]$ para $\alpha < \lambda$. Entonces podemos encontrar $[f] \in K$ con $[g] \leq [f]$. Sin embargo, como $[g] \in \prod H_\xi/\mathcal{U}$, $[g] \in H$. Por tanto $[g] < [k]$. Pero g está definida exactamente donde pasa lo contrario, i.e. $[k] < [g]$; una contradicción.

Ahora tomamos a f como esta función mínima; definimos $\mathcal{F} = f_*(\mathcal{D}) = \{X \subset \kappa \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{D}\}$. Sea $g : \kappa \to \kappa$ tal que $\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\} \in \mathcal{F}$, es decir $f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\}] \in \mathcal{D}$; pero $f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\}] = \{\zeta < \kappa \mid (\exists \xi < \kappa)(\zeta = f(\xi) \wedge g(\zeta) < \zeta)\}$ y por tanto $\{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) < f(\xi)\} \in \mathcal{D}$, entonces $g \circ f$ tiene que estar acotada según $\mathcal{D}$, es decir que g está acotada según $\mathcal{F}$. Además no es α-desmontable para los mismo elementos que $\mathcal{D}$.

Hasta ahora hemos visto que cualquier ultrafiltro uniforme lo podemos traducir a uno normal preservando la no-desmontabilidad. Sea $\mathcal{D}$ dicho ultrafiltro normal.

Afirmación. Para cada $\nu < \kappa$, $|\prod \nu/\mathcal{D}| < \kappa$. Aún más esto implica que κ es Mahlo.

Prueba. Por el lema 1.1.1 claramente $|\prod \nu/\mathcal{D}| < \kappa$. Para ver que κ es Mahlo con esta condición veamos que $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es inaccesible débil}\} \in \mathcal{D}$; supongamos lo contrario. Como $\mathcal{D}$ es normal débil y $L = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es límite}\}$ es club entonces $L \in \mathcal{D}$ y así $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) < \alpha\} \in \mathcal{D}$. Sea $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ una sucesión de conjuntos tales que $S_\alpha \subset \alpha$ es cofinal con $otp(S_\alpha) = cf(\alpha)$ para α límite y $S_\alpha = \{0\}$ en otro caso. Entonces podemos encontrar $\nu < \kappa$ tal que $|S_\alpha| \leq \nu$ módulo $\mathcal{D}$. De lo contrario $\{\alpha < \kappa \mid |S_\alpha| = cf(\alpha) > \nu\} \in \mathcal{D}$ para todo $\nu < \kappa$, por tanto cf no estaría acotada en cada conjunto en $\mathcal{D}$ pero es regresiva módulo $\mathcal{D}$, lo cual contradice la normalidad débil. Entonces $|\prod S_\alpha/\mathcal{D}| < \kappa$. Pero para tales sucesiones $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ sucede lo contrario: si $[f] \in \prod S_\alpha/\mathcal{D}$, entonces f es regresiva módulo $\mathcal{D}$ y por tanto acotada, digamos $[f] \leq [\beta]$. Como $|\prod S_\alpha/\mathcal{D}| < \kappa$ y κ es regular podemos encontrar $\mu < \kappa$ tal que $[f] \leq [\mu]$ para cada $[f] \in \prod S_\alpha/\mathcal{D}$. Como $X = (\mu, \kappa) \cap \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ límite}\} \in \mathcal{D}$, entonces para cada $\alpha \in X$ podemos encontrar $\nu_\alpha \in S_\alpha$ con $\nu_\alpha > \mu$. Definamos $g(\alpha) = \nu_\alpha$ para $\alpha \in X$ y 0 en otro caso. Claramente $[f] \in \prod S_\alpha/\mathcal{D}$ y por construcción $[f] > [\mu]$. Lo cual contradice la condición de $[\mu]$. Es decir que hemos probado que $|\prod S_\alpha| \leq \kappa$. Pero ya sabíamos $|\prod S_\alpha/\mathcal{D}| < \kappa$. *QED*

Entonces κ es Mahlo, lo cual no es el caso. La contradicción sigue de haber supuesto que existe $\alpha < \kappa$ tal que para cada λ con $\alpha < \lambda < \kappa$ y $\mathcal{U}$ no es λ-desmontable. □

Así, un inaccesible que posee un ultrafiltro no desmontable tiene que ser más grande que solo inaccesible, i.e. Mahlo. Para ver qué grado de Mahlo es primero veamos que los ultrafiltros no α-desmontables preservan convergencia:

Lema 1.2.12. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no α-desmontable sobre κ, donde $\alpha < \kappa$ es regular. Para $\mu < \kappa$ con $cf(\mu) = \alpha$: si $\langle \mu_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ es una sucesión cofinal en μ, i.e. estrictamente creciente y que converge a μ, entonces $[\mu_\xi] \to [\mu]$ en $\prod \kappa/\mathcal{U}$.*

Demostración. Pensemos que no es el caso. Entonces podemos encontrar $f : \kappa \to \kappa$ con

$$[\mu_\xi] < [f] < [\mu]$$

para todo $\xi < \alpha$. Definamos $F_\xi = \{\nu < \kappa \mid \mu_\xi \leq f(\nu) < \mu_{\xi+1}\}$, $\xi < \alpha$. Claramente $F_\xi \cap F_\zeta = \emptyset$ para cada $\xi \neq \zeta$. Por hipótesis debe ocurrir que $\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi \in \mathcal{U}$. Aún más, para $S \subset \alpha$ con $|S| < \alpha$, tenemos $F_S = \bigcup_{\xi\in S} F_\xi \notin \mathcal{U}$: supóngase que $F_S \in \mathcal{U}$, como α es regular existe algún $\zeta < \alpha$ con $\zeta > \xi$ para toda $\xi \in S$. Tomemos $\xi \in F_S$, entonces $f(\xi) \leq \mu_\zeta < \mu_{\zeta+1}$, es decir que $[f] < [\mu_{\zeta+1}]$; este hecho claramente contradice la no-desmontabilidad de $\mathcal{U}$. □

Teorema 1.2.13 (Prikry [18])**.** *Sea κ inaccesible fuerte y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no α-desmontable para $\alpha < \kappa$ arbitrariamente grande. Entonces κ es ω-Mahlo.*

Demostración. Debemos probar que κ es n-Mahlo para cada $n < \omega$. Procedemos por inducción. Para $n = 0$ es trivial ya que es inaccesible fuerte. Supóngase cierto para cada $m \leq n$. Ya sabemos por la prueba anterior que $\mathcal{U}$ lo podemos pensar como normal débil y además $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es } (n-1)\text{-Mahlo}\} \in \mathcal{U}$. Procedemos por dos casos:

I El conjunto M es un elemento de $\mathcal{U}$ donde

$$M = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es } (n-1)\text{-Mahlo } \wedge\ \mathcal{U} \text{ es } \alpha\text{-desmontable}\}$$

Tomemos $I = \{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}$ es α desmontable $\wedge$ regular$\}$. Claramente $|I| = \kappa$. Sea $f : \kappa \to \kappa$ la función $f(\alpha) = |\alpha \cap I|$, entonces $F = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$ es un club en κ. Por tanto $M \cap F \in \mathcal{U}$ y para cada $\alpha \in M \cap F$ podemos obtener un ultrafiltro que no es ξ-desmontable para cada $\xi < \alpha$, por lo anterior y por hipótesis de inducción α es n-Mahlo. Mostramos que $M \cap F \subset \{\alpha < \kappa \mid \alpha$ es n-Mahlo$\}$.

II El caso I falla. Para esto veamos que si $C \subset \prod \kappa/\mathcal{U}$ es cerrado y no está acotado por $[id]$ entonces pasa solo una de dos cosas: $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}$ es $cf(\alpha)$desmontable$\} \in \mathcal{U}$ o $\{\alpha < \kappa \mid [\alpha] \in C\} \in \mathcal{U}$.

Prueba. Supóngase que el segundo caso no ocurre. Entonces el complemento sí pertenece: $K = \{\alpha < \kappa \mid [\alpha] \notin C\} \in \mathcal{U}$. Construímos una función $h : E \to \prod \kappa/\mathcal{U}$ como $h(\alpha) = [f]$ donde $[f]$ es tal que $[f] < [\alpha]$ y $[g] \leq [f]$ para toda $[g] \in C$, esto lo podemos hacer ya que C no está acotado por $[id]$. Definamos

$$H = \{\alpha \in K \mid (\exists \xi < \kappa) h(\alpha) \leq [\xi] \leq [\alpha]\}.$$

Supongamos que $F \in \mathcal{U}$. Sea $g(\alpha) = \xi$ donde $h(\alpha) \leq [\xi] < [\alpha]$, entonces $g(\alpha) < \alpha$ para cualquier α en algún $Y \in \mathcal{U}$. Por normalidad débil g está acotada bajo $[id]$, módulo $\mathcal{U}$. Entonces C resulta estar acotado bajo la identidad. Así que $H \notin \mathcal{U}$, $\{\alpha < \kappa \mid \neg(\exists \gamma < \kappa) h(\alpha) < [\gamma] < [\alpha]\} \in \mathcal{U}$. Por el lema anterior $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}$ es $cf(\alpha)$-desmontable$\} \in \mathcal{U}$. *QED*

Como el caso I falla, para $C \subset \prod \kappa/\mathcal{U}$ cerrado y no está acotado bajo $[id]$, $\{\alpha < \kappa \mid [\alpha] \in C\} \in \mathcal{U}$. Pensemos que no es $(n+1)$-Mahlo, por tanto $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ es n-Mahlo$\} \notin \mathcal{U}$. Entonces para cada α en el complemento podemos asociarle un club $C_\alpha \subset \alpha$ tal que no contiene cardinales $(n-1)$-Mahlo. Tomemos el producto reducido $C = \prod C_\alpha/\mathcal{U}$, que claramente es cerrado y no está acotado por la identidad. Como $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}$ es $cf(\alpha)$-desmontable$\} \notin \mathcal{U}$, por lo cual $\{\alpha < \kappa \mid [\alpha] \in C\} \in \mathcal{U}$, así que $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ no es $(n-1)$-Mahlo$\} \in \mathcal{U}$, lo cual viola la hipótesis de inducción.

$\square$

1.3. Regularidad.

Igual que en la sección anterior, como convención pensaremos que κ es regular y si tomamos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en κ entonces será uniforme a menos que se afirme lo contrario.

Definición. *Sean $\mu \leq \kappa$ cardinales. Decimos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es (μ, κ)-regular si podemos encontrar $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ de tamaño κ de tal forma que*

$$(\forall \mathcal{Y} \subset \mathcal{S})\big(|\mathcal{Y}| = \mu \to \bigcap \mathcal{Y} = \emptyset\big).$$

Y, como convención, diremos que $\mathcal{U}$ es (μ, κ)-irregular si y solo si no es (μ, κ)-regular.

Claramente si $\mu < \kappa$ y $\mathcal{U}$ es (μ, κ)-regular entonces es (ν, κ)-regular para $\mu \leq \nu \leq \kappa$. Por la prueba del teorema 1.2.5 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.1. Sea α regular y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro, si $\mathcal{D}$ es (α, α)-regular entonces es α-di.

Por tanto,con las condiciones anteriores es α-desmontable. Ahora veamos una caracterización de regularidad con la primera función:

Teorema 1.3.2. *Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre un cardinal regular κ, que posee una primera función f entonces $\mathcal{D}$ es (μ, κ)-regular si y solo si $\{\xi < \kappa \mid cf(f(\xi)) < \mu\} \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Probaremos algo aún más fuerte: las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $\mathcal{D}$ es (μ, κ)-regular.
2. $(cf([f]) < [\mu])^{V^\kappa_\mathcal{D}}$.
3. No existe $g : \kappa \to \kappa$ tal que para $\alpha < \kappa$, $g(\alpha)$ es regular $\geq \mu$ y $cf(\prod \langle g(\alpha), < \rangle^\kappa / \mathcal{D}) = \kappa$.

$2 \to 1$. Por el teorema de Łoś $(cf([f]) < [\mu])^{V^\kappa_\mathcal{D}}$ es equivalente a $C = \{\xi < \kappa \mid cf(f(\xi)) < \mu\} \in \mathcal{D}$. Definamos una sucesión $\langle C_\rho \mid \rho \in C\rangle$ como $C_\rho \subset f(\rho)$ cofinal y $|C_\rho| < \mu$. Ahora consideramos el encaje $j : V \prec V^\kappa/\mathcal{D}$, que al ser $f : \kappa \to \kappa$ una primera función para $\mathcal{D}$ da lugar a

$$\big([f] = \sup_{\xi<\kappa} j(\xi)\big)^{V^\kappa_\mathcal{D}}.$$

Sabiendo esto definimos $g:\kappa\to V$ como $g(\alpha)=C_\alpha$ para $\alpha\in C$. Por Łoś

$$\big([g] \text{ es cofinal en } [f]\big)^{V^\kappa_\mathcal{D}}.$$

Por recursión definimos una sucesión $\langle I_\xi \mid \xi<\kappa\rangle$ de intervalos $I_\xi=(\alpha_\xi,\beta_\xi)$ describiendo sus cota: Pensemos que $\langle(\alpha_\xi,\beta_\xi)\mid\xi<\rho\rangle$ ya está definida, hacemos $\alpha_\rho=(\sup_{\xi<\rho}\beta_\xi)+1$ y sea

$$\beta_\rho=\text{mín}\{\beta<\kappa \mid \big([g]\cap(j(\alpha_\rho),j(\beta))\neq\emptyset\big)^{V^\kappa_\mathcal{D}}\}.$$

Ya definida $\langle I_\xi\mid\xi<\kappa\rangle$ podemos ver que si $\xi\neq\zeta$ tenemos $I_\xi\cap I_\zeta=\emptyset$; luego hacemos

$$Y_\xi=\{\alpha\in C\mid C_\alpha\cap I_\xi\neq\emptyset\}.$$

Por construcción de $\langle I_\xi\rangle_{\xi<\kappa}$ y por el teorema de Łoś $\{Y_\xi\mid\xi<\kappa\}\subset\mathcal{D}$. Tomemos $S\subset\kappa$ con $|S|=\mu$, si

$$\bigcap_{\xi\in S}Y_\xi\neq\emptyset,$$

entonces

$$\begin{gathered}\alpha\in\textstyle\bigcap_{\xi\in S}Y_\xi \text{ si y solo si } (\forall\xi\in S)\alpha\in Y_\xi \text{ si y solo si}\\ (\forall\xi\in S)(\alpha\in C\wedge C_\alpha\cap I_\xi\neq\emptyset);\end{gathered}$$

entonces ocurre alguna de dos cosas: como $|S|=\mu$, $(\forall\xi\in S)C_\alpha\cap I_\xi\neq\emptyset$ y $\langle I_\xi\rangle_{\xi<\kappa}$ son ajenas podemos deducir que $|C_\alpha|=\mu$ lo cual contradice la elección de C_α. O dado que $|C_\alpha|<\mu$ y C_α intersecta a μ de los I_ξ entonces podemos encontrar $\xi\neq\zeta$ con $I_\xi\cap I_\zeta\neq\emptyset$ lo cual no puede ser el caso. De lo cual concluimos que $\bigcap_{\xi\in S}Y_\xi=\emptyset$. Entonces hemos encontrado una sucesión $\langle Y_\xi\mid\xi<\kappa\rangle$ tal que al escoger μ de ellos su intersección es vacía, es decir $\mathcal{D}$ es (μ,κ)-regular.

3 $\to$ 2. Pensemos que $Y=\{\xi<\kappa\mid cf(f(\xi))\geq\mu\}\in\mathcal{D}$ y probemos la contrapositiva. Definamos

$$g(\alpha)=\begin{cases}cf(f(\alpha)) & \text{para } \alpha\in Y\\ \kappa & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Como $Y\in\mathcal{D}$ tenemos

$$\big([g]=cf([f])\big)^{V^\kappa_\mathcal{D}}.$$

Aún más, como f no está acotada módulo $\mathcal{D}$

$$\big(cf([g])=cf(cf([f]))=cf([f])=[\kappa]\big)^{V^\kappa_\mathcal{D}}.$$

Es decir que hemos encontrado una función $g : \kappa \to \kappa$ con $g(\alpha) \leq \mu$ regular y $cf(\prod\langle g(\alpha), <\rangle/\mathcal{D}) = \kappa$.

$1 \to 3$. Sea $\mathcal{D}$ (μ, κ)-regular en κ y $g : \kappa \to \kappa$, $cf(g(\alpha)) \geq \mu$ entonces $cf(\prod\langle g(\alpha), <\rangle/\mathcal{D}) = \kappa^+$: tomemos $\{g_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subset \kappa^\kappa$ con $[g_\alpha] < [g]$. Sea $\{R_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ un testigo de la (μ, κ)-regularidad, definamos:

$$h(\xi) = \sup\{g_\alpha(\xi) \mid \xi \in R_\alpha\}.$$

Claramente $[g_\alpha] \leq [h]$ para cada $\alpha < \kappa$; pensemos que $[h] = [g]$, como $cf(g(\alpha)) \geq \mu$ y si $s \subset \kappa$ es tal que $|s| = \mu$ entonces $\bigcap_{\xi \in s} R_\xi = \emptyset$, al tomar $X \in \mathcal{D}$ con $\xi \in X$ implica $g(\xi) = h(\xi)$, tenemos $|X| < \mu$ de lo contrario no se contradiría la regularidad, pero con $< \mu$ elementos no podemos obtener a $g(\xi)$. Entonces claramente $[h] < [g]$. □

Lema 1.3.3. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro en κ que es (μ, κ)-regular donde μ es un cardinal límite fuerte. Entonces*

$$2^\kappa \leq |\prod_{\mathcal{D}} \mu|.$$

Demostración. Tomemos una testigo para la (μ, κ)-regularidad: $\langle A_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$. Defínase $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ como $X_\xi = \{\alpha < \kappa \mid \xi \in A_\alpha\}$ y $f_Y(\xi) = Y \cap X_\xi$ para $Y \subset \kappa$. Primero es claro que $|X_\xi| < \mu$ de lo contrario violaríamos la regularidad y si $Y \neq Z$ entonces podemos pensar que existe $\zeta \in Y$ y $\zeta \notin Z$. Para $\xi \in A_\zeta$ resulta $\zeta \in X_\xi$ por definición, por tanto

$$\zeta \in f_Y(\xi) = Y \cap X_\xi,$$
$$\zeta \notin f_Z(\xi) = Z \cap X_\xi.$$

De donde $f_Y(\xi) \neq f_Z(\xi)$ para $\xi \in A_\zeta$ y por tanto $[f_Y] \neq [f_Z]$, así que hemos mostrado $|\prod \mathcal{P}(X_\xi)/\mathcal{D}| \geq 2^\kappa$, como μ es límite fuerte, $|\mathcal{P}(X_\xi)| < \mu$ para cada ξ, entonces lo anterior claramente implica lo que queríamos: $2^\kappa \leq |\mu^\kappa_{\mathcal{D}}|$. □

En la sección anterior de este capítulo vimos algunos de los tamaños que poseen los κ inaccesibles que portan un ultrafiltro no desmontable, ahora veremos algo más general sobre los κ arbitrarios que portan dicho ultrafiltro.

Teorema 1.3.4 (Prikry [18])**.** *Suponiendo HCG. Sea κ un cardinal que posee un ultrafiltro $\mathcal{U}$ no desmontable. Entonces $cf(\kappa) = \omega$ o es inaccesible y por tanto ω-Mahlo.*

Demostración. Ya vimos que si κ es inaccesible entonces tiene que ser ω-Mahlo. Ahora, si κ es singular y $\mathcal{U}$ es uniforme entonces es $cf(\kappa)$-desmontable: sea $\langle I_\xi \mid \xi < cf(\kappa)\rangle$ una partición tal que $\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} I_\xi \in \mathcal{U}$ y cada $I_\xi \notin \mathcal{D}$; tomemos $s \subset cf(\kappa)$ con $|s| < cf(\kappa)$, si $\bigcup_{\xi\in s} I_\xi \in \mathcal{U}$ entonces $|\bigcup_{\xi\in s} I_\xi| = \kappa$ lo cual claramente no puede suceder porque $|s| < cf(\kappa)$. Entonces, si $cf(\kappa) \neq \omega$ obtenemos la descomposición deseada. Si $\kappa = \lambda^+$ tenemos dos casos: para λ regular si tomamos $\mathcal{U}$ uniforme en κ, entonces con el teorema 1.2.5 y lo antes mencionado vemos que es λ^+-desmontable y entonces λ-desmontable. Y si λ es singular tenemos.

Afirmación (HGC)**.** Sean $\kappa = \mu^+$, μ singular y $\mathcal{U}$ uniforme en κ. Entonces

1. $\mathcal{U}$ es μ-desmontable, o bien

2. Existe algún $\nu < \mu$ tal que $\mathcal{U}$ es α-di para todo $\alpha \in (\nu,\mu)\cap\{\zeta < \kappa \mid cf(\zeta) = \zeta\}$.

Prueba. Pensemos que 2 falla. Entonces existen cardinales regulares $\beta < \mu$ arbitrariamente grandes tales que $\mathcal{U}$ es β-dc. Usando los resultados de la sección anterior podemos pensar que $\mathcal{U}$ es normal débil. Como μ es singular y κ es el sucesor de μ, entonces $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) < \mu\} \in \mathcal{U}$; ya que $\mathcal{U}$ es normal débil, id es una primera función para $\mathcal{U}$, por el teorema anterior $\mathcal{U}$ resulta ser (μ,κ)-regular. Como μ es singular, tiene que ser límite y por HGC límite fuerte. Usando el lema anterior tenemos:

$$2^\kappa = \kappa^+ \leq |\prod_{\mathcal{U}} \mu|.$$

Ahora veamos que existe una función $f : \kappa \to \mu$ que toma μ distintos valores en cada $X \in \mathcal{U}$. Antes de probar su existencia veamos que esto implica μ-desmontabilidad: primero, siempre podemos pensar que f es sobre. Ahora sean $X_\xi = f^{-1}[\{\xi\}]$ y $s \in [\mu]^{<\mu}$, si $\bigcup_{\xi\in s} X_\xi \in \mathcal{U}$ entonces $f^{-1}[\bigcup_{\xi\in s}\{\xi\}] \in \mathcal{U}$ es decir $f^{-1}[s] \in \mathcal{U}$. Como $|s| < \mu$, y f toma μ distintos valores módulo $\mathcal{U}$, esto querría decir que f toma $< \mu$ valores, lo cual no es el caso, entonces $\bigcup_{\xi\in s} X_\xi \notin \mathcal{U}$ para cualquier $s \in [\mu]^{<\mu}$. En seguida pensemos que no existe tal $f : \kappa \to \mu$; cualquier $f : \kappa \to \mu$ es equivalente a una g que toma menos de μ valores en algún $X_g \in \mathcal{U}$. Así que

$$\mu_{\mathcal{U}}^{\kappa} \subset \bigcup_{s \in [\mu]^{<\mu}} s_{\mathcal{U}}^{\kappa}$$

Dado que $\mu^+ \leq |[\mu]^{<\mu}| = \mu^{\overset{\mu}{\smile}} \leq 2^\mu$, por HGC $\mu^+ = 2^\mu$, así $|[\mu]^{<\mu}| = \mu^+ = \kappa$. Pero[10] $|\prod_{\mathcal{U}} \nu| < \kappa$, esto es:

$$|\prod_{\mathcal{U}} \mu| \leq \kappa \times \kappa = \kappa,$$

lo cual contradice nuestra observación de la regularidad. *QED*

Y eso concluye la demostración del teorema. □

Corolario 1.3.5. Si el ultrafiltro $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ posee una primera función f, entonces $\mathcal{D}$ es (ω, κ)-irregular.

Demostración. Si fuera regular entonces $\{\alpha < \kappa \mid cf(f(\alpha)) < \omega\} \in \mathcal{D}$, es decir que f toma valores de sucesores en algún $X \in \mathcal{D}$ i.e. podemos encontrar $g : \kappa \to \kappa$ con $[f] = [g+1]$; claramente sucede que $[g] < [f]$, por ser f una primera función, así que $[g] \leq [\rho]$ para alguna $\rho < \kappa$, y podemos encontrar algún $n < \omega$ con $[f] \leq [\rho + n]$, lo cual contradice que f no esté acotada. □

Nota. Tomemos κ inaccesible débil y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro normal débil en κ. Por el teorema 1.3.2 sabemos que hay dos posibilidades para $\mathcal{U}$:

(a) $[cf] = [id]$,

(b) o podemos encontrar algún $\nu < \kappa$ con $[cf] < [\nu]$.

En el primer inciso, $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) = \alpha\} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es (μ, κ)-irregular para cada $\mu < \kappa$ porque si no fuera el caso y ν es tal que $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) < \nu\} \in \mathcal{U}$ entonces $Z = \{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) = \alpha < \nu\} = (0, \nu) \in \mathcal{U}$, lo cual no ocurre. En el segundo, $\mathcal{U}$ resulta (ν, κ)-regular.

Con la observación anterior obtenemos lo siguiente:

Teorema 1.3.6. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro normal, κ-completo, κ-saturado en κ. Entonces cualquier ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ es normal débil y (μ, κ)-irregular para $\mu < \kappa$.*

[10] Véase la prueba del lema 1.2.1.

Demostración. Primero veamos que κ es inaccesible débil. Pensemos que $\kappa = \lambda^+$ y veamos que κ no puede tener un filtro κ-completo, κ-saturado. Sea $\langle M^\xi_\zeta \mid \xi < \lambda^+, \zeta < \lambda\rangle$ una (λ^+, λ)-matriz de Ulam. Pensemos que tenemos tal filtro $\mathcal{F}$, entonces para cada $\xi < \lambda^+$ podemos encontrar un $\zeta_\xi < \lambda$ tal que $M^\xi_{\zeta_\xi}$ tiene medida positiva. De lo cual podemos obtener un $s \subset \lambda^+$ con $|s| = \lambda^+$ y tal que $\zeta_\xi = \zeta$ para todo $\xi \in s$. Entonces $\langle M^\xi_\zeta \mid \xi \in s\rangle$ es una sucesión de tamaño λ^+, ajena y de conjuntos de medida positiva. Lo cual no puede ser.

Entonces κ tiene que ser inaccesible débil. En seguida, claramente $\mathcal{F}$ es normal débil, entonces cualquier extensión suya es normal débil. Solo resta ver la irregularidad. Claramente es suficiente ver que $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) = \alpha\} \in \mathcal{F}$. Pensemos que no, por tanto $\{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) < \alpha\}$ tiene medida positiva. Por normalidad podemos encontrar $\nu < \kappa$ con $[cf] = [\nu]$. Digamos que X es de medida positiva tal que si $\xi \in X$ entonces $cf(\xi) = \nu$. Para cada $\alpha \in X$ hacemos $\langle \xi^\alpha_\zeta \mid \zeta < \nu\rangle$ una sucesión creciente cofinal en α y para cada $\gamma < \nu$ definimos $f_\gamma(\alpha) = \xi^\alpha_\gamma$ para $\alpha \in X$, las cuales claramente son regresivas módulo $\mathcal{F}$. Luego hagamos, para cada $\gamma < \nu$, $X^\gamma_\eta = \{\xi \in X \mid f_\gamma(\xi) = \eta\}$ y con esto $Y_\gamma = \{\eta < \kappa \mid X^\gamma_\eta$ tiene medida positiva$\}$, por κ-saturación $|Y_\gamma| < \kappa$ y por normalidad $Y \neq \emptyset$; en seguida hacemos $X_\gamma = \bigcup_{\eta\in Y_\gamma} X^\gamma_\eta$. Notemos que para $\upsilon_\gamma = \sup Y_\gamma < \kappa$ tenemos $f_\gamma[X_\gamma] \subset \upsilon_\gamma$ porque si $\alpha \in f_\gamma[X_\gamma]$ entonces existe $\beta \in X_\gamma$ con $\alpha = f_\gamma(\beta)$, pero $\beta \in X_\gamma$ implica $(\exists \eta \in Y_\gamma)(f_\gamma(\beta) = \eta = \alpha)$, dado que $\eta < \upsilon_\gamma$, de hecho $\alpha < \upsilon_\gamma$. Hemos encontrado $X_\gamma \subset X$ de medida positiva y $\upsilon_\gamma < \kappa$ con $f_\gamma[X_\gamma] \subset \upsilon_\gamma$, tomando esto hacemos $\upsilon = \sup_{\gamma<\nu} \upsilon_\gamma < \kappa$. Por κ-completud $\bigcap_{\gamma<\nu} X_\gamma$ es un conjunto de medida positiva pero

$$\begin{gathered}\xi \in \textstyle\bigcap_{\gamma<\nu} X_\gamma \text{ si y solo si } (\forall\gamma < \nu)\xi \in X_\gamma \text{ si y solo si}\\ (\forall\gamma < \nu)(\exists\eta \in Y_\gamma)\xi \in X^\eta_\gamma \text{ si y solo si}\\ (\forall\gamma < \nu)(\exists\eta \in Y_\gamma)(\xi \in X \wedge f_\gamma(\xi) = \eta).\end{gathered}$$

Como $f_\gamma[X_\gamma] \subset \upsilon$ para todo $\gamma < \nu$, y $\xi \in X$ implica $f_\gamma(\xi) < \xi$ por lo cual obtenemos

$$(\forall\gamma < \nu)(\exists\eta < \upsilon)f_\gamma(\xi) = \eta < \xi,$$

$\sup_{\gamma<\nu} f_\gamma(\xi) = \xi \leq \upsilon$. Así, $\bigcap_{\gamma<\nu} X_\gamma \subseteq \upsilon$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ejemplo. Tomemos un cardinal medible μ y $\langle \mathcal{U}_\xi \mid \xi < \nu \rangle$, $\nu < \mu$ una sucesión de ultrafiltros normales κ-completos en μ así $\mathcal{F} = \bigcap_{\xi<\nu} \mathcal{U}_\xi$ es un filtro normal débil y κ-completo; porque al tomar $\{X_\xi \mid \xi < \eta\} \subset \mathcal{F}$, $\eta < \mu$ tenemos $\{X_\xi \mid \xi < \eta\} \subset \mathcal{U}_\zeta$ para todo $\zeta < \nu$ entonces $\bigcap_{\xi<\eta} X_\xi \in \mathcal{U}_\zeta$ para todo $\zeta < \nu$, es decir $\bigcap_{\xi<\eta} X_\xi \in \mathcal{F}$. Ahora si $f : \mu \to \mu$ es regresiva módulo $\mathcal{F}$ entonces lo es para cada $\mathcal{U}_\xi \supset \mathcal{F}$, $\xi < \nu$. Por normalidad de cada ultrafiltro $\mathcal{U}_\xi$ podemos encontrar $\beta_\xi < \mu$ con $[f]_{\mathcal{U}_\xi} = [\beta_\xi]_{\mathcal{U}_\xi}$. Haciendo $\beta = \sup_{\xi<\nu} \beta_\xi < \mu$, para cualquier $\xi < \nu$, $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \beta\} \in \mathcal{U}_\xi$, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \beta\} \in \mathcal{F}$, lo cual prueba que es normal débil. Como es normal débil y κ-completo, por tanto resulta normal y κ-saturado. Y si $\langle Y_\xi \mid \xi < \nu \rangle$ es una partición con $Y_\xi \in \mathcal{U}_\xi$, entonces $\mathcal{F} \cup \{Y_\xi\}$ genera al ultrafiltro $\mathcal{U}_\xi$: al tomar un ultrafiltro $\mathcal{V}_\xi$ generado por $\mathcal{F} \cup \{Y_\xi\}$ y un $X \in \mathcal{V}_\xi$ se sigue que existen dos posibilidades, $X \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}_\xi$ o $X \supset Y_\xi$ que implica $X \in \mathcal{U}_\xi$, así que $\mathcal{V}_\xi \subset \mathcal{U}_\xi$ que por ser máximo en realidad resultan idénticos.

Corolario 1.3.7. Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre κ con una partición de medida positiva $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$, podemos extender $\mathcal{F}$ a un ultrafiltro (ω, κ)-irregular.

Demostración. Sea $f : \kappa \leftrightarrow [\kappa]^{<\omega}$ una enumeración biyectiva y hagamos $Y_\xi = \bigcup_{\xi \in f(\zeta)} X_\zeta$. Tomemos $\eta \neq \xi$, luego $Y_\xi \cap Y_\eta \neq \emptyset$, ya que $\xi, \eta \in f(\zeta)$ para algún $\zeta < \kappa$. Pero al tomar $s \subset \kappa$, $|s| = \omega$ tenemos $\bigcap_{\xi \in s} Y_\xi = \emptyset$ porque no existe $\nu < \kappa$ tal que $s \subset f(\nu)$. Así que el filtro generado por $\mathcal{F} \cup \{Y_\xi \mid \xi < \kappa\}$ es el buscado. □

Teorema 1.3.8. *Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro (μ, κ)-irregular sobre κ, donde $\omega \leq \mu$, entonces existe una función casi inyectiva mínima, módulo $\mathcal{D}$, donde por casi inyectiva pensamos que $|f^{-1}[\{\alpha\}]| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$ y casi inyectiva módulo $\mathcal{D}$ es que existe $X \in \mathcal{D}$ con $|f^{-1}[\{\alpha\}] \cap X| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$.*

Demostración. Procedemos por contradicción; definamos una sucesión $\langle f_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ de funciones casi inyectivas y decrecientes por recursión: supongamos que ya las hemos definido hasta $\eta < \kappa$. Si $\eta = \rho + 1$ hacemos f_η cualquier $h : \kappa \to \kappa$ con $[h] < [f_\rho]$ y $h(\xi) \leq f_\rho(\xi)$ para $\xi < \kappa$, tal h existe por hipótesis. Si η es límite definamos:

$$f_\eta(\xi) = \min_{\alpha<\eta} f_\alpha(\xi).$$

Se sigue que f_η es casi inyectiva porque al tomar $\xi \in f_\eta^{-1}[\{\zeta\}]$, y $f_\eta(\xi) = \zeta$, por definición de f_η podemos encontrar $\alpha < \eta$ con $f_\alpha(\xi) = f_\eta(\xi) = \zeta$, así que $\xi \in f_\alpha^{-1}[\{\zeta\}]$, es decir $f_\eta^{-1}[\{\zeta\}] \subset \bigcup_{\alpha<\eta} f_\alpha^{-1}[\{\zeta\}]$ y por regularidad $|\bigcup_{\alpha<\eta} f_\alpha^{-1}[\{\zeta\}]| < \kappa$.

Ahora, hagamos $X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid f_{\alpha+1}(\xi) < f_\alpha(\xi)\}$. Claramente $X_\alpha \in \mathcal{D}$, pero al tomar μ de dichos conjuntos obtenemos una sucesión decreciente de ordinales. Entonces $\mathcal{D}$ resulta (ω, κ)-regular; una clara contradicción. $\square$

Nota. Si además $\mathcal{D}$ es p-punto, obtenemos una primera función. Porque si f no está acotada, resulta casi inyectiva y $[g] < [f]$, donde g es la menor de las casi inyectivas. Si $[f] < [g]$, no puede ser casi inyectiva y por tanto no puede no estar acotada.

Lema 1.3.9. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro κ-completo en κ y existe una familia $\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ de funciones $f_\alpha : \kappa \to \lambda$, $\lambda < \kappa$ finalmente distintas módulo*[11] *$\mathcal{F}$ y están acotadas en el ultraproducto por una función $f : \kappa \to \lambda$, entonces cualquier ultrafiltro $\mathcal{D} \supset \mathcal{F}$ es (λ, κ)-regular.*

Demostración. Para esto usamos una equivalencia de regularidad:

$$\mathcal{D} \text{ es } (\mu,\kappa)\text{-regular si y solo si existe } \sigma : \bigcup \mathcal{D} \to [\kappa]^{<\mu}$$
$$\text{tal que } \{i \in \bigcup \mathcal{D} \mid \alpha \in \sigma(i)\} \in \mathcal{D}.$$

Prueba. Para ver la equivalencia tomemos una sucesión que atestigüe la (μ,κ)-regularidad $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ y definamos $\sigma(i) = \{\alpha < \kappa \mid i \in X_\alpha\}$. Por regularidad es claro que $|\sigma(i)| < \mu$, además $\{i \in \bigcup \mathcal{D} \mid \alpha \in \sigma(i)\} = \{i \in \bigcup \mathcal{D} \mid i \in X_\alpha\} = X_\alpha$. Ahora, si tenemos tal función hagamos $X_\alpha = \{i \in \bigcup \mathcal{D} \mid \alpha \in \sigma(i)\}$ para $\alpha < \kappa$. Luego, si $i \in \bigcap_{\xi<\mu} X_{\alpha_\xi}$, entonces para toda $\xi < \mu$, $i \in X_{\alpha_\xi}$, es decir $\alpha_\xi \in \sigma(i)$, pero $|\sigma(i)| < \mu$. En consecuencia $\bigcap_{\xi<\mu} X_{\alpha_\xi} = \emptyset$. *QED*

Sea $\mathcal{D} \supset \mathcal{F}$ un ultrafiltro y tomemos dicha familia $\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ con $[f_\alpha] \neq [f_\beta]$ y $f : \kappa \to \lambda$ con $[f_\alpha] < [f]$. Definamos una función σ con dominio κ como

$$\sigma(\xi) = \{\alpha < \kappa \mid (\forall \beta < \alpha) f_\beta(\xi) \neq f_\alpha(\xi) \wedge f_\alpha(\xi) < f(\xi)\}.$$

Si $|\sigma(\xi)| \geq \lambda$, se obtiene $|\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha \in \sigma(\xi)\}| \geq \kappa$, pero $\{f_\alpha(\xi) \mid \alpha \in \sigma(\xi)\} \subset f(\xi) < \kappa$; por lo que $|\sigma(\xi)| < \lambda$. Finalmente, por construcción de σ ocurre

[11] I.e. cualesquier dos de ellas difieren a partir de un punto.

$$\bigcap_{\beta<\alpha}\{f_\beta(\xi)\neq f_\alpha(\xi)\}\cap\{\xi<\kappa \mid \ f_\alpha(\xi)<f(\alpha)\}\subset\{\xi<\kappa \mid \alpha\in \sigma(\xi)\}.$$

Y por κ-completud $\{\xi<\kappa \mid \alpha\in\sigma(\xi)\}\in\mathcal{D}$. □

Notemos que la hipótesis débil de Kurepa[12] en $\mathcal{F}$ implica la existencia de una familia como en el teorema anterior.

Corolario 1.3.10. Sean $\mathcal{F}$ un filtro κ-completo en κ y $\langle f_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ una sucesión de funciones finalmente distintas; $\mathcal{D}\supset\mathcal{F}$ es (λ,κ)-irregular entonces las f_α son cofinales en $\lambda^\kappa/\mathcal{D}$.

Pongamos nuestra atención en ultrafiltros irregulares en κ^+.

