Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

“Productos y Sigma productos en espacios y grupos topológicos”

Tesis que presenta

Diego Damián Torres Barrios
Matrícula: 2213800921
Correo: ddtb177@outlook.com

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. Mikhail Tkachenko

Jurado

Presidente: Dr. Vladimir Tkatchouk

Secretario: Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Vocal: Dr. Roberto Pichardo Mendoza

Iztapalapa, Ciudad de México, 1 de agosto de 2024

Dedicado a
Beatriz y Mario, mis padres.

II

Índice general

Agradecimientos

Mi principal agradecimiento es a mis padres, que sin ellos no hubiera llegado hasta este punto. Gracias a su apoyo he logrado esto, la persona que soy hoy es debido a su dedicación, a su amor y principalmente a su apoyo, que sin él no hubiera logrado nada.

Agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana, por darme la formación que he logrado, principalmente al departamento de matemáticas de la unidad Iztapalapa, que sin su apoyo y dedicación para mi formación matemática.

Quiero hacer un total agradecimiento al Dr. Mikhail Tkachenko, quién siempre tuvo la paciencia para saber guiarme y poder enseñarme lo maravilloso de la topología. El agradecimiento también va por todos estos años de compañía, trabajo y amistad.

Quiero agradecer a Gemma, que gracias a su apoyo en los momentos difíciles pude continuar y no desistir. Por darme paz en los momentos de temor, así como brindarme su amor para seguir y cumplir mis metas.

Por ultimo quiero agradecer al CONAHCYT, que gracias a su apoyo he logrado culminar este trabajo.

Resumen

El presente trabajo se centra en el estudio de la normalidad de grupos topológicos, mostrando que en los grupos topológicos la normalidad, en genera, no se preserva bajo operaciones topológicas. El principal objetivo de este trabajo es mostrar la existencia de un grupo topológico numerablemente compacto que no es normal y con este fin se define el Σ-producto de una familia de espacios topológicos.

Dada una familia de espacios topológicos y X, su producto Cartesiano, el Σ-producto de la familia con centro en un punto $b \in X$, es el subconjunto de X que consiste de todos los puntos de X que difieren en una cantidad numerable de coordenadas del punto b. De esto se nota que el Σ-producto es un subespacio denso. Además, si los factores de la familia resultan ser grupos topológicos, el Σ-producto es un grupo topológico. La normalidad del Σ-producto se cumple cuando los factores son metrizables. En el trabajo se hace mención que *Corson* lo probó para familias de espacios métricos completos, pero *Gul'ko* lo generalizó para espacios métricos arbitrarios. El hecho que un grupo topológico numerablemente compacto no es normal se logra con el producto del Σ-producto de una familia de grupos compactos metrizables con su compactificación de *Stone-Čech*.

Introducción

En 1930 Tychonoff definió el producto arbitrario de espacios topológicos. Este fue un verdadero avance, una importante contribución de la Topología General a las Matemáticas, que abrió ampliamente las puertas a los innumerables éxitos futuros en Análisis Funcional, Álgebra Topológica, Lógica Matemática y Teoría de Categorías. En particular, la definición general del producto de espacios dada por Tychonoff hizo inmediatamente claro cómo definir el producto topológico de cualquier familia de grupos topológicos (grupos paratopológicos, etc.).

L. S. Pontryagin utilizó los productos de grupos topológicos como una de las herramientas principales en su trabajo. La construcción del Σ-producto de espacios descrita en (b) del ejemplo 1 en la pagina 29 de este trabajo, también fue introducida por Pontryagin en el contexto de la teoría de grupos topológicos. Años más tarde, esta construcción encontró numerosas aplicaciones en Topología General.

Actualmente, el estudio de productos de espacios topológicos sigue tomando un rol importante en la topología, pues al definir una propiedad topológica, resulta natural preguntarse si la propiedad se preserva bajo productos finitos, numerables o arbitrarios.

Dentro de los estudios topológicos, es siempre interesante estudiar el comportamiento de los axiomas de separación T_0, T_1, Hausdorff, asimismo de las propiedades de separación tales como ser regular, completamente regular y normal. Existen ejemplos de espacios topológicos T_0 que no son T_1, espacios que son Hausdorff, pero no son regulares, incluso, existen espacios topológicos que son regulares, pero no son completamente regulares; esto no ocurre en los grupos topológicos, ya que como veremos, la estructura de grupo dotado de una topología que hace continuas a la multiplicación y la operación de tomar inversos, mejora el comportamiento de los axiomas de separación.

El propósito de este trabajo es estudiar la normalidad de grupos topológicos; observando que ser completamente regular no implica la normalidad de un grupo topológico (A.H. Stone [1948]), incluso presentaremos un grupo topológico numerablemente compacto que no es normal. Para esto, definiremos el Σ-producto de una familia de espacios topológicos, mostrando una serie de resultados sobre éste y observaremos la normalidad de este subespacio cuando los factores son metrizables. Además, veremos que, en consecuencia del teorema de Tamano $[1960]$, el producto del Σ-producto de una familia de grupos topológicos compactos con su compactificación de Stone-Čech no necesariamente es normal, de hecho este producto es un grupo topológico numerablemente compacto no normal.

El trabajo será distribuido en 3 capítulos. En el primer capítulo se enunciarán ciertos conceptos y resultados básicos, los cuales nos ayudarán para las pruebas posteriores. Observaremos el comportamiento de algunas funciones cardinales en espacios topológicos, algunas conocidas en cursos básicos de topología, y veremos su comportamiento bajo productos de espacios topológicos. Además, se tendrá una sección dedicada al estudio de grupos topológicos, en la que veremos que todo grupo topológico es regular (teorema 1.3.9) y completamente regular (teorema 1.3.15), es decir, en grupos topológicos ser T_0 implica ser completamente regular, lo que motivó a preguntarse si todo grupo topológico T_0 es normal.

En el segundo capítulo nos centramos en tomar el producto Cartesiano de grupos topológicos, el cual veremos que también resulta ser un grupo topológico. Además, responderemos la pregunta: ¿todo grupo topológico es normal? para lo que se desarrollará una sección dedicada a los teoremas de factorización, haciendo uso principalmente del teorema de S. Mazur (teorema 2.1.5).

Para finalizar, en el tercer capítulo, trabajaremos en la normalidad de subespacios del espacio producto, definiendo el Σ-producto y σ-producto, mostrando una serie de resultados, por ejemplo que el Σ-producto es numerablemente compacto cuando los factores son grupos topológicos compactos (teorema 3.0.12). Se tendrá una sección dedicada a la paracompacidad de espacios topológicos, lo cual nos ayudará como herramienta, junto con el teorema de Tamano (teorema 3.1.8) para probar que el producto del Σ-producto de una cierta familia de grupos topológicos compactos con su compactificación de Stone-Čech es un grupo numerablemente compacto que no es normal. Concluyendo que en grupos topológicos las propiedades de separación tienen un mejoramiento hasta ser un espacio $T_{3.5}$, incluso si tomamos un grupo topológico numerablemente compacto.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Productos

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, una base de topología para el producto Cartesiano $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de la familia, es la familia de conjuntos $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha$, donde el conjunto W_α es abierto en el espacio X_α para cada $\alpha \in A$ y $W_\alpha \neq X_\alpha$ para una cantidad finita de $\alpha \in A$. La topología generada por dicha base fue definida por *A. N. Tychonoff*. Además, si para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una base para X_α, entonces la subfamilia que consiste de $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha$ con $W_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ siempre que $W_\alpha \neq X_\alpha$ para una cantidad finita de $\alpha \in A$, también es una base.

Dada la definición de la topología producto podemos obtener los siguientes resultados, cuya demostración se puede ver en [4] capítulo 2, sección 3.

Proposición 1.1.1 *Una función f de un espacio topológico X a un producto $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ es continua si y sólo si la composición $\pi_\beta f$ es continua para cada $\beta \in A$, donde π_β es la proyección de Y sobre el factor Y_β.*

Proposición 1.1.2 *El conjunto $D = \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$ es denso en el producto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ si y sólo si D_α es denso en X_α, para cada $\alpha \in A$.*

Es natural preguntarse sobre las propiedades que se preservan bajo productos. A continuación, enunciaremos algunas de estas propiedades.

Teorema 1.1.3 *Cualquier producto de espacios T_i es un espacio T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 3.5$. Si el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un espacio T_i, entonces todos los factores X_α son espacios T_i.*

Uno de los resultados más importantes dentro de la topología es el teorema 1.1.6, que fue formulado en 1935 por Tychonoff, la prueba que presentamos es debida a Chevalley y O. Frink en 1941.

Para la prueba del teorema de Tychonoff será necesario el siguiente teorema (ver [4] teorema $3.1.10$).

Teorema 1.1.4 *Si existe una función continua $f : X \to Y$ de un espacio compacto X sobre un espacio Hausdorff Y, entonces Y es compacto.*

Antes de continuar, es importante mencionar que en este trabajo cuando hablemos de espacios compactos, vendrá incluido ser Hausdorff.

El lema de *Teichmüller-Tukey* (ver [4] sección I.4.), nos ayudará para la prueba del teorema 1.1.6. Este lema nos habla sobre propiedades de carácter finito. Diremos que una propiedad P en subconjuntos de un conjunto X es de carácter finito si el conjunto vacío tiene esta propiedad y un subconjunto A de X tiene la propiedad si y solo si todos los subconjuntos finitos de A tienen la propiedad.

Lema 1.1.5 (Teichmüller-Tukey) *Si P es una propiedad de carácter finito de subconjuntos de un conjunto X, entonces todo subconjunto A de X que tiene la propiedad P está contenido en un subconjunto B que tiene la propiedad P y es maximal en la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad P.*

Teorema 1.1.6 (Teorema de Tychonoff) *El producto $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, con $X_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in A$, es compacto si y sólo si todos los espacios X_α son compactos.*

Demostración. Supongamos que el producto $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es compacto y no vacío. Dado que la proyección π_α es una función continua de X sobre el factor X_α, se sigue del teorema 1.1.4 que X_α es compacto para cada $\alpha \in A$.

Sea una familia $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ de espacios compactos no vacíos. Dado que cada X_α es Hausdorff, entonces el producto Cartesiano $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es Hausdorff. Consideremos una familia $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Veremos que $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Como la propiedad de la intersección finita es de carácter finito, se sigue del lema de *Teichmüller-Tukey* que la familia $\mathcal{F}_0$ está contenida en una familia $\mathcal{F}$ maximal de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Veremos que existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{F}$ para cada $F \in \mathcal{F}$.

Por la maximalidad de $\mathcal{F}$ se tiene que:

$$\text{si } F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}, \quad \text{entonces } F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \in \mathcal{F} \tag{1.1}$$

y

$$\text{si } F_0 \subseteq X \text{ y } F_0 \cap F \neq \emptyset \text{ para cada } F \in \mathcal{F}, \text{ entonces } F_0 \in \mathcal{F}. \tag{1.2}$$

Dado que la familia $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces la familia $\mathcal{F}_\alpha = \{\overline{\pi_\alpha(F)}\}_{F\in\mathcal{F}}$, también tiene la propiedad para cada $\alpha \in A$. Por lo tanto, por la compacidad de X_α, para cada $\alpha \in A$ existe un punto

$$x_\alpha \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{\pi_\alpha(F)} \subset X_\alpha.$$

Sea W_α una vecindad de x_α en X_α. Entonces $W_\alpha \cap \pi_\alpha(F) \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$, es decir,

$$\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap F \neq \emptyset,$$

para cada $F \in \mathcal{F}$. Por (1.2), se sigue que $\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \in \mathcal{F}$, y por (1.1), se sigue que todos los miembros de la base canónica de X que contienen al punto $x = \{x_\alpha\}$ pertenecen a la familia $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, cada $F \in \mathcal{F}$ intersecta a todos los miembros de la base canónica para X que contienen a x. Esto prueba el teorema. $\square$

Decimos que un espacio X es *numerablemente compacto* si X es Hausdorff y toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita. Para este caso, veremos que ser numerablemente compacto no es una propiedad que se preserve bajo productos.

Ejemplo 1 *Existen espacios numerablemente compactos de Tychonoff X y Y, tales que $X \times Y$ no es numerablemente compacto.*

Para eso, definiremos dos subespacios X y Y de $\beta\mathbb{N}$ de modo que $X \cup Y = \beta\mathbb{N}$ y $X \cap Y = \mathbb{N}$.

Para cada $M \subseteq \beta\mathbb{N}$ sea $[M]^\omega$ la familia de todos los subconjuntos numerables infinitos de M, y sea f la función que a cada miembro B de $[\beta\mathbb{N}]^\omega$ le asigna un punto de acumulación del conjunto B en el espacio $\beta\mathbb{N}$.

Haciendo $X_0 = \mathbb{N}$ y

$$X_\alpha = \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma\right) \cup \left\{ f(B) : B \in \left[\bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma\right]^\omega \right\} \text{ para } 0 < \alpha < \omega_1,$$

definimos por recursión transfinita una sucesión $X_0, X_1, \ldots, X_\alpha, \ldots, \alpha < \omega_1$ de subconjuntos de $\beta\mathbb{N}$ tal que $X_\alpha \subseteq X_\beta$ si $\alpha < \beta < \omega_1$ y $|X_\alpha| \leq 2^\omega$ para todo $\alpha < \omega_1$.

El espacio $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ es numerablemente compacto, puesto que todo $B \in [X]^\omega$ está contenido en algún X_α y por lo tanto, tiene un punto de acumulación en $X_{\alpha+1}$ y en X, por lo que X es numerablemente compacto. Aplicando inducción transfinita, podemos notar que $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} + (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, por lo que $|X| \leq \mathfrak{c}$. Sea $Y = \mathbb{N} \cup (\beta\mathbb{N} \setminus X)$.

Como todo subconjunto infinito cerrado de $\beta\mathbb{N}$ contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$, se tiene que $|\overline{B}| = 2^{\mathfrak{c}}$ para todo $B \in [Y]^\omega$. Entonces todo subconjunto numerable infinito de Y tiene un punto de acumulación en Y, por lo que Y es numerablemente compacto.

Ahora consideremos el producto $X \times Y$ y denotemos por Δ_0 a la intersección de $X \times Y$ con la diagonal Δ del producto $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Como $X \cap Y = \mathbb{N}$, se tiene que $\Delta_0 = \{(1,1), (2,2), \ldots\}$. Dado que $\{i\}$ es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{N}$ para $i \in \mathbb{N}$, Δ_0 es un subespacio abierto discreto en $X \times Y$. Por otro lado, como Δ es cerrado en $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$, el conjunto Δ_0 es cerrado en $X \times Y$ por lo que, $X \times Y$ no es numerablemente compacto. $\square$

1.2. Funciones cardinales

Decimos que f es una función cardinal si a un espacio topológico X le asigna un número cardinal tal que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par de espacios X, Y homeomorfos.

Una función cardinal conocida es el peso de un espacio X, que se define como el menor cardinal $|\mathcal{B}| \geq \omega$, donde $\mathcal{B}$ es una base para el espacio topológico X y lo denotaremos por $w(X)$.

