



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

1973

CREACION DE PARTICULAS EN LA COSMOLOGIA
DE JORDAN, BRANS y DICKE.

T E S I S .
QUE PARA OBTENER EL
T I T U L O D E
MAESTRO EN CIENCIAS
P R E S E N T A
LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

1

mi sincero agradecimiento al Dr. Octavio Obregón
por haber dirigido este trabajo.

C O N T E N I D O .

- I. INTRODUCCION
- II. ECUACIONES COSMOLOGICAS
- III. SUPOSICIONES
- IV. SOLUCION DE LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS
- V. PROPIEDADES DE LA SOLUCION PARA ESPACIO CERRADO
- VI. PROPIEDADES DE LA SOLUCION PARA ESPACIO PLANO
- VII. CONCLUSIONES
- VIII. BIBLIOGRAFIA

I INTRODUCCION.

En la cosmología clásica, el número de partículas en el universo juega el papel de una condición inicial arbitraria. Esta situación es poco satisfactoria, ya que sólo un universo observable con propiedades características existe. Carter [1] y Collins y Hawking [2] han propuesto la hipótesis de que existe un número infinito de universos con diferentes condiciones iniciales. De acuerdo con esta suposición, el hecho de que vivamos en un universo con determinadas propiedades se explica porque sólo ciertas condiciones iniciales han hecho posible la formación de vida inteligente; sin embargo, esta suposición contiene la hipótesis no verificable de la existencia de otros universos.

Otro punto de vista es aquel que propone que las propiedades del universo deben ser deducibles únicamente a partir de leyes naturales comprobables. Los primeros trabajos en esta dirección fueron hechos por Eddington [3] y Dirac [4,5], al tratar de explicar los "grandes números adimensionales" cosmológicos (relación entre fuerza eléctrica y gravitatoria, número de partículas en el universo, etc.). Dirac propuso que la "constante gravitatoria" debería decrecer inversamente con la edad del universo (primera hipótesis de Dirac) y que la masa del universo debería crecer proporcionalmente al cuadrado de la edad del universo (segunda hipótesis de Dirac).

Generalizaciones de la teoría de gravitación de Einstein, incluyendo una "constante de gravitación" como una variable escalar, aparte de la métrica $g_{\mu\nu}$, han sido construidas por Jordan [6], Thiry [7] e independientemente por Brans y Dicke [8]. En la teoría de Jordan, que toma en cuenta las dos hipótesis de Dirac, hay creación de partículas y debido a esta violación de la ley de conservación de la energía, la teoría no

que 10^{-24} seg. Sin embargo, en el modelo de espacio cerrado se encuentra que para un tiempo $t_2 \sim 10^{-22}$ seg., sólo un par de partículas (nucleones) existía en el universo y la densidad era $\sim 10^{12}$ g/cm³; para tiempos menores (densidades mayores) que éste, ninguna partícula entera poblaba el universo. Nuestros cálcu-

concuerta con la radiación de fondo de los 3K. Sin embargo, la teoría general de Jordan contiene como caso particular a la teoría escalar-tensorial de Brans y Dicke, en la cual no existe creación de partículas. Por otra parte, es natural esperar creación de partículas debida a las fluctuaciones del vacío de los campos cuantizados inmersos en espacio-tiempos no planos y no estacionarios. Esta posibilidad ya había sido indicada por Schrödinger [9] en 1939 y más tarde por de Witt [10]. Ultimamente han aparecido varios trabajos en los que se ha considerado la creación de partículas en un universo en expansión. Algunos de ellos en base a la teoría covariante de Klein-Gordon [11-12], y otros, en base a la ecuación de Dirac para partículas de spin $1/2$ [13-15].

Recientemente Schäfer y Dehnen [16-17] han usado el campo libre de Dirac cuantizado en un universo homogéneo, isotropo y expansión arbitraria para obtener la tasa de creación de partículas por unidad de volumen con spin $1/2$. Las partículas así generadas son entonces tomadas como fuentes materiales de las ecuaciones cosmológicas de Friedmann y se han encontrado varias soluciones 16-17. Tomando en cuenta que la teoría de Brans y Dicke está motivada, al menos en parte, por las hipótesis de Dirac es interesante investigar hasta que punto dichas hipótesis están incluidos en la teoría. En este trabajo mostraremos que usando la tasa de creación de partículas obtenida por Schäfer y Dehnen como fuente material de las ecuaciones cosmológicas de la teoría de Jordan Brans y Dicke, se obtienen dos soluciones exactas, una de ellas, para el espacio esférico cerrado, satisface las dos hipótesis de Dirac y la otra, para espacio plano únicamente satisface la primera hipótesis. Más aún, en el caso del espacio cerrado, el radio crece linealmente con el tiempo como

