



Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería (CBI)
Posgrado en Ciencias (Física)

“Propagador polimérico semiclásico y determinante de
Van Vleck-Pauli-Morette para partícula libre y modelo
cósmico FLRW”

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA

Mtro. Angel Joel Sanjuan García

Matrícula: 2222800199

Correo electrónico: a.joelsanj@gmail.com

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Hugo Aurelio Morales Tecotl

JURADO

Presidente:

Dr. Hugo Aurelio Morales Tecotl,

Secretario:

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría,

Vocal:

Dr. Hector Hugo Hernández Hernández

Iztapalapa, Ciudad de México al 3 de Octubre del 2025

Agradecimientos

Agradezco la confianza, paciencia, soltura y experiencia del Doctor Hugo A. Morales Técotl, por el asesoramiento en la elaboración de esta tesis. Así mismo por las constantes discusiones personales y del grupo de trabajo “QG-UAMI” sobre gravitación cuántica y temas afines a cargo del doctor, que logra conectar con el asesorado de manera eficiente, en un ambiente cordial y profesional.

También agradezco a mi familia, especialmente a mi madre, que ha sido un estandarte en mi vida personal y profesional. A mis hermanos y amigos, que han soportado mis ideas y carácter estos años.

Agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, por brindarme las herramientas profesionales, por su excelente planta académica, en particular del Departamento de Física. Y por ser propiamente mi segunda casa, la casa abierta al tiempo. Por último, me queda agradecer al Estado, que a través del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCyT)¹ apoyó este proyecto, brindando una beca de maestría CVU 1143042 y el apoyo del proyecto de Ciencia Básica de Frontera CBF2023-2024-1937 “Campos de materia, modelos cósmicos y agujeros negros: de la aproximación semiclásica a gravedad cuántica”. La parte final del trabajo se realizó con el apoyo de la beca de ayudante de investigador CVU 1143042 SNII-14585 proyecto: “Determinante Van Vleck del propagador semiclásico en cuantización polimérica”.

¹Ahora secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI)

Índice general

1. Introducción	1
2. Propagador semiclásico de partícula libre y sistemas con Hamiltonianos no estandar en cuantización de Schrödinger	4
2.1. Aproximación semiclásica en el formalismo hamiltoniano . . .	4
2.2. Aproximación semiclásica en integral de trayectoria	8
2.3. Determinante de Van Vleck-Pauli-Morette	11
2.4. Propagador semiclásico de partícula libre no relativista	20
3. Propagador semiclásico de partícula libre polimérica	21
3.1. Cuantización polimérica	21
3.2. Integral de trayectoria	23
3.3. Aproximación semiclásica	26
3.4. Región prohibida, y continuación analítica del propagador . .	29
3.5. Comparación con el resultado exacto	31
4. Cosmología cuántica por lazos Hamiltoniana del modelo FLRW	33
4.1. Modelo cósmico FLRW	33
4.2. Formulación canónica del modelo FLRW	35
4.3. Cosmología cuántica por lazos para FLRW	41
5. Cosmología cuántica por lazos con integral de trayectoria del modelo FLRW	43
5.1. Propagador del modelo FLRW para $k = 0$	43
6. Propagador semiclásico de la cosmología FLRW y teoría efectiva	47
6.1. Dinámica efectiva	48
6.2. Factor de fluctuación	50
6.3. Región prohibida y continuación analítica	54
6.4. Comparación con el resultado exacto sLQC	56

7. Discusión, conclusiones y perspectivas	58
8. Bibliografía	60

Índice de figuras

2.1. Esquema de aproximación semiclásica, en el cual se compara la variación de un potencial, en tres regiones, las cuales se definen por dos puntos de retorno x_1 y x_2 . Nótese que en la región II, la variación del potencial respecto a la posición es muy grande en comparación con la longitud de onda de de Broglie.	6
2.2. Interpretación de Feynman: Entre dos eigenestados de posición con eigenvalores, inicial x_a en t_a y otro final x_b en t_b , existen infinitos caminos posibles. El propagador $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} x_a \rangle$ nos da la amplitud de probabilidad de ubicar a la partícula en x_b al tiempo t_b sabiendo que estuvo en x_a al tiempo t_a y es igual a $\Theta(t_b - t_a) \langle x_b, t_b x_a, t_a \rangle$, con Θ la función escalón de Heaviside.	9
2.3. La aproximación semiclásica en integral de trayectoria consiste de considerar una aproximación alrededor del camino clásico x_{cl} (línea roja), más fluctuaciones interpretadas como de origen cuántico δx alrededor de x_{cl}	10
2.4. (a) Representación de la composición de propagadores integrando la posición $x \in \mathbb{R}$, (b) Fluctuaciones truncadas a segundo orden correspondientes a la aproximación semiclásica.	11
2.5. Trayectoria dividida en parte izquierda $L : (x_e, t_e; x_a, t_a)$ y derecha $R : (x_e, t_e; x_a, t_a)$, con x_e muy cercano a x_a	13
2.6. Dividiendo la trayectoria en dos, una que vaya de (x_a, t_a) a (x_e, t_e) (izquierda, L), y la otra que vaya de (x_e, t_e) a (x_k, t_k) (derecha, R).	17

3.1.	La dinámica del modelo efectivo de la partícula libre polimérica se distingue de la partícula libre en la cuantización de Schrödinger, en que en la primera la pendiente está acotada; la partícula no puede salir de la zona permitida (zona sombreada); y existe una región prohibida (zona no sombreada). La velocidad v_0 esta restringida a tomar valores entre $-\hbar/m\mu < v_0 < \hbar/m\mu$	30
3.2.	Parte real del propagador exacto (azul) (3.41), comparado con parte real del propagador semiclásico (rojo) (3.31) contra $T = \hbar(\Delta t)/m$, $\Delta t = t_b - t_a$, $\Delta x = (x_b - x_a) = 10$ y considerando $\mu = 10^{-1}$	32
4.1.	Comportamiento del factor de escala $a(t)$, para un universo dominado por materia, la línea naranja representa al universo abierto con $k = -1$, la línea gris al universo plano $k = 0$, y la línea azul al universo cerrado $k = 1$. Usamos $N = 1$	34
4.2.	Representación gráfica de la solución clásica FLRW $\nu(\varphi)$ (ec. 4.39). Nótese que tenemos dos posibles soluciones, una de contracción (línea azul) y una de expansión (línea negra), ambas mostrando un comportamiento singular en $\nu = 0$	40
6.1.	Esquema del método de aproximación del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette.	49
6.2.	La línea punteada es el caso clásico, y la línea sólida el caso efectivo, hemos optado por considerar a $\nu_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ y también interpretar la evolución no solo en un sentido, sino en ambos (es decir, la evolución del universo ampliándose o contrayéndose).	51
6.3.	Parte real del propagador exacto (línea roja punteada), y el propagador semiclásico (línea negra sólida), en función del tiempo re-escalado $100t$. Usamos $\nu_i = 4\ell_0\hbar n_i$, $\nu_f = 4\ell_0\hbar n_f$ y $t = \sqrt{12\pi G}(\phi_f - \phi_i)$. Hemos considerado $n_i = 10$ y $n_f = 20$. Nótese la presencia de la singularidad en $t = \ln(2) \simeq 0.6931$	57
7.1.	Propagador exacto y semiclásico de partícula libre, partícula libre polimérica y FLRW $k = 0$ a la lazos, simplificado.	59

Capítulo 1

Introducción

A finales del siglo XIX hubo planteamientos sugiriendo que la física estaba terminada, que solo hacían falta físicos para trabajar en las consecuencias de lo establecido usando las técnicas conocidas. Max Planck hizo cambiar de opinión a la comunidad sobre esta idea obtusa, dando pasos determinantes para el desarrollo de la mecánica cuántica, uno de los dos pilares de la física moderna. El otro pilar sería la teoría de relatividad de Einstein. Tanto la teoría de la relatividad que una vez generalizada, incluía a la gravedad, como la teoría cuántica, que ayuda a describir las otras tres fuerzas fundamentales de la naturaleza, son hoy en día triunfos del desarrollo científico.

Este trabajo versa sobre un fenómeno acuciante, que algunos físicos de hoy en día consideran el problema central de toda la física. Irónicamente, nuestras dos teorías más completas no se comunican entre sí, la teoría de la relatividad general y la teoría cuántica; esto significa que no tenemos una teoría cuántica de la gravedad, o de cierta manera, no sabemos cómo se comporta la gravedad a nivel microscópico¹, posiblemente a la escala de Planck $\ell_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-35}m$.

Este es pues el enigma que sería deseable resolver teórica y fenomenológicamente.

A pesar de no contar con una teoría de la gravedad cuántica, con predicciones exitosas y medibles, contamos con propuestas, entre ellas la teoría de cuerdas [48] y la teoría de la gravedad cuántica por lazos (LQG por sus siglas en inglés) [5]-[13]. En particular en este trabajo adoptamos esta última.

La LQG, propone abordar el problema de la gravedad cuántica tomando como guía algunos elementos de la teoría de la relatividad general de Einstein. En cierto modo ésta se basa en la misma idea que llevó a Planck descubrir

¹El éxito de la relatividad general es innegable a nivel del sistema solar y en buena medida a nivel cósmico [39, 40], encontrando avances importantes a escala submilimétrica [41].

la mecánica cuántica. A escalas microscópicas la energía de la radiación de cuerpo negro que parecía ser una observable continua macroscópicamente, resulta ser discreta. La idea es similar, considerar que a escalas microscópicas el espacio-tiempo es discreto. Esta estructura discreta corresponde a gráficas unidimensionales (Loops o Lazos); estos conformarían todo el espacio-tiempo que sin embargo no apreciamos a escalas macroscópicas. El problema es acceder a estas escalas de manera experimental, pues, como dijimos antes, la longitud característica sería la de Planck ℓ_p , la cual con la actual tecnología no es accesible.

Hay dos vertientes para estudiar esta teoría, la forma covariante, que nos lleva a los modelos de espuma de espín [13], en los cuales el espacio-tiempo se plantea como conformado por objetos tetradimensionales. El otro camino, es la forma hamiltoniana, que consiste de considerar al espacio-tiempo foliado en hipersuperficies espaciales, un ejemplo siendo el formalismo ADM [52], y abordar como se comporta cada hipersuperficie de manera cuántica [1, 3], [6]-[11], [36]-[38].

Uno de los triunfos de LQG, radica en evitar singularidades, tanto para agujeros negros de Schwarzschild [9, 10, 37] como para la singularidad inicial ó Big Bang en el modelo Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [1, 2, 17, 21].

El estudio propio del universo, visto desde LQG, ha dado lugar a una versión simetrizada definida por homogeneidad e isotropía espacial, llamada Cosmología Cuántica por Lazos (LQC por sus siglas en inglés) [1, 2], [17]-[23]. Resulta más sencillo trabajar en LQC que en LQG con la expectativa de poder captar rastros del universo temprano en sus regímenes cuánticos a través de sus huellas en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB por sus siglas en inglés) [15].

El estudio de la cosmología visto desde LQG fue iniciado por Martin Bojowald [1]. El problema de la singularidad inicial se resuelve reemplazando la descripción clásica del modelo FLRW por una cuántica con un volumen mínimo no cero y densidad de energía máxima finita. La métrica FLRW describe un universo homogéneo e isótropo, en acuerdo con las observaciones realizadas por los satélites Planck y WMAP [41].

En un desarrollo subsecuente se propusieron modelos efectivos mostrando la evasión de la singularidad mediante congruencias de geodésicas [2, 3].

Pero el estudio de la LQC no se limita solamente a un universo homogéneo e isótropo espacialmente plano ($k = 0$), también se ha estudiado el modelo que describe un universo abierto ($k = -1$), como un cerrado ($k = 1$) [21] e incluso se han abordado modelos homogéneos anisótropos e inhomogéneos [16, 24].

Con los modelos efectivos [2, 3, 17] se incluyen modificaciones cuánticas

dadas por LQC expresables como modificaciones a los modelos clásicos parametrizadas por la escala de Planck. Este estudio es el que nos ha llevado a elaborar esta tesis. Hay diversos métodos para obtener modelos efectivos, mediante valores de expectación con respecto a estados semiclásicos [25, 26] o bien usando la aproximación semiclásica del propagador correspondiente con base en integral de trayectoria [2]. Nos enfocaremos en este último.

El objetivo de esta tesis es estudiar la amplitud semiclásica mediante técnicas de aproximación propias de integral de trayectoria. Aunque previamente se evitaron las dificultades de la integral de trayectoria combinándola con elementos Hamiltonianos [2], es deseable enfrentar y resolver estas dificultades. Como veremos aquí, este es el caso.

Nuestro objetivo es extender las técnicas semiclásicas de la integral de trayectoria para sistemas mecánicos al caso de sistemas poliméricos. En específico la partícula libre y el modelo soluble espacialmente plano FLRW.