De forma similar definimos el carácter de un espacio topológico X en el punto $x \in X$, como el menor cardinal $|\mathcal{B}(x)| \geq \omega$, tal que $\mathcal{B}(x)$ es una base local en $x \in X$ y lo denotaremos por $\chi(x, X)$. Al supremo de todos los números $\chi(x, X)$, lo llamaremos el carácter del espacio X y lo denotaremos por $\chi(X)$. La prueba del teorema 1.2.1 se puede encontrar en [4], teorema 1.1.15..

Teorema 1.2.1 *Sea X un espacio topológico tal que $w(X) \leq \kappa$, para algún cardinal infinito κ. Entonces para cualquier base $\mathcal{B}$ de X, existe una base $\mathcal{B}_0$ de X tal que $|\mathcal{B}_0| \leq \kappa$ y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.*

Antes de continuar, un espacio X con peso numerable, es decir, $w(X) = \omega$ lo llamaremos espacio segundo numerable y si $\chi(X) = \omega$, el espacio X será llamado primero numerable.

La densidad de un espacio X se define como el menor cardinal $|D| \geq \omega$, donde D es un subconjunto denso de X, el cual denotaremos por $d(X)$. Si la densidad del espacio es numerable, entonces diremos que X es separable.

Una vez dadas las definiciones anteriores, es natural preguntarse como se comparan entre ellas, lo que nos lleva a los siguientes dos resultados (ver [4]).

Proposición 1.2.2 *Para cualquier espacio X se cumple $d(X) \leq w(X)$.*

Teorema 1.2.3 *Para cada espacio Hausdorff X se tiene que $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ y $|X| \leq [d(X)]^{\chi(X)}$.*

Es natural preguntarse sobre el comportamiento del peso, el carácter y la densidad bajo el producto Cartesiano de espacios topológicos. La prueba del teorema 1.2.4 se puede ver en [4] teorema 2.3.13.

Teorema 1.2.4 *Sea κ un cardinal mayor o igual que ω. Si $w(X_\alpha) \leq \kappa$, para todo $\alpha \in A$ y $|A| \leq \kappa$, entonces $w\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \leq \kappa$.*

Si $\chi(X_\alpha) \leq \kappa$ para todo $\alpha \in A$ y $|A| \leq \kappa$, entonces $\chi\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \leq \kappa$.

Teorema 1.2.5 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery) *Sea $\kappa \geq \omega$. Si $d(X_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha \in A$ y $|A| \leq 2^\kappa$, entonces $d\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \leq \kappa$.*

Demostración. Supongamos que los espacios X_α son no vacíos y que $|A| = 2^\kappa$. Sea D_α un subespacio denso de X_α tal que $|D_\alpha| \leq \kappa$. Probaremos que el producto $\prod_{a \in A} D_\alpha$ contiene un subconjunto denso de tamaño κ. Como el producto Cartesiano $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$, donde f_α es una función del espacio discreto $D(\kappa)$ de tamaño κ sobre D_α, es una función continua de $[D(\kappa)]^{2^\kappa}$ sobre $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha$, es suficiente ver que $d\left([D(\kappa)]^{2^\kappa}\right) \leq \kappa$.

Denotemos por T a la potencia κ-ésima del espacio discreto de dos puntos; tenemos que $|T| = 2^\kappa$ y $w(T) \leq \kappa$. Tomemos una base $\mathcal{B}$ para T tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ y denotemos por $\mathcal{T}$ a la colección de todas las familias finitas $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ de conjuntos ajenos dos a dos de miembros de $\mathcal{B}$; claramente $|\mathcal{T}| \leq \kappa$.

En el producto $[D(\kappa)]^{2^\kappa} = \prod_{t \in T} Y_t$, donde $Y_t = D(\kappa)$ para cada $t \in T$, tomemos el subconjunto S que consiste de todas las funciones f de T a $D(\kappa)$ tales que existe $\{U_1, \ldots, U_k\} \in \mathcal{T}$ con la propiedad que f es constante en todo U_i, así como en el conjunto $\mathcal{T} \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$. Dado que $|\mathcal{T}| \leq \kappa$, tenemos que $|S| \leq \kappa$.

Veremos que S es denso en $[D(\kappa)]^{2^\kappa}$, es decir que para cada conjunto abierto V de $\prod_{t \in T} Y_t$ se tiene que $V \cap S \neq \emptyset$. Para eso, tomemos $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, con

$t_i \neq t_j$ para $i \neq j$, y puntos $y_1, y_2, \ldots, y_k \in D(\kappa)$ tales que $\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(y_i) \subset V$. Como T es Hausdorff, existe una familia $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \in \mathcal{T}$ tal que $t_i \in U_i$ para $i = 1, \ldots k$. La función f de T a $D(\kappa)$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} y_i & si \quad t \in U_i \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ y_1 & si \quad t \in T \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k) \end{cases}$$

pertenece a tanto a S como a V, por lo que $S \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, S es denso en $[D(\kappa)]^{2^\kappa}$. $\square$

En consecuencia del teorema anterior se obtienen los siguientes teoremas (ver [4], teorema 2.3.17 y lema 1.4.15)

Teorema 1.2.6 *Si $d(X_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha \in A$, entonces cualquier familia ajena dos a dos de conjuntos abiertos no vacíos del producto $\prod_{\alpha \in A} X_a$ tiene cardinalidad a lo más κ.*

Lema 1.2.7 *Si Y es un subespacio denso de un espacio regular X, entonces $\chi(y, Y) = \chi(y, X)$ para cada $y \in Y$.*

La *estrechez* de un espacio X, denotada por $t(X)$, es el mínimo cardinal $\tau \geq \omega$ tal que para cada $x \in X$ y todo conjunto $P \subseteq X$ con $x \in \overline{P}$, existe un subconjunto Q de P tal que $|Q| \leq \tau$ y $x \in \overline{Q}$.

Realicemos dos modificaciones al concepto de estrechez. Sea τ un cardinal infinito. Diremos que la *G_δ-estrechez* del espacio X no es mayor que τ, y escribiremos $get(X) \leq \tau$, si para cada punto $x \in X$ que pertenece a la cerradura de $\bigcup \gamma$, donde γ es una familia de conjuntos G_δ en X, existe una subfamilia η de γ tal que x está en la cerradura de $\bigcup \eta$ y $|\eta| \leq \tau$. Además, si existe un subconjunto M de $\bigcup \gamma$ tal que $x \in \overline{M}$ y $|M| \leq \tau$, diremos que la *δ-estrechez* de X no es más grande que τ y escribiremos $t_\delta(X) \leq \tau$.

Resulta que la G_δ-estrechez y la δ-estrechez de productos arbitrariamente grandes con "buenos" factores son numerables. Para obtener estos resultados, introduciremos un concepto relacionado con el producto de espacios y un lema auxiliar.

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su producto topológico. Entonces, un *ω-cubo* en X es cualquier subconjunto B de X que puede ser representado como el producto de subconjuntos de cada X_α, es decir, $B = \prod_{\alpha \in A} B_\alpha$, donde $B_\alpha \subseteq X_\alpha$ para cada $\alpha \in A$, además, el conjunto

$A_B = \{\alpha \in A : B_\alpha \neq X_\alpha\}$ es numerable. Al conjunto A_B, en este caso, lo llamaremos el *núcleo* del ω-cubo.

Sea $X_K = \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$, para cada subconjunto no vacío K de A. Si B es un ω-cubo con núcleo K tal que la imagen $\pi_K(B)$ consiste únicamente de un punto, diremos que B es un ω-cubo elemental. Además, si $B = \prod_{\alpha \in A} B_\alpha$ es un ω-cubo en X con núcleo K tal que B_α es un conjunto G_δ en X_α para cada $\alpha \in K$, entonces B será llamado conjunto G_δ canónico.

El siguiente lema nos dará una herramienta útil para probar que ocurre si cada producto numerable de una familia de espacios tiene estrechez numerable (ver [1] 1.5.22).

Lema 1.2.8 *Supongamos que $f : X \to Y$ es una función abierta y continua de X sobre Y, $x \in X$, $B \subset Y$ y $f(x) \in \overline{B}$. Entonces $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. En particular, $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.*

Proposición 1.2.9 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto de la familia y supongamos que la estrechez de $X_K = \prod_{\alpha \in K} X_a$ es numerable, para todo subconjunto numerable K de A. Entonces, para cualquier familia γ de ω-cubos en X y para cualquier punto $x \in \overline{\bigcup \gamma}$, existe una subfamilia numerable η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup \eta}$.*

Demostración. Primero definiremos por inducción una sucesión creciente de subconjuntos numerables A_n de A y una sucesión de subfamilias numerables γ_n de γ.

Sea A_0 un subconjunto numerable de A. Supongamos que el conjunto A_n ya está bien definido para algún $n \in \omega$ y construiremos el conjunto A_{n+1}. Entonces, haciendo $K = A_n$, el conjunto X_K tiene estrechez numerable, por lo que existe una subfamilia numerable γ_n de γ tal que el punto $\pi_K(x)$ está en la cerradura del conjunto $\bigcup\{\pi_K(V) : V \in \gamma_n\}$. Definiendo el conjunto $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup\{A_B : B \in \gamma_n\}$ obtenemos una colección numerable. Por lo que, el paso inductivo está completo.

Hagamos $M = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$ y $\eta = \bigcup\{\gamma_n : n \in \omega\}$. Notemos que η es una subfamilia numerable de γ. Si H es la cerradura de $\bigcup \eta$, entonces debemos probar que $x \in H$. Para eso sea O_1 una vecindad abierta canónica de x en X. Así para un subconjunto finito S de A se tiene que $O_1 = \pi_S^{-1}\pi_S(O_1)$. Si $F = S \cap M$ y $O = \pi_F^{-1}\pi_F(O_1)$, entonces $x \in O_1 \subset O = \pi_F^{-1}\pi_F(O)$. Por la definición de M y η se sigue que $\bigcup \eta = \pi_M^{-1}\pi_M\left(\bigcup \eta\right)$ y, como la proyección π_M es abierta, el lema 1.2.8 implica que $\pi_M^{-1}\pi_M(H) = H$. Por lo tanto, las condiciones $O \cap H \neq \emptyset$ y $O_1 \cap H \neq \emptyset$ son equivalentes.

Ahora, dado que la sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ es creciente, existe $n \in \omega$ tal que $F \subseteq A_n$. Por la elección de γ_n, el punto $\pi_F(x)$ está en la cerradura del conjunto $\bigcup\{\pi_F(V) : V \in \gamma_n\}$ en el espacio X_F. Por lo tanto, existe $z \in \bigcup \gamma_n \subseteq \bigcup \eta$ tal que $\pi_F(z) \in \pi_F(O)$, de esto se sigue que $z \in O \cap \bigcup \eta$. Por lo tanto, $x \in H$. $\square$

Sea γ es una familia de conjuntos G_δ en el producto de una familia de espacios topológicos $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Dado que, para cada punto $y \in X$, que está en la unión de la familia γ existe un conjunto G_δ canónico B en X tal que $y \in B \subseteq \bigcup \gamma$, podemos suponer que la familia γ consiste únicamente conjuntos G_δ canónicos. Además, en el final del paso inductivo de la prueba anterior, para la existencia de la familia numerable γ_n de γ tal que $\pi_K(x)$ está en la cerradura de $\bigcup\{\pi_K(V) : V \in \gamma_n\}$ en X_K, podemos notar que $\pi_K(V)$ es un ω-cubo del tipo G_δ en X_K, para cada $V \in \gamma_n$ y, suponiendo que la G_δ-estrechez es numerable para productos numerables, podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 1.2.10 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto de la familia y supongamos que la G_δ-estrechez de $X_K = \prod_{\alpha\in K} X_\alpha$ es numerable, para todo subconjunto numerable K de A. Entonces, para cualquier familia γ de conjuntos G_δ en X y cualquier punto x en la cerradura de $\bigcup \gamma$, existe una subfamilia numerable η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup \eta}$; es decir, $get(X) \leq \omega$.*

Si un espacio X es primero numerable, entonces X tiene estrechez numerable. Además, todos los espacios Fréchet-Urysohn también tienen estrechez numerable. Por la proposición anterior podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 1.2.11 *El producto de cualquier familia de espacios primero numerables tiene G_δ-estrechez numerable.*

Lema 1.2.12 *Supongamos que $X = \prod_{\alpha\in A} X_a$ es el producto de una familia de espacios topológicos, γ es una familia numerable de ω-cubos elementales en X y $x \in \overline{\bigcup \gamma}$. Para cada $B \in \gamma$, sea $y(B)$ cualquier punto de B tal que $y(B)_\alpha = x_\alpha$, para cada $\alpha \in A \setminus A_B$, donde A_B es el núcleo de B. Pongamos $M = \{y(B) : B \in \gamma\}$. Entonces M es numerable, $M \subset \bigcup \gamma$ y $x \in \overline{M}$.*

Demostración. Supongamos que O es una vecindad abierta canónica de x en X. Dado que $x \in \overline{\bigcup \gamma}$, existe $B \in \gamma$ tal que $O \cap B \neq \emptyset$. Para cada $\alpha \in A$, sea π_α la proyección de X sobre el factor X_α. Como B es un ω-cubo elemental, debemos tener $y(B)_\alpha \in \pi_\alpha(O)$, para $\alpha \in A_B$. Tomando en cuenta que $y(B)_\alpha = x_\alpha$ para cada $\alpha \in A \setminus A_B$, entonces se tiene que $y(B) \in O \cap M$, por lo que $x \in \overline{M}$. $\square$

El corolario 1.2.11 puede ser generalizado con ayuda del lema 1.2.12 como se sigue.

Teorema 1.2.13 *Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos primero numerables y sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto de la familia. Entonces la δ-estrechez de X es numerable.*

Demostración. Sea γ una familia de conjuntos G_δ en X y $x \in X$ un punto en la cerradura de $\bigcup \gamma$. Como el producto numerable de espacios primero numerables es primero numerable. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, donde, B_α es un ω-cubo elemental en X para cada $\alpha \in A$. Entonces existe B_α tal que $x \in B_\alpha$, si K es el núcleo de B_α, se sigue que $\pi_K(x)$ es un sólo punto y tiene una base local numerable, digamos $\{U_n : n \in \omega\}$. Por lo que, $\pi_K(x) = \bigcap U_n$, así $x \in \bigcap \pi^{-1}(U_n)$ que es un conjunto G_δ. Por lo tanto, podemos suponer que todo elemento de γ es la unión de ω-cubos elementales en X, por lo que, podemos asumir que γ consiste únicamente de ω-cubos elementales. Por 1.2.11, la G_δ-estrechez de X es numerable. Por lo tanto, existe una subfamilia numerable η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup \eta}$. Como η consiste de ω-cubos elementales, por el lema 1.2.12 existe un subconjunto numerable M de $\bigcup \eta$ tal que $x \in \overline{M}$. Como $M \subseteq \bigcup \gamma$, se sigue que $t_\delta(X) \leq \omega$. $\square$

La celularidad de un espacio X es el menor cardinal $\kappa \geq \omega$ tal que toda familia ajena dos a dos de conjuntos abiertos de X, tiene cardinalidad a lo más κ, y será denotado por $c(X)$. Cuando $c(X) = \omega$, diremos que el espacio tiene la propiedad de Souslin.

