

"APLICACION DEL FORMALISMO ADM A UNA COSMOLOGIA DE SIMETRIA PLANA, CON SOLUCIONES PERTURBATIVAS".

TESIS QUE PRESENTA

✓ GARCIA DIAZ JOSE SOCORRO

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE ✓ MAESTRIA EN
FISICA

DICIEMBRE, 1985. ✓

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

✓ DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

Angel Oct. 91

093038

D E D I C A T O R I A

A MI ESPOSA: Por su amor y comprensión
que guardó durante el tiempo
que duro este trabajo.

Con especial cariño
a los niños: RENE Y MARIO.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Michael P. Ryan por sus observaciones, comentarios y sugerencias; sin las cuales este trabajo no se hubiera realizado.

A los Drs. Octavio Obregón D y Octavio Pimentel R, por sus observaciones, críticas y sugerencias que le hicieron a este trabajo.

I N D I C E

	pags.
I.- Introducción	2
II.- Cálculo de la densidad lagrangiana total	7
A) Sobre los lagrangianos	7
B) El lagrangiano de la geometría	8
C) El lagrangiano de los campos de materia	14
III.- Ecuaciones de Movimiento	21
IV.- Soluciones Perturbativas	26
V.- Comentarios finales	38
VI.- Apéndice	39
VII.- Bibliografía	45.

I.- INTRODUCCION

Las cosmologías de simetría plana en relatividad general son estudiadas desde el punto de vista del problema de valores iniciales. La clase de cosmología que existe, en la cual se tiene la misma curvatura extrínseca en cualquier punto de la superficie inicial $t=t_0$, es una cosmología homogénea anisotrópica o isotrópica, pero en la cual el parámetro de anisotropía o ecuación de estado está variando en función de una sola coordenada en esta superficie (en nuestro caso, es la coordenada z).

Las soluciones que tienen simetría plana, han sido recientemente estudiadas por Szekeres (1970, 1972), Lapedes (1977), Kahn y Penrose (1971) en donde tales sistemas gravitacionales pueden ser tratados esencialmente por métodos analíticos.

Nosotros trataremos el caso en donde hay una contribución de materia, y en principio se puede dar solución perturbativa a alguna de las ecuaciones de campo para una variable en forma integral y a las demás variables de campo obtenerlas por cuadraturas.

En el presente trabajo utilizamos el formalismo dado por Arnowitt-Deser y Misner (ADM) a una métrica con simetría plana, en la cual los elementos de g_{uv} tienen parámetros funcionales que consideraremos nuestras variables de campo que van a gobernar a dicho espacio-tiempo en particular.

Para poder describir el universo particular tratado aquí, se verá posteriormente que sólo necesitaremos dar la cantidad $\mathcal{L}$ ($= \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_c$), llamada densidad lagrangiana y de ella obtener las ecuaciones de movimiento que van a gobernar en dicho espacio-tiempo, mediante la variación de esta densidad lagrangiana.

La primera parte de esta densidad lagrangiana, la cual está compuesta sólo de geometría, en el formalismo ADM tiene la forma*

$$\mathcal{L}_G = N ({}^{(3)}g)^{1/2} {}^{(4)}R = -g_{ik} \dot{\pi}^{ik} - N H^0 - N_j H^j - \\ - 2 \left[g^{1/2} N^{ij} + N_j \pi^{ij} - \frac{1}{2} N^i \pi^k_k \right]_{,i}$$

$$\text{con } H^0 = -g^{1/2} \left\{ {}^{(3)}R + g^{-1} \left[\frac{1}{2} (\pi^k_k)^2 - \pi^{sj} \pi_{sj} \right] \right\} \\ H^j = -2 \pi^{ij}_{;i}$$

donde la barra vertical denota derivada covariante tridimensional formada por medio de g_{ij} ; el punto y la coma significan en nuestro caso $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$, $_{,i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$; $g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij}$ $i, j = x, y, z$; g es el determinante de g_{ij} satisfaciendo ${}^{(4)}g = \det g_{uv} = -N^2 g$; g^{ij} es el recíproco de g_{ij} ; ${}^{(3)}R$ es el escalar de curvatura en una hipersuperficie a $t = \text{cte}$. Se ve inmediatamente que al variar $\mathcal{L}_G$ con respecto a N y N_j uno obtiene las ecuaciones de contricción $H^0 = 0$, $H^j = 0$.

Nuestra densidad lagrangiana correspondiente a los campos de materia no introduce nuevos grados de libertad al sistema, o sea, no adiciona términos $p \dot{q}$ (similares a $\pi^{ij} \dot{g}_{ij}$), sino que su efecto es solamente modificar las ecuaciones de constricción $H^0 = 0$ y $H^j = 0$, ya que de ellas y con ayuda de otras ecuaciones de movimiento, obtendremos 2 ecuaciones que serán equivalentes a dos ecuaciones de Einstein.

En sí esta densidad lagrangiana de materia tiene que ver con el tensor de energía-momento T_{uv} , que en nuestro caso será el de un fluido sin presión (polvo) dado por $T_{uv} = \rho \mathcal{U}_u \mathcal{U}_v$, donde ρ es la densidad de materia y $\mathcal{U}_u$ la cuadrivelocidad; así mismo T_{uv} tiene las siguientes condiciones sobre las velocidades $\mathcal{U}^u \mathcal{U}_u = -1$, $\mathcal{U}_{u;v} \mathcal{U}^v = 0$, $\mathcal{U}^v = g^{uv} \mathcal{U}_u$

(*) ver ref. 5

$$u^u = (u^0, 0, 0, u^z).$$

Mediante transformaciones de las coordenadas y momentos canónicos, transformamos dicha densidad lagrangiana a una forma más conveniente y de este modo se obtienen ecuaciones de movimiento que deben ser equivalentes a las ecuaciones de Einstein, en la forma que encuentra Lapedes* (ver apéndice, en donde hacemos un desarrollo minucioso de ello).

Al obtener las ecuaciones de movimiento, que se dan en la parte III uno observa que todas las variables de campo están acopladas, luego entonces su solución es muy complicada. La complejidad viene dada por la funcionalidad del tensor T_{uv} , ya que se considera a las velocidades y densidad ρ como funciones de (z, t) ; en muchos artículos sólo la han considerado función de t y así obtienen soluciones.

Dada la complejidad que se menciona, estas soluciones las trataremos sólo en forma aproximada y es lo que llamaremos soluciones perturbativas, que se dan en la parte IV.

La manera en que está ordenado el material de este trabajo, hace que un tema sea esencial para lo subsecuente del trabajo, así en la parte II obtenemos la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ dada en términos de variables de campo y sus momentos canónicos apropiados a nuestra métrica, así como las ecuaciones de constricción obtenidas al variar $\mathcal{L}$ respecto a N y N_j , donde estas N y N_j están determinadas por una norma elegida a nuestro criterio para obtener la equivalencia de nuestras ecuaciones de movimiento, con las de Einstein (ver apéndice).

En la parte III, determinamos las ecuaciones de movimiento que gobernarán a las partículas en este espacio-tiempo particular, a partir de

(*) ver ref. 1

la variación de $\mathcal{L}$ empleando las ecuaciones de Euler-lagrange para campos continuos*.

En la parte IV se da una solución a las ecuaciones de movimiento para las funciones ψ , γ y λ , las cuales vienen a ser nuestras variables de campo apropiadas. Al observar las ecuaciones diferenciales parciales para dichas funciones, a primera instancia, las soluciones son muy difíciles de encontrar, por lo cual nosotros sólo tomaremos para este trabajo hasta una aproximación lineal, que posteriormente podría ser la base para seguir a otros órdenes de aproximación. De aquí el nombre de soluciones perturbativas.

Hay que aclarar que la ecuación diferencial parcial para la función λ , es la ecuación de ondas hiperbólicas** que depende en su solución general de parámetros que están a nuestra elección. Las soluciones para las otras componentes de la métrica no nos dan más información sobre estos parámetros.

A algunas variables sólo se les da un tratamiento formal mediante las funciones de Green, como se verá posteriormente; además se observa el comportamiento de estas soluciones muy particulares de este espacio-tiempo, con ayuda de funciones Bessel.

En la parte V damos algunas observaciones de interes, emanadas durante el desarrollo de la tesis, así como de comentarios generales para una mayor clarificación de lo espuesto aquí.

Finalmente se da un apéndice, el cual en su totalidad está referido a Lapedes, para ver su equivalencia con este trabajo,

(*) ver refs 3 y 4

(**) ver ref 6.

ya que Lapedes emplea las ecuaciones de Einstein en su artículo.

Las marcas * que aparecen en la parte superior de alguna palabra, sirven para etiquetar las referencias.

II. CALCULO DE LA DENSIDAD LAGRANGIANA TOTAL.

II.A. SOBRE LOS LAGRANGIANOS.

Para resolver cualquier conjunto de ecuaciones acopladas, es necesario separar las variables independientes importantes de las variables que se pueden prescribir o que se encuentran resolviendo ecuaciones suplementarias.

A partir de las ecuaciones de segundo orden de Einstein

$$G = 8\pi T$$

toda esta separación ya está hecha, a la derecha están puestas las fuentes de curvatura y sobre la izquierda están puestas las expresiones de curvatura en la forma en que uno necesita conocer las componentes de la métrica, que tienen que ser dos veces diferenciables.

Determinando apropiadamente cuáles son los datos de valores iniciales a dar, uno descubre que la guía más útil para proseguir adelante, es el principio variacional de Hilbert

$$I = \int \mathcal{L} d^4x = \int L (-^{(4)}g)^{1/2} d^4x = \text{extremo}$$

o la variante de ADM.

En este trabajo se empleará el formalismo ADM para obtener información sobre la métrica de un modelo de simetría plana, incluyendo fuentes de materia.

La función de Lagrange L (escalar) o la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = (-^{(4)}g)^{1/2} L$ es construida de geometría solamente cuando se trata de espacios completamente curvos, pero los campos de

materia normalmente se presentan como fuentes y contribuyen también en la densidad lagrangiana.

Así, de este modo escribimos a $\mathcal{L}_T$ como:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{geometría}} + \mathcal{L}_{\text{campos}} = (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} L$$

donde $L = L_{\text{geometría}} + L_{\text{campos}}$, con la condición de que la variación de la densidad lagrangiana de campo con respecto a los componentes de la métrica provea de todas formas, una de las más convenientes para generar las correspondientes componentes del tensor simétrico de energía-momentos de los campos.

Para obtener las dos densidades lagrangianas de la geometría y de los campos, las construiremos independientemente una de la otra.

II.B. EL LAGRANGIANO DE LA GEOMETRIA.

A partir de la expresión de la densidad lagrangiana

$$16\pi \mathcal{L}_G = (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} {}^{(4)}R \quad (1)$$

en el formalismo ADM, $\mathcal{L}_G$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = N({}^{(3)}g)^{\frac{1}{2}} {}^{(4)}R = & -g_{ik} \dot{\pi}^{ik} - N H^0 - N_j H^j - \\ & - 2 \left[(g)^{\frac{1}{2}} N^{ii} + N_j \pi^{ij} - \frac{1}{2} N^i \pi^k_{i} \right]_{,i} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{donde } H^0 = -g^{\frac{1}{2}} \left\{ {}^{(3)}R + g^{-1} \left[\frac{1}{2} (\pi^k_{k})^2 - \pi^{sj} \pi_{sj} \right] \right\}$$

$$H^j = -2 \pi^{ij}_{i,j}$$

con π^{ij} comportándose como una densidad tensorial.

$$\text{Pero como } [g_{ij} \pi^{ij}]^{\cdot} = \dot{g}_{ij} \pi^{ij} + g_{ij} \dot{\pi}^{ij}$$

y al hacer la variación de nuestra densidad lagrangiana, $(g_{ij} \pi^{ij})^{\cdot}$

no contribuye --esto lo metemos en la divergencia que queda-- de este modo la densidad que emplearemos es:

$$\mathcal{L}_G = \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N H^0 - N_j H^j - \text{DIVERGENCIA}.$$

Queremos transformar esta $\mathcal{L}_G$, de tal manera que tenga información adicional sobre los campos que existan en el espacio-tiempo en particular a elegir.

De esta manera damos la métrica de un modelo con simetría plana:

$$ds^2 = e^{\mu-\psi} (-dt^2 + dz^2) + e^{\psi} dx^2 + t^2 e^{-\psi} dy^2. \quad (3)$$

que tiene información de nuestras variables de campo μ y ψ , donde $\mu = \mu(z, t)$; $\psi = \psi(z, t)$.

