



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA - IZTAPALAPA

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**DISEÑO Y DESARROLLO DE UN ALGORITMO  
MULTIOBJETIVO HEURÍSTICO PARA LA  
DEMARCACIÓN DE ZONAS GEOGRÁFICAS**

Tesis que presenta  
**Alejandro Lara Caballero**  
Para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias**  
(Ciencias y Tecnologías de la Información)

Asesor: Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2018

## RESUMEN

---

El diseño de zonas consiste en establecer una agrupación de pequeñas áreas o unidades geográficas en un número determinado de regiones de tal manera que se cumplan los requerimientos impuestos por un problema de estudio. Una de las aplicaciones más relevantes, por su influencia en los procesos democráticos, es la distritación política. En concreto, persigue la demarcación de áreas denominadas distritos electorales que forman la base para organizar la representación ciudadana a través de una serie de criterios como el equilibrio poblacional, compacidad geométrica y conexidad para prevenir la manipulación electoral. Estos criterios se encuentran en competencia entre sí, lo cual hace necesario llegar a una solución en la que todos los objetivos sean satisfechos en un grado aceptable. Debido a la complejidad computacional del problema, el cual es NP-duro, es necesario el uso de heurísticas para encontrar soluciones de calidad en un tiempo de cómputo razonable. Se han utilizado varias estrategias para resolver el problema, sin embargo, para simplificar su solución la mayoría lo modela desde una perspectiva de optimización mono-objetivo. Este tipo de enfoques pueden afectar el desempeño de las técnicas heurísticas e impedir que se visiten algunas regiones del espacio de búsqueda, con lo cual se afecta de forma directa la calidad de las soluciones que pueden generarse. A fin de subsanar estos inconvenientes se han desarrollado técnicas basadas en el óptimo de Pareto, para resolver problemas multiobjetivo, sin embargo el uso de este tipo de estrategias para el diseño de zonas es limitado y su desempeño ha sido poco explorado. Al respecto, en este trabajo se presenta un modelo de optimización multiobjetivo para el problema de distritación política y se desarrolla un algoritmo novedoso llamado AMOSA-D, que se encuentra inspirado en recocido simulado y en el concepto de no dominancia, de tal forma que logra aproximaciones de buena calidad al frente de Pareto. Con el fin de evaluar el desempeño de AMOSA-D, se consideraron 23 estados de la República Mexicana como caso de estudio y se empleó el algoritmo oficial del Instituto Nacional Electoral (RS-INE) como punto de referencia. El análisis de los experimentos computacionales realizados muestran, por una parte que las técnicas clásicas basada en sumas ponderadas de los objetivos, como RS-INE, producen poca diversidad de soluciones sobre los frentes generados, por otro lado, AMOSA-D es capaz de generar mayor número de soluciones y de calidad superior en términos de convergencia y dispersión, en la mayoría de las instancias de prueba. A partir de estos resultados, se considera que AMOSA-D amplía el estudio del problema de diseño de zonas y generan un espacio importante de reflexión sobre el potencial de las técnicas multiobjetivo para mejorar la calidad de las soluciones en este contexto.

## AGRADECIMIENTOS

---

Una vez recorrido el trayecto de los estudios de doctorado, al volver la vista atrás, queda claro que es justo reconocer y agradecer a todas las personas e instituciones que hicieron posible llevar a feliz término esta trascendente etapa de mi vida.

A mis padres, Irma Caballero Sandoval y Manuel Lara Vargas, les agradezco el amor y apoyo incondicional que me han dado durante todos estos años, muchas gracias por confiar y creer en mí, los quiero. La culminación de mis metas no hubiera sido posible sin su apoyo.

A mi hermano Manuel Lara Caballero, gracias por tu ejemplo y compañía en los momentos importantes de mi vida.

Agradezco de manera muy especial a mi asesor, el Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade por darme la oportunidad de trabajar bajo su dirección, por su paciencia, comprensión y valioso apoyo en la elaboración de esta tesis. Este trabajo doctoral no hubiera sido posible sin su acertada guía, revisión y aportaciones.

También agradezco ampliamente, al Dr. Eric Alfredo Rincón García, por su inestimable ayuda y sabios consejos a lo largo de los años del doctorado. Este proyecto se pudo llevar a cabo gracias a su gran apoyo y orientación.

Asimismo, quiero agradecer a cada uno de los maestros que han participado en mi desarrollo académico, por transmitir generosamente sus conocimientos, por su inspiración para ser mejor persona, en particular a los profesores del posgrado en Ciencias y Tecnologías de la Información de la UAM-Iztapalapa y a los profesores del Departamento de Sistemas de la UAM-Azcapotzalco por toda la ayuda brindada y conocimiento compartido.

Agradezco a los distinguidos miembros del Jurado, Dr. Manuel Ordorica Mellado, Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva, Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade, Dr. Eric Alfredo Rincón García y Dr. Roman Anselmo Mora Gutiérrez, por concederme el honor de integrar el jurado y sus valiosos comentarios que contribuyeron a mejorar la calidad del manuscrito final.

Gracias a todos los amigos que compartieron el transcurso del doctorado, las largas jornadas de trabajo, seminarios y desveladas, momentos que siempre recordaré con gran afecto.

Al Posgrado en Ciencias y Tecnologías de la Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, por permitirme crecer personal y profesionalmente. De igual manera, agradezco el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para realizar los estudios del doctorado.

Por último, gracias a todas las personas que a lo largo del camino contribuyeron a lograr esta significativa meta de vida.

# ÍNDICE

---

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Objetivos . . . . .	2
1.1.1	Objetivo general . . . . .	2
1.1.2	Objetivos particulares . . . . .	2
1.2	Organización del documento . . . . .	3
2	ESTADO DEL ARTE	4
2.1	Definición del problema . . . . .	4
2.2	Complejidad del problema . . . . .	4
2.3	Conceptos relevantes . . . . .	6
2.4	Aplicaciones . . . . .	7
2.5	Diseño de zonas electorales . . . . .	8
2.5.1	Características del diseño de zonas electorales . . . . .	8
2.6	Disritación electoral en México . . . . .	13
2.7	Heurísticas aplicadas al diseño de zonas . . . . .	15
3	CONTEXTO MULTI OBJETIVO	20
3.1	Conceptos de optimización multiobjetivo . . . . .	20
3.2	Técnicas de resolución . . . . .	23
3.3	Metaheurísticas multiobjetivo . . . . .	23
3.3.1	Asignación de aptitud . . . . .	24
3.3.2	Preservación de la diversidad . . . . .	27
3.3.3	Elitismo . . . . .	28
3.3.4	Algoritmos recientes . . . . .	29
3.4	Revisión de la literatura multiobjetivo para el diseño de zonas . . . . .	29
4	DISEÑO Y DESARROLLO DEL ALGORITMO MULTI OBJETIVO	32
4.1	Planteamiento del problema . . . . .	32
4.2	Modelo . . . . .	32
4.2.1	Equilibrio poblacional . . . . .	33
4.2.2	Compacidad . . . . .	33
4.2.3	Conexidad . . . . .	34
4.2.4	Formulación . . . . .	35
4.3	Heurística propuesta . . . . .	35
4.3.1	Recocido simulado . . . . .	36
4.3.2	Recocido simulado multiobjetivo . . . . .	37
4.3.3	Recocido simulado multiobjetivo mediante archivo externo (AMOSAS) . . . . .	39
4.3.4	Recocido simulado multiobjetivo para el diseño de zonas electorales AMOSAS-D . . . . .	42
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES	50
5.1	Escenario de prueba . . . . .	50
5.2	Recocido simulado empleado por el INE . . . . .	50
5.3	Configuración de parámetros . . . . .	51
5.4	Métricas de comparación . . . . .	52
5.5	Resultados . . . . .	53
6	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	58

6.1	Líneas futuras de investigación . . . . .	59
A	APÉNDICE . . . . .	61
A.1	Frentes de Pareto aproximados . . . . .	61
A.1.1	Baja California . . . . .	61
A.1.2	Chiapas . . . . .	62
A.1.3	Chihuahua . . . . .	63
A.1.4	Coahuila . . . . .	64
A.1.5	Distrito Federal . . . . .	65
A.1.6	Durango . . . . .	66
A.1.7	Estado de México . . . . .	67
A.1.8	Guanajuato . . . . .	68
A.1.9	Guerrero . . . . .	69
A.1.10	Hidalgo . . . . .	70
A.1.11	Jalisco . . . . .	71
A.1.12	Michoacán . . . . .	72
A.1.13	Morelos . . . . .	73
A.1.14	Nuevo León . . . . .	74
A.1.15	Querétaro . . . . .	75
A.1.16	Sinaloa . . . . .	76
A.1.17	San Luis Potosí . . . . .	77
A.1.18	Sonora . . . . .	78
A.1.19	Tabasco . . . . .	79
A.1.20	Tamaulipas . . . . .	80
A.1.21	Veracruz . . . . .	81
A.1.22	Yucatán . . . . .	82
A.1.23	Zacatecas . . . . .	83
A.2	Medidas de desempeño . . . . .	84
A.2.1	Hipervolumen . . . . .	84
A.2.2	Cobertura de conjuntos . . . . .	85
A.2.3	Porcentaje de participación . . . . .	86
A.2.4	Llamadas a la función objetivo . . . . .	87
	BIBLIOGRAFÍA . . . . .	88

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1	Ejemplo de transformación de un punto del espacio de decisiones al espacio de objetivos . . . . .	21
Figura 2	Soluciones no dominadas (Pareto) en el espacio de los objetivos . . . . .	22
Figura 3	Cantidad total de dominación entre dos soluciones A y B representada por el área sombreada . . . . .	41
Figura 4	Probabilidad de aceptación en AMOSA de Bandyopadhyaya . . . . .	46
Figura 5	Probabilidad de aceptación similar a la de recocido simulado tradicional . . . . .	47
Figura 6	Probabilidad de aceptación utilizada para el diseño de zonas . . . . .	47
Figura 7	Secuencia de pasos que se realizan en una vecindad de tipo $M_q$ , $q = 1$ , sin pérdida de conexidad . . . . .	49
Figura 8	Secuencia de pasos que se realizan en una vecindad de tipo $M_q$ , $q = 1$ , con pérdida de conexidad . . . . .	49
Figura 9	Interfaz de la aplicación desarrollada . . . . .	51
Figura 10	Frentes de Pareto aproximados de estados representativos . . . . .	54
Figura 11	Diagramas de caja para hipervolumen . . . . .	57
Figura 12	Diagramas de caja para cobertura de conjuntos . . . . .	57
Figura 13	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Baja California . . . . .	61
Figura 14	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Chiapas . . . . .	62
Figura 15	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Chihuahua . . . . .	63
Figura 16	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Coahuila . . . . .	64
Figura 17	Frentes de Pareto aproximados para el Distrito Federal . . . . .	65
Figura 18	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Durango . . . . .	66
Figura 19	Frentes de Pareto aproximados para el estado de México . . . . .	67
Figura 20	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Guanajuato . . . . .	68
Figura 21	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Guerrero . . . . .	69
Figura 22	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Hidalgo . . . . .	70
Figura 23	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Jalisco . . . . .	71
Figura 24	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Michoacán. . . . .	72
Figura 25	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Morelos . . . . .	73
Figura 26	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Nuevo León . . . . .	74
Figura 27	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Querétaro . . . . .	75
Figura 28	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Sinaloa . . . . .	76
Figura 29	Frentes de Pareto aproximados para el estado de San Luis Potosí . . . . .	77
Figura 30	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Sonora . . . . .	78
Figura 31	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Tabasco . . . . .	79
Figura 32	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Tamaulipas . . . . .	80
Figura 33	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Veracruz . . . . .	81
Figura 34	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Yucatán . . . . .	82
Figura 35	Frentes de Pareto aproximados para el estado de Zacatecas . . . . .	83

## ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1	Algoritmos de diversas aplicaciones del diseño de zonas . . . . .	17
Tabla 2	Algoritmos aplicados a la distritación política . . . . .	18
Tabla 3	Enfoques multiobjetivo en el diseño de zonas . . . . .	31
Tabla 4	Parámetros AMOSA-D . . . . .	52
Tabla 5	Parámetros RS INE . . . . .	52
Tabla 6	Hipervolumen de los frentes globales generados por AMOSA-D y RS INE . . . . .	55
Tabla 7	Cobertura de conjuntos de los frentes globales generados por AMOSA-D y RS INE . . . . .	56
Tabla 8	Hipervolumen . . . . .	84
Tabla 9	Cobertura de conjuntos . . . . .	85
Tabla 10	Porcentaje de participación . . . . .	86
Tabla 11	Promedio de llamadas a la función objetivo . . . . .	87

## INTRODUCCIÓN

---

El diseño de zonas o zonificación consiste en agrupar elementos o unidades geográficas en un conjunto de regiones con la finalidad de cumplir una serie de requisitos impuestos por un problema específico. En las ciencias sociales e ingeniería existen diversas aplicaciones con un significativo componente geográfico que involucran la generación de zonas con características especiales como son la delimitación de zonas de venta, distritos de mando policial, servicios públicos, de emergencia, entre otros [1]. Estas características, dependiendo de la configuración requerida, pueden incluir la formación de zonas conectadas, que tengan la misma cantidad de personas, cierta forma, tiempos de traslado determinados, restricciones de tamaño, entre otras.

El diseño de zonas es motivo de gran interés por parte de la comunidad científica de varias disciplinas, como la investigación de operaciones, tanto por la variedad de aplicaciones como por su complejidad computacional. El problema es NP-duro [2], lo que implica que no se conoce un algoritmo determinista que garantice encontrar la solución óptima en un tiempo polinomial. Esto conlleva que el uso de métodos exactos no es una opción viable para instancias reales, por lo que las técnicas heurísticas han sido utilizadas como una alternativa para construir soluciones de buena calidad en tiempos de cómputo razonables.

El diseño de zonas también es complejo debido a su naturaleza multiobjetivo, ya que involucra tomar en cuenta múltiples criterios, los cuales pueden estar en competencia o conflicto unos con otros, y encontrar una solución capaz de satisfacer cada uno de ellos puede resultar imposible. Para simplificar esta situación, el problema tiende a modelarse desde una perspectiva mono-objetivo, optimizando sólo uno de los objetivos y considerando a los demás como restricciones, o bien con una función objetivo conformada como una suma ponderada de los objetivos originales. Sin embargo, este tipo de planteamientos pueden limitar el desempeño de las técnicas heurísticas e impedir que se visiten algunas regiones del espacio de búsqueda, lo cual repercute directamente la calidad de las soluciones obtenidas.

Para mitigar estas deficiencias, se pueden emplear una amplia variedad de técnicas que pertenecen al área conocida como optimización multiobjetivo, que están adaptadas o diseñadas para resolver problemas basándose en el concepto de óptimo de Pareto. Sin embargo, en la literatura especializada existen pocas referencias en las cuales se apliquen técnicas multiobjetivo al diseño de zonas en general [3].

En esta tesis, se aborda un caso específico del diseño de zonas, la distritación electoral, que involucra agrupar unidades administrativas en un número predeterminado de zonas siguiendo una serie de lineamientos legales, demográficos, geográficos, socio-políticos, entre otros, para promover elecciones justas. Se desarrolla un algoritmo multiobjetivo que permite generar distritos conexos que satisfacen los criterios de equilibrio poblacional y compacidad. Para evaluar el desempeño de la propuesta realizada, se compara su eficacia con el algoritmo empleado por el Instituto Nacional Electoral (INE) en el proceso de distritación de 2017. Los experimentos computacionales realizados en 23 estados de la República Mexicana demuestran las ventajas de este enfoque sobre la técnica empleada tradicionalmente por la autoridad electoral.

## 1.1 OBJETIVOS

Como se mencionó, el diseño de zonas geográficas es un problema de gran complejidad computacional que tiene un amplio campo de acción en la ingeniería y las ciencias sociales. El uso de técnicas heurísticas para la solución de problemas combinatorios con extensos espacios de búsqueda, la popularidad de sus aplicaciones y su utilidad en resolver problemas con múltiples objetivos que compiten de manera simultánea entre sí, hacen que el estudio y generación de algoritmos que permitan un balance entre eficiencia computacional y calidad de las soluciones provistas sea relevante. Lo que deriva en los siguientes objetivos.

### 1.1.1 *Objetivo general*

El objetivo general de esta investigación consiste en diseñar, desarrollar e implementar un algoritmo multiobjetivo inspirado en una técnica heurística para resolver el problema de diseño de zonas electorales y generar un conjunto de planes de distritación con zonas conexas que tienen un balance entre equilibrio poblacional y compacidad.

### 1.1.2 *Objetivos particulares*

Los objetivos particulares son:

- Elaborar una revisión del estado del arte sobre el problema de diseño de zonas y de las técnicas multiobjetivo empleadas para resolverlo.
- Formular un modelo para resolver el problema de diseño de zonas electorales.
- Diseñar, desarrollar e implementar un algoritmo multiobjetivo que permita construir zonas con equilibrio poblacional, conexas y compactas.
- Calibrar el algoritmo multiobjetivo propuesto.
- Aplicar el algoritmo propuesto en un conjunto de instancias representativas de la cartografía electoral de la República Mexicana.
- Adaptar y aplicar el algoritmo del INE en las instancias mencionadas en el punto anterior, de tal forma que se obtenga un conjunto de soluciones no dominadas que permitan establecer un punto de referencia.
- Evaluar y comparar el desempeño de los algoritmos mencionados en los puntos anteriores mediante el cálculo de hipervolumen y cobertura de conjuntos.

## 1.2 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

La estructura del documento es la siguiente:

- Capítulo 1.- Se presentan de manera global los temas y puntos abordados en la tesis. Comprende la introducción, los objetivos y estructura de la investigación.
- Capítulo 2.- En esta parte se presentan los antecedentes generales del diseño de zonas, sus principales características, el panorama de distritación electoral en México y una revisión de las heurísticas empleadas para resolver el problema.
- Capítulo 3.- En este capítulo se presentan los conceptos básicos del contexto de la optimización multiobjetivo, técnicas de solución de problemas con varios criterios, los principales retos que enfrentan las metaheurísticas multiobjetivo y una revisión de los enfoques utilizados en el diseño de zonas.
- Capítulo 4.- Se propone un algoritmo multiobjetivo basado en recocido simulado para el diseño de zonas electorales. Se describe el modelo, la heurística y las consideraciones de diseño relevantes.
- Capítulo 5.- En este capítulo se presentan los escenarios de prueba, la configuración de parámetros y los experimentos realizados para validar la propuesta. El desempeño del algoritmo planteado se compara con el algoritmo del INE que representa el estado del arte en México para generar distritos electorales a nivel federal.
- Capítulo 6. Se exponen las conclusiones, consideraciones finales y aspectos relevantes de la investigación, para posteriormente plantear las líneas futuras que se desprenden del proyecto.

### 2.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El diseño de zonas geográficas consiste en agrupar pequeños espacios o unidades geográficas básicas (UGB) para formar zonas que satisfacen las restricciones y optimizan los objetivos impuestos por un problema específico [4]. Las UGB pueden ser ciudades, regiones postales, bloques o áreas geográficas diseñadas con criterios de planificación relevantes. Los requerimientos y restricciones pueden incluir, por ejemplo, la construcción de zonas conexas con la misma cantidad de población, clientes, medios de comunicación, servicios públicos, entre otros.

El diseño de zonas se puede modelar como un problema de optimización combinatoria, donde se busca optimizar múltiples objetivos de manera simultánea. Las restricciones del diseño varían dependiendo del problema considerado, sin embargo, existen consideraciones comunes a todas las aplicaciones. En general, para plantear el problema se define  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  como un conjunto de áreas que se deben agrupar en  $k$  distritos o zonas. Asimismo, se define  $Z_i$  como el conjunto de todas las UGB que corresponden a la  $i$ -ésima zona. Para garantizar un diseño válido, todas las zonas deben cumplir las siguientes restricciones:

$$Z_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (1)$$

$$Z_i \cap Z_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (2)$$

$$\bigcup_{i=1}^k Z_i = X \quad (3)$$

De esta forma, las zonas constituyen una partición del conjunto de UGB. Adicionalmente, se puede promover la inclusión de otras características deseables como la contigüidad, la cual limita el número de soluciones aceptables asegurando la adherencia entre todas las UGB que pertenecen a una zona.

### 2.2 COMPLEJIDAD DEL PROBLEMA

El agrupamiento de  $n$  unidades geográficas en  $k$  zonas contiguas al optimizar diversos criterios no es un problema fácil de resolver de manera óptima [2]. En 1972 Nagel [5], identifica por primera vez de manera intuitiva, algunas limitaciones para resolver el problema, pues explora la distritación asistida por computadora a través de la enumeración y tabulación de todas las posibles soluciones. Observa el rápido crecimiento del espacio de búsqueda, limita su técnica a instancias de tamaño reducido y sugiere el uso de métodos no exhaustivos para resolver instancias de mayor tamaño con relevancia práctica.

Para un problema de distribución, el número exacto de posibles planes factibles es difícil de calcular, sin embargo, por los trabajos de Cliff y Haggett [6], Cliff et al. [7], y Keane [8] es posible acotarlo. El número de planes depende no sólo de la cantidad de UGB y zonas, sino también de su distribución espacial. El umbral máximo para dividir  $n$  UGB en  $k$  zonas está dado por la fórmula de Stirling del segundo tipo [2]:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \left[ (-1)^k (k-i)^n \frac{k!}{(k-i)!i!} \right] \quad (4)$$

Esta cota superior resulta de una formulación del problema sin restricciones de conectividad donde cada UGB puede ser agrupada con cualquier otra. Sin embargo, en la práctica, la restricción de contigüidad reduce el número de planes que deben ser enumerados. En el caso extremo, donde las UGB forman una cadena y cada unidad sólo puede ser agrupada con sus vecinos directos, se puede definir una cota inferior dada por:

$$S_1(n, k) = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \quad (5)$$

Sin embargo, aún en estos casos especiales, el número de soluciones es demasiado grande. Por ejemplo, para un estado de tamaño medio como Baja California, donde  $n = 319$  y  $k = 8$  el número de planes factibles se encuentra entre  $1,17 \times 10^{13}$  y  $6,1395 \times 10^{291}$  lo cual con una computadora veloz como la Tianhe-2, que opera a 33.86 petaflops (cuatrillón de operaciones por segundo) tardaría en resolver al menos  $3,8 \times 10^9$  años para la cota inferior.

Formalmente, en términos de complejidad computacional, el diseño de zonas es un problema de optimización combinatoria difícil de resolver. Técnicamente se ha comprobado que pertenece a la clase de problemas conocidos como NP-Completo<sup>1</sup>. Esto implica que no se conocen algoritmos capaces de resolver el problema en tiempo polinomial. En relación con el diseño de zonas, Altman [2] y Gilbert et al. [9] han demostrado las siguientes proposiciones:

- Proposición 1: Crear zonas con equilibrio poblacional es un problema NP-completo [2].
- Proposición 2: Crear un plan de zonificación que maximice la compacidad es un problema NP-completo [2].
- Proposición 3: Crear un plan de zonificación conexo y con equilibrio poblacional es un problema NP-completo [2].
- Proposición 4: Crear una zona conexas que minimice el costo asociado a las unidades geográficas que la forman es un problema NP-completo [9].

Por lo tanto, diseñar zonas conexas con equilibrio poblacional y compacidad es un problema NP-completo y tratar de resolverlo de manera exacta puede involucrar tiempos de búsqueda demasiado largos inclusive con las potentes computadoras actuales. De manera similar, la generación de soluciones con métodos como caminatas aleatorias difícilmente puede generar soluciones factibles. El hecho de que el problema sea NP-completo sugiere un uso intensivo de recursos computacionales y heurísticas para producir soluciones de calidad en un tiempo razonable.

<sup>1</sup> Si un problema puede ser resuelto en un plazo de tiempo polinomial con respecto al tamaño de la entrada se considera en una clase denominada P y "fácil" de resolver. Sin embargo, para problemas en la clase NP-Completo (NP significa No-determinístico polinomial) no se conocen algoritmos de tiempo polinomial para resolverlos y existe incertidumbre sobre su existencia. [10]

## 2.3 CONCEPTOS RELEVANTES

Si bien es cierto que cada aplicación del diseño de zonas presenta aspectos específicos, existen algunos conceptos comunes que permiten establecer un lenguaje de referencia para plantear modelos y describir el problema. Las principales características que resaltan en la literatura son: [1]:

- **Unidad Geográfica Básica (UGB):** Unidades elementales sobre las que se realiza una agrupación con un fin específico. Se refieren a objetos geográficos que pueden ser ubicados espacialmente en un plano a través de puntos, coordenadas, polígonos, entre otros. Las UGB puede ser direcciones, códigos postales, municipios o áreas fabricadas con un propósito específico como zonas de distribución en una compañía o secciones electorales. Cada UGB puede tener asociados distintos atributos que dependen del problema como número de habitantes, de clientes o carga de trabajo. El contexto de cada aplicación determina como se utilizan las relaciones espaciales y los atributos para generar las zonas de interés.
- **Centros de zona:** En ciertas aplicaciones es de utilidad asociar un centro a cada zona, que puede representar coordenadas geográficas, un sitio específico como una unidad de distribución, oficinas o almacenes. En general el centro coincide con alguna de las UGB que comprenden la zona y puede ser fijo o adaptarse de manera dinámica. Establecerlo puede ser útil para calcular distancias entre zonas y costos asociados.
- **Número de zonas:** Parámetro que se deriva de las restricciones y metas establecidas por el problema estudiado. Por ejemplo, si se trata de zonas electorales se determina el número de distritos atendiendo criterios legales, en zonas escolares por la cantidad de escuelas de interés y en el caso de áreas de ventas por el número de brigadas de vendedores, entre otros.
- **Asignación única:** Se requiere que las UGB se asignen a una zona de manera mutuamente excluyente. En un plan de distritación factible, esta condición se debe cumplir para todas las unidades.
- **Equilibrio o balance:** Las zonas generalmente deben estar equilibradas con respecto a uno o más atributos asociados a las UGB como por ejemplo el número de clientes, pacientes de un hospital, estudiantes, habitantes, entre otros. En general, debido a la estructura discreta del problema y el principio de asignación única, el equilibrio perfecto no puede ser logrado, por lo que se estila calcular la desviación porcentual con respecto al caso ideal. Entre menor sea la desviación, mejor será el equilibrio de las zonas generadas.
- **Conexidad:** En la mayoría de los problemas, las zonas diseñadas deben estar conectadas geográficamente. Para obtener distritos conexos se debe tener información explícita de las colindancias de las UGB.
- **Compacidad:** Es un requerimiento común para reducir costos, tiempos de traslado o para evitar la dispersión entre los elementos de una zona. Puede ser calculada al minimizar la distancia de los centros a las UGB o mediante un enfoque geométrico que consiste en aproximar las zonas a figuras consideradas compactas.

## 2.4 APLICACIONES

El diseño de zonas tiene gran variedad de aplicaciones que comparten como principal característica dividir una región de interés sujeta a una serie de restricciones. A continuación, se mencionan los principales aspectos de casos representativos:

- **Zonas de venta:** Es una aplicación común para compañías que buscan asignar de manera eficiente su fuerza de ventas por área de responsabilidad y cobertura. El número de zonas se determina por la cantidad de brigadas de trabajo, las UGB representan un conjunto de clientes agrupados por municipios, estados o áreas estratégicas para la empresa.

Entre las características deseadas de las zonas se encuentran la asignación exclusiva de cada UGB, la ubicación de centros de operación estratégicos considerando el tiempo de traslado y recorrido de las zonas. Asimismo, se busca que sean conexas, accesibles y compactas para facilitar el traslado de los agentes de venta. [11].

- **Zonas escolares:** Consiste en asignar áreas residenciales a escuelas con el fin de administrar adecuadamente la capacidad de los centros educativos en una región. El número de zonas se establece por la cantidad de escuelas, las UGB representan un conjunto de alumnos agrupados por áreas residenciales de interés como colonias o manzanas.

Entre las características deseadas están la capacidad de atención homogénea de las escuelas, equilibrada distribución de estudiantes entre el número total de instituciones educativas por grado, distancia mínima de traslado, accesibilidad y, en algunos casos balance racial [12].

- **Zonas para equipamiento público:** Se busca destinar de manera conveniente y eficiente algún equipamiento público a un grupo de derechohabientes. El número de zonas se determina por la cantidad de equipamiento (hospitales, centros deportivos, entre otros), las UGB representan un conjunto de usuarios agrupados por municipios o códigos postales.

Los atributos de interés son el balance en la capacidad de atención por equipamiento, generación de zonas conexas, cercanía al equipamiento, facilidades y accesibilidades de transporte, entre otras.

- **Zonas para el retiro y acarreo de nieve:** Este tipo de aplicaciones ayudan a planear la distribución de depósitos de vehículos para el retiro de nieve y vertido de sal. Las regiones de interés deben ser divididas de forma que cada zona tenga al menos un depósito. En una segunda etapa, se trazan las rutas de los vehículos para el retiro y acarreo de nieve [13].

- **Zonas para recolección de basura:** Relacionado con el problema anterior, se busca asignar eficientemente un conjunto de vehículos a puntos de recolección estratégicos. Los criterios contemplados abarcan la compacidad geométrica, reducir el tiempo de traslado de los vehículos y el tiempo de descarga de los residuos [14].

- **Zonas para servicios de emergencia:** Se busca agilizar el uso de servicios de emergencia como patrullas policiales y ambulancias. El número de zonas es señalado por las autoridades pertinentes con base en los recursos y jurisdicciones actuales. Las UGB son colonias o códigos postales, y como principales criterios se procura la compacidad, el equilibrio de la carga de trabajo, conexidad y tiempo de respuesta mínimo desde la recepción de una llamada de emergencia [15].

- **Zonas de energía:** Esta aplicación busca dividir monopolios o empresas estatales de distribución de energía eléctrica en mercados regionales económicamente

rentables. El número de distritos está dado por la cantidad de compañías distribuidoras planeadas, las UGB representan nodos de distribución eléctrica, y se promueve la creación de zonas compactas, contiguas y con potencial de desarrollo económico equilibrado [16].

## 2.5 DISEÑO DE ZONAS ELECTORALES

De los ámbitos de aplicación del diseño de zonas geográficas, la distritación electoral es uno de los casos más populares, debido a su influencia en los resultados de los procesos democráticos. En esencia, persigue conformar áreas denominadas distritos electorales que forman la base para organizar la representación ciudadana ante las cámaras. El objetivo es garantizar una adecuada representación a partir del principio de mayoría relativa y el resultado se evalúa en función de que exista un equilibrio poblacional entre los distritos para que el voto de un ciudadano valga lo mismo que el de cualquier otro [17].

### 2.5.1 Características del diseño de zonas electorales

Una parte relevante en el proceso electoral es plasmar en forma operacional criterios importantes como funciones de las propiedades geográficas, políticas y demográficas en un plan de distritación. Entre los criterios más reconocidos se encuentran: el equilibrio poblacional, completitud, compacidad, contigüidad, competitividad electoral, oportunidad de las minorías para elegir candidato, tiempos de traslado y respeto por los límites políticos actuales o comunidades de interés. Por su importancia en esta investigación, los criterios de equilibrio poblacional, compacidad y conexidad se explican más adelante en las secciones 2.5.1.1, 2.5.1.2 y 2.5.1.3, respectivamente.

#### *Completitud*

Dentro de la definición de un plan de distritación se incluye la asignación completa de UGB a distritos. Por esta razón, generalmente, no se considera explícitamente como un criterio; sin embargo, debido a la complejidad técnica del proceso de regionalización es necesario verificar la completitud en distintas etapas.

#### *Competitividad electoral*

La competitividad electoral manifiesta el grado de rivalidad entre los principales partidos y es una característica deseable para fomentar el equilibrio de las fuerzas políticas. Para lograr una mayor competitividad, existen medidas que parten de la observación del nivel de igualdad en los apoyos en los partidos políticos, la cercanía existente en los resultados esperados de una elección, entre otros. Algunas medidas comunes comprenden la estimación del número de electores afiliados que votarán por candidatos propuestos por su partido. En este caso, si la proporción esperada de votos partidistas es aproximadamente la misma dentro de un umbral determinado, un distrito se puede considerar competitivo. De manera similar, hay medidas que ponderan las minorías raciales y étnicas mediante la proporción entre la minoría y mayoría dentro de un rango admisible.