Para cada cardinal infinito τ, definimos un conjunto G_τ como la intersección de una familia de a lo más τ conjuntos abiertos de un espacio X. Así, para el espacio X podemos definir $cel_\tau(X)$ como el mínimo cardinal $\lambda \geq \omega$ tal que toda familia $\mathcal{G}$, que consiste de conjuntos G_τ en X, contiene una subfamilia $\mathcal{H}$ que satisface $\overline{\bigcup \mathcal{H}} = \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ y $|\mathcal{H}| \leq \lambda$. Un espacio con $cel_\tau(X) \leq \tau$ es llamado τ-celular. Podemos notar que un espacio ω-celular tiene G_δ-estrechez numerable. Además, de la definición podemos notar que si $\omega \leq \kappa \leq \lambda$, entonces $c(X) \leq cel_\kappa(X) \leq cel_\lambda(X)$.

Podemos relacionar la celularidad de un espacio con la densidad, esto lo muestra el siguiente resultado que es consecuencia del teorema 1.2.6.

Teorema 1.2.14 *El producto de una familia de espacios separables tiene la propiedad de Souslin.*

Ahora veremos el comportamiento de la función cel_ω bajo productos.

Lema 1.2.15 *Sea* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *el producto de una familia de espacios topológicos y supongamos que el subproducto* $X_K = \prod_{\alpha\in K} X_\alpha$ *satisface* $cel_\omega(X_K) \leq \omega$ *para cada subconjunto numerable* $K \subset A$*. Entonces* X *también satisface* $cel_\omega(X) \leq \omega$*.*

Demostración. Sea γ una familia de conjuntos G_δ en X. Como todo elemento es unión de una familia de conjuntos canónicos G_δ en X, podemos asumir que la familia γ consiste de conjuntos canónicos G_δ. Tomemos una subfamilia numerable γ_0 de γ y denotemos por K_0 a la unión de los núcleos de los elementos de γ_0. Por lo que K_0 es un subconjunto numerable de A. Supongamos que para algún $n \in \omega$, ya está definida una subfamilia numerable γ_n de γ y un subconjunto numerable K_n de A. Dado que $cel_\omega(X_{K_n}) \leq \omega$, existe una subfamilia numerable γ_{n+1} de γ tal que $\pi_{K_n}(\bigcup \gamma_{n+1})$ es denso en $\pi_{K_n}(\bigcup \gamma)$. Haciendo K_{n+1} la unión de K_n con los núcleos de los elementos de γ_{n+1}, se tiene que K_{n+1} es numerable y $K_n \subseteq K_{n+1}$. Además, por la definición de K_{n+1} se cumple que $F = \pi^{-1}_{K_{n+1}}\pi_{K_{n+1}}(F)$, para cada $F \in \gamma_n$.

Pongamos

$$\gamma^* = \bigcup_{n\in\omega} \gamma_n \quad y \quad K = \bigcup_{n\in\omega} K_n.$$

Entonces γ^* es una subfamilia numerable de γ y por como se construyó, $\pi_K\left(\bigcup \gamma^*\right)$ es denso en $\pi_K\left(\bigcup \gamma\right)$. Dado que $K_n \subseteq K$, para cada $n \in \omega$, se sigue que $F = \pi_K^{-1}\pi_K(F)$, para cada $F \in \gamma^*$. Dado que la proyección $\pi_K : X \to X_K$ es abierta, podemos concluir que $\bigcup \gamma^* = \pi_K^{-1}\pi_K\left(\bigcup \gamma^*\right)$ es denso en $\pi_K^{-1}\left(\overline{\pi_K\left(\bigcup \gamma\right)}\right) \supseteq \bigcup \gamma$. Es decir, $\bigcup \gamma^*$ es denso en $\bigcup \gamma$ y, por lo tanto, $cel_\omega(X) \leq \omega$. □

El lema anterior es cierto para cualquier cardinal infinito κ; es decir, la celularidad de un producto está dado por la celularidad de subproductos finitos. Para eso, es necesario definir un Δ-sistema.

Una familia de conjuntos γ es un Δ-*sistema* si existe un conjunto R, al que llamaremos *raíz* del Δ-sistema, de modo que para cada $A, B \in \gamma$ distintos, se cumple que $A \cap B = R$.

Lo primero que podemos notar de manera inmediata es que si R es la raíz de un Δ-sistema γ, entonces el conjunto $\{A \setminus R : A \in \gamma\}$ es una familia disjunta.

El siguiente resultado es de gran utilidad dentro del estudio de cardinales y será de utilidad en demostraciones, aquí será presentado sin demostración y es conocido como el Δ-lema (Ver [5], capitulo 3, Lema 2.6).

Teorema 1.2.16 (Δ-lema) *Sea γ una familia de conjuntos finitos y supongamos que $|\gamma|$ es un cardinal regular no numerable. Entonces γ contiene una subfamilia μ de la misma cardinalidad que forma un Δ-sistema.*

Teorema 1.2.17 *Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un producto de espacios y supongamos que el subproducto $X_K = \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ satisface $c(X_K) \leq \tau$ para todo $K \subset A$ finito, donde τ es un cardinal infinito. Entonces $c(X) \leq \tau$.*

Demostración. Supongamos que $c(X) > \tau$. Entonces X contiene una familia disjunta $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ de conjuntos abiertos canónicos no vacíos. Para cada $\alpha < \tau^+$ escojamos un conjunto finito $A_\alpha \subset A$ tal que $U_\alpha = \pi_{A_\alpha}^{-1} \pi_{A_\alpha}(U_\alpha)$. Sea $\gamma = \{A_\alpha : \alpha < \tau^+\}$. Si $|\gamma| \leq \tau$, entonces existe $C \subset \tau^+$ con $|C| = \tau^+$ y tal que $A_\alpha = A_\beta = J$ para cada $\alpha, \beta \in C$. Denotemos por π_J a la proyección de X sobre X_J. Entonces el conjunto $\{\pi_J(U_\alpha) : \alpha \in C\}$ es una familia ajena, puesto que para $\alpha, \beta \in C$, los conjuntos U_α y U_β son ajenos, por lo que $\pi_J(U_\alpha) \cap \pi_J(U_\beta) = \emptyset$. Así tenemos una familia de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos de tamaño τ^+, lo cual contradice el hecho que $c(X_J) \leq \tau$. Así, la familia γ tiene tamaño τ^+. Sin perder generalidad, supongamos que $A_\alpha \neq A_\beta$ para cada $\alpha, \beta < \tau^+$.

Por el teorema 1.2.16 existe $B \subset \tau^+$, con $|B| = \tau^+$ y un conjunto finito $R \subset A$ tal que $A_\alpha \cap A_\beta = R$ para $\alpha, \beta \in B$ distintos. Dado que $c(X_J) \leq \tau$, existen $\alpha, \beta \in B$, distintos tales que $V = \pi_R(U_\alpha) \cap \pi_R(U_\beta) \neq \emptyset$, como los conjuntos $A_\alpha \setminus R$, $A_\beta \setminus R$ son ajenos, podemos tomar un punto $x \in X$ tal que $\pi_R(x) \in V$, $\pi_i(x) \in \pi_i(U_\alpha)$ para $i \in A_\alpha \setminus R$ y $\pi_i(x) \in \pi_i(U_\beta)$, para $i \in A_\beta \setminus R$. Entonces $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, que es una contradicción, por lo que $c(X) \leq \tau$. $\square$

1.3. Grupos topológicos

Recordemos que un *grupo topológico* es un grupo G dotado con una topología $\mathcal{O}$ de tal manera que la multiplicación definida en el grupo sea continua y la operación de tomar inversos sea continua.

La demostración de los siguientes resultados se omitirán (ver [1], capitulo 1, sección 2 y sección 3). Algunos ejemplos de grupos topológicos son:

1. Cualquier grupo G dotado con la topología discreta.

2. El grupo $\mathbb{R}$ con la suma usual y la topología usual.

3. $G = GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles de tamaño n con entradas reales.

Para un elemento arbitrario a en un grupo G, las funciones $\lambda_a(x) = ax$ y $\rho_a(x) = xa$ son llamadas traslaciones izquierdas y derechas, respectivamente, de a en G.

Dado que en un grupo topológico las traslaciones izquierdas y derechas son continuas con inversas continuas, entonces los grupos topológicos son espacios homogéneos. Un resultado que se puede deducir de este hecho es el siguiente.

Proposición 1.3.1 *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Si f es continua en la identidad e de G, entonces f es continua en todo G.*

Proposición 1.3.2 *Sea G un grupo topológico, U un subconjunto abierto de G y A cualquier conjunto de G. Entonces, los conjuntos AU y UA son abiertos en G.*

Teorema 1.3.3 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base en la identidad e de G. Entonces, para cada subconjunto A de G,*

$$\overline{A} = \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}\}.$$

Es interesante ver el comportamiento del operador cerradura aplicado a subgrupos de grupos.

Proposición 1.3.4 *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces, la cerradura de H en G es un subgrupo topológico.*

Proposición 1.3.5 *Si H es un subgrupo primero numerable de un grupo topológico G, entonces la cerradura de H en G es también primero numerable.*

En la sección anterior se discutió sobre las funciones cardinales en espacios topológicos, lo que lleva al estudio del comportamiento de estas funciones, pero en grupos topológicos.

Lema 1.3.6 *Sea G un grupo topológico. Supongamos que D es un subespacio denso de G y U es una vecindad abierta de la identidad e en G. Entonces $G = DU$.*

Demostración. Es suficiente probar que $G \subseteq DU$. Sea $g \in G$. Dado que D es denso y que gU^{-1} es una vecindad abierta de g, existe $x \in D \cap gU^{-1}$. Por lo que, $g \in xU \subset DU$. Entonces $G = DU$. $\square$

Proposición 1.3.7 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base en la identidad e de G. Supongamos que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $D_B \subseteq G$ tal que $G = D_B B$. Entonces $\{xB : x \in D_B,\ B \in \mathcal{B}\}$ es una base para G.*

Demostración. Sea $g \in G$ y U un abierto en G que contiene a g. Así, podemos encontrar una vecindad abierta V de e tal que $gV \subseteq U$. Sea W una vecindad de e tal que $W^{-1}W \subseteq V$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq W$. Como $G = D_B B$, existe $x \in D_B$ tal que $g \in xB$, por lo que $g \in xB \subseteq gB^{-1}B \subseteq gW^{-1}W \subseteq gV \subseteq U$. □

Teorema 1.3.8 *Si G es un grupo topológico, entonces $w(G) = d(G)\chi(G)$.*

Demostración. Para todo espacio topológico se cumple $d(G) \leq w(G)$ y $\chi(G) \leq w(G)$, por lo que $d(G)\chi(G) \leq w(G)$.

Sean D denso en G de cardinalidad menor o igual $d(G)$ y $\mathcal{B}$ una base en e tal que $|\mathcal{B}| \leq \chi(G)$. Entonces, por el lema 1.3.6, $G = DB$ para cada $B \in \mathcal{B}$, y por la proposición 1.3.7 se tiene que $\mathcal{V} = \{xB : x \in D,\ B \in \mathcal{B}\}$ es una base para G de cardinalidad a lo más $d(G)\chi(G)$. Por lo tanto, $w(G) \leq d(G)\chi(G)$. □

Un importante hecho dentro del estudio de grupos topológicos es sobre el comportamiento de los axiomas de separación. Como se verá, a diferencia de los espacios topológicos, los axiomas de separación tienen buen comportamiento en los grupos topológicos.

Teorema 1.3.9 *Todo grupo topológico G es un espacio regular.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de la identidad e de G. Entonces existe una vecindad V tal que $V^2 \subset U$, además, podemos escoger a V como una vecindad simétrica, es decir, $V = V^{-1}$. Entonces, si $x \in \overline{V}$, tenemos que $Vx \cap V \neq \emptyset$. Por lo que $a_1 x = a_2$ para algunos $a_1, a_2 \in V$. Se sigue que el punto $x = a_1^{-1}a_2 \in V^{-1}V = V^2 \subset U$. Esto implica que $\overline{V} \subset U$. Como G es homogéneo, se cumple la regularidad de G. □

Una vez mostrado que todo grupo topológico es regular, sería natural preguntarse si todo grupo topológico es completamente regular. Para eso haremos uso de *prenormas*. En este texto, seguiremos el planteaminieto de A. A. Markov, aunque se llamará *prenorma* a lo que él llamo norma.

Definición 1.3.1 *Sea G un grupo topológico, con neutro e, y sea N una función de valores reales en G. Decimos que N es una* prenorma *en G si para cada $x, y \in G$, se cumple:*

I. $N(e) = 0$;

II. $N(xy) \leq N(x) + N(y)$;

III. $N(x^{-1}) = N(x)$.

Si x es un elemento de un grupo G con neutro e, como $e = xx^{-1}$ y por las condiciones de prenorma, podemos notar que

$$0 = N(e) \leq N(x) + N(x^{-1}) = 2N(x).$$

Por lo tanto, $N(x) \geq 0$ para cada $x \in G$.

Proposición 1.3.10 *Si N es una prenorma en G, entonces $|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y)$, para cualesquiera $x, y \in G$.*

Demostración. Por II se tiene que:

$$N(y) \leq N(x) + N(x^{-1}y). \tag{1.3}$$

Además, por II y III, se deduce que:

$$N(x) = N(x^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x^{-1}y) = N(y) + N(x^{-1}y). \tag{1.4}$$

Por (1.3) y (1.4), obtenemos la desigualdad deseada. □

Lema 1.3.11 *Sea f una función acotada de valores reales en un grupo G. Entonces la función N_f en G, definida por*

$$N_f(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\},$$

para cada $x \in G$, es una prenorma en G.

Demostración. Es claro que $N_f(e) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} N_f(xy) &= \sup_{z\in G} |f(zxy) - f(z)| \\ &\leq \sup_{z\in G} (|f(zxy) - f(zx)| + |f(zx) - f(z)|) \\ &\leq \sup_{t\in G} |f(ty) - f(t)| + \sup_{z\in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= N_f(y) + N_f(x). \end{aligned}$$

Además, si $z = yx^{-1}$, entonces

$$N_f(x^{-1}) = \sup_{y\in G} |f(yx^{-1}) - f(y)| = \sup_{z\in G} |f(z) - f(zx)| = N_f(x).$$

Por lo tanto, la función N_f define una prenorma en G. $\square$

En general, una prenorma en un grupo topológico no necesariamente tiene que ser continua, el siguiente resultado nos da las condiciones para que una prenorma sea continua.

Proposición 1.3.12 *Una prenorma N en un grupo topológico G es continua si y sólo si para cada número positivo ε existe una vecindad U del neutro e tal que $N(x) < \varepsilon$ para cada $x \in U$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como N es continua podemos escoger una vecindad U de e, de modo que para cada $x \in U$ se cumple $N(x) = |N(x) - N(e)| < \varepsilon$.