II. ECUACIONES COSMOLOGICAS

Empezando con el elemento de línea de Robertson-Walker,

$$ds^2 = R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] - dt^2, \quad (1)$$

donde R es el radio de curvatura del universo y $\epsilon = 1, 0, -1$ para el espacio de curvatura positiva, nula o negativa, respectivamente, uno encuentra las siguientes ecuaciones diferenciales cosmológicas en la teoría escalar-tensional de Brans y Dicke:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi} R^3) = \frac{8\pi}{3+2\omega} \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) R^3, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\epsilon}{R^2} = \frac{8\pi\rho}{3c^2\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{R}}{c^2\phi R} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6c^2\phi^2}, \quad (3)$$

donde $\phi = G^{-1} \frac{4+2\omega}{3+2\omega}$, $\phi \neq R^{-2}$, (3a)

siendo $G=G_0$ en el presente, G_0 es la constante de gravitación de Newton; ω es el parámetro libre de esta teoría; ρ y p son la densidad y la presión de la materia del universo. Por otra parte, la divergencia del tensor de energía-momento (que en la teoría escalar-tensorial es también una condición de integrabilidad) está dada por:

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right). \quad (4)$$

Aquí ρc^2 representa la densidad de energía y p la presión producida por las partículas generadas.

III. SUPOSICIONES

Para la densidad del substratum material que estamos considerando, hacemos la siguiente aproximación:

$$\rho = \eta m_0 \quad , \quad (5)$$

siendo η la densidad numérica variable de las partículas creadas y m_0 es su masa en reposo.

Derivando (5) y substituyendo en (4) obtenemos:

$$\dot{\eta} + 3\eta \frac{\dot{R}}{R} \equiv r = -\frac{3}{m_0 c^2} \frac{\dot{R}}{R} p, \quad (6)$$

r es la tasa de creación de partículas por unidad de volumen. Schäfer y Dehnen [17], usando el campo libre de Dirac cuantizado en un universo con ley de expansión arbitraria y para cualquier curvatura del espacio, encontraron la siguiente expresión para la tasa de creación de partículas por unidad de volumen:

$$r = \frac{Q}{8\pi c} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2, \quad (7)$$

donde $Q \leq 1$ es un factor de corrección que toma en cuenta la finitud del tiempo de creación de una partícula, de acuerdo

con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Comparando (6) y (7) se obtiene,

$$p = - \frac{Kc^2}{96} \frac{\dot{R}}{R} , \quad (8)$$

con

$$K = \frac{4\pi m_0 c}{\pi} \left(\frac{m_0}{h} \right)^2 ; \quad (8a)$$

(8) es la presión negativa producida por las partículas creadas y es directamente proporcional al parámetro de Hubble.

Como hipótesis de trabajo supondremos simplemente que para el fluido cosmológico, p y ρ son proporcionales, i.e.,

$$\rho = B \frac{\dot{R}}{R} ; \quad (9)$$

B es una constante por determinar. Las soluciones que se obtendrán al suponer esta ecuación de estado son totalmente equivalentes a las que se obtienen presuponiendo la primera hipótesis de Dirac ($\phi \sim t$); para el caso $\epsilon = +1$ véase [18]. Substituyendo (8) y (9) en las ecuaciones (2), (3) y (4) obtenemos:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi} R^3) = \beta \frac{d}{dt} R^3 , \quad (10)$$

con

$$\beta = \frac{8\pi}{3(3+2\omega)} \left[B + \frac{K}{3a} \right] ; \quad (10a)$$

$$R \ddot{R} + \frac{1-\eta}{\eta} \dot{R}^2 = 0, \quad (11)$$

donde $\eta = \frac{32B}{96B-K} > 1/3$ (11a)

y

$$6\phi^2(\dot{R}^2 + \epsilon c^2) = \phi R \dot{R} (16\pi B - 6\dot{\phi}) + \omega \phi^2 R^2. \quad (12)$$

Las expresiones (10)-(12) son las ecuaciones cosmológicas a resolver en el presente trabajo.