*Conformidad con límites políticos e integración de comunidades de interés*

Una característica geopolítica deseable, especialmente en países que emplean un sistema de representación plurinominal, es la construcción de distritos que respeten preferentemente las divisiones administrativas existentes, como municipios o alcaldías. La conformidad con los límites políticos permite una mejor gestión y mayor familiaridad de los electores con configuraciones socialmente reconocidas. En ese sentido, también se procura la integración y respeto de comunidades de interés como las poblaciones indígenas. Generalmente, para modelar este criterio matemáticamente se asignan grupos a las secciones con características homogéneas y se incluye una penalización en la función objetivo si se dividen.

Es importante señalar que no existe un consenso universal sobre los criterios necesarios a considerar en un proceso de redistribución y las legislaciones estatales y federales pueden diferir en algunos. Asimismo, ciertos conceptos como la compacidad pueden ser definidos de manera ambigua sin implementación específica, por lo que la selección de criterios depende de la legislación de cada país o localidad y las decisiones metodológicas de las autoridades de distritación.

*Tiempos de traslado*

Los tiempos y distancias de traslado al interior de los distritos se consideran en el diseño para facilitar el desplazamiento y administración. Para calcularlos usualmente se toman como referencia unidades administrativas relevantes como las cabeceras municipales y además se establece un tiempo de corte por entidad.

Aunque cada problema de diseño presenta características diferentes que varían en función del país y las legislaciones locales, existen tres principios esenciales para elecciones justas y competitivas [18]:

- Equilibrio poblacional
- Contigüidad
- Compacidad

A continuación, se exponen a mayor detalle sus características significativas, así como algunas propuestas relevantes para modelarlas.

*2.5.1.1 Equilibrio poblacional*

En la distritación se busca que todas las zonas estén equilibradas con respecto a una o varias propiedades de las UGB que la forman. Las variables que se busca equilibrar pueden ser porcentajes de representación étnica o socioeconómica, tiempos de traslado, carga laboral, entre otros. El más relevante es el equilibrio poblacional y se mide en términos de desviación respecto al caso ideal, entre menor la desviación mejor el ajuste.

El equilibrio poblacional consiste en diseñar zonas con aproximadamente el mismo número de habitantes para garantizar la igualdad de representación política. Este principio se basa en el concepto “un hombre un voto”. En la literatura existen diversas medidas para calcular el equilibrio poblacional, sin embargo, existe poca reflexión sobre las ventajas de aplicar un método específico [19], asimismo la implementación y desviación poblacional máxima aceptables dependen de estándares legales y criterios de las autoridades electorales en cada país [20].

Algunos métodos representativos para calcular el equilibrio poblacional son [19]:

- La suma de los valores absolutos de la diferencia entre la población de cada zona y el promedio poblacional por zona:

$$\sum_{i=1}^k |P_i - \bar{P}| \quad (6)$$

Donde:

$P_i$  = Población de la zona  $i$

$\bar{P}$  = Promedio de la población por zona dado por:

$$\bar{P} = \sum_{x \in X} \frac{P_x}{k} \quad (7)$$

Donde:

$k$  = Número de zonas que deben crearse.

$X$  = Conjunto de todas las UGB

$P_x$  = Población de la unidad geográfica  $x$

- La diferencia entre la zona más poblada y la menos poblada

$$P_{i \max} - P_{j \min} \quad (8)$$

- La división entre la zona más poblada y la menos poblada

$$\frac{P_{i \max}}{P_{j \min}} \quad (9)$$

- El uso de rangos con respecto al promedio de población por zona.

$$\sum_{i=1}^k \frac{\max\{P_i - (1 + \beta)\bar{P}, (1 - \beta)\bar{P} - P_i, 0\}}{\bar{P}} \quad (10)$$

Donde:

$k$  = Número de zonas que deben crearse.

$P_i$  = Población de la zona  $i$

$\bar{P}$  = Promedio de población por zona

$\beta$  = Porcentaje de desviación poblacional máximo aceptable por zona

A través de este planteamiento, se busca que la población esté en el intervalo  $[(1 - \beta)\bar{P}, (1 + \beta)\bar{P}]$ , con  $0 \leq \beta \leq 1$ . La función toma un valor de cero si se encuentra en el intervalo deseado y en caso contrario, adquiere un valor positivo equivalente a la suma de las desviaciones con respecto a estos límites.

En el caso de México, a partir de 2014 el INE es el responsable de definir los criterios metodológicos para el proceso de redistribución. La definición de equilibrio poblacional utilizada en el proceso de distribución de 2017 [21] está dada por:

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{1 - \frac{P_i}{P_{med}}}{d_a} \right)^2 \quad (11)$$

Donde:

$P_{med}$  = Población media estatal.

$P_i$  = Población de la zona  $i$

$d_a$  = Porcentaje de desviación poblacional máximo aceptable por entidad

$k$  = Número de zonas por entidad

A través de este planteamiento se busca estar dentro del rango establecido por la desigualdad  $P_{med} - d_a \leq P_i \leq P_{med} + d_a$  y se penaliza a los distritos fuera de rango.

### 2.5.1.2 *Compacidad*

En la literatura se observa que la contigüidad y equilibrio poblacional por sí solos resultan insuficientes para evitar la manipulación electoral o *gerrymandering*<sup>2</sup> [23], por lo que es necesario la inclusión de la compacidad como una propiedad adicional que impida la creación de zonas electorales con formas irregulares y así prevenir la generación de planes de distritación favorables a un candidato o partido. El diseño de zonas con formas regulares y homogéneas dentro de un espacio limitado resulta no sólo útil para fines de administración, mantenimiento y control, sino también para disminuir el costo de servicios públicos y privados, o disminuir tiempos de traslado o recorrido dentro de la zona [24].

La compacidad es un principio ampliamente aceptado, pero el diseño de zonas con esta característica plantea algunas dificultades como: la falta de una definición exacta de la compacidad y un impacto en el rendimiento de los sistemas de distritación.

Uno de los retos que presenta la creación de zonas compactas es la falta de consenso sobre el uso de una medida específica para generarlas. Esta problemática se deriva principalmente de la ausencia de una definición exacta de la compacidad lo que ha promovido la creación de una gran variedad de métodos que buscan expresarla de manera cuantitativa.

Un considerable número de trabajos sobre compacidad apoyan la noción de que una zona es compacta si ésta comparte propiedades características de formas geométricas regulares consideradas compactas como un círculo, cuadrado o figuras convexas; aunque esta descripción resulta útil y permite expresar la compacidad en términos prácticos [25], no proporciona una definición generalizada. Ante esta situación, se ha observado que ninguna de las medidas reportadas en la literatura ha resultado completamente satisfactoria, y presentan defectos al ser aplicadas a ciertos tipos de configuraciones geográficas [23, 26]. Por otro lado, existe la posibilidad de que se generen zonas compactas que contengan una tendencia política predeterminada o *gerrymandering*, lo que puede obstaculizar el proceso de distritación y es contrario a los problemas que busca en principio evitar la compacidad [27]. Aunado a lo anterior, existe una proliferación de cerca de 100 medidas diferentes que se aplican a patrones de espacios geográficos [28], lo que dificulta la tarea de hacer un uso apropiado de las diversas propuestas para casos concretos. No obstante, también, se ha demostrado, que un uso metódico de las medidas de compacidad puede limitar los sesgos políticos cuando se combina con otros criterios como la conexidad y equilibrio poblacional [29].

Debido al uso repetitivo de las medidas de compacidad en el proceso de diseño de zonas, además de propiciar la creación de distritos con formas regulares, es necesario contemplar que su cálculo no requiera de tiempos de cómputo excesivos. Por lo que, entre las características deseables de las medidas se encuentra la sencillez y la posibilidad de paralelizar sus operaciones, de tal manera que el tiempo global de ejecución de cualquier algoritmo que busque generar un plan de distritación no se vea afectado considerablemente [30].

En la literatura se propone buen número de medidas de compacidad inspiradas en principios geométricos tales como envolventes convexas, cuadrículado, comparación de

<sup>2</sup> El término se acuñó en referencia a Elbridge Gerry quien fue gobernador del estado de Massachusetts en 1812 y con la ayuda de su partido político diseñó un distrito para asegurar su elección. En la época se produjo una ilustración del distrito enfatizando sus similitudes con una salamandra, "salamander" en inglés. Por lo tanto, el concepto de *gerrymandering* surge de la unión del nombre del gobernador "Gerry" con la terminación de salamandra en inglés "mander" [22]

círculos inscritos, entre otras. En el contexto de México, el INE establece la compacidad para el proceso de distritación de 2017 a través de la siguiente expresión [21]:

$$\frac{PC_{Z_i}}{4\sqrt{AC_{Z_i}}} - 1 \quad (12)$$

Donde:

$PC_{Z_i}$  = Perímetro de la zona  $Z_i$

$AC_{Z_i}$  = Área de la zona  $Z_i$

Esta medida compara el perímetro de cada distrito con aquel de un cuadrado que tiene la misma área. De esta forma, en la ecuación (12) se observa que un distrito con buena compacidad tendrá un valor cercano a cero y en caso de ser un cuadrado, la medida se hace cero.

### 2.5.1.3 *Conexidad*

La conexidad es la calidad de una región de estar conectada y es un criterio ampliamente utilizado en el diseño de zonas debido a que la fragmentación afecta la viabilidad o influencia de una región [31]. Implica que todas las unidades geográficas asignadas a un distrito estén físicamente conectadas o que existan vías de comunicación y transporte que permitan viajar por el distrito sin cruzar sus fronteras. En el caso de la distritación política, es una propiedad útil para facilitar la administración durante y después del proceso electoral.

El mecanismo más recurrente para modelarla, es representar la estructura geográfica mediante una gráfica cuyos vértices representan las UGB y la colindancia entre dos unidades es indicada mediante una arista entre los vértices correspondientes. Siguiendo este modelo, una gráfica representa una zona conexa si para cualquier par de vértices existe un camino formado con aristas y vértices dentro de la gráfica que los une. Por lo tanto, las técnicas empleadas para determinar la conexidad de gráficas pueden ser utilizadas para el diseño de zonas contiguas.

El proceso de verificación de conexidad es computacionalmente costoso y se incorpora durante el proceso de generación de las soluciones. Entre las principales propuestas de la literatura para garantizarla se observan el uso de ecuaciones y desigualdades lineales [19, 32]. Algunas propuestas importantes son las siguientes:

- Cova y Church [33] plantean restricciones que generan zonas contiguas a partir de una unidad geográfica denominada semilla o raíz, a la cual se le agregan de manera incremental unidades geográficas colindantes. Uno de los inconvenientes del modelo es que la necesidad de requerimientos computacionales se incrementa rápidamente. Esto se observa en el crecimiento del número de variables binarias a considerar que se calculan como el cuadrado del número de UGB analizadas.
- Macmillan [34] propone otro método denominado *switching points*. A diferencia de planteamientos previos, en esta propuesta no es necesario iterar sobre todas las UGB asignadas a una zona para verificar la contigüidad, sino únicamente en las UGB de interés y sus vecinos de primer orden. El procedimiento es semejante a la siguiente idea, se recorre el perímetro de una UGB y se marcan los puntos en los que se pasa de estar en el interior de la zona a estar en su frontera. Estos cambios se conocen como *switching points*, si su número es par, la UGB puede ser intercambiada con facilidad sin provocar una desconexión en la región de origen.

- Williams [35] diseñó un modelo con base en la gráfica primal y dual asociadas al problema del diseño de zonas. La propuesta genera de manera simultánea árboles de expansión complementarios en ambas gráficas y crea un sub-árbol conexo a partir del árbol primal para formar una zona conexa; una de las ventajas de esta propuesta es que el número de variables y restricciones crece de manera lineal con respecto al número de UGB.
- Shirabe [36] plantea un esquema que utiliza la gráfica asociada al problema de diseño de zonas junto con un principio de dinámica de fluidos. En este modelo, se hace una analogía entre gráficas conexas y el movimiento que seguiría un fluido desde múltiples fuentes hasta un vertedero. En este sentido, una zona está formada por una red de abastecimiento de fluidos, donde una UGB arbitraria representa un vertedero, y las demás unidades el abastecimiento. De esta forma, una zona es conexa si el abastecimiento enviado desde cada vértice llega al vertedero sin salir de la red. Al igual que la propuesta anterior, el número de variables y restricciones crece de manera lineal con respecto al número de UGB consideradas.

Otro aspecto importante al manejar la conexidad es la codificación de la solución y cómo se incorpora este concepto en la construcción, modificación y evaluación de los planes de zonificación candidatos. Entre los principales métodos de manejo de la conexidad en problemas de optimización geográficos se encuentran [37]:

- En algoritmos evolutivos, como los algoritmos genéticos, la conexidad se puede incluir como una restricción en el proceso de codificación y decodificación de la solución. En general, para problemas de tipo geográfico este tipo de técnicas es limitado y difícil de implementar tal como se observa en [37].
- Utilizar una función de penalización para disminuir el valor de aptitud o *fitness* de soluciones que violan la restricción de conexidad y reducir su probabilidad de inclusión en la siguiente generación. Este enfoque ha sido especialmente efectivo para problemas de optimización numérico. Sin embargo, en el caso de la distritación y otros problemas de índole geográfico, el conjunto de posibles soluciones infactibles es enorme y la búsqueda no es tan eficiente.
- La elaboración de algoritmos que sólo crearán soluciones factibles a través de un mecanismo de “reparación” que convierte las soluciones infactibles a soluciones factibles. Este método ha sido reportado como efectivo y flexible al ser aplicado a problemas geográficos.

## 2.6 DISTRITACIÓN ELECTORAL EN MÉXICO

La distritación electoral en México, sus criterios metodológicos y fundamentos legales son resultado de un proceso histórico y político que ha evolucionado con el desarrollo del sistema electoral nacional. A continuación, se presentan los principales antecedentes y los criterios metodológicos relevantes al presente proyecto de investigación.

La representación ciudadana a través de la cámara de diputados se encuentra establecida en la legislación desde la Constitución de 1824, sin embargo, es hasta 1857 que se reconoce por primera vez la necesidad de segmentar el territorio nacional en distritos electorales. A partir de este momento, y durante la mayor parte del siglo XX, los procesos de distritación en México fueron poco documentados, pero se sabe que eran fundamentalmente manuales, contruidos por un conjunto de personas que se senta-

ban a la mesa, con mapas y tablas de población. El único criterio cuantitativo oficial era procurar la creación de distritos con un número equilibrado de habitantes [38].

En 1977 se llevó a cabo una reforma electoral donde se transformó el criterio para determinar el número de diputados uninominales en 300, también se documentan por primera vez criterios y procedimientos para una redistribución. Se crea un precedente importante para crear memorias con las cuales se pueden rastrear los criterios y métodos utilizados en los subsecuentes ejercicios electorales de 1978, 1996, 2006 y 2016 [39].

Posterior a la reforma electoral de 1977, para el ejercicio de 1978, además de un número de habitantes equilibrado, los criterios fueron de corte social, geográficos, de comunicaciones y de permanencia. En este sentido, los primeros procuraban no dividir colonias, rancherías, ranchos o cualquier localidad; los segundos buscaban que las zonas al interior de un distrito no quedaran separadas por accidentes naturales; en términos de comunicación se pretendía que la cabecera quedara unida al resto del distrito. Todo lo anterior, con la menor cantidad de cambios posibles. La tarea desarrollada siguió métodos manuales, con una base empírica, fundamentada en el conocimiento de los actores involucrados. La configuración de los distritos obtenida por este ejercicio, se mantuvo vigente para las elecciones federales de 1982, 1985, 1988, 1991 y 1994, y no tuvo modificaciones basadas en los datos arrojados por los censos poblacionales de 1980 y 1990 [39, 40].

En 1996, se realizó una segunda reforma significativa al sistema electoral. Se retomaron los criterios establecidos en los artículos 52 y 53 de la constitución y se definieron aspectos metodológicos y técnicos de manera más precisa mediante acuerdos del Consejo General del Instituto Federal Electoral (IFE). En términos generales, se establecían limitantes que normaban el respeto por las fronteras político administrativas, el uso de la fórmula de Sainte-Laguë en la reasignación de distritos y un modelo heurístico para el proceso de regionalización. Asimismo, se estableció que la población base para construir distritos sería la registrada en el censo de 1990, elaborado por el INEGI, y las áreas resultantes no debían tener una desviación de la población meta mayor al 15%. De igual manera se ordenó considerar el paisaje, la integridad de comunidades, vías de comunicación y tiempos de traslado, hacer distritos compactos y contiguos. En el caso de la redistribución de 1996, en México se utilizó un modelo heurístico, que tenía una componente de inicialización y otra de optimización local. En términos sintéticos, el crecimiento partía de una unidad geográfica, después añadía áreas vecinas y evaluaba, hasta acercarse a la población objetivo. Posteriormente, se lleva a cabo una fase de optimización en la cual se busca mejorar el equilibrio demográfico [41].

Con base en un diagnóstico elaborado por el IFE en el 2004, se detectó que el 34% de los distritos estaban por encima de la tolerancia aceptada en 1996, es decir, tenían más del 15% de desviación con respecto a la meta establecida. Con ello, habían quedado fuera de rango cerca de 100 de los 300 distritos [38]. A partir de ello se dictó la necesidad de hacer un nuevo ejercicio de regionalización electoral. Este nuevo ejercicio permitió realizar una serie de mejoras como incorporar el algoritmo de recocido simulado, una mayor participación por parte de los partidos políticos en la discusión para establecer los criterios y métodos, así como el establecimiento de una jerarquía de criterios.

Los lineamientos que debían respetar las nuevas zonas se encuentran referidos en el acuerdo del Consejo General del IFE de 2004 [42]. En este documento se mencionan los siguientes puntos:

1. Los distritos se integrarán con territorio de una sola entidad federativa.

2. Para la determinación del número de distritos que habrá de comprender cada entidad federativa, se observará lo dispuesto en el Artículo 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos.
3. Se aplicará el equilibrio demográfico en la determinación de los distritos partiendo de la premisa de que la diferencia de población de cada distrito, en relación con la media poblacional estatal será lo más cercano a cero.
4. Se procurará la conformación de distritos electorales con mayoría de población indígena. En todo caso se preservará la integridad territorial de las comunidades indígenas.
5. Los distritos tendrán continuidad geográfica tomando en consideración los límites político-administrativos y los accidentes geográficos.
6. En la delimitación de los distritos se procurará obtener la mayor compacidad, de tal forma que el perímetro de los distritos tenga una forma geométrica lo más cercana a un polígono regular. Ningún distrito podrá rodear íntegramente a otro.
7. Para la integración de distritos se utilizará la distribución municipal y seccional vigente. La unidad de agregación mínima será la sección electoral.
8. Los distritos se constituirán preferentemente con municipios completos.
9. Para establecer las cabeceras distritales se considerarán los siguientes parámetros: mayor población, vías de comunicación y servicios públicos. En caso de existir dos o más localidades semejantes, y una de ellas sea, en la actualidad, cabecera distrital, prevalecerá esta última.
10. En la conformación de los distritos, se procurará optimizar los tiempos de traslado para recorrer su interior, considerando su tamaño, su extensión y la distribución geográfica de sus localidades, para hacer más eficientes los trabajos de campo que realiza el IFE de forma permanente en el país.

Se estableció que la distritación efectuada serviría para las elecciones de 2006 y 2009, en virtud de que para el 2012 se contarían con los resultados del Censo de Población y Vivienda correspondientes al 2010, lo que permitiría actualizar la información. Sin embargo, se acordó utilizar la misma demarcación para los comicios federales de 2012. En abril de 2014 se disolvió el IFE y fue sustituido por el Instituto Nacional Electoral (INE) el cual lleva a cabo el procedimiento pertinente para establecer los criterios a utilizarse en el proceso de distritación 2016-2017.

Es importante observar que, de los criterios utilizados por las autoridades electorales en México, en esta investigación sólo se consideran dentro del modelo de optimización el equilibrio poblacional, la compacidad geométrica y contigüidad, debido a que se consideran principios universales y suficientes para evaluar correctamente el desempeño de la heurística propuesta.

## 2.7 HEURÍSTICAS APLICADAS AL DISEÑO DE ZONAS

En esta sección se presenta un panorama de diferentes métodos utilizados para resolver el problema de diseño de zonas, desde los orígenes clásicos hasta el diseño de algoritmos heurísticos específicos y se incluyen las características esenciales de enfoques relevantes encontrados en la literatura especializada.

En los últimos 50 años, el diseño de zonas ha atraído la atención de gran número de investigadores que han propuesto una variedad de modelos y algoritmos para resolver el problema. Los trabajos pioneros corresponden a las investigaciones de Hess et al. [43] en 1965 y Garfinkel & Nemhauser [44] en 1970. Hess et al. abordan por primera

vez la distritación mediante técnicas de programación matemática y la formulan como un problema de ubicación discreto, con variables binarias, restricciones lineales y una función objetivo. En su trabajo, se recurre a una perspectiva tradicional de asignación de centros de distribución y rutas de transporte, donde cada UGB debe ser asociada al centro de un distrito. Por su parte, Garfinkel y Nemhauser rediseñan este planteamiento para formular un algoritmo de partición y presentan la teoría de gráficas como un mecanismo eficaz para plantear las relaciones geográficas. A partir de estos trabajos innovadores, muchos autores centraron su atención en el problema de distritación desde un enfoque combinatorio y lo modelaron explotando similitudes con otros problemas familiares como clustering, partición de gráficas, ubicación- asignación, entre otros.

Desde esta perspectiva, que busca generar de manera automatizada planes de distritación, existen distintas formas de resolver el problema como programación entera, algoritmos evolutivos, búsqueda tabú, recocido simulado, GRASP, entre otros. Estos métodos pueden clasificarse en tres grandes categorías: métodos de aglomeración, métodos de división y métodos heurísticos [1].

Los métodos de aglomeración agrupan objetos “similares” en regiones siguiendo alguna restricción de conectividad. Este tipo de métodos pueden ser algoritmos jerárquicos que combinan pequeños clusters hasta alcanzar el nivel deseado de distritos. En esta categoría se consideran los métodos empleados para problemas de asignación-ubicación, los cuales buscan determinar centros estratégicos que optimicen una función específica para cada distrito, y los métodos de crecimiento multi-kernel, los cuáles van conglomerando unidades geográficas a partir de múltiples semillas o núcleos.

Los métodos de división parten del conjunto total de datos de entrada y buscan fraccionarlo en un número determinado de regiones. Un ejemplo de este tipo de métodos, es la programación entera, ya que integra las variables en un modelo matemático y resuelve el modelo para encontrar la mejor partición.

En la tercera categoría, se consideran los métodos de búsqueda heurísticos. Esta categoría se puede subdividir en dos subgrupos: los métodos basados en población como los algoritmos genéticos y los métodos basados en trayectoria como recocido simulado, búsqueda tabú y búsquedas locales. Los primeros buscan hacer una analogía entre una población formada por individuos o soluciones y un proceso de evolución, mientras que los segundos buscan mejorar una solución existente mediante una secuencia de movimientos (trayectoria).

En la Tabla 1 se muestran diversos enfoques relevantes de la literatura para diversas aplicaciones del diseño de zonas.

En la Tabla 2 se muestran algoritmos específicos para el diseño de zonas electorales en los cuales se utilizan diferentes restricciones y medidas que buscan evitar la manipulación electoral y obtener zonas libres de tendencias políticas.

Se puede destacar, a partir de la información que se presenta en la Tabla 1 y la Tabla 2 que las heurísticas representan un mecanismo popular para manejar la complejidad computacional del problema, encontrando soluciones de calidad en un tiempo razonable. El desarrollo de metaheurísticas ha sido exitoso en el contexto de la distritación por varias razones [71]:

1. Su aplicación ha obtenido buenos resultados en optimización combinatoria. De hecho, en problemas de partición de conjuntos han mostrado ser una estrategia eficaz para explorar espacios de búsqueda discretos y escapar de óptimos locales. Debido a la complejidad computacional del diseño de zonas, no se conocen métodos exactos que garanticen el óptimo en instancias de gran tamaño con relevancia práctica.

Tabla 1: Algoritmos de diversas aplicaciones del diseño de zonas. Fuente: Elaboración propia con base en [19].

Año	Autor	Aplicación	Algoritmo
1971	Hess y Samuels [45]	Zonas de ventas	Geoline
1990	Ferland y Guennette [12]	Zonas escolares	Asistido por GIS
1991	Schoepfle y Church [46]	Zonas escolares	Exacto
2002	Muyldermans et al. [47]	Esparcimiento de sal	Rutas por arcos
2003	Blais et al. [48]	Servicios de atención médica	Búsqueda tabú
2003	Bergey et al. [16]	Zonas eléctricas	Recocido simulado con algoritmos genéticos
2003	D'Amico et al. [15]	Distritos policiales	Recocido simulado
2005	Bacao et al. [49]	Zonas de gestión costeras	Algoritmo genético
2006	Des Jardins y Bulka [50]	Zonas escolares	Hill Climbing
2007	Tavares et al. [51]	Zonas tarifarias de transporte	Evolutivos
2008	Basu et al. [52]	Zonas de control de tráfico aéreo	Heurística con base en partición binaria del espacio
2009	Ríos Mercados y Fernández [53]	Zonas de venta	GRASP
2009	Hu et al. [54]	Zonas de distribución de tabaco	Sistema inmune artificial
2011	Lunday et al. [55]	Diseño de zonas de control marítimo	Reformulación de técnicas de linearización (RLT)
2015	Lei et al. [56]	Diseño de zonas de ventas	Heurística con base en una búsqueda adaptativa de vecindades de gran escala
2016	Ríos-Mercado y Escalante [57]	Diseño de zonas de ventas	GRASP
2016	Lei et al. [3]	Diseño de zona de ventas estocástico	Algoritmos co-evolutivos
2016	Yanik et al. [58]	Diseño de zonas de energía	Algoritmo genético
2018	Gliesch et al. [59]	Diseño de zonas de ventas	Búsqueda tabú y método multiarance

Tabla 2: Algoritmos aplicados a la distritación política. Fuente: Elaboración propia con base en [19] y [32].

Año	Autor	Algoritmo
1965	Hess et. al. [43]	Heurística de construcción con ubicación-asignación
1970	Garfinkel y Nemhauser [44]	Búsqueda exhaustiva
1998	Mehrotra et al. [60]	Branch and Price
2000	Guo et al. [61]	MOZART
2003	Bozkaya et al. [62]	Búsqueda tabú
2003	Forman y Yue [63]	Algoritmo genético
2005	Bacao et al. [64]	Algoritmos genéticos
2006	Bong y Wang [65]	Recocido simulado algoritmos genéticos
2008	Ricca y Simeone [66]	Heurísticas locales
2011	Guo y Jin [67]	Búsqueda tabú
2013	Rincón et al. [68]	Recocido simulado
2015	Castelli et al. [69]	Algoritmo genético
2017	Rincón et al. [70]	Recocido simulado, colonia artificial de abejas y método de composición musical

2. No asumen un estado *a priori* de un conjunto particular de metas o de funciones objetivo para evaluar un escenario, lo que permite cierta flexibilidad al definir las metas del proceso de distritación. Asimismo, la aleatoriedad del proceso de búsqueda reduce la parcialidad del plan resultante.

También, se puede notar que las metaheurísticas más utilizadas en la distritación son:

- Recocido simulado: Realiza una analogía del proceso físico de recocido, en el cual un material se enfría paulatinamente para cambiar sus propiedades estructurales, con la optimización de una función. En cada iteración se genera un punto candidato dentro de una vecindad local de la solución actual, la probabilidad de moverse de la solución actual a una solución candidata es una función de la diferencia del valor de la función objetivo en cada uno de los puntos y un parámetro que representa la temperatura del sistema. Cuando la temperatura es alta, puntos candidatos que son “peor” que la solución actual pueden ser seleccionados en la siguiente iteración. Esto ayuda a la heurística a escapar de óptimos locales. Después de cada iteración la temperatura se reduce gradualmente de tal manera que la probabilidad de aceptar una peor solución es cada vez menor. Esta heurística se analiza con mayor profundidad en el Capítulo 4.
- Algoritmos genéticos: Heurística inspirada en la evolución biológica y sus procesos moleculares. En un algoritmo genético, una población de soluciones se codifica para resolver un problema de optimización. En cada iteración, las soluciones candidatas se modifican de manera aleatoria mediante operadores de mutación (alteración al vector de soluciones) o hibridación (intercambio de subsecuencias de dos soluciones). En cada ronda hay un proceso de selección en el cual algunas soluciones se descartan y otras se duplican en la población dependiendo del nivel de *fitness* normalmente dado por el valor de la función objetivo.

- Búsqueda tabú: Es una modificación de hill-climbing en la que se retiene una memoria de los movimientos recientes y se evitan dichos movimientos a menos que cumplan ciertos criterios de aceptación. El uso de esta memoria promueve la diversificación.
- GRASP: Es una metaheurística multiarranque. Cada iteración involucra dos fases, generación de un candidato inicial y una exploración mediante un algoritmo glotón (hill-climbing) para encontrar un óptimo local.

Sin importar la heurística concreta utilizada, es necesario que exista un balance dinámico entre exploración e intensificación [72]. La primera consiste en generar nuevas soluciones que permitan examinar de manera eficiente toda la región del espacio de búsqueda mientras que la segunda utiliza de manera explícita o implícita la historia de las soluciones con el objetivo de concentrar la búsqueda en regiones de mayor calidad. La exploración es necesaria para mantener la diversidad y la intensificación permite conservar y mejorar los rasgos de las mejores soluciones encontradas. En este trabajo se busca encontrar este equilibrio mediante el desarrollo de un algoritmo heurístico multiobjetivo. En el siguiente capítulo se aborda el contexto multiobjetivo de la distribución y se analiza la literatura desde ese enfoque.

## CONTEXTO MULTIOBJETIVO

---

El proceso de optimizar de manera sistemática y simultánea una colección de funciones objetivo se conoce como optimización multiobjetivo. El diseño de zonas en su variedad de aplicaciones busca modelar y optimizar atributos, que generalmente compiten entre sí, con el fin de reflejar la realidad socioeconómica, política y geográfica de una región para mejorar la toma de decisiones. En este capítulo se aborda la distribución como un problema de optimización multiobjetivo de la siguiente manera: primero se comienza con algunas definiciones sobre optimización multiobjetivo, posteriormente se presentan las técnicas de resolución más utilizadas en este campo, de igual manera se exponen los elementos principales de diseño al construir metaheurísticas desde esta perspectiva y finalmente se revisa la literatura asociada al diseño de zonas.

### 3.1 CONCEPTOS DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

En esta sección se presentan conceptos fundamentales en optimización multiobjetivo como son dominancia, optimalidad de Pareto, conjunto óptimo de Pareto y frente de Pareto que son útiles para la descripción y planteamiento de un algoritmo en este contexto.

Un problema de optimización multiobjetivo se define como: la tarea de encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga restricciones y optimice un vector de funciones objetivo que generalmente están en conflicto unas con otras. En este sentido, el término optimizar significa encontrar vectores de solución con valores aceptables de desempeño para  $m$  funciones objetivo de manera simultánea. El proceso de optimización puede significar la maximización de las  $m$  funciones, su minimización o una combinación de maximización y minimización [73].

Formalmente un problema de optimización multiobjetivo se puede plantear de la siguiente manera [74]:

**Definición 3.1.1** Problema de Optimización Multiobjetivo

Se define como la tarea de minimizar (o maximizar)  $F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$  sujeto a  $g_i(\vec{x}) \leq 0, i = \{1, 2, \dots, r\}$  (restricciones de desigualdad) y  $h_j(\vec{x}) = 0, j = \{1, 2, \dots, s\}$  (restricciones de igualdad) con  $\vec{x} \in \Omega$ . Una solución a este problema, minimiza (o maximiza) las componentes del vector  $F(\vec{x})$  donde  $\vec{x}$  es un vector  $n$ -dimensional de variables de decisión,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , de algún universo  $\Omega$ . Las restricciones  $g_i(\vec{x}) \leq 0$  y  $h_j(\vec{x}) = 0$  deben ser satisfechas al mismo tiempo que se minimiza (o maximiza)  $F(\vec{x})$ , y  $\Omega$  contiene todos los posibles  $\vec{x}$  que pueden ser usados para evaluar  $F(\vec{x})$ .