Teorema 1.3.11. *Si existe un ultrafiltro $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}(\kappa^+)$ (κ,κ^+)-irregular, entonces κ^{++} es inaccesible en L.*

Demostración. Ya se mencionó que con la hipótesis débil de Kurepa obtenemos una familia como en el lema pasado. Y sabemos que HK_{κ^+} implica $dHK(\mathcal{F})$ donde[13] $\mathcal{F}=\{X\subset\kappa^+ \mid |\kappa^+\setminus X|<\kappa\}$. Finalmente $\neg HK_{\kappa^+}$ implica que κ^{++} es inaccesible en L. Así que tenemos:

$$\mathcal{D}\text{ es }(\kappa,\kappa^+)\text{-irregular}\to\neg dHK(\mathcal{F})\to\neg HK_{\kappa^+}\to\neg HK(\kappa^+,\kappa^+)$$
$$\to\kappa^{++}\text{ es inaccesible en }L.$$

□

Teorema 1.3.12. *Con las hipótesis del teorema anterior:* $2^\kappa=\kappa^+\to 2^{\kappa^+}=\kappa^{++}$.

Demostración. Es suficiente ver que si existe una familia $\langle f_\alpha \mid \alpha<\kappa^{+++}\rangle$ de funciones finalmente distintas de κ^+ en κ^+ entonces $\mathcal{D}$ es (κ,κ^+)-regular. Como son finalmente distintas y $\mathcal{D}$ es uniforme, por el teorema Łoś el conjunto $\{[f_\alpha] \mid \alpha<\kappa^{+++}\}$ está ordenado linealmente, así que tiene un elemento con κ^{++} predecesores; sin

[12] $dHK_{\kappa^+}(\mathcal{F})$ asevera la existencia de una familia $\langle f_\alpha \mid \alpha<\kappa^{++}\rangle$ con $f_\alpha:\kappa^+\to\kappa$ y $[f_\alpha]\neq[f_\beta]$, para $\alpha\neq\beta$.

[13] La hipótesis de Kurepa en κ^+, HK_{κ^+}, afirma la existencia de una función $A:\kappa^{++}\to\mathcal{P}(\kappa^+)$ tal que $|\{A(\xi)\cap\alpha \mid \xi<\kappa^{++}\}|<\kappa^+$. Teniendo dicha A enumeramos cada $\{A(\xi)\cap\alpha \mid \xi<\kappa^{++}\}$ como $\{A^\alpha_\xi \mid \xi<\kappa\}$; luego definimos $f_\alpha(\beta)=\xi$ si y solo si $A(\alpha)\cap\beta=A^\beta_\xi$. Si tomamos $\alpha\neq\gamma$ y β tal que $\beta\in A(\alpha)\leftrightarrow\beta\notin A(\gamma)$, entonces $f_\alpha(\xi)\neq f_\gamma(\xi)$ para cualquier $\xi\leq\beta$.

pérdida de generalidad pensemos que $[f_\alpha] < [f_{\kappa^{++}}]$ para $\alpha < \kappa^{++}$. Sea $\langle \gamma^\xi_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ una enumeración de $f_{\kappa^{++}}(\xi) < \kappa^+$. Definimos

$$g_\alpha(\xi) = \text{mín}\{\beta \mid f_\alpha(\xi) = \gamma^\xi_\beta\}, \alpha < \kappa^{++}$$

para $f_\alpha(\xi) < f_{\kappa^{++}}(\xi)$ e indefinida en otro caso. Claramente cada $g_\alpha : \kappa^+ \to \kappa$, está definida en un conjunto $X \in \mathcal{D}$ y $\{[g_\alpha] \mid \alpha < \kappa^{++}\}$ es de tamaño κ^{++} porque son finalmente distintas. De nuevo podemos pensar que $[g_\alpha] < [g_{\kappa^+}]$ para $\alpha < \kappa^+$. Definamos

$$\sigma(\xi) = \{\alpha < \kappa^+ \mid g_\alpha(\xi) \text{ está definida } \wedge (\forall \zeta < \alpha) g_\zeta(\xi) \neq g_\alpha(\xi) \wedge g_\alpha(\xi) < g_{\kappa^+}(\xi)\}.$$

Si $|\sigma(\xi)| \geq \kappa$ entonces podemos encontrar $a \subset \sigma(\xi)$ con $|a| = \kappa$, entonces $|\{g_\alpha(\xi) \mid \alpha \in a\}| = \kappa$ lo cual contradice que $\{g_\alpha(\xi) \mid \alpha \in a\} \subset g_{\kappa^+}(\xi) < \kappa$. □

En la sección anterior se probó que un ultrafiltro normal débil es un p-punto; ahora veamos una condición de irregularidad que implica ser p-punto.

Teorema 1.3.13. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro (κ, κ^+)-irregular en κ^+, entonces $\mathcal{D}$ es un p-punto.*

Demostración. Probaremos que si $\langle P_\alpha \rangle_{\alpha < \kappa^+}$ es tal que $\{\alpha < \kappa^+ \mid P_\alpha \cap X \neq \emptyset\}| = \kappa^+$ para cualquier $X \in \mathcal{D}$, entonces podemos encontrar $Y \in \mathcal{D}$ con $|P_\alpha \cap Y| < \kappa$ para $\alpha < \kappa$ arbitrario. Esta partición claramente define una función $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ como $f(\xi) = \alpha$ cuando y solo cuando $\xi \in P_\alpha$ que trivialmente resulta no estar acotada módulo $\mathcal{D}$. Para empezar, veamos que se cumple la desigualdad $|X \cap P_\alpha| \leq \kappa$ para algún $X \in \mathcal{D}$ y cualquier $\alpha < \kappa^+$. Pensemos que este no es el caso. Entonces para cada $X \in \mathcal{D}$ podemos encontrar $\alpha < \kappa^+$ con $|X \cap P_\alpha| = \kappa^+$; luego para $\xi \in X \cap P_\alpha$ y $g : \kappa^+ \to \kappa^+$ arbitraria, tenemos $g(f(\xi)) = g(\alpha)$, entonces $[g \circ f] < [id]$. Ahora si $\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa^{++} \rangle$ es una familia de funciones finalmente distintas, con $f_\alpha : \kappa^+ \to \kappa^+$, entonces $\langle f_\alpha \circ f \mid \alpha < \kappa^{++} \rangle$ es una familia tal que para $\alpha \neq \beta$ podemos encontrar $\gamma < \kappa^+$ de tal forma que $f_\alpha \circ f, f_\beta \circ f$ difieren en $\bigcup_{\xi \geq \gamma} P_\xi$, porque f_α, f_β difieren a partir de algún $\gamma < \kappa^+$, si $\zeta \in \bigcup_{\xi \geq \gamma} P_\alpha$, entonces $f_\alpha(f(\zeta)) \neq f_\beta(f(\zeta))$, porque $f(\zeta) \geq \gamma$. Además, todas estás funciones están acotadas por id, así que hemos encontrado una familia de funciones de tamaño κ^{++} entre las cuales existe una función con κ^+ predecesores. Por el corolario anterior las funciones tienen que ser cofinales en $\langle \kappa, < \rangle^{\kappa^+}_{\mathcal{D}}$, lo cual implica que $\mathcal{D}$ es (κ, κ^+)-regular. En seguida, podemos pensar que $|P_\alpha| \leq \kappa$. Sean $\langle g_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ una familia finalmente distintas de κ^+ a κ y $h : \kappa^+ \to \kappa$ una función con $h \restriction P_\alpha$ inyectiva para todo $\alpha < \kappa^+$. Como antes $\langle g_\alpha \circ f \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ es finalmente distinta según la partición, luego existe $\beta < \kappa^+$ tal que $[g_\beta \circ f] \geq [h]$, digamos que $X \in \mathcal{D}$ es tal que $\xi \in X$ cuando y solo cuando $g_\beta(f(\xi)) \geq h(\xi)$. Por tanto $|X \cap P_\alpha| < \kappa$ porque si $\xi \in X \cap P_\alpha$ entonces $g_\beta(f(\xi)) \geq h(\xi)$ y $\xi \in P_\alpha$, lo cual implica que $g_\beta(\alpha) \geq h(\xi)$ y $|X \cap P_\alpha| \leq g_\beta(\alpha) < \kappa$. $\square$

Al ser p-punto posee una primera función, inmediatamente tenemos estos dos resultados:

Corolario 1.3.14. Para cualquier ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre κ^+, $\mathcal{D}$ tiene una primera función $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ con $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) = \kappa\} \in \mathcal{D}$ cuando y solo cuando es (κ, κ^+)-irregular.

Demostración. Como $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) = \kappa\} \subset \{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) \geq \kappa\}$, deducimos la (κ, κ^+)-irregularidad. Para la otra dirección: por el teorema anterior existe una primera función y $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) \geq \kappa\} \in \mathcal{D}$, pero $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) > \kappa\} = \emptyset$ así que $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) \geq \kappa\} = \{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) = \kappa\}$. $\square$

Corolario 1.3.15. Si κ^+ posee un ultrafiltro (κ, κ^+)-irregular, entonces posee uno normal débil (κ, κ^+)-irregular

Demostración. Sea $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ su primera función, hacemos $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{D}\}$, que es normal débil. Pensemos que es (κ, κ^+)-regular y sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ el testigo de la regularidad. Entonces $\mathcal{S}' = \{f^{-1}[X] \mid X \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{D}$ y al tomar κ elementos $f^{-1}[X_\xi]$ en $\mathcal{S}'$ tenemos $\bigcap_{\xi<\kappa} f^{-1}[X_\xi] = f^{-1}[\bigcap_{\xi<\kappa} X_\xi] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$. Una contradicción porque si $\mathcal{D}$ es (κ, κ^+)-irregular, entonces también $\mathcal{U}$ tiene que serlo. $\square$

Si tomamos κ singular, cualquier ultrafiltro uniforme en κ^+ es (κ, κ^+)-regular, porque $\{\alpha < \kappa^+ \mid cf(f(\alpha)) = \kappa\} = \emptyset$.

Ya hemos probado que la (κ, κ^+)-irregularidad implica la existencia de una primera función. Queremos ver en qué otros casos de irregularidad esto se cumple. Para esto tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.16. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro (μ, κ)-irregular en κ, donde $\omega \leq \mu \leq \kappa$. Si $\mathcal{D}$ no posee una primera función, entonces podemos encontrar una sucesión de funciones $\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$, $f_\alpha : \kappa \to \kappa$ y una sucesión de ordinales $\langle \rho_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \kappa^\kappa$ con*

1. *ninguna f_α está acotada módulo $\mathcal{D}$,*
2. *$\alpha < \beta$ implica $[f_\beta] < [f_\alpha]$,*
3. *$\alpha < \beta$ y $\rho_\beta \leq f_\alpha(\xi)$ implican $f_\beta(\xi) \leq f_\alpha(\xi)$.*

Demostración. Por recursión definimos dichas sucesiones. Pensemos que ya tenemos f_α y ρ_α hasta $\gamma < \kappa$. Si $\gamma = \delta + 1$, hacemos $\rho_\gamma = \rho_\delta$ y f_α cualquier función no acotada, según $\mathcal{D}$, con $[f_\gamma] < [f_\delta]$ y $f_\gamma(\xi) \leq f_\delta(\xi)$. Para γ límite veamos que existe $\rho < \kappa$ tal que para $\eta \in (\rho, \kappa)$, $\{\xi < \kappa \mid \alpha < \gamma \wedge \rho \leq f_\alpha(\xi) \to \eta \leq f_\alpha(\xi)\} \in \mathcal{D}$ y hagamos $\rho_\gamma = \rho$. Ahora supongamos que no existe tal ρ y definamos una sucesión $\langle \beta_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ como

$$\begin{gathered}\beta_0 = \sup\{\rho_\alpha \mid \alpha < \gamma\},\\ \beta_{\xi+1} = \text{mín}\{\eta > \beta_\xi \mid \{\zeta < \kappa \mid (\exists \alpha < \gamma)\beta_\xi \leq f_\alpha(\zeta) < \eta\} \in \mathcal{D}\},\\ \beta_\xi = \sup\{\beta_\alpha \mid \alpha < \xi\}, \text{ para } \xi \text{ límite.}\end{gathered}$$

Pero la familia $\{Y_\xi \mid \xi < \kappa\} \subset \mathcal{D}$ donde $Y_\xi = \{\zeta < \kappa \mid (\exists \alpha < \gamma)\beta_\xi \leq f_\alpha(\zeta) < \beta_{\xi+1}\}$ contradice la (μ, κ)-irregularidad porque obtendríamos una sucesión de ordinales $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ con

$$\beta_0 \leq f_{\alpha_0}(\zeta) < f_{\alpha_1}(\zeta) < ... < f_{\alpha_\xi}(\zeta) < ...$$

y entonces $\alpha_0 > \alpha_1 > ... > \alpha_\xi > ....$ Luego dicho ρ existe y podemos hacer $\rho_\gamma = \rho$, aún más podemos pensar que $\rho_\gamma > \sup_{\alpha < \gamma} \rho_\alpha$. Luego definimos f_γ como

$$f_\gamma(\xi) = \begin{cases} \text{mín}\{f_\alpha(\xi) \mid \rho_\gamma \leq f_\alpha(\xi)\} & \text{si } (\exists \alpha < \gamma) f_\alpha(\xi) \geq \rho_\gamma, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por definición de γ_ρ, $\{\xi < \kappa \mid f_\gamma(\xi) \neq 0\} \in \mathcal{D}$. Si f_γ estuviera acotada módulo $\mathcal{D}$, podemos encontrar $\eta < \kappa$ con $[f_\gamma] < [\eta]$, pero de nuevo por definición de γ_ρ tendríamos $\{\zeta < \kappa \mid (\exists \alpha < \gamma)\beta_\xi \leq f_\alpha(\zeta) < \eta\} \in \mathcal{D}$. □

Teorema 1.3.17. *Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro en κ que es (μ, λ)-irregular para $\omega \leq \mu \leq \lambda < \kappa$, entonces $\mathcal{D}$ tiene una primera función.*

Demostración. Pensemos que no existe; sea $\rho = \sup_{\alpha<\lambda} \rho_\alpha$, como $\lambda < \kappa$ tenemos $\rho < \kappa$. Luego hagamos $X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid f_\alpha(\xi) > f_{\alpha+1}(\xi) > \rho\}$, por lo que $X_\alpha \in \mathcal{D}$. Ocurre $\bigcap_{\zeta<\mu} X_{\alpha_\zeta} = \emptyset$, de lo contrario se obtendría una sucesión decreciente de ordinales, lo cual contradice la (μ, λ)-irregularidad. □

Corolario 1.3.18. Si κ posee un ultrafiltro (μ, λ)-irregular, entonces posee uno normal débil y (μ, λ)-irregular

Demostración. Como antes hacemos $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{D}\}$. $\mathcal{U}$ resulta normal débil y (μ, λ)-irregular. □

1.3.1. Ideales y aún más Regularidad

Es muy natural pensar que una forma de obtener ultrafiltros con un alto grado de irregularidad es a través de ideales. Damos dos condiciones de ideales con las cuales obtenemos un ultrafiltro irregular. Con este fin trabajamos sobre ideales en álgebras Booleanas y sin pérdida de generalidad pensamos que estamos en un álgebra de conjuntos. En lo sucesivo κ es regular, $|X| = \kappa$, $\kappa \subset X$. Los resultados de esta sección son debidos a Huberich [3].

Definición. *Sean $\mathcal{B}$ una álgebra Booleana y μ, κ cardinales. Decimos que $\mathcal{B}$ es*

- *μ-completa si $\bigcup \mathcal{X} \in B$, para todo $\mathcal{X} \in [B]^{<\mu}$.*
- *Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es una subálgebra, decimos que es regular cuando cualquier anticadena máxima en $\mathcal{A}$ es máxima en $\mathcal{B}$.*

Recordamos e introducimos cierta notación, donde $0 = \emptyset$ y $1 = \bigcup B$:

- $B^+ = B \setminus \{0\}$ y si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es una subálgebra entonces $A^+ = A \setminus \{0\}$.
- para $A \subset B$, $A^* = \{1 \setminus a \mid a \in A\}$.
- Si $F \subset B$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces $F_+ = \{x \in B \mid F \cup \{x\}$ tiene la propiedad de intersección finita$\}$.

- Dado $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ un ideal, $x \sim_{\mathcal{I}} y$ es la relación de equivalencia dada por $\mathcal{I}$: $x \triangle y \in \mathcal{I}$. Y $\mathcal{B}/\mathcal{I} = \{[x]_{\mathcal{I}} \mid x \in B\}$, donde $[x]_{\mathcal{I}} = \{y \in B \mid y \sim_{\mathcal{I}} x\}$ es la clase de equivalencia correspondiente.[14]

Lema 1.3.19. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es una subálgebra regular si y solo si para cada $x \in B^+$ existe $y \in A^+$ de tal suerte que para cada $v \in A^+$ con $v \subset y$, tenemos $v \cap x \neq 0$.*

Demostración. Pensemos que cada anticadena máxima de $\mathcal{A}$ es máxima en $\mathcal{B}$. Sea $x \in B$, $x \neq 0$. Sea $C \subset A$ una anticadena máxima, podemos suponer que $x \notin C$ porque si $x \in C$, entonces $x \in A$ y, como $\mathcal{A}$ es un subálgebra elegimos $y \in A^+$ de tal suerte que $v \subset x$, para $v \subset y, v \neq 0$, simplemente tomando $y = x$. Entonces siendo C máxima, tanto en A como en B, x es comparable con algún $w \in C$. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $w \subset x$. Lo cual es suficiente para la implicación.

Ahora veamos la afirmación inversa. Sea $x \in B^+$ tal que para cada $y \in A^+$ existe $v \in A^+$ con $v \cap x = \emptyset$, donde $v \subset y$. Entonces existe una anticadena C con $v \in C$, en $\mathcal{A}$ y $C \cup \{x\}$ es una anticadena en $\mathcal{B}$. □

Cuando x, y son como se pide en la afirmación decimos que y es la $\mathcal{A}$-proyección de x.

Definición. *Decimos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ es un ideal fino si para cada $\xi \in \bigcup X$, $\{x \in X \mid \xi \in x\} \in \mathcal{I}^*$.*

Es decir, si $X = \kappa$, $\mathcal{I}$ es fino si $\{\alpha < \kappa \mid \xi < \alpha\} = (\xi, \kappa) \in \mathcal{I}^*$. Esto es, siempre que cualquier ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ sea uniforme.

Definición. *Dada una álgebra de Boole $\mathcal{B}$ y $X, Y, Z \subset \mathcal{B}$, decimos que Z es una Y-cubierta de X si para toda $x \in X \cap Y$ existe $y \in Z$ de tal suerte que $x \cap y \in Y$.*

Lema 1.3.20. *Para $\kappa > \omega$, sea $\mathcal{B}$ κ-completa e $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ un ideal. Para cada $X \in [B]^{\leq\kappa}$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ en $\mathcal{B}$ tal que para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta $Z \subset X$ de B existe $Y \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup Y \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Enumeramos X como $\{x_\xi \mid \xi < \kappa\}$. Para $\xi < \kappa$ definimos:

$$X_\xi = \left\{ \bigcap W \mid W \subset \{1\} \cup \{x_\zeta \mid \zeta < \xi\} \wedge W \text{ es finito} \right\}.$$

[14] Como es usual, prescindimos del subíndice siempre que el contexto nos lo permita.

Como $\bigcap\{x_\zeta\} = x_\xi$, entonces $x_\zeta \in X_\xi$ para toda $\zeta < \xi$, $X_\iota \subset X_\xi$ cuando $\iota < \xi$ y además $|X_\xi| < \kappa$.

Luego para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta $Z \subset X$ de B existe $\xi_Z < \kappa$ de tal suerte que $Z \cap X_{\xi_Z}$ es una $\mathcal{I}^+$-cubierta de X_{ξ_Z}: dada dicha cubierta Z y $\xi < \kappa$, con el hecho de que Z es una cubierta, podemos escoger para cada $x \in X_\xi \cap \mathcal{I}^+$

$$z_x \in Z \text{ y } \xi_x \geq \xi$$

de tal suerte que $x \cap z_x \in \mathcal{I}^+$ y $z_x \in X_{\xi_x}$. Entonces $\bar{\xi} = \sup\{\xi_x \mid x \in X_\xi \cap \mathcal{I}^+\}$ es $< \kappa$ porque $|X_\xi| < \kappa$. Con esto definamos $\xi_0 = 0$ y $\xi_{n+1} = \bar{\xi}_n$ y finalmente hacemos $\xi_Z = \sup_{n<\omega} \xi_n$. Sea $u \in \mathcal{I}^+ \cap X_{\xi_Z}$. Como ξ_Z es límite podemos encontrar $n < \omega$ con $u \in \mathcal{I}^+ \cap X_{\xi_n}$ entonces existe $y \in Z \cap X_{\xi_{n+1}} \subset Z \cap X_{\xi_Z}$ con $x \cap y \in \mathcal{I}^+$.

Luego definimos $\mathcal{F} = \{\bigcup(Z \cap X_{\xi_Z}) \mid Z \subset X$ es una $\mathcal{I}^+$-cubierta de $\mathcal{B}\}$. Así $\mathcal{F} \cup \mathcal{I}^*$ tiene la propiedad de intersección finita: si $\vec{Z} \subset X$ son $\mathcal{I}^+$-cubiertas de $\mathcal{B}$ y $\xi_i = \xi_{Z_i}$, podemos pensar que $\xi_i \leq \xi_j$, $i \leq j \leq n$. Como $1 \in \mathcal{I}^+ \cap X_{\xi_i}$ para $i \leq n$, especialmente para $i = 1$ elegimos $x_1 \in Z_1 \cap X_{\xi_1}$ tal que $x_1 \cap 1 = x_1 \in \mathcal{I}^+$. Aún más para $x_1 \in X_{\xi_2}$ podemos escoger $x_2 \in Z_2 \cap X_{\xi_2}$ de tal suerte que $x_1 \cap x_2 \in \mathcal{I}^+$. Repitiendo este proceso terminamos con $x_i \in Z_i \cap X_{\xi_i}$, $i \leq n$, tales que $\bigcap_{i \leq n} x_i \in \mathcal{I}^+$. Como $x_i \subset \bigcup(Z_i \cap X_{\xi_i})$ ocurre

$$\bigcap_{i \leq n} x_i \subset \bigcap_{i \leq n} \bigcup (Z_i \cap X_{\xi_i}) \in \mathcal{I}^+,$$

por lo tanto intersecta a cada elemento de $\mathcal{I}^*$ y de hecho $\mathcal{F} \cup \mathcal{I}^*$ tiene la propiedad de intersección finita. Ahora sea $\mathcal{U} \supset \mathcal{F} \cup \mathcal{I}^*$, si $Z \subset X$ es una $\mathcal{I}^+$-cubierta de B, entonces $Z \cap X_{\xi_Z} \in [Z]^{<\kappa}$ lo es de X_{ξ_Z} y $\bigcup(Z \cap X_{\xi_Z}) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. □

Definición. *Decimos que $D \subset B$ es denso si para cada $x \in B^+$ existe $y \in D$, $y \neq 0$ con $y \subset x$. Decimos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ es un ideal κ-denso si $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ tiene un subconjunto denso de tamaño a lo más κ.*

Corolario 1.3.21. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ un ideal κ-completo y κ-denso, donde $\mathcal{B}$ es κ-completo. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ tal que para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta Z de $\mathcal{B}$ existe $Y \in [Z]^{\leq\kappa}$ con $\bigcup Y \in \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $D \subset \mathcal{B}/\mathcal{I}$ denso con $|D| \leq \kappa$, $D = \{[x_\xi] \mid \xi < \kappa\}$. Podemos pensar, sin pérdida de generalidad, que $\{x_\xi \mid \xi < \kappa\} \subset \mathcal{I}^+$, entonces es denso en $\mathcal{I}^+$. Luego el lema anterior nos da un ultrafiltro

$\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ de tal suerte que para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta $Z \subset \{x_\xi \mid \xi < \kappa\}$ de B existe $C \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup X \in \mathcal{U}$. Aún más, $\mathcal{U}$ es como se requiere: Sea Z la cubierta adecuada. Para $\xi < \kappa$ escogemos $z_\xi \in Z$, $u_\xi \in \{x_\xi \mid \xi < \kappa\}$ y $w_\xi \in \mathcal{I}$ con $x_\xi \cap z_\xi \in \mathcal{I}^+$, $u_\xi \setminus y_\xi \leq x_\xi \cap z_\xi$. Entonces $\{u_\xi \mid \xi < \kappa\}$ es denso en $\mathcal{I}^+$, podemos suponer que es un subconjunto de $\{x_\xi \mid \xi < \kappa\}$ que además es una $\mathcal{I}^+$-cubierta de B. Así obtenemos alguna $\rho < \kappa$ con $\bigcup\{u_{\xi_\alpha} \mid \alpha < \rho\} \in \mathcal{U}$. Luego $\bigcup\{u_{\xi_\alpha} \setminus y_{\xi_\alpha} \mid \alpha < \rho\} \in \mathcal{U}$ por la κ-completud. Todavía más, $u_{\xi_\alpha} \setminus y_{\xi_\alpha} \leq z_{\xi_\alpha}$ implica $\bigcup_{\alpha<\rho} z_{\xi_\alpha} \in \mathcal{U}$, lo cual completa la prueba. □

Lema 1.3.22. *Sean $\omega \leq \gamma < \kappa$ y $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ un ideal normal con $\{x \in X \mid \xi \in x\} \in \mathcal{I}^*$, para cada $\xi < \kappa$. Si $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ es un ultrafiltro con*[15]*:*

1. *$Y = \{x \in X \mid x \cap \kappa$ es $< \gamma$-cerrado $\} \in \mathcal{U}$,*
2. *Para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta Z de $\mathcal{P}(X)$ existe $Y \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup Y \in \mathcal{U}$,*

entonces $\mathcal{U}$ es (γ, κ)-irregular.

Demostración. Supongamos que no lo es y sea $\langle U_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ con $R_x = \{\nu < \kappa \mid x \in U_\nu\} \in \mathcal{U}$; por regularidad $|R_x| < \gamma$ y la función

$$f : X \to \kappa,\ f(x) = \bigcup(R_x \cap x)$$

es regresiva en Y. El conjunto $Z = \{f^{-1}[\{\xi\}] \mid \xi < \kappa\} \cup \{X \setminus Y\}$ forma una $\mathcal{I}^+$ cubierta para $\mathcal{P}(X)$. Sea $V \in \mathcal{I}^+$; así $V \setminus Y \in \mathcal{I}$ y f resulta regresiva en $Y \cap V \in \mathcal{I}^+$. Por normalidad podemos encontrar $\xi < \kappa$ de tal suerte que $f^{-1}[\{\xi\}] \in \mathcal{I}^+$, entonces $V \cap Y \cap f^{-1}[\{\xi\}] \in \mathcal{I}^+$ y por tanto $V \cap f^{-1}[\{\xi\}] \in \mathcal{I}^+$.

Ahora, por la segunda propiedad podemos encontrar, para esta cubierta Z, un $S \in [Z]^\kappa$ con $M = \bigcup S \in \mathcal{U}$, por lo que $\eta = \sup\{\xi < \kappa \mid f^{-1}[\{\xi\}] \in S\} < \kappa$ es tal que $f[M] \subset \eta$. Y dado $x \in M$ se tiene $R_x \cap x \subset \eta$, por lo cual $\eta \notin R_x$ para cualquier de tales x, aún más $x \notin U_\eta$. De donde se sigue que:

$$M \cap U_\eta \cap \{x \in X \mid \eta \in x\} = \emptyset$$

una contradicción. □

[15]Decimos que a es $< \mu$-cerrado si para cada $x \in [a]^{<\mu}$, $\bigcup x \in a$.

Pensemos que $X = \kappa$ e $\mathcal{I}$ es κ-denso, normal y para cada $\alpha < \kappa$, $\{\xi < \kappa \mid \alpha < \xi\} = (\alpha, \kappa) \in \mathcal{I}^*$. Ya vimos que podemos encontrar un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ de tal forma que para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta Z de $\mathcal{P}(\kappa)$, existe $S \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup S \in \mathcal{U}$. Sean $\gamma < \kappa$ un cardinal y $\xi < \kappa$, $X \in [\xi]^{<\gamma}$. Si $cf(\xi) \geq \gamma$ entonces $\bigcup X < \xi$. Así que

$$\{\xi < \kappa \mid cf(\xi) \geq \gamma\} \in \mathcal{U}.$$

De ahí la irregularidad y de ahí que el resultado anterior generalice, en cierto sentido, lo que ya habíamos visto anteriormente.

Del lema anterior y del corolario 1.3.21. obtenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.23. *Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ es κ-denso entonces es κ^+-saturado.*

Demostración. Tomemos $D \subset \mathcal{P}(X)/\mathcal{I}$ denso con $|D| \leq \kappa$, $D = \{[d_\xi] \mid \xi < \kappa\}$. Sea $W = \{[x_\xi] \mid \xi < \kappa^+\} \subset \mathcal{P}(X)/\mathcal{I}$ una familia ajena módulo $\mathcal{I}$. Para cada $\xi < \kappa^+$ sea $[d_{\alpha_\xi}] \in D$ con $[d_{\alpha_\xi}] \subset [x_\xi]$; entonces existe $Y \subset \kappa^+$ con $|Y| = \kappa^+$ y para $\xi, \zeta \in Y$, $[d_{\alpha_\xi}] = [d_{\alpha_\zeta}]$, es decir que si $\xi \in Y$, $[d_{\alpha_\xi}] \subset [x_\rho] \cap [x_\theta]$, $\rho, \theta \in Y$, $\rho \neq \theta$. Esto contradice que W es una familia casi ajena módulo $\mathcal{I}$. □

Shelah [21] demostró que si $\mathcal{I}$ es normal y κ^+-saturado para $\kappa = \gamma^+$ entonces $\{\xi < \kappa \mid cf(\xi) = \gamma\}$. Esto prueba que estos ideales satisfacen $\{x \in X \mid x \cap \kappa \text{ es } < \rho\text{-cerrado}\} \in \mathcal{I}^*$ para $\rho < \kappa$. Por tanto obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.24. Cuando $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ es κ-denso y normal tenemos que para cada $\gamma < \kappa$, $\{x \in X \mid x \cap \kappa \text{ es } < \gamma\text{-cerrado}\} \in \mathcal{I}^*$.

Teorema 1.3.25. *Sean $\kappa > \omega$ regular, X no vacío y $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ un ideal κ-completo y normal con $\{x \in X \mid \alpha \in x\} \in \mathcal{I}^*$. Si $\mathcal{I}$ es κ-denso, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ que es (γ, κ)-irregular para cada $\gamma < \kappa$ y $\{x \in X \mid x \cap \kappa \text{ es } < \gamma\text{-cerrado}\} \in \mathcal{I}^*$.*

Definición. *Decimos que $\mathcal{I}$ es un ideal κ-estratificado si existe una cadena continua*[16] *de álgebras de Boole $\langle \mathcal{B}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ y un estacionario $S \subset \{\xi < \kappa^+ \mid cf(\xi) = cf(\kappa)\}$ de tal forma que*

$$\mathcal{B}/\mathcal{I} = \bigcup\nolimits_{\xi < \kappa^+} \mathcal{B}_\xi$$

y para cada $\xi \in S$, $\mathcal{B}_\xi$ es una subálgebra regular de tamaño $\leq \kappa$. Decimos que $\mathcal{I}$ es κ-estratificado fuerte si $S = \{\xi < \kappa^+ \mid cf(\xi) = cf(\kappa)\}$.

[16] $\langle \mathcal{B}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ es continua si $\bigcup_{\xi < \lambda} \mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_\lambda$.

Usamos la metodología anterior para mostrar la irregularidad. Si podemos encontrar un análogo al corolario 1.3.21 entonces podemos usar el lema 1.3.22 para probar irregularidad bajo estratificación.

Lema 1.3.26. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ una subálgebra regular y ambas álgebras κ-completas. Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ es un ultrafiltro en A, de tal forma que para cada A^+-cubierta $K \subset A$ de A existe $C \in [K]^{<\kappa}$ con $\bigcup C \in \mathcal{U}$. Si $Z \subset \mathcal{B}$ es una B^+-cubierta de B, entonces $\{\bigcup S \mid S \in [Z]^{<\kappa}\}$ es una $\mathcal{U}_+$-cubierta de B.*

Demostración. Sea Z una B^+-cubierta de B y tomemos $u \in \mathcal{U}_+$. Hacemos:

$$Z_A = \{x \in A \mid x \cap u = 0 \vee (\exists y \in Z)x \text{ es la proyección de } u \cap y \text{ en } A\}.$$

Entonces Z_A es una A^+-cubierta para A: sea $v \in A^+$, para $v \cap u = 0$, $v \in A$. De otra forma podemos encontrar $z \in Z$ con $z \cap u \cap v \neq 0$. Ahora sea $w \in A^+$ la proyección de $z \cap u \cap v$. Por lo cual $z \cap u \cap v \cap w \neq 0$ y en particular $w \cap v \neq 0$. Todavía más $w \in Z_A$ porque es la proyección de $z \cap u$.

Por hipótesis existe $C \in [Z_A]^{<\kappa}$ con $\bigcup C \in \mathcal{U}$. Entonces $\bigcup\{v \in C \mid v \cap u = 0\} \in \mathcal{U}$ o $\bigcup\{v \in C \mid (\exists y \in Z)v$ es la proyección de $y \cap u$ en $A\} \in \mathcal{U}$. Como $u \cap \bigcup\{v \in C \mid v \cap u = 0\} = 0$, se sigue que $\bigcup\{v \in C \mid (\exists y \in Z)v$ es la proyección de $y \cap u$ en $A\} \in \mathcal{U}$. Entonces para cada $v \in C$ existe $y \in Z$ tal que v es la proyección de $u \cap y$. Sea $S \in [Z]^{<\kappa}$ de tal forma que para $v \in C$ existe un $y \in Z$ como antes y definamos $\bar{x} = \bigcup S$. Por tanto $\bar{x} \cap u \in \mathcal{U}_+$ ya que si tomamos $w \in \mathcal{U}$ tenemos $w \cap \bigcup C \in \mathcal{U}$, luego podemos encontrar $y \in C$ tal que $w \cap y \neq 0$. En seguida tomamos $z \in S$ tal que y es la proyeccón de $z \cap u$. Como $w \cap z \in A^+$ obtenemos $u \cap w \cap y \cap z \neq 0$, por lo cual $w \cap \bar{x} \cap u \neq 0$ □

Corolario 1.3.27. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{U}$ como antes y pensemos que $|B| \leq \kappa$. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ tal que para cada B^+-cubierta Z de B podemos encontrar $S \in [Z]^\kappa$ con $\bigcup S \in \mathcal{V}$.

Demostración. Usamos una combinación del lema anterior y el lema 1.3.20. Para $X = B$ e $\mathcal{I} =$ el ideal dual de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ podemos obtener $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ de tal suerte que cada $\mathcal{I}^+$-cubierta Z de B, i.e. una $\mathcal{U}_+$-cubierta, existe $Y \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup S \in \mathcal{V}$. Ahora si K es una B^+-cubierta de B y por el lema anterior $Q = \{\bigcup C \mid C \in [K]^{<\kappa}\}$ es una $\mathcal{U}_+$-cubierta de B, podemos encontrar $C \in [Q]^{<\kappa}$ de tal suerte que $\bigcup C \in \mathcal{V}$ y por tanto un $Y \in [K]^{<\kappa}$ con $\bigcup Y \in \mathcal{V}$. □

Teorema 1.3.28. *Suponga $\square_\kappa$, $\kappa > \omega$. Si $\mathcal{I}$ es κ-completo, κ-estratificado fuerte en $\mathcal{B}$ una álgebra κ-completa, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ de tal suerte que para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta Z de B existe $S \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup S \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\langle \mathcal{B}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ un testigo de la κ-estratificación fuerte y $\langle C_\xi \mid \xi < \kappa^+ \wedge \xi \text{ límite} \rangle$ una $\square_\kappa$-sucesión:

- $C_\xi \subset \xi$ es un club.
- $C_\zeta = C_\xi \cap \zeta$, cuando ζ es punto límite de C_ξ.
- para ξ con $cf(\xi) < \kappa$ tenemos $otp(C_\xi) < \kappa$.

En seguida sea $\langle \varsigma_\iota \rangle_{\iota<\kappa^+}$ una enumeración monótona de $S = \{\xi < \kappa^+ \mid cf(\xi) = \kappa\}$, entonces $otp(C_{\varsigma_\iota}) = \kappa$. Para cada $\xi < \kappa^+$ enumeramos $\mathcal{B}_\xi$ como $\langle x^\xi_\eta \rangle_{\eta<\kappa}$ y para $\zeta < \kappa^+$ límite hacemos

$$B^\nu_\zeta = \Big\{ \bigcup X \mid X \subset \{x^\xi_{\varsigma_\iota} \mid \xi < otp(\nu \cap C_\zeta) \wedge \iota \in \nu \cap C_\zeta\}, |X| < \omega \Big\},$$

donde $\nu \in C_\zeta \cup \{\zeta\}$. Ahora, para $\zeta, \zeta' < \kappa^+$ límites y $\nu, \nu' \in C_\zeta \cup \{\zeta\}$:

1. Si $cf(\zeta) < \kappa$, entonces $otp(C_\zeta) < \kappa$ y así $|B^\nu_\zeta| < \kappa$. O si $\nu < \zeta$ entonces $otp(\nu \cap C_\zeta) \leq \nu$, pero si $otp(\nu \cap C_\zeta) = \nu$.
2. Para $\nu \leq \nu'$ como $otp(\nu \cap C_\zeta) \leq otp(\nu' \cap C_\zeta)$, entonces $B^\nu_\zeta \subset B^{\nu'}_\zeta$.
3. Si $cf(\zeta) = \kappa$ entonces $\bigcup_{\nu \in C_\zeta} B^\nu_\zeta = B_{\varsigma_\zeta}$. Porque, para cada $\eta < \kappa$, podemos encontrar $\nu \in C_\zeta$ con $x^{\varsigma_\zeta}_\eta \in B^\nu_\zeta$.
4. En general tenemos, $B^\nu_\zeta \subset B_{\varsigma_\zeta} \subset B_{\varsigma_\nu}$.
5. Cuando ζ es punto límite de $C_{\zeta'}$, tenemos $C_\zeta = \zeta \cap C_{\zeta'}$ y entonces $\zeta \cap C_\zeta = \zeta \cap C_{\zeta'}$ y por tanto $B^\nu_\zeta = B^\nu_{\zeta'}$
6. Si ν es punto límite de C_ζ, tenemos $\nu \cap C_\zeta = C_\nu$ y con los hechos anteriores: $\bigcup_{\alpha \in \nu \cap C_\zeta} B^\alpha_\zeta = B^\nu_\zeta$.
7. Claramente $\{\bigcup Z \mid Z \in [B^\nu_\zeta]^{<\omega}\} \subset B^\nu_\zeta$.