IV. SOLUCION DE LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS.

La solución general de la ecuación (11) es:

$$R = A(t + d)^n,$$

A y d son constantes de integración. Haciendo una translación en el tiempo, que no altera las otras ecuaciones diferenciales, podemos escribir:

$$R = A t^n. \quad (13)$$

Substituyendo R en la ecuación (10) e integrando obtenemos la siguiente expresión para ϕ :

$$\phi = \phi_i + \beta t + \frac{F}{A^3(1-3n)} t^{1-3n}, \quad (14)$$

donde ϕ_i y F son constantes de integración. Al substituir (13) y (14) en (12) y usando (10a) y (11a) para eliminar a B se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & 6\phi_c^2 c^2 \epsilon + 12\phi_c \beta c^2 \epsilon t + 6\beta^2 c^2 \epsilon t^2 + 6n^2 \phi_c^2 A^2 t^{2n-2} + \\
 & \frac{6F^2 c^2 \epsilon}{A^6(1-3n)^2} t^{2-6n} + \frac{12\beta F c^2 \epsilon}{A(1-3n)} t^{2-3n} + \frac{12\phi_c F c^2 \epsilon}{A^3(1-3n)} t^{1-3n} + \\
 & \frac{6\phi_c F n(1-n)}{A(1-3n)} t^{-n-1} + \frac{A^2 \beta^2 (2n+1)}{(4n-1)} [6n(2n-1) + \omega(1-6n)] t^{2n} + \\
 & \frac{6\phi_c \beta A^2 n}{(4n-1)} [(8n^2 - n - 1) - 2\omega n] t^{2n-1} + \frac{F^2}{A^4(1-3n)^2} [6n(1-2n) - \omega(1-3n)^2] t^{-4n} + \\
 & \frac{2\beta F}{A(1-3n)(4n-1)} [6n(1-n) + \omega(6n-1)(n-1)] t^{-n} = 0.
 \end{aligned}$$

(15)

Para que (13) y (14) sean una solución cosmológica necesitan satisfacer (15) idénticamente. Consideremos dos casos.

CASO A $\epsilon \neq 0$

Como ϵ es factor del término cuadrático de la expresión (15), si queremos que sea distinta de cero es necesario que al menos otro término de la ecuación también sea cuadrático. Esto implica que n debe ser: 2, 1, -1/2, 0, 3/2, -3, -1/3 o -2.

Puesto que estamos interesados en universos en expansión, n sólo puede ser mayor que cero, con lo que nos queda la posibilidad de que sea 1, 3/2 o 2 si $\mathcal{E} \neq 0$.

Nos preguntamos ahora si es posible que $\phi_i F \neq 0$ cuando $\mathcal{E} \neq 0$. El producto $\phi_i F$ aparece como factor del término con exponente $1-3n$ de la ecuación (15), por lo que si ha de ser distinto de cero, algún otro término necesariamente debe tener exponente igual a $1-3n$. Esta condición necesaria se satisface cuando n es 5/3, 1/3, 1/5, -1/3, -1, 2/5, 0, 1 o 1/2. Únicamente $n=1$ es compatible con la condición $\mathcal{E} \neq 0$. En resumen: si $\phi_i F \neq 0$ y $\mathcal{E} \neq 0$, entonces necesariamente $n=1$. Usando este valor en la ecuación (15) obtenemos la siguiente expresión:

$$6\phi_i^2(A^2 + c^2\mathcal{E}) + 4\phi_i\beta(3A^2 - \omega A^2 + 3c^2\mathcal{E})t + \beta^2(6A^2 - 5\omega^2 + 6c^2\mathcal{E})t^2 + \frac{F^2}{2A^4}(-3 - 2\omega + \frac{3c^2\mathcal{E}}{A^2})t^{-4} - \frac{6\phi_i F c^2 \mathcal{E}}{A^3}t^{-2} - \frac{6\beta F c^2 \mathcal{E}}{A^3}t^{-1} = 0. \quad (16)$$

Del término en t^{-1} vemos que si $\mathcal{E} \neq 0$, entonces $F=0$, así pues, no existe solución con $\phi_i F \neq 0$ y la ecuación (16) se reduce a:

$$6\phi_i^2(A^2 + c^2\mathcal{E}) + 4\phi_i\beta(3A^2 - \omega A^2 + 3c^2\mathcal{E})t + \beta^2(6A^2 - 5\omega A^2 + 6c^2\mathcal{E})t^2 = 0. \quad (17)$$

Esta ecuación implica las tres siguientes:

Esta ecuación implica las tres siguientes:

$$\phi_i(A^2 + c^2 \epsilon) = 0, \quad (18)$$

$$\phi_i(3A^2 - \omega A^2 + 3c^2 \epsilon) = 0, \quad (19)$$

y

$$A^2 = \frac{6\epsilon c^2}{5\omega - 6}. \quad (20)$$

Consideremos dos subcasos:

- a) $\phi_i = 0$ Entonces, sólo tenemos la ecuación (20) y, puesto que A debe ser real, concluimos que

$$A = \sqrt{\frac{6c^2}{5\omega - 6}} \quad \text{con } \omega > 6/5 \quad \text{si } \epsilon = 1 \quad (21)$$

$$\text{o} \\ A = \sqrt{\frac{6c^2}{6 - 5\omega}} \quad \text{con } \omega < 6/5 \quad \text{si } \epsilon = -1 \quad (21a)$$