Siguiendo a Kuchar*, reemplazamos t^2 por λ^2 , donde $\lambda = \lambda(z, t)$ es fijada por la elección adecuada de la norma, y además tomamos que el momento canónico π^{ij} será:

$$\pi^{ij} = \text{diag} (\pi^{11}, \pi^{22}, \pi^{33}).$$

y la tri-geometría es

$$e^{\mu-\psi} dz^2 + e^{-\psi} \lambda^2 dy^2 + e^{\psi} dx^2.$$

El primer sumando de $\mathcal{L}_G$ es:

$$\begin{aligned} \pi^{ij} \dot{g}_{ij} &= \dot{\psi} e^{\psi} \pi^{11} - \dot{\psi} e^{-\psi} \lambda^2 \pi^{22} + 2\lambda \dot{\lambda} e^{-\psi} \pi^{22} + \\ &\quad + (\dot{\mu} - \dot{\psi}) e^{\mu-\psi} \pi^{33}, \\ &= \dot{\psi} (e^{\psi} \pi^{11} - e^{-\psi} \lambda^2 \pi^{22} - e^{\mu-\psi} \pi^{33}) + \dot{\lambda} (2\lambda e^{-\psi} \pi^{22}) + \\ &\quad + \dot{\mu} (e^{\mu-\psi} \pi^{33}), \end{aligned}$$

(*) ver ref 10.

por lo tanto

$$\pi^{ij} \dot{g}_{ij} = \pi_{\psi} \dot{\psi} + \pi_{\lambda} \dot{\lambda} + \pi_{\mu} \dot{\mu}$$

con los momentos canónicos definidos como

$$\pi_{\psi} = e^{\psi} \pi^{11} - e^{-\psi} \lambda^2 \pi^{22} - e^{\mu-\psi} \pi^{33}$$

$$\pi_{\lambda} = 2 \lambda e^{-\psi} \pi^{22}$$

$$\pi_{\mu} = e^{\mu-\psi} \pi^{33}$$

los cuales son variables conjugadas a ψ , λ y μ , respectivamente.

De esta manera la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_G$ viene dada por

$$\mathcal{L}_G = \pi_{\psi} \dot{\psi} + \pi_{\lambda} \dot{\lambda} + \pi_{\mu} \dot{\mu} - N H^0 - N_z H^z$$

Como H^0 y H^z contienen π^{ij} , hagamos el cambio a los momentos nuevos.

Para resolver para π^{ij} se tiene que

$$\pi^{11} = e^{-\psi} \pi_{\psi} + e^{-2\psi} \lambda^2 \left(\frac{1}{2\lambda} e^{\psi} \pi_{\lambda} \right) + e^{\mu-2\psi} \left(e^{-\mu+\psi} \pi_{\mu} \right),$$

$$\pi^{22} = \frac{1}{2\lambda} e^{\psi} \pi_{\lambda},$$

$$\pi^{33} = e^{-(\mu-\psi)} \pi_{\mu},$$

$$\text{asi } \pi^{ij} = \text{diag} \left[e^{-\psi} \left(\pi_{\psi} + \frac{1}{2} \pi_{\lambda} + \pi_{\mu} \right), \frac{e^{\psi}}{2\lambda} \pi_{\lambda}, e^{-(\mu-\psi)} \pi_{\mu} \right]$$

$$\text{como } \pi^k_k = g_{ij} \pi^{ij} = g_{11} \pi^{11} + g_{22} \pi^{22} + g_{33} \pi^{33}$$

$$= e^\psi \left[e^{-\psi} \left(\pi_\psi + \frac{\lambda}{2} \pi_\lambda + \pi_\delta \right) \right] + e^{-\psi} \lambda^2 \frac{e^\psi}{2\lambda} \pi_\lambda + e^{\delta-\psi} e^{\psi-\delta} \pi_\delta,$$

$$\text{entonces } \pi^k_k = \pi_\psi + \lambda \pi_\lambda + 2 \pi_\delta$$

$$\text{Para } \pi^{ij} \pi_{ij} = (g_{11} \pi^{11})^2 + (g_{22} \pi^{22})^2 + (g_{33} \pi^{33})^2,$$

$$= \left(\pi_\psi + \frac{\lambda}{2} \pi_\lambda + \pi_\delta \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2} \pi_\lambda \right)^2 + (\pi_\delta)^2,$$

$$\pi^{ij} \pi_{ji} = \pi_\psi^2 + \frac{\lambda^2}{2} \pi_\lambda^2 + 2 \pi_\delta^2 + \lambda \pi_\delta \pi_\lambda + \lambda \pi_\psi \pi_\lambda + 2 \pi_\psi \pi_\delta,$$

se observa así que:

$$\frac{1}{2} (\pi^k_k)^2 - \pi^{ij} \pi_{ij} = -\frac{1}{2} \pi_\psi^2 + \lambda \pi_\lambda \pi_\delta,$$

unicamente nos falta $g^{\frac{1}{2}} (3)R$, el escalar de Ricci en una superficie a $t=\text{cte}$, para tener explícitamente a H en función de los nuevos momentos. $(3)g = \lambda^2 e^{\delta-\psi}$

Para ello se parte del tensor de Ricci

$$(3)R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^m_{ij} \Gamma^k_{mk} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^k_{mj},$$

$$\text{donde } \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} (g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}),$$

En esta parte, como $(3)R_{ij}$ sólo está compuesto de los coeficientes de la trimétrica, y las funciones δ y ψ dependen únicamente de z ($t=\text{cte}$), las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son las siguientes

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{1m} (g_{m1,3} + g_{m3,1} - g_{13,m}) = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,3} = \frac{1}{2} \psi'$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2} g^{2m} (g_{m2,3} + g_{m3,2} - g_{23,m}) = \frac{1}{2} g^{22} g_{22,3} = \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{1}{2} \psi'$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{3m} (g_{m1,1}^+ g_{m1,1}^- g_{11,m}) = -\frac{1}{2} g^{33} g_{11,3} = -\frac{1}{2} \psi' e^{2\psi-\delta}$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2} g^{3m} (g_{m2,2}^+ g_{m2,2}^- g_{22,m}) = -\frac{1}{2} g^{33} g_{22,3} = -\lambda \lambda' e^{-\psi} + \frac{1}{2} \lambda^2 \psi' e^{-\delta}$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2} g^{3m} (g_{m3,3}^+ g_{m3,3}^- g_{33,m}) = \frac{1}{2} g^{33} g_{33,3} = \frac{1}{2} (\delta' - \psi')$$

De lo anterior se sigue que

$${}^{(3)}R_{12} = {}^{(3)}R_{13} = {}^{(3)}R_{23} = 0, \text{ lo cual implica que}$$

$${}^{(3)}R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33},$$

$$= R_{11} (g_{11})^{-1} + R_{22} (g_{22})^{-1} + R_{33} (g_{33})^{-1}.$$

$$= -2 [R_{2112} (g_{11} g_{22})^{-1} + R_{3113} (g_{11} g_{33})^{-1} + R_{3223} (g_{22} g_{33})^{-1}].$$

De Eisenhart para una métrica diagonal tenemos:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R &= -2[(g_{11} g_{22} g_{33})^{-1} (g_{11} g_{22})^{\frac{1}{2}} ((g_{11})^{\frac{1}{2}})' ((g_{22})^{\frac{1}{2}})' + (g_{11} g_{33})^{-1} (g_{11} g_{33})^{\frac{1}{2}} \{ (g_{33})^{-1} [(g_{11})^{\frac{1}{2}}]' \}' + \\ &\quad + (g_{22} g_{33})^{-1} (g_{22} g_{33})^{\frac{1}{2}} \{ (g_{33})^{-1} ((g_{22})^{\frac{1}{2}})' \}'], \\ &= -2[(g_{11} g_{22} g_{33})^{-1} (g_{11} g_{22})^{\frac{1}{2}} ((g_{11})^{\frac{1}{2}})' ((g_{22})^{\frac{1}{2}})' + (g_{11} g_{33})^{-1} (g_{11})^{\frac{1}{2}} ((g_{11})^{\frac{1}{2}})'' - \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_{11} g_{33})^{-1} (g_{33})^{-3/2} (g_{11} g_{33})^{\frac{1}{2}} (g_{33})' ((g_{11})^{\frac{1}{2}})' + (g_{22} g_{33})^{-1} (g_{22})^{\frac{1}{2}} ((g_{22})^{\frac{1}{2}})'' - \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_{22} g_{33})^{-1} (g_{33})^{-3/2} (g_{22} g_{33})^{\frac{1}{2}} (g_{33})' ((g_{22})^{\frac{1}{2}})'], \\ &= -2[\lambda^{-1} e^{\psi-\delta} (e^{\psi/2})' (\lambda e^{-\psi/2})' + e^{\frac{\psi}{2}-\delta} (e^{\psi/2})'' - e^{\frac{3}{2}\psi-2\delta} (e^{\delta-\psi})' (e^{\psi/2})' + \\ &\quad + \lambda^{-1} e^{-\delta+\frac{3}{2}\psi} (\lambda e^{-\psi/2})'' - \frac{1}{2} \lambda' e^{-2\delta+\frac{5}{2}\psi} (e^{\delta-\psi})' (\lambda e^{-\psi/2})']. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \left[\frac{1}{2} \bar{\lambda}' \lambda' \psi' - \frac{1}{4} (\psi')^2 + \frac{1}{2} \psi'' + \frac{1}{4} (\psi')^2 - \frac{1}{4} \psi' \delta' + \frac{1}{4} (\psi')^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\lambda}' \lambda'' - \bar{\lambda}' \lambda' \psi' - \frac{1}{2} \psi'' + \frac{1}{4} (\psi')^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda}' \psi' \lambda' + \frac{1}{4} \psi' \delta' - \frac{1}{4} (\psi')^2 \right] e^{\psi-\delta} \\
 &= -2 e^{\psi-\delta} \left[\bar{\lambda}' \lambda'' + \frac{1}{4} (\psi')^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda}' \lambda' \delta' \right],
 \end{aligned}$$

De esta manera H^0 nos queda finalmente:

$$H^0 = -\lambda e^{\frac{1}{2}(\delta-\psi)} \left\{ -2 e^{\psi-\delta} \left[\bar{\lambda}' \lambda'' + \frac{1}{4} (\psi')^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda}' \lambda' \delta' \right] + \bar{\lambda}'^2 e^{-(\delta-\psi)} \left[-\frac{1}{2} \pi_\psi^2 + \lambda \pi_\lambda \pi_\delta \right] \right\},$$

y reduciendo términos

$$H^0 = e^{\frac{1}{2}(\psi-\delta)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\lambda}' \pi_\psi^2 - \pi_\delta \pi_\lambda + 2 \left[\lambda'' - \frac{1}{2} \lambda' \delta' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 \right] \right\}$$

Ahora, hagamos el cálculo de $H^j = (H^X, H^Y, H^Z)$

$$H^X = -2 \left[\pi_{,1}'' + \Gamma_{11}^1 \pi'' + \Gamma_{22}^1 \pi^{22} + \Gamma_{33}^1 \pi^{33} \right] = 0$$

$$H^Y = -2 \left[\pi_{,2}^{22} + \Gamma_{11}^2 \pi^{11} + \Gamma_{22}^2 \pi^{22} + \Gamma_{33}^2 \pi^{33} \right] = 0$$

$$H^Z = -2 \left[\pi_{,3}^{33} + \Gamma_{11}^3 \pi^{11} + \Gamma_{22}^3 \pi^{22} + \Gamma_{33}^3 \pi^{33} \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \left\{ (e^{\psi-\delta} \pi_\delta)' - \frac{1}{2} e^{2\psi-\delta} \psi' \left[e^{-\psi} \pi_\psi + e^{-2\psi} \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \bar{\lambda}' e^{\psi} \pi_\lambda \right) + e^{\delta-2\psi} (e^{-\delta+\psi} \pi_\delta) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (-\lambda \lambda' e^{-\delta} + \frac{1}{2} \lambda^2 \psi' e^{-\delta}) \left(\frac{1}{2} \bar{\lambda}' e^{\psi} \pi_\lambda \right) + \frac{1}{2} (\delta' - \psi') e^{\psi-\delta} \pi_\delta \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 e^{\psi-\delta} \left\{ (\psi' - \delta') \pi_\delta + \pi_\delta' - \frac{1}{2} \psi' \pi_\psi - \frac{1}{4} \psi' \lambda \pi_\lambda - \frac{1}{2} \psi' \pi_\delta - \frac{1}{2} \lambda' \pi_\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \lambda \psi' \pi_\lambda + \frac{1}{2} \delta' \pi_\delta - \frac{1}{2} \psi' \pi_\delta \right\},
 \end{aligned}$$

$$H^Z = e^{\psi-\delta} \left\{ -2 \pi_\delta' + \delta' \pi_\delta + \psi' \pi_\psi + \lambda' \pi_\lambda \right\}.$$