Definimos una sucesión de ultrafiltros $\langle \mathcal{U}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ por inducción. Pensemos que para $\xi < \zeta$ ya está definido y definamos $\mathcal{U}_\zeta$ por casos:

- Si $\zeta = 0$, simplemente obtenemos un ultrafiltro $\mathcal{U}_0$ en $\mathcal{B}_{\varsigma_0}$ con el lema 1.3.20.
- ζ es un sucesor, digamos $\zeta = \xi + 1$. Con el lema 1.3.24 resulta un ultrafiltro $\mathcal{U}_\zeta \supset \mathcal{U}_\xi$, en $\mathcal{B}_{\varsigma_\zeta}$.
- ζ es límite y su cofinalidad es $< \kappa$; definimos

$$Y^\rho_{\varsigma_\zeta} = \big\{ \bigcup Y \mid Y \subset \{x^\alpha_{\varsigma_\zeta} \mid \alpha < \rho\} \wedge |Y| < \omega \big\}.$$

Entonces $|Y^\rho_{\varsigma_\zeta}| < \kappa$ ya que $|B^\zeta_\zeta| < \kappa$ cuando $cf(\zeta) < \kappa$ además $\bigcup_{\alpha<\rho} Y^\rho_{\varsigma_\zeta} = B_{\varsigma_\zeta}$. Luego hagamos $\rho_0 = 0$, si $\delta_n < \kappa$ ya está definido escogemos z^α_x y ρ^α_x, donde $x \in Y^{\rho_n}_{\varsigma_\zeta} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$ y $\alpha \in C_\zeta$, de tal suerte que $x \cap z^\alpha_x \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$ y $z^\alpha_x \in Y^{\rho^\alpha_x}_{\varsigma_\zeta}$. Hacemos $\rho_{n+1} = \sup\{\rho^x_\alpha \mid \alpha \in C_\zeta \wedge x \in Y^{\rho_n}_{\varsigma_\zeta} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+\}$ y $\rho_Z = \sup\{\rho_n \mid n < \omega\}$. Por tanto para cada $B^+_{\varsigma_\zeta}$-cubierta $Z \subset B_{\varsigma_\zeta}$ de B_{ς_ζ} con $\{\bigcup K \mid K \in [Z]^{<\kappa}\}$, $\rho_Z < \kappa$ es tal que $Z \cap Y^{\rho_Z}_{\varsigma_\zeta}$ es una $(\mathcal{U}_\alpha)_+$-cubierta de $Y^{\rho_Z}_{\varsigma_\zeta}$ y aún más es una $(\mathcal{U}_\alpha)_+$-cubierta de B^ζ_ζ ya que $B^\zeta_\zeta \subset Y^{\rho_Z}_{\varsigma_\zeta}$. En seguida definimos

$$\begin{gathered} W_\zeta = \big\{ \bigcup (Z \cap Y^{\rho_Z}_{\varsigma_\zeta}) \mid Z \text{ es una } B^+_{\varsigma_\zeta}\text{-cubierta de } B_{\varsigma_\zeta} \text{ con} \\ \{\bigcup K \mid K \in [Z]^{<\kappa}\} \subset Z \big\} \\ V_\zeta = \big\{ \bigcup Q \mid Q \subset B^\zeta_\zeta \text{ es una } (\mathcal{U}_\alpha)_+\text{-cubierta para cada} \\ \alpha \in C_\zeta \big\}. \end{gathered}$$

Luego $\bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{U}_\xi \cup V_\zeta \cup W_\zeta$ tiene la propiedad de intersección finita: si tomamos $(\mathcal{U}_\alpha)_+$-cubiertas $\vec{Z} \subset B^\zeta_\zeta$ para cada $\alpha \in C_\zeta$ y $\vec{K} \subset B_{\varsigma_\zeta}$ son $B^+_{\varsigma_\zeta}$-cubiertas de B_{ς_ζ} con $\{\bigcup G \mid G \in [K_i]^{<\omega}\} \subset K_i$, sea $x \in \bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{U}_\xi$. Sea $\alpha \in C_\zeta$ tal que $x \in \mathcal{U}_\alpha$ y $\rho_i = \rho_{K_i}$. Es suficiente ver que

$$\bigcap_{i<m} (\bigcup Z_i) \cap \bigcap_{i<n} (\bigcup K_i \cap A^{\rho_i}_{\varsigma_\zeta}) \in (\mathcal{U}_\alpha)_+.$$

Pensemos que $\rho_i \leq \rho_j$ $(i \leq j)$; repetimos un proceso ya usado: como $1 \in B^\zeta_\zeta \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$ podemos encontrar $y_1 \in Z_1$ tal que $y_1 = 1 \cap y_1 \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Puesto que $y_1 \in B^\zeta_\zeta \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$, podemos encontrar $y_2 \in Z_2$ tal que $y_1 \cap y_2 \in B^\zeta_\zeta \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Iterando esto obtenemos $y_i \in Z_i$ con $\bigcap_{i<m} y_i \in B^\zeta_\zeta \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Dado que $K_1 \cap Y^{\rho_1}_{\varsigma_\zeta}$ es

una $(\mathcal{U}_\alpha)_+$-cubierta de B_ζ^ζ podemos encontrar $w_1 \in K_1 \cap Y_{\varsigma_\zeta}^{\rho_1}$ con $w_1 \cap \bigcap_{i<m} y_i \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Como $w_1 \cap \bigcap_{i<m} y_i \in Y_{\varsigma_\zeta}^{\rho_2} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$, es posible hallar $w_2 \in K_2 \cap Y_{\varsigma_\zeta}^{\rho_2}$ tal que $w_1 \cap w_2 \cap \bigcap_{i<m} y_i \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Reproduciendo lo anterior obtenemos $w_i \in K_i \cap Y_{\varsigma_\zeta}^{\rho_i}$ con $\bigcap_{i<n} w_i \cap \bigcap_{i<m} y_i \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Lo cual prueba que de hecho $\bigcap_{i<m}(\bigcup Z_i) \cap \bigcap_{i<n}(\bigcup K_i \cap A_{\varsigma_\zeta}^{\rho_i}) \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Y por tanto $\bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{U}_\xi \cup V_\zeta \cup W_\zeta$ tiene la propiedad de intersección finita; así que sea $\mathcal{U}_\zeta \supset \bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{U}_\xi \cup V_\zeta \cup W_\zeta$ cualquier ultrafiltro en $\mathcal{B}_{\varsigma_\zeta}$.

- ζ es límite y $cf(\zeta) = \kappa$. Ya sabemos que $\varsigma_\zeta = \sup\{\varsigma_\xi \mid \xi < \zeta\}$ y $\mathcal{B}_{\varsigma_\zeta} = \bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{B}_{\varsigma_\xi}$. Definamos $\mathcal{U}_\zeta = \bigcup_{\xi<\zeta} \mathcal{U}_\xi$, que es un ultrafiltro porque si $x \in \mathcal{U}_\zeta$ le podemos asignar una $\xi < \zeta$ de tal suerte que $x \in \mathcal{U}_\xi$ y si $y \supset x$ en $\mathcal{B}_{\varsigma_\zeta}$ también podemos encontrar $\tau < \zeta$ tal que $y \supset x$ en $\mathcal{B}_{\varsigma_\tau}$ y entonces $y \in \mathcal{U}_\tau \subset \mathcal{U}_\zeta$. Si $x, y \in \mathcal{U}_\zeta$ de nuevo podemos encontrar una $\xi < \zeta$ con $x, y \in \mathcal{U}_\xi$, así que $x \cap y \in \mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{U}_\zeta$. Finalmente si $1 \setminus x \notin \mathcal{U}_\zeta$, entonces para ninguna $\xi < \zeta$ ocurre $1 \setminus x \in \mathcal{U}_\xi$, de donde se sigue que $x \in \mathcal{U}_\xi$ para alguna $\xi < \zeta$.

Es claro que $\langle \mathcal{U}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ satisface

(a) $\mathcal{U}_\zeta$ es un ultrafiltro en $\mathcal{B}_{\varsigma_\zeta}$, de tal suerte que para cada $B_{\varsigma_\zeta}^+$-cubierta $Z \subset B_{\varsigma_\zeta}$ de B_{ς_ζ}, existe $K \in [Z]^{<\kappa}$ con $\bigcup K \in \mathcal{U}_\zeta$.

(b) $\mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{U}_\zeta$ para $\xi < \zeta < \kappa^+$.

(c) $V_\zeta \subset \mathcal{U}_\zeta$, cuando ζ es límite y de cofinalidad $< \kappa$.

(b), (c) son inmediatos por construcción. Veamos (a) por casos

- $\zeta = 0$ es inmediato gracias al lema 1.3.20.
- El caso sucesor es consecuencia del corolario 1.3.21.
- Cuando ζ es límite pero de cofinalidad $< \kappa$ ya lo probamos al hacer la construcción.
- Para el caso ζ límite con $cf(\xi) = \kappa$. Tomemos Z una $B_{\varsigma_\zeta}^+$-cubierta como se pide. Sin pérdida de generalidad pensemos que $\{\bigcup C \mid C \in [Z]^{<\kappa}\} \subset Z$. Hacemos $\iota_0 = \min C_\zeta$. Si $\iota_n \in C_\zeta$ ya está definido escogemos, para $\alpha \in \iota_n \cap C_\zeta$ y cada $x \in B_\zeta^{\iota_n} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$, un $\iota_x^\alpha > \iota_n$ y z_x^α con $\iota_x^\alpha > \iota_n$, $z_x^\alpha \cap x \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$, $z_x^\alpha \in B_\zeta^{\iota_x^\alpha}$. Luego hacemos $\iota_{n+1} \geq \sup\{\iota_x^\alpha \mid \alpha \in \iota_n \cap C_\zeta \wedge x \in B_\zeta^{\iota_n} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+\}$,

tal que $\iota_{n+1} \in C_\zeta$, lo cual es posible gracias a que $C_\zeta \subset \zeta$ es un club y $cf(\zeta) = \kappa$. Ahora fijamos $\iota = \sup_{n<\omega} \iota_n$, lo cual da paso a que $\iota < \zeta$ sea límite con $cf(\iota) = \omega < \kappa$. Además, es un punto límite de C_ζ, por lo que $C_\iota = \iota \cap C_\zeta$ y $B_\iota^\iota = B_\zeta^\iota$. Hagamos $Q = Z \cap B_\iota^\iota$, entonces Q es una $(\mathcal{U}_\alpha)_+$-cubierta de B_ι^ι, para $\alpha \in C_\iota$. Por construcción, podemos encontrar $n < \omega$ para $\alpha \in C_\iota$ y $x \in B_\iota^\iota \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$ con $\alpha \in \iota_n \cap C_\zeta$ y $x \in B_\zeta^{\iota_n} \cap (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Así que existe $z_x^\alpha \in Z \cap B_\zeta^{\iota_{n+1}}$ tal que $x \cap z_x^\alpha \in (\mathcal{U}_\alpha)_+$. Por tanto $z_x^\alpha \in Q$ ya que $B_\zeta^{\iota_{n+1}} \subset B_\zeta^\iota = B_\iota^\iota$. De donde resulta que $\bigcup Q \in V_\iota \subset \mathcal{U}_\zeta$.

Finalmente hacemos $\mathcal{V} = \bigcup_{\zeta<\kappa^+} \mathcal{U}_\zeta$, que es un ultrafiltro en $\mathcal{B}$. Si Z es una B^+-cubierta de B, existe $\xi < \kappa^+$ tal que $Z \cap B_{\varsigma_\xi}$ es una $B^+_{\varsigma_\xi}$-cubierta de B_{ς_ξ}. Por lo cual existe $C \in [Z \cap B_{\varsigma_\xi}]^{<\kappa}$ con $\bigcup C \in \mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{V}$. Finalmente hacemos $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ y para cada $\mathcal{I}^+$-cubierta K de B existe $Q \in [K]^{<\kappa}$ con $\bigcup Q \in \mathcal{U}$. □

Lema 1.3.29. *Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ es κ-estratificado entonces es κ^+-saturado.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)/\mathcal{I} = \bigcup_{\xi<\kappa^+} \mathcal{B}_\xi$ una anticadena máxima. Afirmamos que $\{\alpha < \kappa^+ \mid \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\alpha \text{ es máxima}\}$ es un club. Es cerrado gracias a la continuidad de $\langle \mathcal{B}_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$. No está acotado dado que si $\xi < \kappa^+$ entonces existe $\zeta \in S$ con $\xi < \zeta$, es decir que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\zeta$ es una anticadena máxima en $\mathcal{B}_\zeta$.

Entonces existe $\xi \in S$ con $\mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{A}$ máxima en $\mathcal{B}_\xi$. Pero $|\mathcal{B}_\xi| \leq \kappa$ y es una subálgebra regular, es decir $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\xi$ es máxima en $\mathcal{P}(X)/\mathcal{I}$, por tanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\xi = \mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| \leq \kappa$. □

Corolario 1.3.30. Cuando $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ es κ-estratificado y normal tenemos que para cada $\gamma < \kappa$, $\{x \mid x \cap \kappa \text{ es } < \gamma\text{-cerrado}\} \in \mathcal{I}^*$.

Así obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.31 ($\Box_\kappa$)**.** *Sean $\kappa > \omega$, X no vacío y $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ un ideal κ-completo y normal con $\{x \in X \mid \alpha \in x\} \in \mathcal{I}^*$. Si $\mathcal{I}$ es κ-estratificado fuerte, entonces existe un ultratfiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{I}^*$ que es (γ, κ)-irregular para cada $\gamma < \kappa$ y $\{x \in X \mid x \cap \kappa$ es $< \gamma$-cerrado$\} \in \mathcal{I}^*$.*

1.4. $HK(\mu, \kappa)$

En esta sección probamos que si $\neg HK(\kappa^+, \kappa^+)$ entonces κ^{++} es inaccesible en L. A pesar de ser este un hecho conocido no encontramos referencias de su demostración, así que se decidió agregarla.

Definición. *Sea κ regular y $E \subset \kappa$ estacionario. El principio $\diamondsuit_\kappa^+(E)$ es la afirmación: existe una sucesión $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$, $S(\alpha) \subset \mathcal{P}(\alpha)$, $|S(\alpha)| \leq |\alpha|$ y para cada $S \subset \kappa$ existe un club $C \subset \kappa$ tal que si $\alpha \in C \cap E$ entonces $S \cap \alpha, C \cap \alpha \in S_\alpha$. $\diamondsuit_\kappa^+$ es el principio $\diamondsuit_\kappa^+(\kappa)$.*

Definición. *La hipótesis de (κ, λ)-Kurepa es la afirmación: existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ con $|\mathcal{F}| \geq \kappa^+$ y para cada $s \in [\kappa]^\lambda$ tenemos $|\{s \cap X \mid X \in \mathcal{F}\}| < |X|$. A dicha familia $\mathcal{F}$ le llamamos familia de (κ, λ)-Kurepa.*

Claramente $HK(\kappa, \kappa)$ implica HK_κ, como se definió en el capítulo 1 sección 3.

Teorema 1.4.1. *Sea $X \subset \kappa^+$ y supongamos que $V = L[X]$. Entonces $V \models \diamondsuit_{\kappa^+}^+$.*

Demostración. Definamos $f : \kappa \to \kappa$ por casos.

1. Existe $\zeta < \kappa^+$ con $\kappa^+ = (\kappa^+)^{L[X \cap \zeta]}$. Fijemos el menor tal ζ. Para $\alpha < \kappa^+$ tomamos $\mathcal{M}_\alpha = \text{mín}\{\mathcal{M} \preccurlyeq L_{\kappa^+}[X] \mid \kappa \cup \{\kappa, \zeta, \alpha\} \subset \mathcal{M}\}$, y hagamos $f(\alpha) = \kappa^+ \cap \mathcal{M}_\alpha$. Por definición de M_α, $\kappa^+ > \kappa^+ \cap \mathcal{M}_\alpha$.

2. Para $\xi < \kappa^+$ tenemos $(\kappa^+)^{L[X \cap \xi]} < \kappa^+$. Entonces κ^+ es inaccesible en $L[X \cap \xi]$ para cada $\xi < \kappa^+$:

   Prueba. Porque si $\xi < \kappa^+$ atestigua lo contrario, como κ^+ es regular, entonces también lo es en $L[X \cap \xi]$, pero no es inaccesible ahí, así que podemos encontrar $\nu < \kappa^+$ con $\kappa^+ = (|\nu|^+)^{L[X \cap \xi]}$. Tomemos $g \in L_{\kappa^+}[X]$ con $g : \kappa \leftrightarrow \nu$ y sea $\mathcal{N} = \text{mín}\{\mathcal{M} \preccurlyeq L_{\kappa^+}[X] \mid g \in \mathcal{M} \wedge \kappa + 1 \subset M\}$. Sean $\mu = \mathcal{N} \cap \kappa^+$ e Y tales que $\sigma : \mathcal{N} \simeq L_\mu[Y]$. Pero $Y = X \cap \mu$ porque $\mathcal{N}$ es transitivo, si $y \in x \in \mathcal{N}$, entonces $x \in L_{\kappa^+}$ y por tanto

   $$L_{\kappa^+} \models (\exists h)\big(Fun(h) \wedge dom(h) = \kappa \wedge ran(h) = x \wedge (\forall z \in x)(\exists \xi < \kappa) h(\xi) = z\big)$$

   como $\kappa, x \in \mathcal{N}$ y $\kappa \subset \mathcal{N}$, podemos concluir

   $$\mathcal{N} \models (\exists h)\big(Fun(h) \wedge dom(h) = \kappa \wedge ran(h) = x \wedge (\forall z \in x)(\exists \xi < \kappa) h(\xi) = z\big).$$

Es decir, existe $\xi < \kappa$ con $h(\xi) = y \in \mathcal{N}$. Entonces $Y = X \cap \mu$. Ahora, como $g : \kappa \leftrightarrow \nu \in L_\mu[X \cap \mu]$ luego ν tiene tamaño κ en $L_\mu[X \cap \mu]$, así que,

$$L[X \cap \mu] \models \nu \text{ tiene tamaño } \kappa.$$

Tómese $\alpha = \text{máx}\{\xi, \mu\} < \kappa^+$. Esto resulta en que $\kappa^+ = (\kappa^+)^{L[X\cap\alpha]}$, una contradicción. *QED*

Ahora definamos $f(\alpha) = (\kappa^{(3)})^{L[X\cap\alpha]}$; como κ^+ es inaccesible en $L[X \cap \xi]$, para cada $\xi < \kappa$, ocurre $f(\alpha) < \kappa^+$. En este caso fijemos $\zeta = \omega$.

Entonces $f : \kappa^+ \to \kappa^+, \zeta$ quedan bien definidos en ambos casos. En seguida tomemos: $\dot{\alpha} = \text{máx}\{\xi, \zeta\}$, $\xi < \kappa^+$ y definamos:

$$S_\alpha = \mathcal{P}(\alpha) \cap L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}]$$

Afirmación. $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ es una $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$-sucesión.

Prueba. Pensemos que este no es el caso y sea $S \subset \kappa^+$ estacionario tal que para todo $C \subset \kappa^+$ club con $\alpha \in C \to S \cap \alpha \notin S_\alpha$ o $C \cap \alpha \notin S_\alpha$. Pensemos que S es el $<_{L[X]}$-menor testigo. Definamos una sucesión $\langle \mathcal{N}_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$ de subestructuras elementales de $L_{\kappa^{++}}[X]$ de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}
\mathcal{N}_0 = \text{mín}\{\mathcal{N} \prec L_{\kappa^{++}} \mid \kappa \cup \{\kappa, \zeta\} \subset \mathcal{N}\},\\
\mathcal{N}_{\xi+1} = \text{mín}\{\mathcal{N} \prec L_{\kappa^{++}} \mid \mathcal{N}_\xi \cup \{\mathcal{N}_\xi\} \subset \mathcal{N}\} \text{ y}\\
\mathcal{N}_\alpha = \textstyle\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{N}_\xi \text{ para } \alpha \text{ límite.}
\end{gathered}$$

Por ser $\mathcal{N}_\xi$ la menor de tales estructuras en todos los casos, tenemos que al construirla bajo L_{κ^+} resulta la misma estructura, por lo cual resulta transitiva con el mismo argumento de antes. Sea $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$ la sucesión con valores $\alpha_\xi = \mathcal{N}_\xi \cap \kappa^+$; como $\zeta < \kappa^+$ entonces $\alpha_\xi < \kappa^+$, para cualquier $\xi < \kappa^+$. La sucesión es creciente, estrictamente, ya que $\mathcal{N}_\xi \cup \{\mathcal{N}_\xi\} \subset \mathcal{N}_{\xi+1}$ y es continua en los límites porque $\alpha_\lambda = \mathcal{N}_\lambda \cap \kappa^+ = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{N}_\xi \cap \kappa^+ = \bigcup_{\xi<\lambda}(\mathcal{N}_\xi \cap \kappa^+) = \bigcup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi$. En consecuencia, la sucesión es normal. Colapsando cada estructura tenemos $\sigma_\xi : \mathcal{N}_\xi \simeq L_{h(\xi)}[X \cap \alpha_\xi]$.

Afirmación (1)**.** $L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}] \models ZF^-$.

Prueba. Hay dos casos según la definición de f.

1. Hagamos $\pi_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to L_{f(\alpha)}[X \cap f(\alpha)]$. Sabemos que $\mathcal{M}_\alpha \prec L_{\kappa^+}[X] \models ZF^-$, entonces $L_{f(\alpha)}[X \cap f(\alpha)] \models ZF^-$. Por definición, $\dot{\alpha} < f(\alpha)$, entonces $X \cap \dot{\alpha} \in L_{f(\alpha)}[X \cap f(\alpha)]$, así que $L_{f(\alpha)}[X \cap f(\alpha)] \models$ "$L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}] \models ZF^-$", pero por absolutez tenemos $L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}] \models ZF^-$.

2. Para el segundo caso, como α es infinito, $\alpha = \dot{\alpha}$. $L[X \cap \alpha]$ es un modelo de ZF^- y $L[X \cap \alpha]$ sabe que $L_{\kappa^{(3)}}[X \cap \alpha] \models ZF^-$. Y de nuevo por absolutez, $L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}]$ tiene que ser modelo de ZF^-.

QED(1)

Sea $A = \{h(\xi) \mid \xi < \kappa^+\}$ que no está acotado bajo κ^+. Si logramos mostrar que A satisface $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$, entonces obtendremos una clara contradicción. Sabemos que $\zeta < h(\xi) < \alpha_{\xi+1}$, por lo que si α es punto límite de A, existe $\lambda < \kappa^+$ límite con $\alpha_\lambda = \alpha$. Como $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ es $L_{\kappa^{++}}[X]$-definible, también $\langle S_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa^+}$ lo es y a su vez S resulta $L_{\kappa^{++}}[X]$-definible. Luego, $\sigma_\lambda^{-1} : L_{h(\eta)}[X \cap \alpha] \simeq \mathcal{N}_\eta \prec L_{\kappa^{++}}[X]$. Se sigue que $A \cap \alpha$ es definible con $h(\eta)$, $X \cap \alpha$, de la misma manera en que A se define con κ^{++}, X como parámetros. Si logramos mostrar que $S \cap \alpha, A \cap \alpha \in S_\alpha$, es decir $S \cap \alpha, A \cap \alpha \in L_{f(\alpha)}[X \cap \dot{\alpha}]$ habremos terminado.

Afirmación (2)**.** $h(\lambda) < f(\alpha)$.

Prueba. De nuevo por casos en la construcción de f:

1. Como $\kappa^+ = (\kappa^+)^{L[X\cap\zeta]}$ y $\alpha < \kappa^+$, entonces $\alpha < (\kappa^+)^{L[X\cap\zeta]}$. Claramente
$$L_{\kappa^+}[X \cap \zeta] \models \alpha \text{ es de tamaño } \kappa,$$
por construcción de $\mathcal{M}_\alpha \prec L_{\kappa^+}[X]$, $\zeta \in \mathcal{M}_\alpha$, tenemos
$$\mathcal{M}_\alpha \cap L_{\kappa^+}[X \cap \zeta] \prec L_{\kappa^+}[X \cap \zeta]$$
de donde se sigue que
$$\tau_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \cap L_{\kappa^+}[X \cap \zeta] \simeq L_{f(\alpha)}[X \cap \zeta].$$
Todavía más, $\alpha \in M_\alpha$, así,
$$L_{f(\alpha)}[X \cap \zeta] \models \text{“}\alpha \text{ es de tamaño } \kappa\text{”}.$$

$\zeta \leq \dot\alpha$ implica

$$L_{f(\alpha)}[X \cap \dot\alpha] \models \text{“}\alpha \text{ es de tamaño } \kappa\text{”}.$$

Por otro lado, $\alpha > \zeta$ y $\sigma_\lambda^{-1}(\alpha) = \kappa^+$, lo que da paso a

$$\begin{array}{c} \sigma_\lambda^{-1} : L_{h(\lambda)}[X \cap \dot\alpha] \prec L_{\kappa^{++}}[X], \text{ implica} \\ L_{h(\lambda)}[X \cap \dot\alpha] \models \text{“}\alpha \text{ es de tamaño } \kappa\text{”}. \end{array}$$

Por consiguiente $f(\alpha) > h(\lambda)$.

2. Para el segundo caso, como antes ocurre $\sigma_\lambda^{-1} : L_{h(\lambda)}[X \cap \alpha] \prec L_{\kappa^{++}}[X]$ y $\sigma_\lambda^{-1}(\alpha) = \kappa^+$, tenemos

$$L_{h(\lambda)}[X \cap \alpha] \models \text{“}\alpha \text{ es el único cardinal de tamaño } \kappa^+\text{”}.$$

y esto implica $h(\lambda) \leq (\kappa^{++})^{L[X\cap\alpha]}$ y $h(\lambda) < (\kappa^{(3)})^{L[X\cap\alpha]} = f(\alpha)$.

$QED(2)$

QED(afirmación.)

Concluimos que $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ sí es una $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$-sucesión. Lo cual termina la demostración.

□

Nota. $\diamondsuit^+_{\kappa^+}$ implica $HK(\kappa^+,\kappa^+)$, para una prueba remitimos al lector a [16].

Corolario 1.4.2. Con las hipótesis anteriores, $V \models HK(\kappa^+,\kappa^+)$.

Corolario 1.4.3. Si $\neg HK(\kappa^+,\kappa^+)$ entonces κ^{++} es inaccesible en L.

Demostración. Pensemos que no es el caso. Puesto que κ^{++} es regular, tiene que ser regular en L. Además, como $L \models HGC$, podemos encontrar $\gamma < \kappa^{++}$ con $L \models card(\gamma) \wedge \gamma < \kappa^{++} \wedge \gamma^+ = \kappa^{++}$. Ya que $\gamma < \kappa^{++}$ podemos encontrar $X \subset \kappa^+$ de tal suerte que $(\kappa^+)^{L[X]} = \kappa^+$ y $|\gamma|^{L[X]} = \kappa^+$. Por el corolario anterior podemos encontrar $\mathcal{F} \in L[X]$ con

$$L[X] \models \mathcal{F} \text{ es una familia de } (\kappa^+,\kappa^+)\text{-Kurepa},$$

pero $\kappa^{++} = (\kappa^{++})^{L[X]}$ y $\kappa^+ = (\kappa^+)^{L[X]}$, así que $\mathcal{F}$ es una verdadera familia de (κ^+,κ^+)-Kurepa, una contradicción clara. □

Capítulo 2

$0^\sharp$

En este capítulo probaremos la existencia de $0^\sharp$ con diferentes hipótesis sobre ultrafiltros y su inevitable relación con los ultrafiltros.

2.1. $0^\sharp$ en Ausencia de Desmontabilidad.

Los resultados de esta sección son debidos a Silver [22]. A partir de aquí pensaremos que κ es inaccesible y $\mathcal{D}$ es normal no desmontable en κ. Entonces $\mathcal{D}$ posee una partición de κ numerable $\langle E_n \mid n < \omega \rangle$, $E_n \notin \mathcal{D}$, que es menor, es decir que no se puede refinar esencialmente módulo $\mathcal{D}$.

En el primer capítulo, lema 1.2.9, vimos que para $\beta < \kappa$, $\beta^\kappa/\mathcal{D} \simeq \beta^\omega/\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U} = \{S \subset \omega \mid \bigcup_{n\in S} E_n \in \mathcal{D}\}$. Queremos extender eso para L_κ y para algún modelo Q_κ. Para tal fin definimos Q_α:

Definición. *Por recursión ordinal definimos* $\langle Q_\alpha \mid \alpha \in Or \rangle$

(a) $Q_0 = \emptyset$,

(b) $Q_{\alpha+1} = \{y \subset Q_\alpha : y$ *es primer-orden definible en* $\langle Q_\alpha, \in, a\rangle_{a\in Q_\alpha}\} \cup \{y \subset Q_\alpha : |y| \leq 2^{\aleph_1}\}$,

(c) $Q_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$, *y*

(d) $Q = \bigcup_{\alpha\in Or} Q_\alpha$

Queda claro de la definición que $L_\alpha \subset Q_\alpha$ para todo ordinal α. Luego la extensión es bastante inmediata.

Lema 2.1.1. *Para $\mathcal{D}$ normal no desmontable, $\mathcal{U}, \kappa$ como antes y $R \subset \kappa \times \kappa$, existe:*

$$G_1 : \prod_{\alpha<\kappa} \langle L_\alpha, \in, R \restriction \alpha\rangle/\mathcal{D} \simeq \langle L_\kappa, \in, R\rangle^\omega/\mathcal{U}$$

y

$$G_2 : \prod_{\alpha<\kappa} \langle Q_\alpha, \in, R \restriction \alpha\rangle/\mathcal{D} \simeq \langle Q_\kappa, \in, R\rangle^\omega/\mathcal{U}.$$

Aún más $G_1 \subset G_2$.

Demostración. Definimos G_2 y tomamos $G_1 = G_2 \restriction \prod_{\alpha<\kappa} L_\alpha/\mathcal{D}$. Definamos $G_2([f]_\mathcal{D}) = [g]_\mathcal{U}$, donde $g : \omega \to Q_\kappa$ es exactamente como en el caso anterior:

$$\bigcup_{n<\omega} \{\alpha \in E_n : f(\alpha) = g(n)\}.$$

La prueba sigue exactamente como en el lema 1.2.9. $\square$

Lema 2.1.2. *Para $\mathcal{D}$,$\mathcal{U}, \kappa$ como antes. Existen isomorfismos $H_1 \subset H_2$, extendiendo a G_1, G_2 respectivamente, con:*

$$H_1 : \prod_{\alpha<\kappa} \langle L_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D} \simeq \langle L_{\kappa^+}, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}$$

y

$$H_2 : \prod_{\alpha<\kappa} \langle Q_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D} \simeq \langle Q_{\kappa^+}, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}.$$

Demostración. Para $\kappa \leq \beta < \kappa^+$, sea $G_\beta : \prod_{\gamma<\kappa} \langle Q_{\beta(\gamma)}, \in, R \restriction \beta(\gamma)\rangle/\mathcal{D} \simeq \langle Q_\beta, \in R\rangle^\omega/\mathcal{U}$, donde $R = \{f(x,y) : x \in y \wedge x, y \in Q_\beta\}$, $f : Q_\beta \times Q_\beta \leftrightarrow \beta \times \beta$ y $\langle \beta(\gamma)\rangle_{\gamma<\kappa}$. Para $\alpha \leq \beta$ definamos

$$f_{\alpha\beta} : \prod_{\gamma<\kappa} \langle Q_{\alpha(\gamma)}, \in, R \restriction \alpha(\gamma)\rangle/\mathcal{D} \to \prod_{\gamma<\kappa} \langle Q_{\beta(\gamma)}, \in, R \restriction \beta(\gamma)\rangle/\mathcal{D}$$

como

$$f_{\alpha\beta}[\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} = [\langle y_{\beta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$$

para $\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle, \langle y_{\beta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle$ con $\{\gamma < \kappa : x_{\alpha(\gamma)} = y_{\beta(\gamma)}\} \in \mathcal{D}$; claramente $f_{\alpha\beta}$ es un monomorfismo. Hágase $\alpha \leq \beta \leq \delta$, $f_{\alpha\delta} = f_{\beta\delta} \circ f_{\alpha\beta}$: sea $f_{\alpha\delta}[\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} = [\langle x'_{\delta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$, $f_{\alpha\beta}[\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} = [\langle y_{\beta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$ y $f_{\beta\delta}[\langle y_{\beta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} = [\langle y'_{\delta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$.

Cuando $[\langle y'_{\delta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} \neq [\langle x'_{\delta(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$, entonces como $f_{\eta\xi}$ se comporta como la identidad $[\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D} \neq [\langle x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$, una contradicción. Fijemos $\mathcal{Q}$ como el límite directo, i.e. $\mathcal{Q} = \bigsqcup_{\kappa<\beta\leq\kappa^+} \prod_{\gamma<\kappa}\langle Q_{\beta(\gamma)}, \in, R \restriction \beta(\gamma)\rangle/\mathcal{D}$ el cual, por inaccesibilidad y por la definición de R, es isomorfo a $\prod_{\gamma<\kappa}\langle Q_{\gamma^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$.

En seguida tomamos

$$h_{\alpha\beta} : \langle Q_\alpha, \in\rangle^\omega/\mathcal{U} \to \langle Q_\beta, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}$$

como

$$h_{\alpha\beta} = G_\beta \circ f_{\alpha\beta} \circ G_\alpha^{-1}.$$

Y de nuevo obtenemos un límite directo $\mathcal{R}$, tómese $\langle Q_{\kappa^+}, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}$ como tal límite. Así que estos límites directos paralelos definen la aplicación deseada H_2; finalmente tomamos $H_1 = H_2 \restriction \prod_{\lambda<\kappa}\langle L_{\lambda^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$ $\square$

En lo sucesivo usamos $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{x}]$ como abuso de notación para clases. Cuando sea una clase propia solo querrá decir $\varphi^\mathcal{A}[\vec{x}]$, la relativización de φ a $\mathcal{A}$.

Definición. *Sea $\mathcal{A} = \langle A, E\rangle$ un ZF-modelo (posiblemente una clase) $\mathcal{A} \models t$ es un cardinal. Decimos que $\mathcal{W}$ es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro en t cuando*

(a) $\emptyset \notin \mathcal{W}$ *y* $t \in \mathcal{W}$.

(b) $a \in \mathcal{W} \to \mathcal{A} \models a \subset t \wedge |a| = t$, *uniformidad;*

(c) $a \in \mathcal{W}$ *y* $b \in A$ *es tal que* $\mathcal{A} \models a \subset b$ *entonces* $b \in \mathcal{W}$;

(d) si $\mathcal{A} \models a \subset t$ *y* $t \setminus a \notin \mathcal{W}$ *entonces* $a \in \mathcal{W}$;

(e) si $f \in A$ *y* $\mathcal{A} \models Fun(f) \wedge dom(f) = t$ *entonces existe* $w \in A$ *tal que*

$$\mathcal{A} \models w = \{aEt : f(a) \in \mathcal{W}\}$$

que es la docilidad débil;

(f) si $f \in A$, $\mathcal{A} \models Fun(f) \wedge dom(f) = t$ *y* $\{x : f(x) < x\}_E \in \mathcal{W}$, *entonces podemos encontrar* yEt *con*

$$\mathcal{A} \models f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{W},$$

normalidad.

Lema 2.1.3. *Hagamos* $\mathcal{A}_1 = \langle L, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}$, $\mathcal{A}_2 = \langle Q, \in\rangle^\omega/\mathcal{U}$, $\mathcal{B}_1 = \langle L, \in\rangle^\kappa/\mathcal{D}$, $\mathcal{B}_2 = \langle Q, \in\rangle^\kappa/\mathcal{D}$ *y definamos* $K_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$, *como* $K_i[\langle x_n : n < \omega\rangle]_\mathcal{U} = [g]_\mathcal{D}$, *para* $g : \kappa \to V$ *con* $g(\alpha) = x_n$ *si y solo si* $\alpha \in E_n$. *Entonces*

$$\mathcal{W}_i = \{X : \mathcal{A}_i \models X \subset t, t' \in K_i(X)\}$$

es un $\mathcal{A}_i$*-ultrafiltro, para* $i = 1, 2$, *sobre* t*; aquí pensamos que* $t = [\langle \kappa : n < \omega]_\mathcal{U}$ *y* $t' = [id]_\mathcal{D}$.

Demostración. Primero notemos $K_i[\langle \kappa : n < \omega\rangle]_\mathcal{U} = [\langle \kappa : \alpha < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$, porque $K_i[\langle \kappa : n < \omega\rangle]_\mathcal{U} = [g]_\mathcal{D}$ donde $g(\alpha) = \kappa$ si y solo si $\alpha \in E_n$, i.e. g es, respecto equivalencias, la función constante $\langle \kappa : \alpha < \kappa\rangle$. Así que $t' < K_i(t)$. Y $K_i[\langle \emptyset : n < \omega\rangle]_\mathcal{U} = [\langle \emptyset : \alpha < \kappa\rangle]_\mathcal{D}$, por tanto $\emptyset \notin \mathcal{W}_i$. Tomemos $b \in \mathcal{W}_i$ y $\mathcal{A}_i \models b \subset c$, entonces $\mathcal{B}_i \models K_i(b) \subset K_i(c) \to t' \in K_i(c)$. Luego, $t \setminus a \notin \mathcal{W}_i$ implica $t' \notin K_i(a \setminus t)$ por lo cual $\mathcal{B}_i \models t' \in K_i(a)$.

En seguida, si $[x]_\mathcal{U} = X \in \mathcal{W}_i$ y $x = \langle x_n \mid n < \omega\rangle$ entonces $\{n < \omega \mid x_n \subset \kappa\} \in \mathcal{U}$ y $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in g(\alpha)\} \in \mathcal{D}$. Pensemos que $\mathcal{A}_i \models |X| < t$, se sigue que

$$\{n < \omega \mid |x_n| < \kappa\} \in \mathcal{U}.$$

Por inaccesibilidad de κ, $\mu = \sup_{n<\omega} |x_n| < \kappa$. Así que

$$\{n < \kappa \mid |x_n| \leq \mu\} \in \mathcal{U}.$$

Entonces $|\bigcup_{n<\omega} x_n| \leq \mu$. Pero por otro lado sea $K_i(X) = [g]_\mathcal{D}$. Como $t' \in K_i(X)$, por el teorema de Łoś obtenemos

$$\begin{gathered}\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in g(\alpha)\} \in \mathcal{D} \text{ que equivale a} \\ \{\alpha \in \textstyle\bigcup_{n<\omega} E_n \mid \alpha \in g(\alpha)\} \in \mathcal{D} \text{ y a su vez equivale a} \\ \textstyle\bigcup_{n<\omega}\{\alpha \in E_n \mid \alpha \in g(\alpha)\} \in \mathcal{D} \text{ y esto último es lo mismo que} \\ \textstyle\bigcup_{n<\omega}\{\alpha \in E_n \mid \alpha \in x_n\} \in \mathcal{D}\text{, es decir} \\ \textstyle\bigcup_{n<\omega}(E_n \cap x_n) \in \mathcal{D}.\end{gathered}$$

Sin perder la generalidad pensamos que $x_n \subset \kappa$. Entonces

$$\begin{gathered}\textstyle\bigcup_{n<\omega} E_n \cap \bigcup_{n<\omega} x_n \in \mathcal{D}\text{, así que} \\ \kappa \cap \textstyle\bigcup_{n<\omega} x_n \in \mathcal{D}.\end{gathered}$$

Por tanto $\bigcup_{n<\omega} x_n \in \mathcal{D}$, y por uniformidad de $\mathcal{D}$, $|\bigcup_{n<\omega} x_n| = \kappa$. Lo cual contradice nuestra conclusión anterior.