El vector de variables de decisión puede ser continuo o discreto mientras que las  $m$  funciones pueden ser lineales, no lineales, continuas o discretas. La función de evaluación  $F : \Omega \rightarrow \Lambda$  es una transformación del vector de variables de decisión  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  en un vector de respuesta  $\vec{y} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ . La Figura 1 ilustra la situación para el caso de  $n = 2, r = 0, s = 0$  y  $m = 3$ .

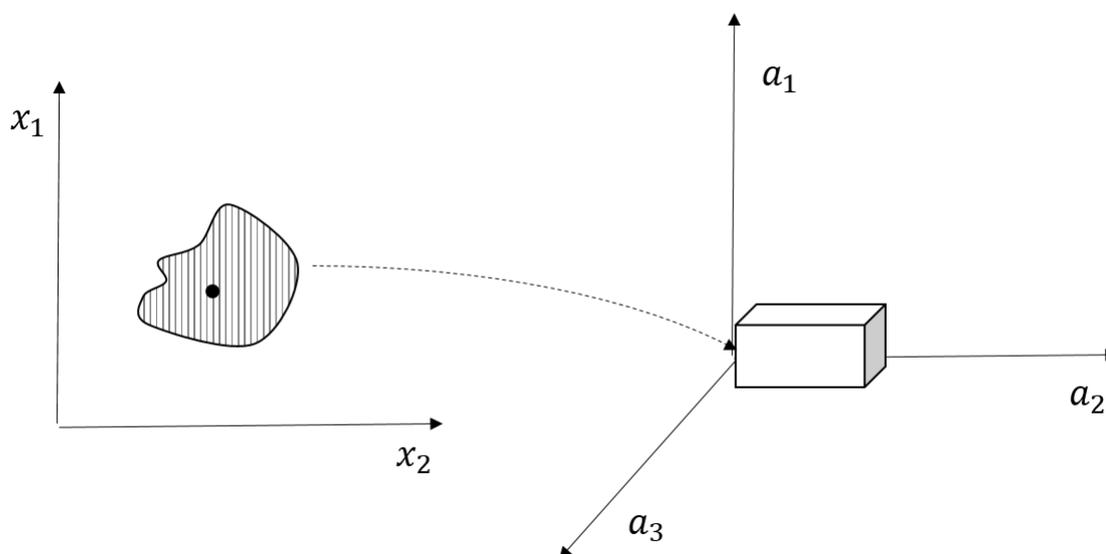


Figura 1: Ejemplo de transformación de un punto del espacio de decisiones al espacio de objetivos. Fuente: [75].

En contraste con los problemas mono-objetivo donde se busca una solución óptima, en optimización multiobjetivo se intenta producir un conjunto de soluciones posibles de calidad equivalente. En ese sentido el concepto de óptimo es relativo y es necesario redefinirlo para establecer cuales son las mejores soluciones al problema.

Al respecto, la definición más aceptada es la propuesta originalmente por Francis Ysidro Edgeworth en 1881 y generalizada posteriormente por Vilfredo Pareto en 1896, conocida comúnmente como óptimo de Pareto. En esta definición, un problema de optimización multiobjetivo consiste en encontrar el mejor compromiso (balance) entre los objetivos. Sin ningún tipo de información sobre las preferencias del tomador de decisiones y con igualdad de importancia en los objetivos, no se puede decir que una solución es mejor que otra si no la domina. A continuación, se definen formalmente algunos términos asociados, suponiendo que se trata de un problema de minimización [74]:

**Definición 3.1.2 Dominancia de Pareto**

Un vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  se dice que domina a  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ , denotado por  $\vec{u} \preceq \vec{v}$ , si y sólo si  $\vec{u}$  es parcialmente menor que  $\vec{v}$ , es decir,  $\forall i \in \{1, \dots, m\} : u_i \leq v_i \wedge \exists j \in \{1, \dots, m\} : u_j < v_j$ .

**Definición 3.1.3 Optimalidad de Pareto**

Una solución  $\vec{x}^* \in \Omega$  es un óptimo de Pareto con respecto a  $\Omega$  si y sólo si no existe  $\vec{x} \in \Omega$ , para el cual  $\vec{v} = F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$  domina a  $\vec{u} = F(\vec{x}^*) = (f_1(\vec{x}^*), \dots, f_m(\vec{x}^*))$ .

La definición 3.1.3 especifica que  $\vec{x}^*$  es un óptimo de Pareto si no existe otro vector factible  $\vec{x}$  que decremente alguna de las funciones objetivo sin causar el incremento simultáneo de otra. Gráficamente, para el caso de minimización, una solución  $\vec{x}^*$  es Pareto óptima si no existe otra solución  $\vec{x}$  que el punto  $F(\vec{x})$  se encuentre en la región dominada por  $F(\vec{x}^*)$ , es decir la caja definida por  $F(\vec{x})$  con su proyección en los ejes y el origen como se muestra en la Figura 2.

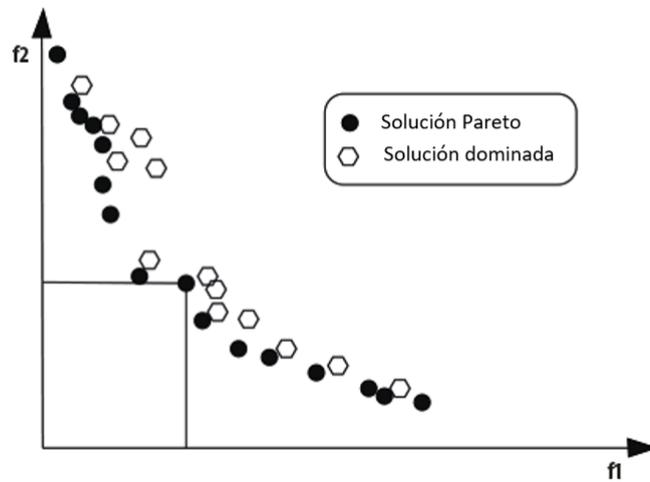


Figura 2: Soluciones no dominadas (Pareto) en el espacio de los objetivos. Fuente: [74].

**Definición 3.1.4** Conjunto de Óptimos de Pareto

Para un problema multiobjetivo dado  $F(\vec{x})$ , el conjunto de óptimos de Pareto, denotado por  $P^*$  o  $P$  verdadero está definido como:

$$P^* := \{\vec{x} \in \Omega \mid \nexists \vec{x}' \in \Omega : F(\vec{x}') \prec F(\vec{x})\}. \quad (13)$$

**Definición 3.1.5** Frente de Pareto

Para un problema multiobjetivo dado  $F(\vec{x})$  y un conjunto de óptimos de Pareto  $P^*$ , el frente de Pareto ( $PF^*$ ) está definido como:

$$PF^* := \{\vec{u} = F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \mid \vec{x} \in P^*\} \quad (14)$$

Las soluciones óptimas de Pareto son aquellas pertenecientes al espacio de decisión, cuyos componentes de los vectores objetivo no pueden ser mejorados simultáneamente. Los vectores objetivo de las soluciones óptimas de Pareto se denominan vectores (o soluciones) no dominados y conforman, en conjunto, el frente de Pareto ( $PF^*$ ).

Cuando se trabaja con problemas multiobjetivo, generalmente se grafican los Frentes de Pareto (vectores no dominados) generados por cada algoritmo para determinar si se ha resuelto adecuadamente. También se encuentran una serie de métricas propuestas en la literatura para comparar algoritmos multiobjetivos aplicados a un problema específico, las cuales se refieren con mayor detalle en el Capítulo 5.

Con base en estos conceptos y definiciones, se puede afirmar que, en general, el desarrollo de un algoritmo heurístico multiobjetivo tiene como principales metas [75]:

- Preservar los puntos no dominados en el espacio de los objetivos y su vector solución asociado en el espacio de decisiones.
- Convergencia hacia el frente de Pareto en el espacio de los objetivos.
- Mantener la diversidad de los puntos del frente de Pareto.
- Proveer al tomador de decisiones cantidad suficiente de puntos para seleccionar la solución que corresponda a sus preferencias.

### 3.2 TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN

El principal propósito al resolver un problema multiobjetivo es ayudar al tomador de decisiones a encontrar una solución Pareto óptima que confronte sus preferencias. La solución de un problema de optimización multiobjetivo consta de dos etapas bien definidas: la optimización de varias funciones objetivo y el proceso de decidir cuál es el equilibrio (de objetivos) adecuado, desde el punto de vista del tomador de decisiones. Un aspecto fundamental es la interacción entre la optimización de las funciones y el tomador de decisiones [75, 76]. En [77] Cohon y Marks propusieron la siguiente clasificación que toma en cuenta las dos etapas del proceso:

- Técnicas con articulación de preferencias *a priori* (métodos no interactivos): El usuario indica la importancia relativa de las funciones objetivo o metas deseadas antes de efectuar la búsqueda. La mayoría de estos métodos incorpora una serie de parámetros, que pueden ser coeficientes, exponentes, límites en las restricciones, los cuales son configurados para reflejar las preferencias del tomador de decisiones.
- Técnicas de articulación de preferencias *a posteriori*: Se realiza la búsqueda y el tomador de decisiones selecciona posteriormente. En algunos casos, es difícil establecer de manera explícita y previa una aproximación de las preferencias, en este caso puede ser efectivo mostrar un conjunto de soluciones para que el usuario elija la más adecuada a sus necesidades. En estas técnicas, el tomador de decisiones no necesita información previa a la búsqueda de soluciones óptimas. Algunos de los métodos incluidos en esta categoría son los más antiguos en el ámbito de la optimización.
- Técnicas con articulación progresiva de preferencias: Existe interacción con el usuario durante la ejecución de un algoritmo de optimización. Tal como se plantea en [77], estas técnicas operan siguiendo tres etapas: 1) encontrar una solución no dominada, 2) dependiendo de los requerimientos del usuario, modificar los objetivos con base en la solución encontrada en la etapa previa y, 3) repetir los pasos anteriores hasta que el tomador de decisiones apruebe la solución. Entre las técnicas más representativas de esta categoría se encuentra el método de equilibrio probabilístico [78], el método de paso (STEP) [79] y el método de resolución secuencial [80].

### 3.3 METAHEURÍSTICAS MULTI OBJETIVO

La complejidad de los problemas multiobjetivo, el número creciente de criterios a optimizar, su gran espacio de búsqueda y la necesidad de encontrar conjuntos de soluciones de calidad en tiempos razonables, han motivado el desarrollo de una diversidad de metaheurísticas para encontrar aproximaciones eficientes.

En comparación con la resolución de un problema mono-objetivo, la dificultad de resolver uno multiobjetivo radica en [81]:

- El orden de relación entre soluciones es parcial y la elección final depende del tomador de decisiones.
- El número de soluciones óptimas de Pareto se incrementa conforme el tamaño del problema y principalmente respecto al número de objetivos considerados. En general, el número de soluciones no dominadas puede ser exponencial con respecto al tamaño del problema [82].

- La estructura del frente de Pareto y sus propiedades como la continuidad, convexidad son específicas para cada problema.

Con el fin de abordar estos retos, se ha buscado extender las heurísticas mono-objetivo para abordar múltiples objetivos. Entre los principales conceptos de diseño que se utilizan para el desarrollo de estas heurísticas se han detectado tres elementos de búsqueda esenciales [81]:

- Asignación de aptitud: La función principal de este componente es guiar la búsqueda del algoritmo hacia mejores soluciones Pareto óptimas en términos de convergencia. Asigna un valor escalar de aptitud a una función objetivo vectorial.
- Preservación de la diversidad: El énfasis en este elemento consiste en generar un conjunto diverso en el espacio de los objetivos y/o en el espacio de decisión.
- Elitismo: La preservación de soluciones élite o soluciones Pareto óptimas encontradas durante el proceso de búsqueda permiten mejorar el desempeño.

En los siguientes apartados se puntualizan los aspectos representativos de los conceptos anteriores con el fin de delinear los elementos clave de una metaheurística multi-objetivo.

### 3.3.1 Asignación de aptitud

Para una solución dada, un procedimiento de asignación de aptitud o *fitness* consiste en atribuir un valor denominado aptitud a un vector para medir la calidad de una solución. De acuerdo con las estrategias de asignación de aptitud, las metaheurísticas se pueden clasificar en 3 categorías principales [83]:

- Enfoques escalares: Se basan en la transformación de un problema multiobjetivo en un problema mono-objetivo. En esta categoría se incluyen los métodos de agregación que combinan varios objetivos  $f_i$  en una única función  $F$ .
- Enfoques basados en criterio: La búsqueda se realiza al manejar los diferentes objetivos inconmensurables de manera separada.
- Enfoques con base en dominancia: Se utiliza el concepto de dominancia y del óptimo de Pareto para guiar el proceso de búsqueda. Las funciones objetivo se transforman en un valor a través de la relación de dominancia.

En las secciones subsecuentes, se explican las consideraciones principales de estos enfoques.

#### 3.3.1.1 Enfoque escalares

En esta estrategia los problemas multiobjetivo se transforman en conjuntos de problemas mono-objetivo. Algunos casos representativos son: la combinación lineal de pesos, método del criterio global, programación por metas y restricciones épsilon.

##### *Combinación lineal de pesos*

Es uno de los enfoques más comunes en la optimización. Consiste en la solución de múltiples problemas de manera secuencial con una variación consistente y sistemática de parámetros. El principio general de este método es asociar un peso a cada función objetivo y minimizar la suma ponderada de los objetivos:

$$U = \min \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \quad (15)$$

Donde:

$m$  = Número de objetivos

$w_i$  = Peso que indica la importancia relativa del  $i$ -ésimo objetivo

$f_i(x)$  = Función del  $i$ -ésimo objetivo

En [84] Zadeh mostró que las soluciones de un problema multiobjetivo podían ser encontradas resolviendo un problema de optimización escalar, en el cual la función objetivo no es más que la suma de las funciones del problema original multiplicadas por un peso. En términos generales, los coeficientes de peso se pueden normalizar para reflejar proporcionalmente la importancia relativa de los objetivos. Los coeficientes actúan como factores que, al ir variando, localizan diferentes puntos del frente de Pareto.

#### *Método del criterio global*

El objetivo de este método es la minimización de una función que define un criterio global que mide cuan cerca se encuentra la solución de un punto ideal. Se trata de una técnica de escalarización donde todas las funciones objetivo son combinadas y a través de una métrica se expresa la cercanía al vector ideal. Se han propuesto diversos indicadores para este método, yendo desde la métrica  $L_p$  [85] hasta variantes que penalizan las desviaciones con respecto a un objetivo que se usa como referencia [86].

#### *Programación por Metas (Goal Programming)*

Este es uno de los primeros métodos escalares diseñados, aplicados específicamente en el campo de la industria por Charnes y Cooper [87] e Iriji [88] para modelos lineales. En esta técnica, el tomador de decisiones asigna metas que cada función objetivo debería cumplir. Esos valores, luego, son incorporados como restricciones adicionales, y el problema se transforma en uno de minimización de las desviaciones de los valores absolutos de cada función objetivo con respecto a su meta correspondiente. La forma más simple de este método se puede formular como sigue [89]:

$$\min \sum_{i=1}^m |f_i(x) - T_i|, \text{ sujeto a } x \in \Omega \quad (16)$$

Donde  $T_i$  señala la meta impuesta por el tomador de decisiones para la  $i$ -ésima función objetivo  $f_i(x)$  y  $\Omega$  es la región factible.

#### *Restricciones epsilon*

Este método minimiza una función objetivo a la vez, considerando las demás como restricciones limitadas por algún nivel  $\epsilon_l$  [90]. La selección de la primera función a optimizar y el valor de  $\epsilon_l$  deben ser determinados cuidadosamente, ya que de ello depende el éxito de la técnica. A través de la variación repetida de los niveles, se van obteniendo las soluciones al problema. El método es también conocido como *Trade-Off*, debido a que intenta equilibrar el valor de una función con respecto a otra.

Es importante notar que los enfoques escalares descritos son estrategias populares para transformar un problema multiobjetivo a uno o varios mono-objetivo por su sencillez y facilidad de implementación. Sin embargo, su uso presenta algunas limitaciones:

- En general, se requiere un conocimiento *a priori* del problema a resolver, el cual no siempre está disponible.

- Debido a que se enfocan en encontrar un punto del frente de Pareto a la vez, se observa que en la práctica hay una pérdida de diversidad en las soluciones.
- Su desempeño depende en principalmente del espacio de búsqueda y se ha encontrado que tienen dificultades para trabajar sobre frentes de Pareto con discontinuidades y regiones no convexas.
- Son sensibles al conjunto de pesos seleccionados, las restricciones y los puntos de referencia. Los resultados obtenidos dependen en gran medida de la configuración de estos parámetros
- Para encontrar diversos puntos en el frente de Pareto es necesario realizar diferentes ejecuciones lo que implica un costo computacional asociado mayor.

### 3.3.1.2 Estrategias basadas en criterio

En este tipo de estrategias, se resuelve el problema de optimización para cada objetivo de manera independiente, y posteriormente se integran las soluciones obtenidas para generar una aproximación al frente de Pareto. Los objetivos se pueden procesar de forma secuencial o paralela.

#### *Procesamiento secuencial*

El principal método secuencial para procesar los objetivos por criterio es el método lexicográfico [91]. En este enfoque, el tomador de decisiones debe jerarquizar de menor a mayor importancia las funciones objetivo. Luego, se obtiene la solución óptima al problema minimizando cada función, siguiendo el orden establecido. En cada etapa de optimización se obtiene un vector solución, el cual es incorporado a la siguiente función objetivo como una restricción de igualdad que se debe satisfacer. Este proceso continúa hasta que se determina una solución o hasta que se hayan considerado todas las funciones objetivo.

#### *Procesamiento paralelo*

En este enfoque los objetivos se procesan a la par y de manera autónoma. Los ejemplos de procesamiento paralelo más relevantes de la literatura se observan en modelos basados en población como los algoritmos evolutivos, los métodos de optimización por enjambre de partículas y colonia de hormigas. En estas estrategias se divide la población, entre tantas subpoblaciones como objetivos tenga el problema, cada una resuelve por separado una función objetivo y posteriormente intercambian información para guiar el proceso de búsqueda. El primer algoritmo genético documentado que utiliza un mecanismo de procesamiento por criterios es VEGA propuesto por Schaffer [92], y de ahí se han derivado varias propuestas en otras metaheurísticas como optimización por cúmulo de partículas [93, 94] y colonia de hormigas [95].

### 3.3.1.3 Estrategias con base en dominancia

Estas técnicas utilizan el concepto de dominancia para establecer el desempeño de las soluciones durante el proceso de búsqueda. Esta idea la introdujo por primera vez Goldberg [96] y a diferencia de estrategias anteriores no es necesaria la transformación del problema multiobjetivo en una serie de problemas mono-objetivo. Adicionalmente, se observa que las metaheurísticas que utilizan este mecanismo suelen ser menos susceptibles a la forma de los frentes de Pareto con respecto a discontinuidades y regiones

convexas. Debido a estas propiedades, a partir de la década de los noventa, se observa creciente interés en el desarrollo de algoritmos con base en el óptimo de Pareto. La mayoría de las propuestas corresponden a enfoques evolutivos. Entre los más populares se encuentran NSGA II [97], PAES [98] y SPEA2 [99].

Para determinar la aptitud de una solución se utilizan métodos de categorización o *ranking* para establecer un orden relativo entre las soluciones que depende del concepto de dominancia y en consecuencia del óptimo de Pareto. Los métodos de categorización más populares empleados en algoritmos poblacionales son:

- Grado de dominancia: El orden se establece conforme al número de soluciones de la población que dominan a cada solución [100]. Entre menor sea el grado mayor la aptitud.
- Profundidad de dominación: La población de soluciones se descompone en varios frentes a fin de que cada individuo tenga un rango equivalente a su nivel de no dominancia. Los frentes o capas se agrupan de la siguiente manera. Las soluciones no dominadas de la población se definen con un rango nivel 1 y forman el primer frente  $E_1$ ; las que pertenecen al segundo frente  $E_2$  con un rango nivel 2 son las no dominadas en ausencia de los del frente anterior, y así sucesivamente. En general, una solución recibe un rango  $k$  si únicamente es dominado por los individuos pertenecientes a rangos superiores  $E_1 \cup E_2 \cup \dots, E_{k-1}$ . En este sentido la profundidad de dominación de una solución corresponde al rango del frente al que pertenece. Esta estrategia se utiliza en el NSGA-II [97] y se ha retomado en diversos algoritmos. Los mejores individuos son aquellos que tienen rangos menores.
- Conteo de dominancia: El conteo de dominancia se establece conforme al número de soluciones dentro de una población que son dominadas por una solución específica. Esta estrategia se utiliza en conjunto con otras, principalmente con la de orden de dominancia.

Un aspecto a destacar en el proceso de asignación de aptitud a través del óptimo de Pareto, a diferencia de los métodos escalares, es el hecho de que evalúan la calidad de una solución en relación a una población y no existen aptitudes absolutas. De igual forma, debido a que se le asigna un único valor o rango a cada solución se pueden retomar algunos principios de selección de optimización mono-objetivo.

### 3.3.2 Preservación de la diversidad

Las estrategias de asignación de aptitud buscan promover la convergencia al frente de Pareto, sin embargo, por sí mismas no pueden garantizar que la aproximación obtenida sea de calidad en términos de diversidad en el espacio de decisión y/o de los objetivos. Por lo tanto, la inclusión de estrategias de preservación de la diversidad es necesaria para prevenir un estancamiento en la variabilidad de la población. En general, los métodos de diversificación buscan promover una distribución uniforme de las soluciones en el espacio de los objetivos. Una de las clasificaciones más utilizadas para los métodos de preservación de la diversidad es la propuesta por Zitzler en [83]:

#### *Métodos de ventana o kernel*

Son métodos de *clustering* aglomerativos basados en densidad. Definen el entorno local de una solución mediante una función denominada Kernel  $K$ . Dicha función em-

plea como argumento la distancia entre soluciones. La suma de todos los valores de la función Kernel para el entorno de una solución representa un estimado de su densidad. Una estrategia popular de tipo kernel para mantener la diversidad es la aptitud compartida o *fitness sharing* [101] utilizada por algoritmos como MOGA [100], NSGA [102] y NPGA [103].

#### *Vecino más cercano*

Esta técnica de preservación de la diversidad estima la densidad del vecindario de una solución con la distancia de sus vecinos más cercanos. Ejemplos de este tipo de método son los utilizados en el algoritmo SPEA2 [99], donde se emplea un estimador con base en el inverso de esta distancia y crowding distance, en NSGA-II [97].

#### *Histograma*

La preservación de la diversidad mediante el método del histograma consiste en fraccionar el espacio de búsqueda en una cuadrícula, donde cada celda define un vecindario. La densidad alrededor de una solución se estima por el número de soluciones dentro de la misma sección de la cuadrícula. El tamaño de la cuadrícula se puede establecer al inicio del algoritmo o adaptar conforme cambia la población de interés. Un algoritmo que utiliza este mecanismo para preservar la diversidad es PAES [98].

### 3.3.3 *Elitismo*

El elitismo consiste en guardar las mejores soluciones generadas durante la búsqueda. Para almacenar estas soluciones se utiliza una población secundaria denominada archivo, en la cual se conservan las soluciones de alta calidad (soluciones Pareto-óptimas). El archivo puede ser activo o pasivo dependiendo de su rol en el proceso de búsqueda. En el primer tipo se considera como una población externa ajena a la búsqueda cuya función es prevenir la pérdida de las mejores soluciones. En esta modalidad el archivo pretende que el algoritmo tenga un desempeño monótono no decreciente en términos del frente de Pareto aproximado. El uso de un archivo activo, por otra parte, involucra que forma parte del proceso de búsqueda, se utiliza para generar nuevas soluciones y permite lograr una convergencia más robusta y rápida al frente de Pareto [104], no obstante, un elitismo agresivo puede provocar convergencia prematura.

El archivo se debe actualizar durante la búsqueda para incorporar las nuevas soluciones encontradas, las estrategias para realizar este proceso de actualización consideran los siguientes aspectos:

- **Tamaño:** Debido a que en la mayoría de los problemas multiobjetivo el número de soluciones en el conjunto de Pareto es muy grande, el archivo debe ser acotado dependiendo de las preferencias del tomador de decisiones. Cuando el tamaño del archivo delimitado se supera, es necesario considerar criterios de convergencia y dispersión para determinar cuáles soluciones ingresan o se eliminan del archivo.
- **Criterios de convergencia:** Los diferentes tipos de asignación de aptitud anteriormente descritos pueden ser utilizados para actualizar el archivo. El principio más frecuente es el de dominancia, es decir, únicamente soluciones no dominadas

conforman el archivo. No obstante, si el número de soluciones no dominadas es mayor al tamaño del archivo se debe utilizar otro criterio como la diversidad.

- Criterios de diversidad: Con el fin de mantener la diversidad del frente de soluciones no dominadas generado y decidir qué áreas deben ser exploradas en mayor o menor medida se puede utilizar cualquier enfoque de preservación de la diversidad para actualizar el archivo.

Otros criterios como la “edad” representada por el número de iteraciones que permanece una solución en el archivo [105] puede ser utilizada. En la mayoría de los algoritmos una combinación de criterios de convergencia y diversidad son utilizados para definir la actualización del archivo.

#### 3.3.4 Algoritmos recientes

Actualmente, el uso de metaheurísticas que inspiran sus estrategias en la naturaleza, la interacción de los seres vivos, los procesos físicos y mecánicos para resolver problemas de optimización, es un área de investigación activa que ha mostrado buenos resultados en distintos problemas. En este tipo de técnicas se incluyen los algoritmos genéticos, los enjambres de partículas, recocido simulado, entre otros, los cuales debido a su efectividad, han sido modificados para aplicarlos al ámbito multiobjetivo. La primera implementación de un algoritmo multiobjetivo fue presentada por David Schaffer [92] en 1984 mediante un algoritmo genético: el denominado Vector Evaluation Genetic Algorithm (VEGA). Tanto los algoritmos evolutivos, en sus comienzos, como otros algoritmos que han emergido posteriormente, han demostrado ser técnicas adecuadas para resolver problemas de optimización multiobjetivo por las siguientes razones [75]:

- Este tipo de algoritmos puede lidiar simultáneamente con un conjunto de individuos (población), lo que permite encontrar varios puntos no dominados en una ejecución del algoritmo, en lugar de tener que efectuar varias corridas, como es el caso de las técnicas de programación matemática.
- Son menos susceptibles a la forma o continuidad del frente de Pareto, a diferencia de las técnicas de programación matemática.

### 3.4 REVISIÓN DE LA LITERATURA MULTIOBJETIVO PARA EL DISEÑO DE ZONAS

A pesar de la esencia multiobjetivo del problema de diseño de zonas, la mayoría de las aplicaciones lo han afrontado desde una visión mono-objetivo. En general, la principal contribución de estos planteamientos fue evaluar el desempeño de metaheurísticas como búsqueda tabú, recocido simulado y algoritmos genéticos, las cuales ya habían mostrado éxito en la solución de otros problemas difíciles de resolver, para el caso específico de la distritación [32]. En este apartado se revisan los trabajos en la literatura que abordan el diseño de zonas desde un enfoque multiobjetivo.

En el contexto de la distritación política, Guo et al. [61] son los primeros en proponer una aplicación multiobjetivo denominada MOZART que permite agregar y evaluar zonas con base en distintos criterios, a través de la integración de un motor de partición y un Sistema de Información Geográfico (SIG). La herramienta se implementa en un territorio de Australia con 577 UGB y 20 zonas, tomando en cuenta la compacidad y el equilibrio poblacional. Posteriormente, Wei y Chai [106] presentan un enfoque metaheurístico híbrido para un modelo espacial embebido en un sistema de información geográfico, el cual combina búsqueda tabú y búsqueda dispersa, considerando como

objetivos el equilibrio poblacional, compacidad y homogeneidad socio-económica. Los autores muestran resultados en una instancia de 55 UGB y 3 distritos. Este método, de igual manera, aproxima el frente de Pareto a través de una suma ponderada. Ricca y Simeone [66] resuelven el problema de distritación política con criterios como conectividad, equilibrio poblacional, compacidad, conformidad con límites administrativos y comparan el comportamiento de 4 heurísticas locales: búsqueda tabú, gradiente, recocido simulado y *old bachelor acceptance*. El modelo multiobjetivo se transforma en mono-objetivo mediante una combinación convexa de tres funciones objetivo. Finalmente, se puede encontrar el recocido simulado multiobjetivo de Rincón-García et al. [68] donde un vector de pesos se asigna a las soluciones no dominadas y la aceptación de nuevas soluciones se basa en el criterio de Metrópolis. Los criterios considerados son el equilibrio poblacional, compacidad geométrica y conexidad.

En otros ámbitos del diseño de zonas se encuentran algunos casos de aplicaciones multiobjetivo. Para zonas escolares, Scott et al. [107] examinan un caso de estudio de la ciudad de Connecticut, Estados Unidos con un modelo de programación lineal mixta basado en metas, donde se busca minimizar las disparidades en la matrícula de grupos minoritarios, la proporción de estudiantes, el coeficiente profesor-estudiante y la inscripción general. Para el diseño de servicios públicos Ricca [108] propone una distritación para la mejora del transporte público mediante la heurística *old bachelor acceptance* con combinación lineal de pesos. Tavares-Pereira et al. [51] proponen un esquema para un problema de servicios públicos mediante un algoritmo evolutivo con búsqueda local en la región de transporte de Paris y Lei et al. resuelven mediante un algoritmo co-evolutivo denominado PICEA-g un problema vinculado con la creación de rutas; en el caso del diseño de territorios comerciales se encuentran los trabajos de Salazar-Aguilar [109, 110, 111], donde se introduce un modelo bi-objetivo con número equilibrado de consumidores y compacidad geométrica, con los métodos restricciones épsilon, una estrategia tipo GRASP y una versión modificada de búsqueda dispersa con GRASP, respectivamente. En el caso de zonas de energía, destaca la propuesta de Silva de Assis et al. [112] de una suma ponderada con variación de parámetros y funciones sigmoideas para generar distritos para la lectura de medidores buscando compacidad y homogeneidad de los distritos. Finalmente, para distritos de policía, Zhang y Brown [113] proponen un sistema que considera el tiempo promedio de respuesta y equilibrio de carga de trabajo mediante búsquedas locales y la integración con un sistema de información geográfico.

Las principales contribuciones al contexto multiobjetivo de la distritación se resumen en la Tabla 3 de manera cronológica por autor. En la tabla se observa que la mayoría de las propuestas usan metaheurísticas y combinan los distintos criterios como una suma ponderada. Los objetivos más comunes son la compacidad, conexidad y equilibrio con respecto a una métrica. Los métodos tipo GRASP y de búsqueda local son los más empleados en la literatura.

Es importante mencionar que el estudio de la distritación política y sus implicaciones desde un enfoque multiobjetivo es limitado, por lo que el análisis técnico y teórico en esta vertiente es un área de oportunidad interesante. La inclusión de métodos de búsqueda con base en el óptimo de Pareto y el uso de algoritmos inspirados en la naturaleza y sistemas físicos que han mostrado obtener soluciones no dominadas de calidad en términos de convergencia y dispersión en otros contextos, no han sido explorados lo suficiente en el diseño de zonas.

Tabla 3: Enfoques multiobjetivo en el diseño de zonas. Fuente: Elaboración propia.