A partir de esto, nuestra $\mathcal{L}_G$ toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_G &= \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\lambda \dot{\lambda} + \pi_\delta \dot{\delta} - N e^{\frac{1}{2}(\psi-\delta)} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\lambda}' \pi_\psi^2 - \pi_\delta \pi_\lambda + 2 \left(-\frac{1}{2} \delta \lambda' + \lambda'' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 \right) \right\} \\
 &\quad - N_z e^{\psi-\delta} \left\{ -2 \pi_\delta' + \delta' \pi_\delta + \psi' \pi_\psi + \lambda' \pi_\lambda \right\}.
 \end{aligned}$$

pero como en nuestra densidad lagrangiana original aparecen las constricciones en la forma NH^0 , $N^Z H^Z$, al ponerla en la forma NH_0 , $N^Z H_Z$ aparece un signo (-) sólo en el término NH_0 y el otro queda igual.

$$\text{Asi } \mathcal{L}_G = \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\lambda \dot{\lambda} + \pi_\delta \dot{\delta} + N e^{\frac{1}{2}(\psi-\delta)} \left\{ \frac{1}{2} \lambda^{-1} \pi_\psi^2 - \pi_\delta \pi_\lambda + \right. \quad (4) \\ \left. + 2 \left[\lambda'' - \frac{1}{2} \delta' \lambda' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 \right] \right\} - N^Z e^{\psi-\delta} [-2 \pi_\delta' + \delta' \pi_\delta + \psi' \pi_\psi + \lambda' \pi_\lambda]$$

y la acción I_G viene a ser

$$I_G = \int \mathcal{L}_G dt dz,$$

Mediante las variaciones respecto de N y N^Z , obtenemos las ecuaciones de constricción siguientes

$$\delta N^Z : -2 \pi_\delta' + \delta' \pi_\delta + \psi' \pi_\psi + \lambda' \pi_\lambda = 0 \quad (5)$$

$$\delta N : \frac{1}{2} \lambda^{-1} \pi_\psi^2 - \pi_\delta \pi_\lambda + 2 \left[\lambda'' - \frac{1}{2} \delta' \lambda' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 \right] = 0 \quad (6)$$

II.C. EL LAGRANGIANO DE LOS CAMPOS DE MATERIA*

En el cálculo de la densidad lagrangiana de materia para el tensor de energía-momento $T_{uv} = \rho u_\mu u_\nu$ correspondiente a un fluido sin presión, para una época dominante por polvo, se considera a ρ y u_μ como funciones del tiempo y de la posición z , y que $\mathcal{L}_c$ no contiene derivadas de la métrica.

Con la ausencia de estas derivadas, las variaciones de $\mathcal{L}_c$ con respecto a g_{uv} son dadas por derivadas parciales con respecto a g_{uv} .

Nosotros podemos escribir $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\mu\nu}}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial N}$,

(*) ver refs. 8 y 9

$\frac{\partial}{\partial N^c}$ y $\frac{\partial}{\partial g_{ij}^{(3)}}$, y así construir un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales para $\mathcal{L}_c$ dependiendo únicamente de N , N^2 , g^{ij} , ρ y u_μ :

El siguiente cálculo se refiere al cambio de variables de $(4)g_{uv}$ a N , N^2 y g^{ij} .

A partir de la métrica $(4)g_{uv}$ en términos de las variables ADM

$$\begin{vmatrix} (4)g^{00} & (4)g^{0m} \\ (4)g^{ko} & (4)g^{km} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} -N^{-2} & N^{-2} N^m \\ N^{-2} N^k & g^{km} - N^{-2} N^k N^m \end{vmatrix}$$

se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial (4)g^{00}} = \frac{\partial N}{\partial g^{00}} \bigg|_{g^{0k} g^{km}} \frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial N^k}{\partial g^{00}} \bigg|_{g^{0k} g^{km}} \frac{\partial}{\partial N^k} + \frac{\partial g^{km}}{\partial g^{00}} \bigg|_{g^{0k} g^{km}} \frac{\partial}{\partial g^{km}}.$$

como $(4)g^{00} = -N^{-2}$ y aplicando la regla de la cadena, obtenemos que

$$\frac{\partial g^{00}}{\partial g^{00}} = 1 = -\frac{2N}{N^4} \frac{\partial N}{\partial g^{00}} = \frac{2}{N^3} \frac{\partial N}{\partial g^{00}}$$

$$\text{De este modo obtenemos } \frac{\partial N}{\partial g^{00}} = \frac{1}{2} N^3$$

$$\text{de } (4)g^{0m} = \frac{N^m}{N^2} = -N^m(-N^{-2}) = -N^m g^{00}$$

entonces

$$\frac{\partial g^{0m}}{\partial g^{00}} \bigg|_{g^{0m} g^{km}} = 0 = -\frac{\partial N^m}{\partial g^{00}} g^{00} - N^m \quad \therefore \frac{\partial N^m}{\partial g^{00}} = N^m N^2.$$

también de $(4)g^{km} = (3)g^{km} - N^{-2} N^k N^m$ nos da

$$\frac{\partial (4)g^{km}}{\partial g^{00}} \bigg|_{g^{0m} g^{km}} = 0 = \frac{\partial (3)g^{km}}{\partial g^{00}} - \frac{-N^k N^m 2N \frac{\partial N}{\partial g^{00}} + N^2 (2N^k \frac{\partial N^m}{\partial g^{00}})}{N^4}$$

o sea $\frac{\partial (3)g^{km}}{\partial g^{oo}} \Big|_{g^{om}g^{km}} = N^m N^k.$

y así el término de $\frac{\partial}{\partial (4)g^{oo}}$ viene a ser

$$\frac{\partial}{\partial (4)g^{oo}} = \frac{1}{2} N^3 \frac{\partial}{\partial N} + N^m N^2 \frac{\partial}{\partial N^m} + N^k N^m \frac{\partial}{\partial (3)g^{km}}.$$

El cálculo para $\frac{\partial}{\partial (4)g^{om}}$ de manera semejante será:

$$\frac{\partial}{\partial (4)g^{om}} = \frac{\partial N}{\partial g^{om}} \Big|_{g^{oo}g^{km}} \frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial N^m}{\partial g^{om}} \Big|_{g^{oo}g^{km}} \frac{\partial}{\partial N^m} + \frac{\partial g^{km}}{\partial g^{om}} \Big|_{g^{oo}g^{km}} \frac{\partial}{\partial (3)g^{km}},$$

de $(4)g^{oo} = -N^{-2}$; $0 = -\frac{-2N}{N^4} \frac{\partial N}{\partial g^{om}} \therefore \frac{\partial N}{\partial g^{om}} = 0$

de $(4)g^{om} = N^{-2} N^m$; $1 = N^{-2} \frac{\partial N^m}{\partial g^{om}} \therefore \frac{\partial N^m}{\partial g^{om}} = N^2$

de $(4)g^{km} = (3)g^{km} - N^{-2} N^k N^m$

$$0 = \frac{\partial (3)g^{km}}{\partial g^{om}} - \frac{N^k N^2 + N^m N^2}{N^4} \therefore \frac{\partial (3)g^{km}}{\partial g^{om}} = 2 N^k$$

finalmente

$$\frac{\partial}{\partial (4)g^{om}} = N^2 \frac{\partial}{\partial N^m} + 2 N^k \frac{\partial}{\partial (3)g^{km}}$$

Para $(4)g^{km}$, el único término no nulo es el correspondiente a $(3)g^{km}$.

$$\frac{\partial}{\partial (4)g^{km}} = \frac{\partial}{\partial (3)g^{km}}$$

Las ecuaciones diferenciales parciales que debe de cumplir una densidad lagrangiana de campos de materia son:

$$(4)_{g^{00}}: \frac{1}{2} N^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} + N^m N^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^m} + N^k N^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} T_{00} \quad (7)$$

$$(4)_{g^{0m}}: N^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^m} + 2 N^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} (T_{0m} + T_{m0})$$

$$= -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} (2 T_{0m})$$

como $T_{0m} = T_{m0}$ (simetría)

$$\frac{1}{2} N^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^m} + N^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} T_{0m} \quad (8)$$

$$(4)_{g^{km}}: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} T_{km}. \quad (9)$$

Empleando el elemento de línea (3) y el determinante $(4)_{g}$ en la formulación ADM como $N^2 (3)_{g}$, obtenemos lo siguiente: $(-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} = N \lambda \exp\left(\frac{\mathcal{H} - \psi}{2}\right)$,

Así, las ecuaciones diferenciales parciales para la densidad lagrangiana de campos nos queda finalmente:

$$\frac{1}{2} N^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} + N^m N^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} + N^m N^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^m} = -8\pi N \lambda e^{\frac{1}{2}(\mathcal{H} - \psi)} \rho u_0^2 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} N^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^m} + N^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi N \lambda e^{\frac{1}{2}(\mathcal{H} - \psi)} \rho u_0 u_m. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{km}} = -8\pi N \lambda e^{\frac{1}{2}(\mathcal{H} - \psi)} \rho u_k u_m. \quad (12)$$

Aparte de estas ecuaciones, tenemos las condiciones sobre las velocidades $u_\mu u^\mu = -1$; $u_{\mu;\nu} u^\nu = 0$ y $(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0$ la última expresión es $[\rho (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} u^\mu]_{;\mu} = 0$, y se quiere resolver para u_0 ó u_2 .

Para calcular el lagrangiano de materia, partimos de la ecuación (12)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (3)_{g^{ij}}} = - 8 \pi N \lambda e^{\frac{\delta-\psi}{2}} \rho u_i u_j$$

haciendo el cambio de variable $\tilde{\rho} = N \lambda \rho u^0 e^{\frac{\delta-\psi}{2}}$ nos queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (3)_{g^{ij}}} = - 8 \pi \tilde{\rho} \frac{u_i u_j}{u^0} = 8 \pi N^2 \frac{\tilde{\rho} u_i u_j}{N^i u_i \pm N(1+g^{ij} u_i u_j)^{1/2}}$$

asi $\mathcal{L}_c = 8 \pi N^2 \tilde{\rho} u_i u_j \int \frac{1}{N^i u_i \pm N(1+g^{ij} u_i u_j)^{1/2}} dg^{ij}$

Hacemos la elección $N^i = 0$ y el siguiente cambio de variable para la integración $V = (1 + g^{ij} u_i u_j)^{1/2}$; $dV = \frac{1}{2} (1 + g^{ij} u_i u_j)^{-1/2} u_i u_j dg^{ij}$ entonces

$$\mathcal{L}_c = 8 \pi N \tilde{\rho} \int 2 dV = 16 \pi N \tilde{\rho} (1 + g^{ij} u_i u_j)^{1/2}.$$

Así la variación de g^{ij} nos da el término de la densidad lagrangiana de los campos como

$$\mathcal{L}_c = 16 \pi N \tilde{\rho} (1 + e^{\frac{\psi-\delta}{2}} u_x u_x)^{1/2}$$

Para el término de la variación de $\mathcal{L}_c$ con respecto a N partimos de la ecuación (10)

$$\frac{1}{2} N^3 \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N} = - 8 \pi N \lambda e^{\frac{\delta-\psi}{2}} \rho u^2,$$

como

$$u^0 = N^i u_i \pm N (1 + g^{ij} u_i u_j)^{1/2}; \quad N^i = 0$$

entonces
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N} &= - 16 \pi \lambda e^{\frac{\delta-\psi}{2}} \rho (1 + g^{ij} u_i u_j) \\ &= - 16 \pi \tilde{\rho} (1 + g^{ij} u_i u_j) (N u^0)^{-1} \end{aligned}$$

Se ve claramente que

$$\begin{aligned} u^0 &= g^{00} u_0 = g^{00} \left[N^i u_i \pm N (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= -N^{-2} \left[N^i u_i \pm N (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \therefore N u^0 &= (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N} = 16 \pi \tilde{\rho} (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_c = 16 \pi N \tilde{\rho} (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}}$$

que es el mismo término que se obtiene al variar g^{ij} .