Ahora, supongamos que x es cualquier punto de G y ε un número positivo. Tomemos una vecindad U de e con las hipótesis de la proposición. Dado que el conjunto $V = xU$ es una vecindad de x, podemos tomar cualquier $y \in xU$, notemos que $x^{-1}y \in U$ y por lo tanto, $N(x^{-1}y) < \varepsilon$. Por la proposición 1.3.10 se sigue que $|N(x) - N(y)| < \varepsilon$. Así, la función N es continua en x. $\square$

Ahora construiremos prenormas en grupos topológicos. La importancia de esta construcción radica en que nos proporciona una familia de prenormas continuas en cualquier grupo topológico G.

Si N es una prenorma en un grupo G, definamos la bola unitaria de N como $B_N = \{x \in G : N(x) < 1\}$. Si N es una prenorma continua, entonces B_N es un conjunto abierto de G. También, hagamos $B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$, donde ε es un número positivo; llamaremos a $B_N(\varepsilon)$ la N-bola de radio ε.

Teorema 1.3.13 (A. A. Markov) *Para cada vecindad abierta U del neutro e de un grupo topológico G, existe una prenorma continua N en G tal que la bola unitaria B_N está contenida en U.*

El teorema se deriva del siguiente lema, que nos brinda una técnica más elaborada, fijando detalles relevantes de la situación.

Lema 1.3.14 *Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una sucesión de vecindades simétricas abiertas del neutro e en un grupo topológico G tal que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces existe una prenorma N en G tal que*

$$\left\{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq U_n \subseteq \left\{x \in G : N(x) \leq \frac{2}{2^n}\right\}, \text{ para cada } n \in \omega \tag{PN}$$

Por lo tanto, la prenorma es continua. Si, en adición, los conjuntos U_n son invariantes, entonces la prenorma N en G puede ser elegida de forma que

$$N(xyx^{-1}) = N(y)$$

para todo $x, y \in G$.

Demostración.

Comenzaremos construyendo vecindades $V(r)$ de la identidad e comenzando, haciendo $V(1) = U_0$, fijemos $n \in \omega$, y asumamos que las vecindades abiertas $V(m/2^n)$ de e, están definidas para cada $m = 1, 2, \ldots, 2^n$. Entonces, haciendo $V(1/2^{n+1}) = U_{n+1}$, $V(2m/2^{n+1}) = V(m/2^n)$ para $m = 1, 2, \ldots 2^n$ y

$$V((2m+1)/2^{n+1}) = V(m/2^n)U_{n+1} = V(m/2^n)V(1/2^{n+1})$$

para cada $m = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Esto define vecindades abiertas $V(r)$ de e para todo número racional diádico $r \leq 1$. También hacemos $V(m/2^n) = G$, cuando $m > 2^n$. Ahora probaremos por inducción sobre n que

$$V(m/2^n)V(1/2^n) \subseteq V((m+1)/2^n) \tag{p}$$

para cualquier entero $m > 0$ y $n \geq 0$. Notemos que la condición (p) es evidente cuando $m + 1 > 2^n$. Entonces consideremos el caso $m < 2^n$. Cuando $n = 1$ se tiene que m también debe ser 1, así

$$V(1/2)V(1/2) = U_1^2 \subseteq U_0 = V(1).$$

Supongamos que (p) se cumple para n y verifiquemos que se cumple para $n + 1$. Tomaremos dos casos, cuando m es par o impar. Si $m = 2k$, con k un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned} V(m/2^{n+1})V(1/2^{n+1}) &= V(k/2^n)V(1/2^{n+1}) \\ &= V(k/2^n)U_{n+1} \\ &= V((2k+1)/2^{n+1}) \\ &= V((m+1)/2^{n+1}). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $m = 2k+1 < 2^{n+1}$, para algún entero k. Entonces

$$\begin{aligned} V(m/2^{n+1})V(1/2^{n+1}) &= V((2k+1)/2^{n+1})U_{n+1} \\ &= V(k/2^n)U_{n+1}U_{n+1} \\ &\subseteq V(k/2^n)U_n \\ &= V(k/2^n)V(1/2^n). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned} V(k/2^n)V(1/2^n) &\subseteq V((k+1)/2^n) \\ &= V((2k+2)/2^{n+1}) \\ &= V((m+1)/2^{n+1}). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la condición (p).

Definiremos una función f de valores reales en G como se sigue:

$$f(x) = \text{ínf}\{r > 0 : x \in V(r)\},$$

para cada $x \in G$. La función f está bien definida, dado que $x \in V(2) = G$, para cada $x \in G$. Por la condición (p), se sigue que si $0 < r < s$ son números racionales diádicos, entonces $V(r) \subseteq V(s)$. En el argumento siguiente, únicamente consideraremos números racionales diádicos.

$$\text{Si } f(x) < r, \text{entonces, } x \in V(r). \tag{1}$$

Por lo que f es una función no negativa, acotada, por el argumento de arriba, por 2. Por lo tanto, por el lema 1.3.11, la función N definida por la fórmula

$$N(x) = \sup_{y \in G}\{|f(yx) - f(y)|\}$$

para cada $x \in G$, es una prenorma en G.

Ahora, probaremos que la prenorma cumple la condición enunciada en el lema. Como $e \in V(1/2^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f(e) = 0$. Asumamos que $N(x) < 1/2^n$, para algún $x \in G$. Entonces $f(x) = |f(ex) - f(e)| \leq N(x) < 1/2^n$, así, por (1), $x \in V(1/2^n) = U_n$. Por lo que, $\{x \in G : N(x) < 1/2^n\} \subset U_n$.

Por otro lado, si $x \in V(1/2^n)$, y para cualquier $y \in G$, existe un entero positivo k tal que $(k-1)/2^n \leq f(y) < k/2^n$, entonces, por (1), $y \in V(k/2^n)$, dado que $x \in V(1/2^n)$ y $x^{-1} \in V(1/2^n)$, se sigue que yx y yx^{-1} están en $V(k/2^n)V(1/2^n) \subseteq V((k+1)/2^n)$. Así, obtenemos, $f(yx) \leq (k+1)/2^n$ y

$f(yx^{-1}) \leq (k+1)/2^n$. De las desigualdades anteriores, y como $(k-1)/2^n \leq f(y)$, obtenemos $f(yx) - f(y) \leq 2/2^n$ y $f(yx^{-1}) - f(y) \leq 2/2^n$. Sustituyendo y por yx en la segunda desigualdad obtenemos $f(y) - f(yx) \leq 2/2^n$, por lo que $|f(yx) - f(y)| \leq 2/2^n$, para cada $y \in G$. Así, $N(x) \leq 2/2^n$. En consecuencia, $U_n \subseteq \{x \in G : N(x) \leq 2/2^n\}$. La misma condición probada, implica que la función N es continua en la identidad e, y por la proposición 1.3.12 N es continua en todo el grupo G.

Finalmente, supongamos que los conjuntos U_n son invariantes, es decir, para todo $x \in G$ y $n \in \omega$ se tiene $xU_nx^{-1} = U_n$. Como el producto finito de conjuntos invariantes es invariante, por inducción tenemos que el conjunto $V(r)$ también es invariante para cada número racional diádico $r > 0$. Entonces, para la función f obtenemos $f(xyx^{-1}) = f(y)$, para cada $x, y \in G$. Por lo que, dados elementos $x, y \in G$, se obtiene las igualdades

$$\begin{aligned} N(xyx^{-1}) = \sup_{z \in G} |f(zxyx^{-1}) - f(z)| &= \sup_{z \in G} |f(x^{-1}zxy) - f(z)| \\ &= \sup_{t \in G} |f(ty) - f(xtx^{-1})| \\ &= \sup_{t \in G} |f(ty) - f(t)| \\ &= N(y), \end{aligned}$$

donde $t = x^{-1}zx$. $\square$

Demostración.(teorema 1.3.13) Usando los axiomas de grupo topológico, podemos construir una sucesión de vecindades abiertas $\{U_n : n \in \omega\}$ de la identidad e en G que satisfacen las condiciones del lema 1.3.14, y tal que $U_0 = U$.

Entonces, existe una prenorma continua N en G de modo que cumpla la condición (PN). Esto es, $B_N(1/2^n) \subseteq U_n \subseteq \{x \in G : N(x) \leq 2/2^n\}$, para cada $n \in \omega$. Para $n = 0$ se deduce que $B_N = B_N(1) \subseteq U$. $\square$

Como se sabe, existen espacios topológicos Hausdorff que no son regulares y espacios Hausdorff regulares que no son completamente regulares (ver 1.5.6 y 1.5.9 en [4]). La estructura de grupo impide estas situaciones, pues según la proposición 1.3.9, todos los grupos topológicos son regulares, y en consecuencia del teorema 1.3.13 podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 1.3.15 *Todo grupo topológico es completamente regular.*

Demostración. Sea $x \in G$ y U una vecindad abierta de x en G. Consideremos la vecindad $x^{-1}U$ de la identidad en G. Por el teorema 1.3.13, existe una prenorma continua N en G tal que $B_N \subseteq x^{-1}U$. Si definimos $f(y) = N(x^{-1}y)$, obtenemos una función continua en G. Además $f(x) = 0$, pues $f(x) = N(e) = 0$ y como $f(y) < 1$. Se deduce que $x^{-1}y \in x^{-1}U$. Luego $y \in U$, esto es, $\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U$. Por lo que, G es completamente regular. $\square$

Como se sabe, todo espacio métrico es primero numerable, en el caso de grupos ocurre un hecho interesante. Otro resultado en consecuencia del teorema 1.3.13 es el siguiente.

Teorema 1.3.16 (G. Birkhoff, S. Kakutani) *Un grupo topológico G es metrizable si y solo si es primero numerable.*

Demostración. Como se mencionó, todo espacio métrico es primero numerable, en consecuencia, si G es metrizable, entonces es primero numerable.

Ahora, fijemos una base numerable $\{W_n : n \in \omega\}$ del espacio G en el punto e. Por inducción, obtenemos una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades simétricas de la identidad, tales que $U_n \subseteq W_n$ y $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$, para cada $n \in \omega$. Esta sucesión también es una base para G en e. Por el lema 1.3.14, existe una prenorma continua N en G tal que $B_N(1/2^n) \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Así, los conjuntos abiertos $B_N(1/2^n)$ también son una base para G en e.

Definamos $\rho_N(x, y) = N(xy^{-1})$, para $x, y \in G$, veamos que es una métrica para G y además, genera la topología original en G.

Claramente $\rho_N(x, y) = N(xy^{-1}) \geq 0$; además notemos que $\rho_N(x, x) = N(xx^{-1}) = 0$. Ahora, supongamos que $\rho_N(x, y) = 0$. Entonces se tiene que $xy^{-1} \in B_N(1/2^n) \subseteq U_n$, para cada $n \in \omega$. Como $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ se sigue que $xy^{-1} = e$, por lo que $x = y$. Como N es una prenorma, se sigue que $N(x^{-1}) = N(x)$, por lo tanto $\rho_N(y, x) = N(yx^{-1}) = N((xy^{-1})^{-1}) = N(xy^{-1}) = \rho_N(x, y)$. Entonces también es simétrica.

Resta verificar la desigualdad del triángulo. Tomemos $x, y, z \in G$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho_N(x, z) &= N(xz^{-1}) \\
&= N(xy^{-1}yz^{-1}) \\
&\leq N(xy^{-1}) + N(yz^{-1}) \\
&= \rho_N(x, y) + \rho_N(y, z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ_N es una métrica en G.

Demostremos que la métrica ρ_N satisface que $\rho_N(x, y) = \rho_N(xz, yz)$, para todo $x, y, z \in G$:

$$\rho_N(xz, yz) = N(xzz^{-1}y^{-1}) = N(xy^{-1}) = \rho_N(x, y).$$

Como $B_N(\varepsilon)$ es la ρ_N-vecindad de e de radio ε, se sigue que la ρ_N-vecindad de cualquier punto x en G es el conjunto $B_N(\varepsilon)x$. Tomemos $x \in G$. Como los conjuntos $B_N(1/2^n)$ forman una base de G en e, y G es un grupo topológico, los conjuntos $B_N(1/2^n)x$ forman una base para G en x, es decir, las ρ_N-vecindades de e de radio $1/2^n$ forman una base de G en x. Por lo tanto, la métrica ρ_N genera la topología original del espacio G. □

En consecuencia del teorema 1.3.16 podemos obtener la proposición 1.3.17, que nos da la relación entre metrizabilidad de subespacios compactos en grupos topológicos (ver [1], lema 3.3.22).

Proposición 1.3.17 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un grupo topológico G:*

(a) Todo subespacio compacto de G es primero numerable;

(b) Todo subespacio compacto de G es metrizable.

Capítulo 2

Productos de grupos topológicos

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades del producto en grupos topológicos. Primero se mostrará que el producto de una familia de grupos topológicos, es un grupo topológico con la topología producto de Tychonoff. Posteriormente hablaremos sobre la normalidad de grupos topológicos, así como el encaje de grupos topológicos Abelianos en productos topológicos.

Teorema 2.0.1 *Supongamos que $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de grupos topológicos, e_α es la identidad de G_α para cada $\alpha \in A$, y sea $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ el producto Cartesiano de los grupos G_α con la topología producto de Tychonoff y la multiplicación definida coordenada a coordenada. Entonces G es también un grupo topológico, con identidad $e = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

Demostración. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ y $y = (y_\alpha)_{y \in \alpha}$ elementos arbitrarios de G y O una vecindad de $z = xy^{-1}$ en G. Si $z = (z_\alpha)_{\alpha \in A}$ entonces $z_\alpha = x_\alpha y_\alpha^{-1}$ para cada $\alpha \in A$. Como G está dotado con la topología producto de Tychonoff, podemos buscar elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ del conjunto de índices A y vecindades abiertas W_{α_k} del punto z_{α_k} en el grupo G_{α_k} para cada $k = 1, \ldots, n$ tales que $W = \prod_{\alpha \in A} W_\alpha \subset O$, donde $W_\alpha = W_{\alpha_k}$ si $\alpha = \alpha_k$ para algún $k \leq n$, y $W_\alpha = G_\alpha$ en otro caso.

Como cada G_{α_k} es un grupo topológico, existen vecindades U_{α_k} y V_{α_k} de x_{α_k} y y_{α_k}, respectivamente, en G_{α_k} tales que $U_{\alpha_k} V_{\alpha_k}^{-1} \subset W_{\alpha_k}$. Además, hagamos $U_\alpha = V_\alpha = G_\alpha$ para cada $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Entonces los conjuntos $U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ y $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ son vecindades abiertas de x y y, respectivamente, en el producto G. Se sigue de la definición de los conjuntos U y V que $UV^{-1} \subset W \subset O$. Por lo tanto, G es un grupo topológico. $\square$

De hecho, es posible aplicar el teorema 1.3.16 para grupos topológicos Abelianos, lo que nos dará el siguiente resultado.