Año	Autor	Tipo de aplicación	Algoritmo	Criterios considerados
1996	Scott et al. [107]	Zonas escolares	Programación lineal mixta basado en metas	Disparidades en la matrícula de grupos minoritarios, proporción de estudiantes-maestros, inscripción general.
2000	Guo et-al. [61]	Distritación política	MOZART (Integración de un motor de partición con un SIG)	Conexidad, equilibrio, interacción y proximidad de las zonas.
2004	Wei y Chai [106]	Distritación política	Búsqueda tabú y búsqueda dispersa con suma ponderada.	Equilibrio poblacional, compacidad y homogeneidad socio-económica
2004	Ricca [108]	Servicios de transporte	Old bachelor acceptance con combinación lineal de pesos	Demanda de viajes y costos.
2007	Tavares Pereira et al. [51]	Servicios de transporte	Algoritmo evolutivo con búsqueda local	Ubicación de la zona con respecto a la configuración global de la red, estructura de movilidad y cumplimiento con centros administrativos y geográficos.
2008	Ricca y Simeone [66]	Distritación política	Búsqueda local mediante combinación convexa de funciones	Conectividad, equilibrio poblacional, compacidad y conformidad con límites administrativos
2011	Salazar-Aguilar et al. [109]	Zonas de ventas	Versión mejorada $\epsilon$ -constraint	Compacidad y equilibrio de clientes.
2012	Salazar-Aguilar et al. [111]	Zonas de ventas	GRASP	Compacidad y equilibrio de clientes.
2013	Salazar-Aguilar et al. [110]	Zonas de ventas	Búsqueda dispersa multiobjetivo	Compacidad y equilibrio de clientes.
2013	Zhang y Brown [113]	Zonas de policía	Búsqueda local e integración con un SIG	Tiempo promedio de respuesta y equilibrio de carga de trabajo
2013	Rincón-García et al. [68]	Distritación política	Recocido simulado con función objetivo de suma ponderada	Compacidad geométrica y equilibrio poblacional
2014	Silva-de-Assis et al. [112]	Zonas de energía	GRASP con suma ponderada escalar	Compacidad y homogeneidad de los distritos
2016	Lei et al. [3]	Servicios de transporte	Co-evolutivo PICEA-g	Número de distritos, compacidad, disimilitud de los distritos y retorno promedio por vehículo
2017	Vanneschi et al. [114]	Distritación política	Algoritmo genético con búsqueda de vecindad variable	Compacidad geométrica y equilibrio poblacional

En este capítulo se desarrolla el algoritmo multiobjetivo propuesto y se presenta el modelo utilizado para la generación de zonas electorales no dominadas con equilibrio poblacional, compactas y conexas. Asimismo, se explican las consideraciones de diseño y metodológicas relevantes. En primera instancia se define el planteamiento del problema, posteriormente se describe el modelo y sus componentes y finalmente se plantea la heurística respectiva.

#### 4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La distritación política puede ser expresada como un problema de optimización combinatoria multiobjetivo con criterios y restricciones que buscan promover elecciones justas. En general, para plantearlo se define  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , como un conjunto de  $n$  áreas iniciales que se deben agrupar en  $k$  distritos o zonas. Cada unidad tiene asociados atributos como son el número de habitantes, área, perímetro, entre otros. Asimismo, se considera a  $Z_i$  como el conjunto de todas las UGB que pertenecen a la  $i$ -ésima zona. De esta forma, un plan de zonificación puede definirse como  $S = \{Z_1, \dots, Z_k\}$ , sujeto a las siguientes restricciones:

$$Z_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (17)$$

$$Z_i \cap Z_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad (18)$$

$$\bigcup_{i=1}^k Z_i = X, \quad (19)$$

La restricción (17) implica que cada distrito debe ser no vacío, es decir que cada distrito debe contener al menos una UGB. La restricción (18) garantiza que cada UGB sea asignada a una zona de manera exclusiva y la restricción (19) implica que un plan de distritación debe ser completo en el sentido de que todas las UGB son asignadas a un distrito.

#### 4.2 MODELO

En este apartado se plantea el modelo de optimización multiobjetivo utilizado para generar un conjunto de planes de distritación eficientes. En primera instancia se explican las funciones objetivo y las restricciones para, posteriormente definir la estructura del modelo.

En este trabajo se consideraron tres atributos fundamentales de un proceso de distritación: equilibrio poblacional, compacidad y conectividad. De las características señaladas, las dos primeras se optimizan a través de las funciones objetivo y la última se considera como parte de las restricciones.

### 4.2.1 Equilibrio poblacional

Este objetivo consiste en diseñar zonas con aproximadamente el mismo número de habitantes, para garantizar la igualdad de representación política, siguiendo el principio “un hombre un voto”. La definición utilizada para medir el equilibrio poblacional, es la establecida por el INE en el proceso de distritación de 2017:

$$g_1(Z_i) = \left( \frac{1 - \left( \frac{P_i}{P_{med}} \right)}{d_a} \right)^2 \quad (20)$$

Donde:

$Z_i$  = es la  $i$ -ésima zona de un plan de distritación

$P_i$  = Población de la zona  $i$

$d_a$  = desviación poblacional máxima aceptable por entidad

$P_{med}$  = Poblacion media estatal dada por:

$$P_m = \frac{P_e}{k} \quad (21)$$

Donde:

$P_e$  = Población estatal.

$k$  = Número de distritos

La Ecuación (20) mide la cantidad de desviación poblacional a nivel distrito. Se observa que entre menor sea el valor de  $g_1$  mejor su equilibrio poblacional. El caso ideal ocurre cuando la población de un distrito es igual a la media estatal, en este caso el costo asociado es igual a cero. Por otra parte, un valor mayor a 1 implica que el distrito ha excedido el porcentaje de desviación poblacional permitida,  $d_a$ . El porcentaje establecido por el INE para este parámetro es de 15 % con respecto a la población meta para cada entidad.

### 4.2.2 Compacidad

La segunda función de evaluación, promueve la creación de distritos con formas regulares como mecanismo para prevenir la manipulación de las fronteras electorales. Como se discutió en el Capítulo 2, a pesar de que la compacidad se considera elemento esencial, no se encuentra consenso en su definición por lo que se han establecido distintas medidas para calcularla como se observa en [23, 26, 28]. Para tener un punto de comparación adecuado, se utilizó la medida propuesta por el INE, la cual compara el perímetro de cada distrito con aquel de un cuadrado que tiene la misma área:

$$g_2(Z_i) = \frac{PC_{Z_i}}{4\sqrt{AC_{Z_i}}} - 1 \quad (22)$$

Donde:

$PC_{Z_i}$  = El perímetro de la zona  $Z_i$

$AC_{Z_i}$  = Es el área de la zona  $Z_i$ .

Se observa en la Ecuación (22), que los distritos con formas regulares tendrán un valor cercano a 0, el caso ideal ocurre cuando el distrito es un cuadrado.

### 4.2.3 Conectividad

La conectividad es una restricción importante, que consiste en generar distritos conectados geográficamente, con el fin de evitar la fragmentación y viabilidad de una zona. Dadas dos UGB de una zona, debe existir una trayectoria formada con UGB de la misma zona que las une.

Para garantizar la conectividad, se utiliza el conjunto de ecuaciones y desigualdades lineales propuestas por Shirabe [31] que establecen una analogía entre la conectividad de una zona y el envío de unidades de flujo desde múltiples fuentes hasta un vertedero en una red de abastecimiento. En este planteamiento, cada unidad geográfica representa un vértice, y la colindancia entre dos unidades geográficas se simboliza mediante una arista. De igual manera, se asume que uno de los vértices funciona como vertedero, mientras el resto son fuentes que envían una unidad de flujo. Si el abastecimiento enviado desde cada fuente es recibido en el vértice que funge como vertedero sin salir de la red, entonces se puede concluir que la zona es conexa.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{ijr} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jir} \geq x_{ir} - Mw_{ir} \quad \forall i \in I \quad \forall r \in R \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ir} = 1 \quad \forall r \in R \quad (24)$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jir} \leq (M-1)x_{ir} \quad \forall i \in I \quad \forall r \in R \quad (25)$$

$$x_{ir} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall r \in R \quad (26)$$

$$w_{ir} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad \forall r \in R \quad (27)$$

$$y_{ijr} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (28)$$

Donde:

$I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $n$  es el número de UGB consideradas en el problema

$R = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ,  $k$  es el número de zonas que se deben generar

$$x(i, r) \begin{cases} 1, & \text{si la UGB } i \text{ pertenece a la zona } r \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I \quad r \in R$$

$A = \{(i, j) : \text{Las UGB } i, j \text{ son contiguas}\}$

$$w(i, r) \begin{cases} 1, & \text{si la UGB } i \text{ de la zona } r \text{ es un vertedero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I \quad r \in R$$

$y_{ijr}$  = variable continua no negativa que representa la cantidad de flujo desde la UGB  $i$  hasta la UGB  $j$  en la zona  $r$ .

$M$  = un número mayor que la cantidad total de UGB's en  $X$

La restricción (23) denota el flujo en cada vértice. Del lado izquierdo de la desigualdad, se representa el flujo de entrada y salida en el vértice  $i$ . Si el vértice  $i$  es parte de la zona  $r$  pero no es un vertedero, entonces  $x_{ir} = 1$ ,  $w_{ir} = 0$ , y por lo tanto el flujo deberá ser mayor o igual a 1. Por otra parte, si el vértice  $i$  es parte de la zona  $r$  y es un vertedero, entonces  $x_{ir} = 0$ ,  $w_{ir} = 1$ , y por lo tanto se puede tener una demanda (flujo negativo) menor o igual que  $M - 1$ . La restricción (24) implica que uno y sólo un vértice puede ser vertedero. La restricción (25) garantiza que no habrá flujo hacia ningún vértice fuera de la zona  $r$ , y que el flujo de cada vértice no será mayor que  $M - 1$ .

#### 4.2.4 Formulación

Por lo tanto, el modelo completo empleado en este trabajo para generar un conjunto de soluciones no dominadas para el problema de distribución política se puede sintetizar de la siguiente manera. Dado  $S = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ , un plan de distribución factible, sea  $f_1(S)$  y  $f_2(S)$  el costo para el equilibrio poblacional y compacidad para  $S$  respectivamente:

$$f_1(S) = \sum_{i=1}^k g_1(Z_i) \quad (29)$$

$$f_2(S) = \sum_{i=1}^k g_2(Z_i) \quad (30)$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  están dadas por las ecuaciones (20) y (22) respectivamente.

La meta principal es encontrar un conjunto de soluciones Pareto-óptimas que minimicen de manera simultánea la función vector:

$$\text{mín } F(S) = (f_1(S), f_2(S)) \quad (31)$$

sujeto a las restricciones (17)-(19) y (23)-(25). De esta forma se busca que el conjunto de soluciones tenga la menor desviación poblacional y la mayor compacidad posible. La restricción (17) garantiza que en cada zona se incluya al menos una unidad geográfica, la restricción (18) especifica que las zonas son ajenas entre sí, la restricción (19) asegura que la asignación de UGB es completa y las restricciones (23)-(25) implementan la conexidad de las zonas.

### 4.3 HEURÍSTICA PROPUESTA

En este apartado se desarrolla un algoritmo denominado AMOSA-D basado en recocido simulado para resolver el diseño de zonas electorales desde una perspectiva multiobjetivo. Se introduce en primer término una descripción del recocido simulado y sus elementos principales, posteriormente se analizan las principales propuestas que se han hecho en la literatura especializada para extender dicha técnica para manejar múltiples objetivos y, finalmente, se propone y desarrolla un algoritmo para el diseño de zonas, que utiliza como marco de referencia AMOSA (Archived Multiobjective Simulated Annealing) la versión de recocido simulado propuesta por Bandyopadhyay et al. [115].

### 4.3.1 Recocido simulado

Recocido simulado (RS) es una técnica de búsqueda estocástica presentada por Kirkpatrick et al. [116] en 1983 para la solución de problemas de optimización complejos. Desde su introducción, se ha convertido en una herramienta popular debido a su simplicidad y buenos resultados en una amplia variedad de problemas, incluida la distritación electoral [15, 16, 117]. El método toma su nombre e inspiración del proceso físico de recocido de sólidos, donde un material se reblandece a una temperatura elevada y luego se enfría de manera controlada hasta llevarlo a un estado de equilibrio térmico. El algoritmo simula este proceso con el fin de optimizar un problema específico y converger al óptimo global.

El recocido de sólidos consiste en un tratamiento térmico que se realiza sobre materiales como el vidrio y aleaciones de metales para obtener mayor resistencia y durabilidad. Los cambios de temperatura controlados tienen como principal propósito minimizar los defectos internos de la estructura del material a nivel atómico y eliminar posibles tensiones internas provocadas en etapas de pre-procesado. Inicialmente, los materiales se recuecen a alta temperatura, para posteriormente enfriarlos gradualmente. Conforme disminuye la temperatura, las partículas de los materiales se reacomodan en estados de más baja energía hasta lograr un sólido con una estructura adecuada. El proceso y velocidad de enfriamiento es crucial, ya que, por ejemplo, si es demasiado rápido no se alcanzará una configuración molecular resistente y el sólido puede ser frágil o amorfo.

El proceso físico de recocido puede modelarse exitosamente empleando técnicas de simulación, en 1953 Metrópolis et al. [118] plantearon un algoritmo que simula mediante un método Monte Carlo los cambios en una colección de átomos a una temperatura determinada y los define a través de una secuencia de estados. El algoritmo consiste en una serie de transiciones, cada una con la siguiente dinámica. A partir de un estado  $q$  del sólido, el cual tiene una energía asociada a una temperatura dada denominada  $E(q, t)$ , se genera un nuevo estado  $s$  aplicando algún mecanismo de perturbación al estado actual. La energía del siguiente estado es  $E(s, t)$ . Si la diferencia de energía,  $E(s, t) - E(q, t)$  es menor o igual a cero, el estado  $E(s, t)$  se acepta como el estado actual. Por el contrario, si la diferencia de energía, es mayor que cero, el estado  $E(s, t)$  se acepta con una probabilidad indicada por la siguiente regla de decisión conocida como el criterio de Metrópolis:

$$\exp\left(\frac{-(E(s, t) - E(q, t))}{k_b T}\right) \quad (32)$$

donde  $T$  denota la temperatura y  $k_b$  la constante de Boltzman. Si la temperatura disminuye gradualmente, los átomos del sólido pueden alcanzar un estado de configuración correcta conocido como equilibrio térmico. En el algoritmo de Metropolis esto se logra generando un gran número de transiciones en cada temperatura.

Con base en la simulación del proceso de recocido, Kirkpatrick et al. [116] proponen una heurística para resolver problemas de optimización combinatoria, mediante una analogía entre el sistema físico y un problema de optimización. Siguiendo esta analogía, cada solución del problema puede verse como un estado del sólido, el valor de la función objetivo representa su nivel de energía y se considera un parámetro que simboliza la temperatura. La heurística parte de una solución inicial,  $S_1$ , y genera en cada iteración un vecino aleatorio,  $S_2$ . Si la solución vecina mejora el valor actual de la función objetivo, se cambia la solución  $S_1$  por  $S_2$ . Por el contrario, si  $S_2$  no mejora el

valor de la función objetivo,  $S_1$  puede ser reemplazado por  $S_2$  con cierta probabilidad dada por:

$$\exp\left(\frac{-(f(S_2) - f(S_1))}{c}\right) \quad (33)$$

En la Ecuación (33) se observa el criterio de Metrópolis adaptado para un problema de optimización mono-objetivo, donde  $f(S_1)$ , representa el costo de la solución actual,  $f(S_2)$ , el costo de la solución vecina y  $c$ , es un parámetro de control que juega el papel de la temperatura. Por lo general, se establece un valor inicial  $c_0$  grande y durante el progreso del algoritmo, su valor disminuye conforme a un factor de enfriamiento,  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), y para cada valor de  $c$  se genera un número concreto de vecinos,  $n$ . El parámetro  $c$  determina en que medida pueden ser aceptadas soluciones vecinas de menor calidad que la actual. Al inicio cuando, el valor del parámetro es alto, se aceptan con mayor probabilidad soluciones de calidad inferior, lo cual busca evitar la convergencia prematura a mínimos locales y permite la exploración del espacio de búsqueda de manera más amplia. A medida que  $c$  disminuye, la probabilidad de aceptar soluciones inferiores es menor y cuando  $c$  se aproxima a cero también la probabilidad de aceptar una solución inferior se aproxima a cero. El algoritmo se detiene al llegar a un valor final  $c_f$ , y el proceso de búsqueda devuelve como salida la mejor solución encontrada al enfriarse el sistema.

#### 4.3.2 Recocido simulado multiobjetivo

La robustez, bases teóricas sólidas, mecanismos que permiten escapar de óptimos locales y propiedades de convergencia asintótica al óptimo global demostradas por recocido simulado en [119], han motivado la creación de diversas propuestas para entenderlo desde una perspectiva multiobjetivo.

En la literatura se observan algunas versiones de recocido que incorporan múltiples objetivos para resolver problemas combinatorios, éstas se pueden clasificar de acuerdo con el criterio que utilizan para aceptar nuevas soluciones [120] en : a) esquemas de suma ponderada, b) esquemas de energía compuestos y c) esquemas con base en la dominancia de Pareto.

En el esquema de suma ponderada, se obtiene un escalar a partir de la suma de los valores correspondientes a los distintos objetivos, multiplicados cada uno por un coeficiente de peso. La mayoría de las propuestas que utilizan este criterio de aceptación fueron desarrolladas en la década de los noventa y difieren principalmente en la forma de elección y adaptación de los pesos para explorar el frente de soluciones no dominadas. Entre las propuestas más relevantes de esta categoría se encuentra la de Serafini [121], Ulungu et al. [122], Czyzak y Jaszkievicz [123].

Serafini en 1992 [121] propuso uno de los trabajos pioneros de recocido simulado multiobjetivo. En su algoritmo, la trayectoria de búsqueda se dirige a través de la suma ponderada de los objetivos de una solución guía en cada iteración. Considera varias reglas para calcular la probabilidad de aceptación como la diferencia máxima entre los objetivos, su producto, y la mínima diferencia. Serafini presenta resultados para el Problema del Agente Viajero, sin embargo, posteriormente se señala en [123] que la técnica funciona para problemas relativamente pequeños y en problemas de mayor dimensión converge hacia una porción limitada del frente de Pareto.

Otra propuesta que también utiliza una suma ponderada como función de aceptación es la de Ulungu et al.[122], conocida como Umosa. En esta variante de recocido se

emplea una población de soluciones, las cuales están asociadas a un conjunto de ponderadores uniformemente distribuidos que se refinan gradualmente en cada iteración. El criterio de aceptación consiste en una suma ponderada de las diferencias de todos los objetivos y las soluciones no dominadas encontradas se almacenan en un archivo externo.

Adicionalmente, Czyzak y Jaszkievicz [123] plantean un método poblacional de recocido denominado Pareto Simulated Annealing o PSA. En este esquema, a diferencia de Ulungu et. al y sus predecesores, se propone que el conjunto de pesos asociados a cada individuo sea dinámico y se adapte conforme aumenta el número de iteraciones. La aproximación al frente de Pareto se realiza en dos fases. En la primera, las soluciones se optimizan de manera independiente y los pesos son estáticos. En la segunda, los pesos asociados a cada objetivo cambian dinámicamente en relación con la calidad de la solución y su ubicación con respecto al vecino no dominado más cercano. Durante la ejecución de la heurística, se almacenan las soluciones no dominadas encontradas en un archivo externo. En el trabajo de Czyzak y Jaszkievicz [123] se comparó el desempeño de PSA con la técnica de Serafini [121] en el problema de la mochila y los resultados obtenidos fueron superiores.

De manera alternativa a los métodos de suma ponderada se han sugerido técnicas con base en esquemas de energía compuestos, donde la aceptación de una nueva solución se calcula considerando probabilidades independientes para cada uno de los objetivos. Al respecto destacan los trabajos de Suppaitnarm et al. [124] y Nam y Park [125].

Suppaitnarm et al. [124] proponen un recocido simulado que utiliza una función compuesta. En lugar de combinar los objetivos mediante una suma, la probabilidad de aceptación se genera mediante un programa de enfriamiento que maneja múltiples temperaturas, una independiente para cada objetivo. El modelo de enfriamiento es adaptativo y la temperatura se ajusta de forma dinámica mediante reglas de decisión con base en proporciones a la desviación típica del costo de las funciones objetivo. La búsqueda se realiza conforme a una solución guía, que mediante un mecanismo de reinicio se intercambia con el fin de promover la diversidad de las soluciones.

Nam y Park [125] también formulan otro enfoque que calcula la probabilidad de aceptación considerando los valores independientes para cada objetivo. En este algoritmo se utiliza el concepto de dominancia entre la solución actual y las soluciones propuestas para determinar la dirección del proceso de búsqueda. En su propuesta analizan seis diferentes criterios para calcular la energía de una solución a partir de las probabilidades individuales asociadas a cada función objetivo. En este estudio se observó que el uso de esquemas de energía compuesta puede inducir parcialidad hacia uno o más objetivos por lo que es necesario escalarlos.

En tercera instancia, como parte de los avances más recientes, se encuentran los modelos inspirados en la dominancia de Pareto. Estos planteamientos buscan subsanar algunas limitaciones de los métodos anteriores como: la necesidad de realizar múltiples ejecuciones para obtener una aproximación del frente de Pareto, la imposibilidad de alcanzar regiones no convexas al utilizar pesos fijos y la parcialidad de las soluciones con respecto a uno o más objetivos. Entre las propuestas representativas se encuentran la de Suman [126], Smith [127] y Bandyopadhyay [115].

Suman [126] presenta PDMOSA, un algoritmo que, a diferencia de planteamientos previos, no utiliza el valor de la función objetivo como criterio de aceptación, sino una medida de aptitud con base en el óptimo de Pareto. En esta estrategia se mantiene un archivo de soluciones no dominadas, en cada iteración se genera una solución can-

didata y se calcula su energía a partir del número de soluciones del archivo que la dominan. Adicionalmente, en su diseño considera un criterio de paro automático por lo que no es necesario especificar el número de iteraciones. PDMOSA fue comparado con la versión de recocido expuesta por Suppapitnarm [124] en un conjunto de pruebas de referencia empleando las métricas de distancia generacional, spacing y cobertura de conjuntos. Los resultados obtenidos muestran mejores aproximaciones al Frente que su predecesor, sin embargo, se observa que requiere un mayor número de iteraciones.

Por su parte, Smith [127] aplica un esquema similar al de Suman para expresar la energía de una solución. En su trabajo, se explora el frente de Pareto por medio de un proceso iterativo y el uso de un archivo externo. La probabilidad de aceptación depende de una medida que considera la diferencia del número de soluciones en el archivo que dominan a la solución actual y a la candidata. La función de aceptación tiene la característica de ser invariante ante un cambio de escala de los objetivos. Smith presenta una comparación de su algoritmo contra el NSGA-II en los problemas DTLZ<sub>1</sub>, DTLZ<sub>2</sub> y DTLZ<sub>3</sub> empleando métricas de evaluación estándar. Los valores reportados indican un mejor desempeño en la mayor parte de los problemas de prueba adoptados.

El más reciente de los algoritmos que utiliza el concepto de dominancia como mecanismo de aceptación es el propuesto por Bandyopadhyay et al. [115] denominado Archived Multiobjective Simulated Annealing (AMOS). Al igual que enfoques anteriores, se utiliza un archivo externo que almacena las soluciones no dominadas encontradas en el proceso de búsqueda. Sin embargo, a diferencia de otras propuestas de esta categoría cuyo mecanismo de aceptación se realiza con base en el número de soluciones del archivo que dominan a una solución candidata, en AMOSA se introduce un nuevo concepto denominado cantidad de dominancia, el cual considera el hipervolumen entre los puntos a ser comparados. El esquema de aceptación considera de manera exhaustiva los casos en términos de dominancia que ocurren entre la solución actual, la solución de prueba y las soluciones del archivo.

De los planteamientos antes expuestos, la técnica más novedosa y que ha sido aplicada a mayor variedad de problemas multiobjetivo es la propuesta de Bandyopadhyay: AMOSA. Esta versión multiobjetivo de recocido ha sido utilizada en diferentes ámbitos como clustering semisupervisado y automático [128, 129], diseño de sistemas de manufactura celulares [131], selección de características en minería de datos [130], diseño de componentes en integración a muy gran escala (VLSI) [131] y diseño de componentes farmacológicos [132], entre otros. AMOSA también se ha comparado con otros algoritmos multiobjetivos como NSGA-II, PAES y MOSA demostrando su eficacia. Por sus buenos resultados, gran cantidad de aplicaciones y solidez teórica se utilizó el recocido simulado multiobjetivo AMOSA en la presente investigación como base de referencia para el diseño de zonas electorales. Es importante mencionar que, durante la realización del estado del arte, en la bibliografía analizada no se encontró la aplicación de un esquema similar en el diseño de zonas geográficas.

#### 4.3.3 *Recocido simulado multiobjetivo mediante archivo externo (AMOS)*

El recocido simulado multiobjetivo mediante archivo externo (AMOS, por sus siglas en inglés) incorpora una serie de conceptos para extender recocido simulado al contexto multiobjetivo, a continuación, se presentan las principales características, componentes y mecanismos de operación del algoritmo.

#### 4.3.3.1 *Archivo externo*

AMOSa incorpora el concepto de archivo externo para almacenar las soluciones no dominadas durante el proceso de búsqueda. El tamaño del archivo se encuentra acotado por dos límites: uno estricto o rígido denominado *HL* y otro suave o flexible expresado como *SL*. En el proceso de búsqueda, las soluciones no dominadas son almacenadas en el archivo hasta llegar al límite *SL*. Una vez alcanzado dicho límite, si se generan nuevas soluciones no dominadas se agregan al archivo y posteriormente se reducen a *HL* mediante un procedimiento de clustering.

#### 4.3.3.2 *Parámetros*

Existen algunos parámetros que es necesario configurar de manera previa a la ejecución del algoritmo:

- *HL*.-El tamaño del archivo con el número máximo de soluciones no dominadas requeridas por el usuario.
- *SL*.- El tamaño máximo al cual el archivo puede ser llenado antes de que se utilice un procedimiento de clustering para reducir su tamaño a *HL*.
- $T_{max}$ .- Temperatura máxima (inicial)
- $T_{min}$ .- Temperatura mínima (final)
- $\alpha$ .- Factor de enfriamiento.
- iter.- Número de iteraciones por temperatura

#### 4.3.3.3 *Probabilidad de aceptación*

La probabilidad de aceptación en AMOSa se deriva del criterio de Metrópolis expuesto en la Ecuación (33). La forma general en la que un nuevo estado *s* se acepta con respecto a un estado *q* a una temperatura *T* está dada por la siguiente ecuación:

$$p_{qs} = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(E(q,t)-E(s,t))}{T}}} \quad (34)$$

Donde  $E(s, T)$  y  $E(q, T)$  representan los valores de energía del estado *s* y *q* respectivamente. Es importante señalar que el planteamiento de la Ecuación (34) asegura que la probabilidad se encuentre entre 0 y 1. La aceptación de una solución, depende de las relaciones de dominancia entre la solución actual, la de prueba y las existentes en el archivo, así como de una nueva medida denominada cantidad de dominancia introducida por Bandyopadhyaya [115]. Esta medida se describe en la siguiente sección.

#### 4.3.3.4 *Cantidad de dominancia*

La energía de las soluciones y el mecanismo de aceptación de una solución se determina con base en un concepto denominado cantidad de dominancia. Este concepto considera el hipervolumen entre dos soluciones. Sean *a* y *b*, dos soluciones, la cantidad de dominancia  $\Delta dom(a, b)$ , se define de la siguiente manera:

$$\Delta dom(a, b) = \sum_{i=1, f_i(a) \neq f_i(b)}^m \frac{|f_i(a) - f_i(b)|}{R_i} \quad (35)$$

Donde  $f_i(a)$  y  $f_i(b)$  son los *i*-ésimos valores objetivo de las dos soluciones y  $R_i$  es el rango de la función objetivo calculado para las soluciones candidatas, *m* es el número

de objetivos. Gráficamente, la cantidad de dominancia se ilustra en la Figura 3 para el caso bi-objetivo. El área del rectángulo que enmarca las soluciones A y B representa la cantidad de dominancia.

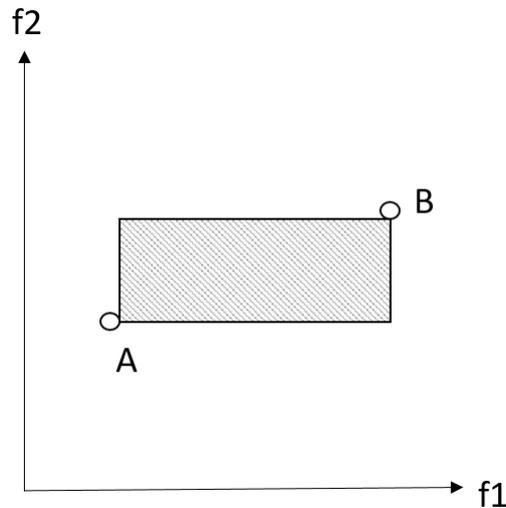


Figura 3: Cantidad total de dominación entre dos soluciones A y B representada por el área sombreada. Fuente: [115].

El algoritmo consta de tres procesos principales que establecen la dinámica de búsqueda: a) la inicialización del archivo de soluciones, b) el *clustering* del archivo y c) el proceso principal que define los pasos para explorar el espacio de búsqueda. A continuación, se explican cada uno de estos procesos.

#### 4.3.3.5 Inicialización del archivo de soluciones

El algoritmo inicia con la generación de un número  $\gamma \times SL$  ( $\gamma > 1$ ) de soluciones iniciales. Cada una es refinada mediante el algoritmo de hill-climbing por un número determinado de iteraciones aceptando una nueva solución sólo si domina a la anterior. Concluido el procedimiento, las soluciones no dominadas se almacenan en el archivo hasta un máximo de HL. En caso de que las soluciones no dominadas excedan el límite HL, se aplica un procedimiento de clustering.

#### 4.3.3.6 Clustering del archivo

El procedimiento de clustering tiene la finalidad de fomentar la diversidad en las soluciones no dominadas del archivo y restringir su número a máximo SL. En general, se puede incrementar el tamaño del archivo hasta SL (siendo  $SL > HL$ ) y posteriormente las soluciones se agrupan en HL clusters. Para el procedimiento de clustering, AMOSA utiliza un algoritmo jerárquico donde la distancia entre dos clusters corresponde a la longitud del camino más corto entre ellos, para mayores detalles revisar [115, 133].

#### 4.3.3.7 Proceso principal

El proceso de búsqueda inicia con la temperatura en  $T_{max}$ , se selecciona de manera aleatoria un punto del archivo y se establece como punto actual. El punto actual es modificado de manera aleatoria para generar una nueva solución y sus funciones objetivo

son evaluadas. Con base en el estado de dominación entre la solución actual, las soluciones del archivo y la solución nueva, así como la cantidad de dominancia generada, se decide si se acepta la nueva solución en el archivo y si se reemplaza la solución actual. Este proceso se repite un número iter de veces para cada temperatura,  $T$ . La temperatura se reduce gradualmente mediante un esquema de enfriamiento exponencial, donde  $T$  disminuye por un factor de congelamiento  $\alpha$ , hasta llegar a la temperatura mínima,  $T_{\min}$ . Una vez que el sistema llega a la temperatura mínima, se concluye el proceso de búsqueda y el archivo externo contiene las soluciones no dominadas finales.

#### 4.3.4 Recocido simulado multiobjetivo para el diseño de zonas electorales AMOSA-D

En el apartado anterior se realizó una breve descripción de AMOSA. Para adaptar el algoritmo al diseño de zonas geográficas, es necesario realizar modificaciones a la representación de la solución, inicialización del archivo, esquema de aceptación, probabilidad de aceptación y vecindarios utilizados. A continuación se explican cada una de estas modificaciones. En lo subsecuente se referirá al algoritmo propuesto como AMOSA-D.

##### 4.3.4.1 Representación e inicialización del archivo

El esquema elegido consiste en un vector cuyos índices representan una UGB y su contenido la zona a la que pertenece. Por lo tanto, se trata de un vector cuya longitud corresponde al número total de UGB del territorio y el rango de sus valores comprende entre 1 y el número total de zonas deseadas.

El algoritmo empieza con la generación de  $\beta \times SL$  ( $\beta > 1$ ) soluciones aleatorias iniciales. El proceso para generar una solución factible para el problema de distribución se describe a continuación. Sea  $X$  el conjunto de UGB. Primero se marcan todas las UGB en  $X$  como "disponibles". Posteriormente, se seleccionan de manera aleatoria  $k$  unidades geográficas, donde  $k$  representa el número de zonas a crear. Las unidades seleccionadas se asignan de manera única a cada una de las  $k$  zonas y se marcan como "ocupadas". A partir de esta configuración inicial, se realiza un proceso constructivo donde se selecciona una zona aleatoria,  $Z_i$ , y dicha zona se extiende al agregar una UGB vecina disponible. Cada vez que se agrega una UGB a una zona  $Z_i$  se señala como "ocupada". El procedimiento se repite hasta que no queden UGB's marcadas como "disponibles". De esta manera, se asegura que las soluciones iniciales consten de  $k$  distritos no vacíos, contiguos y que incluyan a todas las UGB's. Este proceso se resume en el Algoritmo 1.