Luego hacemos f con $\mathcal{A}_i \models Fun(f) \wedge dom(f) = t$ y $\mathcal{A}_i \models \{x : f(x) < x\} \in \mathcal{W}_i$. De lo cual resulta $\mathcal{B}_i \models (K_i(f) : K_i(\{x : f(x) < x\}) \to K_i(t)$ es regresiva). Ahora hagamos $G_2(K_i(f)(t')) = y$, por tanto $\mathcal{A}_i \models (f^{-1})(\{y\}) \in \mathcal{W}_i$ y como $\mathcal{B}_i \models t'E\{x : f(x) < x\}$, entonces $t' < f(t')$ y $K_i \circ G_i$ funge como la identidad.

Finalmente, pensemos que $\mathcal{A}_i \models f : t \to \mathcal{P}(t)$. Sea $\mathcal{B} = \langle B, E\rangle = \langle V, \in\rangle^\kappa/\mathcal{D}$ y $s' = (t'^+)^{\mathcal{B}}$, i.e. $[\langle \alpha^+ : \alpha < \kappa\rangle]_{\mathcal{D}}$. Es suficiente probar que:

$$d = \{x \in t' : t' \in K_i(f)(x)\}^{\mathcal{B}_i}$$

es un elemento de $\prod_{\lambda<\kappa} M_{\lambda^+}$, $M_i = L_i, Q_i$; porque $H_i(d)$ será el w requerido. Pero $d \in \prod_{\lambda<\kappa} W_{\lambda^+}$, es una implicación del siguiente lema.

Lema 2.1.4. *Si $\nu = \nu^{2^{\aleph_1}}$, entonces cualquier subconjunto de ν en $M(= L, Q)$ está en M_{ν^+}.*

Y como κ es inaccesible fuerte existen κ de estos cardinales $< \kappa$, porque si $\mu < \kappa$, entonces $\mu^{2^{\aleph_1}}$ satisface lo anterior. □

Teorema 2.1.5. *Si $\mathcal{D}$ es normal no desmontable en κ inaccesible entonces existe $0^\sharp$.*

Demostración. Tenemos dos casos $cf(\kappa^+)^L \leq 2^{\aleph_1}$ o $> 2^{\aleph_1}$. Veremos que en el primer caso $0^\sharp$ existe; y pensando que ocurre el segundo caso veremos que esto conlleva la existencia de un cardinal Ramsey en $\mathcal{A}_1$ lo que se opone a $V = L$ en $\mathcal{A}_1$.

- $cf(\kappa^+)^L \leq 2^{\aleph_1}$. Ya que Q contiene a todos los subconjuntos de κ^+ de tamaño $\leq 2^{\aleph_1}$, tenemos $(\kappa^+)^L < (\kappa^+)^Q$. Así que

  $$Q \models (\exists f)(Fun(f) \wedge dom(f) = \kappa \wedge ran(f) = \mathcal{P}(\kappa) \cap L);$$

  por el teorema de Łoś

  $$\mathcal{A}_2 \models (\exists f)(Fun(f) \wedge dom(f) = t \wedge ran(f) = \mathcal{P}(t) \cap L).$$

  Recordando que $\mathcal{W}_2$ es un $\mathcal{A}_2$-ultrafiltro sobre t que extiende al $\mathcal{A}_1$-ultrafiltro $\mathcal{W}_1$ sobre t concluímos que:

  $$\mathcal{A}_2 \models \text{ existe un } L\text{-ultrafiltro sobre } t \text{ que es } \omega_1\text{-completo}$$

De nuevo por el teorema de Łoś, lo mismo ocurre en Q y recordando que L es absoluta entre ZF-modelos transitivas se puede concluir que, de hecho, lo mismo ocurre en V. Entonces por el teorema de Kunen[1] $0^\sharp$ existe.

- $cf(\kappa^+)^L > 2^{\aleph_1}$. Sea $a \in |\mathcal{A}_1|$ tal que $\mathcal{A}_1 \models a < t^+$; entonces por docilidad débil hagamos $w_a \in |\mathcal{A}_1|$ tal que $\mathcal{A}_1 \models w_a \subset L_a$ y si $\mathcal{A}_1 \models b \in L_a$ entonces $\mathcal{A}_1 \models b \in w_a$ si y solo si $b \in \mathcal{W}_1$. Introducimos un predicado para la relación flecha; sea

$$P(m,a,b) \text{ si y solo si } \mathcal{A}_1 \models m < \omega \wedge a, b < t^+ \wedge (\forall f)(\forall n \leq m)\big((f : [t]^n \to 2 \wedge f \in L_b) \to (\exists c \in w_a)|f[[c]^n]| = 1\big)$$

y

$Q(m,b)$ cuando y solo cuando existe $a < (t^+)^{\mathcal{A}_1}$ con $P(m,a,b)$.

En lo sucesivo n, n' varían sobre $\omega_{\varepsilon_1} = \omega^{\mathcal{A}_1}$ y a, a', b, b' sobre $(t^+)_{\varepsilon_1} = (t^+)^{\mathcal{A}_1}$, donde $\mathcal{A}_1 = \langle |\mathcal{A}_1|, \varepsilon_1\rangle$. Ahora veamos que

(a) $P(n,a,b)$, $b' \leq b$, $a \leq a'$ y $n' \leq n$ implican $P(n', a', b')$.

(b) Y si $(\forall b)Q(m,b)$ entonces $(\forall b)Q(m+1,b)$.

(a) es inmediato de la definición: sean $b' \leq b$, $a \leq a'$, $n' \leq n$. Cuando $\mathcal{A}_1 \models f : [t]^{n'} \to 2 \wedge f \in L_{b'}$, podemos asumir que $\mathcal{A}_1 \models dom(f) = [t]^n$ porque podemos definir $g \in L_{b'}$ como $g(\{\xi_0, \ldots \xi_{n'1}, \xi_{n'}, \ldots, \xi_{n-1}\}) = f(\{\xi_0, \ldots, \xi_{n'-1}\})$ y $\mathcal{A}_1 \models f, g \in L_b$ ya que $b' \leq b$, así que existe c con $\mathcal{A}_1 \models c \in w_a \wedge |g[[c]^n]| = 1$ pero si $\{\vec{\xi}\} \in [c]^n$ entonces $\{\xi_0, \ldots, \xi_{n'-1}\} \in [c]^{n'}$ y $f(\{\xi_0, \ldots, \xi_{n'-1}\}) = g(\{\vec{\xi}\})$. Además $\mathcal{A}_1 \models w_a \subset w_{a'}$. Por tanto $P(n', a', b')$.

Para ver (b) procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ la normalidad de $\mathcal{W}_i$ asegura este hecho. Supongamos que se cumple para n, sea $f : [t]^{n+1} \to 2 \in L_b$; definimos $g : [t]^n \to 2 \in L_b$ como $g(\{\vec{\xi}\}) = f(\vec{\xi}, \zeta\})$. Entonces obtenemos $c \in w_a$ tal que $\mathcal{A}_1 \models |g[[c]^n]| = 1$, por definición de f obtenemos que $\mathcal{A}_1 \models |f[[c]^n]| = 1$.

Fijemos $I = \{n : (\forall b)Q(n,b)\}$.

[1]La existencia de $0^\sharp$ es equivalente a la existencia de un L-ultrafiltro iterable que a su vez es equivalente a la existencia de un L-ultrafiltro ω_1-completo, [8]

Afirmación 2.1.6. $I = \omega_{\varepsilon_1}$.

Demostración. Pensemos que no. Hagamos $I' = \omega_{\varepsilon_1} \setminus I$. Por (b) I no tiene un mayor elemento, así que I' no posee un elemento menor. Para $n \in I'$ sea b_n un testigo para $\neg Q(n, b_n)$. Como ω_{ε_1} tiene tamaño a lo más $2^{\aleph_1}$, mientras que el teorema de Łoś asegura que $t^+_{\varepsilon_1}$ tiene cofinalidad $> 2^{\aleph_1}$, entonces se puede hacer $b' = \bigcup_{n \in I'} b_n < t^+_{\varepsilon_1}$. Notemos que, gracias al inciso (a), para $n \in I'$ tenemos $\neg Q(n, b')$. Análogamente, obtenemos un a' tal que $P(n, a', b')$ para $n \in I$. Así que $I' = \{n : \neg P(n, a', b')\}$ y como P está definida dentro $\mathcal{A}_1$ entonces existe $Y \in |\mathcal{A}_1|$ con $Y_{\varepsilon_1} = I'$, contradiciendo

$$\mathcal{A}_1 \models \text{cada conjunto de ordinales tiene un mínimo.}$$

□

Tomando b con $\mathcal{A}_1 \models b < t^+$ y a_n, $n < \omega_{\varepsilon_1}$, tal que $P(n, a_n, b)$, podemos tomar $\mathcal{A}_1 \models a = \bigcup_{n<\omega} a_n < t^+$ y por tanto $(\forall b)(\exists a)(\forall n) P(n, a, b)$. Ahora $\mathcal{A}_1 \models w_a$ es ω_1-completo, por tanto $\mathcal{A}_1 \models t \to (t)^{<\omega}$ lo cual claramente contradice que $\mathcal{A}_1 \models V = L$.

□

2.2. Sobre el Modelo Q.

En la sección anterior procedimos suponiendo que Q es un modelo de ZF y que Q es transitivo. Aquí desarrollamos la prueba.

Lema 2.2.1. *Q es transitivo y ZF^Q.*

Demostración. Veamos $Q_\beta \subset Q_\alpha$ para $\beta < \alpha$ y la transitividad a la par. Por inducción en Q_α: para $\alpha = 0$, $Q_0 = 0$ es inmediatamente transitivo y la propiedad de la sucesión transitiva se satisface trivialmente. Ahora pensémoslo válido para α y veamos $\alpha + 1$: para $x \in Q_\alpha$ por transitividad $x \subset Q_\alpha$, con Σ_0-absolutez:

$$x = \{y \in Q_\alpha | Q_\alpha \models y \in x\} \in Q_{\alpha+1}.$$

Ahora tomemos $x \in y \in Q_{\alpha+1}$, entonces $x \in y \subset Q_\alpha$. El caso límite es trivial: si $x \in y \in Q_\alpha$, entonces existe $\eta < \alpha$ con $y \in Q_\eta$ que ya es transitivo, entonces $x \in y \subset Q_\alpha$.

Notemos que $\alpha \subset Q_\alpha$. Por inducción en α como antes. Para $\alpha = 0$ es trivial porque $x \notin Q_0 = \emptyset$. Supóngamoslo para α; es bien sabido que α es definible en $\langle Q_\alpha, \in, x\rangle_{x \in Q_\alpha}$ entonces[2] $\alpha \in Q_\alpha$, por tanto $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 \subset Q_{\alpha+1}$. Esto prueba $On \subset Q$. En seguida veamos ZF^Q.

Extensionalidad y Fundación: Por transitividad se cumplen en Q.

Infinito: $|\emptyset| = 0, |\omega| = \aleph_0 < 2^{\aleph_1}$ y $\emptyset, \omega \subset Q_\omega$, por tanto $\emptyset, \omega \in Q$ así que el axioma de infinito y de existencia se satisfacen.

Par: Tomando $x, y \in Q$ y α con $x, y \in Q_\alpha$ $|\{x, y\}| < 2^{\aleph_1}$, tenemos $\{x, y\} \in Q_{\alpha+1} \subset Q$.

Comprensión: Tomemos cualquier $\mathcal{L}_\in$-fórmula φ y $x \in Q$ and α con $x \in Q_\alpha$. Por el principio de reflexión, aplicado a la jerarquía $\langle Q_\alpha | \alpha \in On\rangle$, encontramos $\beta > \alpha$ con la propiedad:

$$\text{Para cualquier } \vec{a} \in Q_\beta,\ \varphi^Q[\vec{a}] \leftrightarrow \varphi^{Q_\beta}[\vec{a}].$$

Ahora hagamos $y = \{u \in Q_\beta | Q_\beta \models \varphi(u) \wedge u \in x\}$, por elección de β $y = \{u \in Q | \varphi^Q(u) \wedge u \in x\}$ e $y \in Q$.

Unión: $\big(\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x) z \in u)\big)^Q$. Tomemos $x \in Q$, por unión en V sea $y = \bigcup x$. Luego sea α tal que $x \in Q_\alpha$, tomando $z \in y$, obtenemos la existencia de $u \in x$ con $z \in u \in x \in Q_\alpha$, así que por transitividad $z \in Q_\alpha$. Entonces $y \subset Q_\alpha$, aún más:

$$y = \{u \in Q_\alpha | Q_\alpha \models (\exists v \in x) u \in v\} \in Q_{\alpha+1}$$

Remplazo: Sea φ una fórmula con parámetros que se comporta como función. Sea f_φ la función definida por φ y tomemos $x \in Q$, sea $y = f_\varphi[x]$ en V. Claramente $f_\varphi[x] \subset Q$, aún más, para cada $u \in f_\varphi[x]$ existe α con Q_α, tomemos el menor α_u con dicha propiedad y $\beta = \sup_{u \in f_\varphi[x]} \alpha_u$,. Es claro que $f_\varphi[x] \subset Q_\beta$. Más aún,

$$f_\varphi[x] = \{u \in Q_\beta | Q_\beta \models (\exists y \in x) \varphi(u, y)\} \in Q_{\beta+1}.$$

Conjunto Potencia: sea $x \in Q_\alpha$, $y = \mathcal{P}(x) \cap Q$. Para cada $u \in y$ sea $f(u) = \text{mín}\{\alpha | u \in Q_\alpha\}$. Podemos usar unión y remplazo: para cualquier $\gamma \geq \sup f[y]$ tenemos $y = \{u \in Q_\gamma | Q_\gamma \models u \subset x\} \in Q_{\gamma+1}$. $\square$

[2] Todavía más $Q_\alpha = \{y \in Q_\alpha | Q_\alpha \models y = y\}$, entonces $Q_\alpha \in Q_{\alpha+1}$.

Lema 2.2.2. *Sea $\mu^{2^{\aleph_1}} = \mu$, entonces cualquier $x \subset \mu$, $x \in Q$, es un elemento de Q_{μ^+}*

Demostración. Usamos esto al construir el $\mathcal{A}_i$-ultrafiltro. $i = 1, 2$. Hay dos casos, si $|x| \leq 2^{\aleph_1}$, como $\mu^{2^{\aleph_1}} = \mu$, se cumple $|[\mu]^{\leq 2^{\aleph_1}}| = \mu$ y podemos encontrar $\gamma < \mu^+$ con $x \in Q_\gamma \subset Q_{\mu^+}$. Ahora, si x es definible en $\langle Q_\mu, \in, a\rangle_{a \in Q_\mu}$, entonces $x \in Q_{\mu+1}$. $\square$

2.3. $0^\sharp$ bajo Irregularidad.

Usaremos la idea de la sección pasada para demostrar la existencia de $0^\sharp$ con una condición de irregularidad. Los métodos y resultados siguientes son debidos a Ketonen [12]. Supongamos que κ es regular y cualquier ultrafiltro sobre κ es uniforme. Para ver la existencia de $0^\sharp$ trabajamos con distintos ultraproductos del universo de Gödel L o de sus estratos hasta κ, $\langle L_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$. De nuevo usamos la relación de satisfacción para conjuntos y clases propias indistintamente.

Los resultados principales son:

Si existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ en κ que es (μ, κ)-irregular para cada $\mu < \kappa$ y es normal débil, entonces $0^\sharp$ existe.
Si existe un ultrafiltro $\mathcal{D}$ en κ^+ que es (κ, κ^+)-irregular entonces $0^\sharp$ existe.

Claramente la primer afirmación implica la segunda porque, como ya vimos, los ultrafiltros $\mathcal{D}$ en κ^+ que son (κ, κ^+)-irregulares también son p-punto, entonces tiene una primera función f. Así que $\mathcal{U} = \{X \subset \kappa^+ \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{D}\}$ es normal débil y (κ, κ^+)-irregular; aún más, es (μ, κ^+)-irregular para $\mu < \kappa$, porque si $\{\xi < \kappa^+ \mid cf(f(\xi)) < \mu\} \in \mathcal{U}$ entonces $\{\xi < \kappa^+ \mid cf(f(\xi)) < \mu\} \subset \{\xi < \kappa^+ \mid cf(f(\xi)) < \kappa\} \in \mathcal{U}$, lo cual no es el caso.

Definición. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro en κ, definimos*

- $\prod^*_{\mathcal{D}} L = \{[f] \mid f : \kappa \to L, |ran(f)| < \kappa\}$.
- $\prod^L_{\mathcal{D}} L = \{[f] \mid f : \kappa \to L, f \in L\}$.
- $\prod^{**}_{\mathcal{D}} L = \{[f] \mid f : \kappa \to L, |ran(f)| < \kappa, f \in L\}$.

Usamos esta misma notación para ultraproductos entre diferentes estratos de L o para ultrapotencias de alguno de los estratos.

Lema 2.3.1. *Sean $i : L \to \prod^* L/\mathcal{D}$ el encaje $i(x) = [x]$ y $j : \prod^* L/\mathcal{D} \to \prod L/\mathcal{D}$, el encaje inducido por la inclusión. Entonces j, i inducen un diagrama conmutativo y $j \circ i = d$, donde d es el encaje diagonal i.e. $d(a) = [a]$*[3]*.*

[3]Ahora obtenemos toda la clase $[x]$ y no solo la clase con funciones de tamaño pequeño ($< \kappa$).

Demostración. Por el teorema de Łoś $i : L \to \prod^* L/\mathcal{D}$ es un encaje, así como $d : L \prec \prod L/\mathcal{D}$; si $x \in L$ entonces $(j \circ i)(x) = j([x]) = d(x)$. Luego

$$\begin{array}{c} \prod^* L/\mathcal{D} \models [x]E[y] \text{ si y solo si} \\ \{\xi < \kappa \mid x(\xi) \in y(\xi)\} \in \mathcal{D} \text{ si y solo si} \\ \prod L/\mathcal{D} \models [x]E[y] \text{ si y solo si} \\ \prod L/\mathcal{D} \models j([x])Ej([y]). \end{array}$$

Por lo que de hecho es un encaje. □

A partir de aquí $\mathcal{D}$ será normal débil. Hacemos $[\kappa] = \bar{\kappa}$, $[id] = \bar{\iota}$. En consecuencia:

Lema 2.3.2. *Si* $X = \{[f] \in \prod^*_{\mathcal{D}} L \mid \prod^*_{\mathcal{D}} L \models [f]E\bar{\lambda}\}$ *e* $Y = \{[f] \in \prod_{\mathcal{D}} L \mid \prod_{\mathcal{D}} L \models [f]E\bar{\iota}\}$. *Entonces* $j : X \to Y$ *es sobre.*

Demostración. Si $[f]E\bar{\iota}$, entonces por normalidad débil existe $\gamma < \kappa$ con $[f]E[\gamma]$, así que podemos encontrar[4] $g : \kappa \to L$ con $|ran(g)| < \kappa$, $[g] = [f]$ de donde se deduce $j([g]) = [f]$. □

Veamos, ahora, que con normalidad débil se satisfacen todos, salvo la docilidad débil, los axiomas de M-ultrafiltro para una ultrapotencia de L.

Lema 2.3.3. *Definamos*

$$\mathcal{U} = \{[f] \mid \prod^*_{\mathcal{D}} L \models [f] \subset \bar{\kappa}, \prod_{\mathcal{D}} L \models \bar{\iota}Ej([f])\}.$$

Se cumple

1. *Para* $x \in \mathcal{U}$, $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models |x| = \bar{\kappa}$.
2. *Si* $x, y \in \mathcal{U}$, *entonces*

$$\begin{array}{c} \prod^*_{\mathcal{D}} L \models x \cup y = \bar{\kappa} \textit{ implica } x \in \mathcal{U} \textit{ o } y \in \mathcal{U}. \\ \prod^*_{\mathcal{D}} L \models x \cap y = [\emptyset] \textit{ implica } x \notin \mathcal{U} \textit{ o } y \notin \mathcal{U}. \end{array}$$

3. *Sea* $f \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ *tal que* $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models f : \bar{\kappa} \to \bar{\kappa}$ *es regresiva. Existen* $y \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ *y* $[z] \in \mathcal{U}$ *con*

$$\prod^*_{\mathcal{D}} L \models yE\bar{\kappa} \wedge [z] = f^{-1}[\{y\}]$$

[4]Solo hagamos $g(\xi) = f(\xi)$ cuando ξ es tal que $f(\xi) < \gamma$ y $f(\xi) = 0$ en cualquier otro caso.

4. *Si* $f \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ *es tal que* $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models Fun(f) \wedge dom(f) = u \wedge uE\bar{\kappa}$ *y* $f(v) \in \mathcal{U}$ *para* $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models vEu$. *Entonces*

$$\prod^*_{\mathcal{D}} L \models y = \bigcap_{vEu} f(v)$$

implica que $y \in \mathcal{U}$.

Demostración. Para 1, como $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models x \subset \bar{\kappa}$ y $\prod_{\mathcal{D}} L \models \bar{\iota}Ej(x)$, sea $[f] = x$ con $f : \kappa \to L$ y $|ran(f)| < \kappa$, si $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models |x| < \bar{\kappa}$, por el teorema de Łoś:

$$\{\alpha < \kappa \mid L \models |f(\alpha)| < \kappa\} \in \mathcal{D}$$

y por otro lado

$$\{\alpha < \kappa \mid L \models \alpha \in f(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Como $|ran(f)| < \kappa$ tenemos $\mu = \sup_{\alpha<\kappa} |f(\alpha)| < \kappa$, ahora tenemos

$$\{\alpha < \kappa \mid |f(\alpha)| \leq \gamma\} \in \mathcal{D}$$

pero entonces podemos pensar, conservando la generalidad, que $f(\alpha) \subset \gamma$ módulo $\mathcal{D}$. Así que para $\alpha \geq \gamma$, $\alpha \notin f(\alpha)$. Una clara contradicción.

2. Es inmediato porque, debido al teorema de Łoś, $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models \bar{\iota}E\bar{\kappa} = x \cup y$, así que $x \in \mathcal{U}$ o $y \in \mathcal{U}$, $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models \neg\bar{\iota}E[\emptyset] = x \cap y$ entonces $x \notin \mathcal{U}$ o $y \notin \mathcal{U}$.

Probamos 4 luego 3. Sea $g \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ como en 4. Sabiendo $g(v) \in \mathcal{U}$ para $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models vEu$, tenemos $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models (\forall vEu) g(v) \subset \bar{\kappa}$ y $\prod_{\mathcal{D}} L \models (\forall vEu)\bar{\iota}Eg(v)$, así que $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models \bigcap_{vEu} g(v) \subset \bar{\kappa}$ y $\prod_{\mathcal{D}} L \models \bar{\iota}E\bigcap_{vEu} g(v)$, por tanto $\bigcap_{vEu} g(v) \in \mathcal{U}$.

Ahora sea $[f] \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ tal que $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models [f] : \bar{\kappa} \to \bar{\kappa}$ es regresiva; se sigue que $X = \{\xi < \kappa \mid L \models f(\xi) : \kappa \to \kappa \text{ es regresiva}\} \in \mathcal{D}$; por normalidad débil podemos encontrar γ_ξ para cada $\xi \in X$ con $f(\xi)(\zeta) < \gamma_\xi$ para los elementos ζ de algún $Y_\xi \in \mathcal{D}$, como $|ran(f)| < \kappa$ también $|\{\gamma_\xi \mid \xi \in X\}| < \kappa$; hágase $\gamma = \sup\{\gamma_\xi \mid \xi \in X\} < \kappa$. Claramente $f(\alpha)(\zeta) < \gamma$ para cualquier $\zeta \in Y = \bigcup_{\xi \in X} Y_\xi \in \mathcal{D}$ y cualquier $\alpha \in X$. Así que, por uniformidad de $\mathcal{U}$, podemos encontrar $[w] \in \mathcal{U}$ con $xE[w]$ y por $\bar{\kappa}$-completud de $\mathcal{U}$, se puede hallar $yE[\gamma]E\bar{\kappa}$ y $[z] \in \mathcal{U}$ tales que $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models [f]^{-1}[\{y\}] = [z]$. □

Si $f : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ es de rango $< \kappa$, de la definición se sigue claramente que

$$[f] \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \xi \in f(\xi)\} \in \mathcal{D}.$$

Para probar la docilidad débil construimos un isomorfismo $H : \prod^* L_{\kappa^+}/\mathcal{D} \simeq \prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D}$.

Teorema 2.3.4. *Existe un isomorfismo F*

$$F : \prod^* \langle L_\kappa, \in, R\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod_{\alpha<\kappa} \langle L_\alpha, \in, R \restriction \alpha^2\rangle/\mathcal{D}$$

donde $R \subset \kappa^2$ es arbitrario.

Demostración. Sea $[f] \in \prod^* \langle L_\kappa, \in, R\rangle/\mathcal{D}$, entonces $|ran(f)| < \kappa$, $f : \kappa \to L_\kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$ podemos encontrar $\xi(\alpha) < \kappa$ con $f(\alpha) \in L_{\xi(\alpha)}$ y como $|ran(f)| < \kappa$, también tenemos $|\{\xi(\alpha) \mid \alpha < \kappa\}| < \kappa$, así que $\varsigma = \sup_{\alpha<\kappa} \xi(\alpha) < \kappa$. Claramente $f : \kappa \to L_\varsigma$.

Afirmación. Para cada $x \in \prod_{\mathcal{D}} \langle L_\alpha, \in, R \restriction \alpha^2\rangle$, existen $\xi < \kappa$, $k : \kappa \to L_\xi$ tal que $x = [k]$.

Prueba. Sea $<_L$ el buen orden de L. $[f] \in \prod_{\alpha<\kappa} \langle L_\alpha, \in, R \restriction \alpha^2\rangle/\mathcal{D}$, entonces $f : \kappa \to \bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha$ y $f(\alpha) \in L_\alpha$, definimos $h_f(\alpha) = \xi$ si y solo si $f(\alpha)$ es el ξ-ésimo elemento de $\langle L_\alpha, <_{L_\alpha}\rangle$; como $otp(L_\alpha) = \alpha$, para cada f como antes, h_f es una función regresiva. Entonces $[h_f] \leq [\nu_f]$ por normalidad débil, así que $f(\alpha) \in L_{\nu_f}$, módulo $\mathcal{D}$, es decir que existe $g_f : \kappa \to L_{\nu_f}$ con $[g_f] = [f]$. *QED*

Ya vimos que para cada $[f] \in \prod^* \langle L_\kappa, \in, R\rangle/\mathcal{D}$, f es de la forma $f : \kappa \to L_\alpha$, para alguna $\alpha < \kappa$. Así que podemos definir una función $F : \prod^*_{\mathcal{D}} L_\kappa \to \prod_{\mathcal{D}} L_\alpha$ satisfaciendo todas las propiedades anteriores, que de entrada es sobreyectiva. Pero, por construcción, como $F([f]) = [g]$ implica que $\{\xi < \kappa \mid L_\kappa \models f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{D}$, si $x \neq y$ entonces $F(x) \neq F(y)$, por lo cual F es de hecho inyectiva. De la misma manera vemos que si $F([f_1]) = [g_1]$ y $F([f_2]) = [g_2]$, entonces

$$\{\xi < \kappa \mid L_\kappa \models f_1(\alpha) \in f_2(\alpha)\} \in \mathcal{D} \text{ si y solo si}$$
$$\{\xi < \kappa \mid L_\kappa \models g_1(\alpha) \in g_2(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

solo porque $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2$ módulo $\mathcal{D}$. □

Teorema 2.3.5. *Existe un isomorfismo H entre $\prod^* \langle L_{\kappa^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$ y un E-segmento inicial de $\prod_{\alpha<\kappa} \langle L_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$. Además $H \supset F$.*

Demostración. Sean $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ un ordinal primitivo recursivo cerrado[5], $R^\alpha \subset \kappa^2$ una relación tal que $\langle \kappa, R^\alpha\rangle \simeq \langle L_\alpha, \in\rangle$ y σ_α un isomorfismo que atestigüe lo anterior. Entonces, para cada $\alpha \in [\kappa, \kappa^+)$ primitivo recursivo cerrado, tenemos

$$K_\alpha = \{\mu < \kappa \mid \langle \mu, R^\alpha \restriction \mu^2\rangle \prec \langle \kappa, R^\alpha\rangle\},$$
$$S = \{\mu < \kappa \mid L_\alpha \cap \sigma_\alpha[\mu] = L_\alpha \cap \sigma_\beta[\mu]\},\ (\alpha < \beta),$$

K_α es un club, por tanto $K_\alpha \in \mathcal{D}$ y S contiene al club $\{\mu < \kappa \mid \sigma_\alpha[\mu] = \mu\} \cap \{\mu < \kappa \mid \sigma_\beta[\mu] = \mu\}$, así que también $S \in \mathcal{D}$. Ahora, hagamos $g^\alpha : \kappa \to \kappa$ de tal forma que $g^\alpha(\mu) < \mu^+$ y

$$\langle L_{g^\alpha(\mu)}, \in\rangle \simeq \langle \mu, R^\alpha\rangle$$

para $\mu \in K_\alpha$ y 0 en cualquier otro caso. Por construcción sabemos que

$$\prod{}^*\langle L_\alpha, \in\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod{}^*\langle \kappa, R^\alpha\rangle/\mathcal{D}$$

y

$$\prod\nolimits_{\mu<\kappa}\langle \mu, R^\alpha \restriction \mu^2\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod\nolimits_{\mu<\kappa}\langle L_{g^\alpha(\mu)}, \in\rangle/\mathcal{D},$$

además por el teorema anterior,

$$\prod\nolimits_{\mu<\kappa}\langle \mu, R^\alpha \restriction \mu^2\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod{}^*\langle \kappa, R^\alpha\rangle/\mathcal{D};$$

lo que da paso a un isomorfismo canónico

$$H_\alpha : \prod{}^*\langle L_\alpha, \in\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod\nolimits_{\mu<\kappa}\langle L_{g^\alpha(\mu)}, \in\rangle/\mathcal{D}.$$

Recordemos que $S \in \mathcal{D}$, así que si $\alpha < \beta < \kappa^+$ son primitivo recursivo cerrados y $x \in \prod^*\langle L_\alpha, \in\rangle/\mathcal{D}$, ocurre $H_\alpha(x) = H_\beta(x)$.

Sea $H = \bigcup\{H_\alpha \mid \alpha \in [\kappa, \kappa^+)$ es primitivo recursivo cerrado$\}$; por lo que acabamos de demostrar H es una función bien definida y si $[f] \in \prod^*\langle L_{\kappa^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$, entonces como $|ran(f)| < \kappa$ podemos encontrar $\xi < \kappa^+$ tal que $f : \kappa \to L_\xi$, aún más podemos encontrar $\alpha > \xi$ primitivo recursivo cerrado de tal manera que $f : \kappa \to L_\alpha$, así que $H([f]) = H_\alpha(x)$, está bien definida y tiene tanto el dominio como el rango deseados.

En seguida veamos que preserva la E-pertenencia. Si $x, y \in \prod^*\langle L_{\kappa^+}, \in \rangle/\mathcal{D}$ son tales que $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \in g(\xi)\} \in \mathcal{D}$, para $x = [f], y = [g]$ y $\beta < \kappa^+$ es de tal forma que $f, g : \kappa \to L_\beta$, entonces como cada H_η sí

[5] I.e. es cerrado bajo las operaciones ordinales básicas; el conjunto de dichos ordinales, bajo κ^+, forma un club en κ^+.

preserva la relación E, tenemos $H_\beta(x)EH_\beta(y)$, pero $H_\beta(z) = H(z)$, para todo z con representación en L_β.

Finalmente veamos que H de hecho va a un segmento inicial de $\prod_{\alpha<\kappa}\langle L_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$. Sean $y \in \prod_{\alpha<\kappa}\langle L_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$ y $x \in \prod^*\langle L_{\kappa^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$ tales que $yEH(x)$; queremos encontrar $z = [g]$, $ran(g) < \kappa$ y $H(z) = y$, tomemos $\alpha < \kappa^+$ de tal forma que $H(x) = H_\alpha(x)$, entonces si $H_\alpha(x) = [h]$, $y = [f]$, tenemos $h, f : \kappa \to L_\alpha$ y $\{\xi < \kappa \mid h(\xi) \in f(\xi)\} \in \mathcal{D}$. Aún más, por normalidad débil, podemos encontrar $\nu_h < \kappa$, de tal forma que $h : \kappa \to L_{\nu_h}$ y como $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) \in h(\xi)\} \in \mathcal{D}$ entonces podemos encontrar $g : \kappa \to L_{\nu_h}$ con $[f] = [g]$. Además, $|L_{\nu_h}| < \kappa$ implica que $|ran(g)| < \kappa$ y así H_α está definido para $z = [g]$, pero por construcción del isomorfismo en el teorema anterior $H_\alpha(z) = [f] = y$. Lo cual concluye la prueba. $\square$

De la demostración se deduce que si $\langle g^\alpha\rangle$ formara un sucesión cofinal en $\prod_{\mathcal{D}} \alpha^+$ entonces H claramente sería un isomorfismo. Para verificar esto apelamos al siguiente lema.

Lema 2.3.6. *Para cada $\alpha < \beta < \kappa^+$ p.r. cerrado existe un club $K_{\alpha\beta}$ tal que $\xi \in K_{\alpha\beta}$ implica $g^\alpha(\xi) < g^\beta(\xi)$.*

Demostración. Como $\alpha < \beta$ y $\langle \kappa, R^\alpha\rangle \simeq \langle L_\alpha, \in\rangle$, $\langle \kappa, R^\beta\rangle \simeq \langle L_\beta, \in\rangle$, podemos encontrar un isomorfismo σ que aplique $\langle \kappa, R^\alpha\rangle$ en un R^β-segmento inicial propio de $\langle \kappa, R^\beta\rangle$, porque L_α es un segmento inicial propio de L_β. Por tanto, existe $\mu < \kappa$ con $\sigma(\xi)R^\beta\mu$ para cada $\xi < \kappa$. Hagamos $K_{\alpha\beta} = (\mu, \kappa) \cap \{\xi < \kappa \mid \sigma \restriction \xi : \xi \to \xi\} \cap K_\alpha \cap K_\beta$, donde K_α, K_β son como en la demostración del teorema anterior. Entonces $K_{\alpha\beta}$ es club porque es la intersección de cuatro clubes y si $\xi \in K_{\alpha\beta}$, $g^\alpha(\xi) < g^\beta(\xi)$, porque por definición, $L_{g^\alpha(\xi)}$ es un segmento inicial propio de $L_{g^\beta(\xi)}$. $\square$

Por tanto, $\langle g^\alpha\rangle$ es una familia de funciones finalmente distintas módulo $\mathcal{D}$.

Teorema 2.3.7. *Si $\mathcal{D}$, además de ser normal débil, es (μ, κ)-irregular para cada $\mu < \kappa$, entonces H es un isomorfismo.*

Demostración. Es suficiente mostrar que las $\langle g^\alpha\rangle$ son cofinales en $\prod_{\mathcal{D}} \alpha^+$ porque esto hará a H una función sobreyectiva. Pensemos que este no es el caso y sea $h : \kappa \to \kappa$ de tal forma que $h(\xi) < \xi^+$ y $[g^\alpha] < [h]$. Puesto que $h(\xi) < \xi^+$ podemos tomar $f_\xi : h(\xi) \to \xi$ inyectiva. Hacemos $h_\alpha(\xi) = f_\xi(g^\alpha(\xi))$; por definición de f_ξ, h_α tiene que ser regresiva módulo $\mathcal{D}$, y más aún, debido a que las funciones g^α son finalmente diferentes y f_ξ es inyectiva, $\langle h_\alpha \rangle$ es una familia finalmente distinta según $\mathcal{D}$. Por normalidad débil encontramos $\nu_\alpha < \kappa$ con $[\nu_\alpha] > [h_\alpha]$. Definamos una función $f : \kappa \to \kappa$; primero notemos que al tener κ^+ funciones h_α de κ en κ, entonces para cada $\xi < \kappa$, podemos encontrar κ^+ ordinales primitivo recursivo cerrados α y un $\delta_\xi < \kappa$ con $h_\alpha(\xi) = \delta_\xi$, digamos que para cada $\xi < \kappa$, $A_\xi = \{\alpha < \kappa^+ \mid h_\alpha(\xi) = \delta_\xi\}$. Tomemos $B_0 = A_0$, supongamos que B_ξ ya está definido y hagamos $B_{\xi+1} = \{\alpha \in B_\xi \mid h_\alpha(\xi + 1) = \delta_{\xi+1}\}$, es decir, que en el paso sucesor tomamos el nivel anterior y nos fijamos en los índices en los que $\xi + 1$ es constante para κ^+ de estos índices y en el paso límite hacemos $B_\xi = B_0 = A_0$. Definamos $f : \kappa \to \kappa$ como $f(\xi) = \delta_\xi + 1$, entonces, por construcción de los B_ξ obtenemos que $[h_\alpha] < [f]$ para una cantidad no acotada de $\alpha < \kappa^+$; pensemos, sin perder generalidad, que esto sucede para todas las α que son primitivo recursivo cerradas. Además f es regresiva en los límites – ya que las h_α lo son – por tanto existe $\eta < \kappa$ con $[h_\alpha] < [\eta]$ y entonces podemos pensar que $h_\alpha : \kappa \to \eta$. Entonces hemos encontrado una familia de funciones $\{h_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subset \eta^\kappa$ que son finalmente diferentes, así que $\mathcal{D}$ es (η, κ)-regular, una contradicción.

Como $\mathcal{D}$ es normal débil, extiende al filtro de clubes $\mathcal{C}_\kappa$ que es κ-completo. Tenemos encontrado una familia de funciones $h_\alpha : \kappa \to \nu$ finalmente distinta que está acotada módulo $\mathcal{D}$, lo cual implica que $\mathcal{D}$ es (ν, κ)-regular. Una contradicción. □

A partir de aquí $\mathcal{D}$ será (μ, κ)-irregular y normal débil, $\mu < \kappa$.