La estructura de la tesis es como sigue. En el capítulo 2 discutimos la cuantización de Schrödinger de una partícula en una dimensión. Después de recordar las bases de la aproximación semiclásica de Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (J-WKB), la usamos en el formalismo de integral de trayectoria para calcular la aproximación semiclásica del propagador. Aquí extendemos un análisis previo [29] para Hamiltonianos no estándares generales del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette. Verificamos que el caso de la partícula libre está contenido en esta extensión. En el capítulo 3 aplicamos la extensión obtenida a la partícula libre polimérica. Pues su dinámica está descrita por un Hamiltoniano no estandar, a diferencia del caso de la integral de trayectoria con Hamiltoniano estándar que naturalmente contiene la acción clásica del sistema, en el caso polimérico este procedimiento permite identificar una acción efectiva, con correcciones poliméricas cuánticas asociadas con el carácter discreto. Este resultado se compara notablemente bien con el analítico exacto, derivado previamente por métodos espectrales e integral de trayectoria [33, 34, 36]. El contenido del capítulo 4 consiste de la formulación hamiltoniana de la cuantización por lazos del modelo soluble FLRW espacialmente plano. Este capítulo prepara el terreno para la formulación vía integral de trayectoria del propagador de este modelo en el capítulo 5. La aproximación semiclásica que implementa la extensión obtenida del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette en el modelo polimérico FLRW, se implementa en el capítulo 6. El resultado analítico es idéntico al obtenido previamente combinando métodos de integral de trayectoria y Hamiltonianos [2]. Finalmente, el capítulo 7 contiene nuestra discusión general, conclusiones y perspectivas.

Capítulo 2

Propagador semiclásico de partícula libre y sistemas con Hamiltonianos no estandar en cuantización de Schrödinger

El propósito de este capítulo es plantear los conceptos y herramientas de la aproximación J-WKB (Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin) [46, 27] en la mecánica cuántica de Schrödinger en preparación para su aplicación al caso de cuantización polimérica de los siguientes capítulos. Esto tanto desde la perspectiva hamiltoniana como en la integral de trayectoria. La primera sección sigue la referencia [4]. Para el propagador semiclásico con integral de trayectoria se presenta una extensión del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette [29] al caso de sistemas con Hamiltoniano no estándar generales. Esta jugará un papel central en el caso de sistemas cuánticos poliméricos

2.1. Aproximación semiclásica en el formalismo hamiltoniano

La motivación de la aproximación semiclásica se puede asociar con una medida de la relevancia de la descripción cuántica en comparación con la clásica para un sistema dado. En términos de funciones de onda, intuitivamente nos preguntamos cuándo es necesario o no usar una descripción ondulatoria. Concretamente la longitud de onda de de Broglie

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}, \tag{2.1}$$

con $p = \sqrt{2m(E - V(x))}$ el momento clásico del sistema, puede compararse con una escala de longitud característica del sistema ℓ , para discernir sobre la necesidad de su descripción cuántica. En el caso de un átomo de Hidrógeno y una gota de agua tenemos¹

$$\begin{aligned}\lambda_H &= 3.3 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad \lambda_H \sim a_0 = 5.2 \times 10^{-11} \text{ m}, \quad \text{átomo de hidrógeno, sistema cuántico.} \\ \lambda_g &= 1.3 \times 10^{-29} \text{ m}, \quad \lambda_g \ll \ell_g = 2 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad \text{gota de agua, sistema clásico}\end{aligned}$$

Para entender mejor la aproximación semiclásica conviene recordar las bases del argumento anterior. Para una partícula inmersa en un potencial constante V_0 , una eigenfunción de energía toma la forma $\psi_e(x) = A \exp(\pm ipx/\hbar)$ correspondiente a oscilaciones con una longitud de onda $\lambda = 2\pi\hbar/p$, $p = \sqrt{2m(E - V_0)}$. Así podemos ver el papel de la longitud de onda de de Broglie.

De manera más general, para una partícula en un potencial $V(x)$ la longitud de onda de de Broglie no es una constante. Sin embargo para implementar una descripción cuántica no muy alejada de la clásica podemos considerar que la variación espacial $\delta\lambda$ sea pequeña comparada con la longitud de onda misma i.e.

$$\left| \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\frac{d\lambda}{dx} dx}{\lambda} \right| = \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1, \quad dx \sim \lambda. \quad (2.2)$$

Esta condición es equivalente a la siguiente forma en términos del momento $p = \sqrt{2m(E - V)}$

$$\epsilon = \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| = \left| \frac{d\lambda}{dp} \frac{dp}{dx} \right| = \lambda \left| \frac{dp/dx}{p} \right| = \lambda \left| \frac{1}{2(E - V)} \frac{dV}{dx} \right| \ll 1, \quad (2.3)$$

el cambio de la derivada $d\lambda/dp$ por λ/p , es válida por la aproximación semiclásica², y donde se hizo uso de (2.1)

Podemos decir que la condición de aproximación semiclásica $\lambda/\ell \ll 1$ requiere para tener sentido el uso de la condición $d\lambda/dx \ll 1$. En presencia de un potencial es necesaria una variación espacial de éste que sea pequeña en comparación con la longitud de onda de de Broglie λ (ver fig. 2.1)

La construcción sistemática de la aproximación JWKB tiene punto de partida la ecuación de Schrödinger estacionaria

¹Para un átomo de Hidrógeno en el estado basal $E = 13.6 \text{ eV}$ y $E = m_H v_H^2/2$, $p_H = m_H v_H$. Para la gota de agua de un diámetro $\ell_g = 2 \text{ mm}$, masa $m_g = 0.05 \text{ g}$, en caída libre desde el reposo a una altura de 1 m , cuya velocidad final sera $v_g = \sqrt{2g\hbar}$, $p_g = m_g v_g$.

²Ya que en la región donde es válida la aproximación la fluctuación del potencial es similar a la longitud de onda de de Broglie (ver fig. 2.1)

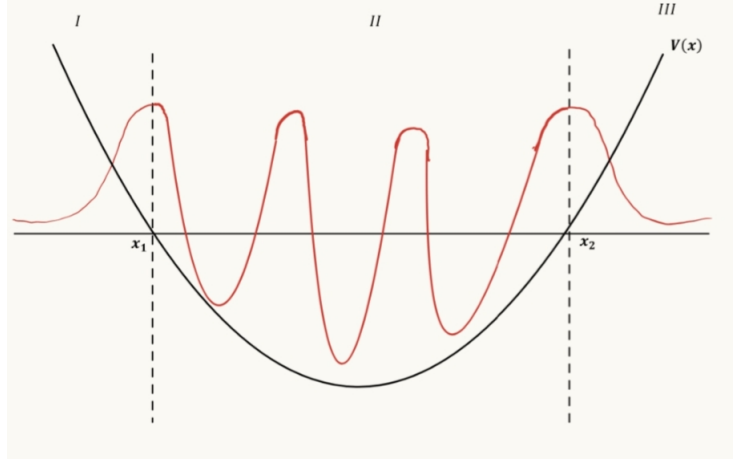


Figura 2.1: Esquema de aproximación semiclásica, en el cual se compara la variación de un potencial, en tres regiones, las cuales se definen por dos puntos de retorno x_1 y x_2 . Nótese que en la región II, la variación del potencial respecto a la posición es muy grande en comparación con la longitud de onda de de Broglie.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.4)$$

que reescribimos por conveniencia como

$$(-\hbar^2\partial_x^2 - p^2)\psi(x) = 0. \quad (2.5)$$

Con $p(x)$ el momento clásico. La solución de (2.5) fue propuesto por J-WKB [27, 46] como

$$\psi(x) = \exp(iS(x)/\hbar), \quad (2.6)$$

$$S(x) = S_0(x) + \frac{\hbar}{i}S_1(x) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2(x) + \dots \quad (2.7)$$

Dos aspectos cruciales a subrayar a este punto son las siguientes: primero, considerando el carácter pequeño de $\hbar$, en el límite $\hbar \rightarrow 0$ la descripción clásica del sistema debe emerger y segundo, las correcciones subsecuentes de orden $\hbar^1$ y superior deberán aportar información del comportamiento cuántico del sistema separándose así del clásico.

Para ver esto se sustituye (2.7) y (2.6) en (2.5), formando así una serie en potencias de $\hbar^n$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\hbar^0 & : (S'_0)^2 - p^2 = 0 \\
\hbar^1 & : S''_0 + 2S'_0 S'_1 = 0 \\
& \vdots \\
\hbar^n & : S''_n - \sum_{m=0}^n S'_m S'_{n-m} = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En efecto, a orden $\hbar^0$, S_0 es la parte estacionaria de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la descripción clásica de una partícula en un potencial

$$H(x, p = S'_0) = E, \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{2.9}$$

A primer orden en $\hbar$, la solución de S_0 y S_1 (2.8) lleva a a la forma siguiente de la función de onda

$$\psi_{JWKB}(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[\pm \frac{i}{\hbar} \int_0^x dx' p(x') \right], \tag{2.10}$$

donde A es una constante de normalización y $p(x)$ el momento clásico, definido con anterioridad. Observemos que la forma de ψ_{JWKB} es válida sólo si $p \neq 0$, es decir excluyendo los puntos de retorno clásicos $E - V(x_r) = 0$. Es posible definir aproximaciones mas allá de estos puntos [46], pero no lo haremos aquí³.

Adicionalmente, la solución (2.6) es una serie asintótica en el mejor de los casos por lo que un truncamiento es adecuado. Por lo que nos limitaremos al orden $\hbar^1$. Finalmente, es importante establecer la relación entre la aproximación JWKB y la condición heurística (2.2). Por consistencia los términos $\hbar^1$ deben ser subdominantes con respecto a aquellos en $\hbar^0$, (ec. 2.8), es decir

$$\hbar |S''_0|, |2\hbar S'_0 S'_1| \ll |S'_0| = |p|. \tag{2.11}$$

La condición (2.11) se traduce en

$$\hbar \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{S_1} \right| = \left| \frac{d}{dx} \frac{\hbar}{p} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1. \tag{2.12}$$

Resumiendo, el desarrollo JWKB de la función de onda (2.6, 2.7) nos permite identificar que al orden más bajo en $\hbar$, es decir $\hbar^0$, el uso de la descripción clásica es adecuado con base a la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.9). A orden $\hbar^1$ tenemos las primeras correcciones cuánticas ψ_{JWKB} (ec. 2.10). La consistencia de la aproximación requiere $|d\lambda/dx| \ll 1$, ec (2.11), que permite considerar $\lambda/\ell \ll 1$.

³Lo haremos en el contexto de la integral de trayectoria en los siguientes capítulos.

2.2. Aproximación semiclásica en integral de trayectoria

Para sistemas mecánicos la evolución de los estados cuánticos se puede describir usando un propagador $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$

$$\Psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_a K(x_b, t_b; x_a, t_a) \Psi(x_a, t_a), \quad (2.13)$$

donde $\Psi(x_a, t_a)$ es el estado al tiempo t_a que evoluciona al estado $\psi(x_b, t_b)$ al tiempo t_b . $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ satisface las propiedades

$$\begin{aligned} i) \quad & (i\hbar\partial_t - \hat{H}) K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(t' - t)\delta(x' - x), \\ ii) \quad & K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x_b, t_b; x', t') K(x', t'; x_a, t_a), \\ iii) \quad & K(x, t; x', t) = \delta(x' - x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $\hat{H}$ es el hamiltoniano del sistema, y $x_b < x' < x_a$, con $x_{a,b} = x(t_{a,b})$.

En la formulación de Feynman de la mecánica cuántica el propagador $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ se expresa como una integral funcional [4, 42]

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int \mathcal{D}[x(t)] \int \mathcal{D}[p(t)] e^{iS[x(t), p(t)]/\hbar}, \\ S[x, p] &= \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{x}p - H), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aquí las integrales funcionales están dados por

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}[x(t)] &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_n, \\ \int \mathcal{D}[p(t)] &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \prod_{n=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Las cuales están definidas usando una partición temporal $(t_b - t_a) = (N + 1)\epsilon$, $t_0 = t_a$, $t_{N+1} = t_b$ con $\epsilon = t_{i+1} - t_i$, $x_i = x(t_i)$, $i = 0, \dots, N + 1$. $S[x(t), p(t)]$ es la acción del sistema y $H[x(t), p(t)]$ el hamiltoniano del sistema, para trayectorias arbitrarias, no necesariamente la clásica que la hace extremal. De este modo podemos interpretar pictóricamente al propagador como formado por las contribuciones de todas las posibles trayectorias entre los puntos (x_a, t_a) y (x_b, t_b) (ver fig. 2.2).

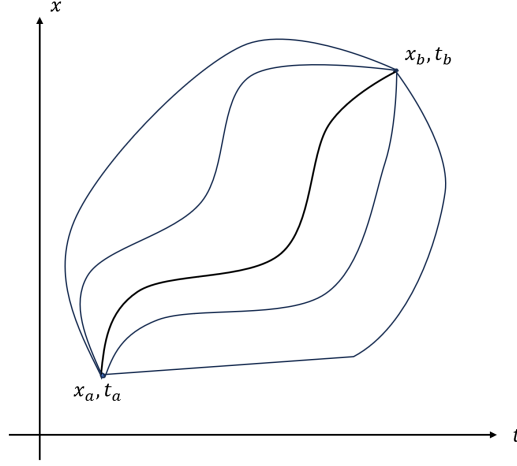


Figura 2.2: Interpretación de Feynman: Entre dos eigenestados de posición con eigenvalores, inicial x_a en t_a y otro final x_b en t_b , existen infinitos caminos posibles. El propagador $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} | x_a \rangle$ nos da la amplitud de probabilidad de ubicar a la partícula en x_b al tiempo t_b sabiendo que estuvo en x_a al tiempo t_a y es igual a $\Theta(t_b - t_a) \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$, con Θ la función escalón de Heaviside.