Teorema 2.0.2 *Todo grupo topológico Abeliano G es topológicamente isomorfo a un subgrupo del producto de alguna familia de grupos topológicos Abelianos metrizables.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de e en G. De acuerdo con el teorema 1.3.13, podemos fijar una prenorma continua N_U en G tal que la bola unitaria con respecto a N_U está contenida en U.

Hagamos $H_U = \{x \in G : N_U(x) = 0\}$. Como N_U es continua, H_U es cerrado en G; como $N_U(e) = 0$ se sigue que $e \in H_U$. Además, si $x, y \in H_U$, notemos que $N_U(xy) \leq N_U(x) + N_U(y) = 0$, así $xy \in H_U$.

por último, dado que $N_U(x^{-1}) = N_U(x) = 0$, se sigue que H_U es un subgrupo de G.

Como G es Abeliano, entonces el cociente $G_U = G/H_U$ es un grupo Abeliano. Denotemos por f_U el homomorfismo cociente natural de G sobre G_U, y definamos una función P_U en el grupo G_U como $P_U(y) = N_U(x)$, donde x es un elemento de $f_U^{-1}(y)$. Como $P_U(y)$ no depende de la elección de x en $f_U^{-1}(y)$ se sigue que P_U es una prenorma en G_U. Además, notemos que $P_U(y) = 0$ si y sólo si y es la identidad e_U de G_U.

Por las condiciones de prenorma, las $\frac{1}{n}$-bolas con respecto a la prenorma P_U forman una base para la topológia τ_U en G_U sobre la cual G_U es un grupo topológico y la función f_U es continua. Además, la preimagen de la bola unitaria con respecto a P_U está contenida en U. Notemos que G_U es primero numerable, por lo que es metrizable.

Entonces, el producto diagonal de las funciones f_U, donde U varia sobre la familia $\mathcal{B}$ de vecindades de e en G, es un isomorfismo topológico de G sobre el producto $\prod_{U \in \mathcal{B}} G_U$. Dado que G_U es un grupo Abeliano metrizable, está completa la demostración. $\square$

Una vez definida la estrechez, la G_δ-estrechez y δ-estrechez, podemos notar que si la estrechez de un espacio X es numerable, entonces la G_δ estrechez también será numerable, además si X tiene δ-estrechez numerable, entonces la G_δ-estrechez también es numerable; sin embargo, no ocurre la implicación contraria, incluso si el espacio es un grupo topológico, para eso consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 *Para cualquier cardinal infinito κ, existe un grupo topológico compacto G tal que tiene δ-estrechez numerable pero $t(G) \geq \kappa$.*

Para eso, consideremos κ un cardinal regular. Sea $D = \{0, 1\}$ el grupo discreto de dos elementos. Entonces, por el teorema 1.2.13, el grupo $G = D^\kappa$ tiene δ-estrechez numerable. Probaremos que $t(G) \geq \kappa$. Denotemos por $\overline{0}$ el punto de G con coordenadas cero, ***i.e.***, el neutro de G. Para todo ordinal $\beta < \kappa$, sea un elemento $x_\beta \in G$ definido por $x_\beta(\alpha) = 0$ si $\alpha \leq \beta$ y $x_\beta(\alpha) = 1$ en otro caso. Entonces, podemos notar que $\overline{0}$ está en la cerradura del conjunto $X = \{x_\beta : \beta < \kappa\}$. Para deducir que $t(G) \geq \kappa$ veremos que $\overline{0}$ no está en la cerradura de ningún $Y \subseteq X$ con $|Y| < \kappa$. Por la regularidad de κ, para cada $Y \subseteq X$, con $|Y| < \kappa$ existe $\alpha < \kappa$ tal que $\beta < \alpha$ se cumple para cada $x_\beta \in Y$. Entonces $x_\beta(\alpha) = 1$ para todo $x_\beta \in Y$ y, por lo tanto, $\overline{0}$ no pertenece a la cerradura de Y en G. $\square$

En el capítulo anterior se mostró que todos los grupos topológicos son completamente regulares. Ahora, veremos qué ocurre con la normalidad de un grupo topológico. Lo primero que veremos es que el producto de espacios topológicos normales no necesariamente es un espacio normal.

Lema 2.0.3 (Lema de Jones) *Ningún espacio separable normal contiene un subespacio discreto cerrado de cardinalidad el continuo.*

Demostración. Supongamos que el espacio X contiene un subconjunto numerable denso D y un subespacio discreto cerrado F de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Como toda función de valores reales en X es determinada por la restricción a D, hay como máximo $\mathfrak{c}$ de tales funciones. Por otro lado, por el teorema de Tietze-Urysohn, cada una de las $2^{\mathfrak{c}}$ funciones continuas de valores reales definidas en F es continuamente extendible sobre X, lo que es una contradicción. $\square$

Ejemplo 3 *El cuadrado de la* recta de Sorgenfrey K *no es normal.*

Para eso, notemos que el conjunto $\{(x, y) : y = -x\}$ es un subconjunto cerrado y discreto de $K \times K$, de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Puesto que los racionales son densos en K, se sigue que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subconjunto denso numerable de $K \times K$, por el lema 2.0.3 el espacio $K \times K$ no es normal. $\square$

2.1. Teoremas de factorización

Sea $f : X \to Z$ y $p : X \to Y$ dos funciones continuas, decimos que f se factoriza a través de p si existe una función $g : Y \to Z$, no necesariamente continua, tal que $f = g \circ p$. Podemos deducir que f se factoriza a través de p si y solo si $p(x_1) = p(x_2)$ implica que $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$. También, diremos que f admite una factorización continua a través de p si la función g es continua. En este caso, escribiremos $p \prec f$.

Si $X = \prod_{\alpha \in A} X_a$ es un producto de espacios y $f : X \to Y$ es una función continua, decimos que f depende únicamente de un conjunto $J \subseteq A$ si f se factoriza a través de la proyección π_J. Decimos que f depende de una cantidad numerable de coordenadas si el conjunto J es numerable, es decir, f depende de una cantidad numerable de coordenadas si existe un conjunto numerable $J \subset A$ tal que para todo $x, y \in X$, $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ implica que $f(x) = f(y)$, donde $\pi_J : X \to X_J = \prod_{\alpha \in J} X_a$ es la proyección de X sobre X_J.

Ahora, con el fin de mostrar la existencia de un grupo topológico G que no es normal, haremos uso del teorema de *Mazur*, para la prueba del teorema es necesario introducir un concepto nuevo y el teorema de *Glicksberg*.

Para un cardinal infinito τ, un espacio X es llamado *pseudo-τ-compacto* si toda familia discreta en X de conjuntos abiertos tiene cardinalidad estrictamente menor que τ. Es importante mencionar que todos los espacios separables son pseudo-$\aleph_1$-compactos.

Otra aplicación del Δ-lema (teorema 1.2.16) es el siguiente resultado que nos proporciona el comportamiento de la pseudo-τ-compacidad bajo el producto (ver [1], 1.6.22).

Proposición 2.1.1 *Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un producto de espacios topológicos no vacíos tales que todo subproducto finito $X_J = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es pseudo-τ-compacto, donde τ es un cardinal regular no numerable. Entonces X también es pseudo-τ-compacto.*

Lema 2.1.2 *Sean $f : X \to Z$ y $p : X \to Y$ funciones continuas, donde $p(X) = Y$. Si f se factoriza a través de p y la función p es cociente, entonces existe una única función continua $g : Y \to Z$ tal que $f = g \circ p$.*

Demostración. Como f se factoriza a través de p, entonces existe una función $g : Y \to Z$. Para ver la continuidad de g sea $U \subseteq Z$ un conjunto abierto y notemos que el conjunto $p^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ es abierto en X, pues f es continua. Dado que p es cociente, se sigue que $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Por lo tanto, g es continua en Y.

Ahora veremos la unicidad de g, para eso supongamos que existe una función continua $h : Y \to Z$ tal que $f = h \circ p$. Así $g \circ p = h \circ p$. Como $p(X) = Y$ se tiene que $g = h$. Por lo tanto la función g es única. $\square$

El lema anterior nos sirve como herramienta para la prueba del teorema de Glicksberg, el cual será presentado sin demostración (ver [1], teorema 1.7.2).

Teorema 2.1.3 (I. Glicksberg) *Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un espacio producto de espacio no vacíos. Si X es pseudo-τ-compacto, para algún cardinal τ con $cf(\tau) > \omega$, donde $cf(\tau)$ es la cofinalidad de τ, entonces toda función continua f de valores reales en X depende de a lo más τ coordenadas. Por lo tanto, existen un conjunto $J \subseteq A$ con $|J| < \tau$ y una función continua $h : X_J \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi_J$.*

El siguiente resultado es útil para la aplicación del teorema de Glicksberg, en el caso especial $\tau = \aleph_0$.

Teorema 2.1.4 *Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto de una familia de espacios topológicos no vacíos y $f : X \to Z$ una función continua a un espacio Tychonoff Z tal que $w(Z) \leq \tau$. Si X es pseudo-τ^+-compacto, entonces existen un conjunto $J \subseteq A$ con $|J| \leq \tau$ y una función continua $h : X_J \to Z$ tales que $f = h \circ \pi_J$.*

Demostración. Podemos identificar a Z como un subespacio del cubo de Tychonoff I^τ, donde $I = [0, 1]$. Para cada $\alpha \in \tau$, denotemos por p_α a la proyección de I^τ sobre el factor I_α. Entonces $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ es una función continua de valores reales en X. Para cada $\alpha < \tau$, por el teorema 2.1.3, podemos encontrar un conjunto $J_\alpha \subseteq A$ de cardinalidad a lo más τ y una función continua $g_\alpha : X_{J_\alpha} \to I$ la cual satisface que $f_\alpha = g_\alpha \circ \pi_{J_\alpha}$, donde $\pi_{J_\alpha} : X \to X_{J_\alpha}$ es la proyección. Notemos que el conjunto $J = \bigcup_{\alpha<\tau} J_\alpha$ cumple que $|J| \leq \tau$. Sea $\pi^J_{J_\alpha} : X_J \to X_{J_\alpha}$ la proyección para cada $\alpha < \tau$. Entonces $h_\alpha = g_\alpha \circ \pi^J_{J_\alpha}$ es una función continua de valores reales en X_J. Denotemos por h el producto diagonal de la familia $\{h_\alpha : \alpha < \tau\}$. Así, la función $h : X_J \to I^\tau$ es continua y satisface $h_\alpha = p_\alpha \circ h$ para cada $\alpha < \tau$. Como f es el producto diagonal de la familia $\{f_\alpha : \alpha < \tau\}$ y $f_\alpha = h_\alpha \circ \pi_J$ se cumple para cada $\alpha < \tau$, entonces $f = h \circ \pi_J$. $\square$

El siguiente resultado nos dará la herramienta para exhibir un grupo topológico que no será normal. Este es un resultado que se sigue del teorema 2.1.4.

Teorema 2.1.5 (S. Mazur) *Toda función continua de valores reales en un producto de espacios separables depende de una cantidad numerable de coordenadas.*

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto de una familia de espacios separables y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Como $w(\mathbb{R}) = \omega$ y X es pseudo-$\aleph_1$-compacto, entonces existe un conjunto numerable $J \subseteq A$ y una función continua $h : X_J \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \pi_J$, es decir, f depende de una cantidad numerable de coordenadas. $\square$

Ejemplo 4 *Existe un grupo topológico que no es normal.*

Consideremos $\mathbb{Z}$ el grupo de los números enteros con la topología discreta, y sea $G = \mathbb{Z}^{\omega_1}$, el producto de ω_1 copias de $\mathbb{Z}$. Sea $F_i \subset G$ el subconjunto que consiste de todos los puntos $x = (x_\alpha)_\alpha$ en G tal que para todo $j \in \mathbb{Z} \setminus \{i\}$, la igualdad $x_\alpha = j$ se cumple para a lo más un $\alpha < \omega_1$, para $i = 1, 2$. Entonces los conjuntos F_1 y F_2 son ajenos, puesto que, si $x = (x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} \in F_1 \cap F_2$ se tiene que $x \in F_1$, lo que implica que $x_\alpha = 2$ para a lo más un $\alpha < \omega_1$, esto contradice el hecho que $x \in F_2$, pues $x_\alpha = 2$ para más de un $\alpha < \omega_1$. Por lo que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Además, son cerrados pues el conjunto $G \setminus F_1$ es abierto. Si consideramos $x \in G \setminus F_1$, $x = (x_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$, entonces existen $j \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \omega_1$ distintos, tales que $x_{\alpha_1} = x_{\alpha_2} = j$. Definamos $V = \prod_{\alpha \in \omega_1} W_\alpha$, donde $W_\alpha = \mathbb{Z}$ para cada $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2$ y $W_{\alpha_1} = W_{\alpha_2} = \{j\}$. Por la definición de V se tiene que $x \in V \subseteq G \setminus F_1$. Por lo tanto el conjunto $G \setminus F_1$ es abierto. La prueba para F_2 es análoga.

Ahora, si G fuera normal, entonces existirían conjuntos abiertos U, V tales que $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ y $U \cap V \neq \emptyset$. Por el lema de Urysohn existe una función continua $f : G \to \mathbb{R}$ tal que $f(U) \subseteq \{0\}$ y $f(V) \subseteq \{1\}$. Entonces por el teorema de Mazur, f depende de una cantidad numerable de coordenadas, por lo que existe un conjunto numerable, digamos $K = \{\alpha_i : i \in \omega\}$, tal que f se factoriza a través de la proyección π_K.

Tomemos $x \in G$ tal que para cada $\alpha_i \in K$, $x_{\alpha_i} = i$, si para $i \neq j$ ocurre que $x_{\alpha_i} = x_{\alpha_j}$ definimos $x_{\alpha_i} = 1$ y para $\alpha \notin K$, $x_\alpha = 1$. Entonces, $x = (x_\alpha) \in F_1$ y sea $y \in G$ tal que $y_{\alpha_i} = i$ para cada $\alpha_i \in K$, si para $i \neq j$ ocurre que $y_{\alpha_i} = y_{\alpha_j}$ definimos $y_{\alpha_i} = 2$ y $y_\alpha = 2$ para $\alpha \notin K$, por lo que $y \in F_2$. Así, $\pi_K(x) = \pi_K(y)$, esto implica que $f(x) = f(y)$, pero $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$, por lo que G no puede ser normal. $\square$

Capítulo 3

Σ-productos y σ-productos

Una clase importante de espacios topológicos son definidos como subespacios del producto de espacios topológicos. En este capítulo nos dedicaremos al estudio del Σ-producto y el σ-producto, mencionando su comportamiento con ciertas propiedades topológicas como lo son compacidad o metrizabilidad. Para finalizar, se dará un resultado sobre el Σ-producto cuando los factores son grupos topológicos. Al final del capítulo se mostrará que el producto de espacios normales numerablemente compactos no necesariamente es normal, incluso si los factores son grupos topológicos, para eso haremos uso del teorema de Tamano.