Teorema 2.3.8. *$\mathcal{U}$ es un $\prod^*_{\mathcal{D}} L$-ultrafiltro.*

Demostración. Solo resta probar la docilidad débil. Sea F tal que $\prod^*_{\mathcal{D}} L \models F : \bar{\kappa} \to V$; sin pérdida de generalidad pensamos que $F : \bar{\kappa} \to \mathcal{P}(\bar{\kappa})$, donde $\mathcal{P}(\bar{\kappa}) = \{X \in \prod^*_{\mathcal{D}} L \mid \prod^*_{\mathcal{D}} L \models X \subset \bar{\kappa}\}$. Sea $x \in \prod_{\mathcal{D}} L$ tal que $\prod_{\mathcal{D}} L \models x = \{yE\bar{\iota} \mid \bar{\iota}Ej(F)(y)\}$. Primero veamos que $H^{-1}(x)$ tiene sentido, es decir que x está en el rango de H. Sea $F = [f]$ y $j(F) = [f']$, así

$$\prod\nolimits_{\mathcal{D}} L \models [g]Ex \text{ si y solo si } \prod\nolimits_{\mathcal{D}} L \models [g]E\bar{\iota}Ej(F)([g]) \text{ si y solo si } \{\xi < \kappa \mid L \models g(\xi) < \xi \in f'\big(g(\xi)\big)\} \in \mathcal{D}.$$

Luego si $x = [h]$, tenemos

$$\{\xi < \kappa \mid L \models g(\xi) \in h(\xi) \leftrightarrow g(\xi) < \xi \in f'\big(g(\xi)\big)\} \in \mathcal{D},$$

y claramente $h(\xi) \subset \xi$, entonces $h(\xi) \in L_{\xi^+}$ y por tanto $x \in \prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D}$; por lo cual

$$\prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D} \models x = \{yE\bar{\imath} \mid \bar{\imath}Ej(F)(y)\}.$$

$H^{-1}(x)$ queda bien definido. Ahora queremos ver que

$$F(v) \in \mathcal{U} \text{ cuando y solo cuando } \textstyle\prod^*_{\mathcal{D}} L \models vEH^{-1}(x).$$

Para lo cual notemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{gathered}
\textstyle\prod^*_{\mathcal{D}} L \models vEH^{-1}(x) \text{ si y solo si}\\
\textstyle\prod^*_{\mathcal{D}} L_{\kappa^+} \models vEH^{-1}(x) \text{ si y solo si}\\
\textstyle\prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D} \models H(v)Ex \text{ si y solo si}\\
\textstyle\prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D} \models H(v)E\bar{\imath}Ej(F)\big(H(v)\big) \text{ si y solo si}\\
\textstyle\prod_{\mathcal{D}} L_{\alpha^+} \models vEH^{-1}(\bar{\imath})EF(v) \text{ si y solo si}\\
\textstyle\prod_{\mathcal{D}} L_{\alpha^+} \models vE\bar{\imath}EF(v) \text{ si y solo si}\\
F(v) \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

□

Teorema 2.3.9. *κ es compacto débil en L. Aún más, es Π^1_n-indescriptible en L para cada $n < \omega$.*

Demostración. Sea $\varphi = \forall X_1 \exists X_2 ... \psi$ una fórmula Π^1_n. Si, $R \subset \kappa^m$ es definible y $(\langle \kappa, <, R\rangle \models \varphi)^L$ y $\vec{X} \subset \kappa$, deducimos $\vec{X}, \kappa, R \in L_{\kappa^+}$, por lo cual $(\langle \kappa, <, R\rangle \models \varphi)^{L_{\kappa^+}}$. Con el encaje i logramos $(\langle \bar{\kappa}, <, [R]\rangle \models \varphi)^{\prod^* L_{\kappa^+}/\mathcal{D}}$ y con H concluimos $(\langle H(\bar{\kappa}), <, H\big([R]\big)\rangle \models \varphi)^{\prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D}}$, es decir $\{\alpha < \kappa \mid (\langle \alpha, <, R \restriction \alpha^m\rangle \models \varphi)^{L_{\alpha^+}}\} \in \mathcal{D}$. □

Note que esto es más fuerte que Π^1_n-indescriptible y recuerde que Π^1_1-indescrip-tible implica compacto débil.

Lema 2.3.10. *Si $\langle x(\alpha)\rangle_{\alpha<\kappa}$ es un sucesión de conjuntos definibles con $x(\alpha) \subset \alpha$, entonces existe $f : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ de tal forma que $|ran(f)| < \kappa$ y $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \cap \alpha = x(\alpha)\} \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Como $x(\alpha) \subset \alpha$, $x(\alpha) \in L$, entonces de hecho $x(\alpha) \in L_{\alpha^+}$. Así que $[x] \in \prod_{\alpha<\kappa} L_{\alpha^+}/\mathcal{D}$. Tomemos $[f] \in \prod^* L^{\kappa^+}/\mathcal{D}$ con $H([f]) = [x]$. Entonces por el teorema de Łoś

$$\{\alpha < \kappa \mid x(\alpha) = f(\alpha) \cap \alpha\} \in \mathcal{D}.$$

□

Queremos ver que $\kappa^+ > (\kappa^+)^L$. Para este fin hagamos:

Teorema 2.3.11. *Si* $\kappa^+ = (\kappa^+)^L$ *entonces*

$$\prod\nolimits^{**}\langle L_{\kappa^+}, \in\rangle/\mathcal{D} \simeq \prod\nolimits^{L}_{\alpha<\kappa}\langle L_{\alpha^+}, \in\rangle/\mathcal{D}$$

Demostración. Solo requerimos que las R^α, para $\alpha < \kappa^+$ primitivo recursivo cerrado, sean definibles. Pero sí podemos encontrar una biyección $f_\alpha : L_\alpha \leftrightarrow \alpha$ con $f_\alpha \in L$ y entonces definimos $\xi R^\alpha \zeta$ cuando y solo cuando $f_\alpha^{-1}(\xi) \in f_\alpha^{-1}(\zeta)$. Y la prueba sigue exactamente igual que en el caso para V. □

A partir de aquí pensaremos que $\kappa^+ = (\kappa^+)^L$. Siendo κ compacto débil, por el teorema de Łoś obtenemos

Teorema 2.3.12. *Si* $f : [\kappa]^n \to 2$ *es definible, entonces existe* $X : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa)$ *definible y* $|ran(X)| < \kappa$ *tal que* $X(\alpha)$ *es homogéneo para* f *y* $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X(\alpha)\} \in \mathcal{D}$.

Aún más podemos encontrar S estacionario y homogéneo para $f : [\kappa]^n \to 2$ definible:

Lema 2.3.13. κ *es inefable en* L.

Demostración. Probaremos $\kappa \to (\text{estacionario})^2_2$; véase [5]. Sea $f : [\kappa]^2 \to 2$ definible. Por ser compacto débil podemos encontrar X con $|f\big[[X]^2\big]| = 1$, luego $g(\xi) = X$ tiene rango de tamaño $< \kappa$ y $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in g(\alpha)\} = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\} = X \in \mathcal{D}$ entonces X es estacionario. □

Corolario 2.3.14. Para $X : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa) \cap L$, podemos encontrar $f : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ con $|ran(f)| < \kappa$ y tal que si $g : \kappa \to \kappa$ tiene rango de tamaño $< \kappa$, entonces

$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\big(g(\alpha)\big)\} \in \mathcal{D}$ si y solo si $\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \in f(\alpha)\} \in \mathcal{D}$.

Demostración. Primero $|ran(X \circ g)| \leq |ran(g)| < \kappa$, por lo que $[X \circ g] \in \mathcal{U}$ si y solo si $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\big(g(\alpha)\big)\} \in \mathcal{D}$. Ahora, por docilidad débil podemos encontrar $[f] \in \prod^*_{\mathcal{D}} L$ con $[X \circ g] \in \mathcal{U} \leftrightarrow [g]E[f]$, que es equivalente a lo que deseábamos probar. □

Definición. *Decimos que* $f : [\kappa]^n \to \kappa$ *es regresiva cuando para* $0 < \xi_1 < ... < \xi_n$*, tenemos* $f(\{\vec{\xi}\}) < \xi_1$.

Teorema 2.3.15. *Si $f : [\kappa]^n \to \kappa$ es regresiva, $f \in L$, entonces podemos encontrar $X \in \mathcal{D} \cap L$ de tal forma que X hace a f acotada, es decir: existe $\gamma < \kappa$ con $f\big[[X]^n\big] \subset \gamma$.*

Demostración. Se procede por inducción en n. El caso $n = 1$ es inmediato por la normalidad débil. Téngase cierto para n y probémoslo para $n+1$. Sea $f : [\kappa]^{n+1} \to \kappa$ regresiva y definamos:

$$g_{\xi_{n+1}}(\{\xi_1, ..., \xi_n\}) = f(\{\vec{\xi}\}),\ \xi_1, ..., \xi_n < \xi_{n+1}$$

Hagamos $\xi = \xi_{n+1}$, entonces $g_\xi \subset [\xi]^n \times \xi$. Tomemos $G : \kappa \to \kappa^{[\kappa]^n}$ de tal suerte que $G(\alpha)$ sea regresiva, $|ran(f)| < \kappa$ y $X = \{\alpha < \kappa \mid g_\alpha = G(\alpha) \restriction \alpha\} \in \mathcal{D}$. Con el mismo argumento que en el teorema 1.3.2, en L obtenemos $Y = \{\alpha < \kappa \mid cf^L(\alpha) > (\xi^+)^L\} \in \mathcal{D}$. Entonces $s(\{\vec{\zeta}\}) = \sup\{G(\alpha)(\{\vec{\zeta}\}) \mid \alpha < \kappa\}$ es regresiva para $\vec{\zeta} \in Y$. Por hipótesis de inducción existe $\gamma < \kappa$ con $s(\{\vec{\zeta}\}) \leq \gamma$ módulo $\mathcal{D} \cap L$, digamos que esto ocurre en $Z \in \mathcal{D} \cap L$. Así que $f\big[[X \cap Z]^{n+1}\big] \subset \gamma$. □

Definición. *Hemos usado implícitamente el orden de Rudin-Keisler para ultrafiltros, aquí lo definimos: Dados dos ultrafiltros $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sobre λ decimos que $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ cuando existe $f : \lambda \to \lambda$ tal que*[6]

$$X \in \mathcal{U} \leftrightarrow f^{-1}[X] \in \mathcal{V}.$$

Y decmos que $f \leq_{RK} g$, módulo $\mathcal{U}$ para $f, g \in \lambda^\lambda$ cuando existe $h : \lambda \to \lambda$ con $[f] = [h \circ g]$.

Teorema 2.3.16. *Sea $\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subset \kappa^\kappa$ tal que cada f_α es acotada. Entonces existen $\beta < \kappa$, $g : \kappa \to \beta$ construible tal que:*

$$f_\alpha \leq_{RK} g,\ \alpha < \kappa.$$

Demostración. Definamos $f : [\kappa]^2 \to \kappa$ como

$$f(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\forall \gamma < \alpha < \beta) f_\gamma(\alpha) = f_\gamma(\beta) \\ \text{mín}\{\gamma < \alpha \mid f_\gamma(\alpha) \neq f_\gamma(\beta)\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el teorema anterior podemos encontrar $\beta < \kappa$, $X \in \mathcal{D} \cap L$ tal que si $\xi, \zeta \in X$ entonces $f(\{\xi, \zeta\}) \leq \beta$, es decir que $(\forall \alpha < \xi < \zeta) f_\alpha(\xi) =$

[6] Esto se puede generalizar fácilmente para el caso en que $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tienen dominios diferentes: digamos que $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre λ y $\mathcal{V}$ uno sobre μ, $\mathcal{D} \leq_{RK} \mathcal{V}$ cuando existe $f : \mu \to \lambda$ tal que $X \in \mathcal{D} \leftrightarrow f^{-1}[X] \in \mathcal{V}$.

$f_\alpha(\zeta)$ o existe $\nu < \beta$ con $f_\nu(\xi) \neq f_\nu(\zeta)$. Ahora, para $\xi < \beta$ tomemos $C_\xi \subset X$, $C_\xi \in L$, de tal forma que $[C_\xi]^2 = f^{-1}[\{\xi\}]$ y $C_\xi \cap C_\zeta = \emptyset$ para $\xi \neq \zeta$. Luego $C = \bigcup_{\xi<\beta} C_\xi \subset X$, $C \in \mathcal{D} \cap L$, entonces C tiene tamaño κ y para $\nu < \beta$, si $\xi, \zeta \in C_\nu$, $(\forall \alpha < \xi < \zeta) f_\alpha(\xi) = f_\alpha(\zeta)$ o si $\xi, \zeta \in C_\nu$, podemos encontrar $\eta < \beta$ con $f_\eta(\xi) \neq f_\eta(\zeta)$. Sin perder generalidad pensemos que cada C_ξ tiene tamaño κ, debido a que las f_α están acotadas en κ y a la regularidad de κ. En L se descarta la segunda posibilidad por inaccesibilidad de κ. Definamos $g : \kappa \to \beta$ como $g(\alpha) = \xi$ para $\alpha \in C_\xi$ y $g(\alpha) = 0$ en otro caso. Como f_ρ es constante en C_ξ podemos encontrar $h : \kappa \to \kappa$[7], $[f_\rho] = [h \circ g]$. □

Corolario 2.3.17. Para cada $\xi < \kappa^+$ podemos encontrar $\rho_\xi < \kappa$ y una función $g_\xi : \kappa \to \rho_\xi$ de tal manera que si $h : \kappa \to \kappa$ están acotada y $h \in L_\xi$ entonces $h \leq_{RK} g_\xi$.

Teorema 2.3.18. *Si $\mathcal{D}$ es tal que,*

$$\prod^{**} \langle L_{(\kappa^+)^L}, \in \rangle / \mathcal{D} \simeq \prod_{\alpha<\kappa}^{L} \langle L_{(\alpha^+)^L}, \in \rangle / \mathcal{D}$$

y

$$|\omega_{\mathcal{D}}^{\kappa}| < \kappa,$$

Entonces $cf\big((\kappa^+)^L\big) < \kappa$.

Demostración. Sea $\rho < \kappa$ arbitrario. Repetimos el argumento de la sección anterior. Pensemos que $cf(\kappa^+)^L > \rho$. Sea $x \in \prod^{**} L/\mathcal{D}$ con $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models x < [\kappa]^+$; por la docilidad débil podemos tomar $w_a \in \prod^{**} L/\mathcal{D}$ tal que $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models w_a \subset L_a$ y cuando $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models b \in L_a$, $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models b \in w_a$ cuando y solo cuando $b \in \mathcal{U}$. Introducimos un predicado para el principio combinatorio de la relación flecha; sea

$$F(n,x,y) \text{ si y solo si } \prod^{**} L/\mathcal{D} \models n < \omega \wedge x, y < [\kappa]^+ \wedge (\forall f)(\forall k \leq n)\big((f : [t]^k \to 2 \wedge f \in L_y) \to (\exists z \in w_x)|f[[z]^k]| = 1\big)$$

y

$$G(n,y) \text{ cuando y solo cuando existe } x < ([\kappa]^+) \text{ con } F(n,x,y).$$

En lo sucesivo n, n' varían en ω_E y x, x', y, y' sobre $[\kappa]^+$. En seguida vemos que

[7] Solo hagamos, para $\xi \in g[C_\zeta]$, $h(\xi) = f_\rho(\zeta)$ y como las f_ρ son costantes en cada C_ζ esto es una definición correcta.

(a) $F(n, x, y)$, $y' \leq y$, $x \leq x'$ y $n' \leq n$ implican $F(n', x', y')$.

(b) Si $(\forall y)G(n, y)$ tenemos $(\forall y)G(n + 1, y)$.

(a) es inmediato de la definición y (b) se muestra con los argumentos usuales[8]. Fijemos $X = \{n : (\forall y)G(n, y)\}$.

Afirmación. $X = \omega_E$.

Prueba. Para llegar a una contradicción pensemos que $X \neq \omega$. Hagamos $X' = \omega_E \setminus X$. Por (b) X no tiene un mayor elemento, así que X' no posee un elemento menor. Para $n \in X'$ sea y_n un testigo para $\neg G(n, y_n)$. Como ω_E tiene tamaño a lo más ρ, mientras que el teorema de Łoś asegura que $[\kappa]^+$ tiene cofinalidad $> \rho$, entonces podemos tomar $y' = \bigcup_{n \in X'} y_n < [\kappa]^+$. Notemos que, por el inciso (a), para $n \in X'$ ocurre $\neg G(n, y')$. Analogamente, encontramos x' tal que $F(n, x', y')$ para $n \in X$. Así que $X' = \{n : \neg F(n, x', y')\}$ y como F está definida en $\prod^{**} L/\mathcal{D}$, existe $Y \in \prod^{**} L/\mathcal{D}$ con $Y_E = X'$, lo que se opone a

$$\prod^{**} L/\mathcal{D} \models \text{cada conjunto de ordinales tiene un mínimo.}$$

QED

Si tomamos y con $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models y < [\kappa]^+$ y x_n, $n < \omega_E$, tales que $F(n, x_n, y)$, podemos lograr $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models x = \bigcup_{n<\omega} x_n < [\kappa]^+$ y por tanto $(\forall y)(\exists x)(\forall n)P(n, x, y)$. Ahora $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models w_a$ es ω_1-completo, por tanto $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models [\kappa] \to ([\kappa])^{<\omega}$ lo cual claramente contradice a $\prod^{**} L/\mathcal{D} \models V = L$. □

Teorema 2.3.19. $(\kappa^+)^L < \kappa^+$

Demostración. Pensemos que $(\kappa^+)^L = \kappa^+$. Entonces $|\omega^\kappa_\mathcal{D}| \geq \kappa$. Sean $\eta < \kappa$ y $g_\gamma : \kappa \to \eta$ de tal forma que si $f \in L_\gamma$, existe $h : \kappa \to \kappa$ con $[f] = [h \circ g_\gamma]$. Así que $\{[f] \mid f \in L_\gamma \wedge f : \kappa \to \omega\}| \leq (\eta^+)^L$, además por suposición $(\eta^+)^L < \kappa^+ = (\kappa^+)^L$, así $|\omega^\kappa_\mathcal{D}| < \kappa$, una contradicción. □

Teorema 2.3.20. *Cuando κ posee un ultrafiltro (μ, κ)-irregular para cada $\mu < \kappa$ que además es normal débil, existe $0^\sharp$.*

[8] Igual que antes, se "codifica" $f : [t]^{n+1} \to 2 \in L_b$ en una $g : [t]^n \to 2 \in L_b$ adecuada para después encontrar el $c \in w_a$, homogéneo para g, que también resulta homogéneo para f.

Demostración. Como antes tomamos $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ primitivo recursivo cerrado y $R^\alpha \subset \kappa^2, \sigma_\alpha$ con $\sigma_\alpha : \langle \kappa, R^\alpha \rangle \simeq \langle L_\alpha, \in \rangle$. Sea $X = \{\alpha < \kappa^+ \mid \text{primitivo recursivo cerrado}, L_\alpha \prec L_{\kappa^+} \wedge \alpha > (\kappa^+)^L\}$; por los resultados anteriores sabemos que $(\kappa^+)^L < \kappa^+$, entonces X es un club. Para cada $\alpha \in X$ hagamos

$$B_\alpha = \{\xi < \kappa \mid \langle \xi, R^\alpha \restriction \xi \rangle \prec \langle \kappa, R^\alpha \rangle \wedge \sigma_\alpha[\xi] \cap \kappa = \xi\},$$

que de nuevo es un club. Para cada $\xi \in B_\alpha$ hacemos $k_\alpha^\xi : L_{g^\alpha(\xi)} \prec L_{\kappa^+}$, donde $L_{g^\alpha(\xi)}$ es la condensación de $\langle \xi, R^\alpha \restriction \xi \rangle$ y $g^\alpha(\xi)$ es el estrato correspondiente; $k_\alpha^\xi(\xi) = \kappa$ y, como ya vimos, $[g^\alpha] < [g^\beta]$ para $\alpha < \beta \in X$. Definamos $\mathcal{U}_\alpha^\xi \subset \mathcal{P}(\xi) \cap L_{g^\alpha(\xi)}$ como:

$$X \in \mathcal{U}_\alpha^\xi \text{ cuando y solo cuando } \xi \in k_\alpha^\xi(X).$$

Afirmación (1)**.** Si $\alpha = \min X$. Se satisface lo siguiente

1. $Y = \{\zeta < \kappa \mid g^\alpha(\zeta) = (\zeta^+)^L\} \in \mathcal{D}$
2. Para $f : \kappa \to \kappa$ con $f(\xi) < |\xi|^+$ existe $\alpha \in X$ tal que $[f] \leq [g^\alpha]$.
3. Para $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in X$, podemos encontrar un club C con $C \cap Y \subset \{\xi < \kappa \mid \mathcal{U}_\alpha^\xi = \mathcal{U}_\beta^\xi\}$.

Prueba. 2 es la prueba de $\prod^* \langle L_{\kappa^+}, \in \rangle / \mathcal{D} \simeq \prod_{\alpha < \kappa} \langle L_{\alpha^+}, \in \rangle / \mathcal{D}$. Para ver 1 recordemos que $(\kappa^+)^L < \kappa^+$, además

$$\prod{}^* \langle L_{\kappa^+}, \in \rangle / \mathcal{D} \simeq \prod_{\alpha < \kappa} \langle L_{\alpha^+}, \in \rangle / \mathcal{D}.$$
$$\text{y } L_{g^\alpha(\zeta)} \prec L_{\kappa^+}.$$

Como

$$L_{\kappa^+} \models \kappa \text{ es el mayor cardinal.}$$

tenemos

$$L_{g^\alpha(\zeta)} \models \zeta \text{ es el mayor cardinal.}$$

Para ver 3, tomemos α, β como se requieren y hagamos

$$S = \{\xi < \kappa \mid L_\alpha \cap \sigma_\beta[\{\delta \mid \delta < \xi\}] = L_\beta \cap \sigma_\beta[\{\delta \mid \delta < \xi\}]\}$$

que es un club. Podemos encontrar un club $C \subset S$ tal que

$$(\zeta^+)^L < g^\alpha(\zeta) < g^\beta(\zeta) \text{ para } \zeta \in C \cap Y.$$

$L_{g^\beta(\xi)}$ es el colapso de $\sigma_\beta[\{\delta \mid \delta < \xi\}]$. Como todos los subconjuntos de ξ en $L_{g^\beta(\xi)}$ ya aparecieron en $L_{g^\alpha(\xi)}$, para $\xi \in C \cap Y$, tenemos $\mathcal{U}^\xi_\beta = \mathcal{U}^\xi_\alpha$.

QED[1]

Por el inciso 3 podemos encontrar L-ultrafiltros $\mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{P}(\xi) \cap L$ para cada $\xi \in Y$ y un club C_α para $\alpha \in X$ con: $X \in \mathcal{U}_\xi \leftrightarrow \xi \in k^\xi_\alpha(X)$. Para obtener $0^\sharp$ es suficiente ver lo siguiente

Afirmación (2)**.** Existe $\xi \in Y$ con $\prod^L_{\mathcal{U}_\xi} L$ bien fundado.

prueba. Pensemos que no es el caso. Entonces para cada $\xi \in Y$ podemos encontrar $f^\xi_n : \xi \to Or$, $f^\xi_n \in L_{\vartheta(\xi)}$ tales que, para $n < \omega$, $[f^\xi_{n+1}]_\xi < [f^\xi_n]_\xi$, donde $[\cdot]_\xi$ es la clase de equivalencia correspondiente al ultrafiltro $\mathcal{U}_\xi$. Sean $\mathcal{M}_\xi \prec L_{\vartheta(\xi)}$ la estructura generada por $\xi \cup \{f^\xi_n \mid n < \omega\}$ y sea $\beta < |\xi|^+$ con $\mathcal{M}_\xi \simeq L_\beta$. Podemos pensar que $f^\xi_n : \xi \to |\xi|^+$. Sea $f : \kappa \to \kappa$ con $f(\xi) < |\xi|^+$ y además para ξ, n $f^\xi_n \in L_{f(\xi)}$, $f(\xi) > (\xi^+)^L$. Sea $\alpha \in X$ con $f(\zeta) < g^\alpha(\zeta)$ para $\zeta \in C \cap Y$ donde C es un club adecuado. Si tomamos $\zeta \in C \cap Y$ logramos

$$k^\xi_\alpha(f^\xi_0)(\xi) > k^\xi_\alpha(f^\xi_1)(\xi) > ... > k^\xi_\alpha(f^\xi_n)(\xi) > k^\xi_\alpha(f^\xi_{n+1})(\xi) > ...$$

la cual es una cadena decreciente de ordinales en L_{κ^+} y que claramente no puede ser el caso.

QED[2]

□

Corolario 2.3.21. Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro (κ, κ^+)-irregular en κ^+, entonces existe $0^\sharp$.

Demostración. Por el corolario 1.3.15. podemos pensar que $\mathcal{D}$ es normal débil. Además es (γ, κ^+)-irregular para cada $\gamma < \kappa^+$. Por tanto existe $0^\sharp$. □

2.4. Más de $0^\sharp$.

Los resultados de esta sección son debidos a Jensen y Koppelberg [6].

Antes de proceder listamos algunas consecuencias claves de la negación de la existencia de $0^\sharp$.

Teorema 2.4.1. *Supóngase* $\neg 0^\sharp$. *Sea* $\omega < cf(\beta) < |\beta|$. *Entonces*

(a) β *no es regular en* L.

(b) Si existen $\tau < \beta$ *arbitrariamente grandes con* τ *regular en* L *y* $cf(\tau) > \omega$, *entonces* $cf((\beta^+)^L) \geq |\beta|$.

Demostración. Sea $X \subset \beta$ cofinal en β con $|X| = cf(\beta)$. Sea $Y \supset X$, con $Y \in \mathcal{P}(\beta) \cap L$ y $|Y| = |X| + \aleph_1$. Entonces $|Y| < \beta$ y $\sup Y = \beta$, así que $(\beta$ es singular$)^L$. □

En una sección anterior ya usamos *(a)*; *(b)* solo se enuncia por afán de completud. Una consecuencia satisfactoria es que, cuando $\neg 0^\sharp$, entonces $\square_\beta$: Existen conjuntos C_λ $(\omega \leq cf(\lambda) < \beta)$ con

- C_λ es cerrado en λ,
- Si C_λ está acotado en λ, entonces $cf(\lambda) = \omega$,
- $otp(C_\lambda) < \beta$,
- Para $\tau \in C_\lambda$, se tiene $C_\tau = \tau \cap C_\lambda$.

esto para cualquier β singular:

Teorema 2.4.2. *Téngase cierto* $\neg 0^\sharp$. *Dado* β *cardinal singular, existen conjuntos* C_λ $(\omega \leq cf(\lambda) < \beta)$ *con*

(a) C_λ *es cerrado en* λ

(b) Si C_λ *está acotado en* λ, *entonces* $cf(\lambda) = \omega$

(c) $otp(C_\lambda) < \beta$

(d) Para $\tau \in C_\lambda$, *se tiene* $C_\tau = \tau \cap C_\lambda$.

Demostración. Ya sabemos que bajo $V = L$, podemos encontrar una sucesión $\langle C_\lambda \mid \omega \leq cf(\lambda) < \lambda \rangle$ que satisface $(a), (b), (d)$ y:

(c') $otp(C_\lambda) < \lambda$.

Prikry y Solovay, [19] después mostraron que esto implica la existencia de una sucesión $\langle C_\lambda \mid \omega \leq cf(\lambda) < \beta \rangle$ que satisface $(a) - (d)$:

En efecto, sea $\langle C_\lambda \mid \omega \leq cf(\lambda) < \lambda \rangle$ que satisface $(a), (b), (d)$ y (c'). Se puede pensar sin pérdida de generalidad que $C'_\lambda \subset \lambda \setminus \beta$

para $\lambda > \beta$. Defínase una nueva sucesión $\langle C'_\lambda \mid \omega \leq cf(\lambda) < \beta \rangle$ de la siguiente forma: sea $C'_\beta \subset \beta$ arbitrario con $\sup C'_\beta = \beta$ y $otp(C'_\beta) = cf(\beta)$. Para $\lambda \in C'_\beta$ tómese: $C'_\lambda = \lambda \cap C'_\beta$. Para otras $\lambda < \beta$ sea $\gamma = \sup(C'_\beta \cap \lambda)$ y fijemos: $C'_\lambda = \{\delta < \lambda \mid \lim(\delta) \wedge \delta > \gamma\}$. Para $\lambda > \beta$ defínase C'_λ por inducción sobre λ de la siguiente manera: si $\neg\, \text{lím}(otp(C_\lambda))$, hágase: $C'_\lambda = \emptyset$; en otro caso $C'_\lambda = h_\lambda{}^{"}C'_{otp(C_\lambda)}$ (donde $h_\lambda : otp(C_\lambda) \to C_\lambda$ es una enumeración monótona).

En seguida, sea $\langle C_\lambda \mid \omega \leq (cf(\lambda))^L < \beta \rangle$ que satisface $(a) - (d)$ en L. Debemos definir C_λ en el caso: $cf(\lambda) < \beta \leq (cf(\lambda))^L$. Fijemos $\tau = (cf(\lambda))^L$. Entonces τ es regular en L, y como β es singular, $cf(\tau) < \beta \leq |\tau|$. De donde se sigue que $cf(\tau) = cf(\lambda) = \omega$, debido a que si $cf(\tau) < \omega$, entonces τ es singular en V y por el teorema anterior (τ es singular$)^L$, lo cual no es el caso. Así, se puede completar la suceción fijando $C_\lambda = \emptyset$ para todas las λ nuevas. $\square$

Definición. $\langle C_\lambda \mid lim(\lambda), \lambda < \beta^+ \rangle$ *se dice una* $\square_\beta$-sucesión *si satisface* $(a) - (d)$.

$\square_\beta$ es la afirmación: existe una $\square_\beta$-sucesión.

Corolario 2.4.3. Suponga $\neg 0^\sharp$. Entonces $\square_\beta$ se cumple para cada cardinal singular β.

Corolario 2.4.4. Si $\neg 0^\sharp$, para β cardinal singular y $\tau < \beta$ regular existe S con

1. $S \subset \{\rho < \beta^+ \mid cf(\rho) = \tau\}$,
2. S es estacionario en β^+,
3. $S \cap \alpha$ no es estacionario en α, para $\alpha < \beta$.

Aún más, existe una $\square_\beta$-sucesión $\langle C_\lambda \rangle$ con $C_\lambda \cap S = \emptyset$, $\lambda < \beta^+$.

Demostración. Sea $X = \{\rho < \beta^+ \mid cf(\rho) = \tau\}$. Tomemos una $\square_\beta$-sucesión $\langle C_\lambda \rangle$. Partimos X en β pedazos con:

$$X_\nu = \{\rho \in X \mid otp(C_\rho) = \nu\} \ (\nu < \beta).$$

Como X es estacionario, alguno de los X_ν debe serlo. Sea $S = X_\nu$. Defínase una nueva $\square_\beta$-sucesión $\langle C'_\lambda \rangle$, de la siguiente forma:

$$C'_\lambda = \begin{cases} C_\lambda & \text{si } otp(C_\lambda) \leq \nu \\ C_\lambda \setminus (\gamma_\lambda + 1) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\gamma_\lambda \in C_\lambda$ es tal que $otp(C_{\gamma_\lambda}) = \nu$. Y $C'_\lambda \cap S = \emptyset$, porque

$$\begin{gathered}\alpha \in C'_\lambda \cap S \text{ implica } otp(C_\alpha) = \nu \text{ y } \alpha \in C_\lambda \setminus \gamma_\lambda + 1\\ \text{pero } C_\alpha = \alpha \cap C_\lambda \text{ a su vez implica}\\ otp(\alpha \cap C_\lambda) \geq \nu + 1, \text{ ya que } \alpha > \gamma_\lambda + 1 \text{ y } \alpha \in C_\lambda\end{gathered}$$

y ese no es el caso, por lo tanto $S \cap C'_\lambda = \emptyset$. Cuando $C'_\lambda = C_\lambda$ es inmediato. □

2.4.1. Regularidad.

Como vimos en la demostración del lema 1.3.9, (γ, κ)-regularidad es equivalente a la existencia de una sucesión $\langle u_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ tal que $u_\xi \subset \kappa$, $|u_\xi| < \gamma$ y $\{\xi < \kappa \mid \alpha \in u_\nu\} \in \mathcal{U}$, para $\alpha < \kappa$.

En lo sucesivo nos referiremos a $\langle u_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ como una sucesión regular siempre que $u_\xi \subset \kappa \wedge \forall \alpha < \kappa \{\xi < \kappa \mid \alpha \in u_\xi\} \in \mathcal{U}$.

A partir de aquí suponemos que κ es un cardinal regular y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro uniforme sobre κ.

Teorema 2.4.5 ($V = L$)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro (γ^+, κ)-regular. Entonces $\mathcal{U}$ es (γ, κ)-regular.*

Demostración. Recordemos el principio de (κ, δ)-Kurepa:

$HK_{\kappa\delta}$ Existe una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ tal que para $u \subset \kappa$, si $\omega \leq |u| < \delta$ entonces $|\mathcal{B} \restriction u| = |u|$, donde $\mathcal{B} \restriction u = \{b \cap u \mid b \in \mathcal{B}\}$.

$HK^*_{\kappa\delta}$ es similar a $HK_{\kappa\delta}$ pero se pide que $\mathcal{B}$ sea casi ajeno en κ. En [5] se muestra que bajo $V = L$, $HK^*_{\kappa\delta}$ se cumple para $\delta < \kappa$. Por lo cual es suficiente mostrar:

Lema 2.4.6 (Benda)**.** *Si HK^*_{κ,γ^+} y $\mathcal{U}$ es (γ^+, κ)-regular, entonces también es (γ, κ)-regular.*

Prueba del lema. Sea $u_\nu \subset \kappa$ con $\{\nu < \kappa \mid \tau \in u_\nu\} \in \mathcal{U}$ para $\tau < \kappa$, sin pérdida de generalidad podemos pensar que $|u_\nu| = \gamma$, porque si tenemos κ subíndices con $|u_\nu| < \gamma$ el teorema queda probado; si tenemos menos de κ de ellos, nos quedamos con los que satisfacen lo que deseamos. Para cada ν, sea $\langle b_i^\nu \mid i < \gamma\rangle$ una enumeración de $\mathcal{B} \restriction u_\nu$. Para $b \in \mathcal{B}$ definamos una aplicación $f_b : \kappa \to \gamma$ como:

$$f_b(\nu) = i \text{ donde } b \cap u_\nu = b_i^\nu.$$

Luego, las f_b son distintas en $\prod_{\mathcal{U}} \gamma$, ya que para $\eta \in b + b'$[9], si $\eta \in u_\nu$ entonces $f_b(\nu) \neq f_{b'}(\nu)$, porque pensando, sin perder la generalidad,

[9] Aquí, $X + Y = \{u \mid (u \in X \wedge u \notin Y) \vee (u \notin X \wedge u \in Y)\}$

que $\eta \in b \wedge \eta \notin b'$ y $\eta \in u_\nu$, resulta que $\eta \in b \cap u_\nu = b^\nu_j$, pero $\eta \notin b' \cap u_\nu = b^\nu_i$, así que forzosamente $i \neq j$. Por el teorema de Łoś

$$\langle \prod_{\mathcal{U}} \gamma, < \rangle \text{ es un orden lineal.}$$

Alguna f_{b^*} tiene al menos κ predecesores entre los f_b en $\prod_{\mathcal{U}} \gamma$. Sea f_{b_τ} $(\tau < \kappa)$ distintos con $f_{b_\tau} < f_{b^*}$ en $\prod_{\mathcal{U}} \gamma$. Como B es casi ajeno podemos escoger δ_τ con $\delta_\tau \in b_\tau + b_\xi$ para $\xi < \tau$. Fijemos: $v_\nu = \{\tau \mid \delta_\tau \in u_\nu \wedge f_{b_\tau}(\nu) < f_{b^*}(\nu)\}$. Dado que

$$\begin{aligned}\{\nu < \kappa \mid \tau \in v_\nu\} &= \{\nu < \kappa \mid \delta_\tau \in u_\nu \wedge f_{b_\tau}(\nu) < f_{b^*}(\nu)\} \\ &= \{\nu < \kappa \mid \delta_\tau \in u_\nu\} \cap \{\nu < \kappa \mid f_{b_\tau}(\nu) < f_{b^*}(\nu)\}.\end{aligned}$$

Y el conjunto $\{\nu < \kappa \mid \delta_\tau \in u_\nu\} \in \mathcal{U}$, por regularidad y $\{\nu < \kappa \mid f_{b_\tau}(\nu) < f_{b^*}(\nu)\} \in \mathcal{U}$, por elección de las b_τ. Además, $|v_\nu| < \gamma$, ya que si $\tau, \tau' \in v_\nu$ entonces $f_{b_\tau}(\nu) \neq f_{b'_\tau}(\nu)$ y

$$f_{b_\tau}(\nu), f_{b'_\tau}(\nu) < f_{b^*}(\nu) < \gamma.$$

Por elección de las f_b.

□

Nótese que HK^* solo se usó para obtener conjuntos de tamaño γ y para obtener δ_ξ adecuado. Para $\kappa = \gamma^+$ esto es equivalente la hipótesis de Kurepa HK_{γ^+}. Así llegamos a la formulación usual del teorema de Benda: si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme sobre γ^+ y HK_{γ^+} se cumple, entonces $\mathcal{U}$ es (γ, γ^+)-regular.

En la sección anterior vimos que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no (γ, γ^+)-regular sobre γ^+, entonces γ^+ resulta ser inefable en L. Daremos una prueba más directa, con un plan simple: pensamos que no es inefable y se hace una prueba semejante a la de HK_κ.

Teorema 2.4.7 (Ketonen)**.** *Para $\kappa = \gamma^+$, supóngase que $\mathcal{U}$ no es (γ, κ)-regular. Entonces κ es inefable completo en L.*

Demostración. Supongamos que no es inefable completo en L. Entonces para cualquier familia de estacionarios $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ existen una sucesión $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ y $X \in \mathcal{E}$ que son contraejemplos a la inefabilidad completa en L (i.e. no existe $S \subset \kappa$ con $\{\alpha \in X \mid S \cap \alpha = S_\alpha\}$ estacionario en L). Sean $X \in \mathcal{E}$, $\langle S_\alpha \rangle_{\alpha < \kappa}$ los $<_L$-menores testigos. Sabemos que $X, \langle S_\alpha \rangle_{\alpha < \kappa} \in L$, además cada $S_\alpha \subset \alpha$ también es elemento de L.

Sean $u = ct(\{S_\alpha\})$, μ un cardinal regular $\mu > \alpha$ con $u \subset L_\mu$ y $\langle X, \in\rangle \prec \langle L_\mu, \in\rangle$ tal que $u \subset X$ y $|X| \leq \alpha < \kappa$. Por condensación podemos encontrar $\lambda \leq \mu$ y $\pi : \langle X, \in\rangle \simeq \langle L_\lambda, \in\rangle$ donde $\pi \upharpoonright u = id \upharpoonright u$, más, $\pi(S_\alpha) = S_\alpha$, de donde que $S_\alpha \in L_{\kappa^+}$. Bajo este mismo razonamiento podemos mostrar que $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle, X \in L_{\kappa^+}$. Concluimos que $X, \langle S_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ son L_{κ^+}-definibles en el parámetro κ.