Para la variación de N^j partimos de la ecuación

$$N^2 \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N^i} = -16 \pi N \lambda e^{\frac{\psi-\varphi}{2}} \rho u_i u_i + 16 \pi N^j N \lambda e^{\frac{\psi-\varphi}{2}} \rho u_i u_j$$

que se obtiene de combinar la segunda y tercera de las e.d.p.

$$\begin{aligned} N^2 \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N^i} &= -16 \pi \tilde{\rho} \frac{u_0 u_i}{u^0} + 16 \pi N^j \tilde{\rho} \frac{u_i u_j}{u^0} \\ &= 16 \pi \tilde{\rho} \frac{u_0 u_i}{u^0} - 16 \pi N^2 N^j \frac{u_i u_j}{u_0} \\ &= 16 \pi \tilde{\rho} N^2 u_i - 16 \pi N^2 N^j \tilde{\rho} \frac{u_i u_j}{u_0} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N^i} &= 16 \pi \tilde{\rho} u_i - 16 \pi N^j \tilde{\rho} \frac{u_i u_j}{u_0} \\ &= 16 \pi \tilde{\rho} u_i - 16 \pi \tilde{\rho} N^j \frac{u_i u_j}{N^i u_i \pm N (1 + g^{ij} u_i u_j)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

pero el segundo sumando contempla aspectos extraños de N^j (se quiere sólo una aproximación lineal en las N^j), así que sólo damos la parte

$$\mathcal{L}_c = 16 \pi \tilde{\rho} N^i u_i, \quad (14)$$

Así, la densidad lagrangiana correspondiente a la parte de los campos de materia viene a ser

$$\mathcal{L}_c = 16 \pi N \tilde{\rho} (1 + e^{\frac{\psi}{2}} (u_z)^2)^{\frac{1}{2}} + 16 \pi \tilde{\rho} N^z u_z. \quad (15)$$

Por lo tanto, la escritura de nuestra densidad lagrangiana total $\mathcal{L}_T$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T = & \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\lambda \dot{\lambda} + \pi_\delta \dot{\delta} + \\ & + N e^{\frac{\psi}{2}} \left\{ \frac{\pi_\psi^2}{2\lambda} - \pi_\delta \pi_\lambda + 2[\lambda'' - \frac{1}{2}\delta'\lambda' + \frac{1}{4}\lambda(\psi')^2] - 16\pi\tilde{\rho} e^{\frac{\delta-\psi}{2}} (1 + e^{\frac{\psi}{2}} u_z^2)^{\frac{1}{2}} \right\} - \\ & - N^z e^{\frac{\psi}{2}} \left\{ -2\pi_\delta' + \delta'\pi_\delta + \psi'\pi_\psi + \lambda'\pi_\lambda + 16\pi\tilde{\rho} u_z \right\}. \end{aligned}$$

con las constricciones

$$H_0' = \frac{1}{2} \frac{\pi_\psi^2}{\lambda} - \pi_\delta \pi_\lambda + 2[\lambda'' - \frac{1}{2}\delta'\lambda' + \frac{1}{4}\lambda(\psi')^2] - 16\pi\tilde{\rho} e^{\frac{\delta-\psi}{2}} (1 + e^{\frac{\psi}{2}} u_z^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$H_z' = -2\pi_\delta' + \delta'\pi_\delta + \psi'\pi_\psi + \lambda'\pi_\lambda + 16\pi\tilde{\rho} u_z = 0$$

y la acción
$$I_T = \int \mathcal{L}_T dt dz.$$

La densidad Hamiltoniana se obtiene de la manera usual, siendo esta igual a
$$H = N^z e^{\frac{\psi}{2}} H_z' - N e^{\frac{\psi}{2}} H_0'$$
 con $N^z = 0$; $N = e^{\frac{\delta-\psi}{2}}$.

NOTA: La razón porque se quita el término $e^{\delta-\psi}$ es debido a que inicialmente se tenía para la densidad lagrangiana de geometría $\mathcal{L}_G = \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N_0 \bar{H} - N_2 H^2$ y al cambiarlo a $\pi^{ij} \dot{g}_{ij} + N H_0 - N^2 H_2$, por lo tanto también se debe de hacer dicho cambio en la densidad lagrangiana de campos de materia, quedando el término $\exp(\delta - \psi) u^2$ que no es otra cosa que u_z ya que $u_z = g_{zz} u^z = \exp(\delta - \psi) u^z$.

III.- ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Mediante un análisis cuantitativo de la acción total anterior, uno ve que las variables independientes son $\lambda, \delta, \psi, \pi_\lambda, \pi_\delta, \pi_\psi, \tilde{p}$ y u_z ya que al ser consideradas como tales, al hacer la variación de $\mathcal{L}_T$ respecto de alguna de ellas, nos conducen a las ecuaciones de Einstein obtenidas por otros procedimientos (ver apéndice).

Como $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T(t; \eta; \dot{\eta}; \eta_k; \eta_{,k}; \eta_{,k,l})$.

con $\eta = \lambda, \delta, \psi, \pi_\lambda, \pi_\delta, \pi_\psi$; entonces la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas continuos, esta expresada por la siguiente relación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \eta}{\partial x_k})} + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_k^2})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$$

Al realizar las variaciones pertinentes respecto a las variables de campo y sus momentos conjugados, uno obtiene las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\text{variación de } \lambda : \dot{\pi}_\lambda - \delta' - \frac{1}{2} [(\psi')^2 - (\frac{\pi_\psi}{\lambda})^2] = 0 \quad (17)$$

$$\text{variación de } \delta : \dot{\pi}_{\delta} - \lambda'' - 8 \pi \rho \lambda e^{\delta-\psi} = 0 \quad (18)$$

$$\text{variación de } \psi : \dot{\pi}_{\psi} + \lambda' \psi' + \lambda \psi'' + 8 \pi \rho \lambda e^{\delta-\psi} = 0 \quad (19)$$

$$\text{variación de } \pi_{\lambda} : \dot{\lambda} - \pi_{\delta} = 0 \quad (20)$$

$$\text{variación de } \pi_{\delta} : \dot{\delta} - \pi_{\lambda} = 0 \quad (21)$$

$$\text{variación de } \pi_{\psi} : \dot{\psi} + \frac{\pi_{\psi}}{\lambda} = 0 \quad (22)$$

De las ecuaciones (18) y (20) obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} - \dot{\pi}_{\delta} &= 0 \\ \ddot{\lambda} - \lambda'' - 8 \pi \rho \lambda e^{\delta-\psi} &= 0 \\ \ddot{\lambda} - \lambda'' &= 8 \pi \rho \lambda e^{\delta-\psi} \end{aligned} \quad (\alpha)$$

La ecuación de Einstein que nos conduce a esta misma expresión es

$$\ddot{\lambda} - \lambda'' = -8 \pi (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1) \quad (\text{ver apéndice})$$

De las ecuaciones (17) y (21)

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} - \dot{\pi}_{\psi} &= 0 \\ \ddot{\delta} - \delta'' &= \frac{1}{2} [(\psi')^2 - (\frac{\pi_{\psi}}{\lambda})^2]. \end{aligned}$$

que con la ecuación (22) se convierte en

$$\ddot{\delta} - \delta'' = \frac{1}{2} [(\psi')^2 - (\dot{\psi})^2] \quad (\beta)$$

La ecuación de Einstein correspondiente es:

$$\ddot{\gamma} - \gamma'' = \frac{1}{2} [(\psi')^2 - (\dot{\psi})^2] - 8\pi\lambda^{-1}\mathcal{T}_2^2$$

y como nosotros trabajamos con simetría en z; $\mathcal{T}_2^2 = 0$ (ver apéndice)

Ahora empleando la ecuación (22)

$$\ddot{\psi} + \dot{\lambda}^{-1}\dot{\pi}_\psi - \dot{\lambda}^{-2}\dot{\lambda}\pi_\psi = 0$$

y con la ecuación (19) se complementa para obtener

$$\ddot{\psi} + \dot{\lambda}^{-1} [-\lambda\psi'' - \lambda'\psi' - 8\pi\rho\lambda e^{H-\psi}] - \dot{\lambda}^{-2}\dot{\lambda}\pi_\psi = 0$$

$$\ddot{\psi} - \psi'' - \dot{\lambda}\dot{\lambda}'\psi' - 8\pi\rho e^{H-\psi} - \dot{\lambda}^{-2}\dot{\lambda}\pi_\psi = 0$$

y utilizando de nuevo a (22), tenemos finalmente:

$$\ddot{\psi} - \psi'' + \dot{\lambda}\dot{\lambda}'\dot{\psi} - \dot{\lambda}\dot{\lambda}'\psi' = 8\pi\rho e^{H-\psi} \quad (H)$$

La ecuación de Einstein que nos la proporciona es:

$$\ddot{\psi} - \psi'' + \dot{\lambda}\dot{\lambda}'\dot{\psi} - \dot{\lambda}\dot{\lambda}'\psi' = -8\pi\lambda^{-1} (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1 + \mathcal{T}_2^2 - \mathcal{T}_3^3)$$

con $\mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_3^3 = 0$ en nuestro caso (ver apéndice)

Al emplear las ecuaciones de constricción que fueron obtenidas al variar $\mathcal{L}_T$ respecto de N y N^z , las cuales son:

$$\frac{\pi_\psi^2}{2\lambda} - \pi_\lambda\pi_\lambda + 2[\lambda'' - \frac{1}{2}\lambda\lambda' + \frac{1}{4}\lambda(\psi')^2] - 16\pi\tilde{\rho}e^{\frac{1}{2}(H-\psi)} [1 + e^{\psi-H}u_z^2]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (23)$$

$$-2\pi_\lambda' + \lambda'\pi_\lambda + \psi'\pi_\psi + 16\pi\tilde{\rho}u_z = 0 \quad (24)$$

con $\tilde{\rho} = -\rho\lambda u_0$

De (23)

$$\pi_\lambda = \frac{2}{\pi_\lambda} \left[\lambda'' - \frac{1}{2} \lambda' \gamma' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 \right] + \frac{\pi_\psi^2}{2\lambda \pi_\lambda} + 16\pi \frac{\rho \lambda}{\pi_\lambda} e^{\frac{1}{2}(\gamma-\psi)} u_0 (1 + e^{\psi-\gamma} u_z^2)^{1/2} \quad (23a)$$

De (24)

$$\pi_\lambda = - \frac{1}{\lambda'} (\psi' \pi_\psi + \gamma' \pi_\gamma - 2 \pi_\gamma' - 16\pi \rho \lambda u_0 u_z) \quad (24a)$$

Sustituyendo en la ecuación (21) por separado las expresiones anteriores, se obtiene

$$\frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \dot{\lambda} \pi_\lambda = \lambda'' - \frac{1}{2} \lambda' \gamma' + \frac{1}{4} [(\psi')^2 + (\dot{\psi})^2] + 8\pi \rho \lambda e^{\frac{1}{2}(\gamma-\psi)} u_0 (1 + e^{\psi-\gamma} u_z^2)^{1/2} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\gamma} &= \frac{1}{2} \lambda' \pi_\lambda = -\frac{1}{2} (\psi' \pi_\psi + \gamma' \pi_\gamma - 2 \pi_\gamma' - 16\pi \rho \lambda u_0 u_z), \\ &= -\frac{1}{2} (-\lambda \psi' \dot{\psi} + \dot{\lambda} \gamma' - 2(\dot{\lambda})' - 16\pi \rho \lambda u_0 u_z), \\ &= \frac{1}{2} \lambda \dot{\psi} \psi' - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \gamma' - (\dot{\lambda})' + 8\pi \rho \lambda u_0 u_z. \end{aligned} \quad (24b)$$

multiplicando (23b) por $\dot{\lambda}$ y (24b) por λ' , posteriormente restando a (24b) la (23b) modificadas, nos conduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\gamma} [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2] &= \frac{1}{2} \lambda \lambda' \dot{\psi} \psi' + \lambda' (\dot{\lambda})' - \dot{\lambda} \lambda'' - \frac{1}{4} \lambda \dot{\lambda} [(\psi')^2 + (\dot{\psi})^2] - \\ &\quad - 8\pi \rho \lambda \dot{\lambda} e^{\frac{1}{2}(\gamma-\psi)} u_0 (1 + e^{\psi-\gamma} u_z^2)^{1/2} + 8\pi \rho \lambda \lambda' u_0 u_z \end{aligned}$$

y como $u_0 = \exp[\frac{1}{2}(\gamma - \psi)] \cdot [1 + e^{\psi-\gamma} (u_z)^2]^{1/2}$, los últimos dos sumandos quedan: $- 8\pi (\dot{\lambda} \rho \lambda u_0^2 - \lambda' \rho \lambda u_0 u_z)$