La aproximación semiclásica, aplicada a la integral de trayectoria resulta más intuitiva y elegante respecto a la versión hamiltoniana. El punto de partida en este caso es considerar la contribución al propagador (2.15) de una cualquiera de las trayectorias expresándola como $x(t) = x_{cl}(t) + \delta x(t)$, con x_{cl} la trayectoria clásica y $\delta x(t)$ su desviación con respecto a $x_{cl}(t)$. Como condiciones de frontera usamos $x(t_{b,a}) = x_{cl}(t_{b,a}) \Rightarrow \delta x(t_{b,a}) = 0$ (ver fig. 2.3)⁴

De este modo la acción $S[x]$ para una trayectoria $x(t)$ genérica nos lleva a⁵

$$\begin{aligned}
S[x(t), p(t)] &= S_{cl} + \int dt' \left\{ \left[\frac{\delta S[x(t), p(t)]}{\delta x(t')} \right]_{cl} \delta x(t') + \left[\frac{\delta S[x(t), p(t)]}{\delta p(t')} \right]_{cl} \delta p(t') \right\} \\
&+ \frac{1}{2!} \int dt' dt'' \left[\frac{\delta^2 S[x(t), p(t)]}{\delta x(t') \delta x(t'')} \right]_{cl} \delta x(t') \delta x(t'') \\
&+ \frac{1}{2!} \int dt' dt'' \left[\frac{\delta^2 S[x(t), p(t)]}{\delta p(t') \delta p(t'')} \right]_{cl} \delta p(t') \delta p(t'') \\
&+ \int dt' dt'' \left[\frac{\delta^2 S[x(t), p(t)]}{\delta p(t') \delta x(t'')} \right]_{cl} \delta p(t') \delta x(t'') + \mathcal{O}(\delta x^3, \delta p^3) \quad (2.17)
\end{aligned}$$

⁴Un enfoque basado en la aproximación de la fase estacionaria puede encontrarse en [4, 43].

⁵Véase [4, 47] para mayores detalles.

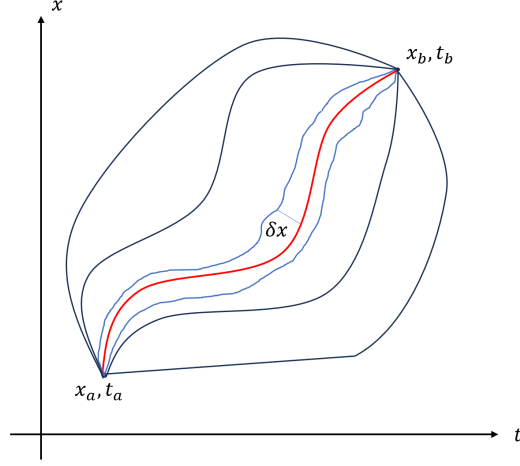


Figura 2.3: La aproximación semiclásica en integral de trayectoria consiste de considerar una aproximación alrededor del camino clásico x_{cl} (línea roja), más fluctuaciones interpretadas como de origen cuántico δx alrededor de x_{cl} .

Vemos que el primer término S_{cl} es sólo la acción evaluada en la trayectoria clásica. El segundo y el tercero se anulan en virtud del principio variacional de Hamilton clásico ($\delta S|_{x_{cl}} = 0$). A partir del cuarto término las contribuciones a la acción corresponden con las desviaciones respecto de x_{cl}, p_{cl} (orden cuadrático y superior en δx y δp).

Estas son las contribuciones al propagador (2.15) que tienen su origen en el carácter cuántico del sistema capturada por la integral de trayectoria.

Para un sistema hamiltoniano $H = p^2/2m + V(x)$ el desarrollo (2.17) tiene la forma

$$\begin{aligned}
 S[x(t), p(t)] &= S_{cl} + \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\delta p \dot{\delta x} - H_{fl}(\delta x, \delta p) \right) + \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} V^{(n)}(x_{cl}) \delta x^n(t) \\
 H_{fl}(\delta x, \delta p) &= \frac{1}{2} (\partial_{x_{cl}}^2 H_{cl}) (\delta x)^2 + \frac{1}{2} (\partial_{p_{cl}}^2 H_{cl}) (\delta p)^2 + (\partial_{p_{cl} x_{cl}}^2 H_{cl}) \delta x \delta p
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde H_{fl} es el hamiltoniano asociado a las fluctuaciones y

$$S_{cl} = S_{cl}[x_b, x_a; t_b, t_a] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\dot{x}_{cl} p_{cl} - \left(\frac{p_{cl}^2}{2m} - V(x_{cl}) \right) \right), \tag{2.19}$$

es la acción clásica.

La aproximación semiclásica del propagador (2.15) consiste del truncamiento a orden cuadrático de (2.17) en δx y δp , i.e.

$$\begin{aligned}
K_{sc}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= F(x_b, x_a; t_b, t_a) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a; t_b, t_a)}, \\
F(x_b, x_a; t_b, t_a) &= \int \mathcal{D}[\delta x] \int \mathcal{D}[\delta p] e^{\frac{i}{\hbar} S_{fl}(x_b, x_a; t_b, t_a)}, \\
S_{fl}(x_b, x_a; t_b, t_a) &= \int_{t_a}^{t_b} dt (\delta p \dot{\delta x} - H_{fl}(\delta x, \delta p)).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

F se denomina factor de fluctuación y S_{fl} captura la información de las fluctuaciones δx y δp .

2.3. Determinante de Van Vleck-Pauli-Morette

Para obtener la forma funcional del factor de fluctuación⁶ $F(x_b, t_b; x_a, t_a)$ utilizamos la propiedad de composición *ii*) del propagador (2.14). El punto intermedio x' puede ser cualquiera. Aplicaremos también las propiedades básicas de la aproximación semiclásica [4, 42, 46] y de punto silla [4, 43]. Consideremos x_e un punto cualquiera sobre la trayectoria clásica (ver fig. 2.4).

Partiendo de la composición de propagadores, cada uno aproximado semiclásicamente, tenemos

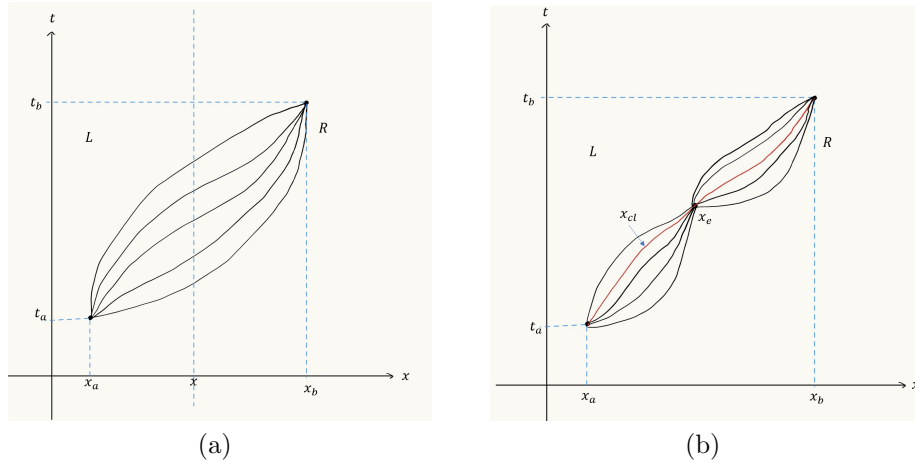


Figura 2.4: (a) Representación de la composición de propagadores integrando la posición $x \in \mathbb{R}$, (b) Fluctuaciones truncadas a segundo orden correspondientes a la aproximación semiclásica.

$$K_{sc}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(S_{cl}^L + S_{cl}^R)/\hbar} F(x_b, t_b; x, t) F(x, t; x_a, t_a). \tag{2.21}$$

⁶Este análisis se basa en [29], ampliado aquí a un hamiltoniano genérico $H(x, p, t)$.

Aquí L, R corresponden, respectivamente a las contribuciones a la izquierda o derecha del punto intermedio respectivamente. Observemos que las acciones evaluadas en las trayectorias clásicas S_{cl}^L, S_{cl}^R dependen de los puntos frontera respectivos, en particular del punto de integración x , i.e.

$$\begin{aligned} S_{cl}^L &= S_{cl}(x, t; x_a, t_a), \\ S_{cl}^R &= S_{cl}(x_b, t_b; x, t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora hacemos un desarrollo en torno al punto silla (1-dimensional) x_e , definido como

$$\frac{\partial}{\partial x} (S_{cl}^L + S_{cl}^R) \Big|_{x=x_e} = 0, \quad (2.23)$$

por conveniencia introduciremos la notación

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) \Big|_{x=x_e} \equiv \partial_{x_e} f(x_e).$$

De este modo

$$S_{cl}^{(L,R)} = S_{cl}^{(L,R)}(x_e) + \xi \partial_{x_e} S_{cl}^{(L,R)}(x_e) + \frac{\xi^2}{2} \partial_{x_e}^2 S_{cl}^{(L,R)}(x_e) + \mathcal{O}(\xi^3), \quad x = x_e + \xi. \quad (2.24)$$

A este punto la composición de propagadores semiclásicos (2.21) toma la forma

$$\begin{aligned} K_{sc}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= F(x_b, t_b; x_e, t_e) F(x_e, t_e; x_a, t_a) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i(S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))/\hbar + i\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))\xi^2/2\hbar}, \\ &= F(x_b, t_b; x_e, t_e) F(x_e, t_e; x_a, t_a) \times \\ &\quad \times e^{i(S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))/\hbar} \sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde hemos eliminado el término de primera derivada (2.23), conservando solo hasta el segundo orden en ξ y efectuando la integral gaussiana.

Comparando la ecuación (2.25) con la primera de (2.20), tenemos

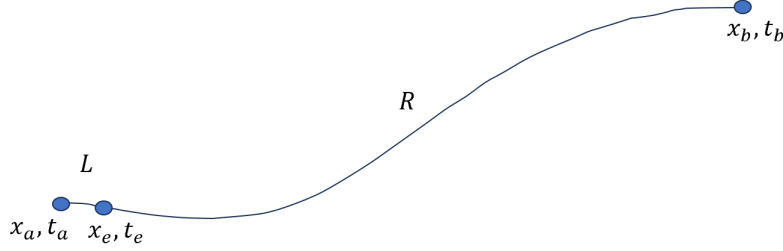


Figura 2.5: Trayectoria dividida en parte izquierda $L : (x_e, t_e; x_a, t_a)$ y derecha $R : (x_e, t_e; x_b, t_b)$, con x_e muy cercano a x_a .

$$F(x_b, t_b; x_a, t_a) = F(x_b, t_b; x_e, t_e) F(x_e, t_e; x_a, t_a) \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))}} \quad (2.26)$$

Para avanzar en la obtención de la forma explícita del factor de fluctuación (2.26), consideramos dos situaciones: i) $x_e \lesssim x_a$ e ii) $x_a \lesssim x_b$, $x_e \gg x_a, x_b$

Caso i) $x_a \lesssim x_e$

En esta parte, hacemos una partición, ubicando a x_e muy cerca de x_a (ver fig. 2.5)

En esta situación, los factores de fluctuación cumplen

$$F(x_b, t_b; x_a, t_a) \simeq F(x_b, t_b; x_e, t_e).$$

de tal modo que el factor de fluctuación (2.26) se expresa como

$$F(x_e, t_e; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))}{2\pi i \hbar}} \quad (2.27)$$

Para determinar la forma de $\partial_{x_e}^2 S_{cl}^{(L,R)}(x_e)$ que aparece en (2.26) utilizamos la teoría de Hamilton-Jacobi como sigue

Partamos de las funciones generadoras, las cuales consisten en establecer una relación entre coordenadas originales (q, p) y nuevas coordenadas $(Q = q_0, P = p_0)$ las cuales coinciden con las condiciones iniciales de las coordenadas originales. Para ello optamos por la función generadora $F_2(q, P, t)$, la cual se define a partir de

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P}, & \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q}, \\ K &= H + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

con

$$p = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q}. \quad (2.29)$$

Puesto que $Q = q_0$, $P = p_0$ son constantes de movimiento, de (2.28) podemos considerar sin pérdida de generalidad que $K = 0$ luego F_2 resulta ser la función principal de Hamilton, solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.30)$$

Consideremos además que las nuevas coordenadas (Q, P) son constantes que dependen de α y β , condiciones de frontera, de tal modo que $q = q(\alpha, \beta, t)$, $p = p(\alpha, \beta, t)$. Por lo que $F_2 = F_2(\alpha, \beta, t)$.

Notemos además que

$$\frac{dF_2(q, P, t)}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = p\dot{q} - H, \quad (2.31)$$

donde se ha utilizado (2.28) y (2.29). Nótese que la acción en forma Hamiltoniana

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt(p\dot{q} - H), \quad (2.32)$$

nos permite concluir que $F_2 = S$ en un sistema dinámico, donde hemos resuelto el sistema con condiciones de frontera.

Regresando a (2.26) podemos ver la conveniencia de usar (2.28) y (2.29) que nos llevan a

$$\begin{aligned} \partial_{x_e}^2 S_{cl}^L(x_e) &= \partial_{x_e} p_{cl}^L(x_e), \\ \partial_{x_e}^2 S_{cl}^R(x_e) &= -\partial_{x_e} p_{cl}^R(x_e), \end{aligned} \quad (2.33)$$

con $p_{cl}^L(x_e) = p_{cl}(x_e, t_e; x_a, t_a)$ y $p_{cl}^R(x_e) = p_{cl}(x_b, t_b; x_e, t_e)$.