---

#### **Algoritmo 1:** Construcción de una solución factible

---

- 1 Establecer  $S' = \emptyset$ ;
  - 2 Seleccionar  $k$  UGB's aleatorias de  $X$ ;
  - 3 Agregar cada una de las  $k$  UGB a una zona  $Z_i$  en  $S'$ ;
  - 4 Marcar las unidades geográficas como ocupadas;
  - 5 **mientras** haya UGB's libres **hacer**
  - 6     | Seleccionar un distrito  $d$  al azar;
  - 7     | Agregar al distrito  $d$  una UGB  $i$  libre que colinde con la frontera de  $d$ ;
  - 8     | Marcar la UGB  $i$  como ocupada;
  - 9 **fin**
-

Entonces, cada solución,  $sol$ , es mejorada a través de un algoritmo tipo *hill climbing* por un número prescrito de iteraciones. En cada iteración,  $sol$ , es mutada para producir una nueva solución,  $nva$ , y si un cambio favorable es logrado ( $nva$  domina a  $sol$ ) la nueva solución es aceptada. Una vez que todas las soluciones pasan por este proceso de mejora, únicamente las no dominadas se almacenan en el archivo externo. Este proceso se resume en el Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2:** Inicialización del Archivo
 

---

```

1  para  $i \leftarrow 0$  a  $(\beta \times SL)$  hacer
2     $sol \leftarrow$  Generar una solución factible siguiendo el Algoritmo 1;
3    para  $j \leftarrow 0$  a  $iteraciones\_hill\_climbing$  hacer
4       $nva \leftarrow$  Generar una solución vecina;
5      si  $nva$  domina a  $sol$  entonces
6         $sol \leftarrow nva$ ;
7      fin
8    fin
9    Agregar  $sol$  a  $arch$  ;
10 fin
11 Conservar las soluciones no-dominadas en  $arch$ ;
12 si  $|arch| \geq SL$  entonces
13   Reducir  $|arch|$  a  $HL$  promoviendo la diversidad;
14 fin

```

---

#### 4.3.4.2 Esquema de aceptación

Durante el proceso de búsqueda, la aceptación o rechazo de una solución, con base en el estado de dominancia de los elementos involucrados, deriva en alguno de los siguientes casos de decisión tal como se describe en [115]:

- Caso 1: La solución actual domina a la nueva solución. En este caso la nueva solución es seleccionada como la solución actual con una probabilidad:

$$probabilidad = \frac{1}{1 + \exp(\Delta dom_{promedio}/temp)} \quad (36)$$

Donde:

$$\Delta dom_{promedio} = \frac{(\sum_{i=1}^k \Delta dom_{i,nuevo}) + \Delta dom_{actual,nuevo}}{k + 1} \quad (37)$$

En esta expresión,  $\Delta dom_{promedio}$  representa la cantidad de dominación promedio de la nueva solución obtenida al calcular la cantidad de dominancia de nuevo con respecto a las  $k$  soluciones contenidas en el archivo externo. Es importante notar que en este trabajo se utilizó un criterio diferente para calcular la probabilidad de aceptación de una solución con calidad inferior a la propuesta por Bandyopadhyay et al. [115]. Esta elección se explica con mayor detalle en la sección 4.3.4.3.

- Caso 2: La solución actual y la nueva solución son no dominadas entre sí. De este caso general se desprenden 3 subcasos:

- $k$  soluciones en el archivo externo dominan a la nueva solución. La solución nueva es seleccionada como la actual con la probabilidad definida en (37), pero  $\Delta\text{dom}_{\text{promedio}}$  se define ahora como:

$$\Delta\text{dom}_{\text{promedio}} = \frac{\sum_{i=1}^k (\Delta\text{dom}_{i,\text{nuevo}})}{k} \quad (38)$$

- La nueva solución es no dominada con respecto a todas las soluciones del archivo externo, por lo tanto, la nueva solución se selecciona como la actual y se agrega al archivo externo.
  - La nueva solución domina algunas soluciones en el archivo externo, por lo tanto, es seleccionada como el punto actual y se agrega al archivo. Las soluciones dominadas se eliminan del archivo.
- Caso 3: La nueva solución domina a la actual. De este caso general se desprenden 3 subcasos:
- $k$  soluciones del archivo dominan a la nueva solución. La nueva solución es seleccionada como la actual con una probabilidad dada por

$$\text{probabilidad} = \frac{1}{1 + \exp(-\Delta\text{dom}_{\text{min}})} \quad (39)$$

Donde  $\Delta\text{dom}_{\text{min}}$  representa la mínima diferencia de la cantidad de dominación entre la nueva solución y las  $k$  soluciones del archivo externo. En caso contrario el nuevo punto es seleccionado como el punto actual

- La nueva solución es no dominada con respecto a todas las soluciones en el archivo externo, por lo tanto, la nueva solución es seleccionada como la actual y se agrega al archivo externo.
- La nueva solución domina algunas de las soluciones en el archivo externo. De manera similar al caso 3(b), la nueva solución es seleccionada como la actual y se agrega al archivo. El archivo externo se actualiza y todas las soluciones dominadas se eliminan.

Los principales pasos del esquema de aceptación y rechazo se muestran en el Algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3:** Criterio de aceptación
 

---

```

1 si act domina a nva entonces
2    $\Delta\text{dom}_{\text{promedio}} = \frac{(\sum_{i=1}^k \Delta\text{dom}_{i,nva}) + \Delta\text{dom}_{\text{act},nva}}{k+1}$ 
3    $\text{prob} = \frac{1}{1+\exp(\Delta\text{dom}_{\text{promedio}}/\text{temp})}$ 
4   Establecer act = nva con probabilidad prob
5 fin
6 si act y nva son no-dominadas entonces
7   si nva la dominan k sols. en arch entonces
8      $\Delta\text{dom}_{\text{promedio}} = \frac{\sum_{i=1}^k (\Delta\text{dom}_{i,nva})}{k}$ 
9      $\text{prob} = \frac{1}{1+\exp(\Delta\text{dom}_{\text{promedio}}/\text{temp})}$ 
10    Establecer act = nva con probabilidad prob
11  fin
12  si nva es no-dominada con respecto a arch entonces
13    Establecer act = nva
14    Agregar nva a arch
15  fin
16  si nva domina a k sols. en arch entonces
17    Establecer act = nva
18    Agregar nva a arch
19    Eliminar las k sols. dominadas de arch
20  fin
21 fin
22 si nva domina a act entonces
23   si nva la dominan k sols. en arch entonces
24     min = solución del archivo con  $\Delta\text{dom}_{\text{min}}$ 
25      $\text{prob} = \frac{1}{1+\exp(-\Delta\text{dom}_{\text{min}})}$ 
26     Establecer act = min con probabilidad prob
27   fin
28   en otro caso
29     Establecer act = nva
30   fin
31   si nva es no-dominada con respecto a arch entonces
32     Establecer act = nva
33     Agregar nva a arch
34     si act se encuentra en arch entonces
35       Eliminar act de arch
36     fin
37   fin
38   si nva domina a k sols. en arch entonces
39     Establecer act = nva
40     Agregar nva a arch
41     Eliminar las k sols. dominadas de arch
42   fin
43 fin

```

---

## 4.3.4.3 Probabilidad de aceptación

El criterio de aceptación es un aspecto decisivo en el desempeño de recocido simulado porque especifica la probabilidad que la solución actual sea reemplazada por una candidata a una temperatura indicada. La elección de este mecanismo es dependiente del problema e influye en la convergencia hacia el frente real de Pareto [120]. En pruebas preliminares, se detectó que la regla de aceptación propuesta por [115], no era adecuada para AMOSA-D debido a que producía resultados que convergían rápidamente a aproximaciones del frente de mala calidad.

En AMOSA, la probabilidad de aceptación es calculada en términos de la cantidad de dominancia promedio,  $\Delta\text{dom}_{\text{promedio}}$  y la temperatura,  $T$ , a través de la siguiente expresión:

$$\text{probabilidad} = \frac{1}{1 + \exp(\Delta\text{dom}_{\text{promedio}} \times T)} \quad (40)$$

Puesto que  $\Delta\text{dom}$  y  $T$  son cantidades estrictamente positivas, cuando la temperatura es alta (al inicio del algoritmo) la probabilidad de aceptación tiende a ser baja, similar a una búsqueda glotona. Por el contrario, cuando el valor de  $T$  es bajo (al final del algoritmo) la probabilidad de aceptación converge de manera asintótica a 0.5. La idea detrás de este esquema es que inicialmente la búsqueda se concentra en aglutinar un conjunto de buenas soluciones en el archivo externo y posteriormente, bajo el supuesto de que se han encontrado suficientes soluciones de calidad, se realiza una búsqueda más detallada al incrementar la aceptación de peores soluciones. En la Figura 4 se observa el comportamiento de la probabilidad de aceptación en el transcurso de 200 iteraciones considerando  $\Delta\text{dom} = 0.1$ .

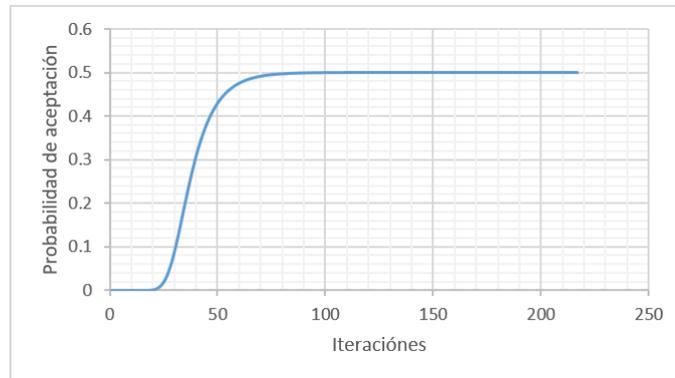


Figura 4: Probabilidad de aceptación en AMOSA de Bandyopadhyay. Fuente: Elaboración propia con base en [120].

Esta dinámica es útil cuando un óptimo local no está lejos del óptimo global, o el óptimo local es de buena calidad y puede encontrarse en las etapas iniciales de la búsqueda. Sin embargo, en casos de funciones objetivo multimodales, puede resultar que la búsqueda se estanque en un óptimo local de mala calidad. Ante esta posibilidad, se ha reportado en la literatura el uso de propuestas alternativas que siguen una lógica más apegada a la de recocido tradicional, es decir, donde el algoritmo hace una caminata aleatoria inicial para encontrar una región promisoría, y posteriormente de manera gradual hace una búsqueda cada vez más glotona para acercarse al frente de Pareto. La probabilidad de aceptar una nueva solución en este esquema está dada por:

$\exp(-\Delta\text{dom})/T$ ), donde la aceptación inicial es alta, asegurando que la búsqueda no se bloquee en óptimos locales. Posteriormente el algoritmo se vuelve más selectivo asumiendo una mayor cercanía al frente de Pareto. En la Figura 5 se puede observar el comportamiento de la probabilidad, conforme avanza el algoritmo siguiendo una dinámica similar a la de un recocido simulado tradicional.

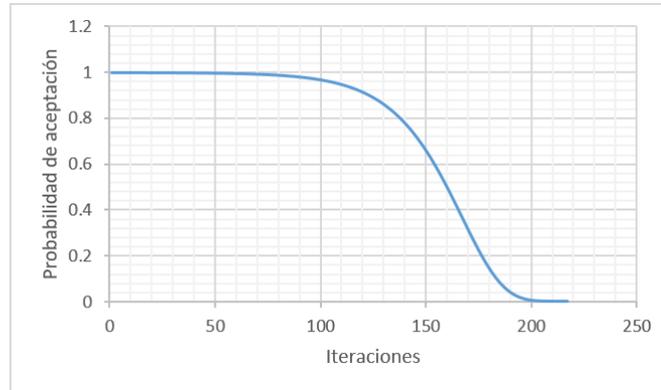


Figura 5: Probabilidad de aceptación similar a la de recocido simulado tradicional. Fuente: Elaboración propia con base en [120].

En este proyecto se utilizó la probabilidad de aceptación propuesta por Kumar [120] la cual sigue una mecánica similar, pero limitando la probabilidad a un valor de 0.5 cuando la temperatura es alta, con el propósito de facilitar el proceso de calibración y reducir el rango de valores que puede tomar. La probabilidad de aceptar una nueva solución está definida por:  $\frac{1}{1+\exp(\Delta\text{dom}/T)}$ . En la Figura 6 se muestra gráficamente este comportamiento.

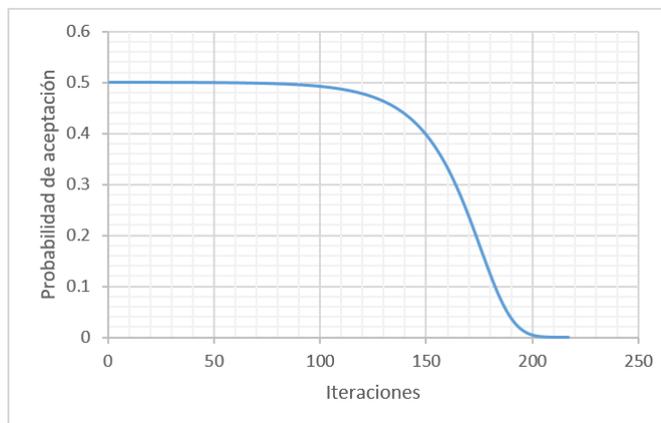


Figura 6: Probabilidad de aceptación utilizada para el diseño de zonas. Fuente: Elaboración propia.

#### 4.3.4.4 Vecindades

Los tipos de vecindad son elementos clave para generar soluciones promisorias con base en soluciones actuales. Para el diseño de zonas electorales, se emplearon 7 vecindades para explorar el espacio de búsqueda, a continuación se definen:

- Vecindad  $N_p$ : Consiste en intercambiar  $p$  UGB contiguas de una zona aleatoria  $Z_i$ , a una zona adyacente  $Z_j$ . En caso de que estos movimientos de UGB ocasionen la pérdida de conexidad en la zona  $Z_i$  se lleva a cabo un proceso de reparación. De igual manera, se debe validar y evitar la creación de una zona vacía. En este trabajo, el número máximo de UGB que se pueden mover de la zona  $Z_i$  a la zona  $Z_j$  es 5,  $1 \leq p \leq 5$ .
- Vecindad  $N_{pq}$ : En esta vecindad se intercambian UGB entre dos zonas en un sentido bidireccional. Primero, se lleva a cabo una vecindad  $N_p$ , donde  $p$  UGB contiguas se mueven de la zona  $Z_i$  a la zona  $Z_j$ . Posteriormente, un segundo intercambio de  $q$  UGB contiguas se realiza ahora de la zona  $Z_j$  a la zona  $Z_i$ .
- Vecindad  $N_r$ : Una técnica similar al reencadenamiento de trayectorias o *path relinking* genera una nueva solución utilizando como guía una solución aleatoria del archivo externo. El camino entre la solución actual,  $S_{actual}$  y una solución del archivo,  $S_{aleatoria}$ , se traza con base en la siguiente estrategia. Primero, la solución  $S_{aleatoria}$ , se elige al azar del archivo externo de manera que no haya sido seleccionada en una iteración previa con el fin de promover la diversidad. Una vez que  $S_{aleatoria}$  ha sido seleccionada, una nueva solución,  $S_{nueva}$ , se produce empleando la siguiente estrategia. Una UGB  $r$  se selecciona aleatoriamente. Por lo que existen dos zonas  $Z_i \in S_{aleatoria}$  y  $Z_j \in S_{actual}$  tales que  $r \in Z_i \cap Z_j$ . De esta forma, los siguientes conjuntos son no vacíos:

$$H_1 = \{l : x_l = i \text{ en } S_{aleatoria}, x_l \neq j \text{ en } S_{actual}\} \quad (41)$$

$$H_2 = \{l : x_l = j \text{ en } S_{actual}, x_l \neq i \text{ en } S_{aleatoria}\} \quad (42)$$

Entonces una UGB en  $H_1$  es expulsada de  $Z_j$  e insertada en una zona vecina. Posteriormente, una UGB en  $H_2$  es ingresada en  $Z_i$ . En caso de que una desconexión se produzca en cualquiera de estos pasos, se lleva a cabo un proceso de reparación.

La vecindad tipo  $N_q$  con el intercambio de una unidad geográfica representa el conjunto de movimientos básicos que se pueden realizar para modificar un plan distrital. Las vecindades restantes se construyen a partir de este conjunto de desplazamientos. En la Figura 7 se muestra gráficamente la secuencia de pasos que comprenden esta vecindad, considerando que al hacer un cambio de un distrito a otro no se rompe la conexidad. Primero, es necesario elegir un distrito aleatoriamente, posteriormente se selecciona una unidad geográfica que colinde con una zona vecina y es cambiada de zona. En este caso se observa que no hay pérdida de conexidad. Por otra parte, en la Figura 8 se considera el caso en donde se rompe la conexidad y es necesario restaurarla. En este supuesto, la conexidad se recupera al enviar al distrito destino, las componentes conexas de menor tamaño que se hayan generado por el movimiento de la unidad geográfica.

La elección del tipo de vecindad que se aplica en un momento específico durante la ejecución del algoritmo está dada por un mecanismo adaptativo. El tipo de vecindad a utilizar depende de un esquema de pesos dinámicos. Los pesos son ingresados a un sistema de selección por ruleta que con cierta probabilidad determina la vecindad que deberá utilizarse. La idea principal del mecanismo es que los tipos de vecindad que se han desempeñado mejor durante la ejecución del algoritmo tengan mayor probabilidad de ser elegidos. Dadas  $q$  vecindades con pesos  $w_i$ , la  $j$ -ésima vecindad es elegida con probabilidad  $\frac{w_j}{\sum_{i=1}^q w_i}$ .

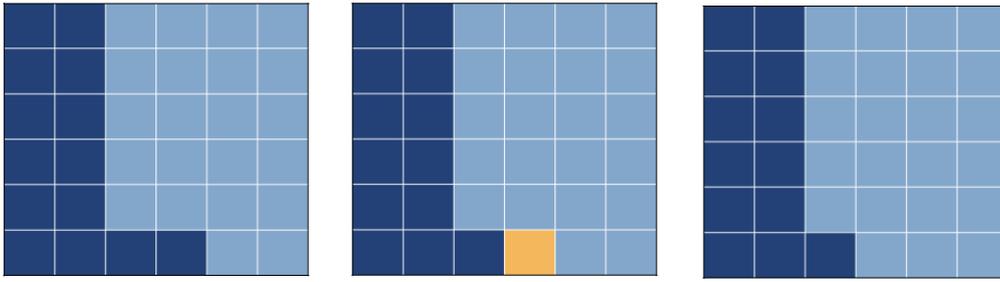


Figura 7: Secuencia de pasos que se realizan en una vecindad de tipo  $M_q$ ,  $q = 1$ , sin pérdida de conectividad. Fuente: Elaboración propia.

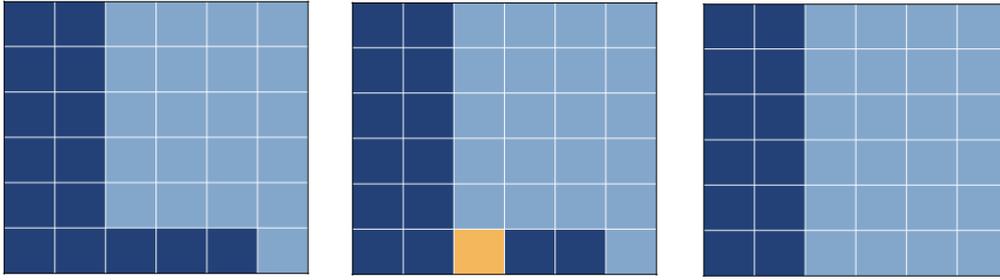


Figura 8: Secuencia de pasos que se realizan en una vecindad de tipo  $M_q$ ,  $q = 1$ , con pérdida de conectividad. Fuente: Elaboración propia.

El peso asociado a la vecindad empleada en cada iteración se actualiza dentro del ciclo interno de AMOSA-D mediante el método de suavización exponencial simple como se muestra en (43). Inicialmente todos los pesos se establecen en 1.

$$\hat{W}_{j,t} = \hat{W}_{j,t-1} + \alpha \cdot (W_{j,t-1} - \hat{W}_{j,t-1}) \quad (43)$$

Donde  $\hat{W}_{j,t}$ , simboliza el pronóstico de la vecindad  $j$  en el tiempo  $t$ ,  $\hat{W}_{j,t-1}$  es el pronóstico de la vecindad  $j$  en el tiempo  $t - 1$ ,  $\alpha$  es un parámetro arbitrario con valor igual a 0.2 en este modelo, y  $W_{j,t-1}$  es la calificación obtenida por la vecindad  $j$  en el tiempo  $t - 1$ . La calificación para la vecindad  $j$  en un tiempo dado se obtiene con base en el estado de dominancia siguiendo las siguientes reglas:

- Es igual 1 si se obtiene una nueva solución que domina la actual.
- Es igual a 0.5 si la nueva solución y la solución actual son no dominadas entre si.
- Es igual a 0 si la nueva solución es dominada por la actual.

Con el fin de establecer un límite mínimo a los pesos independientemente de su desempeño cualquier valor  $w$   $\hat{W}_{j,t} < 0.002$  se establece en 0.002.

### 5.1 ESCENARIO DE PRUEBA

Con el fin de evaluar la robustez de la heurística propuesta, se consideró como referencia el modelo y algoritmo que emplea el INE para delimitar las fronteras electorales a nivel federal. Dicho algoritmo ha sido probado y mejorado en diferentes procesos de distritación, por lo cual se considera que es capaz de obtener escenarios de alta calidad, y por lo tanto servirá como punto de referencia importante para establecer la competitividad de AMOSA-D. Actualmente, el algoritmo del INE está basado en recocido simulado y aborda los criterios legales y técnicos mencionados en la sección 4.2, mismos que son respetados por el algoritmo propuesto en esta tesis.

Las pruebas se realizaron sobre 23 estados de la República Mexicana, con una variedad de formas, extensión, y densidad de población que permiten analizar bajo una serie de condiciones adversas y heterogéneas, la capacidad de las heurísticas para generar aproximaciones del frente de Pareto. Es pertinente señalar que el algoritmo y modelo del INE corresponden al proceso de distritación de 2017 y la información geográfica pertenece al año 2005, en virtud de que a la fecha no está publicada información más reciente. En concordancia con los requerimientos legales se estableció un porcentaje de desviación máximo del 15 %. Para cada estado, el número de habitantes, el número de unidades geográficas y el número de distritos se presentan de forma alfabética en el Anexo A. Es importante notar que en la práctica muchas de las secciones son agrupadas por diferentes razones, por ejemplo, para unir secciones con población indígena, lo cual disminuye el número de variables a considerar. Sin embargo, en esta tesis se trabajó al nivel de granularidad más bajo que permite la cartografía electoral, es decir a nivel sección, con la finalidad de establecer condiciones competitivas para la evaluación de los algoritmos.

En lo que se refiere a la implementación, el sistema del INE está codificado en el lenguaje C, mientras que AMOSA-D está codificado en el lenguaje de programación Java JDK 1.8. Los algoritmos fueron ejecutados en una computadora Intel Pentium 3.1 Ghz con 8GB en RAM.

Para visualizar y procesar los datos geográficos se desarrolló una interfaz que permite presentar en forma tabular y gráfica la información relevante al proceso de distritación. A través de la aplicación es posible, en una primera etapa, extraer la información de los archivos cartográficos en formato nativo (shapefile) como población por sección, coordenadas geográficas, secciones electorales vecinas y en una segunda etapa presentar visualmente los escenarios resultantes del proceso de optimización. En la Figura 9 se muestran algunas ventanas de la aplicación.

### 5.2 RECOCIDO SIMULADO EMPLEADO POR EL INE

La estrategia actual del INE, que en lo subsecuente se denominará RS INE, es una versión de recocido simulado que ha sido adaptada y mejorada para abordar las características geográficas de México. Esta técnica sigue un esquema de enfriamiento

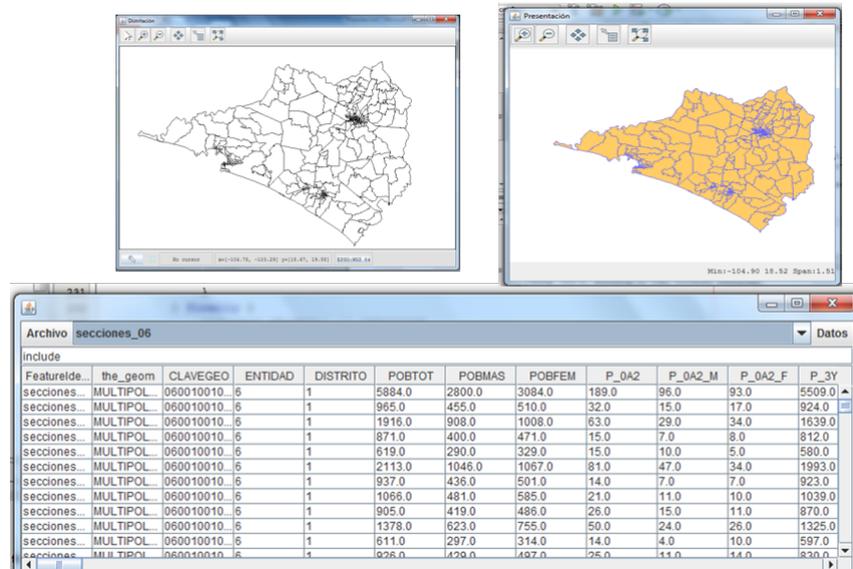


Figura 9: Interfaz de la aplicación desarrollada. Fuente: Elaboración propia.

exponencial que maneja los objetivos de equilibrio poblacional y compacidad a través de una suma ponderada. La creación de distritos electorales se realiza en dos etapas. Primero, se crea una solución inicial formada por  $k$  distritos conexos, donde  $k$  es el número de distritos indicado para cada conjunto territorial. Posteriormente, se realiza un proceso de mejora que consiste en el intercambio de UGB entre zonas vecinas, de tal forma que al final del proceso se obtenga una solución de buena calidad. Los objetivos se combinan con la siguiente función:

$$f(S) = \lambda_1 f_1(S) + \lambda_2 f_2(S) \quad (44)$$

Donde  $S$  es una solución de distritación,  $f_1(S)$  es el costo asociado al equilibrio poblacional y  $f_2(S)$  es el costo de la compacidad para una solución tal como se definió en sección 4.2. Con el fin de aproximar el frente de Pareto, se establece un conjunto de 90 ponderadores  $\rho = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  distribuidos uniformemente en el intervalo  $\delta \in [0.1, 0.91]$  de tal manera que  $\lambda_1 \in \{0.1, \dots, 0.91\}$  y  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ . Para cada par de ponderadores, se realizó una corrida. Debido a que RS INE produce una solución por corrida, después de aplicar este algoritmo al conjunto de ponderadores se obtienen 90 soluciones, las cuales deben ser filtradas por un procedimiento de ordenamiento de Pareto para conservar únicamente las no dominadas. Este procedimiento representa una ejecución de RS INE para encontrar una aproximación al frente.

### 5.3 CONFIGURACIÓN DE PARÁMETROS

Una de las limitaciones de algunas técnicas heurísticas es el número de parámetros que se deben calibrar para obtener resultados de buena calidad. Por lo tanto, encontrar un conjunto apropiado es complejo, y es importante recurrir a técnicas de calibración adecuadas.

Para esta tesis, los algoritmos AMOSA-D y RS INE fueron calibrados por medio de una estrategia conocida como fuerza bruta tal como se describe en [134]. Primero

se estableció un conjunto de rangos válidos para cada parámetro por algoritmo y se llevaron a cabo 10 ejecuciones por configuración. En estas ejecuciones se observó el hipervolumen promedio. Las configuraciones de parámetros con un mayor hipervolumen promedio se eligieron como los parámetros funcionales, mismos que resumen en la Tablas 4 y 5 para AMOSA-D y RS INE, respectivamente.

Tabla 4: Parámetros AMOSA-D. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Valor	Descripción
HL	90	Límite rígido del archivo externo
SL	125	Límite flexible del archivo externo
iter	4000	Número de iteraciones
$\alpha$	0.95	Tasa de enfriamiento
$T_{\max}$	2.8e-4	Temperatura inicial
$T_{\min}$	1e-10	Temperatura final

Tabla 5: Parámetros RS INE. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Valor	Descripción
$\alpha$	0.98	Tasa de enfriamiento
$T_{\max}$	5	Temperatura inicial
$T_{\min}$	7e-4	Temperatura final

Es importante mencionar que, al realizar pruebas preliminares para determinar los rangos funcionales de los parámetros de AMOSA-D, se advirtieron algunos comportamientos en la temperatura y número de iteraciones de búsqueda local que afectan de manera significativa el desempeño del algoritmo:

- Temperaturas iniciales elevadas deterioran la búsqueda hacia un extremo del frente de Pareto, generalmente, favoreciendo la compacidad en detrimento del equilibrio poblacional. Como resultado, se observa que las soluciones se concentran en una zona específica, lo que es indeseable en un algoritmo multiobjetivo que pretende ofrecer un conjunto de soluciones diverso. Por el contrario, temperaturas iniciales que no son lo suficientemente elevadas provocan la convergencia prematura del algoritmo a un frente de mala calidad.
- Un valor alto de iteraciones concentra la búsqueda en la etapa inicial del algoritmo y no permite generar un conjunto de puntos de partida eficaz, mientras que un valor muy bajo no permite explorar las suficientes vecindades para converger cerca del frente de Pareto verdadero.

#### 5.4 MÉTRICAS DE COMPARACIÓN

Al evaluar la calidad de las soluciones obtenidas por un algoritmo multiobjetivo generalmente se evalúan dos aspectos: convergencia y dispersión. La primera consiste en minimizar la distancia del frente de Pareto obtenida por un algoritmo con respecto al frente de Pareto exacto del problema (en caso de conocerse) y la segunda en maximizar la extensión de las soluciones sobre el frente de manera que la distribución sea lo más

uniforme posible. Para evaluar la calidad de las soluciones se utilizaron las métricas de hipervolumen y cobertura de conjuntos.

- **Hipervolumen.**- Es una métrica propuesta por Zitler y Thiele [135] que engloba en una misma medida la convergencia y dispersión de un frente. Dado un conjunto de puntos  $P \in \mathfrak{R}$ , y un punto de referencia  $y_{ref}$ , donde  $\wedge$  denota la métrica de Lebesgue o métrica  $S$ , el hipervolumen se define de la siguiente manera:

$$S(P, y_{ref}) = \wedge \left( \bigcup_{y \in P} \{y' \mid y \prec y' \prec y_{ref}\} \right) \quad (45)$$

Donde  $S(B, y_{ref})$  representa el volumen  $k$ -dimensional (área en el caso de dos objetivos, volumen para tres objetivos) de la región formada por la unión de los hiperrectángulos delimitados por cada miembro de  $P$  y el punto de referencia  $y_{ref}$ . Entre mayor sea el valor del hipervolumen, mayor la calidad de las soluciones obtenidas por un algoritmo. En este trabajo,  $y_{ref} = (1000, 1000)$  debido a que representa una coordenada que es dominada por todos los frentes de Pareto aproximados generados.

- **Cobertura de conjuntos:** Es un indicador de calidad binario que representa la proporción de soluciones dominadas o iguales entre dos conjuntos de aproximación. La cobertura de conjuntos  $C(A, B)$ , de un frente  $B$  por  $A$  se define mediante la siguiente expresión:

$$C(A, B) = \frac{|s_2 \in B : s_1 \in A, s_1 \prec s_2|}{|B|} \quad (46)$$

$s_1 \prec s_2$  señala que la solución  $s_1$  domina a la solución  $s_2$ . Si  $C(A, B) = 1$  entonces todos los elementos de  $B$  son dominados por algunos elementos en  $A$ , mientras que si  $C(A, B) = 0$  implica que ninguna solución en  $B$  es dominada por alguna solución en  $A$ . Es importante señalar que este indicador no es simétrico, es decir, el valor de  $C(A, B)$  puede ser diferente al de  $C(B, A)$ , por lo que es necesario considerar ambos casos a la hora de comparar dos conjuntos de soluciones. En la siguiente subsección se muestran los resultados y se compara el desempeño de los algoritmos de interés considerando estas métricas.