La ecuación de Einstein que nos proporciona esta ecuación es: (ver apéndice)

$$\frac{1}{2} \ddot{\gamma} = [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2]^{-1} \left\{ -8\pi(-\dot{\lambda} \sigma_0 - \lambda' \sigma'_0) - \frac{1}{4} \lambda \dot{\lambda} [(\psi')^2 + (\dot{\psi})^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \lambda \lambda' \dot{\psi} \psi' - \lambda \lambda'' + \lambda' (\dot{\lambda})' \right\}.$$

Despejando $\frac{1}{2} \ddot{\gamma} \gamma'$ de (23) y multiplicando por $\dot{\lambda}$, se tiene

$$\frac{1}{2} \ddot{\gamma} (\lambda')^2 = \lambda' \lambda'' + \frac{1}{4} \lambda \lambda' (\psi')^2 - \frac{1}{2} \lambda' \dot{\lambda} \ddot{\gamma} + \frac{1}{4} \lambda \lambda' (\dot{\psi})^2 + 8\pi \rho \lambda \lambda' u_0^2 \quad (23c)$$

Despejando $\frac{1}{2} \gamma' \ddot{\lambda}$ de (24) y multiplicando por $\dot{\lambda}$, se tiene

$$\frac{1}{2} \ddot{\gamma} (\dot{\lambda})^2 = \dot{\lambda} (\dot{\lambda})' + \frac{1}{2} \dot{\lambda} \lambda \dot{\psi} \psi' - \frac{1}{2} \lambda' \dot{\gamma} \dot{\lambda} + 8\pi \rho \lambda \dot{\lambda} u_0 u_2 \quad (24c)$$

restando a (23c) la (24c) modificadas obtenemos

$$\frac{1}{2} \gamma' [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2] = \lambda' \lambda'' + \frac{1}{4} \lambda [(\dot{\psi})^2 + (\psi')^2] \lambda - \dot{\lambda} (\dot{\lambda})' - \\ - \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' - 8\pi (-\lambda' \rho \lambda u_0^2 + \dot{\lambda} \rho \lambda u_0 u_2). \quad (25)$$

y la correspondiente ecuación de Einstein es: (ver apéndice)

$$\frac{1}{2} \gamma' = [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2]^{-1} \left\{ -8\pi (\lambda' \sigma_0 + \dot{\lambda} \sigma'_0) + \frac{1}{4} \lambda \lambda' [(\psi')^2 + (\dot{\psi})^2] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' + \lambda' \lambda'' - \dot{\lambda} (\dot{\lambda})' \right\}.$$

De este modo obtenemos la equivalencia de estas ecuaciones, con las obtenidas directamente con las ecuaciones de Einstein.

IV.- SOLUCIONES PERTURBATIVAS.

Dada la forma en que aparecen las ecuaciones diferenciales parciales para las funciones ψ , γ y λ ; a primera instancia las soluciones son muy difíciles de encontrar, por lo cual nosotros sólo encontraremos para este trabajo soluciones perturbativas.

Proponemos que el orden será hasta una aproximación lineal en ϵ y que las funciones son de la forma:

$$\gamma(z,t) = \gamma_0(z,t) + \epsilon \gamma_1(z,t) + \dots \quad (25)$$

$$\psi(z,t) = \psi_0(z,t) + \epsilon \psi_1(z,t) + \dots \quad (26)$$

$$\lambda(z,t) = \lambda_0(z,t) + \epsilon \lambda_1(z,t) + \dots \quad \text{con } \lambda_0 = t \quad (27)$$

$$\rho(z,t) = \epsilon \rho_1(z,t) + \dots \quad (28)$$

Introduciendo estas ecuaciones en las funciones originales tendremos lo siguiente:

De la ecuación

$$\psi'' - \ddot{\psi} - \bar{\lambda} \dot{\lambda} \dot{\psi} + \bar{\lambda}' \lambda' \psi' = -8\pi \rho e^{\gamma - \psi}$$

nos queda

$$\begin{aligned} (\psi_0'' + \epsilon \psi_1'') - (\ddot{\psi}_0 + \epsilon \ddot{\psi}_1) - \bar{\lambda}' (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) (\dot{\psi}_0 + \epsilon \dot{\psi}_1) + \\ + \bar{\lambda}^{-1} (\epsilon \dot{\lambda}_1') (\psi_0' + \epsilon \psi_1') = -8\pi \epsilon \rho_1 e^{\gamma_0 - \psi_0} \end{aligned}$$

multiplicando por λ :

$$- t (\ddot{\psi}_0 + \epsilon \ddot{\psi}_1) + t (\psi_0'' + \epsilon \psi_1'') - \epsilon \lambda_1 (\ddot{\psi}_0 + \epsilon \ddot{\psi}_1) + \epsilon \lambda_1 (\psi_0'' + \epsilon \psi_1'') - \\ - (\dot{\psi}_0 + \epsilon \dot{\psi}_1 + \epsilon \dot{\lambda}_1 \psi_0 + \epsilon^2 \dot{\lambda}_1 \psi_1) + \epsilon \lambda_1' \psi_0' + \epsilon^2 \lambda_1' \psi_1' = - 8 \pi \epsilon t \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0} - \epsilon^2 8 \pi \lambda_1 \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0}$$

Todos los coeficientes de orden ϵ^2 se cancelan, ya que sólo queremos una aproximación lineal en ϵ .

$$- t (\ddot{\psi}_0 - \psi_0'') - \dot{\psi}_0 + \epsilon [-t (\ddot{\psi}_1 - \psi_1'') + \lambda_1 (\psi_0'' - \ddot{\psi}_0) - \dot{\psi}_1 - \\ - \dot{\lambda}_1 \psi_0 + \lambda_1' \psi_0'] = - \epsilon 8 \pi t \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0}$$

En el agrupamiento de las potencias de ϵ tenemos que

$$- t (\ddot{\psi}_0 - \psi_0'') - \dot{\psi}_0 = 0 \quad (29)$$

$$- t (\psi_1'' - \psi_1'') + \lambda_1' \psi_0' - t^{-1} \lambda_1 \dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_1 - \dot{\lambda}_1 \psi_0 = - 8 \pi t \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0} \quad (30)$$

La ecuación (29) se puede escribir como

$$\ddot{\psi}_0 - \psi_0'' + t^{-1} \dot{\psi}_0 = 0$$

que es una ecuación de ondas, que tiene por solución general*.

$$\psi_0(z, t) = \frac{1}{2} \pi \int dk (A_k \sin kz + B_k \cos kz) [J_0(kt_0) N_0(kt) - N_0(kt_0) J_0(kt)] + \psi_1$$

donde J_0 y N_0 son funciones Bessel y las A_k , B_k son funciones de k , las cuales son determinadas por las condiciones iniciales o de frontera.

Pero aún así, la solución es complicada y uno puede demostrar que si tomamos la solución particular:

$$\psi_0(z, t) = J_0(kt) \sin kz$$

(*) ver refs. 7 y 12.

esta cumple a la ecuación (29) y podemos obtener algo más de información respecto a las otras funciones de campo.

La función J_0 nos da la amplitud de la onda del seno, que en este caso nos resulta una función oscilatoria decaiente o amortiguada. La amplitud depende de un número de onda y el tiempo t . Así la amplitud de un modo de Fourier a un tiempo dado t depende esencialmente de k , de manera que pueda producir cambios en una transformada de Fourier de Ψ .

De las ecuaciones de $\ddot{y}$ y de $\dot{y}'$, debemos hallar una solución que sea consistente con ambas partes.

Para $\ddot{y}$:

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{2} \ddot{y}_0 + \frac{1}{2} \epsilon \ddot{y}_1) [\epsilon^2 (\dot{\lambda}_1)^2 - (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1)^2] = \frac{1}{2} [-(1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) \tau_0^0 - \epsilon \dot{\lambda}_1' \tau_0^1] - \\ & - \frac{1}{4} (t + \epsilon \lambda_1) (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) [(\dot{\psi}_0 + \epsilon \dot{\psi}_1)^2 + (\dot{\psi}_0' + \epsilon \dot{\psi}_1')^2] + \epsilon^2 \dot{\lambda}_1' (\dot{\lambda}_1)' + \\ & + \frac{1}{2} (t + \epsilon \lambda_1) (\epsilon \dot{\lambda}_1') (\dot{\psi}_0 + \epsilon \dot{\psi}_1) (\dot{\psi}_0' + \epsilon \dot{\psi}_1') - (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) \epsilon \dot{\lambda}_1'' , \\ & - \frac{1}{2} (\ddot{y}_0 + \epsilon \ddot{y}_1) (1 + 2\epsilon \dot{\lambda}_1) = - \frac{1}{2} \tau_0^0 - \frac{1}{2} \epsilon (\dot{\lambda}_1 \tau_0^0 + \dot{\lambda}_1' \tau_0^1) - \epsilon \dot{\lambda}_1'' + \\ & + \frac{1}{2} \epsilon t \dot{\lambda}_1' \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_0' - \frac{1}{4} t + \epsilon (\lambda_1 + t \dot{\lambda}_1) [(\dot{\psi}_0)^2 + (\dot{\psi}_0')^2 + \epsilon 2(\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_0' \dot{\psi}_1')] . \\ & = - \frac{1}{2} \tau_0^0 - \frac{1}{2} \epsilon (\dot{\lambda}_1 \tau_0^0 + \dot{\lambda}_1' \tau_0^1) - \frac{1}{4} t [(\dot{\psi}_0)^2 + (\dot{\psi}_0')^2] \\ & - \frac{1}{2} t \epsilon (\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_0' \dot{\psi}_1') - \frac{1}{4} \epsilon (t \dot{\lambda}_1 + \lambda_1) [(\dot{\psi}_0)^2 + (\dot{\psi}_0')^2] + \frac{1}{2} t \epsilon \dot{\lambda}_1' \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_0' - \epsilon \dot{\lambda}_1'' , \\ & - \frac{1}{2} \ddot{y}_0 + \frac{1}{2} \epsilon \ddot{y}_0 (-2 \dot{\lambda}_1) - \frac{1}{2} \epsilon \ddot{y}_1 = - \frac{1}{2} \tau_0^0 - \frac{1}{4} t [(\dot{\psi}_0)^2 + (\dot{\psi}_0')^2] - \\ & - \frac{1}{2} t \epsilon [\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_0' \dot{\psi}_1'] - \frac{1}{4} \epsilon (t \dot{\lambda}_1 + \lambda_1) [(\dot{\psi}_0)^2 + (\dot{\psi}_0')^2] + \frac{1}{2} t \epsilon \dot{\lambda}_1' \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_0' - \epsilon \dot{\lambda}_1'' . \end{aligned}$$

Ordenando potencias de ϵ :

$$-\frac{1}{2} \ddot{\delta}_0 = -\frac{1}{2} t [(\dot{\psi}_0)^2 + (\psi'_0)^2], \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ddot{\delta}_1 - \dot{\lambda}_1 \dot{\delta}_0 &= -\frac{1}{2} \gamma_0'' - \frac{1}{2} t (\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \psi'_0 \psi'_1) + \frac{1}{2} t \lambda'_1 \dot{\psi}_0 \psi'_0 - \\ &\quad - \frac{1}{4} (t \dot{\lambda}_1 + \lambda_1) [(\dot{\psi}_0)^2 + (\psi'_0)^2] - \lambda_1'', \end{aligned} \quad (32)$$

Empleando (31) y la solución de ψ_0 :

$$\psi_0 = J_0(kt) \sin kz,$$

$$\dot{\psi}_0 = k \dot{J}_0(kt) \sin kz = -k J_1(kt) \sin kz,$$

$$\psi'_0 = k J_0(kt) \cos kz.$$

luego

$$\frac{1}{2} \ddot{\delta}_0 = \frac{1}{2} t [k^2 J_1^2(kt) \sin^2(kt) + k^2 J_0^2(kt) \cos^2 kz]$$

de este modo:

$$\ddot{\delta}_0 = \frac{1}{2} t k^2 [J_1^2(kt) \sin^2 kz + J_0^2(kt) \cos^2 kz] \quad (33)$$