Por otro lado, haciendo uso de la ecuación de Hamilton (2.30), para un hamiltoniano genérico $H(p, x, t)$

$$\dot{x} = \partial_p H, \quad (2.34)$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_e} \dot{x}(x_e) = \partial_p^2 H \frac{\partial p(x_e)}{\partial x_e} + \partial_{xp}^2 H \frac{\partial x(x_e)}{\partial x_e}. \quad (2.35)$$

De esta ecuación podemos obtener

$$\frac{\partial p(x_e)}{\partial x_e} = \frac{\partial_{x_e} \dot{x}(x_e) - \partial_{xp}^2 H \partial_{x_e} x(x_e)}{\partial_p^2 H}. \quad (2.36)$$

Para verificar la construcción en un caso conocido, consideremos el problema del oscilador armónico, en el cual se conocen las soluciones de x, p , en función de las condiciones iniciales x_a, t_a y finales x_b, t_b y del tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\text{sen } \omega \Delta t} (x_b \text{sen } \omega(t - t_a) + x_a \text{sen } \omega(t_b - t)), \\ p(t) &= m\dot{x} = \frac{m\omega}{\text{sen } \omega \Delta t} (x_b \cos \omega(t - t_a) - x_a \cos \omega(t_b - t)), \\ H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \left(\frac{m\omega}{\text{sen } \omega \Delta t} \right)^2 (x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b \cos \omega \Delta t), \end{aligned} \quad (2.37)$$

con $\Delta t = t_b - t_a$. Ahora tengamos en cuenta por notación que $x(t_{b,a}) = x(x_{b,a}) = x_{b,a}$ y $p(t_{b,a}) = p(x_{b,a}) = p(x_b, t_b; x_a, t_a)$, i.e

$$\begin{aligned} \dot{x}(x_b) &= \frac{x_b \omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t}, & \dot{x}(x_a) &= -\frac{x_a \omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t}, \\ p(x_b) &= \frac{x_b m \omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t}, & p(x_a) &= -\frac{x_a m \omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t} \end{aligned} \quad (2.38)$$

En este caso (2.35) toma la siguiente forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}(x_b)}{\partial x_b} &= \frac{\omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t}, \\ \partial_p^2 H \frac{\partial p}{\partial x_b} + \partial_{xp}^2 H \frac{\partial x}{\partial x_b} &= \frac{\omega \cos \omega \Delta t}{\text{sen } \omega \Delta t}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este ejemplo nos ayuda a entender la naturaleza de $\partial_{x_e} \dot{x}(x_e)$, como $\partial_{x_e} p(x_e)$. Y de esta manera darnos cuenta que x, p solo están definidos en la frontera (en el sistema que estamos estudiando).

De esta forma, sustituyendo (2.36) en (2.33), obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_{x_e}^2 S_{cl}^L(x_e) &= \partial_{x_e} p_{cl}^L(x_e) = \frac{\partial_{x_e} \dot{x}^L(x_e) - \partial_{xp}^2 H \partial_{x_e} x^L(x_e)}{\partial_p^2 H} \\ \partial_{x_e}^2 S_{cl}^R(x_e) &= -\partial_{x_e} p_{cl}^R = -\frac{\partial_{x_e} \dot{x}^R(x_e) - \partial_{xp}^2 H \partial_{x_e} x^R(x_e)}{\partial_p^2 H}\end{aligned}\quad (2.40)$$

entonces

$$\begin{aligned}\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e)) &= \frac{\partial_{x_e} \dot{x}^L(x_e) - \partial_{xp}^2 H \partial_{x_e} x^L(x_e)}{\partial_p^2 H} \\ &\quad - \frac{\partial_{x_e} \dot{x}^R(x_e) - \partial_{xp}^2 H \partial_{x_e} x^R(x_e)}{\partial_p^2 H}\end{aligned}\quad (2.41)$$

En el caso de que x_e este muy cercano a x_a , podemos usar la siguiente aproximación

$$\frac{\partial \dot{x}_{cl}^L(x_e)}{\partial x_e} \simeq \frac{\partial}{\partial x_e} \frac{x_e - x_a}{t_e - t_a} = \frac{1}{t_e - t_a}$$

el cual domina sobre todos los factores en el numerador en (2.41), dado que $1/(t_e - t_a) \rightarrow \infty$, con $t_e \rightarrow t_a$. De este modo

$$\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L + S_{cl}^R) = \frac{1}{\partial_p^2 H} \frac{1}{t_e - t_a} \quad (2.42)$$

por lo que el factor de fluctuación (2.27) es

$$F(x_e, t_e; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar (t_e - t_a) (\partial_p^2 H(x, p, t))}} \quad (2.43)$$

Nótese que $p(x_e, t_e; x_a, t_a)$ y $x(x_e, t_e; x_a, t_a)$ tienen dependencia de la trayectoria izquierda (ver fig. 2.5).

Caso ii) $x_a \lesssim x_b$, $x_e \gg x_a, x_b$

Es técnicamente útil considerar la situación acausal $t_a < t_b < t_e$, permisible para los elementos de matriz $\langle x_b | \hat{\mathcal{U}}(t_b, t_e) | x_e \rangle$ aunque no para las amplitudes de evolución temporal $\theta(t_b - t_e) \langle x_b | \hat{\mathcal{U}}(t_b, t_e) | x_e \rangle$ pues $\theta(t_b - t_e) = 0$

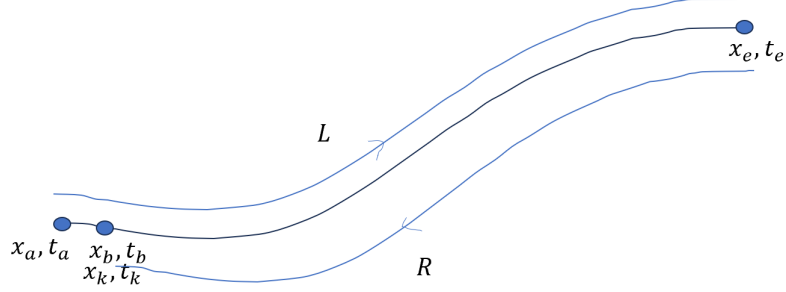


Figura 2.6: Dividiendo la trayectoria en dos, una que vaya de (x_a, t_a) a (x_e, t_e) (izquierda, L), y la otra que vaya de (x_e, t_e) a (x_k, t_k) (derecha, R).

para $t_b < t_e$ (ver fig. 2.6). Para ello, el factor de fluctuación (2.26) tiene la forma

$$F(x_k, t_k; x_a, t_a) = F(x_k, t_k; x_e, t_e) F(x_e, t_e; x_a, t_a) \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e))}}, \quad (2.44)$$

definiendo $x_b \equiv x_k$.

Notemos que en el caso de $x_a \leq x_k$ las trayectorias L y R coinciden, pero son inversas una de otra, por lo que las acciones son iguales pero con signo opuesto. Es decir,

$$\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e)) = \partial_{x_e}^2 (S_{cl}(x_k, t_k; x_e, t_e) - S_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)). \quad (2.45)$$

Procedemos a hacer un desarrollo en series de Taylor alrededor de x_a, t_a . En este punto los superíndices L, R son superfluos⁷ y podemos escribir

$$S_{cl}''(x_k, t_k; x_e, t_e) \simeq S_{cl}''(x_a, t_a; x_e, t_e) + \frac{\partial S_{cl}''(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial x_a} (x_k - x_a) + \frac{\partial S_{cl}''(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial t_a} (t_k - t_a), \quad (2.46)$$

Siendo $(x_k = x_b)$ muy cercano a x_a , podemos expresar su diferencia como

⁷Usamos la notación de $\partial_{x_e}^2 S_{cl} = S_{cl}''$

$$x_k - x_a \simeq (t_k - t_a) \dot{x}_{cl}(x_k, t_k; x_a, t_a).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e)) &= \left(\dot{x}_{cl} \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \frac{\partial S_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial x_a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \frac{\partial S_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial t_a} \right) (t_k - t_a) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ahora usamos la ecuación de Hamilton-Jacobi, y la definición de momento como derivada de la acción respecto a la coordenada canónica, ecs (2.28) y (2.29),

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial t_a} &= -H(x_{cl}(x_a, t_a), p_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)), \\ \frac{\partial S_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e)}{\partial x_a} &= p_{cl}(x_a, t_a; x_e, t_e). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando la ecuación de Hamilton

$$\dot{x}_{cl} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.49)$$

y necesitaremos la segunda derivada del Hamiltoniano $\partial^2 H / \partial x_e^2$, usando $\partial_{x_e} x_a = 0$ tenemos

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_e^2} = \frac{\partial}{\partial x_e} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p_{cl}}{\partial x_e} \right) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p_{cl}}{\partial x_e} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p_{cl}}{\partial x_e} \right). \quad (2.50)$$

Ahora insertamos (2.47)-(2.49) en (2.33) para obtener

$$\partial_{x_e}^2 (S_{cl}^L(x_e) + S_{cl}^R(x_e)) = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \left(\frac{\partial^2 p_{cl}}{\partial x_e^2} \right)^2 (t_k - t_a). \quad (2.51)$$

Nótese además que de acuerdo a la figura (2.6), comparándola con la figura (2.5), el factor de fluctuación $F(x_k, t_k; x_a, t_a)$ de (2.44) puede relacionarse con el factor de fluctuación $F(x_e, t_e; x_a, t_a)$ de (2.43); y en el límite cuando x_k es muy cercano a x_a [4, 29]

$$F(x_a, t_a; x_e, t_e)F(x_e, t_e; x_a, t_a) = -iF(x_e, t_e; x_a, t_a)^2, \quad (2.52)$$

lo que implica que

$$F(x_k, t_k; x_e, t_e)F(x_e, t_e; x_a, t_a) = \frac{1}{2\pi i\hbar} i \frac{\partial p_{cl}}{\partial x_e}, \quad (2.53)$$

y por lo tanto

$$F(x_e, t_e; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i\hbar}} \left(-\frac{\partial p_{cl}}{\partial x_e} \right)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Utilizando (2.48), y considerando que x_e es cualquier punto de la trayectoria clásica, eligiéndolo como x_b , obtenemos

$$F(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i\hbar}} \left(-\frac{\partial^2 S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)}{\partial x_b \partial x_a} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

Finalmente, usando la notación convencional en la literatura, expresamos (2.55) como

$$\begin{aligned} F(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi i\hbar D}}, \\ D &= \left(-\frac{\partial^2 S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)}{\partial x_b \partial x_a} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

siendo D conocido en la literatura, como el determinante de van Vleck-Pauli-Morette [28]-[32].

De esta manera, hemos mostrado que la fórmula (2.55) es válida para cualquier Hamiltoniano⁸ $H(x, p, t)$.

⁸Sin embargo solo es útil cuando podemos *i)* encontrar la trayectoria clásica y *ii)* evaluar la acción en la trayectoria clásica expresada en datos frontera, $x_{a,b} = x(t_{a,b})$, de manera analítica.

2.4. Propagador semiclásico de partícula libre no relativista

En esta sección aplicamos la metodología del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette para obtener el propagador semiclásico para la partícula libre no relativista, cuyo hamiltoniano es $H = p^2/2m$.

La trayectoria clásica de la partícula libre $x_{cl}(t)$ sujeta a condiciones de frontera $x(t_{b,a}) = x_{b,a}$ es la solución de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (2.57)$$

que podemos expresar como

$$x_{cl}(t) = \frac{p_0}{m}t + x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}(t - t_a) + x_a. \quad (2.58)$$

En la primera línea, vemos que $p = p_0$ es una constante, mientras que en la segunda vemos a $x_{cl}(t)$ expresada en términos de x_b y x_a , con $\Delta x = x_b - x_a$ y $\Delta t = t_b - t_a$. La acción expresada en los puntos frontera $S(x_b, t_b; x_a, t_a)$, es

$$S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{m \dot{x}_{cl}^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}. \quad (2.59)$$

El factor de fluctuación (2.55) y el propagador semiclásico (2.20) para el caso de la partícula libre con trayectoria (2.58) y acción (2.59) puede escribirse como

$$\begin{aligned} K_{sc}^0(x_b, t_b; x_a, t_a) &= F_0(x_b, t_b; x_a, t_a) \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right), \\ F_0(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar}} \left(-\frac{\partial^2 S_0}{\partial x_b \partial x_a}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde el índice "0" indica el caso de partícula libre. Podemos notar que el propagador semiclásico, para partícula libre no relativista en la cuantización de Schrödinger (2.60) es exactamente igual a su propagador exacto [4], y esto puede verse en (2.17) pues las fluctuaciones cuadráticas contienen toda la información del propagador del modelo.⁹

⁹También es válida esta observación para el problema del oscilador armónico en la cuantización de Schrödinger [4].

Capítulo 3

Propagador semiclásico de partícula libre polimérica

En este capítulo aplicaremos la extensión de la aproximación semiclásica en integral de trayectoria, para el determinante de Van Vleck-Pauli-Morette, ec (2.55). Una breve introducción del formalismo de la mecánica cuántica polimérica Hamiltoniana nos permite abordar la forma integral requerida en nuestra aproximación. Se compara esta con el resultado analítico exacto y se obtiene la dinámica efectiva correspondiente presentada en el capítulo anterior, al caso de una partícula libre polimérica.

3.1. Cuantización polimérica

La cuantización polimérica difiere de la cuantización usual, o la cuantización de Schrödinger en el álgebra y su representación para las observables básicas. Mientras que en la mecánica cuántica usual, el álgebra que utilizamos es la canónica

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}, \quad (3.1)$$

en la polimérica el álgebra es la de flujos y holonomías¹

$$[\hat{x}, \hat{V}_\mu] = -\mu\hat{V}_\mu, \quad (3.2)$$

¹Estos nombres obedecen a su origen en gravitación cuántica por lazos [8].

con $\widehat{V}_\mu := \widehat{e^{i\mu p/\hbar}}$ el operador de holonomía². Podemos observar que heurísticamente este resultado se sigue de $[\hat{x}, e^{i\mu\hat{p}/\hbar}]$, sin embargo la diferencia yace en la ausencia o existencia del generador de traslaciones infinitesimales $\hat{p}$.