- b) $\phi_i \neq 0$ De (18)-(20) se deduce lo que sigue:

$$A^2 + c^2 \epsilon = 0, \quad (22)$$

$$3A^2 - \omega A^2 + 3c^2 \epsilon = 0 \quad (23)$$

y

$$A^2 = \frac{6\xi c^2}{5\omega - 6} \quad (24)$$

La substitución del (24) en (23) y (22) da como resultado:

$$\begin{aligned} 5\omega c^2 \xi &= 0 \\ \text{y} \quad 9\omega c^2 \xi &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

por lo tanto $\omega = 0$ y para que A sea real $\xi = -1$ y está dada por:

$$A = C \quad (26)$$

Resumiendo, para $\xi \neq 0$ tenemos las siguientes tres soluciones:

i)

$$R = \sqrt{\frac{6c^2}{5\omega - 6}} t, \quad \phi = \beta t, \quad (27)$$

$$\xi = 1 \quad \text{y} \quad \omega > 6/5;$$

$$R = \sqrt{\frac{6c^2}{6 - 5\omega}} t, \quad \phi = \beta t, \quad (28)$$

$$\xi = -1 \quad \text{y} \quad \omega < 6/5.$$

ii)

$$R = ct, \quad \phi = \phi_i + \beta t, \quad (29)$$

$$\xi = -1 \quad \gamma \quad \omega = 0.$$

La solución y (29) no es físicamente aceptables porque, las mediciones de Fomalont y Sramek [19] de la deflexión de ondas de radio por el sol implican que $\omega \approx 23$ ~~o~~ $\omega \approx -22$; según las observaciones hechas por Shapiro et al [20] del corrimiento del perihelio de Mercurio, $\omega \approx 4$ ~~o~~ $\omega \approx -70$.

De la definición (1-11a) de n, vemos que si es igual a 1 (que es el caso para las soluciones (27) y (28)):

$$B = \frac{K}{64} \quad (30)$$

substituyendo B en (10a) se obtiene la siguiente expresión para β :

$$\beta = \frac{\pi k}{8(3+2\omega)} ; \quad (31)$$

usando cualquiera de las dos expresiones para R, (27) o (28), en la definición de la constante de Hubble se obtiene la expresión siguiente:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)_0 \equiv H = \frac{1}{t_0},$$

de donde obtenemos la edad del universo,

$$t_0 = \frac{1}{H}, \quad (32)$$

H es la constante de Hubble. Substituyendo la expresión para ϕ dada por (27) o (28) en (3a), evaluada hoy en día, y usando (31) y (32) obtenemos,

$$\omega = \frac{\pi K G_0}{16 H} - 2. \quad (32)$$

Substituyendo en la última relación la definición de K (8a), se tiene la siguiente expresión para :

$$\omega = \frac{a m_0^3 c G_0}{4 M^2 H} - 2. \quad (34)$$

Hay que recalcar que esta relación es válida para las dos soluciones (27) y (28). Tomando en cuenta que $0 < q \leq 1$ y usando la masa de un nucleón, el valor de $55 \text{Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ para H, (34) implica que $-2 < \omega \leq 11.86$. Recordemos ahora que para que (28) sea solución es necesario que $\omega < 6/5$, de tal manera que en este caso $-2 < \omega < 6/5$. Los experimentos antes mencionados excluyen este rango de valores. Por lo tanto, (28) no es una solución físicamente aceptable. En resumen, sólo tenemos la siguiente solución para $\epsilon = 1$

$$R = \sqrt{\frac{6c^2}{5\omega - 6}} t, \quad (35)$$

$$G = G_0 \frac{t_0}{t}, \quad (36)$$

donde se ha usado (3a) para expresar G en lugar de ϕ y ω está dada por la ecuación (34).

CASO B $\varepsilon = 0$

En este caso la expresión (15) se reduce a

$$\begin{aligned} & \frac{A^2 \beta^2 (2n+1)}{(4n-1)} [6n(2n-1) + \omega(1-6n)] t^{2n} + 6n^2 \phi_c^2 A^2 t^{2n-2} + \\ & \frac{6 \phi_c \beta A^2 n [(8n^2 - n - 1) - 2\omega n]}{(4n-1)} t^{2n-1} + \frac{6 \phi_c F n (1-n)}{A(1-3n)} t^{-n-1} + \\ & \frac{2 \beta F}{A(1-3n)(4n-1)} [6n(1-n)(2n-1) + \omega(6n-1)(n-1)] t^{-n} + \\ & \frac{F^2}{A^4(1-3n)^2} [6n(1-2n) - \omega(1-3n)^2] t^{-4n} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Haciendo un análisis similar al que se usó en el caso $\varepsilon \neq 0$ se concluye que F y ϕ_c deben ser cero, por lo que (37) se simplifica a:

$$\frac{A^2 \beta^2 (2n+1)}{(4n-1)} [6n(2n-1) + \omega(1-6n)] t^{2n} = 0, \quad (38)$$

de donde se deduce que

$$\omega = \frac{6n(2n-1)}{6n-1}, \quad (39)$$

como $\omega \geq 23$ (según Fomalont y Sramek [19]), entonces $n \geq 12$.
En síntesis tenemos la siguiente solución para $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} R &= At^n \\ y \quad \phi &= \beta t, \end{aligned} \quad (40)$$

ω dada por la expresión (39).