De la ecuación para la γ' :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\gamma'_0 + \epsilon \gamma'_1) [\epsilon^2 (\lambda'_1)^2 - (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1)^2] &= \frac{1}{2} [\epsilon \lambda'_1 \gamma_0'' + (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) \gamma_0'] + \epsilon^2 \lambda'_1 \lambda_1'' + \\ &\quad + \frac{1}{4} (t + \epsilon \lambda_1) (\epsilon \lambda'_1) [(\dot{\psi}_0)^2 + (\psi'_0)^2 + \epsilon 2(\dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \psi'_0 \psi'_1)] - (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) (\epsilon \dot{\lambda}_1)' - \\ &\quad - \frac{1}{2} (t + \epsilon \lambda_1) (1 + \epsilon \dot{\lambda}_1) [\dot{\psi}_0 \psi'_0 + \epsilon (\dot{\psi}_0 \psi'_1 + \dot{\psi}_1 \psi'_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}_0' + \frac{1}{2} \epsilon \dot{\mathcal{H}}_0' (-2 \dot{\lambda}_1) - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\mathcal{H}}_1' &= \frac{1}{2} \epsilon \dot{\lambda}_1' \mathcal{T}_0' + \frac{1}{2} \mathcal{T}_0' + \frac{1}{2} \epsilon \dot{\lambda}_1' \mathcal{T}_1' + \frac{1}{2} t \epsilon \dot{\lambda}_1' [(\dot{\psi}_0')^2 + (\psi_0')^2] \\
 -\frac{1}{2} [t + \epsilon (t \dot{\lambda}_1 + \lambda_1)] [\dot{\psi}_0 \psi_0' + \epsilon (\dot{\psi}_0 \psi_1' + \dot{\psi}_1 \psi_0')] &- \epsilon (\dot{\lambda}_1)',
 \end{aligned}$$

Ordenando potencias de ϵ :

$$-\frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}_0' = -\frac{1}{2} t \dot{\psi}_0 \psi_0' \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 -\dot{\mathcal{H}}_0' \dot{\lambda}_1 - \frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}_1' &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_0' + \frac{1}{2} t \dot{\lambda}_1' [(\dot{\psi}_0')^2 + (\psi_0')^2] - \frac{1}{2} (t \dot{\lambda}_1 + \lambda_1) \dot{\psi}_0 \psi_0' - \\
 &- \frac{1}{2} t (\dot{\psi}_0 \psi_1' + \dot{\psi}_1 \psi_0') - (\dot{\lambda}_1)'.
 \end{aligned} \quad (35)$$

De la ecuación (34) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_0' &= t \dot{\psi}_0 \psi_0' \\
 &= -tk^2 J_1(kt) \sin kz J_0(kt) \cos kz.
 \end{aligned}$$

integrando se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 &= -\frac{1}{2} tk^2 J_0(kt) J_1(kt) \int \sin(2kz) dz + F(t), \\
 &= \frac{1}{2} tk J_0(kt) J_1(kt) \cos(2kz) + F(t).
 \end{aligned} \quad (36)$$

esta es la solución de $\mathcal{H}_0$ a partir de $\dot{\mathcal{H}}_0'$, ahora hay que encontrar $F(t)$ para que sean consistentes con la de $\dot{\mathcal{H}}_0$.

De la ecuación (33)

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{H}}_0 &= \frac{1}{2} tk^2 [J_1^2(kt) \sin^2 kz + J_0^2(kt) \cos^2 kz], \\
 &= \frac{1}{2} tk^2 [J_1^2(kt) \frac{1}{2} (1 - \cos 2kz) + J_0^2(kt) \frac{1}{2} (1 + \cos 2kz)], \\
 &= \frac{1}{4} tk^2 [J_1^2(kt) + J_0^2(kt) + (J_0^2(kt) - J_1^2(kt)) \cos 2kz]
 \end{aligned} \quad (37)$$

Diferenciando a la ecuación (36) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_0 &= \frac{1}{2}k J_1(kt) J_0(kt) \cos 2kz + \frac{1}{2}tk [kJ_1'(kt) J_0(kt) + kJ_1(kt) J_0'(kt)] \cos 2kz + \\
 &\quad + \dot{F}(t), \\
 &= \frac{1}{2}k J_1(kt) J_0(kt) \cos 2kz + \frac{1}{2}tk^2 [-J_1^2(kt) + J_0(kt) [J_0(kt) - \frac{J_1(kt)}{kt}]] \cos 2kz + \\
 &\quad + \dot{F}(t), \\
 &= \frac{1}{2}k J_1(kt) J_0(kt) \cos 2kz + \frac{1}{2}tk^2 [J_0^2(kt) - J_1^2(kt)] \cos 2kz + \dot{F}(t) - \\
 &\quad - \frac{1}{2}k J_1(kt) J_0(kt) \cos 2kz, \\
 &= \frac{1}{2}tk^2 [J_0^2(kt) - J_1^2(kt)] \cos 2kz + \dot{F}(t). \tag{38}
 \end{aligned}$$

En la ecuación anterior se utilizó la relación de las funciones Bessel*

$$z J_{n,z} + n J_n = z J_{n-1},$$

Iguando las ecuaciones (37) y (38) encontramos

$$F(t) = \frac{1}{2} k^2 \int t J_1^2(kt) dt + \frac{1}{2} k^2 \int t J_0^2(kt) dt ,$$

Empleando las relaciones de integración de funciones Bessel

$$\begin{aligned}
 \int z J_1^2 dz &= \frac{1}{2} z^2 [J_1^2 - J_0 J_2] \\
 \int z J_0^2 dz &= \frac{1}{2} z^2 [J_0^2 - J_0 J_{-1}]
 \end{aligned}$$

$$y \quad - J_{-1} = J_1$$

teniendo finalmente:

093038

(*) ver ref. 13.

$$F(t) = \frac{1}{8} k^2 t^2 [2 J_1^2(kt) + J_0^2(kt) - J_0(kt) J_2(kt)] \quad (39)$$

De esta manera, la solución completa de δ_0 es:

$$\delta_0(z, t) = \frac{1}{4} tk J_1(kt) J_0(kt) \cos 2kz + \frac{1}{8} k^2 t^2 [2 J_1^2(kt) + J_0^2(kt) - J_0 J_2],$$

Desglosando $J_0 J_2$, sabiendo que $2 J_2(z) = 2 J_1(z) - J_0(z)$, obtenemos la δ_0 en función de J_0 y J_1 .

$$\begin{aligned} \delta_0(z, t) &= (\frac{1}{2} tk)^2 [J_1^2(kt) + J_0^2(kt)] + \frac{1}{4} tk [J_1(kt) J_0(kt)] (\cos 2kz - 1), \\ &= (\frac{1}{2} tk)^2 [J_1^2(kt) + J_0^2(kt)] - \frac{1}{2} tk J_1(kt) J_0(kt) \sin^2 kz. \end{aligned} \quad (40)$$

De la ecuación

$$\ddot{\lambda} - \lambda'' = 8 \pi \rho \lambda e^{\delta - \psi}$$

se tiene semejantemente

$$\begin{aligned} e (\ddot{\lambda}_1 - \lambda_1'') &= 8 \pi \rho_1 (t + \epsilon \lambda_1) e^{\delta_0 - \psi_0}, \\ \ddot{\lambda}_1 - \lambda_1'' &= 8 \pi \rho_1 t e^{\delta_0 - \psi_0} \end{aligned} \quad (41)$$

que es la ecuación diferencial para $\lambda_1(z, t)$, la cual tiene la forma de la ecuación de onda no-homogenea*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z, t) \quad ; \quad u(z, 0) = u(z, 0),_t = 0 \quad (42)$$

Es razonable aplicar la transformada de Fourier con respecto a z , y la transformada de Laplace con respecto a t . Sin embargo es más útil desarrollar una función de GREEN $G(z, t; z_0, t_0)$ resolviendo primero

(*) ver refs. 11 y 14.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \text{ con las condiciones siguientes}$$

$$G(z, 0; z_0, t_0) = G(z, 0; z_0, t_0),_{t=0}$$

Ahora aplicando las transformadas respectivas: G_f = transformada de Fourier de G ; G_{fL} = transformada de Laplace de G_f .

$$-k^2 G_f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_f}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz_0} \delta(t - t_0)$$

$$-k^2 G_{fL} - \frac{s^2}{c^2} G_{fL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz_0} e^{-st_0}$$

$$G_{fL} = - \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz_0} \frac{e^{-st_0}}{s^2 + k^2 c^2}$$

invirtiendo la transformada de Laplace

$$G_f = - \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz_0} \frac{\sin kc(t-t_0)}{kc} S(t-t_0)$$

$S(t-t_0)$ = función escalón

e invirtiendo la transformada de Fourier

$$G(z, t; z_0, t_0) = - \frac{c^2}{2\pi} S(t-t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kc(t-t_0)}{kc} e^{ik(z-z_0)} dk,$$

Se tratará a G como función de z_0 y a t , z y t_0 temporalmente como parámetros fijos. Eligiendo $k = -k$ en el integrando y quitando las primas, podemos reescribir

$$G(z, t; z_0, t_0) = - \frac{1}{2} c S(t-t_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kc(t-t_0)}{kc} e^{ik(z-z_0)} dk,$$

$$G(z, t; z_0, t_0) = - \frac{1}{2} c [S(z-z_0 + c(t-t_0)) - S(z-z_0 - c(t-t_0))] \quad t > t_0$$

$$= 0 \quad t < t_0$$

Al analizar la función de Green anterior:

- a) Si $z > z_0$ y t continua a incrementarse desde $t = t_0$, la primer función escalón contribuye:

$$G = - \frac{1}{2}c S[t-t_0 + (z_0-z)c^{-1}] \quad (z > z_0; t_0 > t)$$

- b) Si $z < z_0$, entonces en el comienzo, ambas funciones escalón contribuyen y una cancela el otro, en el tiempo $t = t_0 + (z_0 - z)c^{-1}$, el segundo término desaparece.

$$G = - \frac{1}{2}c S[t-t_0 - (z_0-z)c^{-1}] \quad (z < z_0; t > t)$$

Ambas formulas se pueden reescribir como:

$$G = - \frac{1}{2}c S[t-t_0 - |z-z_0|c^{-1}] \quad (43)$$

Ahora, como se conoce δ_0 , ψ_0 y ρ_1 se obtiene de la ecuación $(\rho U^u)_{;u} = 0$ a primer orden en ϵ , damos una solución formal en relación con la función de Green encontrada anteriormente de λ_1 .

$$\lambda_1(z,t) = \int_0^{t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 (8t\pi\rho_1 e^{\delta_0-\psi_0}) G(z,t;z_0,t_0) dt_0 \quad (44)$$

De la ecuación

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} - \delta'' &= \frac{1}{2} [(\psi')^2 - (\dot{\psi})^2] \\ (\ddot{\delta}_0 + \epsilon \ddot{\delta}_1) - (\delta_0'' + \epsilon \delta_1'') &= \frac{1}{2} \left\{ (\psi_0')^2 + 2\epsilon \psi_0' \psi_1' + \epsilon^2 (\psi_1')^2 - \right. \\ &\quad \left. - [(\dot{\psi}_0)^2 + 2\epsilon \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 + \epsilon^2 (\dot{\psi}_1)^2] \right\}. \end{aligned}$$

Agrupando potencias de ϵ .

$$\ddot{\gamma}_0 - \gamma_0'' = \frac{1}{2} [(\dot{\psi}_0')^2 - (\dot{\psi}_0)^2] \quad (45)$$

$$\ddot{\gamma}_1 - \gamma_1'' = \dot{\psi}_0' \dot{\psi}_1' - \dot{\psi}_0 \ddot{\psi}_1. \quad (46)$$

Uno puede demostrar, que la solución de la γ_0 encontrada anteriormente satisface a la ecuación (45).

De esta manera, si proponemos que la solución de ψ_1 se encuentra por alguna función de Green, hallaremos a γ_1 por cuadraturas mediante la ecuación (46).

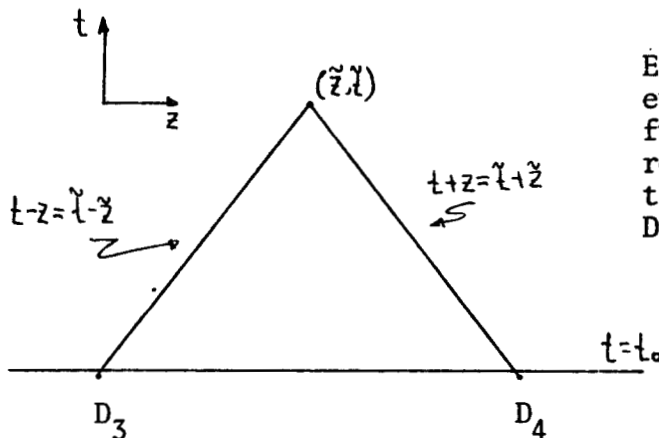
Haciendo un cambio de coordenadas apropiado*, esta función de Green viene a ser:

$$G_1 = (t_0/\tilde{t})^{\frac{1}{2}} F(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1; -q)$$

$$q = - \frac{(z - D_3)(z - D_4)}{4t_0\tilde{t}}$$

F = función hipergeométrica

Se ve claramente que q es máxima cuando $z = \frac{1}{2}(D_3 + D_4)$ [esto se obtiene al derivar q respecto a z e igualando a 0]



El campo en el punto $(\tilde{z}, \tilde{t})$ es evaluado por la integral de la función de Green (47) sobre la región de la superficie inicial a $t=t_0$ entre las intersecciones de D_3 y D_4 .