En la representación de posiciones, la acción de los operadores de posición $\hat{x}$ y de holonomía $\widehat{V}_\mu$ sobre un $|x\rangle$ son

$$\begin{aligned}\hat{x} |x\rangle &= x |x\rangle, \quad x \in \mathbb{R} \\ \widehat{V}_\mu |x\rangle &= |x + \mu\rangle\end{aligned}\tag{3.3}$$

Las funciones de onda $\psi(x)$ pertenecen, en el caso de la mecánica cuántica polimérica, al espacio de Hilbert

$$H_{\text{Poli}} = \{\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|^2 < \infty\},$$

la prima indicando que la suma es sobre conjuntos numerables.

Mientras que en mecánica cuántica usual, las relaciones de ortonormalidad son

$$\langle x | y \rangle = \delta(x - y),\tag{3.4}$$

en mecánica cuántica polimérica

$$\langle x | y \rangle = \delta_{x,y},\tag{3.5}$$

tenemos una delta de Kronecker. Debido a la propiedad de (3.3) podemos descomponer H_{Poli} en espacios superselectos

$$\begin{aligned}H_{\text{Poli}} &= \bigoplus_{x_0 \in [0, \mu]} \mathcal{H}_{x_0}, \\ \mathcal{H}_{x_0} &= \{\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi(x_n)|^2 < \infty, n \in \mathbb{Z}, x_n = x_0 + n\mu\}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Siempre que nuestro sistema no mezcle diferentes sectores superselectos podemos restringirnos a uno de ellos. Usaremos $\mathcal{H}_0$, que corresponde a $x_0 = 0$

²La formulación de la mecánica cuántica polimérica no es equivalente a la mecánica cuántica de Schrödinger, debido a que no satisface una de las condiciones del teorema de Stone-Von Neuman: $\widehat{V}_\mu$ no es débilmente continuo. Es decir $\lim_{\mu \rightarrow 0} \langle \psi | \widehat{V}_\mu | \psi \rangle \neq \langle \psi | \lim_{\mu \rightarrow 0} \widehat{V}_\mu | \psi \rangle$.

Las relaciones de completitud, sabiendo que $|x_n\rangle$ y $|p\rangle$ son una base de $\mathcal{H}_0$ son

$$\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} |x_n\rangle\langle x_n| = \mathbb{I}. \quad (3.7)$$

Similarmente, en la base del "momento", donde $\hat{V}_\mu$ es diagonal

$$\hat{V}_\mu|p\rangle = e^{i\mu p/\hbar}|p\rangle. \quad (3.8)$$

Estas eigenfunciones resultan normalizadas a la delta de Dirac

$$\langle p|p\rangle = \delta(p - p')$$

y cumplen la completitud

$$\int_{-\pi\hbar/\mu}^{\pi\hbar/\mu} dp |p\rangle\langle p| = \mathbb{I} \quad (3.9)$$

Estos eigenestados de momento en representación de posición son las eigenfunciones $\phi_p(x_n)$

$$\phi_p(x_n) = \langle x_n | p \rangle = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}x_n p\right), \quad -\frac{\pi\hbar}{\mu} \leq p < \frac{\pi\hbar}{\mu}. \quad (3.10)$$

3.2. Integral de trayectoria

Para expresar el propagador usando integral de trayectoria de Feynman, partimos de la formulación Hamiltoniana descrita en la sección anterior [35]

$$K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle = \langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar}(\widehat{t_b - t_a})H_{\text{Poli}}} | x_a \rangle \quad (3.11)$$

donde $\hat{U}(t_b, t_a)$ es el operador de evolución. El Hamiltoniano polimérico se representa en función de la holonomía $\hat{V}_\mu$ como

$$\hat{H}_{\text{Poli}} = \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \left(2 - \hat{V}_\mu - \hat{V}_{-\mu}\right) + W(\hat{x}) := \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \widehat{\text{sen}^2\left(\frac{\mu}{2\hbar}p\right)} + W(\hat{x}). \quad (3.12)$$

Aquí hemos usado la notación $W(\hat{x})$ para el potencial al que está sujeta la partícula. Para proceder con la forma integral de trayectoria del propagador, introducimos N identidades de completitud de posición. Definiendo a $x_b \equiv x_{N+1}$ y $x_a \equiv x_0$, además de $t_{N+1} = t_b$, $t_0 = t_a$, de tal forma que

$$K_{\text{Poli}}(x_{N+1}, t_{N+1}; x_0, t_0) = \left(\prod_{n=1}^N \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right) \prod_{j=1}^{N+1} \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{\epsilon H_{\text{Poli}}}} | x_{j-1} \rangle. \quad (3.13)$$

De esta forma los elementos de matriz $\langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{\epsilon H_{\text{Poli}}}} | x_{j-1} \rangle$ pueden calcularse introduciendo una relación de completitud de momento.

Además $\hat{A}(\hat{p})|p\rangle = A(p)|p\rangle$, $\hat{A}(\hat{x})|x_j\rangle = A(x_j)|x_j\rangle$, utilizando la relación de Haussdorf-Baker-Campbell³ considerando $\epsilon \ll 1$ y usando (3.10) llegamos a

$$\begin{aligned} \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{\epsilon H_{\text{Poli}}}} | x_{j-1} \rangle &= \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \widehat{\epsilon H_{\text{Poli}}}} | p \rangle \langle p | x_{j-1} \rangle, \\ &= \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon W(x_j)} e^{-\frac{2i\hbar}{m\mu^2} \epsilon \sin^2(\frac{\mu}{2\hbar} p)} \langle x_j | p \rangle \langle p | x_{j-1} \rangle, \\ &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp e^{\frac{i}{\hbar} (p(x_j - x_{j-1}) - \epsilon \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2(\frac{\mu}{2\hbar} p) - \epsilon W(x_j))}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El propagador polimérico (3.21) toma la siguiente forma, incluyendo sumas e integrales múltiples,

$$K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\prod_{n=1}^N \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right) \left(\prod_{j=1}^{N+1} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_j e^{\frac{i}{\hbar} (p_j(x_j - x_{j-1}) - \epsilon \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2(\frac{\mu}{2\hbar} p_j) - \epsilon W(x_j))} \right). \quad (3.15)$$

Con el fin de obtener una forma Hamiltoniana para la integral de trayectoria reacomodamos los términos de la exponencial en (3.15). Así

³La relación de Haussdorf-Baker-Campbell esta dado como

$$e^A e^B = e^{(B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [B, [A, B]] + \dots)} e^A.$$

Nótese que si $[A, B] = 0$, recuperamos $e^A e^B = e^B e^A$.

$$K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\prod_{n=1}^N \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \right) \left(\prod_{j=1}^{N+1} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_j \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N (x_n(p_n - p_{n+1}) + \mathbb{H}) \right), \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbb{H} = x_{N+1}p_{x_{N+1}} - x_0p_{x_1} - \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left(\frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\mu}{2\hbar}p_n\right) + W(x_n) \right). \quad (3.17)$$

Ahora aplicamos la fórmula de Poisson, que nos permite expresar variables discretas e integrales acotadas en términos de variables continuas sobre la recta real

$$\sum_{x_n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_n(p_{x_n} - p_{x_{n+1}}))} = \sum_{I_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\mu} \exp \left(\frac{i}{\hbar} (x_n(p_n - p_{n+1}) + 2\pi x_n I_n) \right), \quad (3.18)$$

con $I_n = n\hbar/\mu$ lo que resulta en

$$K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\prod_{j=1}^{N+1} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_j \right) \left(\prod_{n=1}^N \sum_{I_n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_n}{\mu} \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\sum_{n=1}^N x_n(p_n - p_{n+1}) + 2\pi x_n I_n + \mathbb{H})}. \quad (3.19)$$

Claramente los I_n pueden incorporarse en las integrales al cambiar el dominio de integración de $[-\frac{\pi\hbar}{\mu}, \frac{\pi\hbar}{\mu}]$ a $\mathbb{R}$, excepto para $j = N + 1$. De este modo

$$\begin{aligned} K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{N+1} \left(\prod_{j=1}^N \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_j \right) \times \\ &\quad \times \left(\prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right) e^{\frac{i}{\hbar} (\sum_{n=1}^N x_n(p_n - p_{n+1}) + \mathbb{H})}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

El último paso para construir la forma integral de Feynman, es tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, $N\epsilon = t_b - t_a$. Este límite nos lleva a que $\epsilon \sum_{n=0}^N \rightarrow \int dt$, $(x_n - x_{n-1})/\epsilon \rightarrow dx/dt$

Entonces podemos escribir el propagador polimérico como

$$\begin{aligned}
K_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int [\mathcal{D}x(t)] \int [\mathcal{D}p(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{Poli}}}, \\
S_{\text{Poli}} &= \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{x} - H_{\text{Poli}}), \\
H_{\text{Poli}} &= \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2\left(\frac{\hbar}{2\mu}p\right) + W(x)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

siendo S_{Poli} la acción polimérica, H_{Poli} el hamiltoniano polimérico y

$$\begin{aligned}
\int [\mathcal{D}x(t)] &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(\prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \right), \\
\int [\mathcal{D}p(t)] &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{N+1} \left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

La integral (3.20) puede realizarse de manera analítica [35], pero no lo haremos aquí⁴. Nosotros estamos investigando la aplicación de la extensión del método de Van Vleck-Pauli-Morette a Hamiltonianos no estándar como el presente, que está descrito por (3.21).

3.3. Aproximación semiclásica

Notemos que la forma Hamiltonianas de la integral de trayectoria del propagador polimérico (3.21) es distinta de la del propagador usual (2.15). Tanto sus integrales funcionales (3.22) y (2.16), como sus Hamiltonianas difieren.

De esta forma podemos ver de (3.21) y (3.22) que las dos diferencias con la integral funcional usual son: *i*) la integral en p_{N+1} y *ii*) H_{Poli} . Para aplicar la extensión del capítulo anterior hacemos uso de la aproximación de punto silla [43] para la integral acotada en P_{N+1} misma que aporta un factor global.

Ahora aplicaremos la construcción desarrollada en el capítulo anterior. Primero determinamos la trayectoria que extremiza la acción para evaluar ésta en los puntos frontera. Esto nos permitirá obtener la forma extendida

⁴Esencialmente se realizan las integrales en x_n dando lugar a deltas de Dirac. Estas se integran directamente para p_n , $n \neq N+1$, y la integral final en p_{N+1} conduce a una función de Bessel. Esto resulta en el propagador analítico de la partícula libre en cuantización polimérica vía integral de trayectoria.

del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette, finalmente el propagador en la aproximación semiclásica.

En el caso polimérico la acción (3.21) contiene modificaciones cuánticas asociadas con la representación discreta conteniendo la escala μ .

Por lo que la acción efectiva de una partícula libre polimérica $W(x) = 0$ será

$$S_{ef} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(p\dot{x} - \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p \right) \right) \quad (3.23)$$

Así el hamiltoniano efectivo H_{ef} en este caso es

$$H_{ef} = \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p \right).$$

Las ecuaciones de Hamilton son entonces

$$\dot{x} = \frac{\partial H_{ef}}{\partial p} = \frac{\hbar}{m\mu} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p \right), \quad (3.24)$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H_{ef}}{\partial x} = 0 \Rightarrow p = p_0 = \text{cte.} \quad (3.25)$$

Su solución expresada en constantes de integración posición inicial $x_0 = x(t=0)$ y velocidad inicial $v_0 = v(t=0)$ es

$$x(t) = v_0 t + x_0 = \frac{\hbar}{m\mu} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right) t + x_0, \quad (3.26)$$

y en términos de datos de frontera $x(t_{a,b}) = x_{a,b}$

$$x(t) = x_a + \frac{\Delta x}{\Delta t} (t - t_a), \quad (3.27)$$

con $\Delta x = x_b - x_a$ y $\Delta t = t_b - t_a$, Puede verse que

$$v_0 = \frac{\hbar}{m\mu} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right) = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.28)$$

Es decir, a pesar de que p_0 es una constante, esta tiene una dependencia de (x_b, t_b) y (x_a, t_a) . Entonces, la acción efectiva (3.23) es

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(p\dot{x} - \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p \right) \right) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(p_0 v_0 - \frac{\hbar^2}{m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right) \right) \\
&= p_0 \Delta x - \frac{2\Delta t \hbar^2}{m\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu}{2\hbar} p_0 \right), = p_0 \Delta x - \frac{\Delta t \hbar^2}{m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2} \right), \\
&= \frac{\hbar}{\mu} \sin^{-1} \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta x - \frac{\Delta t \hbar^2}{m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2} \right), \quad (3.29)
\end{aligned}$$

donde se utilizó $\sin^2(a) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2(2a)} \right)$ y $p_0(x_b, t_b; x_a, t_a)$ de (3.28).

Para obtener el factor de fluctuación (2.55), derivamos (3.29) respecto de los puntos de frontera x_b y x_a . Esto resulta en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{ef}}{\partial x_b} &= \frac{\partial p_0}{\partial x_b} \Delta x + p_0 - \frac{\Delta t \hbar}{m\mu} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} p_0 \right) \frac{\partial p_0}{\partial x_b}, \\
&= \frac{\partial p_0}{\partial x_b} \Delta x + p_0 - \Delta x \frac{\partial p_0}{\partial x_b} = p_0 \\
\frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial S_{ef}}{\partial x_b} &= \frac{\partial p_0}{\partial x_a} = -\frac{m}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2 \mu^2}{\hbar^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2}}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Finalmente, el propagador semiclásico polimérico para la partícula libre se expresa

$$\begin{aligned}
K_{\text{Poli}}^{sc} &= F_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{ef} \right), \\
F_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \mu \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left(1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right)^{-1/4} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

con S_{ef} dado por (3.29).