Eliminando B entre las ecuaciones (10a) y (11a) tenemos la siguiente expresión para β :

$$\beta = \frac{\pi k}{12(3+2\omega)} \frac{4n-1}{3n-1}; \quad (41)$$

usando la expresión para el radio de curvatura del universo de (40) en la definición de la constante de Hubble, obtenemos la edad del universo,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)_0 \equiv H = n/t_0 \quad (42)$$

o bien,

$$t_0 = \frac{n}{H} \quad (43)$$

Substituyendo la expresión para ϕ en (3a) y usando (41), (43) y (40) obtenemos la siguiente ecuación:

$$(72-24\alpha)n^3 + (10\alpha+12)n^2 - (\alpha+24)n + 4 = 0 \quad (44)$$

$$\text{con } \alpha = \frac{G_0 m_0^3 c}{3H h^2} a \quad (44a)$$

Esta ecuación de tercer grado podría resolverse si conocieramos con exactitud el valor del factor de corrección a . Comparando el factor independiente con el de tercer grado en la ecuación (44) concluimos que si $\alpha > 3$ existe al menos una solución positiva para n . En lugar de tratar de resolver (44) para n , usando algún valor de α (o de a) despejaremos a en términos de n y como sabemos que n debe ser mayor que 12, para evitar contradicciones con los experimentos solares, usaremos valores de n en el intervalo $(12, \infty)$ y veremos si no se obtiene una contradicción con la restricción $a \leq 1$. Despejando de (44) y usando (44a) tenemos

$$a = \frac{3H h^2}{G_0 m_0^3 c} \frac{72n^3 + 12n^2 - 24n + 4}{24n^3 - 10n^2 + n} \quad (45)$$

Si $n \in (12, \infty)$ se tiene que,

$$1.89 \times 10^{-3} < a < 1.98 \times 10^{-3} \quad (46)$$

Este último resultado satisface la condición $a \leq 1$, por lo que no podemos imponer nuevas restricciones sobre el valor de n .

V. PROPIEDADES DE LA SOLUCION PARA ESPACIO CERRADO

1) Hipótesis de Dirac

Para la solución (35) y (36) podemos calcular la tasa de creación de partículas, usando la ecuación (7),

$$\dot{V} = \frac{a}{8\pi c} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{t^2} \quad (47)$$

Substituyendo (35), (30) y (8a) en (1.9) obtenemos la densidad para la solución que estamos considerando:

$$\rho = \frac{a}{16c^2} \frac{m_0 c}{\pi} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{t} \quad (48)$$

Multiplicando la densidad por el volumen del universo ($V = 2\pi^2 R^3$), se tiene la masa total del universo:

$$M = 2\pi^2 \left(\frac{6c^2}{5\omega - 6} \right)^{3/2} \frac{a}{16c^2} \frac{m_0 c}{\pi} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 t^2 \quad (49)$$

El número de partículas en el universo es:

$$N = \frac{M}{m_0} = 2\pi^2 \left(\frac{6c^2}{5\omega - 6} \right)^{3/2} \frac{a}{16c^2} \frac{c}{\pi} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 t^2 \quad (50)$$

Esto significa que esta solución cumple exactamente la segunda hipótesis de Dirac y claramente la primera de acuerdo con la ecuación (36).

2) Estado Actual

Para evaluar las cantidades anteriores, hoy en día necesitamos substituir el valor de la edad del universo, que está dada por (32):

$$t_0 = 1/H = 1.8 \times 10^{10} \text{ años,}$$

este número está de acuerdo con las estimaciones obtenidas para la edad de los elementos radioactivos, (4.5×10^9 años), por lo que este modelo predice una edad adecuada del universo.