(*) ver refs. 15 y 7.

Asi:

$$\ddot{\psi}_1 - \psi_1'' + \frac{\dot{\psi}_1}{t} = 8 \pi \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0} + \bar{t}^{-1} (-\lambda_1 \frac{\dot{\psi}_0}{t} - \dot{\psi}_0 \dot{\lambda}_1 + \lambda_1' \psi_0').$$

$$\psi_1(z, t) = \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dt' G(z, t; z_0, t_0) [8 \pi \rho_1 e^{\delta_0 - \psi_0} + \bar{t}^{-1} (-\lambda_1 \frac{\dot{\psi}_0}{t} - \dot{\psi}_0 \dot{\lambda}_1 + \lambda_1' \psi_0')] \quad (47).$$

Para dar la solución completa de las variables de campo δ , ψ y λ comentamos que la densidad ρ la deducimos de la ecuación $(\rho u^\mu)_{;u}^{(0)} = 0$ con la condición sobre las velocidades $u^\mu u_\mu = -1$; $u^0 u_0 + u^z u_z = -1$ que nos queda:

$$g_{00} (u^0)^2 + g_{zz} (u^z)^2 = 1$$

Proponemos como solución de la velocidades a:

$$u^0 = (\cosh w) \bar{g}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad u^z = (\sinh w) \bar{g}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad g = g^{zz} = \exp(\delta - \psi) \quad (48)$$

ya que sustituyendo en la $u^\mu u_\mu = -1$ estás la cumplen, valiendonos de la identidad trigonométrica $\cosh^2 w - \sinh^2 w = 1$.

Al desglosar $(\rho u^\mu)_{;u}^{(0)} = 0$ nos queda

$$(\rho_1 u^0 t e^{\delta_0 - \psi_0})_{,0} + (\rho_1 u^z t e^{\delta_0 - \psi_0})_{,z} = 0$$

y haciendo el cambio de variable $\tilde{\rho} = \rho_1 u^0 t e^{\delta_0 - \psi_0}$ se obtiene finalmente:

$$\tilde{\rho}_{,0} + (\tilde{\rho} \tanh w)_{,z} = 0 \quad (49)$$

que es la ecuación diferencial para $\tilde{\rho}$, donde w es alguna función de peso que se podrá obtener por otros métodos de la ecuación $(u_{u;v} u^v) = 0$

la cual produce la ecuación diferencial

$$\sin w (\dot{w} - g') = \cosh w (w' + \dot{g}) \quad (50)$$

De esto se ve más claro, el por que la dificultad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento encontradas inicialmente.

En relatividad general no lineal, hay un efecto acumulativo respecto a los campos de materia, ya que el campo gravitacional producido por las fuentes, reacciona en respaldo de las fuentes mismas manifestandose por un cambio en la descripción de la geometría, y desde luego la dinámica viene a ser más complicada que si trataramos el efecto de un campo escalar.

Esta complicación dinámica es presentada por una forma complicada del Hamiltoniano, ya que es más que cuadrático en coordenadas y momentos generalizados.

Hay que aclarar, que el hamiltoniano total, sin meterle perturbaciones sí nos reproduce las mismas ecuaciones de movimiento que las dadas por la densidad lagrangiana, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora, al obtener el hamiltoniano hasta un orden de ϵ , posiblemente no nos reproduzca ecuaciones semejantes, ya que se pierde la claridad de quienes serán los momentos conjugados a las variables de campo.

De esta manera $H = H_0 + \epsilon H_1$ que viene dados por:

$$H_0 = -t [(\dot{\psi}_0)^2 + (\psi'_0)^2] + \dot{\gamma}_0$$

$$H_1 = 2t[\dot{\psi}_0\dot{\psi}'_1 - \dot{\psi}'_0\dot{\psi}_1] - \lambda_1 [(\dot{\psi}_0)^2 + (\psi'_0)^2] + \dot{\gamma}_1 + \dot{\lambda}_1\gamma_0 - 2\lambda''_1 + \gamma'_0\dot{\lambda}_1 + 16t\pi\rho_1 u_0^2$$

De la dependencia del tiempo en el hamiltoniano, hay el efecto de mezcla de frecuencias positivas y negativas* y creación de partículas.

(*) ver ref. 1.

V.- COMENTARIOS FINALES.

Como se observa en este trabajo y muchos otros, el formalismo ADM empleado en relatividad general, es una herramienta formal que nos lleva a equivalencias con las ecuaciones de movimiento para sistemas de campos continuos, con las dadas directamente con las ecuaciones de Einstein.

En el caso que nos ocupa, el paralelismo con Lapedes refuerza lo dicho anteriormente.

La manera en que se encuentra la densidad lagrangiana de materia empleando un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, es muy diferente al método usual empleado para otros sistemas dinámicos. Esta es una variante del ADM, que únicamente lo encontré en las citas por Ryan M. P.*

Las ecuaciones d.p. para las variables de campo son muy difíciles de resolver dado que existe acoplamiento de todas las variables independientes y ninguna se puede obtener como solución exacta analíticamente. Como se nota en la parte de las condiciones sobre las velocidades $U^\mu U_\mu = -1$, no empleamos un método analítico formal, sino sólo por intuición y la familiarización con las identidades trigonométricas.

Posiblemente la dificultad estribó en la dependencia de las variables de campo respecto de la posición z y del tiempo. Uno cuando utiliza las perturbaciones para las variables de campo, esperamos encontrar soluciones analíticas como las referidas a δ_0 y ψ_0 , y así observar su comportamiento, que es muy parecido a que si no existieran campos de materia, por la manera en que aparecen las ecuaciones de movimiento para dichas variables de campo. Las demás variables δ_1 , ψ_1 y λ_1 , son al parecer cuando ya entra la interacción de los campos de materia.

(*) ver refs. 8 y 9.

VI.- APENDICE.

En este apéndice obtendremos las ecuaciones de Einstein por métodos directos y las compararemos con las ecuaciones obtenidas por el formalismo ADM, de nuestra métrica y la T^u_v dada, con $T^u_v = g^{u\alpha} T_{\alpha v}$,

$$\tau^u_v = (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} T^u_v.$$

- 1.- Ecuaciones de Einstein que nos reproducen ecuaciones de movimiento dadas en el cuerpo de este trabajo.

Como las ecuaciones de Einstein con materia cumplen

$$G^u_v = 8 \pi T^u_v = 8 \pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} \tau^u_v$$

y el elemento de línea es dado por

$$ds^2 = - e^{\lambda - \psi} dt^2 + \lambda^2 e^{-\psi} dx^2 + e^{\psi} dy^2 + e^{\lambda - \psi} dz^2,$$

$$= - A dt^2 + B dx^2 + C dy^2 + D dz^2.$$

con $A = D = \exp(\lambda - \psi)$; $B = \lambda^2 \exp(-\psi)$; $C = \exp(\psi)$.

aquí emplearemos la notación particular: $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$; $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$; $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$

$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ y donde $\lambda = \lambda(z, t)$.

Empleando las ecuaciones de Einstein obtenidas de una métrica diagonal en su forma general, según Dingle*, las componentes no nulas son:

$$G^0_0 = 8 \pi T^0_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AB} (\partial_1^2 A + \partial_1^2 B) + \frac{1}{AC} (\partial_3^2 A + \partial_1^2 C) + \frac{1}{BC} (\partial_3^2 B + \partial_2^2 C) \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{AB^2} [\partial_2 A \partial_2 B + (\partial_1 B)^2] + \frac{1}{BA^2} [\partial_1 B \partial_1 A + (\partial_2 A)^2] + \frac{1}{AC^2} [\partial_3 A \partial_3 C + (\partial_1 C)^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{CA^2} [\partial_1 C \partial_1 A + (\partial_3 A)^2] + \frac{1}{BC^2} [\partial_3 B \partial_3 C + (\partial_2 C)^2] + \frac{1}{CB^2} [\partial_2 C \partial_2 B + (\partial_3 B)^2] \right\} +$$

(*) ver ref. 2.

$$+ \frac{1}{cB^2} [\partial_2 C \partial_2 B + (\partial_2 B)^2] + \frac{1}{ABD} \partial_0 A \partial_0 B - \frac{1}{ABC} [\partial_1 B \partial_1 C + \partial_2 A \partial_2 C + \partial_3 A \partial_3 B] + \\ + \frac{1}{ACD} [\partial_0 A \partial_0 C] + \frac{1}{BCD} \partial_0 B \partial_0 C \}.$$

Haciendo los cálculos pertinentes, uno encuentra finalmente

$$G_0^0 = e^{\Psi \gamma} \left\{ \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{1}{4} (\Psi')^2 - \frac{1}{2} \gamma' \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{1}{2} \ddot{\gamma} \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{1}{4} (\dot{\Psi})^2 \right\}. \quad (1)$$

Para la componente G_1^1 tenemos

$$G_1^1 = 8\pi T_1^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{BC} (\partial_3^2 B + \partial_2^2 C) - \frac{1}{BD} (\partial_0^2 B - \partial_2^2 D) - \frac{1}{CD} (\partial_0^2 C - \partial_3^2 D) \right] - \\ - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{BC^2} [\partial_3 B \partial_3 C + (\partial_2 C)^2] + \frac{1}{cB^2} [\partial_2 C \partial_2 B + (\partial_3 B)^2] - \frac{1}{BD^2} [\partial_0 B \partial_0 D - (\partial_2 D)^2] + \right. \\ + \frac{1}{DB^2} [\partial_2 D \partial_2 B - (\partial_0 B)^2] - \frac{1}{CD^2} [\partial_0 C \partial_0 D - (\partial_3 D)^2] + \frac{1}{cD^2} [\partial_3 D \partial_3 C - (\partial_0 C)^2] - \\ \left. - \frac{1}{BCD} [\partial_2 C \partial_2 D + \partial_3 B \partial_3 D - \partial_0 B \partial_0 C] - \frac{1}{ABC} \partial_1 B \partial_1 C - \frac{\partial_1 B \partial_1 D}{ABD} - \frac{\partial_1 C \partial_1 D}{ACD} \right\}.$$

y haciendo cálculos obtenemos

$$G_1^1 = e^{\Psi \gamma} \left\{ -\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{4} (\dot{\Psi})^2 + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2} \gamma' \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{1}{4} (\Psi')^2 \right\}. \quad (2)$$

Para la componente G_2^2 se tiene

$$G_2^2 = 8\pi T_2^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AC} (\partial_3^2 A + \partial_1^2 C) - \frac{1}{AD} (\partial_0^2 A - \partial_1^2 D) - \frac{1}{CD} (\partial_0^2 C - \partial_3^2 D) \right] - \\ - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{AC^2} [\partial_3 A \partial_3 C + (\partial_1 C)^2] + \frac{1}{cA^2} [\partial_1 C \partial_1 A + (\partial_3 A)^2] - \frac{1}{AD^2} [\partial_0 A \partial_0 D - (\partial_1 D)^2] + \right. \\ + \frac{1}{DA^2} [\partial_1 D \partial_1 A - (\partial_0 A)^2] - \frac{1}{CD^2} [\partial_0 C \partial_0 D - (\partial_3 D)^2] + \frac{1}{DC^2} [\partial_3 D \partial_3 C - (\partial_0 C)^2] - \\ \left. - \frac{1}{ACD} [\partial_1 C \partial_1 D + \partial_3 A \partial_3 D - \partial_0 A \partial_0 C] - \frac{\partial_2 A \partial_2 C}{ABC} - \frac{\partial_2 A \partial_2 D}{ABD} - \frac{\partial_2 C \partial_2 D}{BCD} \right\}.$$

obteniendo

$$G_2^2 = e^{\psi \gamma} \left\{ \frac{1}{4} (\psi')^2 - \frac{1}{2} \ddot{\gamma} + \frac{1}{2} \gamma'' - \frac{1}{4} (\dot{\psi})^2 \right\}. \quad (3)$$