Definición 3.0.1 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, $X = \prod \eta$ el producto de la familia η y b un punto en X. Entonces, el* Σ-producto *de la familia η con centro en b es el subespacio de X que consiste de todos los puntos $x \in X$ tal que únicamente una cantidad numerable de coordenadas x_α de x son distintas de las correspondientes coordenadas b_α del punto b.*

Para $x \in X$ el conjunto $\{\alpha \in A : x_\alpha \neq b_\alpha\}$ es llamado el soporte *de x (con respecto a b) y será denotado por $supp_b(x)$.*

De manera análoga definimos el σ-producto de la familia η como todos puntos $x \in X$ que sólo una cantidad finita de coordenadas x_α son distintas a las correspondientes coordenadas b_α de b.

De forma inmediata podemos notar que el σ-producto es un subespacio del Σ-producto. Además, es importante mencionar que el σ-producto y el Σ-producto de grupos topológicos, con la topología heredada, sigue siendo un grupo topológico. Primero veremos propiedades importantes del Σ-producto.

Proposición 3.0.1 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, b_α un elemento de X_α y $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto de la familia η. Entonces el Σ-producto $\Sigma \prod \eta$ y el σ-producto $\sigma \prod \eta$, con centro en $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A}$ son subespacios densos del espacio topológico X.*

Demostración. Realizaremos la demostración en el caso del σ-producto, puesto que el σ-producto está contenido en el Σ-producto.

Sean $Y = \sigma \prod \eta$, el σ-producto de la familia η, y U un abierto en X. Entonces podemos ver al conjunto U como:

$$U = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{j \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} X_j$$

donde $U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ es abierto en X_{α_i} para cada $i \leq n$. Consideremos $y_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ y $y_j = b_j$ para cada $j \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Así, $y = (y_\alpha)$, donde $y_\alpha = y_{\alpha_i}$ si $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $y_\alpha = y_j$ en otro caso, por lo que $y \in U$. Dado que $supp_b(y)$ es finito, se sigue que $y \in Y$. Por lo tanto, $Y \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto el σ-producto es denso en X, además, el Σ-producto es denso en X. □

Lema 3.0.2 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, $X = \prod \eta$ el producto de la familia η y $b \in X$. Entonces, para cada subconjunto numerable M del Σ-producto $Y = \Sigma \prod \eta$ de η con centro en b, la cerradura de M en Y coincide con la cerradura de M en X y es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto de alguna subfamilia numerable de η.*

Demostración. Sea M un subconjunto numerable de X y pongamos

$$K = \bigcup \{supp_b(x) : x \in M\},$$

entonces K es un subconjunto numerable de A y para cada $y \in \overline{M}$ en X tenemos que $y_\alpha = b_\alpha$ para $\alpha \in A \setminus K$.

Por lo que, la cerradura de M en X está contenida en la cerradura de M en Y puesto que las coordenadas de todos los puntos de esta cerradura coinciden con las respectivas coordenadas del punto b y es homeomorfa a la cerradura del conjunto $\pi_K(M)$ en X_K; la restricción de la proyección $\pi_K(M)$ a la cerradura de M es el homeomorfismo. $\square$

Los siguientes resultados son consecuencia del lema anterior. Únicamente probaremos el primero. Ya que para las siguientes proposiciones el argumento es similar.

Proposición 3.0.3 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios no vacíos, X es el producto de la familia η y $b \in X$. Supongamos que para cada subconjunto numerable C de A, el producto $\prod\{X_\alpha : \alpha \in C\}$ es Fréchet-Urysohn. Sea Y el Σ-producto de η con centro en b. Entonces, para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y también es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea M un subconjunto numerable de Y. Definamos un conjunto numerable como:

$$K = \bigcup\{supp_b(x) : x \in M\}.$$

Entonces el producto $X_K = \prod_{\alpha\in K} X_\alpha$ es Fréchet-Urysohn. Por el lema 3.0.2 la cerradura de M en Y coincide con su cerradura en X, y es homeomorfo a la cerradura de $\pi_K(M)$ en X_K, que es Fréchet-Urysohn. Por lo que la cerradura de M es Fréchet-Urysohn. $\square$

Proposición 3.0.4 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios metrizables no vacíos, X su producto Cartesiano y $b \in X$. Si Y es el Σ-producto de η con centro en b, entonces, para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es metrizable.*

Proposición 3.0.5 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios compactos no vacíos, X es el producto de la familia η y $b \in X$. Si Y es el Σ-producto de η con centro en b, entonces para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es compacta.*

Proposición 3.0.6 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios primero numerables, X es el producto de la familia η y $b \in X$. Si Y es el Σ-producto de η con centro en b, entonces para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es primero numerable.*

El teorema 3.0.8 es una generalización de la proposición 3.0.3, sin embargo, antes de enunciarlo veremos un teorema que nos ayudará a demostrarlo.

Teorema 3.0.7 *Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ su producto y sea $b \in X$. Supongamos que para cada subconjunto numerable C de A, la estrechez de $\prod_{\alpha\in C} X_\alpha$ es numerable. Entonces la estrechez del Σ-producto Y de la familia de espacios con centro en b también es numerable.*

Demostración. Sea Y el Σ-producto de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Tomemos $y \in Y$ y un conjunto $P \subset Y$ tal que $y \in \overline{P}$. Podemos asumir que $b \notin P$. Digamos que $S = supp_b(y)$ y para cada $p \in P$ sea $K_p = supp_b(p) \cup S$, así K_p es un subconjunto numerable y no vacío de A. Sea B_p un ω-cubo elemental en X con núcleo K_p de tal forma que $p \in B_p$. Haciendo $\gamma = \{B_p : p \in P\}$, se sigue que $P \subset \bigcup\gamma$. Entonces $y \in \overline{\bigcup\gamma}$ y por el lema 1.2.9 existe un subconjunto numerable M de P tal que $y \in \overline{\bigcup\{B_p : p \in M\}}$. Para cada $p \in M$ escojamos $z(p) \in B_p$ tal que $z(p)_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in A \setminus K_p$. Por lo que, por el lema 1.2.12, $y \in \overline{M}$. □

Teorema 3.0.8 *Supongamos que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios no vacíos, X es el producto de la familia η y $b \in X$. Supongamos que para cada subfamilia numerable ξ de η, el producto $\prod\xi$ es Fréchet-Urysohn. Entonces el Σ-producto Y de la familia η con centro en b también es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Supongamos que Y es el Σ-producto, $Z \subset Y$ y sea $y \in Y$ tal que $y \in \overline{Z}$. Dado que todo espacio Fréchet-Urysohn tiene estrechez numerable, por el teorema anterior se sigue que Y tiene estrechez numerable, por lo que existe $M \subset Z$ numerable tal que $y \in \overline{M}$. Por el teorema 3.0.3, $\overline{M}$ es Fréchet-Urysohn. Entonces, alguna sucesión de M converge a y, por lo tanto, Y es Fréchet-Urysohn. □

Corolario 3.0.9 *El Σ-producto de cualquier familia de espacios primero numerable es Fréchet-Urysohn.*

Corolario 3.0.10 *El Σ-producto de cualquier familia de espacios compactos es numerablemente compacto. Además, la cerradura de cualquier subconjunto numerable M en Y es compacto.*

Demostración. Mostremos la segunda parte, dado que la primera se sigue directamente de la segunda parte. La segunda parte se sigue de la proposición 3.0.5, ya que el producto de cualquier familia de compactos es compacto. □

En consecuencia de los dos corolarios anteriores, podemos obtener el siguiente resultado.

Corolario 3.0.11 *El Σ-producto de cualquier familia de espacios compactos primero numerables es numerablemente compacto y Fréchet-Urysohn.*

Con la construcción de Σ-productos y los resultados obtenidos, podemos aplicar los resultados a familias de grupos topológicos y visualizar el comportamiento del Σ-producto.

Teorema 3.0.12 *Supongamos que A es un conjunto no numerable y que, para cada $\alpha \in A$, G_α es un grupo topológico compacto metrizable que contiene al menos dos puntos. Sea $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ el producto. Entonces el Σ-producto $Y = \Sigma \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ con centro en la identidad $e \in G$ es un subgrupo topológico numerablemente compacto, Fréchet-Urysohn, no compacto y no metrizable de G.*

Demostración. Por la proposición 3.0.1, el espacio Y es denso. Entonces se tiene que no es cerrado, por lo que Y no es compacto, pues G es Hausdorff. Por el corolario 3.0.11, Y es numerablemente compacto y Fréchet-Urysohn, además, como todo espacio numerablemente compacto metrizable es compacto, entonces Y no es metrizable, pues ya vimos que no es compacto. □

Antes de continuar con el estudio es importante visualizar algunos ejemplos de Σ-productos.

Ejemplos 1 *(a) Consideremos A un conjunto no numerable. Para cada $\alpha \in A$, sea $G_\alpha = \mathbb{T}$ el grupo del círculo. Consideremos Σ-producto con centro en la identidad de G, denotado por $\Sigma\mathbb{T}^A$. Entonces por el teorema anterior, $\Sigma\mathbb{T}^A$ es numerablemente compacto, Fréchet-Urysohn, no metrizable, Fréchet-Urysohn y no compacto.*

(b) Sea $G_\alpha = D$ para cada $\alpha \in A$, donde $D = \{0, 1\}$ es el grupo discreto. Entonces el Σ-producto con centro en la identidad de G, denotado por ΣD^A. De nuevo, por el teorema anterior, es un subgrupo numerablemente compacto, no metrizable, Fréchet-Urysohn no compacto. Más aún, los grupos D^A y ΣD^A son cero-dimensionales.

Ahora veremos algunos resultados sobre el σ-producto de espacios topológicos, con fin de encontrar un espacio σ-compacto contenido en el producto y Σ-producto de grupos topológicos.

Proposición 3.0.13 *Sea $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto de una familia de espacios no vacíos y $Y \subset X$ el correspondiente σ-producto con centro en $b \in X$. Entonces Y es la unión de una familia numerable $\{Y_n : n \in \omega\}$ de subespacios cerrados Y_n de X tal que $Y_0 = \{b\}$ y para cada $n \in \omega$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ y $Y_{n+1} \setminus Y_n$ admite una cubierta ajena dos a dos λ_n tal que cada $U \in \lambda_n$ es homeomorfo a un subespacio abierto del producto de una subfamilia finita de $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, denotemos como $r(y)$ a la cantidad de coordenadas de y que son distintas de las correspondientes coordenadas de b. Para cada $n \in \omega$ sea $Y_n = \{y \in Y : r(y) \leq n\}$, entonces, por la definición de σ-producto, $Y = \bigcup Y_n$. Además cada Y_n es cerrado en el espacio X.

Para cada $n \in \omega$, pongamos $U_n = Y_n + 1 \setminus Y_n$ y sea B_n el conjunto de todos los subconjuntos de cardinalidad n de A. Dado $K \in B_n$, sea W_K el conjunto de todos los $y \in Y$ tales que $\{\alpha \in A : y_\alpha \neq b_\alpha\} = K$. Notemos que W_K es abierto en Y_n, $W_K \cap W_L = \emptyset$, para cualesquiera $K, L \in B_n$ distintos, y $U_n = \bigcup \lambda_n$, donde $\lambda_n = \{W_K : K \in B_n\}$. Además cada W_K es homeomorfo a un subespacio del producto finito $\prod_{\alpha\in K} X_\alpha$. $\square$

Proposición 3.0.14 *El σ-producto de cualquier familia de espacios σ-compactos, es σ-compacto.*

Demostración. En consecuencia de la proposición 3.0.13, el σ-producto de una familia de espacios compactos es σ-compacto, ya que el producto de cualquier familia de espacios compactos es compacto.

Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios σ-compactos. Entonces para cada $\alpha \in A$ sea $X_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} X_{\alpha,n}$, donde cada $X_{\alpha,n}$ es compacto. Podemos suponer que $X_{\alpha,i} \subset X_{\alpha,j}$ para $i < j$. Sea b un punto del producto de la familia η y sea Y el σ-producto de η en b. Además, asumiremos que $b \in X_{\alpha,0}$ para cada $\alpha \in A$. Hagamos $\eta_n = \{X_{\alpha,n} : \alpha \in A\}$, y sea Y_n el σ-producto de la familia η_n con centro en b, entonces tenemos que $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$, además cada Y_n es σ-compacto, pues cada elemento de la familia η_n es compacto. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las proposiciones 3.0.1 y 3.0.14.

Proposición 3.0.15 *El producto y Σ-producto de cualquier familia de grupos topológicos σ-compactos contiene un subgrupo denso σ-compacto.*

Ejemplo 5 *Sean τ un cardinal no numera y $M = \sigma D^{\tau}$ el σ-producto de τ copias del grupo D con centro en la identidad $\widehat{0} \in D^{\tau}$. Entonces M es un grupo σ-compacto, Fréchet-Urysohn, no compacto.*

Dado que el carácter $\chi\left(D^{\tau}\right)$ no es numerable, por lema 1.2.7 el producto D^{τ} no contiene un subespacio denso primero numerable; sin embargo, M es denso en D^{τ}. Por lo tanto, M no es metrizable. $\square$

3.1. Espacios paracompactos

En esta sección veremos la relación entre la normalidad y *paracompacidad* en Σ-productos, haciendo mención de algunos resultados que nos darán pie a observar que el Σ-producto de una familia de espacios métricos es normal.

Primero recordemos que una familia $\{B_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de un espacio X es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe una vecindad U tal que el conjunto $\{\alpha \in A : U \cap B_{\alpha} \neq \emptyset\}$ es finito.

Definición 3.1.1 *Un espacio X es llamado* paracompacto *si X es Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito.*

La definición nos permite obtener los siguientes resultados (ver [4] $5.1.1$ y $5.1.3$, respectivamente).

Teorema 3.1.1 *Todo espacio compacto es paracompacto.*

Teorema 3.1.2 *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Además, un hecho importante para nuestro estudio es la relación entre paracompacidad y normalidad. Para eso, necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 3.1.3 *Sea X un espacio paracompacto y F, B un par de subconjuntos cerrados de X. Si para cada $x \in B$ existen abiertos U_x, V_x tales que $F \subseteq U_x$, $x \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$, entonces también existen abiertos U, V tales que $F \subseteq U$ y $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Notemos que la familia $\{V_x\}_{x\in B} \cup \{X \setminus B\}$ es una cubierta abierta para X, por lo que, X tiene un refinamiento localmente finito $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Haciendo $A_0 = \{\alpha \in A : W_\alpha \cap B \neq \emptyset\}$ se tiene:

$$F \cap \overline{W_\alpha} = \emptyset \quad \text{para todo } \alpha \in A_0 \text{ y } B \subseteq \bigcup_{\alpha\in A_0} W_\alpha.$$

Entonces, los conjuntos $U = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in A_0} \overline{W_\alpha}\right)$ y $V = \bigcup_{\alpha\in A_0} W_\alpha$ son abiertos, además, $F \subseteq U$ y $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

Teorema 3.1.4 *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio paracompacto. Primero veamos que X es regular. Si cambiamos un conjunto unipuntal por el conjunto F en el lema anterior, se sigue que todo espacio paracompacto es regular; usando este hecho y aplicando el lema de nuevo obtenemos que el espacio es normal. □

El siguiente teorema nos ayudará como herramienta en nuestro estudio (ver [4] 3.10.3).