Para verificar el límite continuo ($\mu \rightarrow 0$) del propagador semiclásico K_{Poli}^{sc} debe notarse que la normalización de los eigenkets de posición en el modelo polimérico difiere de aquellos para el caso de Schrödinger, ecs (3.4) y (3.5). Los primeros son adimensionales, mientras que los segundos tienen dimension de (longitud)⁻¹. Esencialmente, en el límite continuo

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K_{\text{Poli}}^{sc} = \mu K_{\text{sch}}^{sc}. \quad (3.32)$$

Concretamente

$$\begin{aligned} F_{\text{sch}} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left(1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right)^{-1/4}, \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Además la acción efectiva S_{ef} en (3.23) se reduce a la clásica (2.59), es decir

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} S_{ef} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\hbar}{\mu} \Delta x \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{6} \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^3 + \dots \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t \hbar^2}{m\mu^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^4 + \dots \right), \\ &= m \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - \frac{m}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{m}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.4. Región prohibida, y continuación analítica del propagador

En la partícula libre polimérica, la trayectoria está dada por

$$x(t) = v_0 t + x_0 = \frac{\hbar}{m\mu} \sin\left(\frac{\mu}{\hbar} p_0\right) t + x_0, \quad (3.35)$$

que es solución a las ecuaciones de Hamilton para H_{Poli} . Notamos que la velocidad $v_0 = \frac{\hbar}{m\mu} \sin(\mu p_0/\hbar)$ tiene un valor máximo ($\hbar/m\mu$) y uno mínimo ($-\hbar/m\mu$). De esta manera la partícula libre está restringida a moverse en una región permitida, y existe una región prohibida⁵ (ver fig. 3.1). Y puesto que p_0 depende de (x_b, t_b) y (x_a, t_a) mediante (3.28), la región permitida nos da pauta para notar qué valores $\Delta x = x_b - x_a$ son permitidos, dado $\Delta t = t_b - t_a$, y que la solución se encuentre en la región permitida

⁵Mientras que en el caso clásico ($\mu \rightarrow 0$), nos liberamos de esa restricción

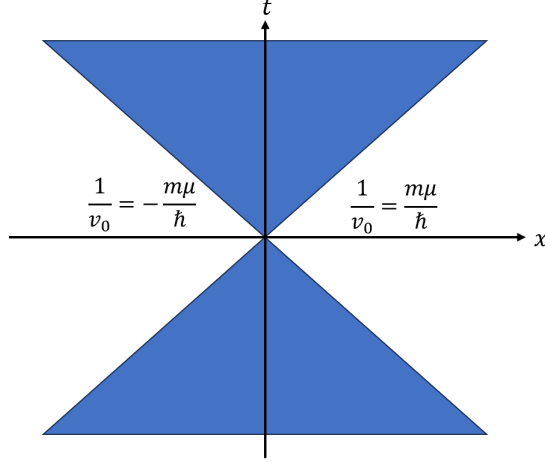


Figura 3.1: La dinámica del modelo efectivo de la partícula libre polimérica se distingue de la partícula libre en la cuantización de Schrödinger, en que en la primera la pendiente está acotada; la partícula no puede salir de la zona permitida (zona sombreada); y existe una región prohibida (zona no sombreada). La velocidad v_0 esta restringida a tomar valores entre $-\hbar/m\mu < v_0 < \hbar/m\mu$.

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| \leq \frac{\hbar}{m\mu}. \quad (3.36)$$

Es importante enfatizar que el propagador semiclásico puede tener sentido aún en la región prohibida. Ello se puede realizar usando una extensión analítica como veremos en seguida.

Para evaluar el propagador en la región prohibida, extendemos la solución al plano complejo, es decir⁶

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= ip, & \tilde{S} &= iS, \\ H_{ef} &= \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu\tilde{p}}{2i\hbar} \right), \\ \tilde{S}_{ef} &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\tilde{p}\dot{x} - \frac{2i\hbar^2}{m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu\tilde{p}}{2i\hbar} \right) \right), \\ \tilde{S}_{ef} &= \tilde{p}\Delta x - \frac{2i\hbar^2\Delta t}{m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu\tilde{p}}{2i\hbar} \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

⁶Inspirada en [2].

siendo

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{p}} &= -\frac{\partial H_{ef}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tilde{p} = cte, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H_{ef}}{\partial \tilde{p}} = \frac{\hbar}{m\mu^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\mu \tilde{p}}{i\hbar} \right),\end{aligned}\quad (3.38)$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{S}_{ef}}{\partial x_b} &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial b} \Delta x + \tilde{p} - \frac{\hbar \Delta t}{m\mu} \operatorname{sen} \left(\frac{\mu \tilde{p}}{2i\hbar} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial b} = \tilde{p}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}_{ef}}{\partial x_a \partial x_b} &= \frac{\partial \tilde{S}_{ef}}{\partial x_a} = -\frac{im}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2}} = -\frac{m}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - 1}}\end{aligned}\quad (3.39)$$

donde se ha utilizado (3.38). Por lo que el propagador semiclásico (2.55) en la extensión analítica es

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\text{Poli}}^{\text{sc}}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \tilde{F}_{\text{Poli}}(x_b, t_b; x_a, t_a) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \tilde{S}_{ef} \right), \\ \tilde{F}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \mu \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left(\left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - 1 \right)^{-1/4},\end{aligned}\quad (3.40)$$

con $\tilde{S}_{ef}$ como (3.37). Esta forma del factor de fluctuación se refleja gráficamente en el lado izquierdo de la singularidad⁷ en la gráfica (fig. 3.2) y completa el comportamiento en todas partes de esta cantidad de interés.

3.5. Comparación con el resultado exacto

El propagador exacto para una partícula libre polimérica es bien conocido en la literatura [34, 33] y tiene la forma de

$$K(x_b, x_a; t_b, t_a) = i^{-\Delta x/\mu} J_{-\Delta x/\mu} \left(\frac{\hbar \Delta t}{m\mu^2} \right) \exp \left[-i \left(\frac{\hbar \Delta t}{m\mu^2} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Aquí $J_\alpha(\beta)$ es la función de Bessel de la especie de orden α y argumento β .

⁷Es decir cuando $\Delta x = \frac{\hbar}{m\mu} \Delta t$

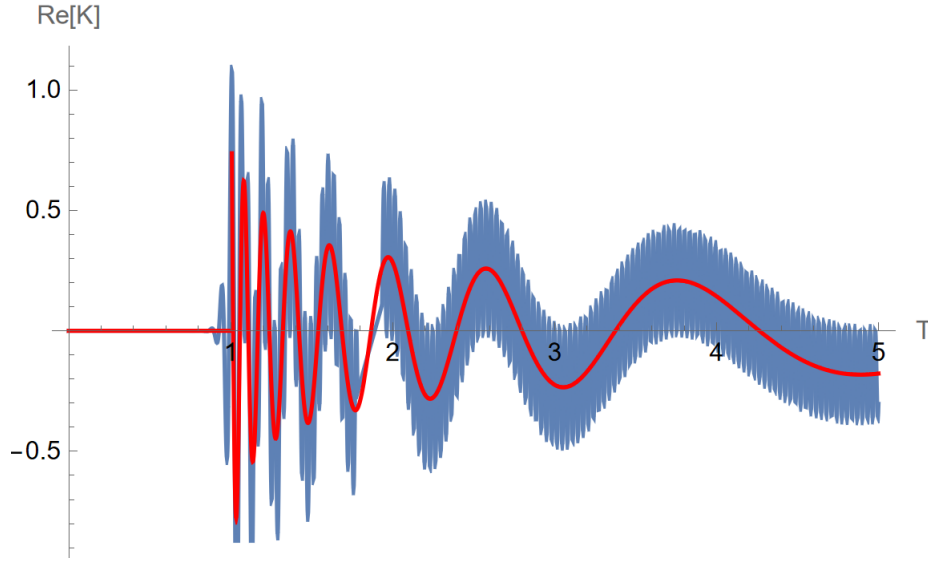


Figura 3.2: Parte real del propagador exacto (azul) (3.41), comparado con parte real del propagador semiclásico (rojo) (3.31) contra $T = \hbar(\Delta t)/m$, $\Delta t = t_b - t_a$, $\Delta x = (x_b - x_a) = 10$ y considerando $\mu = 10^{-1}$.

La figura (3.2) nos ilustra cómo la aproximación semiclásica aproxima el resultado analítico. El determinante extendido de Van Vleck-Pauli-Morette puede incluir Hamiltonianos más generales que el estandar, como por ejemplo la partícula libre polimérica que hemos discutido aquí. En los siguientes capítulos abordaremos con la misma metodología el caso del modelo cósmico FLRW cuantizado por lazos.

Capítulo 4

Cosmología cuántica por lazos Hamiltoniana del modelo FLRW

En este capítulo se analizará el modelo simplificado FLRW (sLQC, por sus siglas en inglés) [2]. En la ruta hacia la obtención del propagador polimérico del modelo FLRW usando la integral de trayectoria, es conveniente discutir la formulación Hamiltoniana del modelo. Los elementos de matriz del operador exponencial de la constricción Hamiltoniana son el análogo de aquellos para el operador de evolución, en el cual algunos elementos de matriz se desprecian por ser subdominantes. Después de recordar brevemente el modelo FLRW clásico, su formulación canónica se presenta de manera concisa en términos de variables de Ashtekar-Barbero. En este punto el álgebra de flujos y holonomías y su representación discreta en el espacio de Hilbert polimérico quedan establecidas.

4.1. Modelo cósmico FLRW

El modelo cósmico FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker) parte del principio cosmológico, el cual consiste en considerar que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas. Este universo es modelado por la métrica FLRW

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (4.1)$$

siendo $N(t)$ la función lapso, una función arbitraria que revela la invarianza del modelo bajo reparametrizaciones temporales, $a(t)$ el factor de escala

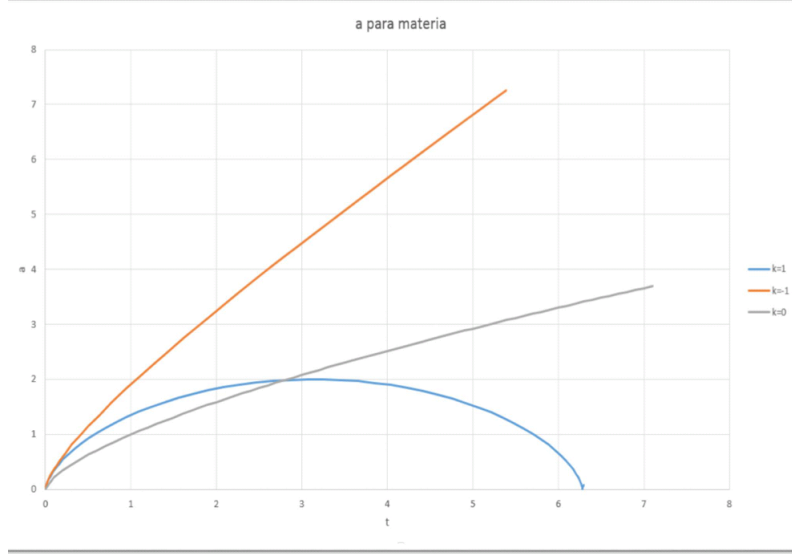


Figura 4.1: Comportamiento del factor de escala $a(t)$, para un universo dominado por materia, la línea naranja representa al universo abierto con $k = -1$, la línea gris al universo plano $k = 0$, y la línea azul al universo cerrado $k = 1$. Usamos $N = 1$.

y k la curvatura espacial, que determina si el universo es cerrado esférico ($k = 1$), abierto hiperbólico ($k = -1$) ó abierto plano ($k = 0$)¹

La dinámica del universo FLRW se engloba en las ecuaciones de Friedman, que se obtiene cuando consideramos al universo como formado por fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión P , tal que (4.1) en las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ ($c = 1$) nos arroja

$$\frac{\dot{a}^2}{N^2} + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2, \quad (4.2)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{aN^2} - \frac{2\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP. \quad (4.3)$$

Las soluciones de estas ecuaciones son bien conocidas, para el factor de escala dependiente del tiempo $a(t)$, considerando un dominio de materia, radiación o vacío según la forma considerada para la ecuación de estado $P = P(\rho)$. En la figura (4.1) puede notarse el comportamiento del factor de escala $a(t)$, en el caso dominado por materia

¹Las observaciones recientes de los telescopios PLANCK y WMAP [39, 41] apuntan a este modelo como el más adecuado para describir nuestro universo.

Podemos ver que el factor de escala se anula en el tiempo $t = 0$, (ver fig. 4.1). Este es uno de los motivos del porque se intenta llevar más allá la teoría de la relatividad general, entender el comportamiento de la gravedad a nivel cuántico es el propósito de la LQG, en particular la Cosmología Cuántica por Lazos (LQC, por sus siglas en inglés). Se intenta responder lo que sucedió en el “Big Bang”, donde la gravedad era muy intensa y la teoría clásica falla, dando lugar a divergencias de curvatura. En el caso FLRW el escalar de Ricci en función del factor de escala toma la forma

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (4.4)$$

Vemos que para $\dot{a}, \ddot{a} \neq 0$ un factor de escalar produce divergencias.