Los experimentos solares restringen los valores positivos de ω a $\omega \geq 23$, esto implica, de acuerdo con la relación (34), que $0.022 \leq a$. Por otra parte, $a \leq 1$ de acuerdo con Schäfer y Dehnen [17]. Lo anterior implica que los valores de la tasa de creación de partículas por unidad de volumen (48), la densidad (48) y el número de partículas en el universo (50) varían a lo más en dos órdenes de magnitud, por esta razón usaremos $\omega = 24$ ($a = 0.022$) para calcular los valores actuales de estas cantidades:

$$\gamma_0 = \frac{a}{8\pi c} \left(\frac{m_0 c}{h} \right)^2 H^2 \sim 5 \text{ Part/Km}^3 \text{ año}, \quad (51)$$

$$\rho_0 = \frac{a}{16c^2} \frac{m_0 c}{\pi} \left(\frac{m_0 c}{h} \right)^2 H \sim 10^{-28} \text{ gr cm}^{-3}, \quad (52)$$

$$N_0 = 2\pi^2 \left(\frac{6c^2}{5\omega - 6} \right)^{3/2} \frac{a}{16\pi c} \left(\frac{m_0 c}{h} \right)^2 \frac{1}{H^2} \sim 10^{79} \text{ nucleones.} \quad (53)$$

El valor para la tasa de creación de partículas por unidad de volumen hoy en día, es tan pequeña que difícil-

mente podría ser notada. Los valores para la densidad y el número de nucleones está en concordancia con las observaciones astrofísicas.

3) Estado Inicial

El método de cuantización usado por Schäfer y Dehnen sólo es válido para tiempos mayores que el tiempo de creación de un nucleón, $m_0^{-1} \approx 10^{-24}$ seg. Usando (50) podemos preguntarnos a qué tiempo existían únicamente dos nucleones; este tiempo resulta ser:

$$t_i = \frac{4k}{\sqrt{\pi G}} \frac{1}{m_0 c^2} \left(\frac{5W-6}{6} \right)^{3/4} \sim 10^{-22} \text{ seg} \quad (54)$$

que es mayor que el tiempo de creación de un nucleón. A este tiempo lo llamaremos tiempo inicial. Usando (35), (36) y (48) se calculan los valores de G , R y ρ para el tiempo inicial:

$$G_i \sim 10^{32} \text{ din-cm}^2 \text{ gr}^{-2}, \quad (55)$$

$$R_i \sim 10^{-13} \text{ cm} \quad (56)$$

y

$$\rho_i \sim 10^{12} \text{ gr cm}^{-3}. \quad (57)$$

El radio de curvatura es del orden de la longitud de onda de Compton para un nucleón (un modelo cosmológico, en

relatividad general, con un radio mínimo del orden de la longitud de onda de Compton para partículas descritas por un campo escalar ha sido encontrado por Parker y Fulling [21]). La densidad es menor que la nuclear, lo que significa que la interacción fuerte entre las partículas no tiene que ser tomada en cuenta en el estado inicial.

La creación de nucleones por la expansión del universo ocurrirá entonces, desde este estado inicial, en el cual los valores (55), (56) y (57) deben entenderse como valores promedio (espacial y temporalmente). Al tiempo inicial (54) había tan pocas partículas que la creación de una más produce un salto en estos valores. En el marco de este trabajo, nada puede decirse acerca del origen del primer par de partículas. Sin embargo, este par pudo haber sido creado por fluctuaciones del espacio tiempo y materia [22] en un tiempo del orden del tiempo inicial. Por lo tanto, a partir del estado inicial con sólo un par de partículas es posible empezar el proceso de creación de partículas debido a la expansión del universo. De acuerdo con los resultados de este modelo todos los nucleones y antinucleones, menos dos, han sido creados después de 10^{-22} seg; si el par inicial de partículas fue producido por fluctuaciones del espacio-tiempo, en este modelo el universo empezó sin masa inicial. La solución obtenida en relatividad general para espacio cerrado [16], por el mismo procedimiento, es capaz de proporcionar el 90% de la materia presente en el universo. El 10% restante no ha sido creado por la expansión del universo y no puede ser explicada por esa solución.

4) "Los grandes números adimensionales".

El tamaño "gigantesco" de algunas constantes adimensionales ha sido tratado [1 y 3], así como su aparente relación con los números adimensionales grandes de la Astrofísica.

Las hipótesis de Dirac fueron motivadas por el análisis de estos "grandes números" y la teoría de gravitación de Brans y Dicke representa un esfuerzo para incluir estas hipótesis. En el modelo que estamos considerando, los grandes números adimensionales al tiempo inicial toman los siguientes valores:

$$\frac{\text{Fuerza eléctrica}}{\text{Fuerza gravitatoria}} = \frac{e^2}{m_0^2 G_i} \sim 10^{-4}, \quad (58)$$

$$\frac{\text{"Tamaño" de una partícula}}{\text{Longitud de Planck}} = \frac{e^2/m_0 c^2}{(4G_i/c^3)^{1/2}} 10^{-2} \quad (59)$$

y

$$\frac{\text{Masa de una partícula}}{\text{Masa de Planck}} = \frac{m_0}{(4c/G_i)^{1/2}} \sim 5 \quad (60)$$

Para estos cálculos hemos usado la masa del nucleón y los valores de G_i dados por (55). Estos números adimensionales toman hoy en día los valores de 1.5×10^{36} , 9.4×10^{16} y 7.6×10^{-20} , respectivamente. Por lo tanto, la relación inversa entre la "constante gravitatoria" y la edad del universo reduce, el tamaño "tan grande" de esos números adimensionales, considerablemente en el estado inicial.