Teorema 3.1.5 *Para todo espacio Hausdorff X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El espacio es numerablemente compacto;

(b) Toda familia localmente finita de subconjuntos de X es finita;

(c) Toda familia localmente finita de subconjuntos de un punto de X es finita;

(d) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación;

(e) Todo subconjunto numerable de X tiene un punto de acumulación.

Teorema 3.1.6 *Todo espacio numerablemente compacto y paracompacto es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de un espacio X numerablemente compacto y paracompacto. Por el teorema 3.1.5, todo refinamiento localmente finito abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ es finito, por lo que el espacio X es compacto. □

Dado que la paracompacidad es un inverso invariante de funciones perfectas (ver [4], teorema $5.1.33$) y como la proyección $\pi : X \times Y \to Y$, del producto de un espacio compacto X y un espacio Hausdorff Y es perfecta, podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.1.7 *El producto $X \times Y$ de un espacio paracompacto X y un espacio compacto Y es paracompacto.*

Teorema 3.1.8 (Tamano) *Para todo espacio Tychonoff X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El espacio X es paracompacto.*

(b) *Para toda compactificación cX del espacio X, el producto $X \times cX$ es normal.*

(c) *El producto $X \times \beta X$ es normal.*

(d) *Existe una compactificación cX del espacio X tal que el producto $X \times cX$ es normal.*

Demostración. Por el teorema 3.1.7, el producto $X \times cX$ es paracompacto y por lo tanto, es normal. Así se tiene que $(a) \Rightarrow (b)$. Obviamente, se cumplen $(b) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (d)$. Soló falta probar $(d) \Rightarrow (a)$.

Sea cX una compactificación del espacio X tal que $X \times cX$ es normal y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de X. Para cada $\alpha \in A$ escojamos un conjunto abierto $V_\alpha \subseteq cX$ tal que $U_\alpha = X \cap V_\alpha$.

Como $Z = cX \setminus \bigcup_{s \in S} V_s$ es un subconjunto compacto del residuo $cX \setminus X$, la diagonal $\triangle \subseteq X \times X$ y el producto $X \times Z$ son subconjuntos cerrados de $X \times cX$, además son ajenos. Por lo tanto, por (d) existe una función continua $f : X \times cX \to I$ tal que

$$f(\triangle) \subseteq \{0\} \text{ y } f(X \times Z) \subseteq \{1\}.$$

Haciendo

$$\rho(x, y) = \sup_{z \in cX} |f(x, z) - f(y, z)|$$

definimos una pseudométrica en X.

Para $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ existen conjuntos abiertos $G_1 \times H_1, \ldots, G_k \times H_k \subseteq X \times cX$ tales que $x_0 \in G_i$ y $\delta(f(G_i \times H_i)) < \varepsilon$, donde $\delta(A)$ es el diámetro de A, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Además, $\{x_0\} \times cX \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(G_i \times H_i)$; por lo que, $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{k} G_i \subseteq B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$ que implica que todas las bolas abiertas, respecto a ρ, pertenecen a τ_2, es decir, $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Así, la cubierta $\{B(x, 1/2)\}_{x \in X}$ de conjuntos de X tiene un refinamiento $\{W_t\}_{t \in T}$ abierto y localmente finito con respecto τ_1. Por lo tanto, también respecto a τ_2. Para cada $x \in X$ y $y \in B(x, 1/2)$ tenemos que $f(x, y) = |f(x, y) -$

$f(y,y)| \leq \rho(x,y) < 1/2$, así $f(x,y) \leq 1/2$ siempre que $y \in \overline{B(x,1/2)}$ (la cerradura es tomada en cX). Como $f(x,z) = 1$ para $z \in Z$, tenemos que $\overline{W_t} \cap Z = \emptyset$ para todo $t \in T$. Dado que el conjunto $\overline{W_t}$ es compacto, existe un conjunto finito $A(t) \subseteq A$ tal que $W_t \subseteq \bigcup_{\alpha \in A(t)} V_\alpha$. Entonces la familia $\{W_t \cap U_\alpha : t \in T, \alpha \in A(t)\}$ es una familia localmente finita que refina a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. $\square$

La prueba del siguiente teorema será omitida (ver [4], teorema $3.5.2$).

Teorema 3.1.9 *Todo espacio Tychonoff X tiene una compactificación Y tal que $w(Y) = w(X)$.*

En consecuencia del teorema de Tamano (teorema 3.1.8), el teorema 3.1.7 y el resultado anterior obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.10 *Para todo espacio Tychonoff X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El espacio X es paracompacto.

(b) Para todo espacio compacto Y el producto $X \times Y$ es normal.

(c) Para todo espacio compacto Y tal que $w(Y) \leq w(X)$ el producto $X \times Y$ es normal.

(d) El producto $X \times I^{w(X)}$ es normal.

El teorema de Tamano nos ayuda a probar la existencia de un espacio numerablemente compacto que no es regular.

Ejemplo 6 *Existe un espacio numerablemente compacto que no es regular.*

Sea W el espacio de todos los números ordinales $\leq \omega_1$ y W_0 el espacio de todos los números ordinales numerables. Notemos que el espacio W_0 no es paracompacto, pues W_0 es un espacio numerablemente compacto que no es compacto (ver [4] ejemplo $3.10.16$) y por el teorema 3.1.6 W_0 no puede ser paracompacto. Entonces, por el teorema de Tamano el producto $W_0 \times W$ no es normal, puesto que W es una compactificación de W_0. Por lo que, existen conjuntos cerrados ajenos F y G en $W_0 \times W$ que no pueden ser separados por conjuntos abiertos ajenos, además el espacio $W_0 \times W$ es numerablemente compacto.

Entonces si X es el espacio $W_0 \times W/F$, identificando a F por un punto, es un espacio numerablemente compacto que no es regular. $\square$

Ahora veremos la normalidad en subespacios del espacio producto. Para eso veremos cierta relación entre los espacios paracompactos y el Σ-producto de familias de espacios topológicos, haciendo uso principalmente del teorema de Tamano.

Primero veamos que el Σ-producto de una familia de espacios métricos completos es normal. Para eso, usaremos el siguiente término.

Sean $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de subconjuntos de un espacio X, y sea U un conjunto abierto de X. Diremos que $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ puede ser separada en U si existe una colección de conjuntos abiertos ajenos dos a dos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $U \cap H_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

Lema 3.1.11 *Sea H_1 y H_2 dos subconjuntos del producto de un espacio Y y un espacio métrico M, y supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de M. Si H_1 y H_2 pueden ser separados en cada $Y \times U$ con $U \in \mathcal{U}$, entonces H_1 y H_2 pueden ser separados en $Y \times M$.*

Demostración. Dado que todo espacio métrico es paracompacto, la cubierta abierta $\mathcal{U}$ de M tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$, esto quiere decir que $\mathcal{V}$ tiene la propiedad que cada $V \in \mathcal{V}$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$, y cada $x \in M$ tiene una vecindad abierta que intersecta una cantidad finita de elementos de $V \in \mathcal{V}$. Como M es normal, podemos escoger al refinamiento $\mathcal{V}$ tal que la cerradura de cada $V \in \mathcal{V}$ esté contenida en algún $U \in \mathcal{U}$.

Para cada $V \in \mathcal{V}$ existen conjuntos abiertos V_1 y V_2 en $Y \times V$ tal que $H_i \cap (Y \times V) \subseteq V_i$, para $i = 1,2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dado que $\overline{V}$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$ podemos suponer que $\overline{V}_1 \cap H_2 = \overline{V}_2 \cap H_1 = \emptyset$. Sea $S_i = \bigcup\{V_i : V \in \mathcal{V}\}$, $i = 1,2$. Definamos $T_1 = S_1 \cap ((Y \times M) \setminus \overline{S}_2)$ y $T_2 = S_2 \cap ((Y \times M) \setminus \overline{S}_1)$. Como T_1 y T_2 son abiertos y disjuntos, sólo falta probar que $H_1 \subseteq T_1$ y $H_2 \subseteq T_2$.

Si $h \in H_1$, entonces $h = (y, m)$, donde $y \in Y$ y $m \in M$. Escojamos una vecindad N de m tal que N intersecta una cantidad finita de elementos de $V \in \mathcal{V}$. Entonces $Y \times N$ es una vecindad de h que intersecta sólo una cantidad finita a $Y \times V$, por lo tanto, sólo a una cantidad finita de V_2. Sea $\mathcal{H}$ esa colección finita de V_2, entonces $((Y \times M) \setminus (\bigcup \mathcal{H})) \cap (Y \times N)$ es una vecindad de h que no intersecta a V_2, pues $\overline{V}_2 \cap H_1 = \emptyset$. Por lo tanto, $H_1 \subseteq T_1$. Un argumento similar prueba que $H_2 \subseteq T_2$. $\square$

Teorema 3.1.12 (Corson) *El Σ-producto del producto de una familia de espacios métricos completos es normal.*

Demostración. Sea $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios métricos completos con métrica completa ρ_α en M_α. Para cada subconjunto finito F de A, sea $M_F = \prod_{\alpha \in F} M_\alpha$. La métrica ρ_F en el subespacio de tal M_F será definida como:

$$\rho_F(x, y) = \sup\{\rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in F\}.$$

A partir de ahora, el índice F en ρ será omitido. También, denotemos el Σ-producto de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ por Y con punto base $b = (b_\alpha)$.

Sean H_1 y H_2 subconjuntos de Y que no pueden ser separados en Y. Veremos que existen sucesiones $\{h_i\}$ y $\{k_i\}$, con $h_i \in H_1$ y $k_i \in H_2$ que convergen al mismo punto en Y. Esto probaría que H_1 y H_2 no pueden ser cerrados ajenos en Y.

Dado que no se pueden separar, entonces los conjuntos no son vacíos. Sea $x_1 \in H_1$ cualquier punto. Entonces existe un conjunto numerable de índices C_0 tal que $(x_1)_\alpha = b_\alpha$ si $\alpha \notin C_0$.

Ahora construiremos cuádruplas (x_n, C_n, F_n, S_n) para cada $n \in \omega$ tal que

- $x_i \in H_1$ si i es par y $x_i \in H_2$ si i es impar;
- C_i es un conjunto numerable de índices tal que contiene a cada $\alpha \in A$ tal que $(x_i)_\alpha \neq b_\alpha$;
- F_i será un conjunto finito de índices tal que $F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_i - 1 \subset F_i$. Además contendrá al elemento mínimo de C_j para cada $j \leq i$;
- Para cada $1 \leq i \leq n$, S_i está contenido en S_j para $j \leq i$ y si π_i es la proyección de Y sobre $M_{F_{i-1}}$, entonces hay una bola T_i de radio $1/i$ en $M_{F_{i-1}}$ tal que $S_i = \pi_{i-1}^{-1}(T_i)$;
- H_1 y H_2 no se pueden separar en S_i y $x_i \in S_i$.

Primero para $i = 0$ tomemos a C_0, $F_0 = \{min(C_0)\}$ y ponemos $S_0 = Y$.

Supongamos que n cuádruplas (x_i, C_i, F_i, S_i) fueron escogidas. La cuádrupla para $n + 1$ se escoge de la siguiente forma:

Sea $\mathcal{U}$ la cubierta de $\pi_n(S_n)$ que consiste de bolas de radio $1/(n + 1)$. Por el lema 3.1.11 existe una bola T_{n+1} en $\mathcal{U}$ tal que H_1 y H_2 no pueden ser separados en $S_{n+1} = \pi_n^{-1}(T_{n+1})$, porque H_1 y H_2 no pueden ser separados en S_n. En particular, $H_1 \cap S_{n+1}$ y $H_2 \cap S_{n+1}$ no son vacíos, así escojamos $x_{n+1} \in H_i$ si $n + 1$ es par y $x_{n+1} \in H_2$ si $n + 1$ es impar. C_{n+1} y F_{n+1} se eligen de manera análoga como arriba.

Sea $\{h_i\} = \{x_j : j \text{ es par}\}$, y $\{k_i\} = \{x_j : j \text{ es impar}\}$; probaremos que $\{x_i\}$ es una sucesión convergente, así quedará probado que las sucesiones $\{h_i\}$ y $\{k_i\}$ convergen al mismo punto en Y. Para eso, sea $\alpha \in A$, de modo que no esté en ningún C_i. En este caso $(x_i)_\alpha = p_\alpha$ para todo i. Si $\alpha \in C_i$ para algún i, entonces $\alpha \in F_n$, para n suficiente grande. Por la definición de la métrica en M_{F_n} y la elección de x_i,

$$\rho_{F_n}((x_i)_\alpha, (x_j)_\alpha) < 1/n,$$

para todo n suficientemente grande, además, para i y j mayores que n. Por lo tanto, $\{(x_i)\}_\alpha$ es una sucesión de Cauchy en M_α, esto implica que $\{x_i\}$ converge a algún $x_0 \in M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$, el producto de los M_a. Pero $x_0 \in Y$, dado que $C = \bigcup\{C_i : i \in \omega\}$ es numerable. Esto concluye la prueba. $\square$

El resultado anterior puede ser generalizado para espacios métricos separables, esta prueba fue dada por ***M.E. Rudin*** y posteriormente ***Gul'ko*** probo que el resultado sigue siendo cierto para cualquier espacio métrico. Para eso, ocuparemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.13 *Un espacio X es normal si y sólo si para todo par de conjuntos ajenos cerrados F_0 y F_1 de X existe una cubierta abierta σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de X tal que $\overline{U} \cap F_0 = \emptyset$ ó $\overline{U} \cap F_1 = \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$.*

Demostración.

Supongamos que X es normal y sean F_0, F_1 conjuntos cerrados y ajenos de X, por la normalidad de X existen conjuntos abiertos U_0 y U_1 tales que $F_0 \subseteq U_0$, $F_1 \subseteq U_1$ y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Además existen conjuntos abiertos V_0 y V_1 tales que $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$ para $i = 0, 1$. Entonces la familia $\{U_0, U_1, X \setminus (V_0 \cup V_1)\}$ es localmente finita.

Por otro lado, sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$, donde las familias $\mathcal{U}_n$ son abiertas y localmente finitas. Definamos

$$U_i(n) = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : \overline{U} \cap F_{1-i} = \emptyset\}$$

para cada $n < \omega$, $i = 0, 1$. Notemos que $\bigcup_{n<\omega} U_1(n) \cup \bigcup_{n<\omega} U_2(n) = X$. Sea $V_i(n) = U_i(n) \setminus \bigcup_{j\leq n} \overline{U_{1-i}(j)}$, para $i = 0, 1$ y $n < \omega$ y sea

$$V_i = \bigcup_{n<\omega} V_i(n).$$

Entonces, por como se definió V_i se tiene $F_i \subseteq V_i$ y $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. $\square$

Lema 3.1.14 *Sea $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de conjuntos y $Y = \Sigma \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ con centro en $b \in M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$. Supongamos que para cada $\alpha \in A$ existe una función f_α de un conjunto M'_α sobre M_α. Consideremos $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$ y $Y' = \Sigma \prod_{\alpha \in A} M'_\alpha$ con centro en $b' \in M' = \prod_{\alpha \in A} M'_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha(b'_\alpha) = b_\alpha$. Entonces $f(Y') = Y$.*

Demostración.

Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in Y$, por lo que $supp_b(x)$ es numerable. Para cada $\alpha \in supp_b(x)$ existe $y_\alpha \in M'_\alpha$ tal que $f_\alpha(y_\alpha) = x_\alpha$. Definamos $z = (z_\alpha)_{\alpha \in A}$ tal que:

$$z_\alpha = \begin{cases} b'_\alpha & si \quad \alpha \in A \setminus supp_b(x); \\ \\ y_\alpha & si \quad \alpha \in supp_b(x). \end{cases}$$

Por lo que $z \in Y'$ y $f(z) = (f_\alpha(z_\alpha))_{\alpha \in A} = x$. Se sigue que $Y \subseteq f(Y')$.

Por otro lado, tomemos $y \in Y'$, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$. Así para cada $\alpha \in A \setminus supp_{b'}(y)$ se tiene $y_\alpha = b'_\alpha$ y $f_\alpha(y_\alpha) = b_\alpha$, entonces $supp_b(f(y)) \subseteq supp'_b(y)$. Por lo que $supp_b(f(y))$ es numerable. Por lo tanto $f(y) \in Y$ y $f(Y') \subseteq Y$. □

Lema 3.1.15 *Sean $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$, $\{M'_\alpha : \alpha \in A\}$ familias de espacios métricos tales que para cada $\alpha \in A$ existe una función perfecta f_α de M'_α sobre M_α. Consideremos f el producto Cartesiano de las funciones f_α, $Y = \Sigma \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ con centro en $b \in M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ y sea $Y' = \Sigma_{b'} \prod_{\alpha \in A} M'_\alpha$ con centro en $b' \in M' = \prod_{\alpha \in A} M'_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha(b'_\alpha) = b_\alpha$. Entonces, la restricción de f a Y' es una función cerrada.*

Demostración. Sea F' un conjunto cerrado en Y', Definamos $F = f(F')$ y tomemos $x \in \overline{F} = \overline{f(F')}$. Por el corolario 3.0.9, Y es Fréchet-Urysohn, por lo que existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \omega} \subseteq F$ que converge a x. Además, para cada $n \in \omega$ existe $y_n \in F'$ tal que $f(y_n) = x_n$. Notemos que por la elección del punto b' se tiene que $supp_b(x_n) \subseteq supp'_b(y_n)$. Si $J = \bigcup_{n \in \omega} supp'_b(y_n)$, podemos definir:

$$M_J = \{\pi_{A \setminus J}(b)\} \times \prod_{\alpha \in J} M_\alpha \subseteq Y$$

y

$$M'_J = \{\pi_{A \setminus J}(b')\} \times \prod_{\alpha \in J} M'_\alpha \subseteq Y'.$$

Así, $f(M'_J) = M_J$. Por la definición de M'_J se tiene que $y_n \in M'_J$ para cada $n \in \omega$. Además, $M'_J \cap F'$ es un subconjunto cerrado en M', ya que M'_J es un subconjunto cerrado en todo M', por lo que, $f(M'_J \cap F')$ es un subconjunto cerrado de

M, pues f es una función perfecta, como producto de funciones perfectas (ver [4], teorema 3.7.9), es decir $\{x_n\} \subseteq f(F' \cap M'_J)$, y como es cerrado $x \in f(F' \cap M'_J)$, pero $f(F' \cap M'_J) \subseteq f(F') = F$, por lo tanto F es un subconjunto cerrado de Y. $\square$

Teorema 3.1.16 (Gul'ko) *El Σ-producto de una familia de espacios métricos es normal.*

Demostración. Denotemos por Y al Σ-producto de la familia de espacios métricos $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con el centro en $b \in M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$. Digamos que el peso de los espacios M_α no es más grande que κ. Para la primera parte del argumento supongamos que el espacio M_α es fuertemente cero-dimensional para cada $\alpha \in A$, es decir M_α tiene una base σ-localmente finita que consiste de conjuntos abiertos y cerrados.

Para $x \in Y$ sea $supp_b(x)$ el soporte de x y para todo subconjunto numerable $S \subseteq A$ denotemos por r_S a la retracción natural $r_S : Y \to Y$ definida por

$$(r_S(x))_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \text{si } \alpha \in S, \\ b_\alpha, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $x \in Y$ y $\alpha \in A$. Notemos que los espacios $Y_S = r_S(Y) = \prod_{\alpha \in S} M_\alpha$ son metrizables y escojamos ρ_S una métrica en Y_S y denotemos por $\widehat{\rho}_S$ la pseudométrica en Y definida por $\widehat{\rho}_S(x, y) = \rho_S(r_S(x), r_S(y))$.

Ahora, consideremos F_0 y F_1 subconjuntos cerrados y ajenos de Y. Para ver que Y es normal, por el lema 3.1.13 es suficiente buscar una cubierta abierta σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de Y tal que $\overline{U} \cap F_0 = \emptyset$ o $\overline{U} \cap F_1$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Sea $\kappa^{<\omega}$ el conjunto de todas las funciones $\phi : n \to \kappa$, con $n < \omega$. Por inducción sobre n definiremos para cada $\phi \in \kappa^n$ un subconjunto numerable A_ϕ de A, un subconjunto abierto y cerrado V_ϕ de Y_{A_ϕ}, una pseudométrica μ_ϕ en Y y dos puntos x_ϕ^0 y x_ϕ^1 en Y, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones, en donde $U_\phi = r_{A_\phi}^{-1}(V_\phi)$.

(1) La familia $\{U_\phi : \phi \in \kappa^n\}$ es una cubierta de abiertos-cerrados ajena dos a dos de Y para cada $n < \omega$;

(2) Si $\phi \subseteq \psi$, entonces $U_\psi \subseteq U_\phi$;

(3) Si $K_i \cap \overline{U}_\phi \neq \emptyset$, entonces $x_\phi^i \in F_i \cap U_\phi$, para $i = 0, 1$;

(4) $A_\phi = supp_b(x_\phi^0) \cup supp_b(x_\phi^1) \cup A_{\phi|(n-1)}$, para $n > 1$ y $\phi \in \kappa^n$;

(5) $\mu_\phi = \sum\{\widehat{\rho}_{A_{\phi|i}} : i \leq n\}$ para todo $\phi \in \kappa^n$;

(6) El radio de U_ϕ con respecto a $\mu_{\phi|(n-1)}$ es menor que $1/n$ para cada $n > 0$.

Primero supongamos que la construcción ya está hecha y sea

$$\mathcal{U} = \{U_\phi : \phi \in \kappa^{<\omega} \text{ y } K_i \cap U_\phi = \emptyset, \text{ para algún } i = 0, 1\}.$$

Por el lema 3.1.13 es suficiente mostrar que $\bigcup \mathcal{U} = Y$. Si no, entonces existen $\Phi \in \kappa^{<\omega}$ y $x_0 \in Y$ tal que $x_0 \in \bigcap_{n<\omega} U_{\Phi|n}$ y $U_{\Phi|n} \notin \mathcal{U}$, para todo $n < \omega$. Sea $B = \bigcup_{n<\omega} A_{\Phi|n}$ y $z_0 = r_B(x_0)$. Además, $\lim_{n\to\infty} r_B(x^i_{\Phi|n}) = r_B(x_0)$, para $i = 0, 1$, por lo tanto, por (4), $\lim_{n\to\infty} x^i_{\Phi|n} = z_0$ para $i = 0, 1$, así $z_0 \in F_0 \cap F_1$, que es una contradicción.

Ahora, procederemos a realizar la construcción. Sea $A_\emptyset$ un subconjunto no vacío numerable de A, $V_\emptyset = Y_{A_\emptyset}$ y $\mu_\emptyset = \widehat{\rho}_{A_\emptyset}$.

Supongamos que la construcción está realizada para $n \geq 0$. Tomemos $\phi \in \kappa^n$ y sea (V_ϕ, μ_ϕ) el espacio metrizable fuertemente cero dimensional y por lo tanto lo podemos descomponer en una familia disjunta $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de conjuntos abiertos de diámetro menor que $1/n$. Definamos $V_{\phi\frown\langle\alpha\rangle} = W_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$. Esto establece conjuntos V_ψ, $\psi \in \kappa^{n+1}$ y para cada $\psi \in \kappa^{n+1}$ escojamos puntos $x^i_\psi \in V_\psi \cap F_i$, si existen tales puntos, en caso contrario x^i_ϕ son arbitrarios. Escojamos A_ψ para ser el conjunto numerable de A que satisface (4) y sea μ_ϕ definida usando (5). Así queda concluida la construcción y por lo tanto Y es normal.

Veremos que el Σ-producto de una familia arbitraria de espacios métricos M_α sigue siendo normal como imagen cerrada del Σ-producto de la familia de espacios métricos fuertemente zero-dimensional.

Por $4.4.J$ en [4], para cada $\alpha \in A$, M_α es imagen continua bajo una función perfecta de un espacio métrico fuertemente cero-dimensional M'_α, digamos que $f_\alpha : M'_\alpha \to M_\alpha$ es la función perfecta. Supongamos que $M' = \prod_{\alpha\in A} M'_\alpha$. Entonces $f = \prod_{\alpha\in A} f_\alpha$ es una función perfecta de M' sobre M. Sea $Y = \Sigma \prod_{\alpha\in A} M_a$ con centro en $b \in M$ y sea $Y' = \Sigma \prod_{\alpha\in A} M'_\alpha$ con centro en $b' \in M'$ tal que para cada $\alpha \in A$, $f_\alpha(b'_\alpha) = b_\alpha$. Entonces por la construcción anterior Y' es normal y por el lema 3.1.15 la restricción de f a Y' es una función cerrada. Por lo que, Y es un espacio normal, pues es imagen de Y' bajo una función cerrada.

$\square$

3.2. Espacios realcompactos

Ahora, diremos que un espacio X es *realcompacto*, si es Tychonoff y existe un espacio Tychinoff Y tal que

RC1 Existe un encaje homeomorfo $r : X \to Y$ tal que $\overline{r(X)} = Y$.

RC2 Para toda función de valores reales $f : X \to \mathbb{R}$ existe una función continua $g : Y \to \mathbb{R}$ tal que $gr = f$.

Entonces, r es sobreyectiva.

De otra manera, el espacio es realcompacto si siempre que haya un espacio Y y un homeomorfismo r de X a un subconjunto denso de Y tal que toda función de valores reales en $r(X)$ se pueda extender a todo Y, entonces $r(X) = Y$. En [4] (teorema $3.11.5$) se prueba que el producto de espacios realcompactos es realcompacto. Además, también se muestra que todo espacio X puede ser encajado como subespacio denso en un espacio realcompacto vX. Llamaremos a vX la realcompactificación de X y esta es única salvo homeomorfismos que fijan los puntos de X.

Teorema 3.2.1 *Si M es el producto de una familia de espacios métricos separables $\{M_a : a \in A\}$ y Y el Σ-producto de la familia, entonces $M = vY$.*

Demostración. En el comentario anterior se mencionó que producto de espacios realcompactos es realcompacto, además, cada espacio métrico separable es realcompacto. Entonces M es realcompacto y Y es denso en M. Por lo que, por la unicidad de vY es suficiente probar que toda función de valores reales en Y puede ser extendida a M.

Si f es una función continua de valores reales en Y, entonces por el teorema 2.1.5 existe un conjunto numerable C contenido en A, y una función g de valores reales en M_C tal que $f = g\pi_C$, donde π_C es la proyección de M sobre el espacio $M_C = \prod_{\alpha \in C} M_\alpha$. Además, como Y es denso para cada $x \in M$ existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ en Y tal que $x_n \to x$.

Definamos $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Notemos que por la densidad de Y, el límite existe, además dado que toda función de valores reales en Y depende de una cantidad numerable de coordenadas, la función está bien definida. Ahora, notemos que si $x_n \to x$ entonces $F(x_n) \to F(x)$, por lo que la función es una extensión continua de f. $\square$

Según el teorema de Gul'ko el Σ-producto de una familia de espacios métricos es normal. Por otra parte, si tomamos la realcompactificación del Σ-producto de una familia de espacios métricos, que es todo el producto de la familia, no necesariamente será normal.

Ejemplo 7 *Existe un espacio normal X, cuya realcompactificación υX no es normal.*

En efecto, sea X el Σ-producto de una familia no numerable de espacios métricos no compactos. Por el teorema 3.1.16, X es normal y por el teorema 3.2.1, el producto M de la familia de espacios métricos satisface que $M = \upsilon X$. Dado que M tiene un subconjunto cerrado M_0 que es homeomorfo al producto de una cantidad no numerable de copias de $\mathbb{N}$, el cuál ya vimos que no es normal (ejemplo 4), entonces M no puede ser normal. $\square$

En el ejemplo 4, observamos un grupo topológico que no es normal, esto muestra que los grupos topológicos tienen una mejora en las propiedades de separación, pero sólo mejoran hasta la propiedad de ser completamente regular, incluso si consideramos un grupo topológico numerablemente compacto.

Ejemplo 8 *Existe un grupo topológico Hausdorff numerablemente compacto que no es normal.*

En efecto, consideremos $\eta = \{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, donde $G_\alpha = D$, el grupo discreto de dos puntos, para cada $\alpha < \omega_1$ y sea Y el Σ-producto de la familia η. Por el teorema 3.0.12 Y es un grupo topológico.

Consideremos $G = Y \times \beta Y$, donde βY es la compactificación de Stone-Čech de Y. Por el teorema 2.4.15 en [1], $\beta Y = \prod_{\alpha<\omega_1} G_\alpha = D^{\omega_1}$. Entonces $G = Y \times \beta Y = Y \times D^{\omega_1}$ es un grupo topológico numerablemente compacto, pues es el producto de un espacio numerablemente compacto y un espacio compacto. Si G fuera normal, por el teorema de Tamano, Y debería ser paracompacto, pero por el teorema 3.0.12, Y es numerablemente compacto, entonces por el teorema 3.1.6 Y es compacto, pero esto contradice al teorema 3.0.12. Por lo que G no puede ser normal. Por lo tanto, G es un grupo topológico numerablemente compacto que no es normal. $\square$

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii and M. Tkachenko. *Topological Groups And Related Structures*. Atlantis Studies In Mathematics. Atlantis Press, May 2008.

[2] Harry H. Corson. Normality in subsets of product spaces. *American Journal of Mathematics*, 81(3):785–796, 1959.

[3] Clifford H. Dowker. On countably paracompact spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, 3:219–224, 1951.

[4] Ryszard Engelking. *General Topology*. Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, Germany, December 1989.

[5] Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications, London, England, November 2011.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00239
Matrícula: 2213800921

Productos y Sigma productos en espacios y grupos topológicos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 10:00 horas del día 1 del mes de agosto del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. VLADIMIR TKATCHOUK
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: DIEGO DAMIAN TORRES BARRIOS

DIEGO DAMIAN TORRES BARRIOS
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. VLADIMIR TKATCHOUK

VOCAL

DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

SECRETARIO

Rodrigo J. Hernandes G

DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