4.2. Formulación canónica del modelo FLRW

La formulación canónica de la relatividad general parte de un principio variacional del cual derivan las ecuaciones de campo. Este principio permite definir variables canónicas como un paso previo a la cuantización canónica. La acción correspondiente se conoce como la acción de Einstein-Hilbert [50, 51], y tiene la forma

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}_4} dx^4 \sqrt{-g} R \quad (4.5)$$

Aquí $\mathcal{M}_4$ es el espacio-tiempo, R el escalar de curvatura de Ricci y g el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ de $\mathcal{M}_4$.

Para obtener la acción (4.5) en el modelo FLRW, requerimos del escalar de Ricci (4.4) y el determinante de la métrica dada como

$$g = -\frac{N^2 a^6 r^4}{1 - kr^2} \sin^2 \theta. \quad (4.6)$$

Por lo que la acción de Einstein-Hilbert (4.5) modificado por un término de materia, queda como

$$\begin{aligned} S_{EH} + S_{mat} &= \frac{3}{8\pi G} \int r^2 \sin \theta \frac{Na^3}{\sqrt{1 - kr^2}} \left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right) d^4x + \int d^4x \mathcal{L}_{mat} \\ &= -\frac{3V_0}{8\pi G} \int \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} - aNk \right) dt + \int d^4x \mathcal{L}_{mat} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consideramos a $V_0 = \int_{v_0} \frac{r^2}{\sqrt{1-kr^2}} \sin \theta dr d\theta d\phi$ como un volumen acotado, tomando una parte del espacio a estudiar, de tal forma que V_0 no diverja. Esto es posible gracias a que el espacio es homogéneo. Las consecuencias físicas deben de ser independientes de V_0 .

Pasamos ahora a definir variables canónicas para el sector gravitacional. El lagrangiano es el integrando puramente gravitacional de (4.7), es decir

$$L_g(a, N, \dot{a}, \dot{N}) = -\frac{3V_0}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{N} - aNk \right), \quad (4.8)$$

por lo que el momento conjugado asociado a a es

$$p_a = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{3V_0}{4\pi G} \frac{\dot{a}}{N}, \quad (4.9)$$

y el momento conjugado asociado a N es

$$P_N = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{N}} = 0. \quad (4.10)$$

Observemos que de la definición del momento P_N , ec (4.10) no podemos despejar la velocidad $\dot{N}$ en términos de P_N ; se trata de una constricción primaria (en el lenguaje de Dirac). El Hamiltoniano canónico del modelo será

$$\begin{aligned} H_g(a, N, p_a, P_N) &= \dot{a}p_a + \dot{N}P_N - L_g, \\ &= -\frac{3V_0}{4\pi G} \frac{\dot{a}^2}{N} + \frac{3V_0}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{N} - aNk \right), \\ &= -\frac{3V_0}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{N} + aNk \right), \\ &= -\frac{2\pi G}{3V_0} \frac{Np_a^2}{a} - \frac{3V_0}{8\pi G} aNk. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observemos que H_g no depende de P_N . La evolución más general que incorpore (4.10) corresponde a un Hamiltoniano total definido como

$$H_T = H_g + H_m + \lambda \Phi, \quad \Phi = P_N \quad (4.12)$$

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes serán, usando los paréntesis de Poisson

$$\dot{N} = \{N, H_T\} = \frac{\partial H_T}{\partial p_N} = \lambda, \quad (4.13)$$

$$\dot{a} = \{a, H_T\} = \frac{\partial H_T}{\partial p_a} = -\frac{4\pi G}{3V_0} \frac{N p_a}{a}, \quad (4.14)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, H_T\} = -\frac{\partial H_T}{\partial a} = -\frac{2\pi G}{3V_0} \frac{N p_a^2}{a^2} + \frac{3V_0}{8\pi G} N k - \frac{\partial H_m}{\partial a}. \quad (4.15)$$

Observemos que la ecuación (4.13) únicamente establece la relación entre el tiempo cósmico y el asociado a la evolución H_T . Ahora, la constricción $\Phi = P_N$ debe ser preservada en el tiempo, es decir $\dot{\Phi} = 0$. Así

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, H_T\} = -\frac{\partial H_T}{\partial N} = \Psi, \quad (4.16)$$

$$\Psi = \frac{2\pi G}{3V_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3V_0}{8\pi G} a k - \frac{\partial H_m}{\partial N} = 0. \quad (4.17)$$

Una pregunta natural es ¿Cómo obtener las ecuaciones de Einstein del modelo FLRW a partir del formalismo canónico? [23].

Primero consideramos a la densidad de energía ρ como $\rho = E/a^3$ donde $E = \partial H_m / \partial N = H_m / N$ y a la presión como $P = -\partial E / \partial V = -(1/3Na^2)(\partial H_m / \partial a)$. Entonces de la constricción (4.17)

$$\frac{2\pi G}{3V_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3V_0}{8\pi G} a k = \frac{\partial H_m}{\partial N}, \quad (4.18)$$

que toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{aN} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3V_0} \rho \quad (4.19)$$

e identificamos como la ecuación de Friedman (4.2).

Recuperamos la segunda ecuación de Friedman (4.3) restando (4.16) a (4.15) como

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} &= -\frac{4\pi G}{3V_0} \left(\frac{1}{a^3} \frac{\partial H_m}{\partial N} - \frac{1}{Na^2} \frac{\partial H_m}{\partial a} \right) \\ &= -\frac{4\pi G}{3V_0} (\rho + 3P), \end{aligned} \quad (4.20)$$

Utilizando (4.2) en el primer término de la derecha de (4.20) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} + \frac{k}{a^2} \right) - 4\pi GP, \\ \frac{2\ddot{a}}{aN^2} - \frac{2\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2N^2} + \frac{k}{a^2} &= -8\pi GP.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Finalmente, consideramos la contribución H_m usando un campo escalar sin masa. La acción correspondiente es

$$S_m[\varphi] = \int dx^4 \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi.\tag{4.22}$$

El lagrangiano correspondiente es

$$L_m = \frac{a^3 V_0}{2N} \dot{\varphi}^2,\tag{4.23}$$

por lo que el momento conjugado y el hamiltoniano correspondiente a este lagrangiano son

$$\begin{aligned}p_\varphi &= \frac{a^3 V_0 \dot{\varphi}}{N}, \\ H_m &= \frac{N p_\varphi^2}{2a^3 V_0}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

De este modo

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H_T\} = \frac{\partial H_e}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{a^3 V_0}\tag{4.25}$$

$$\dot{p}_\varphi = \{p_\varphi, H_T\} = -\frac{\partial H_e}{\partial \varphi} = 0\tag{4.26}$$

Por lo que la constricción Ψ , ec (4.17), en términos de la contribución escalar queda

$$\Psi(a, p_a, \varphi, p_\varphi) : \frac{2\pi G}{3V_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{3V_0}{8\pi G} ak - \frac{p_\varphi^2}{2a^3 V_0} = 0\tag{4.27}$$

con p_φ constante. La ec. (4.25) indica que podemos elegir φ como tiempo interno.

Consideremos ahora, las variables de Ashtekar-Barbero, conexiones y triadas densitizadas para el modelo FLRW

$$A_a^i = cV_0^{-(1/3)}\tilde{\omega}_a^i, \quad (4.28)$$

$$E_i^a = pV_0^{-(2/3)}\sqrt{\tilde{q}}\tilde{e}_i^a, \quad (4.29)$$

donde $\tilde{\omega}_a^i, \tilde{e}_i^a$ son co-triadas y triadas compatibles con $\tilde{q}_{ab}$, donde $q_{ab} = a^2\tilde{q}_{ab}$, siendo q_{ab} la métrica espacial y adaptadas sobre un volumen V ($V = a^3V_0$). Es decir

$$\tilde{q}_{ab}\tilde{e}_i^a\tilde{e}_j^b = \delta_{ij}; \quad \tilde{\omega}_a^i = \delta^{ij}\tilde{e}_j^b\tilde{q}_{ab}, \quad i, j, a, b = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

Las variables p y c se obtienen en función del factor de escala $a(t)$ y su derivada temporal $\dot{a}(t)$ para este modelo como

$$\begin{aligned} |p| &= (V_0)^{2/3}a^2, \\ c &= V_0^{1/3}(V_0^{1/3}k + \gamma\dot{a}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde γ es el parámetro de Barbero-Immirzi y k la curvatura. El álgebra de c y p está dada por $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$ [2].

Es conveniente definir un par de variables ν y b como

$$\nu = \frac{a^3V_0}{2\pi G}, \quad b = -\frac{4\pi G}{3V_0}\frac{p_a}{a^2}, \quad (4.32)$$

estas permiten un mejor control de efectos cuánticos a grandes volúmenes [2, 3]. Se cumple que $\{\nu, b\} = -2$. Además tenemos una contribución escalar $\varphi, p_\varphi, \{\varphi, p_\varphi\} = 1$.

De (4.27) obtenemos que

$$3\pi Gb^2\nu^2 + \frac{3}{2}(2\pi G)^{1/3}\nu^{4/3}\Gamma - p_\varphi^2 = 0, \quad (4.33)$$

donde $\Gamma = V_0^{2/3}k$.

En el caso particular de un universo plano $k = 0$ (4.33) queda como

$$-3\pi Gb^2\nu^2 + p_\varphi^2 = 0. \quad (4.34)$$

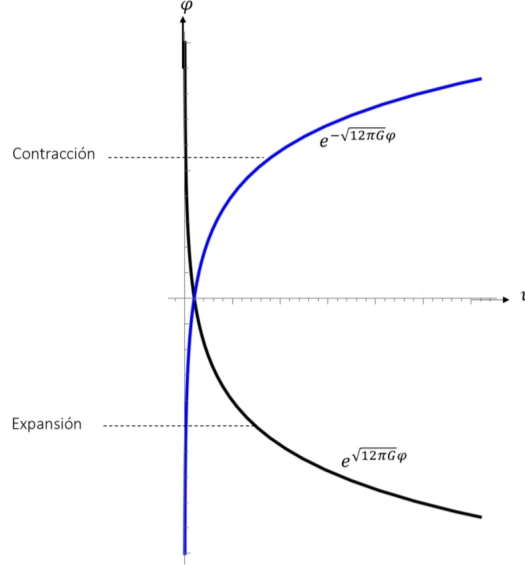


Figura 4.2: Representación gráfica de la solución clásica FLRW $\nu(\varphi)$ (ec. 4.39). Nótese que tenemos dos posibles soluciones, una de contracción (línea azul) y una de expansión (línea negra), ambas mostrando un comportamiento singular en $\nu = 0$.

De la constricción (4.34) podemos obtener las ecuaciones de movimiento clásicas para $(\nu, b, \varphi, p_\varphi)$. Para ello utilizamos las ecuaciones de Hamilton²

$$\dot{\varphi} = 2p_\varphi, \quad \dot{p}_\varphi = 0, \quad (4.35)$$

$$\dot{\nu} = 12\pi G b \nu^2, \quad \dot{b} = -12\pi G b^2 \nu. \quad (4.36)$$

De (4.34) obtenemos que $p_\varphi = \sqrt{3\pi G} b \nu$, de (4.36) $p_\varphi = -\frac{\dot{b}}{4\sqrt{3\pi G} b}$, y de la primera ecuación de (4.35)

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\dot{\varphi}}{2} = -\frac{\dot{b}}{4\sqrt{3\pi G} b}, \\ \int db \frac{1}{b} &= -\int d\tau \sqrt{12\pi G} \dot{\varphi}, \\ b &= e^{-\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

²Notar que hay un factor de 2 en $\dot{\nu}$ y $\dot{b}$, esto porque al construir el principio variacional (ver 5.15) el par $b\dot{\nu}$ va acompañado de $-1/2$.

Utilizando la regla de la cadena $\dot{\nu} = \dot{b}d\nu/db$, reemplazando $\dot{b}$ y resolviendo para ν

$$\begin{aligned} \dot{b} \frac{d\nu}{db} &= -12\pi G b^2 \nu \frac{d\nu}{db} = 12\pi G b \nu^2, \\ \nu &= \nu_0 \frac{1}{b}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente $\nu(\varphi)$ se obtiene reemplazando (4.37) en (4.38) como

$$\nu = \nu_0 e^{\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.39)$$

Las solución (4.39) se representa gráficamente en (4.2), notemos que ambas tienen una singularidad cuando el volumen tiende a cero, $\nu = 0$.

4.3. Cosmología cuántica por lazos para FLRW

En la teoría cuántica, el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{cin}$ es un producto tensorial de los espacios de Hilbert gravitacional y de materia

$$\mathcal{H}_{cin} = \mathcal{H}_{cin}^g \otimes \mathcal{H}_{cin}^m.$$

En la cuantización polimérica o de lazos³, $\mathcal{H}_{cin}^g$ es un espacio de Hilbert densamente numerable de cuadrado sumable. Y $\mathcal{H}_{cin}^m$ un espacio de Hilbert no numerable, de cuadrado integrable. De tal forma que un elemento que vive en el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{cin}$ cumple con

$$\|\Psi(\nu, \varphi)\| = \sum_{\nu} \int d\varphi |\Psi(\nu, \varphi)|^2, \quad (4.40)$$

$$\langle \nu' \varphi' | \nu \varphi \rangle = \delta_{\nu', \nu} \delta(\varphi', \varphi). \quad (4.41)$$

Nos damos cuenta que la base ortonormal del espacio de Hilbert densamente numerable $\mathcal{H}_{cin}^g$ está definida por una delta de Kronecker y el del espacio de Hilbert no numerable $\mathcal{H}_{cin}^m$ por una delta de Dirac.