## 5.5 RESULTADOS

En este apartado se exponen los resultados de los experimentos computacionales realizados. En primer término se muestran los frentes globales obtenidos por cada algoritmo en cada instancia. Debido a la aleatoriedad inherente de los métodos heurísticos usados se consideraron 30 ejecuciones independientes. De igual manera, con el fin de realizar una comparación justa, el número de llamadas a la función objetivo se fijó en 500,000 para los dos algoritmos.

La Figura 10 presenta algunos frentes representativos obtenidos por AMOSA-D y RS INE en 4 de los 23 estados de la República Mexicana considerados: Chiapas, Guanajuato, Guerrero y Jalisco. El eje vertical representa el costo de la compacidad, mientras que el eje horizontal corresponde al costo del equilibrio poblacional. La totalidad de los frentes por entidad federativa se pueden revisar en el Anexo A.

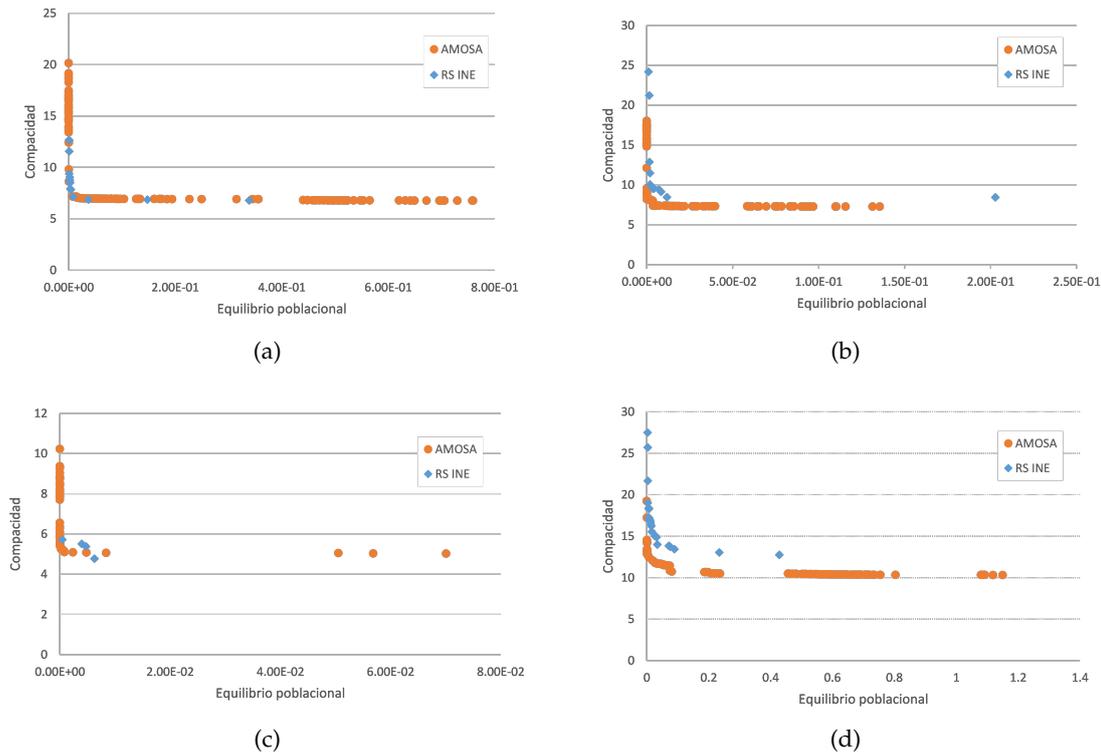


Figura 10: Frentes de Pareto aproximados para los estados de: (a) Chiapas, (b) Guanajuato, (c) Guerrero y (d) Jalisco. Fuente: Elaboración propia.

Un primer análisis visual de los frentes sugiere que en términos generales AMOSA-D produce mejores conjuntos de soluciones eficientes en términos de convergencia y dispersión. Sin embargo, esta primera impresión se debe corroborar mediante los indicadores de calidad. Otra observación que se puede realizar a partir de la inspección gráfica se refiere al número de soluciones no-dominadas provistas por cada algoritmo. El número de soluciones Pareto óptimas producidas por AMOSA-D es consistente con la capacidad máxima del archivo, 90, mientras que RS INE únicamente encuentra un promedio de 15 soluciones no dominadas. En este rubro se observa que AMOSA-D provee mayor cantidad de alternativas al tomador de decisiones. Otra observación que se puede realizar a partir de la interpretación de las gráficas, se refiere a la dispersión de las soluciones en el espacio de los objetivos. Las soluciones de AMOSA-D están mejor distribuidas en diferentes regiones del frente de Pareto, mientras que las soluciones de RS INE se conglomeran principalmente a la mitad del frente. De igual manera, AMOSA es capaz de encontrar soluciones en los extremos del frente y aunque la dispersión de las soluciones no es exactamente uniforme, están distribuidas de manera más equitativa que las de RS INE.

Una vez generados los frentes, se realizó una comparación en términos del hipervolumen y la cobertura de conjuntos. Los valores del hipervolumen para todos los frentes globales en las 23 instancias se muestran en la Tabla 6. En el Anexo A se pueden observar de manera desglosada el hipervolumen, mínimo, máximo y promedio para todos los estados.

De estos resultados, es conveniente señalar que a pesar de que AMOSA no tiene siempre el valor promedio más alto en todos los casos, supera a RS INE en casi la totalidad de los frentes globales encontrados en 18 de 23 instancias.

Tabla 6: Hipervolumen de los frentes globales generados por AMOSA-D y RS INE.  
Fuente: Elaboración propia.

Estado	AMOSA-D	RS INE
Baja California	<b>997278.691</b>	996734.7224
Chiapas	<b>993533.011</b>	992924.1421
Chihuahua	<b>996546.381</b>	996155.8823
Coahuila	<b>996845.107</b>	996733.7865
Distrito Federal	<b>993369.591</b>	988876.5314
Durango	<b>997988.405</b>	997949.9546
Estado de México	986464.66	<b>987098.5764</b>
Guanajuato	<b>992722.152</b>	991555.1298
Guerrero	994969.349	<b>995228.9763</b>
Hidalgo	<b>994759.608</b>	994644.5914
Jalisco	<b>989674.075</b>	987129.3875
Michoacán	<b>993143.444</b>	992459.5114
Morelos	997900.274	<b>998142.1937</b>
Nuevo León	<b>995467.011</b>	994844.887
Querétaro	<b>997528.181</b>	997522.7118
Sinaloa	<b>994477.623</b>	994460.4706
San Luis Potosí	<b>996265.424</b>	996238.7676
Sonora	<b>995981.149</b>	995152.664
Tabasco	<b>996288.824</b>	996136.7671
Tamaulipas	<b>996279.082</b>	996262.6204
Veracruz	987545.532	<b>996384.1253</b>
Yucatán	998947.682	<b>998960.1861</b>
Zacatecas	<b>996676.144</b>	996384.1253

En la Tabla 7, la métrica de cobertura de conjuntos se presenta para los dos algoritmos en todas las instancias de prueba. Al respecto, se puede afirmar que AMOSA-D domina un mayor número de frentes globales que aquellos producidos por RS INE. De igual manera, se observa que un bajo porcentaje de las soluciones producidas por AMOSA-D son dominadas por RS INE, lo que implica que produce mayor cantidad de soluciones no dominadas. Al analizar los resultados de la métrica destacan dos casos interesantes, uno es el de Chiapas donde a pesar que la interpretación gráfica parece favorecer en este rubro a AMOSA-D, la métrica señala que casi el 60 % de las soluciones generadas por este algoritmo son dominadas por RS INE. Otro caso de especial interés es el de Guerrero, donde gráficamente se observa que hay una solución por debajo de la frontera producida por AMOSA-D, sin embargo, sólo domina una pequeña región, lo cual explica un valor superior en la métrica de cobertura.

Tabla 7: Cobertura de conjuntos de los frentes globales generados por AMOSA-D y RS INE.  
Fuente: Elaboración propia.

Estado	(AMOSA-D,RS INE)	(RS INE,AMOSA-D)
Baja California	<b>0.928571</b>	0.016
Chiapas	0.5	<b>0.58046</b>
Chihuahua	<b>1</b>	0
Coahuila	<b>1</b>	0
Distrito Federal	<b>1</b>	0
Durango	<b>0.714286</b>	0.127273
Estado de México	0	<b>1</b>
Guanajuato	<b>1</b>	0
Guerrero	<b>0.75</b>	0.061538
Hidalgo	0.555556	<b>0.684564</b>
Jalisco	<b>1</b>	0
Michoacán	<b>1</b>	0
Morelos	0.25	<b>0.279412</b>
Nuevo León	<b>1</b>	0
Querétaro	<b>0.5</b>	0.363636
Sinaloa	<b>0.933333</b>	0.257669
San Luis Potosí	<b>0.9375</b>	0.010417
Sonora	<b>1</b>	0
Tabasco	<b>0.6</b>	0.366972
Tamaulipas	<b>0.428571</b>	0.004132
Veracruz	<b>1</b>	0
Yucatán	0.4	<b>0.412698</b>
Zacatecas	<b>0.6</b>	0.089552

Para hacer una comparación gráfica del desempeño de los algoritmos utilizados, se realizaron diagramas de caja y bigote empleando los resultados de la métrica de hipervolumen y cobertura de conjuntos, tal como se observa en la Figura 11 y 12, donde se visualizan los valores mínimos y máximos, los cuartiles Q<sub>1</sub> y Q<sub>3</sub>, y el valor de la mediana. De esta forma, mientras más cerca se encuentre la caja a 1, mejores serán los frentes, en términos de cada una de las métricas planteadas. Con base en

esta información se puede decir que el hipervolumen de los frentes producidos por AMOSA-D y RS INE se comporta forma similar entre los dos algoritmos, siendo el primero más estable. Por otro lado, en lo que se refiere a la cobertura de conjuntos, AMOSA-D tiene un mejor desempeño pues domina un mayor número de frentes y su caja está más cercana a uno.

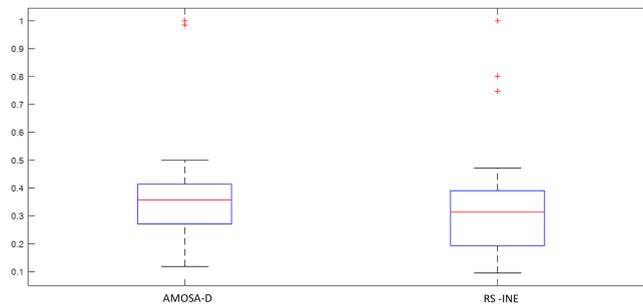


Figura 11: Diagramas de caja para hipervolumen. Fuente: Elaboración propia.

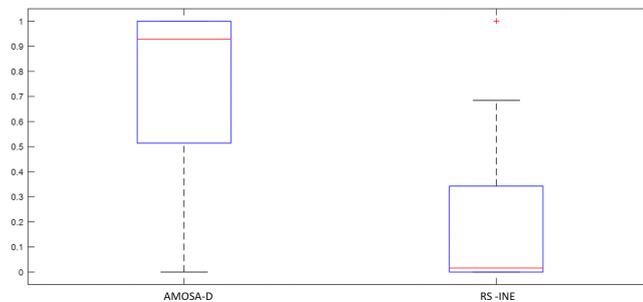


Figura 12: Diagramas de caja para cobertura de conjuntos. Fuente: Elaboración propia.

Es importante resaltar que a pesar de estos buenos resultados en términos de convergencia y dispersión, se observa que AMOSA tiene dificultades de convergencia conforme a la mitad del frente al explorar los espacios de las instancias de mayor tamaño como es el caso del Estado de México, mientras que RS INE encuentra puntos aislados en esta región del frente, lo que explica resultados marginalmente mejores en estos casos.

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

---

En esta tesis se realizó el diseño y desarrollo de un algoritmo multiobjetivo para un problema de gran relevancia en ciencias políticas e investigación de operaciones: la distritación política. Se empleó un modelo bi-objetivo, que considera el equilibrio poblacional y compacidad como funciones objetivo y la conexidad como restricción. Para manejar la complejidad computacional del problema y generar soluciones de buena calidad se propuso el desarrollo de una estrategia heurística denominada AMOSA-D, inspirada en AMOSA, un reciente algoritmo basado en recocido simulado que ha reportado buenos resultados.

Asimismo, se realizó una revisión de técnicas heurísticas y modelos relevantes que se enfocan en resolver el problema de distritación. Al analizar la literatura se observó que a pesar de su naturaleza multiobjetivo, se modela y resuelve frecuentemente como mono-objetivo, lo que puede limitar en gran medida la capacidad de búsqueda y calidad de las soluciones encontradas. En este sentido, el planteamiento de un algoritmo mutiobjetivo para el diseño de zonas es novedoso y relevante.

Con el fin de evaluar la propuesta se comparó su desempeño con RS INE, el algoritmo que utiliza el INE para realizar los procesos de distritación local y federal. RS INE fue diseñado por expertos en la materia, y es capaz de obtener zonas de gran calidad por lo que ofrece un punto de referencia relevante. La comparación del desempeño se hizo mediante las métricas de hipervolumen y cobertura de conjuntos sobre los estados de Baja California, Chiapas, Chihuahua, Coahuila, Distrito Federal, Durango, Estado de México, Guanajuato, Guerrero, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo León, Querétaro, Sinaloa, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco, Tamaulipas, Veracruz, Yucatán y Zacatecas, los cuales por sus características demográficas y de geografía representan un conjunto de instancias de diferente complejidad.

Los resultados experimentales obtenidos muestran que el algoritmo propuesto se desempeña mejor en términos del número de soluciones no dominadas encontradas, hipervolumen y cobertura de conjuntos para la mayoría de las intancias de prueba. Los análisis de las métricas y aproximaciones del frente de Pareto generados permiten observar que los frentes producidos por AMOSA-D, en promedio, son de mejor calidad que los obtenidos por RS INE.

En síntesis, se desarrolló un algoritmo multiobjetivo competitivo para generar zonas electorales de calidad, el cual por su planteamiento y desempeño puede ser extendido y adaptado para otros contextos, lo que es de gran utilidad para abordar en mayor detalle el estudio de las técnicas heurísticas.

Esta investigación tiene como una de sus principales aportaciones la aproximación al problema de diseño de zonas desde un enfoque poco analizado en la literatura. Actualmente existen pocos estudios que abordan el tema desde una perspectiva multiobjetivo y que evalúen el desempeño de estas técnicas. Un considerable número de trabajos anteriores son exclusivamente aproximaciones mono-objetivo.

Asimismo, el desarrollo de AMOSA-D involucró el diseño de una serie de estrategias que permitieran el uso de una heurística robusta como es recocido simulado en un contexto multiobjetivo para generar zonas compactas, conexas y con equilibrio poblacional. Entre los elementos relevantes para lograr un desempeño destacable de AMOSA-D se

encuentran la definición de 7 vecindarios distintos, la selección adaptativa del tipo de vecindad y la adecuación de la estrategia de probabilidad de aceptación.

Los vecindarios definidos mejoraron las capacidades de búsqueda del algoritmo para escapar de óptimos locales. De igual manera, la selección adaptativa del tipo de vecindad fomentó la exploración e intensificación de las zonas más prometedoras del espacio de búsqueda en función del nivel de aceptación de soluciones al archivo externo.

Otro principio de diseño relevante consiste en establecer una regla de aceptación *ad hoc* que promueva la convergencia del algoritmo al Frente de Pareto óptimo. Por último, se realizó una calibración por medio de fuerza bruta de los distintos parámetros con el fin de obtener una configuración eficiente y generar el conjunto de soluciones no dominadas de mayor calidad.

En términos generales, se considera que los resultados de esta investigación contribuyen a una mayor comprensión del problema de diseño de zonas y generan la posibilidad de reflexionar sobre el potencial de los métodos de optimización multiobjetivo para obtener planes de distribución adecuados.

## 6.1 LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

El trabajo realizado se concibe como el punto de partida de futuras líneas de investigación, entre las cuales se destacan los siguientes:

- Inclusión de nuevos tipos de vecindad y esquemas de temperatura.- En la formulación presentada de AMOSA-D, el algoritmo permite generar un conjunto de planes de distribución no dominados de calidad. Sin embargo, se percibió que en instancias de mayor tamaño como el Estado de México, existen áreas de oportunidad en la capacidad de convergencia respecto a la mitad del frente de Pareto. Una forma de abordarlas es la inclusión de vecindades y esquemas de temperatura más avanzados que permitan mejorar la capacidad de búsqueda del algoritmo.
- Inclusión de un mayor número de objetivos y restricciones en el modelo.- Se planteó un modelo bi-objetivo que considera la equidad poblacional y compacidad como criterios indispensables para la elaboración de distritos electorales. Sin embargo, en otra aproximación se podrían incluir criterios adicionales como: promover la participación de minorías indígenas, integridad municipal, tiempos de traslado, entre otros. Se detecta que la inclusión de un mayor número de objetivos en algoritmos multiobjetivo introduce nuevos retos en relación a la convergencia, diversidad y tiempos de ejecución. Al respecto, se sugiere realizar un análisis del desempeño de la heurística propuesta conforme aumente el número de objetivos.
- Estrategias de hibridación.- La combinación de dos o más metaheurísticas para la solución de problemas NP-difíciles ha mostrado buenos resultados en diversos problemas multiobjetivo. Explorar la hibridación de recocido simulado con otras estrategias podría robustecer el proceso de búsqueda.
- Uso de técnicas de paralelismo y computación distribuida.- El uso de enfoques de cómputo paralelo y distribuido permite reducir los tiempos de ejecución, mejorar la precisión de los modelos matemáticos y la calidad y robustez de las aproximaciones de los frentes de Pareto obtenidos. En el caso particular de la distribución electoral el empleo de técnicas paralelas es limitado y se enfoca al problema desde una perspectiva mono-objetivo, por lo que la exploración de este tipo de mecanismos representa un área de investigación interesante.

- Extensión y aplicación del algoritmo para otros problemas de diseño de zonas.– Aunque el algoritmo propuesto se validó para el diseño de zonas electorales, se podría extender y evaluar en otros problemas como zonas de venta, de energía, entre otras, lo que permitiría un análisis más detallado.
- Reducción de parámetros.– Una limitación del recocido simulado multiobjetivo es el gran número de parámetros a configurar para obtener un buen desempeño. Mediante el uso de mecanismos de auto-adaptación, se podría disminuir el número de parámetros, lo cual evitaría la necesidad de calibrar el algoritmo.
- Exploración de otras técnicas multiobjetivo.– Se considera que el uso de técnicas multiobjetivo tiene potencial para mejorar la calidad de las soluciones para este problema, por lo que es conveniente explorar a futuro la aplicación de otras estrategias de este tipo.

## APÉNDICE

## A.1 FRENTES DE PARETO APROXIMADOS

Se muestra por estado el número de habitantes, el número de secciones y el número de distritos a generar, así como los frentes de Pareto aproximados generados por el algoritmo basado en recocido simulado multiobjetivo (AMOSAD) y el algoritmo mono-objetivo basado en recocido simulado empleado por el INE (RS INE). Los estados de interés son: Baja California, Chiapas, Chihuahua, Coahuila, Distrito Federal, Durango, Estado de México, Guanajuato, Guerrero, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo León, Querétaro, Sinaloa, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco, Tamaulipas, Veracruz, Yucatán y Zacatecas.

A.1.1 *Baja California*

- 2,487,367 habitantes
- 1,370 secciones
- 8 distritos a generar

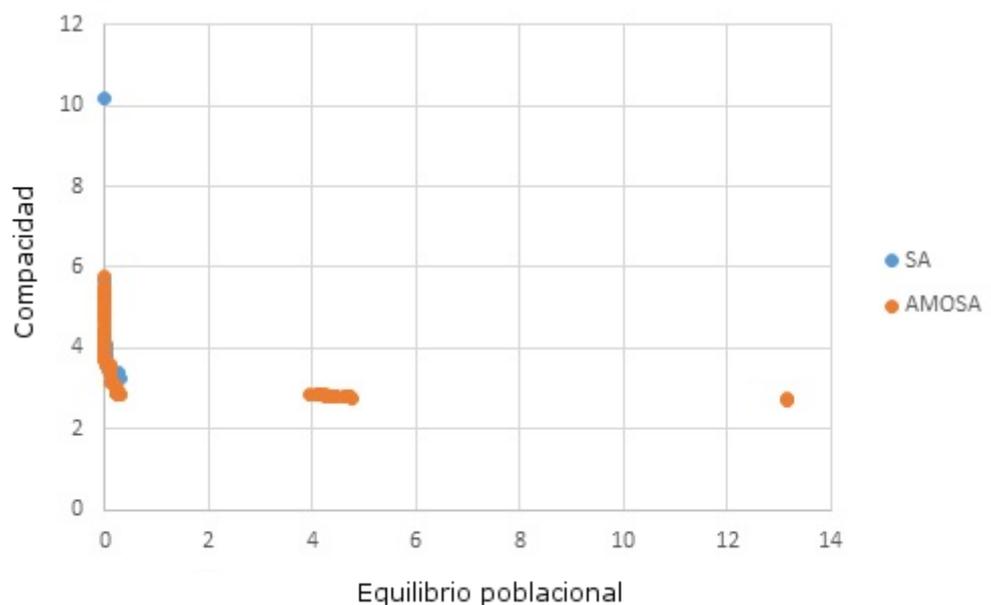


Figura 13: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Baja California.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.2 Chiapas

- 3,920,892 habitantes
- 1,929 secciones
- 12 distritos a generar

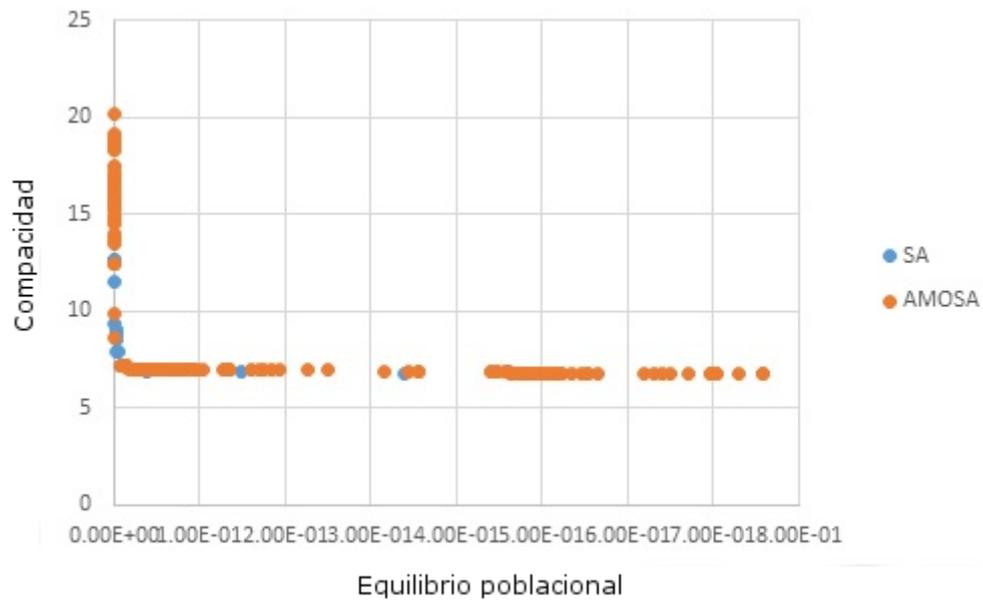


Figura 14: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Chiapas.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.3 Chihuahua

- 3,052,907 habitantes
- 2,842 secciones
- 9 distritos a generar

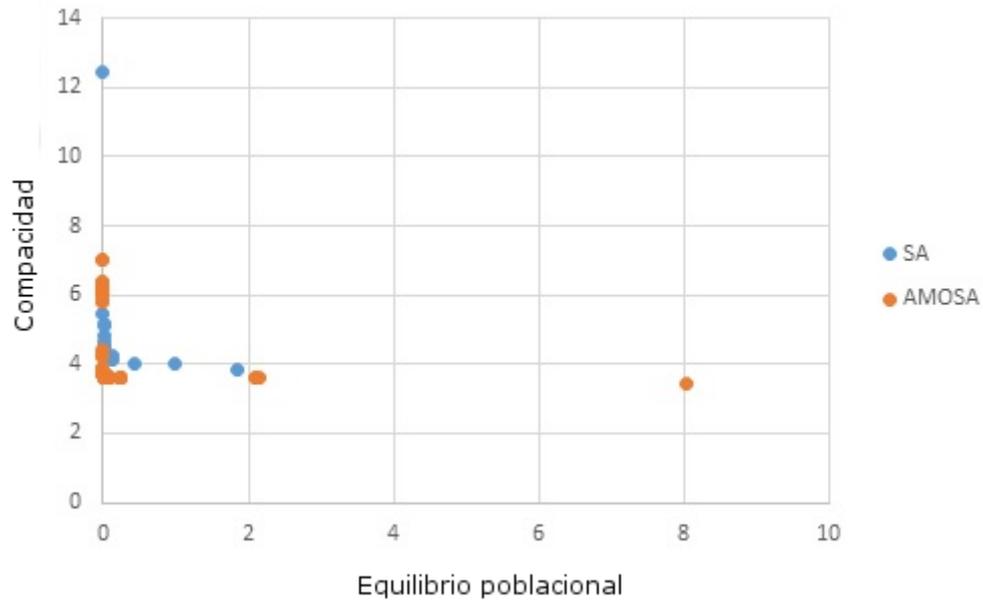


Figura 15: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Chihuahua.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.4 Coahuila

- 2,298,070 habitantes
- 1,520 secciones
- 7 distritos a generar

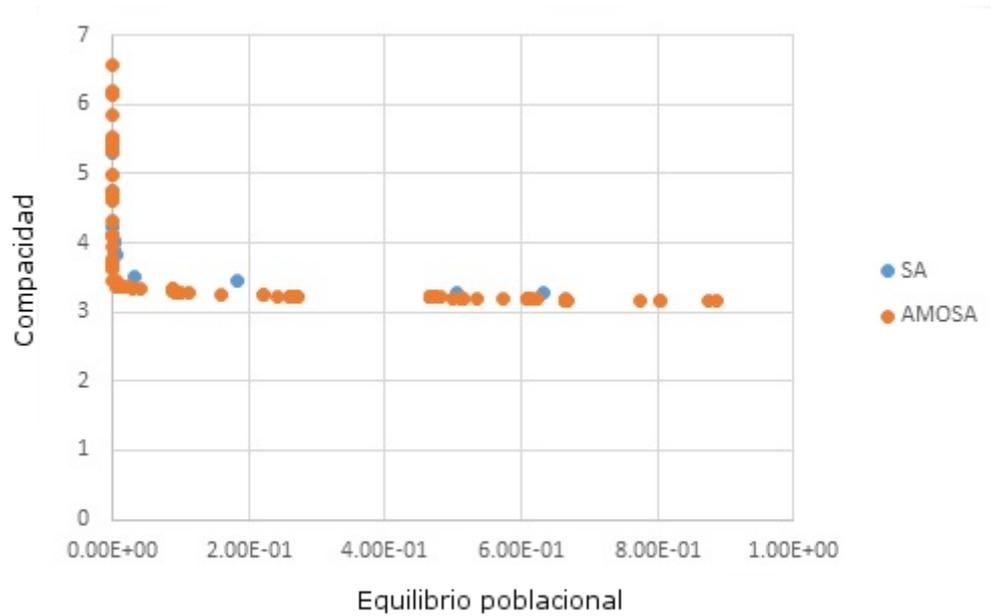


Figura 16: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Coahuila.

Fuente: Elaboración propia.

## A.1.5 Distrito Federal

- 8,605,239 habitantes
- 5,535 secciones
- 27 distritos a generar

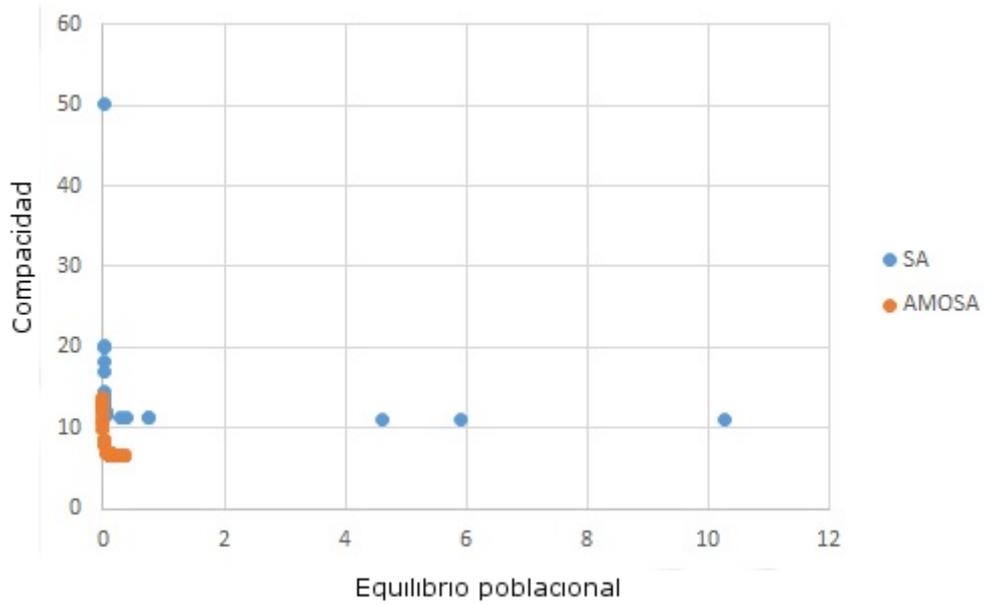


Figura 17: Frentes de Pareto aproximados para el Distrito Federal. Fuente: Elaboración propia.



## A.1.7 Estado de México

- 13,096,686 habitantes
- 5,930 secciones
- 40 distritos a generar

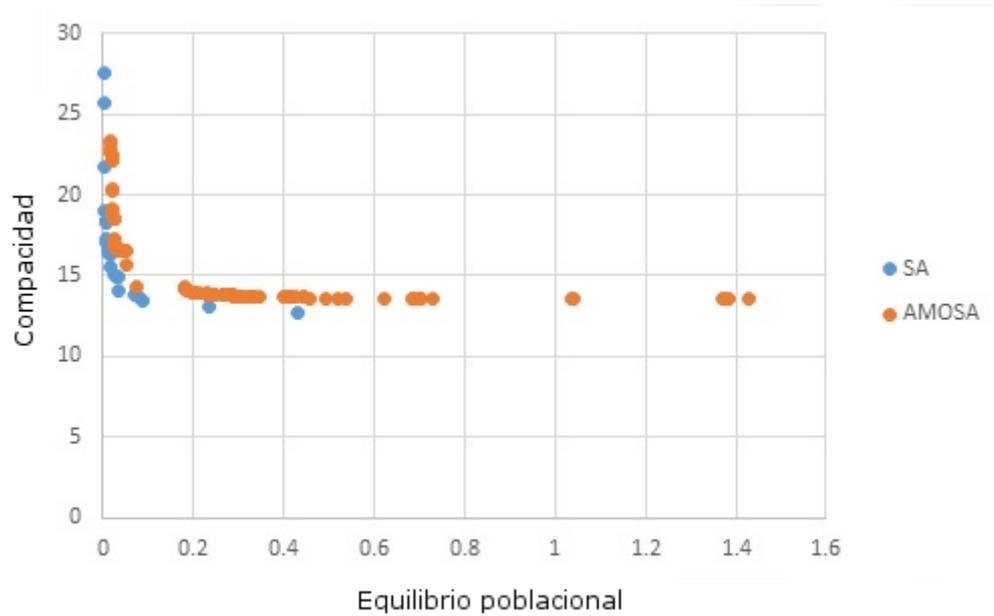


Figura 19: Frenes de Pareto aproximados para el estado de México.

Fuente: Elaboración propia.