Definamos modelos $\mathcal{M}_\nu$ $(\nu < \kappa)$ como:

$$\mathcal{M}_\nu = \text{ la menor } \mathcal{M} \prec L_\kappa \text{ tal que } \nu \in \mathcal{M} \text{ y } X \cap \nu, \langle S_\tau \mid \tau \leq \nu\rangle \in \mathcal{M}.$$

Luego $|\mathcal{M}_\nu| \leq \gamma$, debido a que $\kappa = \gamma^+$. Sea $E = \{\tau : \kappa < \tau < \kappa^+ \wedge L_\tau \prec L_{\kappa^+}\}$. Este conjunto es un club en κ^+ y como $L_\tau \models ZF^-$, cada $\tau \in E$ es primitivo recursivo cerrado. Sabemos que $L_{\kappa^+} \models ZF^-$, por tanto podemos encontrar una aplicación de $p_\tau : \kappa \twoheadrightarrow \tau$, para $\tau \in E$. Sean

$$\begin{aligned} A'_\tau &= \{\Gamma(\xi, \zeta, 0) \mid p_\tau(\xi) < p_\tau(\zeta)\}, \\ A''_\tau &= \{\Gamma(\xi, \zeta, 1) \mid p_\tau(\zeta) \in E \to \xi \in A'_{p_\tau(\zeta)}\}, \\ A_\tau &= A'_\tau \cup A''_\tau, \\ \mathcal{N}_\tau &= \langle L_\tau[A_\tau], A_\tau\rangle. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\mathcal{N}_\tau \models \kappa \text{ es el mayor cardinal.}$$

Sean $s_\tau : \kappa \to L_\tau[A_\tau]$ la $<_{L_{\kappa^+}}$-menor función sobreyectiva y $N^\tau_\beta = s_\tau[\beta]$ para $\beta \leq \tau$. Definimos $C_\tau = \{\beta < \kappa \mid N^\tau_\beta \cap \kappa = \beta \wedge \mathcal{N}^\tau_\beta = \langle N^\tau_\beta, \in, A_\tau \cap N^\tau_\beta\rangle \prec \mathcal{N}_\tau\}$.

1 C_τ es un club en κ.

Prueba. Probamos que $\{\alpha < \kappa \mid N^\tau_\alpha \cap \kappa = \alpha\}, \{\alpha < \kappa \mid \langle N^\tau_\alpha, \in, A_\tau \cap N^\tau_\alpha\rangle \prec \mathcal{N}_\tau\}$ son clubes. Primero $\{\alpha < \kappa \mid N^\tau_\alpha \cap \kappa = \alpha\}$ es cerrado porque si $\langle \alpha_n \mid n < \omega\rangle$ es una sucesión de elementos de dicho conjunto tenemos que $\bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \alpha$ es tal que $X^\tau_\alpha \cap \kappa = s_\tau[\bigcup_{n<\omega} \alpha_n] \cap \kappa = \bigcup_{n<\omega}(s_\tau[\alpha_n] \cap \kappa) = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \alpha$. Para ver que no está acotado definimos $g : \kappa \to \kappa$ como

$$g(\alpha) = \sup(N^\tau_\alpha \cap \kappa).$$

note que para α con $N^\tau_\alpha \cap \kappa = \alpha$ se deduce $g(\alpha) = \sup \alpha = \alpha$; además g es cofinal y no decreciente porque para $\xi < \kappa$, como $\kappa \subset L_\tau[A_\tau]$ entonces existe $\zeta < \kappa$ con $\xi = s_\tau(\zeta)$ y por tanto $\xi < g(\beta)$ para algún $\beta > \zeta$. Para ver que no es decreciente es suficiente notar que $\xi < \zeta$

implica $s_\tau[\xi] \subset s_\tau[\zeta]$. Por tanto tiene κ puntos fijos, esto prueba que no está acotado.

$\{\alpha < \kappa \mid \langle N^\tau_\alpha, \in, A_\tau \cap N^\tau_\alpha\rangle \prec \mathcal{N}_\tau\}$ es cerrado porque si $\langle\alpha\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión creciente cuyos términos son elementos de dicho conjunto, tenemos que $\mathcal{N}^\tau_{\alpha_n} \prec \mathcal{N}^\tau_{\alpha_{n+1}} \prec \mathcal{N}_\tau$ y por el teorema de unión (2.4.11) $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{N}^\tau_\beta \prec \mathcal{N}_\tau$. Para ver que no está acotado tomemos $\xi < \kappa$ y consideremos, en L_{κ^+}, la menor $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}_\tau$ con $\xi \in \mathcal{M}$. Como $\xi < \kappa$ tenemos $|M| < \kappa$ y sin pérdida de generalidad suponemos que $\mathcal{M} \in L_\tau[A_\tau]$ así que existe $\zeta < \kappa$ con $s_\tau[\zeta] = \mathcal{M}$. *QED*

Además notemos que $\mathcal{N}^\tau_\alpha$ es único.

2 Si $\alpha < \alpha'$, $\alpha, \alpha \in C_\tau$, entonces $\mathcal{N}^\tau_\alpha \prec \mathcal{N}^\tau_{\alpha'}$

Prueba. Sean $\vec{y} \in N^\tau_\alpha$ y φ tales que

$$\mathcal{N}^\tau_{\alpha'} \models (\exists x)\varphi(x, \vec{y})$$

entonces

$$\mathcal{N}_\tau \models (\exists x)\varphi(x, \vec{y}),$$

concluimos

$$\mathcal{N}^\tau_\alpha \models (\exists x)\varphi(x, \vec{y}).$$

QED

3 Si $\tau' < \tau$, $\tau' \in E \cap N^\tau_\alpha$, entonces $\alpha \in C_{\tau'}$.

Prueba. Notemos que

$$\mathcal{N}^\tau_\alpha \prec \mathcal{N}_\tau,\ s_\tau \text{ es } \mathcal{N}_\tau\text{-definible.}$$

Dado que $\tau, \tau' \in E$, $L_{\tau'} \prec L_\tau$ y por definición de $A_{\tau'} \subset A_\tau$ obtenemos $\mathcal{N}_{\tau'} \prec \mathcal{N}_\tau$. Por lo cual podemos definir $s_{\tau'}$ en $\mathcal{N}_{\tau'}$, además

$$s_{\tau'}[\alpha] \prec \mathcal{N}_{\tau'}, s_{\tau'}[\alpha] \cap \kappa = \alpha.$$

QED

Definamos

$$\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha = \langle L_{\beta^\tau_\alpha}[A_\tau \cap \alpha], A_\tau \cap \alpha\rangle,$$

y

$$\pi^\tau_\alpha : \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha \prec \mathcal{N}_\tau$$

como:

$$\pi^\tau_\alpha : \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha \simeq \mathcal{N}^\tau_\alpha$$

donde $\bar{N}^\tau_\alpha$ es transitivo. Nótese que al colapsar $\mathcal{N}^\tau_\alpha$ obtenemos un predicado $\bar{A}_\tau = \pi^\tau_\alpha[A_\tau \cap N^\tau_\alpha]$. Pero $\pi^\tau_\alpha[A_\tau \cap N^\tau_\alpha] = A_\tau \cap \alpha$ ya que, al ser κ un cardinal $\Gamma(\xi, \zeta, 0), \Gamma(\xi, \zeta, 1) < \kappa$, así que $A_\tau \subset \kappa$. Ahora $\pi^\tau_\alpha \restriction \alpha = id \restriction \alpha$, ya que $\alpha \subset N^\tau_\alpha$ es transitivo. Sea $\bar{A}_\tau = \pi^\alpha_\tau[A_\tau \cap N^\tau_\alpha]$; por tanto $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha = \langle L_{\beta^\tau_\alpha}[\bar{A}_\tau], \bar{A}_\tau \rangle$. Pero como $A_\tau \subset \kappa$, $A_\tau \cap N^\tau_\alpha = A_\tau \cap \kappa \cap N^\tau_\alpha = A_\tau \cap \alpha$, de lo cual $\bar{A}_\tau = \pi^\tau_\alpha[A_\tau \cap \alpha]$. Afirmamos que $\bar{A}_\tau = A_\tau \cap \alpha$ porque cuando tomamos $x \in \bar{A}_\tau$, podemos encontrar $y \in A_\tau \cap \alpha$ tal que $\pi^\tau_\alpha(y) = x$, pero π^τ_α es la identidad en α de donde $\pi^\tau_\alpha(y) = x = y$ y $x \in A_\tau \cap \alpha$. Ahora para $x \in A_\tau \cap \alpha$ ocurre $(\pi^\alpha_\tau)^{-1}(x) = y$ para alguna $y \in \bar{A}_\tau$, e igual que antes $\pi^\tau_\alpha(y) = x = y$. Entonces $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha = \langle L_{\beta^\tau_\alpha}[A_\tau \cap \alpha], A_\tau \cap \alpha \rangle$ es de hecho nuestra condensación.

Para $\alpha \leq \alpha'$ hagamos:

$$\pi^\tau_{\alpha\alpha'} = (\pi^\tau_{\alpha'})^{-1} \pi^\tau_\alpha$$

que forma un sistema dirigido porque $\pi^\tau_{\alpha\alpha} = (\pi^\tau_\alpha)^{-1} \pi^\tau_\alpha = id$. Luego si $\alpha \leq \beta \leq \delta$, $\pi^\tau_{\beta\delta} \circ \pi^\tau_{\alpha\beta} = (\pi^\tau_\delta)^{-1} \pi^\tau_\beta \circ (\pi^\tau_\beta)^{-1} \pi^\tau_\alpha = (\pi^\tau_\delta)^{-1} \circ \pi^\tau_\alpha = \pi^\tau_{\alpha\delta}$. Entonces $\langle \mathcal{N}_\tau, \langle \pi^\tau_\alpha \rangle_{\alpha \in C_\tau} \rangle$ es el límite directo del sistema dirigido $\langle \bar{N}^\tau_\alpha, \langle \pi^\tau_{\alpha,\alpha'} \rangle_{\alpha \leq \alpha' \in C_\tau} \rangle$. Por (3) tenemos:

4 Si $\tau' \in ran(\pi^\tau_\alpha)$, entonces

1. $\tau' = \pi^\tau_\alpha(\beta^{\tau'}_\alpha)$
2. $\pi^{\tau'}_\alpha = \pi^\tau_\alpha \restriction \bar{\mathcal{N}}^{\tau'}_\alpha$.

4 es consecuencia directa de que $\langle \mathcal{N}_\tau, \langle \pi^\tau_\alpha \rangle_{\alpha \in C_\tau} \rangle$ es el límite directo.

Nótese el hecho clave:

Hecho. Si $\alpha \leq \nu, \alpha \in C_\tau$, entonces $\mathcal{P}(\alpha) \cap M_\nu \not\subset L_{\beta^\tau_\alpha}$.

Prueba. Sea $S = S_\alpha$. Afirmamos: $S \notin L_{\beta^\tau_\alpha}$. Supóngase que no. Es claro que:

$$(\pi^\tau_\alpha \restriction L_{\beta^\tau_\alpha}) : L_{\beta^\tau_\alpha} \prec L_{\kappa^+}$$

y $\pi^\tau_\alpha(\alpha) = \kappa$. Ya que $\langle S_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ es L_{κ^+}-definible en κ, tenemos:

$$\pi^\tau_\alpha(\langle S_\xi \mid \xi < \alpha \rangle) = \langle S_\xi \mid \xi < \kappa \rangle.$$

Consideramos dos casos:
<u>Caso 1</u> $\{\xi \in X \cap \alpha \mid S_\xi = S_\alpha \cap \xi\}$ es estacionario en $L_{\beta^\tau_\alpha}$. Entonces

$\{\xi \in X \mid S_\xi = \pi^\tau_\alpha(S) \cap \xi\}$ es estacionario en L_{κ^+}. ¡Contradicción!
Caso 2 El caso 1 falla. Por lo cual podemos encontrar un club $C \subset \alpha$ tal que $C \in L_{\beta^\tau_\alpha}$ y $S_\xi \neq S \cap \xi$, $\xi \in C$. Entonces $S_\xi \neq \pi^\tau_\alpha(S) \cap \xi$ para $\xi \in \pi^\tau_\alpha(C)$. Pero $\alpha \in \pi^\tau_\alpha(C)$ y $S_\alpha = \alpha \cap \pi^\tau_\alpha(S)$. ¡Contradicción! *QED*

$\mathcal{M}_\nu$ es un segmento inicial de L, es decir algún L_ρ. Por lo cual:

5 Si $\alpha \in C_\tau \cap \nu$, entonces $\beta^\tau_\alpha \in M_\nu$.

Ahora definimos ordinales $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^\tau_\nu$, $\tilde{\beta} = \beta^\tau_\nu$, $\mu = \mu^\tau_\nu$ para $\nu < \kappa, C_\tau \cap \nu \neq \emptyset$ como:

$$\tilde{\alpha} = \sup C_\tau \cap \nu;\ \tilde{\beta} = \beta^\tau_{\tilde{\alpha}};\ \mu = \Gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Entonces $\mu^\tau_\nu \in M_\nu$ por (5), $\mathcal{M}_\nu \prec L_{\kappa^+}$. Pero:

6 Si $\tau' < \tau$, $\alpha \in C_\tau \cap \nu$, $\tau' \in ran(\pi^\tau_\alpha)$, entonces $\mu^\tau_\nu \neq \mu^{\tau'}_\nu$.

Prueba. Si $\tilde{\alpha}^{\tau'}_\nu \neq \tilde{\alpha}^\tau_\nu$, entonces es trivial. Si no, entonces por (4) $\tilde{\beta}^{\tau'}_\nu < \tilde{\beta}^\tau_\nu$. *QED*

Ahora definamos $f_\tau : \kappa \to \kappa$ como:

$$f_\tau(\nu) = \begin{cases} \mu^\tau_\nu & \text{si } C_\tau \cap \nu \neq \emptyset \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Se tiene que $f_\tau(\nu) \in M_\nu$. Ya que $|M_\nu| \leq \gamma$, podemos tomar una aplicación $1-1$ $h_\nu : M_\nu \to \gamma$ y fijemos: $\bar{f}_\tau = h_\nu f_\tau$.

Los $\bar{f}_\tau$ son distintos en $\prod_\mathcal{U} \gamma$, ya que si $\tau' < \tau$, $\alpha \in C_\tau$, $\tau' \in ran(\pi^\tau_\alpha)$, se sigue que $\alpha < \nu \to \bar{f}_{\tau'}(\nu) \neq \bar{f}_\tau(\nu)$. Además hay $\kappa^+ = \gamma^{++}$ de ellos: para algún $\bar{f}_{\tau^*}$ que tiene al menos κ predecesores en $\prod_\mathcal{U} \gamma$. Sean $\bar{f}_{\tau_\xi}$ $(\xi < \kappa)$ predecesores de $\bar{f}_{\tau^*}$ en $\prod_\mathcal{U} \gamma$. Escójase $\alpha_0 \in C_{\tau_0}$ arbitrario y $\alpha_\xi \in C_{\tau_\xi}$ que satisfaga $\tau_\xi \in ran(\pi^{\tau_\zeta}_{\alpha_\zeta})$, para $\xi < \zeta$, aún más $\alpha_\xi \neq \alpha_\zeta$ para $\zeta \neq \xi$. Hagamos:

$$v_\nu = \{\xi < \kappa \mid \alpha_\xi < \nu \wedge \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < \bar{f}_{\tau*}(\nu)\}$$

donde $\nu < \kappa$. Entonces $\langle v_\nu \rangle_{\nu<\kappa}$ es una sucesión regular tal que $|v_\nu| < \gamma$ con el mismo argumento que antes y

$$\begin{gathered} \{\nu < \kappa \mid \xi \in v_\nu\} = \{\nu < \kappa \mid \alpha_\xi < \nu \wedge \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < \bar{f}_{\tau*}(\nu)\} = \\ \{\nu < \kappa \mid \alpha_\xi < \nu\} \cap \{\nu < \kappa \mid \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < \bar{f}_{\tau*}(\nu)\} = \\ [\alpha_\xi + 1, \kappa) \cap \{\nu < \kappa \mid \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < \bar{f}_{\tau*}(\nu)\} \end{gathered}$$

y estos dos últimos conjuntos son elementos de $\mathcal{U}$. Así que $\{\nu < \kappa \mid \xi \in v_\nu\} \in \mathcal{U}$. ¡Contradicción! $\square$

Teorema 2.4.8. *Pensemos que* $2^{\underset{\smile}{\kappa}} = \kappa$. *Sea* $\gamma < \kappa$ *y* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro* (γ^+, κ)*-regular pero no* (γ, κ)*-regular. Entonces* κ *es inefable completo en* L.

Demostración. Supongamos que κ no es inefable completo en L, sean $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle, X$ como en la prueba anterior. Como $2^{\underset{\smile}{\kappa}} = \kappa$ y $|H_\kappa| = 2^{\underset{\smile}{\kappa}}$ podemos tomar una enumeración $\langle x_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ donde $|ct(x_\xi)| < \kappa$ para cada $\xi < \kappa$. Para cada $\xi < \kappa$ fijamos b_ξ una biyección entre $ct(x_\xi)$ y su cardinalidad κ_ξ. Definimos un orden R_ξ en κ_ξ con la prescripción

$$\eta R_\xi \delta \textit{ si y solo si } b_\xi^{-1}(\eta) \in b_\xi^{-1}(\delta).$$

Ya que $ct(x_\xi)$ es transitivo, R_ξ está bien fundada en κ_ξ. Hacemos

$$U = \{(\beta, \eta, \delta) \mid x_\eta \in H_\kappa \wedge \beta R_\eta \delta\},\ B = \Gamma[U] \subset \kappa,$$

donde $\Gamma : \kappa^3 \leftrightarrow \kappa$ es la función de Gödel.

Hecho. $H_\kappa = L_\kappa[B]$.

Prueba. Sea $\alpha < \kappa$. Como $L_\alpha[B]$ es transitivo $ct(L_\alpha[B]) = L_\alpha[B]$ y $|L_\alpha[B]| = |\alpha| + \aleph_0 < \kappa$. Así que $L_\alpha[B] \subset H_\kappa$ para toda $\alpha < \kappa$.

Para ver la inclusión inversa sea $z \in H_\kappa$. Entonces $z = x_\alpha$ para alguna $\alpha < \kappa$. Sea $\mu < \kappa$ un ordinal primitivo recursivo cerrado con

$$\Gamma[\{(\eta, \beta, \delta) \mid \eta R_\beta \delta\}] \subset \mu.$$

Notemos que (κ_β, R_β) es $L_\kappa[B]$-definible en el parámetro β y $\Gamma \restriction \mu^3 \in L_\kappa[B]$, así que

$$L_\kappa[B] \models (\exists u) u = (\kappa_\beta, R_\beta).$$

Debido a que $L_\kappa[B]$ es primitivo recursivo cerrado en B, podemos definir el colapso de Mostowski en $L_\kappa[B]$ y obtener el colapso de (κ_β, R_β) en $L_\kappa[B]$. Por unicidad del colapso deducimos que $(ct(\{\xi_\beta\}), \in) \in L_\kappa[B]$ y por ende $\xi_\beta \in L_\kappa[B]$. *QED*

Sea $\langle u_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ una sucesión regular para $\mathcal{U}$ y como antes podemos pensar que $|u_\nu| = \gamma$. Fijemos:

$$\mathcal{M}_\nu = \text{el menor } \mathcal{M} \prec \langle H_\kappa, B \rangle \text{ tal que } u_\nu \cup \{u_\nu\} \in M \text{ y}$$
$$X \cap \sup(u_\nu), \langle S_\alpha \mid \alpha \leq \sup(u_\nu) \cap X \rangle \in M.$$

Entonces $|M_\nu| = \gamma$. M_ν no es necesariamente transitivo. Además

Hecho. $otp(u_\nu) \subset M_\nu$, $otp(u_\nu) \in M_\nu$ y $h \in M_\nu$, donde $h : otp(u_\nu) \to u_\nu$ es la enumeración monótona de u_ν

Prueba Por definición $u_\nu \in M_\nu$ y si $\xi \in M_\nu \cap Or$ es tal que existe una función $h : \xi \leftrightarrow u_\nu$ entonces $\xi < \kappa$, $h \subset \xi \times u_\nu$, de donde se sigue que $|h| < \kappa$, $h \in L_\kappa[B]$; luego

$$L_\kappa[B] \models (\exists h)(h\ es\ la\ enumeración\ monótona\ de\ u_\nu)$$

por lo que $h, \xi \in M_\nu$. De hecho $\xi \subset M_\nu$ ya que ξ es punto límite de u_ν y

$$L_\kappa[B] \models (\forall f)(Fun(f) \wedge dom(f) \in Or \wedge ran(f) \subset u_\nu \wedge (\xi < \zeta \to f(\xi) < f(\zeta)) \to (\exists\rho) \bigcup ran(f) = \rho).$$

Dicha expresión tiene parámetros en M_ν y se satisface lo mismo, así que los puntos límites de u_ν son elementos de M_ν.*QED*

Por lo cual todos los puntos límite de u_ν también son elementos de M_ν. Defínase E y p_τ, para $\tau \in E$, como anteriormente[10] y definamos A_τ haciendo $A^*_\tau = \{\Gamma(\xi,\zeta,0) \mid p_\tau(\xi) < p_\tau(\zeta)\} \cup \{\Gamma(\xi,\zeta,1) \mid p_\tau(\zeta) \in E \to \xi \in A_{p_\tau(\zeta)}\}$, luego fijamos:

$$A_\tau = \{\Gamma(\nu,0) \mid \nu \in A^*_\tau\} \cup \{\Gamma(\nu,1) \mid \nu \in B\}.$$

Como κ es un cardinal $A_\tau \subset \kappa$. Repetimos las definiciones de $\mathcal{N}_\tau$, s_τ, C_τ, $\mathcal{N}^\tau_\alpha$, β^τ_α, $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha$, π^τ_α, $\pi^\tau_{\alpha\alpha'}$:

- $\mathcal{N}_\tau = \langle L_\tau[A_\tau], A_\tau\rangle$,
- $C_\tau = \{\beta < \kappa \mid N^\tau_\beta \cap \kappa = \beta \wedge \mathcal{N}^\tau_\beta = \langle N^\tau_\beta, \in, A_\tau \cap N^\tau_\beta\rangle \prec \mathcal{N}_\tau\}$,
- $\mathcal{N}^\tau_\alpha$ el único $\prec \mathcal{N}_\tau$, tal que $\kappa \cap N = \alpha$,
- $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha = \langle L_{\beta^\tau_\alpha}[A_\tau \cap \alpha], A_\tau \cap \alpha\rangle$ (entonces β^τ_α es el índice otorgado por el colapso),
- $\pi^\tau_\alpha : \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha \simeq \mathcal{N}^\tau_\alpha$ y
- $\pi^\tau_{\alpha\alpha'} = (\pi^\tau_{\alpha'})^{-1}\pi^\tau_\alpha$, para $\alpha \leq \alpha' \in C_\tau$.

Las observaciones (1)-(4) se siguen de la misma forma que en el teorema pasado. Notemos:

[10] $E = \{\tau < \kappa^+ \mid \kappa < \tau \wedge L_\tau \prec L_{\kappa^+}\}$, $p_\tau : \kappa \twoheadrightarrow \tau$

8.1 $\langle \bar{\mathcal{N}}^{\tau}_{\alpha'} \mid \alpha' \leq \alpha\rangle$, $\langle \pi^{\tau}_{\alpha'\alpha} \mid \alpha' \leq \alpha\rangle$ son uniformemente definibles a partir de $\bar{\mathcal{N}}^{\tau}_{\alpha}$; de hecho la definición se puede hacer en cualquier ZF^--modelo, porque los estratos $L_\nu[A]$ son absolutos entre ZF^--modelos.

Para cualquier ZF^--modelo $\mathcal{M}$, sea: $\mathcal{M}^L = \{x \mid \mathcal{M} \models x \in L\}$. Entonces

Hecho. $\mathcal{M}^L_\nu \prec L_\kappa$ y $\mathcal{M}^L_\nu = L \cap \mathcal{M}_\nu$.

Prueba. Por definición

$$\mathcal{M}^L_\nu = \{x \in M_\nu \mid \mathcal{M}_\nu \models x \in L\}$$

Para $\rho < \kappa$ tenemos $L^{\mathcal{M}_\nu}_\rho \subset L_\rho$ por tanto $\mathcal{M}^L_\nu \subset L_\kappa$. Veamos que $L_\kappa \prec_{LTC} L_\kappa[B]$ donde $LTC = \{=, \in\}$ es el lenguaje de teoría de conjuntos. Para este fin tomamos $\vec{y} \in L_\kappa$ y φ con

$$L_\kappa[B] \models (\exists y)\varphi(y, \vec{x})$$

se deduce que y es definible en términos de conjuntos definibles $\vec{x}$, por lo cual

$$L_\kappa \models (\exists y)\varphi(y, \vec{x}).$$

Para probar el hecho fijamos $\vec{x} \in M_\nu$ y φ tales que

$$L_\kappa \models (\exists y)\varphi(y, \vec{x}).$$

Dado que $\mathcal{M}^L_\nu \subset L_\kappa \subset L_\kappa[B]$ y $L_\kappa \prec_{LTC} L_\kappa[B]$, se desprende

$$L_\kappa[B] \models (\exists y)\varphi(y, \vec{x}),$$

pero $\mathcal{M}_\nu \prec L_\kappa[B]$, de lo cual obtenemos

$$\mathcal{M}_\nu \models (\exists y)\varphi(y, \vec{x}),$$

e y es definible en términos de $\vec{x}$ por lo cual $y \in M^L_\nu$. Para mostrar que $\mathcal{M}^L_\nu = \mathcal{M}_\nu \cap L$ definimos $\mathcal{M}^{L_\alpha}_\nu = \{x \in M_\nu \mid \mathcal{M}_\nu \models x \in L_\alpha\}$ y procedemos por inducción en $\alpha < \kappa$. Para $\alpha = 0$, resulta $\{x \in M_\nu \mid \mathcal{M}_\nu \models x \in L_\alpha\} = \emptyset = \mathcal{M}_\nu \cap \emptyset$. Cuando $\alpha = \rho + 1$ y $\mathcal{M}^{L_\rho}_\nu = L_\rho \cap \mathcal{M}_\nu$, al tomar $z \in \mathcal{M}^{L_\alpha}_\nu$ tenemos

$$z \in M_\nu,\ \mathcal{M}_\nu \models z \in L_\alpha$$

pero $L_\alpha = Def(L_\rho, \in)$, $L^{\mathcal{M}_\nu}_\rho \subset L_\rho \cap M_\nu$ por lo cual $Def(L_\rho, \in) \subset L_\alpha$ implica $z \in L_\alpha \cap \mathcal{M}_\nu$. La otra inclusión es debido a que

$$\mathcal{M}_\nu \models z \in L_\rho \to z \in L_\alpha.$$

QED

Hecho. Sea $\alpha \leq \sup u_\nu \cap X$, $\alpha \in C_\tau \cap \mathcal{M}_\nu$. Entonces $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{M}_\nu^L \not\subset L_{\beta_\alpha^\tau}$.

Procedemos como en el teorema 2.4.7. Sea $S = S_\alpha \notin L_{\beta_\alpha^\tau}$; tenemos

$$(\pi_\alpha^\tau \upharpoonright L_{\beta_\alpha^\tau}) : L_{\beta_\alpha^\tau} \prec L_{\kappa^+}$$

y $\pi_\alpha^\tau(\alpha) = \kappa$. Debido a que $\langle S_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ es L_{κ^+}-definible en κ, obtenemos:

$$\pi_\alpha^\tau(\langle S_\xi \mid \xi < \alpha \rangle) = \langle S_\xi \mid \xi < \kappa \rangle.$$

Pensamos que $S \in L_{\beta_\alpha^\tau}$ y procedemos por dos casos:
Caso 1 $\{\xi < \alpha \cap X \mid S_\xi = S_\alpha \cap \xi\}$ es estacionario en $L_{\beta_\alpha^\tau}$. Entonces $\{\xi \in X \mid S_\xi = \pi_\alpha^\tau(S) \cap \xi\}$ es estacionario en L_{κ^+}. ¡Contradicción!

Caso 2 El caso 1 falla. Por lo cual podemos encontrar un club $C \subset \alpha$ tal que $C \in L_{\beta_\alpha^\tau}$ y $S_\xi \neq S \cap \xi$, $\xi \in C$. Entonces $S_\xi \neq \pi_\alpha^\tau(S) \cap \xi$ para $\xi \in \pi_\alpha^\tau(C)$. Pero $\alpha \in \pi_\alpha^\tau(C)$ y $S_\alpha = \alpha \cap \pi_\alpha^\tau(S)$. ¡Contradicción! Como ambos generan una contradicción entonces $S \notin L_{\beta_\alpha^\tau}$.

Ya que $L_\kappa[B] = H_\kappa$, existe una función h que es $\langle H_\kappa, B \rangle$-definible y $h : H_\kappa \leftrightarrow \kappa$, debido a que la hay entre κ y $L_\kappa[B]$. Para $\alpha \in C_\tau$ definimos:

$$\delta_\alpha^\tau = \Gamma(\beta_\alpha^\tau, h(A_\tau \cap \alpha)).$$

Sea: $D_\tau = \{\delta_\alpha^\tau \mid \alpha \in C_\tau\}$. Para $D_\tau \cap u_\nu \neq \emptyset$, definimos $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_\nu^\tau$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_\nu^\tau$ como:

$$\tilde{\alpha} = \sup\{\alpha \mid \delta_\alpha^\tau \in u_\nu\}$$
$$\tilde{\beta} = \beta_{\tilde{\alpha}}^\tau$$

La intención es definir μ_ν^τ $(D_\tau \cap u_\nu \neq \emptyset)$ que satisfaga un análogo a (6) en el teorema anterior. Claramente $\tilde{\alpha} \in M_\nu$, ya que $\delta_{\tilde{\alpha}}^\tau \in M_\nu$ o en otro caso $\tilde{\alpha}$ es un punto límite de u_ν. Desafortunadamente no sabemos si $\tilde{\beta} \in M_\nu$; esto complicará la definición de μ_ν^τ.

Definimos μ_ν^τ, por casos, de la siguiente forma:

Caso 1 $\tilde{\beta}_\nu^\tau \in M_\nu$. Sea

$$\mu_\nu^\tau = \Gamma(\tilde{\alpha}_\nu^\tau, \tilde{\beta}_\nu^\tau, 0)$$

igual que antes.

Caso 2 El caso 1 falla. Entonces $\tilde{\alpha}$ es un punto límite de $D_\tau \cap u_\nu$. De no ser este el caso, $\tilde{\alpha}$ es tal que $\delta_{\tilde{\alpha}}^\tau \in u_\nu \cap D_\tau$, $\tilde{\alpha} \in C_\tau$. Por definición $\delta^\tau_{\tilde\alpha} = \Gamma(\beta^\tau_{\tilde\alpha}, h(A_\tau \cap \alpha)) \geq \beta^\tau_{\tilde\alpha}$ por tanto $\beta^\tau_{\tilde\alpha} \in M_\nu$. Como $\tilde\alpha = \sup\{\alpha \mid \delta^\tau_\alpha \in u_\nu\}$, entonces $\tilde\alpha$ es punto límite de C_τ ya que si $\alpha < \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in C_\tau$ tenemos: $\alpha < \beta^\tau_\alpha < \delta^\tau_\alpha < \alpha'$, porque $\alpha < \beta^\tau_\alpha$ es inmediato por definición de β^τ_α y $\beta^\tau_\alpha < \Gamma(\beta^\tau_\alpha, h(A_\tau \cap \alpha)) = \delta^\tau_\alpha$ y como A_τ se construyó de tal forma que codifique a B obtenemos $\delta^\tau_\alpha < \alpha'$.

Por (8.1) se sigue que $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha, \pi^\tau_{\alpha,\alpha'} \in M_\nu$ para $\alpha \leq \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in \tilde\alpha \cap C_\tau \cap M_\nu$. En lo siguiente suprimimos los superíndices τ, escribiendo $\pi_{\alpha\alpha'}$ por $\pi^\tau_{\alpha\alpha'}$ y demás. Sea $\sigma_\nu : \bar{\mathcal{M}}_\nu \simeq \mathcal{M}_\nu$, donde $\bar{\mathcal{M}}_\nu$ es transitivo. Fijemos

$$\mathcal{N}^*_\alpha = \sigma_\nu^{-1}(\bar{\mathcal{N}}_\alpha), \pi^*_{\alpha\alpha'} = \sigma_\nu^{-1}(\pi_{\alpha\alpha'})$$

para $\alpha \leq \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in \tilde\alpha \cap C_\tau \cap M_\nu$. Entonces $\pi^*_{\alpha\alpha'} : \mathcal{N}^*_\alpha \prec \mathcal{N}^*_{\alpha'}$.

Sea $\langle \mathcal{N}^*, \langle \pi^*_\alpha \rangle \rangle$ el límite directo de $\langle \langle \mathcal{N}^*_\alpha \rangle, \langle \pi^*_{\alpha\alpha'} \rangle_{\alpha \leq \alpha'} \rangle$. Definamos un encaje $\sigma^* : \mathcal{N}^* \prec \bar{\mathcal{N}}_{\tilde\alpha}$ como:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}^*_\alpha \arrow[r, "\pi^*_\alpha"] \arrow[d, "\sigma_\nu \restriction \mathcal{N}^*_\alpha"'] & \mathcal{N}^* \arrow[d, dashed, "\sigma^*"] \\
\bar{\mathcal{N}}_\alpha \arrow[r, "\pi_{\alpha\tilde\alpha}"] & \bar{\mathcal{N}}_{\tilde\alpha}
\end{tikzcd}$$

Es decir, para $[x, \alpha] \in \mathcal{N}^*$ obtenemos $\sigma_\nu(x) \in \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha$, así que $\pi_{\alpha\tilde\alpha}(\sigma_\nu(x)) \in \bar{\mathcal{N}}^\tau_{\tilde\alpha}$; concluimos que $\sigma^*(x) = \pi_{\alpha\tilde\alpha}(\sigma_\nu(x))$. Entonces $\mathcal{N}^*$ está bien fundado y podemos tomarlo como un $\in$-modelo transitivo; si no lo fuera y tomamos un testigo de esto x_i, es decir $x_{i+1} \varepsilon x_i$ – donde ε es la pertenencia– entonces $\sigma^*(x_{i+1}) \in \sigma^*(x_i)$, pero $\bar{\mathcal{N}}_{\tilde\alpha}$ sí está bien fundando, una contradicción. Fijemos: $\alpha^* = \sigma_\nu^{-1}(\tilde\alpha)$, $\beta^* = \beta^{*\tau}_\nu = Or \cap N^*$. Se sigue que si $X \in \bar{M}^L_\nu \cap L_{\beta^*}$ y $X \subset \alpha^*$, entonces $\sigma_\nu(X) = \sigma^*(X)$. Para ver esto, notemos que $X \subset \alpha^*$ implica $\sigma_\nu(X) \subset \tilde\alpha$ además $\sigma^*(X) = \pi_{\alpha\tilde\alpha}(\sigma_\nu(X))$, por lo que $\sigma_\nu(X) \in \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha$. Por definición de $\pi_{\alpha\tilde\alpha}$, $\pi_{\alpha\tilde\alpha}(\sigma_\nu(X)) = (\pi_{\tilde\alpha})^{-1}\pi_\alpha(\sigma_\nu(X))$, como $\pi_{\tilde\alpha} \restriction \tilde\alpha = id \restriction \tilde\alpha$ concluimos $\pi_{\alpha\tilde\alpha}(\sigma_\nu(X)) = \sigma_\nu(X)$. Además $\beta^* \in M^L_\nu$, porque si este no fuera el caso, $M^L_\nu \subset L_{\beta^*}$ y $\sigma^*\sigma_\nu^{-1}[\mathscr{P}(\tilde\alpha)] \cap M_\nu = \mathscr{P}(\tilde\alpha) \cap M_\nu \subset L_{\tilde\beta}$. De esto se concluye que $\mathcal{P}(\tilde\alpha) \cap M^L_\nu \subset L_{\tilde\beta}$, esto contradice que $\mathcal{P}(\alpha) \cap M^L_\nu \not\subset L_{\beta^\tau_{\tilde\alpha}}$.

Luego hacemos:

$$\beta' = \beta'^\tau_\nu = \sigma_\nu^{-1}(\beta^*),$$

$$\mu^\tau_\nu = \Gamma(\tilde\alpha, \beta', 1)$$

8.2 Sea $\tau' < \tau$, $\alpha \in C_\tau$ de tal forma que $\tau' \in ran(\pi^\tau_\alpha)$ y $\delta \in u_\nu$. Si $\mu^{\tau'}$ está definida, entonces $\mu^\tau_\nu \neq \mu^{\tau'}_\nu$.

Prueba Tenemos varios casos según la construcción de $\tilde{\beta}$: Si $\tilde{\alpha}^\tau \neq \tilde{\alpha}^{\tau'}$, es trivial. Para los siguientes pasos pensemos $\tilde{\alpha}^\tau = \tilde{\alpha}^{\tau'} = \tilde{\alpha}$.

- Si $\tilde{\beta}^\tau, \tilde{\beta}^{\tau'} \in M_\nu$, entonces $\tilde{\beta}^\tau \neq \tilde{\beta}^{\tau'}$, por definición de los $\tilde{\beta}$ y por tanto $\mu_\nu^\tau \neq \mu_\nu^{\tau'}$.
- Si $\tilde{\beta}^\tau \in M_\nu \not\leftrightarrow \tilde{\beta}^{\tau'} \in M_\nu$, la afirmación resulta trivial porque $\mu_\nu^\tau = \Gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, 0) \neq \Gamma(\tilde{\alpha}, \beta', 1) = \mu_\nu^{\tau'}$, o viceversa.
- Ahora, cuando $\tilde{\beta}^\tau, \tilde{\beta}^{\tau'} \notin M_\nu$. $\tilde{\alpha}$ surge de un punto límite de $D_\tau \cap u_\nu$. Para $\alpha \in \tilde{\alpha} \cap C_\tau \cap M_\nu$ suficientemente grande tenemos: si $\alpha \leq \alpha' \in \tilde{\alpha} \cap C_\tau \cap M_\nu$, entonces $\alpha, \alpha' \in \tilde{\alpha} \cap C_{\tau'} \cap M_\nu$ y $\pi^\tau_{\alpha\alpha'}(\beta^{\tau'}_{\underline{\alpha}}) = \beta^{\tau'}_{\alpha'}$. Pero la función $\sigma_\nu : \bar{\mathcal{M}}_\nu \prec \mathcal{M}_\nu$ transfiere esto a $\mathcal{M}_\nu$, de donde se sigue que $\beta_\nu^{*\tau} > \beta_\nu^{*\tau'}$. Por lo cual $\mu_\nu^\tau \neq \mu_\nu^{\tau'}$. *QED*

Ahora definamos aplicaciones $f_\tau : \kappa \to \kappa$ como:

$$f_\tau(\nu) = \begin{cases} \mu_\nu^\tau & \text{si } D_\tau \cap u_\nu \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $h_\nu : M_\nu \leftrightarrow \gamma$ y hagamos $\bar{f}_\tau = h_\nu f_\tau$. La funciones $\bar{f}_\tau$ son diferentes en $\prod_{\mathcal{U}} \gamma$, ya que si $\tau' < \tau$, $\tau' \in ran(\pi^\tau_\alpha)$ y $\delta^\tau_\alpha, \delta^{\tau'}_\alpha \in u_\nu$, entonces $\bar{f}_\tau(\nu) \neq \bar{f}_\tau(\nu')$ por (3.2) y por regularidad esto ocurre en un conjunto del ultrafiltro. Entonces alguna $\bar{f}_{\tau^*}$ tiene al menos κ predecesores entre las $\bar{f}_\tau$. Tomemos $\bar{f}_{\tau_\eta}$ $(\eta < \kappa)$ diferentes de tal forma que $\bar{f}_{\tau_\eta} < \bar{f}_{\tau^*}$ en $\prod_{\mathcal{U}} \gamma$. Escojamos $\delta_\eta = \delta^{\tau_\eta}_{\alpha_\eta}$ con $\tau_\xi \in ran(\pi^{\tau_\eta}_{\alpha_\eta})$ para $\xi < \eta$. Así que cuando $\xi < \eta$ y $\delta_\xi, \delta_\eta \in u_\nu$, tenemos $\bar{f}_{\tau_\eta}(\nu) \neq \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu)$. Sea: $\upsilon_\nu = \{\eta \mid \delta_\eta \in u_\nu \wedge \bar{f}_{\tau_\eta}(\nu) < f_{\tau^*}(\nu)\}$. Igual que antes obtenemos una sucesión regular $\langle \upsilon_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$, porque

$$\{\nu < \kappa \mid \xi \in \upsilon_\nu\} = \{\nu < \kappa \mid \delta_\xi \in u_\nu \wedge \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < f_{\tau^*}(\nu)\} = \\ \{\nu < \kappa \mid \delta_\xi \in u_\nu\} \cap \{\nu < \kappa \mid \bar{f}_{\tau_\xi}(\nu) < f_{\tau^*}(\nu)\}$$

donde el primer término de la intersección anterior es un elemento del ultrafiltro por la regularidad de $\langle u_\nu \rangle_{\nu < \kappa}$, el segundo término también es un elemento del ultrafiltro porque $[f_{\tau_\xi}] < [f_{\tau^*}]$, entonces $\{\nu < \kappa \mid \xi \in \upsilon_\nu\} \in \mathcal{U}$ y $|\upsilon_\nu| < \gamma$ ya que $\bar{f}_{\tau^*}(\nu) < \gamma$, por tanto $|\bar{f}_{\tau^*}(\nu)| < \gamma$. □

De hecho la prueba muestra algo ligeramente más fuerte a lo que se afirmó: Si empezamos con una sucesión regular $\langle u_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ de tal forma que cada u_ν es infinito, la prueba da lugar a una nueva sucesión regular $\langle \upsilon_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ con $|\upsilon_\nu| < |u_\nu|$. Para formular esto de forma más concreta definimos lo siguiente.