Para la componente G_3^3 :

$$\begin{aligned} G_3^3 = 8 \pi T_3^3 = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{AB} (\partial_2^2 A + \partial_1^2 B) - \frac{1}{AD} (\partial_0^2 A - \partial_1^2 D) - \frac{1}{BD} (\partial_0^2 B - \partial_2^2 D) \right] - \\ & - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{AB^2} [\partial_2 A \partial_2 B + (\partial_1 B)^2] + \frac{1}{BA^2} [\partial_1 B \partial_1 A - (\partial_2 A)^2] - \frac{1}{AD^2} [\partial_0 A \partial_0 D - (\partial_1 D)^2] + \right. \\ & + \frac{1}{DA^2} [\partial_1 D \partial_1 A - (\partial_0 A)^2] - \frac{1}{BD^2} [\partial_0 B \partial_0 D - (\partial_2 D)^2] - \frac{1}{DB^2} [\partial_2 D \partial_2 B - (\partial_0 B)^2] - \\ & \left. - \frac{1}{ABD} [\partial_1 B \partial_1 D + \partial_2 A \partial_2 D - \partial_0 A \partial_0 B] - \frac{\partial_2 B \partial_3 A}{ABC} - \frac{\partial_3 D \partial_3 A}{ACD} - \frac{\partial_3 B \partial_3 D}{BCD} \right\}. \end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} G_3^3 &= e^{\psi \gamma} \left\{ \frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' + \frac{\dot{\lambda} \dot{\psi}}{\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} - \psi'' + \ddot{\psi} - \frac{1}{2} \ddot{\gamma} + \frac{1}{2} \gamma'' - \frac{1}{4} (\dot{\psi})^2 + \frac{1}{4} (\psi')^2 \right\}, \\ \text{o también } G_3^3 &= G_2^2 + e^{\psi \gamma} \left\{ \frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' + \frac{\dot{\lambda} \dot{\psi}}{\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} + \ddot{\psi} - \psi'' \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Para la componente G_0^1 :

$$\begin{aligned} G_0^1 = 8 \pi T_0^1 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{B} \partial_{10}^2 B + \partial_{10}^2 C \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{B^2} \partial_1 B \partial_0 A + \frac{1}{C^2} \partial_1 C \partial_0 C + \frac{1}{AB} \partial_0 A \partial_1 B + \right. \\ & \left. + \frac{1}{AC} \partial_0 A \partial_1 C + \frac{1}{DB} \partial_1 D \partial_0 B + \frac{1}{DC} \partial_1 D \partial_0 C \right]. \end{aligned}$$

$$\text{asi } G_0^1 = -\frac{(\lambda')'}{\lambda} - \frac{1}{2} \dot{\psi} \psi' + \frac{1}{2} \gamma' \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{1}{2} \gamma' \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}, \quad (5)$$

De este modo se tiene que

$$G_{\nu}^{\mu} = 8 \pi \left[\frac{\exp(-(\gamma' - \psi))}{\lambda} \right] \tau_{\nu}^{\mu},$$

093038

$$\begin{aligned} \text{luego: } G_0^0 + G_1^1 &= e^{\psi-\gamma} \left\{ \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{1}{4}(\psi')^2 - \frac{1}{2}\gamma' \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\gamma} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(\dot{\psi})^2 - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{4}(\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{\lambda} \gamma' - \frac{1}{4}(\psi')^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{\psi-\gamma} (\lambda'' - \ddot{\lambda}) = 8\pi \frac{1}{\lambda} e^{\psi-\gamma} (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1). \end{aligned}$$

$$\text{asi } (\ddot{\lambda} - \lambda'') = -8\pi (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1).$$

y empleando la forma funcional de cada componente de T^u_v obtenemos

$$\ddot{\lambda} - \lambda'' = -8\pi (-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} [T_0^0 + T_1^1] = -8\pi N \lambda \rho e^{\frac{1}{2}(\psi-\gamma)} [u^0 u_0 + u^2 u_2].$$

además de la condición sobre las velocidades $u^0 u_0 + u^2 u_2 = -1$ finalmente se obtiene

$$\ddot{\lambda} - \lambda'' = 8\pi \rho \lambda e^{\gamma-\psi}$$

que no es otra cosa que la ecuación (α) obtenida por el formalismo ADM a partir de nuestra densidad lagrangiana.

Cuando hacemos el arreglo $G_0^0 + G_1^1 + G_2^2 - G_3^3$ obtenemos

$$\begin{aligned} G_0^0 + G_1^1 + G_2^2 - G_3^3 &= e^{\psi-\gamma} \left\{ \left(\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} \right) + \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' - \frac{\lambda'}{\lambda} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ddot{\psi} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \psi'' - \ddot{\psi} \right\} \\ &= e^{\psi-\gamma} \left\{ \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \dot{\psi} + \psi'' - \ddot{\psi} \right\} = 8\pi \frac{1}{\lambda} e^{\psi-\gamma} (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1 + \mathcal{T}_2^2 - \mathcal{T}_3^3). \\ 8\pi \frac{1}{\lambda} (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1 + \mathcal{T}_2^2 - \mathcal{T}_3^3) &= \lambda' \psi' \lambda^{-1} - \dot{\lambda} \dot{\psi} \lambda^{-1} + \psi'' - \ddot{\psi}. \end{aligned}$$

como nuestra métrica tiene simetría en z ; $\mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_3^3 = 0$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} \psi' - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \dot{\psi} + \psi'' - \ddot{\psi} = 8\pi \frac{1}{\lambda} (\mathcal{T}_0^0 + \mathcal{T}_1^1) = -\frac{1}{\lambda} 8\pi \rho \lambda e^{\gamma-\psi}$$

que no es otra cosa que la ecuación (γ) dada por el formalismo ADM.

$$\text{De } G_0 + G_0^1 = 8 \pi (\bar{\lambda}' \pi_0 - \bar{\lambda}' \pi_0') = -\frac{(\dot{\lambda})'}{\lambda} - \frac{1}{2} \dot{\psi} \psi' + \\ + \dot{\lambda} \frac{\lambda'}{\lambda} + \dot{\lambda}' \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{1}{4} (\psi')^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{\lambda} \psi' - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{4} (\dot{\psi})^2$$

$$\text{luego } 8 \pi (\pi_0 + \pi_0') = [-\frac{(\dot{\lambda})'}{\lambda} - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' + \frac{1}{2} \dot{\lambda} \lambda' + \bar{\lambda}' \dot{\lambda}'] + \\ + [\lambda'' + \frac{1}{4} \lambda (\psi')^2 - \frac{1}{2} \lambda' \dot{\lambda}' - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\lambda}' + \frac{1}{4} \lambda (\dot{\psi})^2].$$

$$\text{entonces } 8 \pi (\lambda' \pi_0 + \dot{\lambda} \pi_0') = -\dot{\lambda} (\dot{\lambda})' - \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' + \frac{1}{2} \dot{\lambda} \lambda' \dot{\lambda}' + \frac{1}{2} \dot{\lambda}' (\lambda')^2 + \\ + \lambda' \lambda'' + \frac{1}{4} \lambda \lambda' (\psi')^2 - \frac{1}{2} (\lambda')^2 \dot{\lambda}' - \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda}' \dot{\lambda}' + \frac{1}{4} \lambda \lambda' (\dot{\psi})^2.$$

$$- 8 \pi (\lambda' \pi_0 + \dot{\lambda} \pi_0') = \dot{\lambda} (\dot{\lambda}') + \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' - \frac{1}{2} \dot{\lambda}' [(\lambda')^2 - (\lambda')^2] - \\ - \frac{1}{4} \lambda \lambda' [(\dot{\psi})^2 + (\psi')^2] - \lambda' \lambda''.$$

$$\frac{1}{2} \dot{\lambda}' = [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2]^{-1} \{-8 \pi (\lambda' \pi_0 + \dot{\lambda} \pi_0') - \dot{\lambda} (\dot{\lambda}') - \frac{1}{2} \lambda \dot{\lambda} \dot{\psi} \psi' + \frac{1}{4} [(\dot{\psi})^2 + (\psi')^2] + \lambda' \lambda''\}.$$

Trabajando el término $- 8 \pi (\lambda' \pi_0 + \dot{\lambda} \pi_0')$ obtenemos

$$- 8 \pi (\lambda' \pi_0 + \dot{\lambda} \pi_0') = - 8 \pi \rho \lambda (-\lambda' u_0^2 + \dot{\lambda} u_0 u_2).$$

y sustituyéndolo, obtenemos la ecuación (θ) dada en el cuerpo de este trabajo.

Por otro lado:

$$8 \pi (\dot{\lambda} \pi_0 + \lambda' \pi_0') = \dot{\lambda} \lambda'' + \frac{1}{4} \lambda \dot{\lambda} (\psi')^2 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \lambda' \dot{\lambda}' - \frac{1}{2} \dot{\lambda}' (\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{4} \lambda \dot{\lambda}' (\dot{\psi})^2 - \\ - \lambda' (\lambda')' - \frac{1}{2} \lambda \lambda' \dot{\psi} \psi' + \frac{1}{2} \dot{\lambda}' (\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{2} \dot{\lambda}' \lambda \lambda'.$$

$$\frac{1}{2} \dot{\lambda}' = [(\lambda')^2 - (\dot{\lambda})^2]^{-1} \{-8 \pi (-\dot{\lambda} \pi_0 - \lambda' \pi_0') - \dot{\lambda} \lambda'' - \frac{1}{4} \lambda \dot{\lambda}' [(\dot{\psi})^2 + (\psi')^2] + \\ + \lambda' (\lambda')' + \frac{1}{2} \lambda \lambda' \dot{\psi} \psi'\}.$$

Trabajando el término siguiente

$$\begin{aligned}
 -8\pi(-\dot{\lambda}\tau_0^0 - \lambda'\tau_0^1) &= -8\pi(-\dot{\lambda}T_0^0 - \lambda'T_0^1)(-^{(4)}g)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= -8\pi N\lambda g e^{\frac{1}{2}(\lambda-\psi)} [-\dot{\lambda}u^0u_0 - \lambda'u^z u_0] \\
 &= -8\pi\lambda g e^{\lambda-\psi} [-\dot{\lambda}g^{00}(u_0)^2 - \lambda'g^{zz}u_zu_0] , \\
 &= -8\pi\lambda g [\dot{\lambda}u_0^2 - \lambda'u_zu_0] .
 \end{aligned}$$

y sustituyéndolo en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (8) encontrada por medio del formalismo ADM.

De la ecuación (3) se tiene

$$\begin{aligned}
 \lambda G_2^2 = 8\pi\tau_2^2 &\Rightarrow \lambda 8\pi\tau_2^2 = \frac{1}{4}(\psi')^2 - \frac{1}{2}\ddot{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma'' - \frac{1}{4}(\dot{\gamma})^2 \\
 \ddot{\gamma} - \gamma'' &= \frac{1}{2}[(\psi')^2 - (\dot{\psi})^2] + 8\pi\lambda^{-1}\tau_2^2
 \end{aligned}$$

con $\tau_2^2 = 0$, no es otra cosa que la ecuación (β) dada por medio del formalismo ADM.

De esta manera se observa la equivalencia de nuestras ecuaciones para un modelo de simetría plana, con las que se obtienen al resolver las ecuaciones de Einstein por distintos formalismos.

VII.- BIBLIOGRAFIA.

- 1.- Alan S. Lapedes, Physical Review D 15, 946 (1977).
- 2.- Richard C. Tolman, Relativity Thermodynamics and Cosmology, University Press, Oxford (1962).
- 3.- Herbert Goldstein, Classical Mechanics second edition Addison Wesley P.C. (1981).
- 4.- Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, Wolfgang Yourgrau and Stanley Mandelstam, Edit. Dover (1971).
- 5.- Misner, Thorne, Wheeler, Gravitation, Freeman (1973).
- 6.- A. Tikhonov and A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática, Edit. Mir Moscú, segunda edición (1980).
- 7.- Joan Centrella and Richard A. Matzner, The Astrophysical Journal 230, 311-324 (1979).
- 8.- Ryan, M. P. Tesis para obtener su doctorado (1970).
- 9.- Ryan, M. P. Hamiltonian Cosmology, Springer Verlag. Berlín (1972).
- 10.- K. Kuchar, Phys. Rev. D 4, 955 (1971).
- 11.- Morse and Feshbach, Methods of Theoretical Physics parte I pag. 843, Mc Graw-Hill Book Company (1953).
- 12.- Joan Centrella, The Astrophysical Journal 241, 875-885 (1980).
- 13.- I. Gradshteyn and I. Ryzhik, table of integrals, Series and Products. Academic, New York (1965).
- 14.- Butkov, Eugene; Mathematical Physics, Addison-Wesley P.C. (1966).
- 15.- Richard A. Matzner, M. Rosenbaum and M.P. Ryan Jr, J. Math. Phys. 23 (10) October (1982).