## A.1.8 Guanajuato

- 4,663,032 habitantes
- 3,005 secciones
- 14 distritos a generar

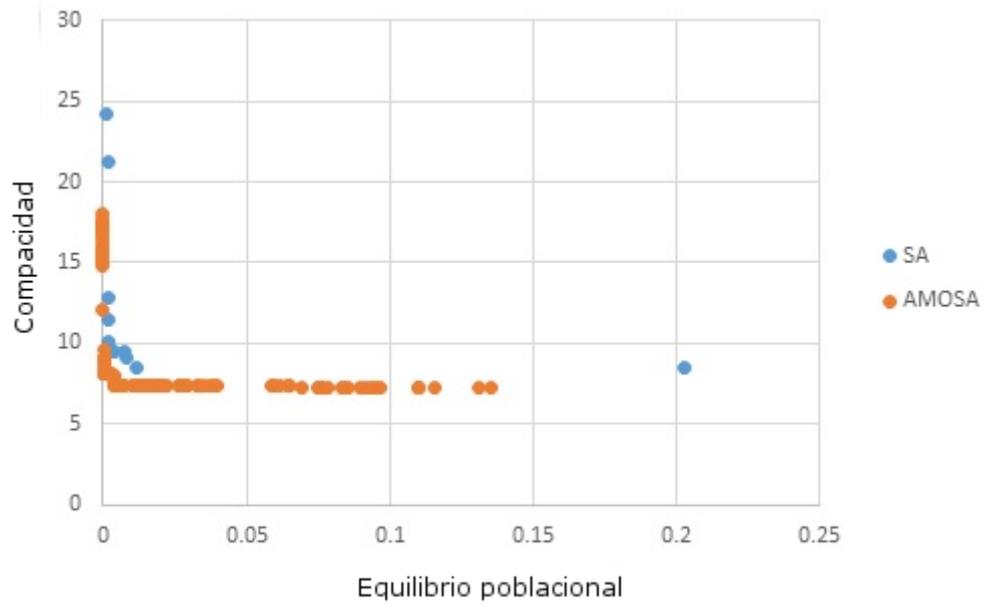


Figura 20: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Guanajuato.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.9 Guerrero

- 3,079,649 habitantes
- 2,784 secciones
- 9 distritos a generar

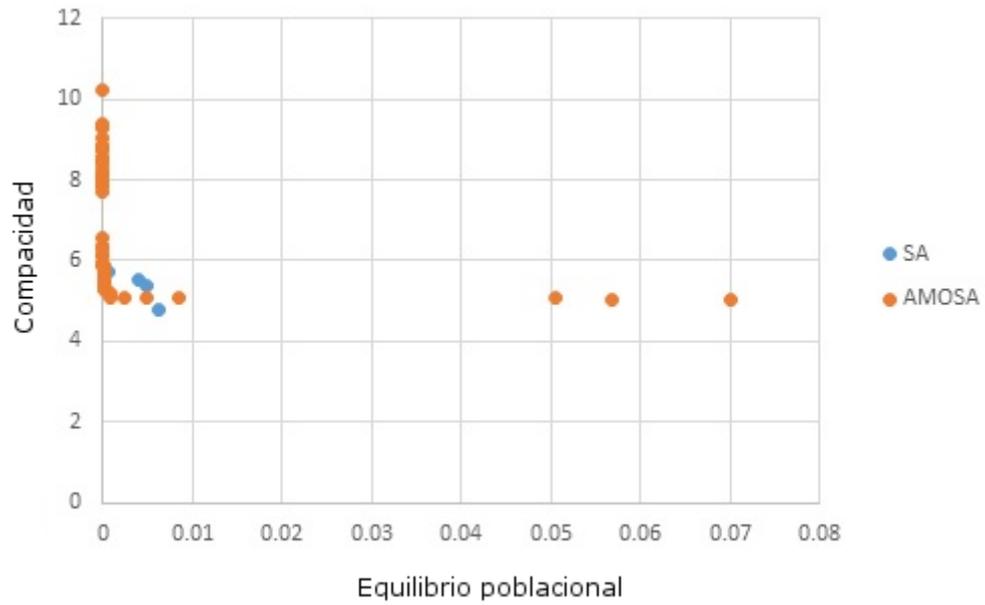


Figura 21: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Guerrero.  
Fuente: Elaboración propia.

A.1.10 *Hidalgo*

- 2,235,591 habitantes
- 1,707 secciones
- 7 distritos a generar

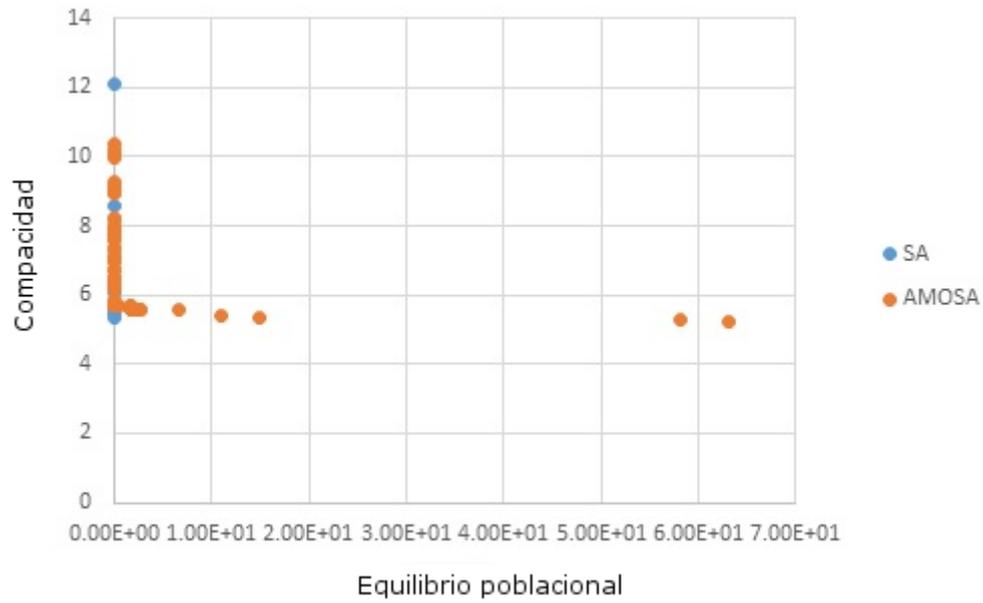


Figura 22: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Hidalgo. Fuente: Elaboración propia.

## A.1.11 Jalisco

- 6,322,002 habitantes
- 3,326 secciones
- 19 distritos a generar

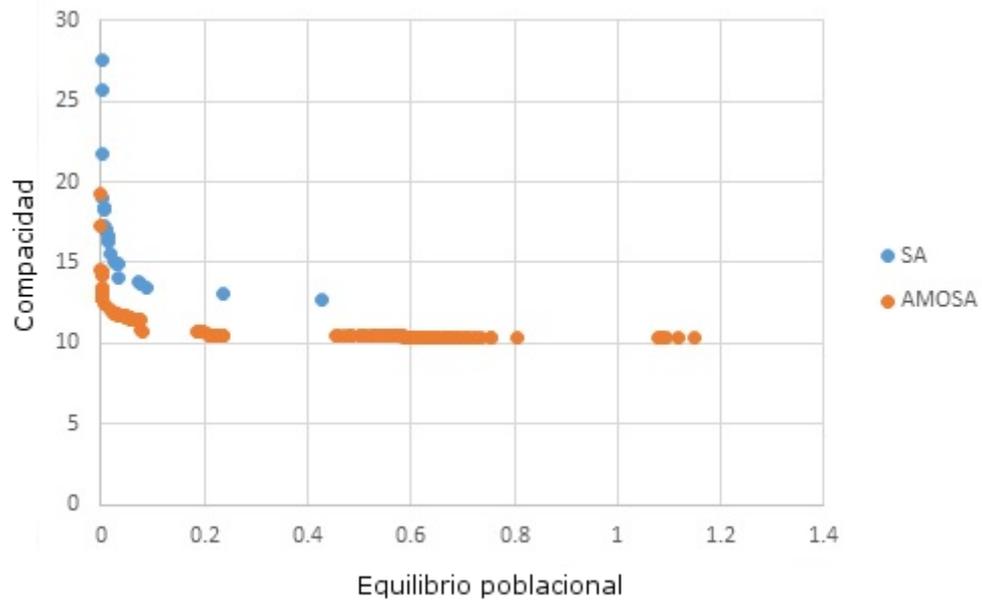


Figura 23: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Jalisco.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.12 Michoacán

- 3,985,667 habitantes
- 2,667 secciones
- 12 distritos a generar

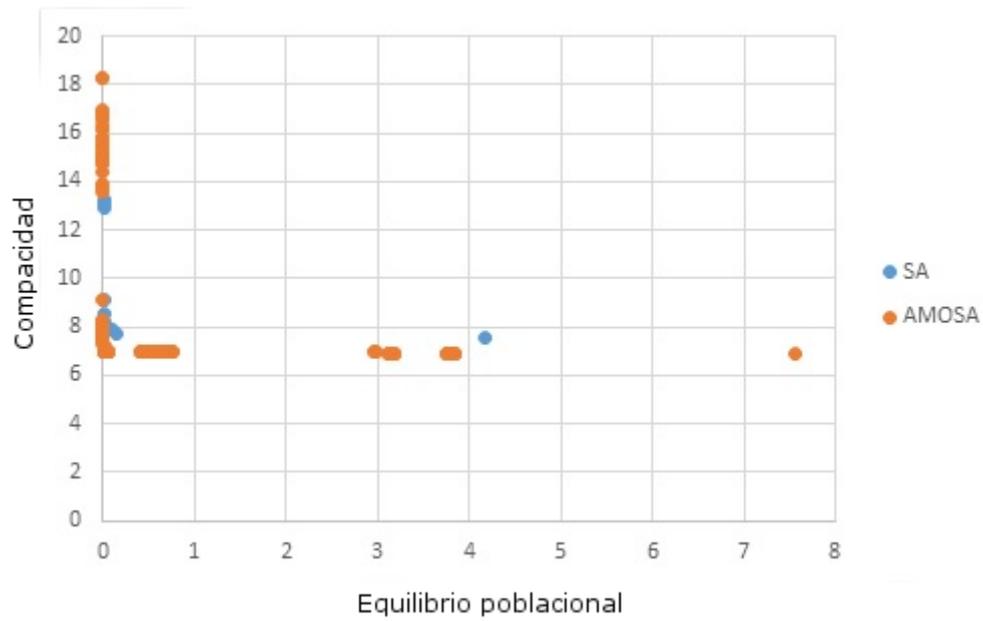


Figura 24: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Michoacán.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.13 Morelos

- 1,555,296 habitantes
- 908 secciones
- 5 distritos a generar

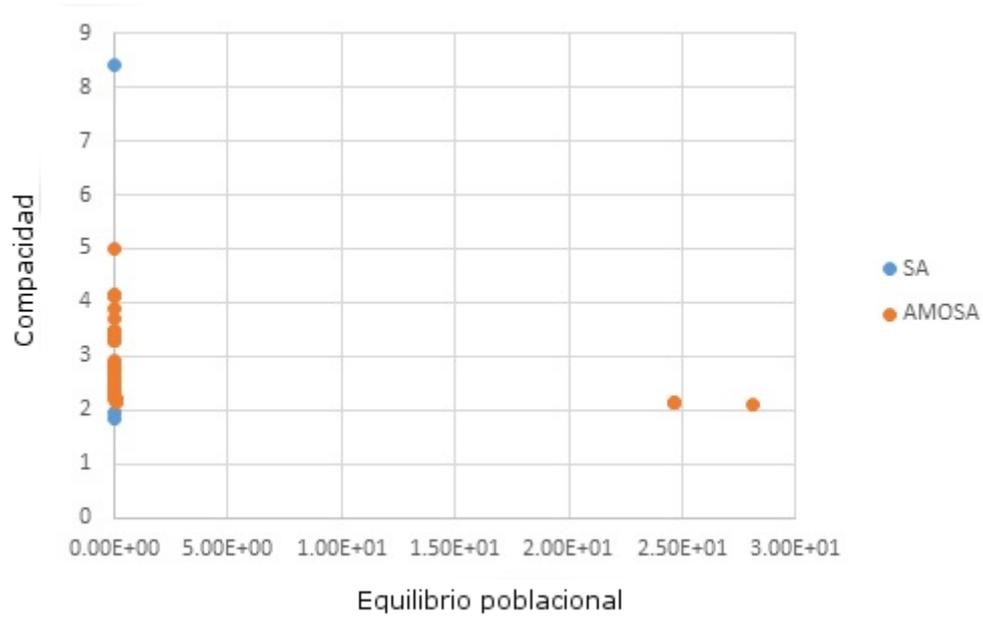


Figura 25: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Morelos.  
Fuente: Elaboración propia.

A.1.14 *Nuevo León*

- 3,834,141 habitantes
- 2,135 secciones
- 12 distritos a generar

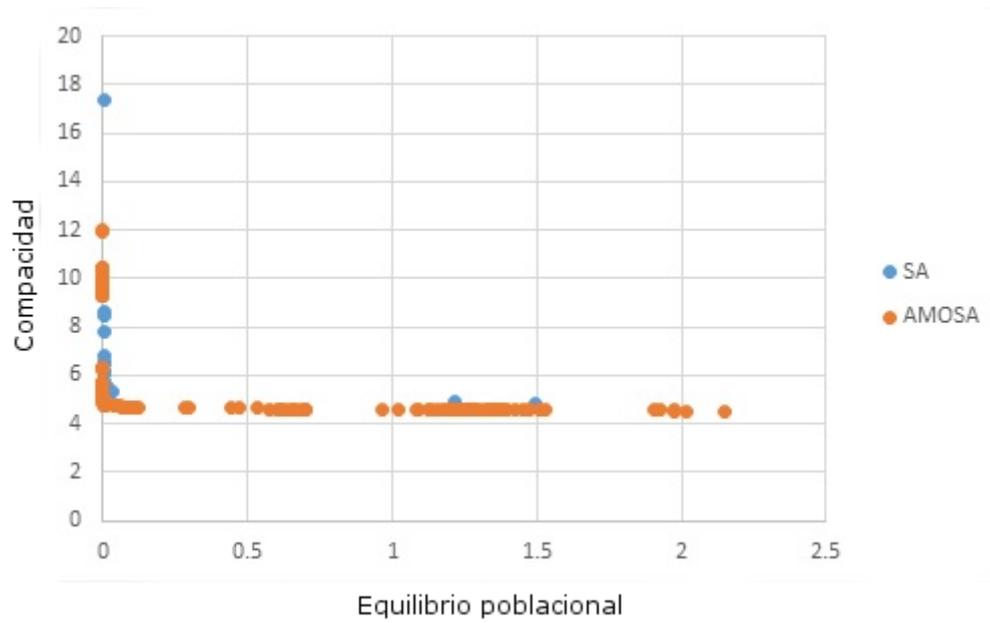


Figura 26: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Nuevo León.

Fuente: Elaboración propia.

A.1.15 *Querétaro*

- 1,404,306 habitantes
- 695 secciones
- 4 distritos a generar

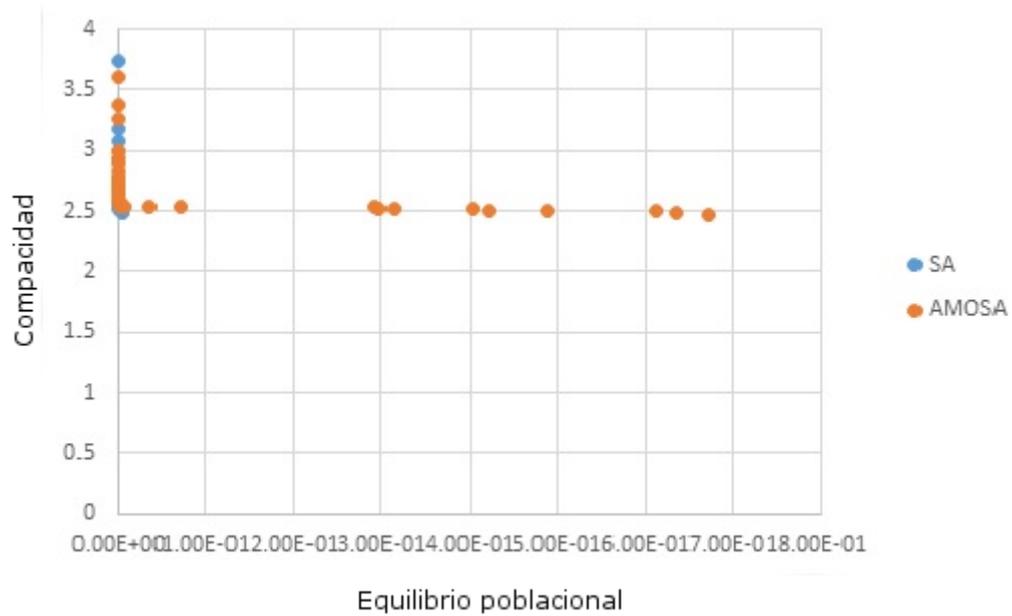


Figura 27: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Querétaro.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.16 Sinaloa

- 2,536,844 habitantes
- 3,789 secciones
- 8 distritos a generar

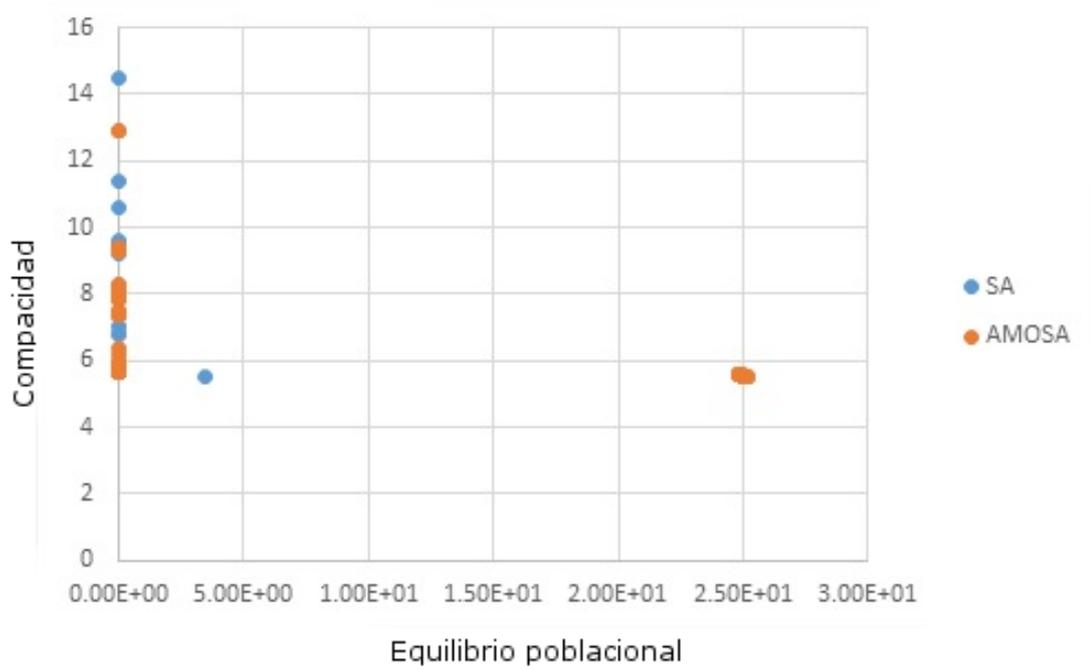


Figura 28: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Sinaloa.  
Fuente: Elaboración propia.

A.1.17 *San Luis Potosí*

- 2,299,360 habitantes
- 1,795 secciones
- 7 distritos a generar

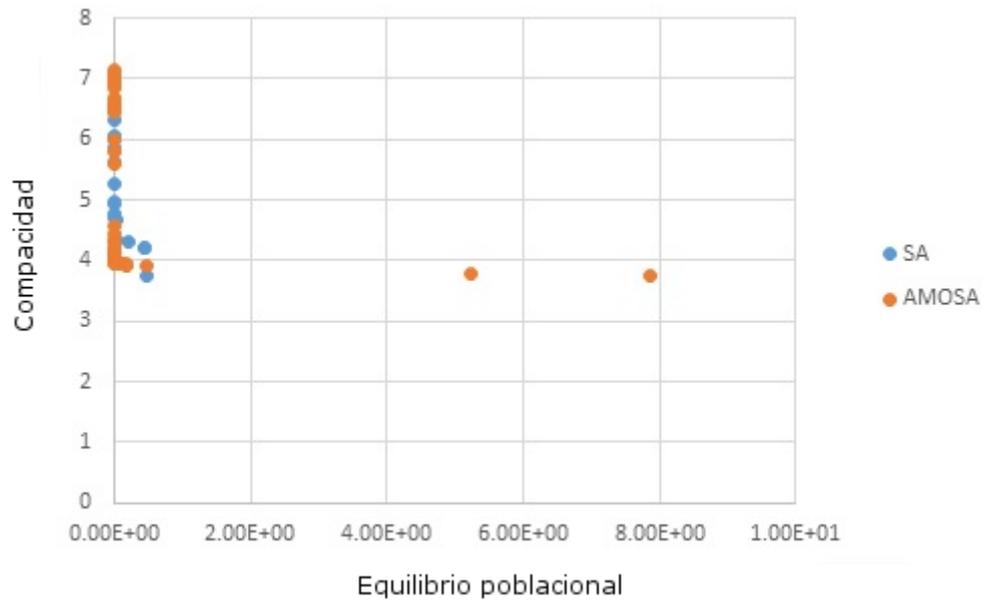


Figura 29: Frenes de Pareto aproximados para el estado de San Luis Potosí.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.18 Sonora

- 2,216,969 habitantes
- 1,331 secciones
- 7 distritos a generar

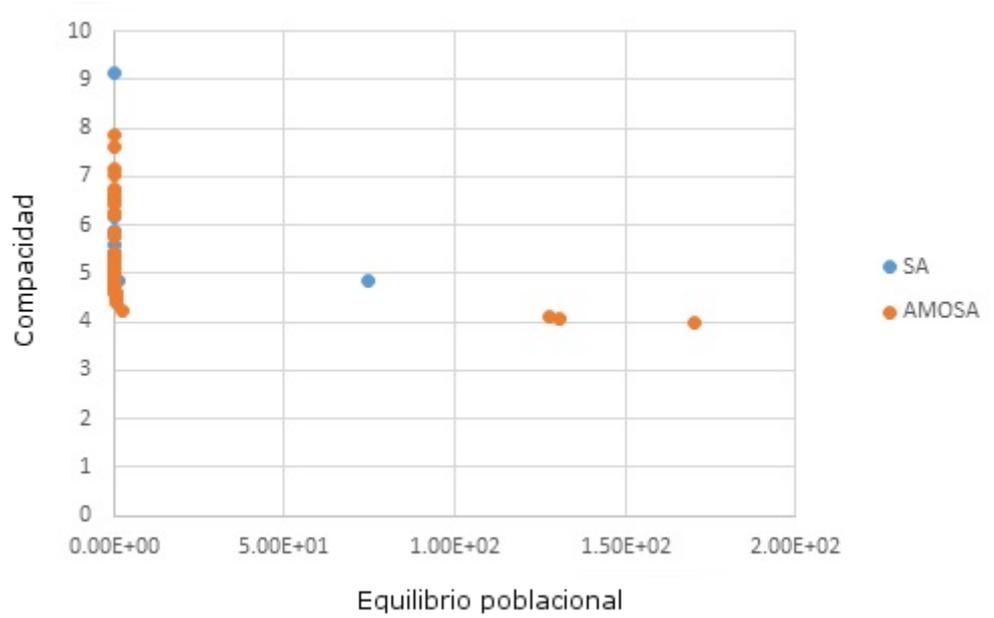


Figura 30: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Sonora.

Fuente: Elaboración propia.



A.1.20 *Tamaulipas*

- 2,753,222 habitantes
- 1,739 secciones
- 8 distritos a generar

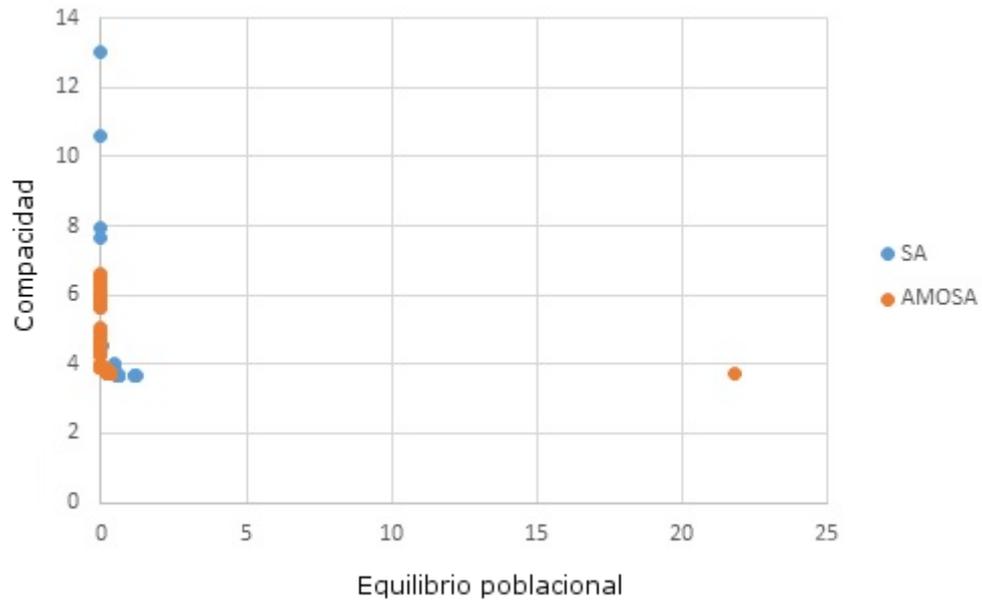


Figura 32: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Tamaulipas.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.21 Veracruz

- 6,908,975 habitantes
- 4,722 secciones
- 21 distritos a generar

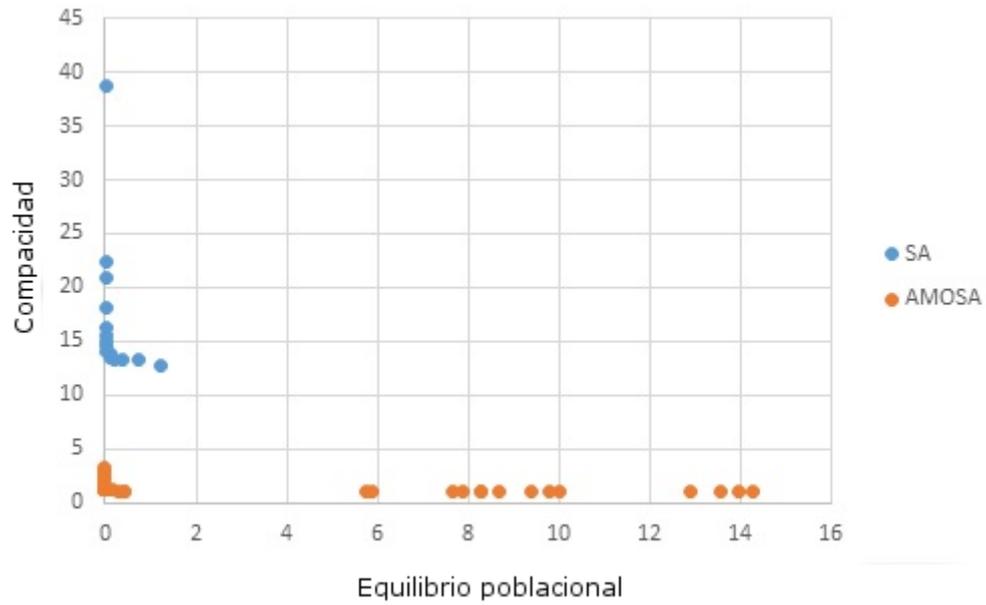


Figura 33: Frentes de Pareto aproximados para el estado de Veracruz.  
Fuente: Elaboración propia.

## A.1.22 Yucatán

- 1,658,210 habitantes
- 1,059 secciones
- 5 distritos a generar

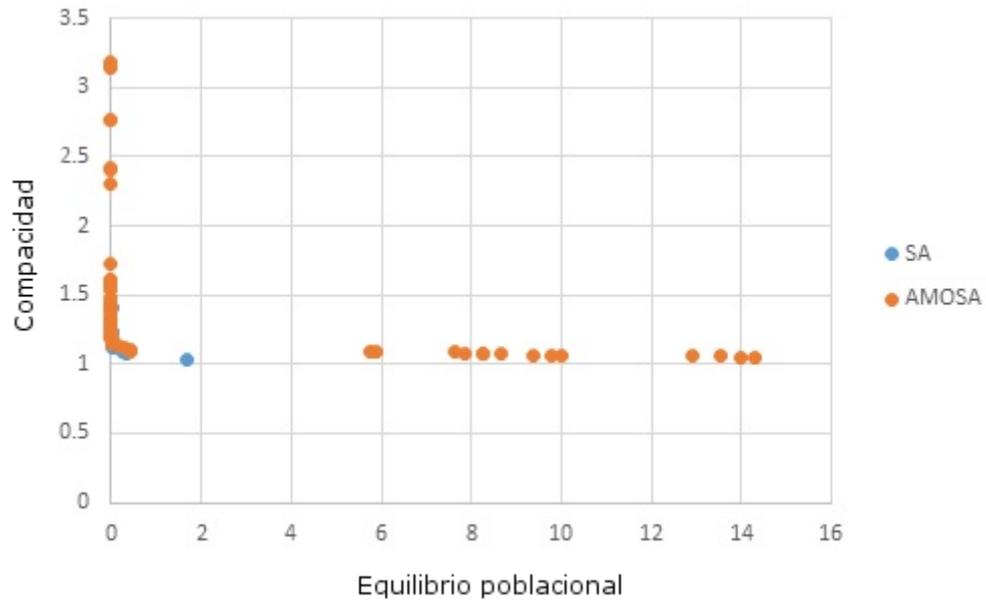


Figura 34: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Yucatán.

Fuente: Elaboración propia.

A.1.23 *Zacatecas*

- 1,353,610 habitantes
- 1,882 secciones
- 4 distritos a generar

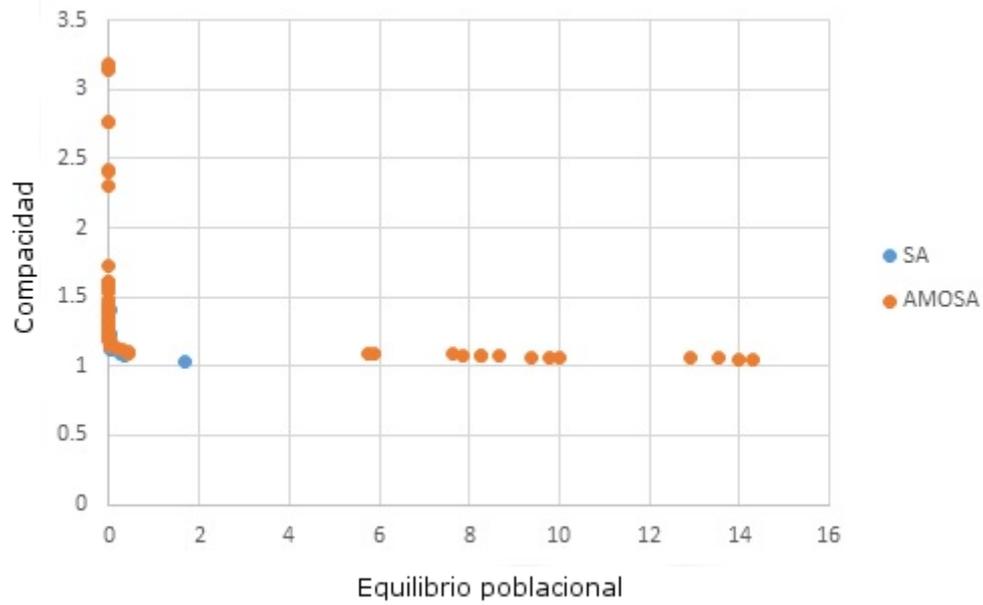


Figura 35: Frenes de Pareto aproximados para el estado de Zacatecas.

Fuente: Elaboración propia.

## A.2 MEDIDAS DE DESEMPEÑO

En este apartado se muestran las medidas de desempeño que permiten comparar la calidad, en términos de convergencia y dispersión, de los frentes de Pareto generados.

A.2.1 *Hipervolumen*

Tal como se abordó en el apartado de resultados, el hipervolumen permite evaluar la convergencia y diversidad de un frente de Pareto dado. Esta métrica calcula el volumen en el espacio de los objetivos que es cubierto por un conjunto de soluciones. En la siguiente tabla se presenta la medida para los estados de interés obtenidos para AMOSA-D y RS INE resultado de 10 ejecuciones para cada instancia y algoritmo. En la primera columna se especifica el estado, y en las siguientes se muestra el valor mínimo, máximo y promedio obtenidos. También se muestra el hipervolumen del frente generado por las mejores soluciones no dominadas de todas las corridas para cada estado.