5) Tiempo de Planck

Algunos autores han desarrollado otros formalismos para cuantizar los campos de partículas, tratando también

clásicamente la métrica. Su descripción es válida hasta el tiempo de Planck. En el estado inicial de la solución que estamos analizando el tiempo de Planck vale

$$T_c = \left(\frac{\hbar G c}{c^5} \right)^{1/2} \sim 10^{-24} \text{ seg.} \quad (61)$$

Este tiempo es del mismo orden de magnitud que el "tiempo de creación" de un nucleón ($m_0^{-1} \approx 10^{-24} \text{ s}$), que es el límite de validez del formalismo de cuantización usado en este trabajo.

6) "Relación de Mach"

De las ecuaciones (35), (36) y (49) vemos que la siguiente relación se satisface para todo tiempo,

$$\frac{M G}{c^2 R} = \frac{3}{2} \pi \frac{4+2\omega}{5\omega-6} \sim 0.65 \pi. \quad (62)$$

Esta relación es conocida con el nombre de relación de Mach. Una solución en Relatividad General, usando la misma tasa de creación de partículas conduce a un valor de $3/4 \pi$ para la relación (61) [16]. También, una solución cosmológica en la teoría escalar-tensional, para polvo ($\rho \sim R^{-3}$, $p \ll \rho c^2$) da para la relación (61) el valor de π [23].

VI. PROPIEDADES DE LA SOLUCION PARA ESPACIO PLANO

1) Estado Actual

La solución (40) puede ser descrita de la siguiente manera:

$$R = A t^n$$

$$G = G_0 \left(\frac{t_0}{t} \right) \quad (63)$$

usando la relación (3a). Claramente la primera hipótesis de Dirac se satisface. Con esta solución y las ecuaciones (7), (45), (9), (11a) y (8a), podemos calcular la tasa de creación de partículas por unidad de volumen y la densidad:

$$\gamma = \frac{3H}{8\pi m_0 G_0} \frac{72n^4 + 12n^3 - 24n^2 + 4n}{24n^2 - 10n + 1} \frac{1}{t^2} \quad (64)$$

$$\rho = \frac{3H}{8\pi G_0} \frac{24n^3 + 12n^2 - 4n}{24n^2 - 10n + 1} \frac{1}{t} \quad (65)$$

De la expresión (43), tenemos que la edad del universo en este modelo es,

$$t_0 = \frac{n}{H} = 1.8 \times 10^{10} n \text{ años} \quad (66)$$

Como $n \gg 12$, la edad del universo predicha por este modelo es, al menos, un orden de magnitud mayor que la obtenida con la solución para espacio cerrado (32). Substituyendo (66) en (64) y

(65) obtenemos los valores actuales de la tasa de creación de partículas por unidad de volumen y la densidad:

$$\rho_0 = \frac{3H^2}{8\pi G_0} \frac{24n^2 + 12n - 4}{24n^2 - 10n + 1} \approx 5.5 \times 10^{-30} \text{ gr cm}^{-3}, \quad (67)$$

$$\gamma_0 = \frac{3H^3}{8\pi n_0 G_0} \frac{72n^4 + 12n^3 - 24n^2 + 4n}{24n^4 - 10n^3 + n} \approx 0.5 \frac{\text{part}}{\text{km}^3 \text{ año}}, \quad (68)$$

donde se ha tomado en cuenta que los factores dependientes de n varían muy poco en el intervalo $(12, \infty)$. Tanto la tasa de creación como la densidad, son más pequeñas en este modelo que en el de espacio cerrado. La densidad es más cercana al valor obtenido por las observaciones.

2) Estado inicial.