Definición. *Sea h una función de cardinales infinitos a los elementos de κ. $\mathcal{U}$ es (h,κ)-regular si y solo si existe una sucesión regular $\langle u_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ tal que $\forall \nu |u_\nu| < h(\nu)$. Si k es otra función con las misma propiedades, escribimos $k <_{\mathcal{U}} h$ cuando $\{\nu < \kappa \mid k(\nu) < h(\nu)\} \in \mathcal{U}$.*[11]

Corolario 2.4.9. Bajo $2^{\overset{\kappa}{\smile}} = \kappa$. Si $h >_{\mathcal{U}} \omega$ y $\mathcal{U}$ es (h,κ)-regular pero no (f,κ)-regular para ninguna $f <_{\mathcal{U}} h$, entonces κ es inefable completo en L.

Demostración. Podemos repetir la prueba anterior para una sucesión (h,κ)-regular $\langle u_\xi\rangle_{\xi<\kappa}$ y al final obtenemos, de la misma manera que en la prueba pasada, una sucesión (f,κ)-regular, donde $f <_{\mathcal{U}} h$. □

Este corolario tiene una conexión importante con los ultrafiltros normal débiles:

Lema 2.4.10. *Definamos $cf^+ : \kappa \to \kappa$ como: $cf^+(\nu) = \sup\{\omega, cf(\nu)^+\}$. Si $\mathcal{U}$ es normal débil, entonces $\mathcal{U}$ es (cf^+,κ)-regular pero no (h,κ)-regular para $h <_{\mathcal{U}} cf^+$.*

Demostración. (a) $\mathcal{U}$ es (cf^+,κ)-regular.

Sea $a_\nu \subset \nu$ de tal suerte que $\sup a_\nu = \nu$ y $otp(a_\nu) = cf(\nu)$ para ν límite. Definamos aplicaciones $f_\xi : \kappa \to \kappa$ y puntos $\eta_\xi, \bar\eta_\xi < \kappa$ por recursión. Sea $f_0 = \kappa \to \kappa$ regresiva arbitraria, $\eta_0 = \text{mín}\{\eta < \kappa \mid f^{-1}[\eta] \in \mathcal{U}\}$ y $\bar\eta_0 = \eta_0$

$$\eta_\xi = \text{el menor } \eta \text{ con } f_\xi^{-1}[\eta] \in \mathcal{U},$$
$$\bar\eta_\xi = \sup\nolimits_{\iota<\xi} \eta_\iota,$$
$$f_{\xi+1}(\nu) = \begin{cases} \text{mín}(a_\nu \setminus \bar\eta_\xi) & \text{si } a_\nu \not\subset \bar\eta_\xi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y para el caso límite λ, teniendo $\langle \eta_\iota, \bar\eta_\iota\rangle_{\iota<\lambda}$ ya definida hacemos:

[11]La $<_{\mathcal{U}}$-menor función es la función constante ω.

$$f_\lambda(\nu) = \begin{cases} \text{mín}(a_\nu \setminus \sup_{\iota<\lambda} \bar{\eta}_\iota) & \text{si } a_\nu \not\subset \sup_{\iota<\lambda} \bar{\eta}_\iota \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Fijemos: $u_\nu = \{\xi < \kappa \mid f_\xi(\nu) < \eta_\xi\}$, como $[f_\xi] < [\eta_\xi]$ por elección, entonces $\{\nu < \kappa \mid \xi \in u_\nu\} = \{\nu < \kappa \mid f_\xi(\nu) < \eta_\xi\} \in \mathcal{U}$ y además $|u_\nu| \leq cf(\nu)$ para ν límite. *QED(a)*

(b) $\mathcal{U}$ no es (h, κ) regular para $h < cf^+$.
Pensemos que este no es el caso. Sea $\langle u_\nu \rangle$ una sucesión regular con $|u_\nu| < h(\nu)$. Podemos pensar, sin pérdida de generaldad, que $u_\nu \subset \nu$. Entonces $\{\nu < \kappa \mid \sup u_\nu < \nu\} \in \mathcal{U}$, de donde se desprende que podamos encontrar $\eta < \kappa$ tal que $\{\nu < \kappa \mid \sup(u_\nu) < \eta\} \in \mathcal{U}$. Pero entonces $\{\nu < \kappa \mid \eta \in u_\nu\} \notin \mathcal{U}$. ¡Contradicción!

□

Entonces resulta que:

Corolario 2.4.11. Pensemos que $2^{\overset{\kappa}{\smile}} = \kappa$. Si $\mathcal{U}$ es normal débil entonces κ es inefable completo en L.

Es tentador intentar extender los resultados anteriores imitando esta demostración en ausencia de $V = L$. Se ha tenido poco éxito con este enfoque. Sin embargo podemos mostrar:

Teorema 2.4.12. *Supongamos $\neg 0^\sharp$ y $2^{\overset{\kappa}{\smile}} = \kappa$. Sea $\mathcal{U}$ normal débil. Si $\mathcal{U}$ es (γ, κ)-regular para algún $\gamma < \kappa$, entonces $\mathcal{U}$ es (ω_1, κ)-regular.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ no es (ω_1, κ)-regular y sea $\langle u_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ una sucesión regular $u_\nu \subset \nu$ y $|u_\nu| = cf(\nu)$ para ν límite. Fijemos $W = \{\nu \mid \gamma < \nu < \kappa \wedge \omega < cf(\nu) < \gamma\}$. Por la caracterización de la (γ, κ)-regularidad, $W \in \mathcal{U}$. Sea $B \subset \kappa$ de tal forma que $L_\kappa[B] = H_\kappa$ y definamos $\mathcal{M}_\nu =$ la menor $\mathcal{M} \prec \langle H_\kappa, B\rangle$ con $u_\nu \cup \{u_\nu\} \in M$ $(\nu < \kappa)$. Para $\tau \in E = \{\tau < \kappa^+ \mid \kappa < \tau \wedge L_\tau \prec L_{\kappa^+}\}$ definamos $p_\tau : \kappa \twoheadrightarrow \tau, C_\tau, A_\tau, \mathcal{N}_\tau, \mathcal{N}^\tau_\alpha, \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha, \pi^\tau_\alpha, \pi^\tau_{\alpha\alpha'}$ exactamente como antes. De nuevo tenemos (1)-(4) y 8.1 de los teoremas 2.4.7, 2.4.8. Por $\neg 0^\sharp$ obtenemos el siguiente

Hecho. Para $\alpha \in W \cap C_\tau$, ocurre $\mathcal{P}(\alpha) \cap M^L_\alpha \not\subset L_{\beta^\tau_\alpha}$.
Prueba. $\alpha > \gamma$ y $\omega < cf(\alpha) < \gamma$. Por tanto $\omega < cf(\alpha) < |\alpha|$. Así que α no es regular en L. Ya que $\mathcal{M}^L_\alpha \prec L_\kappa$, podemos encontrar $a \in M^L_\alpha$

con $a \subset \alpha$, $\sup a = \alpha$ y $otp(a) < \alpha$. En tal caso, $a \notin L_{\beta^\tau_\alpha}$ ya que α es regular en $L_{\beta^\tau_\alpha}$. *QED*

Definamos δ^τ_α, D_τ como antes, es decir dada $h : H_\kappa \leftrightarrow \kappa$ definible, $\delta^\tau_\alpha = \Gamma(\beta^\tau_\alpha, h(A_\tau \cap \alpha))$ y $D_\tau = \{\delta^\tau_\alpha \mid \alpha \in C_\tau\}$; luego hágase:

$$X_\tau = \{\nu \in W \mid \sup(D_\tau \cap u_\nu) = \nu\}$$

1 $X_\tau \in \mathcal{U}$

Prueba. Si este no es el caso, sea $g(\nu) = \sup(D_\tau \cap u_\nu)$. Entonces $\{\nu \mid g(\nu) < \nu\} \in \mathcal{U}$. Por lo cual $\{\nu \mid g(\nu) < \eta\} \in \mathcal{U}$ para alguna $\eta < \kappa$. Tomemos α de tal suerte que $\delta^\tau_\alpha \geq \eta$. Entonces $\{\nu \mid \delta^\tau_\alpha \in u_\nu\} \notin \mathcal{U}$. ¡Contradicción! *QED*
Ahora definamos μ^τ_ν prácticamente como antes, pero solo para el caso $\nu \in X_\tau$. Fijamos:

$$\tilde{\alpha}^\tau_\nu = \sup(D_\tau \cap u_\nu) = \nu$$

$$\tilde{\beta}^\tau_\nu = \beta^\tau_{\tilde{\alpha}} = \beta^\tau_\nu.$$

Ya que $\tilde{\alpha}$ es un punto límite de $D_\tau \cap u_\nu$, colapsamos $\mathcal{M}_\nu$, $\sigma_\nu : \bar{\mathcal{M}}_\nu \to \mathcal{M}_\nu$ y construimos $\beta^{*\tau}_\nu \in \bar{M}_\nu$ de la misma manera que antes usando el hecho recién mostrado. Hacemos

$$\mathcal{N}^*_\alpha = \sigma_\nu^{-1}(\bar{\mathcal{N}}_\alpha), \pi^*_{\alpha\alpha'} = \sigma_\nu^{-1}(\pi_{\alpha\alpha'})$$

para $\alpha \leq \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in \tilde{\alpha} \cap C_\tau \cap M_\nu$. Entonces como σ_ν es un isomorfismo se tiene $\pi^*_{\alpha\alpha'} : \mathcal{N}^*_\alpha \prec \mathcal{N}^*_{\alpha'}$.

Sea $\langle \mathcal{N}^*, \langle \pi^*_\alpha \rangle \rangle$ el límite directo de $\langle \langle \mathcal{N}^*_\alpha \rangle, \langle \pi^*_{\alpha\alpha'} \rangle_{\alpha \leq \alpha'} \rangle$. Definimos $\sigma^* : \mathcal{N}^* \prec \bar{\mathcal{N}}_{\tilde{\alpha}}$ igual que antes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}^*_\alpha \arrow[r, "\pi^*_\alpha"] \arrow[d, "\sigma_\nu \restriction \mathcal{N}^*_\alpha"'] & \mathcal{N}^* \arrow[d, dashed, "\sigma^*"] \\
\bar{\mathcal{N}}_\alpha \arrow[r, "\pi_{\alpha\tilde{\alpha}}"] & \bar{\mathcal{N}}_{\tilde{\alpha}}
\end{tikzcd}$$

Así que $\mathcal{N}^*$ está bien fundado y podemos pensarlo como un $\in$-modelo transitivo. Defínase $\alpha^* = \sigma_\nu^{-1}(\tilde{\alpha})$; $\beta^* = \beta^{*\tau}_\nu = Or \cap N^*$. Se sigue que si $X \in \bar{M}^L_\nu \cap L_{\beta^*}$ y $X \subset \alpha^*$, entonces $\sigma_\nu(X) = \sigma^*(X)$. Pero $\bar{\mathcal{M}}^L_\nu$ es un segmento inicial de L. Por lo cual $\beta^* \in M^L_\nu$, ya que de otra forma $M^L_\nu \subset L_{\beta^*}$ y $\sigma^* \sigma_\nu^{-1}[\mathscr{P}(\tilde{\alpha})] \cap M_\nu = \mathscr{P}(\tilde{\alpha}) \cap M_\nu \subset L_{\tilde{\beta}}$, una contradicción. Definimos $\beta'^\tau_\nu = \sigma_\nu(\beta^{*\tau}_\nu)$; es suficiente hacer $\mu^\tau_\nu = \beta'^\tau_\nu$. Como antes obtenemos

2 Sea $\tau' < \tau$, $\nu \in X_{\tau'} \cap X_\tau$ tal que $\tau' \in ran(\pi^\tau_\nu)$. Entonces $\mu^\tau_\nu \neq \mu^{\tau'}_\nu$.

Luego definimos:

$$f_\tau(\nu) = \begin{cases} \mu^\tau_\nu & \text{si } \nu \in X_\tau \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y repetimos la prueba anterior. Esto da a lugar a una sucesión regular $\langle v_\nu \rangle_{\nu<\kappa}$ tal que $|v_\nu| < |u_\nu|$. ¡Contradicción! $\square$

2.4.2. Desmontabilidad

Sea LCH la afirmación: Cada cardinal límite es un cardinal límite fuerte. En esta sección probamos, con la hipótesis $\neg 0^\sharp + LCH$, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme sobre un cardinal regular κ, entonces $\mathcal{U}$ es γ-desmontable para $\gamma < \kappa$. Antes las definiciones relevantes:

Definición. *Sean κ, γ cardinales infinitos tal que $\gamma \leq \kappa$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en κ que es γ-desmontable. Decimos que $f : \kappa \to \gamma$ es una γ-descomposición de $\mathcal{U}$ si y solo si para toda $s \subset \gamma$ con $|s| < \gamma$ ocurre $\bigcup_{\xi \in s} f^{-1}[\{\xi\}] \notin \mathcal{U}$. Es decir si f es un testigo de la desmontabilidad.*

Claramente $f : \kappa \to \gamma$ es una γ-descomposición si y solo si el ultrafiltro

$$f_*(\mathcal{U}) = \{X \subset \gamma | f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$$

es uniforme en γ, si f es una γ-descomposición entonces, dado $X \in f_*(\mathcal{U})$, como $f^{-1}[X] = \bigcup_{\xi \in X} f^{-1}[\{\xi\}] \in \mathcal{U}$, X no puede tener tamaño menor a γ. Si el ultrafiltro es uniforme y tomamos $s \subset \gamma$ de tamaño $< \gamma$, se cumple $f^{-1}[s] = \bigcup_{\xi \in s} f^{-1}[\{\xi\}] \notin \mathcal{U}$, de lo contrario $s \in f_*(\mathcal{U})$, hecho que viola la uniformidad.

Si $f : \kappa \to \gamma$ es una γ-descomposición de $\mathcal{U}$ y $g : \gamma \to \delta$ es una δ-descomposición de $f_*(\mathcal{U})$, obtenemos que $g \circ f : \kappa \to \delta$ es una δ-descomposición de $\mathcal{U}$. Si $s \subset \kappa$ es tal que $|s| < \delta$ deducimos $(g \circ f)^{-1}[s] = f^{-1}\big[g^{-1}[s]\big]$ y como $g^{-1}[s] \notin f_*(\mathcal{U})$, entonces $f^{-1}\big[g^{-1}[s]\big] \notin \mathcal{U}$.

A partir de este punto pensaremos que κ es un cardinal regular y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme sobre κ.

Lema 2.4.13. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro (γ, κ)-regular. Entonces $\mathcal{U}$ es δ-desmontable para cada δ regular con $\gamma < \delta \leq \kappa$.*

Demostración. Tomemos una sucesión regular $\langle u_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ tal que $|u_\nu| < \gamma$ y hagamos $X_\alpha = \{\nu < \kappa \mid \alpha \in u_\nu\}$. Entonces $f(\nu) = \sup(\delta \cap u_\nu)$ es una δ-descomposición: primero $f : \kappa \to \delta$ porque $|u_\nu| < \gamma < \delta$ y por regularidad $\sup(u_\nu \cap \delta) < \delta$. Luego, sea $s \subset \delta$ con $|s| < \delta$. Si $f^{-1}[s] \in \mathcal{U}$, entonces

$$\begin{gathered} f^{-1}[s] \cap X_\alpha = \{\nu < \kappa \mid f(\nu) \in s\} \cap \{\nu < \kappa \mid \alpha \in u_\nu\} = \\ \{\nu < \kappa \mid \sup(\delta \cap u_\nu) \in s\} \cap \{\nu < \kappa \mid \alpha \in u_\nu\} = \\ \{\nu < \kappa \mid \sup(\delta \cap u_\nu) \in s \wedge \alpha \in u_\nu\} \end{gathered}$$

es un elemento de $\mathcal{U}$ para cualquier $\alpha < \kappa$. Si $\alpha = \sup s + 1 < \delta \leq \kappa$, y $\nu \in f^{-1}[s] \cap X_\alpha$, tenemos $\sup(\delta \cap u_\nu) \in s \wedge \alpha \in u_\nu$, pero $\sup(\delta \cap u_\nu) < \alpha$. Como $|u_\nu| < \gamma$, para α existen $\leq \gamma$, ν con dicha propiedad. Un absurdo. $\square$

En la sección sobre desmontabilidad demostramos los siguientes resultados:

Lema 2.4.14. *Sea $\mu < \kappa$ de tal forma que $\mathcal{U}$ no es ν-desmontable para $\mu < \nu \leq 2^{(2^\kappa)^+}$. Entonces $\prod_{\mathcal{U}} \kappa$ tiene una primera función, que es mayor que todas las constantes $\alpha < \kappa$.*

Pero si f es tal función, entonces f es una κ-descomposición y $f_*(\mathcal{U})$ es normal débil. Por tanto, tenemos el siguiente corolario

Corolario 2.4.15. Si $\mathcal{U}$ satisface las hipótesis del lema anterior, entonces existe un ultrafiltro normal débil $\mathcal{V}$ en κ tal que para cada $\gamma \leq \kappa$ si $\mathcal{V}$ es γ-desmontable entonces $\mathcal{U}$ es γ-desmontable.

Lema 2.4.16. *Sea $\mathcal{U}$ τ^+-desmontable donde τ es regular. Entonces $\mathcal{U}$ es τ-desmontable.*

Lema 2.4.17. *Sea λ un cardinal límite fuerte y singular. Tomemos $\mathcal{U}$ como $cf(\lambda)$-desmontable y μ-desmontable para $\mu < \lambda$ arbitrariamente grande. Entonces $\mathcal{U}$ es λ-desmontable.*

La utilidad de suponer LCH es la siguiente. Supongamos LCH y que $\mathcal{U}$ no es τ-desmontable para alguna τ. Sea τ el menor posible. Entonces τ es regular por el lema anterior. Por tanto, $\mathcal{U}$ no es $\tau^{(m)}$-desmontable para $n < \omega$. En cuyo caso $2^{(2^\tau)^+} = \tau^{(m)}$ para alguna $m < \omega$ y se satisface la hipótesis del Lema 2.4.14. Así que podemos pensar que $\mathcal{U}$ es normal débil.

Otro lema importante es:

Lema 2.4.18. *Con las hipótesis del Lema 2.4.14:* $|\prod_{\mathcal{U}} \mu| \leq 2^\mu$ *(donde μ es como en el lema).*

Pero por el argumento anterior tenemos:

Corolario 2.4.19. Supongamos LCH. Si $\mathcal{U}$ no es τ-desmontable para alguna $\tau < \kappa$, entonces $|\prod_{\mathcal{U}} \omega| < \kappa$

En la sección primera de este capítulo vimos la prueba de Silver de la afirmación de que si κ es inaccesible fuerte y $\mathcal{U}$ no es τ-desmontable para cada $\tau < \kappa$, entonces $0^\sharp$ existe. Luego en la sección siguiente vimos la modificación que hizo Ketonen para debilitar la hipótesis con regularidad:

Lema 2.4.20 (Ketonen)**.** *Sea $\mathcal{U}$ normal débil y (γ, κ)-irregular para toda $\gamma < \kappa$. Pensemos que $cf(\prod_{\mathcal{U}} \omega) \leq \rho$, donde $\rho < \kappa$ es de tal suerte que $\nu < \kappa \to \nu\rho < \kappa$. Entonces $0^\sharp$ existe.*

Finalmente necesitamos,:

Lema 2.4.21 (Prikry, Silver)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no τ-desmontable. Si $S \subset \{\nu < \kappa | cf(\nu) = \tau\}$ es estacionario, $\{\xi < \kappa | S \cap \xi$ es estacionario en $\xi\} \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Por la observación, junto a LCH, deducimos que $\mathcal{U}$ es normal débil. Como $cf(\xi) = \tau$ para $\xi \in S$, τ tiene que ser regular. Luego recordemos que $\mathcal{U}$ preserva la convergencia (lema 1.2.12). Sea $S \subset \{\xi < \kappa \mid cf(\xi) = \tau\}$ estacionario. Entonces para todo $\xi \in S$, $\mathcal{U}$ no es $cf(\xi)$-desmontable. Ahora pensemos que

$$N = \{\xi < \kappa \mid S \cap \xi \text{ no es estacionario en } \xi\} \in \mathcal{U}$$

y deduzcamos una contradicción. Para cada $\xi \in N$ sea $C_\xi \subset \xi$ un club de tipo ordinal $cf(\xi)$ y de tal forma que $C_\xi \cap \xi \cap S = C_\xi \cap S = \emptyset$. Luego hacemos $\mathcal{C} = \prod_{\xi \in N} C_\xi / \mathcal{U}$, que es un subconjunto de $\kappa^\kappa_{\mathcal{U}}$ que es cerrado y no está acotado respecto a $[id]$. Se deduce lo siguiente.

Afirmación. $X = \{\xi < \kappa \mid [\xi] \in \mathcal{C}\}$ tiene tamaño κ y es cerrado respecto a límites de sucesiones de tamaño τ.

Prueba. Como recordamos antes, $\mathcal{U}$ preserva convergencia de sucesiones, entonces X es trivialmente cerrado respecto a dichas sucesiones. Luego si probamos que para cada $\alpha < \kappa$, existe $\xi \in X$ con $\alpha < \xi$, habremos terminado. Debido a que $\mathcal{C}$ es cerrado y no está acotado bajo $[id]$ podemos encontrar $\langle f_\zeta, \xi_\zeta \rangle_{\zeta < \tau}$ tal que

$$[f_\zeta] \in \mathcal{C} \text{ y } [\alpha] < [f_\zeta];$$
$$\xi_\zeta \in X,\ [f_\zeta] \leq [\xi_\zeta] \text{ y } [\xi_\zeta] < [f_{\zeta+1}].$$

Hagamos $\xi = \sup_{\zeta<\tau} \xi_\zeta < \kappa$ y además $\xi \in X$ porque $[f_\zeta] \to [\xi]$. *QED*

Sea $\bar{X}$ la clausura de X. Como S es estacionario y $\bar{X}$ es un club, podemos tomar $\xi \in S \cap \bar{X}$. Así que $\xi \in X$, porque podemos encontrar una sucesión $\langle \xi_\zeta \mid \zeta < \tau \rangle$ que converge a ξ. Y todavía más, $[\xi] \in \mathcal{C}$ y por definición de $\mathcal{C}$

$$\{\zeta \in N \mid \xi \in C_\zeta\} \in \mathcal{U}$$

de esto y por $\xi \in S \cap \bar{X} \subset S$ obtenemos $\xi \in C_\zeta \cap S$, una clara contradicción a la elección de C_ζ. □

Ya juntamos todos los elementos que necesitamos para probar:

Teorema 2.4.22 ($\neg 0^\sharp$)**.** *. Supongamos LCH cierta debajo de κ. Entonces $\mathcal{U}$ no es τ-desmontable para ninguna $\tau < \kappa$.*

Demostración. Pensemos que no se satisface la conclusión y tomemos a κ como el menor contraejemplo; sin perder la generalidad sea $\mathcal{U}$ normal débil y no τ-desmontable para algún $\tau < \kappa$. Sea τ el menor de tales cardinales. Entonces τ es regular. Consideramos tres casos:

Caso 1. Existe δ regular de tal forma que $\tau < \delta < \kappa$ y $\mathcal{U}$ es δ-desmontable.

Sea f una δ-descomposición de $\mathcal{U}$. Entonces $f_*(\mathcal{U})$ es τ-desmontable por la elección mínima de κ. Tomemos una τ-descomposición g de $f_*(\mathcal{U})$. Entonces $f \circ g$ es una τ-descomposición de $\mathcal{U}$. ¡Contradicción!

Caso 2 El caso 1 falla y $\kappa = \beta^+$. Entonces β es singular, Ya que de otra forma el caso uno aplica por el lema 2.4.16. Entonces podemos encontrar un conjunto $S \subset \{\xi < \kappa \mid cf(\xi) = \tau\}$ estacionario en κ pero de tal suerte que $S \cap \alpha$ no sea estacionario en α para $\alpha < \kappa$. Y por el lema anterior: $\{\alpha | S \cap \alpha \text{ es estacionario en } \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{U}$. ¡Contradiction!

Caso 3 Los casos anteriores fallan. Entonces κ es inaccesible fuerte y $\mathcal{U}$ no es δ-desmontable para toda δ con $\tau \leq \delta < \kappa$. Entonces por el lema 2.4.13, $\mathcal{U}$ no es (γ, κ)-regular para ninguna $\gamma < \kappa$. Por el corolario 2.4.19, $|\prod_{\mathcal{U}} \omega| < \kappa$. En tal caso $0^\sharp$ existe según el lema 2.4.20. ¡Contradicción!. □

2.4.3. Pulcritud

Los resultados de esta sección se deben a Koppelberg [6].

A partir de aquí pensamos que κ es un cardinal regular y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme y normal débil en κ.

Definición. *Decimos que $\mathcal{U}$ es pulcro, cuando: $f \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha) \cap L$ implica la existencia de $W \subset \mathcal{P}(\kappa) \cap L$ de tal suerte que $|W| < \kappa$ y $\bigcup_{y \in W} \{\alpha < \kappa | \alpha \cap y = f(\alpha)\} \in \mathcal{U}$.*

Ahora tomemos $E \subset \kappa^+$, C_τ, $\mathcal{N}_\tau$, $\mathcal{N}^\tau_\alpha$, $\bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha$, β^τ_α, π^τ_α como en la subsección 2.4.1. Obtemos la siguiente caracterización de pulcritud:

Lema 2.4.23. *Las siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathcal{U}$ es pulcro.

(b) Si $f \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha) \cap L$, existe $g \in (\mathcal{P}(\kappa) \cap L)^\kappa$ con $|ran(g)| < \kappa$ y $\{\alpha < \kappa | \alpha \cap g(\alpha) = f(\alpha)\} \in \mathcal{U}$.

(c) Si $f \in \prod_{\alpha<\kappa} (|\alpha|^+)^L$, existe $\tau \in E$ con $\{\alpha < \kappa | f(\alpha) < \beta^\tau_\alpha\} \in \mathcal{U}$.

Demostración.

- $(b) \to (a)$ es trivial, ya que si g es tal función entonces $W = ran(g)$ tiene tamaño $< \kappa$ y

$$\bigcup_{y \in W} \{\alpha < \kappa | \alpha \cap y = f(\alpha)\} = \{\alpha < \kappa | \alpha \cap g(\alpha) = f(\alpha)\} \in \mathcal{U}.$$

- $(a) \to (c)$ Sea $f \in \prod_{\alpha<\kappa} (|\alpha|^+)^L$ y tomemos $h(\alpha) \in L_{(|\alpha|^+)^L} \setminus L_{f(\alpha)}$, $h(\alpha) \subset \alpha$, $\alpha < \kappa$. Sean $W \subset \mathcal{P}(\kappa) \cap L$, $|W| < \kappa$ tal que $Z = \bigcup_{y \in W} \{\alpha < \kappa | \alpha \cap y = h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ y $\tau \in E$ con $W \subset L_\tau$. Para $\alpha \in C_\tau \cap Z$ suficientemente grande[12], tenemos $\{y \cap \alpha | y \in W\} \subset L_{\beta^\tau_\alpha}$, por tanto $h(\alpha) \in L_{\beta^\tau_\alpha}$, así que $f(\alpha) < \beta^\tau_\alpha$.
- $(c) \to (b)$ Sea $f \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha) \cap L$. Tomemos $h(\alpha) < (|\alpha|^+)^L$ tal que $f(\alpha) \in L_{h(\alpha)}$, $(\alpha < \kappa)$. Escojamos $\tau \in E$ con $Z \in \mathcal{U}$ donde: $Z = \{\alpha \in C_\tau | h(\alpha) < \beta^\tau_\alpha\}$. Sea p una biyección $\mathcal{N}_\tau$-definible de κ sobre N_τ y fijemos $\bar{p}_\alpha = (\pi^\tau_\alpha)^{-1} p \pi^\tau_\alpha$. Luego defínase $q(\alpha) = (\bar{p}_\alpha^{-1} \circ f)(\alpha)$, $(\alpha \in Z)$. Entonces existe $\eta < \kappa$ tal que $q^{-1}[\eta] \in \mathcal{U}$. Para $q(\alpha) = \delta$, tenemos:

$$\bar{p}_\alpha(\delta) = f(\alpha) = \alpha \cap p(\delta).$$

[12] $C_\tau \cap Z \in \mathcal{U}$ por ser $\mathcal{U}$ normal débil, entonces no está acotado debajo de κ, por lo cual α existe.

Así que haciendo $g(\alpha) = p(q(\alpha))$ para $q(\alpha) < \eta$ resulta: $\{\alpha | \alpha \cap g(\alpha) = f(\alpha)\} = q^{-1}[\eta] \in \mathcal{U}$.

□

La pulcritud recupera la idea de la prueba de Ketonen que mostramos en la sección 2.2 y como vimos en esa sección, la regularidad implica pulcritud:

Lema 2.4.24 (Ketonen)**.** *Sea $\mathcal{U}$, (γ, κ)-irregular para toda $\gamma < \kappa$. Entonces $\mathcal{U}$ es pulcro. De hecho, para $f \in \prod_{\alpha<\kappa} |\alpha|^+$, existe $\tau \in E$ tal que $\{\alpha \mid f(\alpha) < \beta^\tau_\alpha\} \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Pensemos que no existe dicho τ. Sea $f \in \prod_{\alpha<\kappa}(|\alpha|^+)^L$ con $Z_\tau \in \mathcal{U}$ para $\tau \in E$, donde $Z_\tau = \{\alpha | \beta^\tau_\alpha < f(\alpha)\}$. Escojamos funciones inyectivas $h_\alpha : f(\alpha) \to |\alpha|$, $(\alpha < \kappa)$. Sea $g(\alpha) = h_\alpha(\beta^\tau_\alpha)$, $(\alpha \in Z_\tau)$. Las g_τ son distintas en $\prod_{\nu<\kappa} |\nu|/\mathcal{U}$, de donde se sigue que existe un cardinal $\gamma < \kappa$ tal que $|E'| = \kappa^+$, con $E' = \{\tau \in E | g_\tau^{-1}[\gamma] \in \mathcal{U}\}$. Así que, $Z'_\tau \in \mathcal{U}$, para $\tau \in E'$, cuando $Z'_\tau = \{\alpha \in Z_\tau | g_\tau(\alpha) < \gamma\}$. Podemos encontrar g_{τ^*} $(\tau^* \in E')$ que al menos tiene κ predecesores entre los g_τ $(\tau \in E')$. Sea g_{τ_ν} $(\nu < \kappa)$ una enumeración de los diferentes predecesores. Escójase α_ν con $\tau_\xi \in ran(\pi^{\tau_\nu}_{\alpha_\nu})$ para $\xi < \nu$. Para $\alpha < \kappa$ sea: $u_\alpha = \{\nu | \alpha_\nu \leq \alpha \in Z'_{\tau_\nu}\}$. Entonces $\langle u_\alpha \rangle$ es una sucesión regular y $|u_\alpha| < \gamma$. ¡Contradicción! □

Sabemos que si existe un ultrafiltro no (κ, κ^+)-regular en κ^+, entonces existe uno normal débil. Así que este lema es una generalización del teorema 2.4.7. Ahora damos una generalización similar del corolario 2.4.9.

Lema 2.4.25. *Si $2^{\overset{\kappa}{\smile}} = \kappa$ entonces $\mathcal{U}$ es pulcro.*

Demostración. Supóngase que no lo es. Entonces podemos escoger $a_\alpha \in \mathcal{P}(\alpha) \cap L$, $(\alpha < \kappa)$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid a_\alpha \notin L_{\beta^\tau_\alpha}\} \in \mathcal{U}$ para $\tau \in E$. Tomemos $B \subset \kappa$ con $L_\kappa[B] = H_\kappa$. Sin perder generalidad podemos pensar que $\langle a_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ es definible en $\langle H_\kappa, B \rangle$. Por normalidad débil obtenemos $\langle u_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ una sucesión regular de tal suerte que $otp(u_\alpha) = cf(\alpha)$ y $\sup u_\alpha = \alpha$, para α límite. Fijemos: $\mathcal{M}_\alpha =$ la menor $\mathcal{M} \prec \langle H_\kappa, B \rangle$ con $u_\alpha \in M$. Entonces $a_\alpha \in M^L_\alpha$. Definamos $E, \mathcal{N}_\tau, \mathcal{N}^\tau_\alpha, \bar{\mathcal{N}}^\tau_\alpha, \beta^\tau_\alpha, \pi^\tau_\alpha, \pi^\tau_{\alpha_\alpha}, C_\tau$, como anteriormente, y δ^τ_α, $D_\tau = \{\delta^\tau_\alpha | \alpha \in C_\tau\}$ igual que antes: tomando $h : H_\kappa \leftrightarrow \kappa$, $\delta^\tau_\alpha = \Gamma(\beta^\alpha_\tau, h(A_\tau \cap \alpha))$. Sea:

$$X_\tau = \{\alpha < \kappa \mid \sup(D_\tau \cap u_\alpha) = \alpha \wedge a_\alpha \notin L_{\beta^\tau_\alpha}\}.$$

Por construcción $X_\tau \in \mathcal{U}$, ya que $\{\alpha < \kappa \mid \sup(D_\tau \cap u_\alpha) = \alpha\} \in \mathcal{U}$. Luego definimos $\mu^\tau_\alpha \in M_\alpha$, $(\alpha \in X_\tau)$ igual que anteriormente, usando $a_\alpha \in M^L_\alpha \setminus L_{\beta^\tau_\alpha}$. Luego definimos:

$$f_\tau(\nu) = \begin{cases} \mu^\tau_\nu & \text{cuando } \nu \in X_\tau \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Igual que antes las funciones son distintas y así obtenemos una sucesión regular $\langle w_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ con $|w_\nu| < |u_\nu|$, lo cual no es imposible. □

Definición. $\langle L_\beta, \mathcal{D}\rangle$ *es sospechoso si* β *es un ordinal límite y existe* $\alpha < \beta$ *con:*

(I) $L_\beta \models cf(\alpha) = \alpha \wedge \alpha =$ *es el mayor cardinal.*

(II) $\mathcal{D}$ *es un ultrafiltro en* $\mathcal{P}(\alpha) \cap L_\beta$.

(III) $\mathcal{D}$ *es normal y* α*-completo en* L_β *(i.e. para* $f : \alpha \to \alpha$, $f \in L_\beta$ *regresiva, tenemos* $\exists \eta f^{-1}[\{\eta\}] \in \mathcal{D}$*).*

(IV) $\langle L_\beta, D\rangle$ *es dócil (i.e.* $x \in L_\beta \to x \cap D \in L_\beta$*).*

Lema 2.4.26. *Sea* $\mathcal{U}$ *pulcro; entonces* $(\kappa^+)^L < \kappa^+$.

Demostración.

- Sea $\langle L_\beta, \mathcal{D}\rangle$ sospechoso. Tomemos $f : (\alpha)^n \to 2, f \in L_\beta$, entonces podemos encontrar $X \in \mathcal{D}$ que es homogéneo para f.

  Prueba. Usamos el método de Kunen para obtener un conjunto homogéneo de un ultrafiltro (dado $X \in D$, $f : (\alpha)^{n+1} \to 2$ construimos $Y \in D$, $g : (Y)^n \to 2$ tal que $Y \subset X$ y $\langle \vec{\nu}, \zeta\rangle \in (Y)^{n+1} \to f(\vec{\nu}, \zeta) = g(\nu)$). Un examen detallado de la demostración de Kunen muestra que $\langle Y, g\rangle$ se obtiene con la aplicación de $\langle X, f\rangle$ a una función rudimentaria en D. Entonces la cerradura rudimentaria de L_β y la docilidad de $\langle L_\beta, \mathcal{D}\rangle$ son suficientes para ver que $\langle Y, g\rangle \in L_\beta$. *QED*

Pero entonces ser sospechoso no se refleja en estratos menores:

- Si $\langle L_\beta, \mathcal{D}\rangle$ es sospechosa, entonces no existe $\gamma < \beta$ tal que $\langle L_\gamma, \mathcal{D} \cap L_\gamma\rangle$ es sospechosa.

  prueba. Pensemos que sí existe. Sea $\langle \varphi_i(\vec{x}) | i < \omega\rangle$ una enumeración recursiva de las ZF-fórmulas. Sea $X_i =$ el $<_L$ -menor $X \in$

$\mathcal{D}$ que es homogéneo para:

$$f_{\varphi_i}(\vec{\nu}) = \begin{cases} 1 & L_\alpha \models \varphi_i(\vec{\nu}) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces $X_i \in L_\gamma$ y por tanto $\langle X_i | i < \omega\rangle \in L_\beta$, lo que da a lugar a $X = \bigcap_{i<\omega} X_i \in \mathcal{D}$. Además X es un conjunto de indiscernibles para L_α el cual es cofinal en α. Así que $L_\beta \models 0^\sharp$ existe. Pero esto es una contradicción porque $L_\beta \models V = L$. *QED*

Usamos esto para probar el lema. Si pensamos que $\kappa_L^+ = \kappa^+$, podemos suponer que las aplicaciones π_α^τ y los subconjuntos C_τ son construibles. Para cada $\tau \in E$ definimos $\mathcal{D}_\alpha^\tau \subset \mathcal{P}(\alpha) \cap L_{\beta_\alpha^\tau}$ tal que $\langle L_{\beta_\alpha^\tau}, \mathcal{D}_\alpha^\tau\rangle$ satisface todo menos (iv) en la definición de sospechoso.