Tabla 8: Hipervolumen. Fuente: Elaboración propia.

Estado	AMOSA-D				RS INE			
	Mínimo	Máximo	Media	Mejor	Mínimo	Máximo	Media	Mejor
Baja California	995131.811	997274.738	996802.122	997278.691	996418.8541	996734.1993	996552.4027	996734.7224
Chiapas	990275.18	993532.919	992403.279	993533.011	992350.1804	992923.3665	992676.0549	992924.1421
Chihuahua	994876.161	996545.059	995986.329	996546.381	995335.7601	996155.0182	995817.1254	996155.8823
Coahuila	995561.246	996845.107	996178.17	996845.107	996220.8268	996733.5502	996483.4414	996733.7865
Distrito Federal	987787.767	993368.779	990679.365	993369.591	987945.5157	988873.4251	988417.6107	988876.5314
Durango	997297.443	997988.405	997692.954	997988.405	997742.2396	997949.9131	997818.444	997949.9546
Estado de México	984370.505	986430.749	985388.159	986464.66	986023.4006	987096.9242	986490.9512	987098.5764
Guanajuato	989561.837	992722.081	991856.992	992722.152	990937.0272	991554.4907	991212.9107	991555.1298
Guerrero	992628.204	994969.349	993699.817	994969.349	994451.7455	995228.7816	994845.5136	995228.9763
Hidalgo	993090.932	994759.478	993927.624	994759.608	994496.6205	994644.466	994569.5434	994644.5914
Jalisco	987685.999	989664.814	988740.726	989674.075	985758.4014	987124.6054	986562.6549	987129.3875
Michoacán	988414.4672	993142.844	992408.6572	993143.444	991797.4715	992456.0718	992033.2035	992459.5114
Morelos	997411.931	993142.844	997648.151	997900.274	997938.8115	998142.0892	998026.2158	998142.1937
Nuevo León	992428.656	995466.964	994400.904	995467.011	994331.1125	994844.0831	994560.7269	994844.887
Querétaro	997195.66	997528.181	997446.846	997528.181	997345.6627	997522.67	997438.9543	997522.7118
Sinaloa	991985.646	994473.633	993366.758	994477.623	993566.7827	994457.8748	993956.8939	994460.4706
San Luis Potosí	994544.028	996265.42	995934.649	996265.424	995558.7504	996238.0933	995905.7426	996238.7676
Sonora	994756.426	995974.797	995396.346	995981.149	994753.2476	995148.4056	995020.1126	995152.664
Tabasco	995319.377	996287.178	995819.16	996288.824	995829.9284	996136.5606	995953.5696	996136.7671
Tamaulipas	995524.917	996244.725	996025.755	996279.082	995513.0379	996260.7227	995882.9137	996262.6204
Veracruz	986016.104	987544.676	986813.35	987545.532	996188.7532	996344.5747	996228.3824	996384.1253
Yucatán	998124.108	998947.547	998594.545	998947.682	998781.384	998960.0589	998869.0536	998960.1861
Zacatecas	996087.415	996648.596	996292.511	996676.144	996188.7532	996344.5747	996228.3824	996384.1253

## A.2.2 Cobertura de conjuntos

En la siguiente tabla se muestra la medida *Set Coverage* o cobertura de conjuntos para las instancias de prueba. Esta métrica calcula el número de soluciones de un conjunto que son dominados por otro y se especifica en términos de porcentajes. Es importante mencionar que un mayor porcentaje indica una mayor calidad de las soluciones obtenidas por un algoritmo en comparación con otro.

Tabla 9: Cobertura de conjuntos. Fuente: Elaboración propia.

Estado	(AMOSA-D,RS INE)	(RS INE,AMOSA-D)
Baja California	0.928571	0.016
Chiapas	0.5	0.58046
Chihuahua	1	0
Coahuila	1	0
Distrito Federal	1	0
Durango	0.714286	0.127273
Estado de México	0	1
Guanajuato	1	0
Guerrero	0.75	0.061538
Hidalgo	0.555556	0.684564
Jalisco	1	0
Michoacán	1	0
Morelos	0.25	0.279412
Nuevo León	1	0
Querétaro	0.5	0.363636
Sinaloa	0.933333	0.257669
San Luis Potosí	0.9375	0.010417
Sonora	1	0
Tabasco	0.6	0.366972
Tamaulipas	0.428571	0.004132
Veracruz	1	0
Yucatán	0.4	0.412698
Zacatecas	0.6	0.089552

A.2.3 *Porcentaje de participación*

El porcentaje de participación es otra medida que permite evaluar la calidad de los frentes. Para cada uno de los estados considerados se generó su frente de Pareto global aproximado, el cual consiste en la combinación de las soluciones no dominadas encontradas para AMOSA y RS. Una mayor proporción de participación sugiere que el algoritmo tiene un desempeño superior. En la siguiente tabla se presentan los porcentajes de participación de cada algoritmo.

Tabla 10: Porcentaje de participación. Fuente: Elaboración propia.

Estado	AMOSA-D	RS INE
Baja California	0.993421	0.006579
Chiapas	0.906667	0.093333
Chihuahua	1	0
Coahuila	1	0
Distrito Federal	1	0
Durango	0.954545	0.045455
Estado de México	0	1
Guanajuato	1	0
Guerrero	0.982456	0.017544
Hidalgo	0.916667	0.083333
Jalisco	1	0
Michoacán	1	0
Morelos	0.911765	0.088235
Nuevo León	1	0
Querétaro	0.833333	0.166667
Sinaloa	0.990291	0.009709
San Luis Potosí	0.986667	0.013333
Sonora	1	0
Tabasco	0.962264	0.037736
Tamaulipas	0.93617	0.06383
Veracruz	1	0
Yucatán	0.846154	0.153846
Zacatecas	0.934426	0.065574

## A.2.4 Llamadas a la función objetivo

Para evaluar la eficiencia de los algoritmos se registró el número promedio de llamadas a la función objetivo durante todas las corridas. En la etapa de pruebas se buscó que el número de llamadas fuera similar, sin embargo, debido a las características de los algoritmos no fue posible equiparar esta cantidad. El número de llamadas a la función objetivo se muestra a continuación.

Tabla 11: Promedio de llamadas a la función objetivo. Fuente: Elaboración propia.

Estado	AMOSAD	RS INE
Baja California	1500000	5264900
Chiapas	1375200	5264900
Chihuahua	1425600	5264900
Coahuila	1360800	5264900
Distrito Federal	1356400	5264900
Durango	1552400	5264900
Estado de México	1287600	5264900
Guanajuato	1363600	5264900
Guerrero	1426800	5264900
Hidalgo	1411200	5264900
Jalisco	1379200	5264900
Michoacán	1374800	5264900
Morelos	1530800	5264900
Nuevo León	1414000	5264900
Querétaro	1536000	5264900
Sinaloa	1406000	5264900
San Luis Potosí	1399200	5264900
Sonora	1453200	5264900
Tabasco	1494000	5264900
Tamaulipas	1438000	5264900
Veracruz	1328000	5264900
Yucatán	1527200	5264900
Zacatecas	1467600	5264900

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] J. Kalcsics, S. Nickel y M. Schröder, «Toward a unified territorial design approach: Applications algorithms and GIS Integration,» *TOP*, vol. 13, n° 1, pp. 1-56, 2005.
- [2] M. Altman, «Is Automation the Answer: The Computational Complexity of Automated Redistricting,» *Rutgers Computer and Law Technology Journal*, vol. 23, n° 1, pp. 81-141, 1997.
- [3] H. Lei, R. Wang y G. Laporte, «Solving a multiobjective dynamic stochastic districting and routing problem with a co-evolutionary algorithm,» *Computers and Operations Research*, n° 67, pp. 12-24, 2016.
- [4] P. Moreno Regidor, J. García Lopez y M. Á. Manso Callejo, «Zone design of specific sizes using adaptive additively weighted Voronoi diagrams,» *International Journal of Geographical Information Science*, vol. 26, n° 10, pp. 1811-1829, 2012.
- [5] S. Nagel, «Computers & the Law & Politics of Redistricting,» *Polity*, vol. 5, n° 1, pp. 77-93, 1972.
- [6] A. Cliff y P. Haggett, «On the efficiency of alternative aggregations in region building problems,» *Environment and Planning*, vol. 2, n° 3, p. 285-294, 1970.
- [7] A. Cliff, P. Haggett, P. Ord, J. Bassett, K. Bassett y R. Davies, *Elements of spatial structure : a quantitative approach*, Cambridge University Press, 1975.
- [8] M. Keane, «The size of region-building problem,» *Environment and Planning A*, vol. 7, n° 5, pp. 575-577, 1975.
- [9] K. Gilbert, D. Holmes y R. Rosenthal, «A Multiobjective Discrete Optimization Model for Land Allocation,» *Management Science*, vol. 31, n° 12, pp. 1509-1522, 1985.
- [10] M. R. Garey y D. Johnson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Nueva York: W.H. Freeman and Company, 1979.
- [11] B. Fleischmann y J. Paraschis, «Solving a large scale districting problem: A Case Report,» *Computers and Operations Research*, vol. 15, n° 6, p. 521-533, 1988.
- [12] J. Ferland y G. Guennette, «Decision Support System for the School Districting Problem,» *OR Practice*, vol. 38, n° 1, pp. 15-21, 1990.
- [13] N. Perrier, A. Langevin, and J. F. Campbell, «A survey of models and algorithms for winter road maintenance. Part I: system design for spreading and plowing,» *Computers & Operations Research*, vol. 33, no. 1, pp. 209-238, 2006.
- [14] G. Ghiani, D. Laganà, E. Manni, R. Musmanno, and D. Vigo, «Operations research in solid waste management: A survey of strategic and tactical issues,» *Computers & Operations Research*, vol. 44, pp. 22-32, 2014.

- [15] S. D'Amico, S. Wang, R. Batta y C. Rump, «A simulated annealing approach to police district design,» *Computers and Operations Research*, vol. 29, pp. 667-684, 2002.
- [16] P. Bergey, G. Ragsdale y M. Hoskote, «A Simulated Annealing Genetic Algorithm for the Electrical Power Districting Problem,» *Annals of Operation Research*, vol. 121, pp. 33-55, 2003
- [17] L. López Levi y E. S. Reyes Garmendia, «Repensar la distritación electoral,» *Veredas-UAM Xochimilco*, n° 23, pp. 119-135, 2011.
- [18] M. Á. Gutiérrez Andrade y E. A. Rincón García, «Redistricting by square cells,» *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, n° 5845, pp. 669-679, 2009.
- [19] E. Rincon García, «Diseño de zonas geoméricamente compactas utilizando celdas cuadradas,» *Facultad de Ingeniería*, 2010.
- [20] The Electoral Knowledge Network, Diciembre 2016. [En línea]. Disponible en: <http://aceproject.org/ace-en/topics/bd/onePage>
- [21] Instituto Nacional Electoral, «Modelo Matemático y Algoritmos. Trabajos de Distritación Electoral 2015-2016.,» 2016.
- [22] C.-I. Choung, «Taming the Gerrymander—Statistical physics approach to Political Districting Problem,» *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 369, n° 2, pp. 799-808, 2006.
- [23] R. G. Niemi, B. Grofman, C. Carlucci y T. Hofeller, «Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering,» *The Journal of Politics*, vol. 52, n° 4, pp. 1155-1181, 1990.
- [24] E. A. Rincón García, M. Á. Gutiérrez Andrade, S. G. de los Cobos Silva y P. Lara Velázquez, «Nuevas Medidas de Compacidad Geométrica para el Diseño de Zonas,» *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, vol. 19, n° 2, pp. 57-73, 2012.
- [25] D. Smith, M. GoodChild y P. Longley, «Geospatial Analysis: A comprehensive guide to principles, techniques and Software Tools», 2015.
- [26] H. Young, «Measuring the Compactness of Legislative Districts,» *Legislative Studies Quarterly*, vol. 13, n° 1, pp. 105-111, 1988.
- [27] M. Altman, «Modeling the effect of mandatory district compactness on partisan gerrymanders,» *Political Geography*, vol. 17, n° 8, p. 989-1012, 1998.
- [28] S. Angel, J. Parent y D. Civco, «Ten compactness properties of circles: measuring shape in geography,» *The Canadian Geographer*, vol. 54, n° 2, pp. 441-461, 2010.
- [29] J. G. Matsusaka y T. W. Gilligan, «Public choice principles of redistricting,» *Public Choice*, vol. 129, pp. 381-398, 2006.
- [30] W. Li, M. Goodchild y R. Church, «An efficient measure of compactness for two-dimensional shapes and its application in regionalization problems,» *International Journal of Geographical Information Science*, vol. 27, n° 3, pp. 1227-1250, 2013

- [31] T. Shirabe, «Districting modeling with exact contiguity constraints,» *Environment & Planning B: Planning & Design*, vol. 36, n° 6, pp. 1053-1066, Noviembre 2009.
- [32] F. Ricca, A. Scozzari y B. Simeone, «Political Districting: from classical models to recent approaches,» *Annals of Operation Research*, n° 204, pp. 271-299, 2013.
- [33] J. Cova y R. Church, «Contiguity Constraints for Single-Region Site Search Problems,» *Geographical Analysis*, vol. 32, n° 4, pp. 306-329, 2000.
- [34] W. Macmillan, «Redistricting in a GIS environment: An optimization algorithm using switching points,» *Journal of Geographical Systems*, vol. 3, pp. 167-80, 2001.
- [35] J. Williams, «Convex Land Acquisition with Zero-One Programming,» *Planning and Design*, vol. 30, pp. 255-270, 2003.
- [36] T. Shirabe, «A Model of Contiguity for Spatial Unit Allocation,» *Geographical Analysis*, vol. 37, pp. 2-16, 2010.
- [37] N. Xiao, «A Unified Conceptual Framework for Geographical Optimization Using Evolutionary Algorithms,» *Annals of the Association of American Geographers*, vol. 98, n° 4, pp. 785-817, 2008.
- [38] M. Escandón y L. López, «Integridad de comunidades y redistribución urbana,» *Política y Cultura*, pp. 45-63, 2003.
- [39] L. López Levi, «Redistribución electoral en México: logros pasados y retos futuros,» *Investigaciones geográficas*, n° 61, Agosto 2006.
- [40] IFE, «Acuerdo del consejo general del instituto federal electoral por el que se establece que, para la elección federal del año 2003, se utilizará la demarcación territorial de los trescientos distritos electorales federales uninominales,» 2002.
- [41] Corona et.al, «La Redistribución Electoral Mexicana, 1996, Memoria. Evaluación de la redistribución electoral Mexicana de 1996,» México, 1996.
- [42] IFE, 2004. [En línea].
- [43] S. Hess, J. Weaver, H. Siegfellat, J. Whelan y P. Zitlau, «Nonpartisan political redistricting by computer,» *Operation Research*, n° 13, pp. 998-1006, 1965.
- [44] R. Garfinkel y G. Nemhauser, «Optimal political districting by implicit enumeration techniques,» *Manag Sci*, n° 16, pp. 495-508, 1970.
- [45] S. Hess y S. Samuels, «Experiences with a sales districting model: criteria and implementation,» *Management Science*, vol. 18, pp. 41-54, 1971.
- [46] B. Schoepfle y R. Church, «New network representation of a classic school districting problem,» *Socio-Econ Plann Sci*, vol. 25, n° 3, pp. 189-197, 1991.
- [47] L. Muyltermans, D. Cattrysse y D. Van Oudheusden, «Districting for salt spreading operations,» *European Journal of Operation Research*, vol. 139, pp. 521-532, 2002
- [48] M. Blais, S. Lapierre y G. Laporte, «Solving a home-care districting problem in an urban setting,» *Journal of Operation Research Society*, vol. 54, pp. 1141-1147, 2003.

- [49] F. Bacao, S. Caeiro, M. Painho, P. Goovaerts, y M. H. Costa, «Delineation of estuarine management units: Evaluation of an automatic procedure,» *Geostatistics for Environmental Applications*, pp. 429–442, 2005.
- [50] M. DesJardins, B. Bulka, R. Carr, A. Hunt, P. Rathod y P. Rheingans, «Heuristic Search and Information Visualization Methods for School Redistricting,» de *Proceeding of the 18th conference on Innovative applications of artificial intelligence*, 2007.
- [51] F. Tavares-Pereira, J. Figueira, V. Mousseau y R. Bernard, «Multiple criteria districting problems: The public transportation pricing system of the Paris region,» *Annals of Operation Research*, vol. 1, n<sup>o</sup> 154, 2007.
- [52] A. Basu, J. S. B. Mitchell, and G. Sabhnani, «Geometric Algorithms for Optimal Airspace Design and Air Traffic Controller Workload Balancing,» 2008 *Proceedings of the Tenth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, pp. 75–89, 2008.
- [53] Ríos-Mercado, R. Z., y Fernández, E., «A reactive GRASP for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements,» *Computers & Operations Research*, vol. 36, n<sup>o</sup> 3, pp. 755–776, 2009.
- [54] Z. Hu, Y. Ding, y Q. Shao, «Immune co-evolutionary algorithm based partition balancing optimization for tobacco distribution system,» *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no. 3, pp. 5248–5255, 2009.
- [55] B. J. Lunday, H. Sherali y K. E. Lunday, «The coastal seaspace patrol sector design and allocation problem,» *Comput Manag Sci*, vol. 9, pp. 483–514, 2012.
- [56] H. Lei, G. Laporte, Y. Lui y Z. Tao, «Dynamic design of sales territories,» *Computers and Operations Research*, n<sup>o</sup> 56, pp. 84–92, 2015.
- [57] R. Ríos-Mercado y H. Jair-Escalante, «GRASP with pathrelinking for commercial districting,» *Expert systems with applications*, n<sup>o</sup> 44, pp. 102–113, 2016.
- [58] S. Yanki, O. Surer y B. Oztaysi, «Designing sustainable energy regions using genetic algorithms and location-allocation approach,» *Energy*, vol. 97, pp. 161–172, 2016.
- [59] Z. Hu, Y. Ding, y Q. Shao, «Immune co-evolutionary algorithm based partition balancing optimization for tobacco distribution system,» *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no. 3, pp. 5248–5255, 2009.
- [60] A. Mehrotra, E. Johnson y G. Nemhauser, «An Optimization Based Heuristic for Political Districting,» *Management Science*, vol. 44, n<sup>o</sup> 8, pp. 1100–1114, 1998.
- [61] J. Guo, G. Trinidad y N. Smith, «MOZART: A multi-objective zoning and aggregation tool,» de *Proceedings of the Phillipines Comp*, 2000.
- [62] B. Bozkaya, E. Erkut y G. Laporte, «A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting,» *European Journal of Operation Research*, vol. 144, pp. 12–26, 2003.

- [63] S. L. Forman and Y. Yue, «Congressional Districting Using a TSP-Based Genetic Algorithm,» *Genetic and Evolutionary Computation — GECCO 2003 Lecture Notes in Computer Science*, pp. 2072–2083, 2003.
- [64] F. Baçao, V. Lobo y M. Painho, «Applying genetic algorithms to zone design,» *Soft Computing*, n° 9, pp. 341–348, September 2005.
- [65] C. Bong y Y. Wang, «A Multiobjective Metaheuristic for Spatial-based Redistricting,» *Applied Soft Computing Technologies: The Challenge of Complexity*, vol. 34, pp. 235–250, 2006.
- [66] F. Ricca y B. Simeone, «Local search algorithms for political districting,» *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 3, n° 189, p. 1409–1426, 2008.
- [67] D. Guo y H. Jin, «iRedistrict: Geovisual analytics for redistricting optimization,» *Journal of Visual Languages and Computing*, n° 22, pp. 279–289, 2011.
- [68] E. Rincón-García, M. Gutiérrez-Andrade, S. de-los-Cobos-Silva, P. Lara-Velázquez, A. Ponsich y R. Mora-Gutiérrez, «A Multiobjective Algorithm for Redistricting,» *JART*, vol. 11, pp. 324–330, 2013.
- [69] M. Castelli, R. Henriques y L. Vanneschi, «A geometric semantic genetic programming system for the electoral districting problem,» *Neurocomputing*, n° 154, pp. 200–207, 2015.
- [70] E. A. Rincón-García, M. Á. Gutiérrez-Andrade, S. G. De-Los-Cobos-Silva, R. A. Mora-Gutiérrez, A. Ponsich, and P. Lara-Velázquez, «A comparative study of population-based algorithms for a political districting problem,» *Kybernetes*, vol. 46, no. 1, pp. 172–190, Sep. 2017.
- [71] M. Altman y M. P. McDonald, «BARD: Better automated redistricting,» *Journal of Statistical Software*, vol. 42, n° 4, pp. 1–28, 2011.
- [72] M. Črepinšek, L. Shih-Hsi y M. Mernik, «Exploration and exploitation in evolutionary algorithms: A survey,» *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 45, n° 3, 2013.
- [73] A. Osyczka, *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN*, Programs Ellis Horwood Limited, 1984.
- [74] V. Van, «Multiobjective Evolutionary Algorithm Research: A History and Analysis,» Ohio, 1998.
- [75] A. Coello, G. Lamont y D. van Veldhuizen, *Evolutionary algorithms for solving multiobjective problems*, New York: Springer, 2007.
- [76] C. Hwang y A. Masud, *Multiple Objective Decision Making — Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*, vol. 164, Berlin: Springer, 1979.
- [77] J. Cohon y D. Marks, «A Review and Evaluation of Multiobjective Programming Techniques,» *Water Resources Research*, p. 208–220, 1975.
- [78] A. Goicochea, L. Duckstein y M. Fogel, «Multiple Objectives under Uncertainty: an Illustrative Application of PROTRADE,» *Water Resources Research*, n° 1979, pp. 203–210.

- [79] J. Cohon, *Multiobjective Programming and Planning*, Nueva York: Academic Press, 1978.
- [80] D. Monarchi y L. Duckstein, «Interactive Multiobjective Programming in Water Resources,» *Water Resources Research*, pp. 837-850, 1973.
- [81] E.-G. Talbi, *Metaheuristics: From Design to Implementation*, John Wiley & Sons, 2009.
- [82] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Segunda ed., Springer, 2005.
- [83] E. Zitzler, M. Laumanns y S. Bleuler, «A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization,» de *Workshop on Multiple Objective Metaheuristics (MOMH 2002)*.
- [84] L. Zadeh, «Optimality and Nonscalar-Valued Performance Criteria,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 1, n° 8, pp. 59-60, 1963.
- [85] K. Koski, *Multicriterion Optimization in Structural Design*, E. Artrekk, R. Gallager y K. Ragsdell, Edits., John Wiley and Sons, 1984.
- [86] A. Wierzbicki, «On the Use of Penalty Functions in Multiobjective Optimization,» de *Proceedings of the International Symposium on Operations Research*, 1978.
- [87] A. Charnes y W. Cooper, «Management models and industrial applications of linear programming,» *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 9, n° 1, pp. 63-54, Agosto 1961.
- [88] Y. Iriji, *Managements Goals and Accounting for Control*, 1965.
- [89] L. Duckstein, «Multiobjective Optimization in Structural Design: The Model Choice Problem,» de *New Directions in Optimum Structural Design*, John Wiley and Sons, 1984, pp. 459-481.
- [90] K. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic, 1999.
- [91] S. Rao, «Multiobjective Optimization in Structural Design with Uncertain Parameters and Stochastic Processes,» *AIAA Journal*, p. 1670-1678, 1984
- [92] J. Schaffer, *Multiobjective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*, V. University, Ed., Nashville: Tesis de Doctorado, 1984.
- [93] C. Chow y H. Tsui, «Autonomous agent response learning by a multi-species particle swarm optimization,» de *Congress on Evolutionary Computation (CEC'04)*, Portland, 2004.
- [94] K. Parsopoulos,, D. Tasoulis y M. Vrahatis, «Multiobjective optimization using parallel vector evaluated particle swarm optimization,» de *IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications (AIA 2004)*, Innsbruck,Austria, 2004.
- [95] C. Mariano y E. Morales, «MOAQ and ANT-Q algorithm for multiple objective optimization problems,» de *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation, Orlando,Florida, 1999*.
- [96] D. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.

- [97] K. Deb, S. Agrawal, A. Patrab y T. Meyarivan, «A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II,» de Proceedings of the Parallel Problem Solving for Nature VI Conference, 2000.
- [98] J. Knowles y D. Corne, «The Pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for Pareto multiobjective optimization,» de Congress on Evolutionary Computation, Piscataway, NJ, 1999.
- [99] E. Zitzler, M. Laumanns y H. Thiele, «SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm,» Zurich, 2001.
- [100] C. Fonseca y P. Fleming, «Genetic algorithms for multiobjective optimization,» de Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms, San Mateo, CA., 416–423, 1993.
- [101] D. Goldberg y J. Richardson, «Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization,» de 2nd International Conference on Genetic Algorithms (ICGA'2), Hillsdale, NJ, 1987.
- [102] N. Srinivas y K. Deb., «Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms,» Evolutionary Computation, vol. 2, n° 3, p. 221–248, 1995.
- [103] J. Horn y N. Nafpliotis, «Multiobjective optimization using the niched Pareto genetic algorithm,» Illinois, USA, 1993.
- [104] S. Obayashi, S. Takashi y Y. Takeguchi, «Niching and elitist models for multi-objective genetic algorithms,» de In Parallel Problem Solving from Nature (PPSN'5), 1998.
- [105] G. Rudolph y A. Agapie, «Convergence properties of some multi-objective evolutionary,» de CEC'00 Congress on Evolutionary, Piscataway, NJ., 2000.
- [106] B. Wei y W. Chai, «A multiobjective hybrid metaheuristic approach for GIS-based spatial zone model,» J. Math. Model. Algorithms, vol. 3, n° 3, p. 245–261, 2004.
- [107] M. Scott, R. Cromley y E. Cromley, «Multi-objective analysis of school district regionalization alternatives in Connecticut,» The Professional Geographer, vol. 1, n° 48, pp. 1-14, 1996.
- [108] F. Ricca, «A multicriteria districting heuristic for the aggregation of zones and its use in computing origin destination matrices,» Information Systems and Operational Research, vol. 42, n° 1, pp. 61-77, 2004.
- [109] M. Salazar Aguilar, R. Ríos Mercado y J. González Velarde, «A bi-objective programming model for designing compact and balanced territories in commercial districting,» Transportation Research Part C: Emerging Technologies, vol. 19, n° 5, pp. 885-889, 2011.
- [110] A. Salazar-Aguilar, R. Ríos-Mercado y J. L. González-Velarde, «GRASP strategies for a bi-objective commercial territory design problem,» 2013.
- [111] A. Salazar-Aguilar, R. Ríos-Mercado, J. González-Velarde y J. Molina, «Multiobjective scatter search for a commercial territory design problem,» Annals of Operation Research, n° 199, pp. 343-360, 2012

- [112] L. Silva de Assis, P. Morelato-Franca y F. Luiz-Usberti, «A redistricting problem applied to meter reading power distribution networks,» *Computers and Operations Research*, vol. 41, pp. 65-75, 2014.
- [113] Y. Zhang y D. E. Brown, «Police patrol districting method and simulation evaluation using agent-model & GIS,» *Security Informatics*, vol. 2, n° 7, pp. 1-13, 2013.
- [114] L. Vanneschi, R. Henriques, and M. Castelli, «Multi-objective genetic algorithm with variable neighbourhood search for the electoral redistricting problem,» *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 36, pp. 37-51, 2017.
- [115] S. Bandyopadhyay, S. Saha., U. Maulik y K. Deb, «A simulated annealing based multi-objective optimization algorithm: AMOSA,» *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 12, n° 3, pp. 269-283, 2008.
- [116] S. Kirkpatrick, C. Gelatt y M. Vecchi, «Optimization by Simulated Annealing,» *Science*, vol. 220, n° 4598, pp. 671-680, May 1983.
- [117] J. Aerts y G. Heuvelink, «Using simulated annealing for resource allocation,» *International Journal of Geographical Information Science*, vol. 16, n° 6, p. 571-587, 2002.
- [118] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller y E. Teller, «Equation of state calculations by fast computing machines,» *Journal of Chemical Physics*, vol. 21, n° 6, 1953.
- [119] S. Geman y D. Geman, «Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, n° 6, pp. 721-741, 1984.
- [120] H. Kumar Singh, T. Ray, y W. Smith, «C-PSA: Constrained Pareto simulated annealing for constrained multi-objective optimization,» *Information Sciences*, vol. 180, no. 13, pp. 2499-2513, Jan. 2010.
- [121] P. Serafini, «Simulated Annealing for multiobjective optimization problems,» de 10th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, 1992.
- [122] E. Ulungu, J. Teghem, P. Fortemps y D. Tuyttens, «MOSA method: a tool for solving multi-objective combinatorial optimization problems,» *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 8, n° 4, pp. 221-236, 1999.
- [123] P. Czyzak y A. Jaskiewicz, «Pareto simulated annealing-a metaheuristic technique for multiple objective combinatorial optimization,» *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, vol. 7, n° 1, pp. 34-47, 1998.
- [124] A. Suppapitnarm, K. Seffen, G. Parks y P. Clarkson, «A simulated annealing algorithm for multi-objective optimization,» *Engineering Optimization*, vol. 33, n° 1, pp. 59-85, 2000.
- [125] D. Nam y C. Park, «Multi-objective simulated annealing: a comparative study to evolutionary algorithms,» *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 2, n° 2, pp. 87-97, 2000.

- [126] B. Suman, «Study of self-stopping PDMOSA and performance measure in multi-objective optimization,» *Computers and Chemical Engineering*, vol. 29, n° 5, p. 1131–1147, 2001.
- [127] K. Smith, R. Everson y J. Fieldsend, «Dominance measures for multiobjective simulated annealing,» de *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2004.
- [128] S. Saha y S. Bandyopadhyay, «A generalized automatic clustering algorithm in a multiobjective framework,» *Applied Soft Computing*, n° 13, p. 89–108, 2013.
- [129] A. Kumar, S. Saha y A. Ekbal, «A new semi-supervised clustering technique,» *Appl Intell*, n° 43, p. 633–661, 2015.
- [130] X. Wang, Z. Xuan, «Prediction of Transcription start sites based on feature selection using AMOSA,» *Comput. Syst. Bioinformatics Conf.* 2007. p. 183-193.
- [131] P. Subbaraj, S. Saravanasanka y S. Anand, «Multi-objective Optimization in VLSI,» de *ICLIICC 2011, CCIS, Berlin Heidelberg*, 2011.
- [132] S. Sengupta y S. Bandyopadhyay,, «De Novo Design of Potential RecA Inhibitors using Multiobjective Optimization,» *IEEE/ACM TRANSACTIONS ON COMPUTATIONAL BIOLOGY AND BIOINFORMATICS*, vol. 9, n° 4, pp. 1139-1154, July/August 2012.
- [133] A. K. Jain y R. C. Dubes , «Algorithms for Clustering Data«. Engle-Wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [134] M. Birattari, *Tuning Metaheuristics: A Machine Learning Perspective*, Springer, 2009.
- [135] E. Zitzler, «Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications.,» Switzerland, 1999.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00006

Matrícula: 2133802750

DISEÑO Y DESARROLLO DE UN ALGORITMO MULTI OBJETIVO HEURÍSTICO PARA LA DEMARCACIÓN DE ZONAS GEOGRÁFICAS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 9:00 horas del día 22 del mes de junio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. MANUEL ORDORICA MELLADO
- DR. MIGUEL ANGEL GUTIERREZ ANDRADE
- DR. ERIC ALFREDO RINCON GARCIA
- DR. ROMAN ANSELMO MORA GUTIERREZ
- DR. SERGIO GERARDO DE LOS COBOS SILVA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (CIENCIAS Y TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION)

DE: ALEJANDRO LARA CABALLERO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ALEJANDRO LARA CABALLERO  
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESÚS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. MANUEL ORDORICA MELLADO

VOCAL

CANCELADO

DR. MIGUEL ANGEL GUTIERREZ ANDRADE

VOCAL

DR. ERIC ALFREDO RINCON GARCIA

VOCAL

DR. ROMAN ANSELMO MORA GUTIERREZ

SECRETARIO

DR. SERGIO GERARDO DE LOS COBOS SILVA