En este modelo, por ser abierto, no tiene sentido hablar del número de partículas en el universo (el volumen es infinito); por lo tanto, no podemos definir un estado inicial en base al número de partículas existentes. Sin embargo, como el método de cuantización usado es válido para tiempos mayores que 10^{-24} s, podemos calcular el valor de la tasa de creación de partículas, la densidad y la "constante de gravedad" para un tiempo ligeramente mayor. Usando el valor de $t = 10^{-23}$ s en (64) (65) y (63) se tiene que:

$$\gamma_0 \approx 1.9 \times 10^{21} n^4 \frac{\text{part}}{\text{km}^3 \text{ año}}, \quad (69)$$

$$\rho_0 \approx 3.1 \times 10^{11} n \text{ gr cm}^{-3}. \quad (70)$$

$$G_2 \approx 3.0 \times 10^{33} \text{ n din-cm}^2 \text{ gr}^{-2} \quad (71)$$

De (70) vemos que para que la densidad sea menor que la nuclear es necesario que $M < 10^3$.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado que algunas de las ideas que motivaron en parte la teoría escalar-tensorial de gravitación (las hipótesis de Dirac, "la relación de Mach" y que los "grandes números adimensionales" tienen un significado cosmológico), están contenidas en esta teoría. Dichas hipótesis se obtuvieron mediante el uso de una tasa de creación de partículas proveniente de la cuantización del campo libre de Dirac en un espacio con ley de expansión arbitraria.

Dentro del marco de este trabajo varios aspectos conectados con el problema del origen de la materia no han sido considerados. Los fotones de la radiación de fondo de los 3K deben ser explicados por medio de procesos secundarios. Además, la tasa de creación de partículas usado en este trabajo (7), no proporciona el mismo número de protones que de electrones (o sus antipartículas), ya que depende de la masa de las partículas que se estén considerando. También, es necesario considerar un mecanismo de separación de la materia-antimateria [24] para explicar por qué nuestra galaxia, aparentemente, está constituida principalmente por materia, en vista de que el mecanismo de creación proporciona tanto partículas como antipartículas.

Por otra parte, las soluciones cosmológicas exactas obtenidas, nos proveen de modelos del universo en los cuales la existencia de la materia no es una condición inicial arbitraria sino parte de la dinámica del mismo universo. En el caso de la solución para curvatura positiva la existencia del par original de nucleones no puede ser explicada dentro del marco de este trabajo, debido a las limitaciones del proceso de cuantización empleado.

Finalmente, algunas consecuencias Astrofísicas de

los modelos tales como la relación magnitud-corrimiento al rojo (tomando en cuenta las correcciones evolutivas debido al hecho que G varie) esperan ser investigados. También, debido a que la formación de galaxias parece haber ocurrido en etapas tempranas del universo, uno debería determinar si estos modelos proporcionan suficiente materia para la formación de galaxias en estas épocas.

VIII. BIBLIOGRAFIA

1. Carter, B. (1968). Cambridge University preprint, véase también (1974). IAU Symp., 63, 291.
 2. Collins, C. y Hawking, S. (1973). Ap. J. 180, 317.
 3. Eddington, A. S. (1936). Relativity Theory of protons and Electrons. (Cambridge Univ. Press. Cambridge, Eng.).
 4. Dirac, P.A.M. (1937). Nature, 139, 323.
 5. Dirac, P.A.M. (1938). Proc. Roy. Soc. (London), A165, 199.
 6. Jordan, P. (1938). Astron. Nachr., 276, 1963.
 7. Thiry, Y. (1948). Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 226, 216.
 8. Brans, C. y Dicke, R. H. (1961). Phys. Rev., 124, 925.
 9. Schroedinger, E. (1939). Physica, 6, 899.
 10. de Witt, B. (1953). Phys. Rev., 90, 357.
 11. Parker, L. (1968). Phys. Rev. Lett., 21, 562.
 12. Zel'dovich, Ya. (1970). JETP Lett., 12, 307.
 13. Parker, L. (1971). Phys. Rev., D3, 346.
 14. Audretsch, J. (1973). Nuovo Cimento, 17B, 284.
 15. Isham, C.J. y Nelson, J.E. (1974). Phys. Rev., D10, 3226.
 16. Schäfer, G. y Dehnen, H. (1976). Astronom. Astrophys., 54, 823.
- 823.

17. Schäfer, G. y Dehnen, H. (1977). Astronom. Astrophys., 61.
La tasa de creación que aparece en este artículo debe ser corregida por un factor de 4; el factor de corrección
Comunicación personal de H. Dehnen.
18. Obregón, O. J. y Pimentel, L.O. (1978). General Relativity and Gravitation, 9, 585.
19. Fomalont, E. B. y Sramek, R.A. (1975). A.p.J., 199, 749.
20. Shapiro, I.I., G.H. Pettengill, M.E. Ash, R.P. Ingalls, P. B. Campbell y R. B. Dyce (1972). Phys. Rev. Lett., 28, 1594.
21. Parker, L. y Fulling, S. (1973). Phys. Rev., D7, 2357.
22. Wheeler, J. A. (1962). Geometrodynamics (Academic Press, New York).
23. Dehnen, H. y Obregón, O. (1971). Astron. Space Sci., 14, 454.
24. Omnes, R.L. (1969). Phys. Rev. Lett., 23, 38.