Para $\tau \in E$, $\alpha \in C_\tau$, sea

$$\mathcal{D}_\alpha^\tau = \{X \in \mathcal{P}(\alpha) \cap L_{\beta_\alpha^\tau} | \alpha \in \pi_\alpha^\tau(X)\}.$$

- Para $\tau \in E$ existe $\tau' \in E$ $\tau' > \tau$ de tal forma que $S_{\tau'} \in \mathcal{U}$, donde $S_\tau = \{\alpha \in C_\tau | \langle L_{\beta_\alpha^\tau}, \mathcal{D}_\alpha^\tau\rangle$ es sospechoso$\}$.

  prueba. Definamos una sucesión $\tau_\nu(\nu < \kappa)$ de la siguiente forma:

$$\tau_0 = \tau,$$

$$\tau_{\gamma+1} = \text{mín}\left\{\tau' > \tau_\gamma \mid \{\alpha \in C_{\tau'} | \alpha \in C_{\tau_\gamma} \wedge \mathcal{D}_\alpha^{\tau_\gamma} \in L_{\beta_\alpha^{\tau'}}\} \in \mathcal{U}\right\},$$

$$\tau_\lambda = \sup_{\nu<\lambda} \tau_\nu \text{ para } \lambda \text{ límite.}$$

  Por pulcritud, el caso sucesor queda bien definido. Fijamos: $\tau' = \sup_{\nu<\kappa} \tau_\nu$.

  Afirmación. $S_{\tau'} \in \mathcal{U}$.

  Supongamos que no es el caso y hagamos

$$C = \{\alpha \in C_{\tau'} \mid \{\tau_\xi | \xi < \alpha\} \subset ran(\pi_\alpha^{\tau'}) \wedge \beta_\alpha^{\tau'} = \sup_{\xi<\alpha} \beta_\alpha^{\tau_\xi}\}.$$

  Entonces C es un club en κ y $C \setminus S_{\tau'} \in \mathcal{U}$. Para $\alpha \in C \setminus S_{\tau'}$ hagamos:

$$f(\alpha) = \text{mín}\{\xi < \alpha \mid \mathcal{D}_\alpha^{\tau_\xi} \notin L_{\beta_\alpha^{\tau_\xi}}\};$$

lo anterior existe ya que $\mathcal{D}_\alpha^{\tau_\xi} = \mathcal{D}_\alpha^{\tau'} \cap L_{\beta_\alpha^{\tau_\xi}}$. Por definición, f es regresiva módulo $\mathcal{U}$ y por normalidad débil podemos encontrar $\eta < \kappa$ tal que $f^{-1}[\eta] \in \mathcal{U}$. Pero entonces: Si $\tau_\eta \in ran(\pi_\alpha^{\tau_{\eta+1}})$, $f(\alpha) < \eta$, tenemos $\mathcal{D}_\alpha^{\tau_\eta} \notin L_{\beta_\alpha^{\tau_{\eta+1}}}$, de donde se sigue que $\{\alpha \in C_{\tau_{\eta+1}} \mid \alpha \in C_{\tau_\eta} \wedge \mathcal{D}_\alpha^{\tau_\eta} \in L_{\beta_\alpha^{\tau_{\eta+1}}}\} \notin \mathcal{U}$. Esto contradice la definición de $\tau_{\eta+1}$. *QED*

Ahora escojamos $\tau \in E$ tal que $S_\tau \in \mathcal{U}$ y $\tau' > \tau$ tal que $S_{\tau'} \in \mathcal{U}$. Tomemos $\alpha \in S_{\tau'} \cap S_\tau$ con $\tau \in ran(\pi_\alpha^{\tau'})$, luego $\langle L_{\beta_\alpha^{\tau'}}, \mathcal{D}_\alpha^{\tau'}\rangle$ es sospechoso, pero también lo es $\langle L_{\beta_\alpha^\tau}, \mathcal{D}_\alpha^\tau\rangle = \langle L_{\beta_\alpha^\tau}, \mathcal{D}_\alpha^{\tau'} \cap L_{\beta_\alpha^\tau}\rangle$. ¡Contradicción! □

Como una consecuencia inmediata de lo anterior tenemos:

Lema 2.4.27. *Tomemos $\tau \in E$. Entonces $G_\tau \in \mathcal{U}$, donde $G_\tau = \{\alpha \in G_\tau | \beta_\alpha^\tau > (|\alpha|^+)^L\}$. (Note que $\alpha = (|\alpha|)^L$ es regular en L cuando $\alpha \in G_\tau$).*

Demostración. Supongamos que no se satisface el lema, así que $C_\tau \setminus G_\tau \in \mathcal{U}$. Para $\alpha \in C_\tau \setminus G_\tau$ fijamos

$$\delta_\alpha = \text{mín}\{\delta > \beta_\alpha^\tau \mid L_\delta \models |\beta_\alpha^\tau| \leq \alpha\}.$$

Luego, $\delta < (|\alpha|^+)^L$. Pero si $\tau' > \tau$, $\tau \in ran(\pi_\alpha^{\tau'})$, resulta $\beta_\alpha^{\tau'} < \delta_\alpha$, debido a que $\beta_\alpha^\tau > \alpha^+$ en $L_{\beta_\alpha^{\tau'}}$ por el lema anterior. Para los $\tau' < \tau$, $\tau' \in ran(\pi_\alpha^\tau)$, por definición tenemos $\beta_\alpha^{\tau'} < \beta_\alpha^\tau < \delta_\alpha$. En consecuencia para toda τ' tenemos: $\{\alpha < \kappa \mid \beta_\alpha^{\tau'} < \delta_\alpha\} \in \mathcal{U}$, lo cual contradice la pulcritud. □

Aplicando la técnica de Ketonen resulta:

Teorema 2.4.28. $0^\sharp$ *existe cuando $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro normal débil y pulcro en κ.*

Demostración. Si este no fuera el caso, para $\alpha \in S_\tau$, $\mathcal{D}_\alpha^\tau$ es un ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(\alpha) \cap L$. Es claro que si $\alpha \in S_\tau$, $\tau < \tau'$, $\tau \in ran(\pi_\alpha^{\tau'})$ entonces $\mathcal{D}_\alpha^\tau = \mathcal{D}_\alpha^{\tau'}$.

Para $\alpha \in S_\tau$ fijemos:

$$\mathcal{K}_\alpha^\tau = Ult(L, \mathcal{D}_\alpha^\tau)$$
$$\bar{\mathcal{K}}_\alpha^\tau = Ult(L_{\beta_\alpha^\tau}, \mathcal{D}_\alpha^\tau).$$

Luego si $\tau \in ran(\pi_\alpha^{\tau'})$, $\mathcal{K}_\alpha^\tau = \mathcal{K}_\alpha^{\tau'}$. $\bar{\mathcal{K}}_\alpha^\tau$ siempre está bien fundada ya que existe un encaje $\sigma : \bar{\mathcal{K}}_\alpha^\tau \prec L_\tau$ definido por $\sigma([f]) = \pi_\alpha^\tau(f)(\alpha)$.

Ahora hagamos $\tau = \text{mín}\, E$. Es suficiente ver:

Afirmación. $(\exists \alpha \in S_\tau)\mathcal{K}_\alpha^\tau$ está bien fundada. (De aquí se sigue la existencia de $0^\sharp$.).

Pensemos que no existe dicho α. Entonces para cada α existe $\langle f_\alpha^i | i < \alpha\rangle$ que forma un contraejemplo de que $\mathcal{K}_\alpha^\tau$ esté bien fundado. Sin perder generalidad, suponemos que $\forall i f_\alpha^i \in L_{\vartheta_\alpha}$ donde $\vartheta_\alpha =$ el menor ϑ tal que $\{f^i \mid i < \omega\} \subset L_\vartheta$ para algún contraejemplo $\langle f^i\rangle$ a que esté bien fundado. Por tanto, $\vartheta_\alpha < |\alpha|^+$. (Para ver esto, hagamos $\mathcal{M} =$ el menor $\mathcal{N} \prec L_{\vartheta_\alpha}$ tal que $\{f_\alpha^i \mid i < \omega\} \subset N$ y $\alpha \subset N$; ponemos

$$\sigma : L_{\bar{\vartheta}} \simeq \mathcal{M}, \bar{f}^i = \sigma^{-1}(f_\alpha^i).$$

Entonces $\bar{\vartheta} < |\alpha|^+$. Pero $\{\nu < \kappa \mid f_\alpha^{i+1}(\nu) < f_\alpha^i(\nu)\} = \{\nu < \kappa \mid \bar{f}_\alpha^{i+1}(\nu) < \bar{f}_\alpha^i(\nu)\}$. Por tanto ,$\langle \bar{f}_\alpha^i\rangle$ es un contraejemplo a que esté bien fundado, y como ϑ_α era el mínimo, deducimos $\vartheta_\alpha = \bar{\vartheta} < |\alpha|^+$).

Por pulcritud podemos encontrar $\tau \in E$ de tal suerte que $\{\alpha < \kappa \mid \beta_\alpha^\tau > \vartheta_\alpha\} \in \mathcal{U}$. Escojamos $\alpha \in S_\tau$ con $\tau \in ran(\pi_\alpha^\tau)$. Entonces $\bar{\mathcal{K}}_\alpha^\tau \subset \mathcal{K}_\alpha^\tau = \mathcal{K}_\alpha^\tau$ está bien fundada y $[f_\alpha^i] \in \bar{\mathcal{K}}_\alpha^\tau$. ¡Contradicción! $\square$

Teorema 2.4.29 $(\neg 0^\sharp)$**.** *Sea κ regular con $2^{\underset{\smile}{\kappa}} = \kappa$. Entonces no existe un ultrafiltro normal débil en κ.*

Demostración. Supongamos dicho ultrafiltro $\mathcal{U}$ existe. Entonces κ es inefable en L y $\mathcal{U}$ es (cf^+, κ)-regular pero no (f, κ)-regular para $f <_\mathcal{U} cf^+$. Como $\neg 0^\sharp$, $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro pulcro y existe τ_E tal que para toda $\alpha \in S_{\tau_E}$, $\mathcal{K}_\alpha^{\tau_E}$ no está bien fundada.

Hecho. Si $\alpha \in C_\tau \cap S_{\tau_E}$, $\tau_E \in ran(\pi_\alpha^\tau)$, entonces $\beta_\alpha^\tau < \vartheta_\alpha$, donde $\tau_E = \text{mín}\, E$.

Fijemos $\langle u_\alpha\rangle$ una sucesión regular tal que $|u_\alpha| = cf(\alpha)$ y $\sup(u_\alpha) = \alpha$ para $\text{lím}(\alpha)$. Sea $B \subset \kappa$ tal que $H_\kappa = L_\kappa[B]$.

Para $\alpha \in S_{\tau_E}$ definimos:

$\mathcal{M}_\alpha =$ la menor $\mathcal{N} \prec \langle H_\kappa, B\rangle$ con $|u_\alpha| \cup \{u_\alpha\} \cup \{\langle f_\alpha^i \mid i < \omega\rangle\} \subset N$,

donde $\langle f_\alpha^i \mid i < \omega\rangle$ es un contraejemplo a que $\mathcal{K}_\alpha^{\tau_E}$ esté bien fundado. Definamos, para $h : H_\kappa \leftrightarrow \kappa$ definible, $\delta_\alpha^\tau = \Gamma(\beta_\alpha^\tau, h(A_\tau \cap \alpha))$ y $D_\tau = \{\delta_\alpha^\tau | \alpha \in C_\tau\}$ como anteriormente. Sea: $X_\tau = \{\alpha \in C_\tau | \alpha \in$

$S_{\tau_E} \wedge \tau_E \in ran(\pi^\tau_\alpha) \wedge \sup(D_\tau \cap u_\alpha) = \alpha\}$. Entonces $X_\tau \in \mathcal{U}$, porque al ser intersección de tres clubes resulta un club. Igual que antes, definimos $\mu^\tau_\alpha \in M_\alpha$ $(\alpha \in X_\tau)$: Fijemos $\alpha, \beta = \beta^\tau_\alpha$. Suprimimos sistemáticamente los superíndices τ, escribiendo $\beta_\nu, \pi_{\nu\alpha}, \pi_\nu$ etc. en lugar de $\beta^\tau_\nu, \pi^\tau_\nu, \pi^\tau_{\nu\alpha}$ etc. Sea $\sigma : \bar{\mathcal{M}}_\alpha \simeq \mathcal{M}_\alpha$ donde $\bar{\mathcal{M}}_\alpha$ es transitivo. De la misma manera que antes hacemos:

$$\mathcal{N}^*_\nu = \sigma^{-1}(\bar{N}_\nu), \pi^*_{\nu\nu'} = \sigma^{-1}(\pi_{\nu\nu'}), \text{ para } \nu \leq \nu',\ \nu, \nu' \in \alpha \cap C_\tau \cap M_\alpha.$$

Igualmente hacemos $\langle \mathcal{N}^*, \langle \pi^*_\nu \rangle\rangle$ el límite directo de $\langle\langle \mathcal{N}^*_\nu\rangle, \langle \pi^*_{\nu\nu'}\rangle\rangle$ y definimos $\sigma^* : \mathcal{N}^* \prec \bar{\mathcal{N}}_\alpha$ como:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^*_\nu & \xrightarrow{\pi^*_\nu} & \mathcal{N}^* \\ {\scriptstyle \sigma\restriction\mathcal{N}^*_\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} \\ \bar{\mathcal{N}}_\nu & \xrightarrow{\pi_{\nu\alpha}} & \bar{\mathcal{N}}_\alpha \end{array}$$

De nuevo pensamos $\mathcal{N}^*$ como un $\in$-modelo transitivo y hacemos: $\alpha^* = \sigma^{-1}(\alpha)$, $\beta^* = On \cap N^*$. Como antes $\sigma(x) = \sigma^*(x)$ para $x \in \bar{M}^L \cap L_{\beta^*}$. Repetimos la construcción anterior, una vez que mostremos la siguiente afirmación:

Afirmación. $\beta^* \in \bar{M}$

Piénsese que $\beta^* \notin \bar{M}$. Sea $f^*_i = \sigma^{-1}(f^i_\alpha)$. Así, $\{f^*_i | i < \omega\} \subset L_{\beta^*}$. Fijemos $\bar{f}_i = \sigma^*(f^*_i)$. Entonces $\bar{f}_i \in L_\beta$ y $\bar{f}_i : \alpha \to \beta$, por lo cual resulta:

$$\begin{gathered} \{\nu < \alpha | \bar{f}_i(\nu) < \bar{f}_j(\nu)\} = \\ \sigma^*(\{\nu < \alpha^* | f^*_i(\nu) < f^*_j(\nu)\}) = \\ \sigma(\{\nu < \alpha^* | f^*_i(\nu) < f^*_j(\nu)\}) = \\ \{\nu < \alpha | f^i_\alpha(\nu) < f^j_\alpha(\nu)\}. \end{gathered}$$

Pero $\langle \bar{f}\rangle$ es un contraejemplo a que $\mathcal{K}^\tau_\alpha$ esté bien fundada, $\langle \bar{f}_i | i < \omega\rangle \subset L_\beta \wedge \beta < \vartheta_\alpha$. Lo cual contradice la elección mínima de ϑ_α, donde ϑ_α es igual que en la prueba del teorema anterior. *QED.*
Con esto podemos fijar $\mu^\tau_\alpha = \sigma^{-1}(\beta^*)$. Por tanto

1 Para $\tau' < \tau, \nu \in X_\tau \cap X_{\tau'}$ with $\tau' \in ran(\pi^\tau_\nu)$, tenemos $\mu^\tau_\nu \neq \mu^\tau_\nu$.

Definimos $\langle f_\tau \rangle$ como

$$f_\tau(\nu) = \begin{cases} \mu^\tau_\nu & \text{si } \nu \in X_\tau \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que son distintas en $\prod_{\alpha<\kappa} cf(\alpha)/\mathcal{U}$, y entonces podemos encontrar τ^* y $\tau_\xi, \xi < \kappa$ con $[f_{\tau_\xi}] < [f_{\tau^*}]$ y esto da lugar a $v_\nu = \{\eta \mid \delta_\eta \in u_\nu \wedge f_{\tau_\eta}(\nu) < f_{\tau^*}\}$, donde $\delta_\eta = \delta^{\tau_\eta}_{\alpha_\eta}$ es tal que $\tau_\xi \in ran(\pi^{\tau_\eta}_{\alpha_\eta})$ para los $\xi < \eta$. Entonces $\langle v_\nu \mid \nu < \kappa\rangle$ es una sucesión (h, κ)-regular para alguna $h <_{\mathcal{U}} cf^+$. Una contradicción. $\square$

APÉNDICE

2.5. Teoría de Conjuntos y Ordinales.

Este trabajo supuso ZFE – Zermel-Fraenkel más el axioma de elección– más algunas hipótesis extras que fueron señaladas en su momento. Por ejemplo, la existencia de ciertos ultrafiltros, la hipótesis de Kurepa HK o $V = L$. A través del trabajo se utilizó el modelo-clase V; este se define por recursión ordinal como:

- $V_0 = \emptyset$,
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$,
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, para λ límite.
- $V = \bigcup_{\alpha\in Or} V_\alpha$

donde $Or = \{\alpha \mid \alpha \text{ es un ordinal}\}$ y por $\mathcal{P}(X)$ entendemos el conjunto potencia de X es decir $\mathcal{P}(X) = \{Z \mid Z \subset X\}$. Esta clase satisface todos los axiomas de ZF y asumiendo que se cumple elección V lo cumple.

Definición. *Sea X cualquier conjunto. Decimos que a es (primer orden) definible en X si existen elementos de X, $\vec{p}$ y una fórmula $\varphi(x, \vec{p})$ con*[13]

$$X \models \varphi[x, \vec{p}] \leftrightarrow x = a.$$

Hacemos $Def(X) = \{a \subset X \mid a \text{ es (primer orden) definible en } X\}$.

Esta anterior definición nos permite hacer:

- $L_0 = \emptyset$,

[13] Aquí pensamos en el lenguaje de teoría de conjuntos, es decir que nuestros predicados son $\in, =$. También se puede pensar en definibilidad en el lenguaje de teoría de conjuntos con algún predicado A.

- $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$,
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\lambda$ para α límite,
- $L = \bigcup_{\alpha\in Or} L_\alpha$.

Si pensamos en un lenguaje con algún predicado $A \subset V$ entonces $L[A]$ se define como

- $L_0[A] = \emptyset$,
- $L_{\alpha+1}[A] = Def_A(L_\alpha)$,
- $L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\lambda[A]$ para α límite,
- $L[A] = \bigcup_{\alpha\in Or} L_\alpha[A]$.

donde $Def_A(X)$ es igual que antes solo que ahora se toman en consideración los conjuntos definibles con fórmulas φ donde el predicado A puede ocurrir.

Definición. *Decimos que $\langle X, \varepsilon\rangle$ está bien fundado cuando no existe una $\in$-cadena decreciente infinita de conjuntos, es decir que no existe $\langle x_i \mid i < \omega\rangle$ con $x_{i+1}\varepsilon x_i$.*

Lema 2.5.1 (Colapso de Mostowski)**.** *Si $\langle X, \varepsilon\rangle$ es extensional y está bien fundada entonces existe $\langle M, \in\rangle$ transitivo y $\mathfrak{K} : \langle X, \varepsilon\rangle \simeq \langle M, \in\rangle$*

Demostración. Definimos $\mathfrak{K}(x) = \{\mathfrak{K}(y) \mid y\varepsilon x\}$. Claramente, $\mathfrak{K}$ es un isomorfismo: si $\mathfrak{K}(y) \in \mathfrak{K}(x) = \{\mathfrak{K}(z) \mid z\varepsilon x\}$, entonces $y\varepsilon x$ y si $y\varepsilon x$ entonces $\mathfrak{K}(y) \in \mathfrak{K}(x)$ por definición. Solo resta ver que es una inyección, probamos esto por ε-inducción: por definición sabemos que $\mathfrak{K}(y) = \mathfrak{K}(x)$ cuando y solo cuando $\mathfrak{K}[\{u \mid u\varepsilon y\}] = \mathfrak{K}[\{v \mid v\varepsilon x\}]$, entonces $\{u \mid u\varepsilon y\} = \{v \mid v\varepsilon x\}$ y como $\langle X, \varepsilon\rangle$ es extensional entonces $x = y$. Finalmente, afirmamos que $M = \mathfrak{K}[X]$ es transitivo: $y \in \mathfrak{K}(x) \in M$ pero $\mathfrak{K}(x) = \{\mathfrak{K}(y) \mid y\varepsilon x\}$ así que existe $z\varepsilon x$ con $y = \mathfrak{K}(z) \in M$. □

Si X está bien ordenada, entonces M es un ordinal. El universo construible L tiene una agradable consecuencia de este lema:

Lema 2.5.2 (Condensación)**.** *Si $X \prec L_\kappa$ y $\omega\kappa = \kappa$ entonces existe*[14] *$\rho \le \kappa$ con $X \simeq L_\rho$.*

[14] De hecho es suficiente pedir que $X \prec_{\Sigma_1} L_\kappa$, es decir que se preservan las Σ_1-fórmulas (aquellas de la forma $(\exists x)\varphi$ donde φ consiste en combinación de fórmulas atómicas y poseen cuantificación acotada $\forall u \in y, \exists v \in x$).

La jerarquía $L[A]$ tiene un análogo a este lema:

Lema 2.5.3 (Condensación con un Predicado)**.** *Si* $X \prec L_\kappa[A]$ *y* $\omega\kappa = \kappa$ *entonces existen* $\rho \leq \kappa$, $\bar{A}$ *con*[15] $X \simeq L_\rho[\bar{A}]$.

Omitimos las pruebas por afán de brevedad.

Dados dos ordinales α, β podemos bien ordenar $\alpha \times \beta$ con:

$$\begin{gathered}(\gamma,\delta) \prec (\xi,\zeta) \leftrightarrow \\ \text{máx}\{\gamma,\delta\} < \text{máx}\{\xi,\zeta\} \vee (\text{máx}\{\gamma,\delta\} = \text{máx}\{\xi,\zeta\} \wedge \gamma < \xi) \vee \\ (\text{máx}\{\gamma,\delta\} = \text{máx}\{\xi,\zeta\} \wedge \gamma = \xi \wedge \delta < \zeta);\end{gathered}$$

es un buen orden gracias a que $<$ es un orden linear y a que $<$ está bien fundada.

Entonces

Definición. *La función par de Gödel* $\Gamma : Or \times Or \to Or$ *se define como:*

$$\Gamma(\alpha,\beta) = otp(\{(\gamma,\delta) \in Or^2 \mid (\gamma,\delta) \prec (\alpha,\beta)\}).$$

Definición. *Para* $n < \omega$ *y* κ *un cardinal definimos* $\kappa^{(n)}$ *por inducción:* $\kappa^{(0)} = \kappa$, $\kappa^{(n+1)} = (\kappa^{(n)})^+$.

Teorema 2.5.4 (Erdős-Rado)**.** *Sean* $\kappa \geq \omega$ *y* $n < \omega$. *Entonces:*

$$(\beth_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa.$$

Es decir que para cada $f : [(\beth_n(\kappa))^+]^{n+1} \to \kappa$, *existe* $X \subset (\beth_n(\kappa))^+$ *tal que* $|X| = \kappa^+$ *y* $|f\big[[X]^{n+1}\big]| = 1$.

Definición. *Sea* κ *un cardinal*

- κ *es inaccesible débil si es límite y regular.*
- κ *es inaccesible (fuerte) cuando es límite fuerte y regular.*
- κ *es compacto débil cuando* $\kappa \to (\kappa)^2_2$.
- κ *es Ramsey cuando* $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$.
- κ *es inefable si para cualquier sucesión* $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ *con* $S_\alpha \subset \alpha$ *existe* $S \subset \kappa$ *con* $\{\alpha < \kappa \mid S_\alpha = S \cap \alpha\}$ *estacionario.*

[15] Aquí ocurre $\mathfrak{K}[A \cap X] = \bar{A}$, donde $\mathfrak{K}$ es la función colapso.

- *κ es inefable completo si existe una clase estacionaria*[16] *$\mathcal{E}$ tal que para toda $S \in \mathcal{E}$ y cada $f : [S]^2 \to 2$ existe $H \in \mathcal{E}$ con $|f\big[[H]^2\big]| = 1$.*

Inefable completo es equivalente, véase [1], a la existencia de una clase estacionaria $\mathcal{E}$ tal que si $H \in \mathcal{E}$ y $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ es una sucesión con $S_\alpha \subset \alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, existen $S \subset \kappa$ y $G \subset H,\ G \in \mathcal{E}$ tales que

$$G \subseteq \{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha = S_\alpha\}.$$

E inefable completo implica inefable, porque la existencia de la clase estacionaria $\mathcal{E}$ asegura la existencia de un estacionario E con

$$E \subseteq \{\alpha < \kappa \mid S \cap \alpha = S_\alpha\}.$$

2.6. Filtros.

Definición. *Decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro en X si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y*

- *si $Z, Y \in \mathcal{F}$ entonces $Z \cap Y \in \mathcal{F}$,*
- *si $Z \in \mathcal{F}$ y $Z \subset Y$ entonces $Y \in \mathcal{F}$, para $Y \in \mathcal{P}(X)$.*

Se dice que el filtro es propio cuando $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definición. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X si es un filtro y además:*

$$\textit{para toda } Y \in \mathcal{P}(X),\ Y \in \mathcal{P}(X) \leftrightarrow X \setminus Y \notin \mathcal{P}(X).$$

Los filtros pueden ser extendidos a ultrafiltros y los ultrafiltros son aquellos filtros que no pueden ser extendidos a otros filtros, es decir que son filtros máximos.

Definición. *$\mathcal{I}$ es un ideal en X cuando y solo cuando $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ y*

- *si $Z, Y \in \mathcal{I}$ entonces $Z \cup Y \in \mathcal{I}$,*
- *si $Y \in \mathcal{I}$ y $Z \subset Y$ entonces $Z \in \mathcal{I}$, para $Y \in \mathcal{P}(X)$.*

Lema 2.6.1. *Cualquier ideal genera un filtro y cualquier filtro genera un ideal.*

[16] $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ es una clase estacionaria cuando no es vacía, cada $S \in \mathcal{E}$ es estacionario y $T \supset S,\ S \in \mathcal{E}$ implica $T \in \mathcal{E}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Definimos $\mathcal{F}^* = \{W \subset X \mid X \setminus W \in \mathcal{F}\}$, entonces $\mathcal{F}^*$ es un ideal: si $X \setminus U, X \setminus V \in \mathcal{F}$ entonces $X \setminus U \cap X \setminus V = X \setminus (U \cup V) \in \mathcal{F}$, así que $U \cup V \in \mathcal{F}^*$. Ahora si $X \setminus W \in \mathcal{F}$ y $S \subset W$ entonces $X \setminus W \subset X \setminus S$ por tanto $S \in \mathcal{F}^*$.

Y si $\mathcal{I}$ es un ideal en X. Hacemos $\mathcal{I}^* = \{W \subset X \mid X \setminus W \in \mathcal{I}\}$, entonces $\mathcal{I}^*$ es un filtro: si $X \setminus U, X \setminus V \in \mathcal{I}$ entonces $X \setminus U \cup X \setminus V = X \setminus (U \cap V) \in \mathcal{I}$, por lo que $U \cap V \in \mathcal{I}^*$. Luego, si $X \setminus W \in \mathcal{I}$ y $S \supset W$ entonces $X \setminus W \supset X \setminus S$ por lo cual $S \in \mathcal{I}^*$. □

Si $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces al ideal generado por $\mathcal{F}^*$ se le conoce como ideal dual. Lo mismo para ideales.

Definición. *Supóngase que $|X| = \kappa$, decimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro uniforme en X siempre que sea un ultrafiltro y $|Y| = \kappa$ para cada $Y \in \mathcal{U}$.*

Definición. *Supóngase que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X. Decimos que $\mathcal{U}$ es μ-completo siempre que para cualquier $\rho < \mu$ se tenga*

$$\{X_\xi \mid \xi < \rho\} \subset \mathcal{U} \to \bigcap_{\xi<\rho} X_\xi \in \mathcal{U}.$$

es decir que es cerrado bajo intersecciones de sucesiones de longitud $< \mu$.

Si $\mathcal{U}$ es κ-completo en X entonces:

$$\bigcup_{\xi<\rho} X_\xi \in \mathcal{D} \to (\exists \zeta < \rho) X_\zeta \in \mathcal{D},$$

donde $\rho < \kappa$; para ver esto pensemos que lo anterior es falso entonces $X \setminus X_\xi \in \mathcal{D}$ para toda $\xi < \rho$. Por la κ-completud: $\bigcap_{\xi<\rho} X \setminus X_\xi \in \mathcal{D}$, pero $\bigcap_{\xi<\rho} X \setminus X_\xi = X \setminus \bigcup_{\xi<\rho} X_\xi$, entonces $\bigcup_{\xi<\rho} X_\xi \cap X \setminus \bigcup_{\xi<\rho} X_\xi = \emptyset \in \mathcal{D}$. Una contradicción.

Definición. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en κ. Decimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro normal si para cada $f : \kappa \to \kappa$ regresiva módulo $\mathcal{U}$ (es decir que $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \in \mathcal{U}$) podemos encontrar $\eta < \kappa$ con $f^{-1}[\{\eta\}] \in \mathcal{U}$.*

Lema 2.6.2. *Si $\kappa > \omega$ posee un ultrafiltro κ-completo y uniforme, entonces posee uno normal.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro κ-completo y uniforme; veamos primero que el ultraproducto $\langle \kappa, <, X\rangle^\kappa_{\mathcal{U}}$, para cualquier $X \subset \kappa$, está bien fundado. Pensemos que no lo está y sean $[f_i], i < \omega$ en la ultrapotencia con $[f_{i+1}]\epsilon[f_i]$, es decir:

$$X_i = \{\xi < \kappa \mid f_{i+1}(\xi) < f_i(\xi)\} \in \mathcal{U}.$$

Entonces $X = \bigcap_{i<\omega} X_i \in \mathcal{U}$ por κ-completud. Pero para $\xi \in X$ tenemos

$$\ldots < f_{i+1}(\xi) < f_i(\xi) < \ldots < f_1(\xi) < f_0(\xi)$$

que es una cadena decreciente de ordinales. Una contradicción. Entonces $\langle \kappa, <, X\rangle^\kappa_\mathcal{U}$ está bien ordenado. Sea $f : \kappa \to \kappa$ la menor función con $\{\xi < \kappa \mid \gamma < f(\xi)\} \in \mathcal{D}$ para toda $\gamma < \kappa$. Como $\kappa^\kappa_\mathcal{U}$ está bien ordenado y el conjunto $M = \{f \mid (\forall\gamma < \kappa)[f] > [\gamma]\}$ no es vacío ya que $id \in M$, entonces f está bien definida. Sea $\mathcal{D} = \{X \subset \kappa \mid f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$, afirmamos que $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro κ-completo y normal. Ya sabemos que es un ultrafiltro[17]. Veamos que es κ-completo y normal: Si $\{X_\xi \mid \xi < \rho\} \subset \mathcal{D}$ para $\rho < \kappa$, entonces $f^{-1}[X_\xi] \in \mathcal{U}$ para toda $\xi < \rho$; pero sabemos que $\mathcal{U}$ es $\kappa - completo$ entonces $\bigcap_{\xi<\rho} f^{-1}[X_\xi] = f^{-1}[\bigcap_{\xi<\rho} X_\xi] \in \mathcal{U}$; así que, $\bigcap_{\xi<\rho} X_\xi \in \mathcal{D}$. Eso prueba la κ-completud. Para ver la normalidad sea $h : \kappa \to \kappa$ regresiva en $X \in \mathcal{D}$. Definamos $h(\xi) = g(f(\xi))$. Entonces h es regresiva y $h(\alpha) < f(\alpha)$ para toda $\xi \in f^{-1}[X]$ así que $[h] < [f]$; pero por definición de f, siendo la menor de las funciones mayor que las constantes, g es constante en algún $Y \in \mathcal{U}$ es decir que h es constante en $f[Y]$. □

2.7. Clubes y Estacionarios.

Definición. *Sea κ un cardinal. Decimos que $C \subset \kappa$ es un club en κ cuando no está acotado, es decir para cada $\xi < \kappa$ existe $\zeta \in C$ con $\xi \leq \zeta$, y cuando es cerrado, sto es que para cada $\gamma < \kappa$ con* $\sup(C \cap \gamma) = \gamma$ *tenemos $\gamma \in C$ (es cerrado bajo sucesiones). Un conjunto estacionario en κ es aquel que intersecta a cada club en κ.*

Lema 2.7.1. *Sea κ un cardinal. La intersección de $< cf(\kappa)$ clubes es un club.*

Corolario 2.7.2. Sea κ un cardinal. Definimos $\mathcal{C}_\kappa =$ el filtro generado por todo los clubes en κ. Entonces $\mathcal{C}$ es un filtro $cf(\kappa)$-completo en κ, y lo llamamos el filtro club en κ.

[17] Véase el lema 1.1.1.

2.8. Teoría de Modelos

Definición. *Sean dos estructuras del mismo lenguaje $\mathcal{A}, \mathcal{B}$; decimos que $\mathcal{A}$ es una subestructura elemental de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, si existe $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con*[18]

$$\mathcal{A} \models \varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[g(\vec{x})].$$

Teorema 2.8.1 (Criterio de Tarski-Vaught)**.** *Dadas dos estructuras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,*

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \textit{ si y solo si}$$
$$\mathcal{B} \models (\exists x)\varphi[\vec{g}(\vec{y})] \textit{ implica } \mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[\vec{y}]$$

Teorema 2.8.2. *Sea $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \xi < \alpha \rangle$ una cadena de estructuras elementales, es decir:*

$$\mathcal{A}_0 \prec \mathcal{A}_1 \prec \ldots \mathcal{A}_\xi \prec \mathcal{A}_{\xi+1} \prec \ldots$$

entonces[19] $\mathcal{A}_\zeta \prec \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{A}_\xi$.

Teorema 2.8.3 (Łoś)**.** *Dados $\langle \mathcal{A}_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ y un ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre κ, se concluye*

$$\prod_{\mathcal{U}} A_\xi \models \varphi[[\vec{f}]] \leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \mathcal{A}_\xi \models \varphi[f(\vec{\xi})]\} \in \mathcal{U}.$$

[18] Aquí abreviamos $g(x_1), \ldots g(\vec{x}_n)$ por $g(\vec{x})$.

[19] Sin perder la generalidad, podemos pensar que $A_\xi \subset A_\zeta$ para $\xi < \zeta$ así $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{A}_\xi$ tiene sentido.

Bibliografía

[1] Abramson, F. G., Harrington, L. A., Kleinberg, E. M., Zwicker, W. S., *Flipping Properties: A Unifying Thread in the Theory of Large Cardinals* 1997, Annals of Mathematical Logic 12, págs. 25-58.

[2] Devlin, K., *Aspects of Constructibility*, Lecture Notes in Mathematics vol. 354.

[3] Huberich, M., *Non-regular Ultrafilters*, 1994, Israel Journal of Mathematics 87, págs. 275-288.

[4] Jech, T., *Set Theory* The Third Millenium Edition, revised and explained. 2003, Springer.

[5] Jensen, R., *Some combinatorial properties of L and V.*, Manuscrito no publicado. `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html`

[6] Jensen, R. y Koppelberg, B., *A Note on Ultrafilters.* Manuscrito no publicado.

[7] Nido Valencia, J. A., Salazar, H. G., Villegas Silva, L. M., *Teoría de Conjuntos, Álgebra y Grandes Cardinales.* Propuesto para publicación.

[8] Kanamori, Akihiro. *Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings, 2009, Springer. Second Edition.

[9] Kanamori, Akihiro. *Ultrafilters over Uncountable Cardinals.* Tesis doctoral.

[10] Kanamori, Akihiro. *Weakly Normal Filters and Irregular Ultrafilters.* 1976, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 220, págs. 393-399.

[11] Keisler, H. J., Chang, C. C. *Model Theory* Third impression 1992, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 73, Elsevier Science Publishers.

[12] Ketonen, J., *Nonregular ultrafilters and large cardinals.* 1976, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 224, number 1, págs 61-73.

[13] Ketonen, J. *Strong Compactness and Other Cardinal Sins.* 1972, Annals of Mathematical Logic, págs 47-76.

[14] Ketonen, J. y Benda, M., *Regularity of Ultrafilters.* 1974, Israel Journal of Mathematics, vol 17, issue 3, págs 231-240.

[15] Kunen, K. *Some Applications of Iterated Ultrapowers in Set Theory*, 1970, Annals of Mathematical Logic, vol. 1, number 2, págs. 179-227.

[16] Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, 1980, Elsevier Science Publishers.

[17] Kunen, K. y Prikry, K., *On descendingly incomplete Ultrafilters.* 1971 JSL Vol. 36, No. 4, págs. 650-652.

[18] Prikry, K., *On descendingly complete Ultrafilters.* 1973, Cambridge Summer School in Mathematical Logic, Mathias A. R. D. y Rogers H. editores, págs 459-488.

[19] Prikry, K. y Solovay, R. M. *On Partitions into Stationary Sets.* 1975, J. Symbolic Logic, Volume 40, Issue 1, págs 75-80.

[20] Schindler, Ralf, *Around Classification Theory of Models.* 1986, Lecture Notes in Math. 1182. Springer-Verlag.

[21] Shelah, Saharon, *Set Theory. Exploring Independence and Truth.* 2014, Springer.

[22] Silver, J., *Indecomposable Ultrafilters and* $0^\sharp$. 1974, Proceedings of the Tarski Symposium, publicado para Association for Symbolic Logic, págs 357-363.

[23] Villegas Silva, L.M. y Fernández de Castro, M., *Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines I* 2014, publicado por la Universidad Autónoma Metropolitana.

[24] Villegas Silva, L.M. y Fernández de Castro, M., *Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines II* 2017, publicado por la Universidad Autónoma Metropolitana.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00193
Matrícula: 2162800064

Ultrafiltros 0#

En la Ciudad de México, se presentaron a las 14:00 horas del día 21 del mes de noviembre del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA
DR. HECTOR GABRIEL SALAZAR PEDROZA
DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR ALONSO VALENZUELA NUNCIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

EDGAR ALONSO VALENZUELA NUNCIO
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

VOCAL

DR. HECTOR GABRIEL SALAZAR PEDROZA

SECRETARIO

Rodrigo J. Hernández G.

DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