Ahora pasaremos a la constricción propiamente cuántica partiendo de (4.34) tenemos que la constricción $\hat{C}$ actuando sobre un estado $\Psi(\nu, \varphi)$ es

³En la representación polimérica trabajamos con el álgebra de flujos y holonomías (3.2), en la cual $[\hat{\nu}, \widehat{W}_{\ell_0}] = -2\ell_0 \widehat{W}_{\ell_0}$, con $\widehat{W}_{\ell_0} \equiv \exp(i\ell_0 b)/\hbar$.

$$\widehat{C}\Psi(\nu, \varphi) = (\hat{p}_\varphi^2 - \widehat{\Theta})\Psi(\nu, \varphi), \quad (4.42)$$

donde $\hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi$ y $\widehat{\Theta}$ es un operador autoadjunto que actua sobre $\mathcal{H}_{cin}^g$ dado por⁴

$$\widehat{\Theta} = \frac{3\pi G}{\ell_0^2} \left(\sqrt{|\hat{\nu}|} \widehat{\text{sen}(\ell_0 b)} \sqrt{|\hat{\nu}|} \right)^2, \quad (4.43)$$

donde $\ell_0^2 = \gamma^2 \Delta$, $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_p^2$ es la brecha de área de la escala de Planck⁵.

El operador $\widehat{\Theta}$ toma su forma explícita como

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}\Psi(\nu) = -\frac{3\pi G}{4\ell_0^2} & \left(\sqrt{|\nu(\nu + 4\ell_0\hbar)|} |\nu + 2\ell_0\hbar| \Psi(\nu + 4\ell_0\hbar) - 2\nu^2\Psi(\nu) \right. \\ & \left. + \sqrt{|\nu(\nu - 4\ell_0\hbar)|} |\nu - 2\ell_0\hbar| \Psi(\nu - 4\ell_0\hbar) \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Nótese que ν toma valores discretos de $\nu = 4n\ell_0\hbar$, con $n \in \mathbb{Z}$.

⁴Esto se obtiene de (4.34), aplicando el álgebra de flujos y holonomías (3.2), donde $\widehat{W}_{\ell_0}|\nu\rangle = |\nu + 2\ell_0\hbar\rangle$. Entonces si consideramos que ℓ_0 muy pequeña y que $\hat{b} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_b$, $\widehat{\mathcal{O}}_b^2 = -\frac{1}{4\ell_0^2}(\widehat{W}_{2\ell_0} + \widehat{W}_{-2\ell_0} - \widehat{W}_{\ell_0}\widehat{W}_{-\ell_0} - \widehat{W}_{-\ell_0}\widehat{W}_{\ell_0}) = -\frac{1}{\ell_0^2}\widehat{\text{sen}(\ell_0 b)}$.

⁵Esta implementación se añade para que los efectos cuánticos de la gravedad se limiten a una escala de Planck.

Capítulo 5

Cosmología cuántica por lazos con integral de trayectoria del modelo FLRW

En este capítulo estudiamos el propagador del modelo FLRW cuantizado por lazos en el esquema Hamiltoniano del capítulo anterior. Lo expresamos en términos de una integral de funcional de una exponencial de una acción distinta de la clásica. En lugar de ésta aparece una versión modificada con correcciones planckianas pero definida en el espacio fase clásico. Ello permite considerarla como una acción efectiva. La justificación de esta interpretación se dará en el siguiente capítulo que aborda la aproximación semiclásica del propagador.

5.1. Propagador del modelo FLRW para $k = 0$

El propagador $K(\nu', \varphi'; \nu, \varphi)$ se define como el núcleo de la transformación que permite obtener un estado evolucionado a partir de uno inicial. Esto es

$$\Psi(\nu', \varphi') = \sum_{\nu} \int d\varphi K(\nu', \varphi'; \nu, \varphi) \Psi(\nu, \varphi), \quad \varphi' > \varphi. \quad (5.1)$$

Debido a que el modelo FLRW canónico presenta una constricción, el propagador físico se define (por el método del promedio en el grupo) [2], como

$$K(\nu', \varphi'; \nu, \varphi)_{fis} = \int d\alpha \langle \nu' \varphi' | e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{C}} | \nu \varphi \rangle, \quad (5.2)$$

siendo $\hat{C}$ la constricción Hamiltoniana del modelo.

Para construir el propagador consideramos la constricción $\hat{C}$ de manera análoga a un Hamiltoniano: técnicamente el coeficiente unidad se particiona en N subintervalos iguales de tamaño $\epsilon = 1/N$. Usamos la propiedad de composición (2.14)

en N intervalos e insertamos la relación de completitud $\mathbb{I} = \sum_{\nu} \int d\varphi |\nu, \varphi\rangle \langle \nu, \varphi|$ en medio de cada par de factores

$$\begin{aligned} \langle \nu' \varphi' | e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{C}} | \nu \varphi \rangle &= \langle \nu' \varphi' | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{C}} \dots e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{C}} | \nu \varphi \rangle \\ &= \sum_{\nu_{N-1}, \dots, \nu_1} \int d\varphi_{N-1} \dots d\varphi_1 \langle \nu_N \varphi_N | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{C}} | \nu_{N-1} \varphi_{N-1} \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle \nu_1 \varphi_1 | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{C}} | \nu_0 \varphi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde hemos definido a $\nu_N = \nu'$, $\nu_0 = \nu$, $\varphi_N = \varphi'$ y $\varphi_0 = \varphi$. Consideremos el subintervalo $(\varphi_i, \varphi_{i-1})$. Usando la forma de la constricción (4.42) tenemos

$$\langle \nu_i \varphi_i | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{C}} | \nu_{i-1} \varphi_{i-1} \rangle = \langle \varphi_i | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{p}_\varphi^2} | \varphi_{i-1} \rangle \langle \nu_i | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{\Theta}} | \nu_{i-1} \rangle. \quad (5.4)$$

Insertando la relación de completitud $\int_{\mathbb{R}} dp_\varphi | p_\varphi \rangle \langle p_\varphi | = \mathbb{I}$ en el primer factor de (5.4) y teniendo en cuenta que $\langle \varphi | p_\varphi \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} p_\varphi \varphi} / \sqrt{2\pi\hbar}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | \widehat{e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha p_\varphi^2}} | \varphi_{i-1} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dp_\varphi \langle \varphi_i | \widehat{e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha p_\varphi^2}} | p_\varphi \rangle \langle p_\varphi | \varphi_{i-1} \rangle, \\ &= \int_{\mathbb{R}} dp_\varphi e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha p_\varphi^2} \langle \varphi_i | p_\varphi \rangle \langle p_\varphi | \varphi_{i-1} \rangle, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_\varphi e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha p_\varphi^2} e^{\frac{i}{\hbar} p_\varphi \varphi_i} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\varphi \varphi_{i-1}}, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_\varphi e^{\frac{i}{\hbar} (\epsilon \alpha p_\varphi^2 + p_\varphi (\varphi_i - \varphi_{i-1}))}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Una observación importante en este punto es que usamos la completitud de $|p_\varphi\rangle$ en cada subintervalo $(\varphi_i, \varphi_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$, por lo que hay N integrales en p_φ ; una adicional que aquellas para φ_i .

Con respecto al factor gravitacional de (5.4), podemos desarrollar la exponencial en potencias de ϵ alrededor del valor cero como

$$\begin{aligned} \langle \nu_i | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \hat{\Theta}} | \nu_{i-1} \rangle &= \langle \nu_i | \nu_{i-1} \rangle - \frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \langle \nu_i | \hat{\Theta} | \nu_{i-1} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= \delta_{\nu_i, \nu_{i-1}} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \alpha \langle \nu_i | \hat{\Theta} | \nu_{i-1} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vemos que para calcular el segundo factor de (5.4) requerimos los elementos de matriz de $\hat{\Theta}$.

Aquí haremos uso de la formulación Hamiltoniana desarrollada en el capítulo anterior. Usando (4.44) obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \nu_i | \hat{\Theta} | \nu_{i-1} \rangle &= -\frac{3\pi G}{8\ell_0^2} \sqrt{\nu_{i-1}\nu_i} (\nu_{i-1} + \nu_i) (\langle \nu_i | \nu_{i-1} + 4\ell_0\hbar \rangle \\
&\quad - 2\langle \nu_i | \nu_{i-1} \rangle + \langle \nu_i | \nu_{i-1} - 4\ell_0\hbar \rangle), \\
&= -\frac{3\pi G}{8\ell_0^2} \sqrt{\nu_{i-1}\nu_i} (\nu_{i-1} + \nu_i) (\delta_{\nu_i, \nu_{i-1}+4\ell_0\hbar} \\
&\quad - 2\delta_{\nu_i, \nu_{i-1}} + \delta_{\nu_i, \nu_{i-1}-4\ell_0\hbar}). \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Para lograr un mejor manejo de las expresiones siguientes conviene usar la identidad $\delta_{\nu', \nu} = (\ell_0/\pi) \int_0^{\pi/\ell_0} db e^{-\frac{i}{2\hbar}b(\nu' - \nu)}$. Así la expresión (5.6) queda como

$$\begin{aligned}
\langle \nu_i | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\alpha\hat{\Theta}} | \nu_{i-1} \rangle &= \frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db e^{-\frac{i}{2\hbar}b(\nu_i - \nu_{i-1})} + \frac{3i\pi G}{8\ell_0^2\hbar} \epsilon\alpha \sqrt{\nu_{i-1}\nu_i} (\nu_{i-1} + \nu_i) \times \\
&\quad \times \left(\frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db e^{-\frac{i}{2\hbar}b(\nu_i - \nu_{i-1} + 4\ell_0\hbar)} - 2\frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db e^{-\frac{i}{2\hbar}b(\nu_i - \nu_{i-1})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db e^{-\frac{i}{2\hbar}b(\nu_i - \nu_{i-1} - 4\ell_0\hbar)} \right), \\
&= \frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db_i e^{-\frac{i}{2\hbar}b_i(\nu_i - \nu_{i-1})} [1 + \\
&\quad + \frac{3i\pi G}{2\ell_0^2\hbar} \epsilon\alpha \sqrt{\nu_{i-1}\nu_i} (\nu_{i-1} + \nu_i) \sin^2(\ell_0 b_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

A este punto usamos la estrategia de Feynman de identificar la expresión entre corchetes de la ecuación anterior como una exponencial. Entonces teniendo en cuenta que $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$, donde $\mathcal{O}(x^2)$ son términos no lineales de x y como $x(\epsilon)$, entonces

$$\langle \nu_i | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\alpha\hat{\Theta}} | \nu_{i-1} \rangle = \frac{\ell_0}{\pi} \int_0^{\pi/\ell_0} db_i e^{-\frac{i}{2\hbar}b_i(\nu_i - \nu_{i-1})} e^{\frac{3i\pi G}{2\ell_0^2\hbar} \epsilon\alpha \sqrt{\nu_{i-1}\nu_i} (\nu_{i-1} + \nu_i) \sin^2(\ell_0 b_i)} \quad (5.9)$$

Sustituyendo (5.9) y (5.5) en (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \nu' \varphi' | e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{C}} | \nu \varphi \rangle &= \left(\frac{\ell_0}{2\pi^2\hbar} \right)^N \sum_{\nu_{N-1}, \dots, \nu_1} \int d\varphi_{N-1} \cdots d\varphi_1 \int db_N \dots db_1 \times \\
&\quad \times \int dp_{\varphi_N} \dots dp_{\varphi_1} e^{\frac{i}{\hbar}S_N}, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

donde

$$S_N = \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_{\varphi_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\epsilon} - \frac{b_{n+1}}{2} \frac{\nu_{n+1} - \nu_n}{\epsilon} + \alpha \left(p_{\varphi_n}^2 - \frac{3\pi G}{2\ell_0^2} \epsilon \sqrt{\nu_n \nu_{n+1}} (\nu_n + \nu_{n+1}) \sin^2(\ell_0 b_{n+1}) \right) \right], \quad (5.11)$$

es una acción discreta adaptada a la partición y correspondiente al modelo FLRW cuantizado por lazos en forma Hamiltoniana del capítulo anterior.

Para pasar a una descripción en las variables continuas no acotadas del espacio fase clásico usamos la identidad de Jacobi para funciones periódicas $f(\theta, m)$, con variables acotadas θ y sumadas en m

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta, m) e^{im\theta} = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(y, x) e^{ixy}, \quad (5.12)$$

donde las variables de integración x, y del miembro derecho son continuas y no acotadas. Aplicamos este procedimiento a las parejas en (5.3) con $n = 1, \dots, N-1$, es decir

$$\frac{\pi}{\ell_0} \sum_{\nu_n} \int_0^{\pi/\ell_0} db_n \dots \rightarrow \int_{\mathbb{R}} d\nu_n \int_{\mathbb{R}} db_n \dots. \quad (5.13)$$

Tomando en cuenta el límite continuo $N \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$, podemos hacer los replazos $\epsilon \sum_n^N \rightarrow \int_0^1 d\tau$, $(\varphi_{n+1} - \varphi_n)/\epsilon \rightarrow d\varphi/d\tau$. De este modo el propagador para el modelo en cuestión toma la forma

$$K(\nu', \varphi'; \nu, \varphi) = \int d\alpha \int \mathcal{D}\nu(\tau) \int \mathcal{D}b(\tau) \int \mathcal{D}p_\varphi(\tau) \int \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S_{ef}}, \quad (5.14)$$

donde

$$S_{ef} = \int_0^1 d\tau \left(p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} b \dot{\nu} - \alpha \left(p_\varphi^2 - 3\pi G \nu^2 \frac{\sin^2 \ell_0 b}{\ell_0^2} \right) \right). \quad (5.15)$$

La acción (5.15) esta expresada en variables continuas del espacio fase clásico. La forma de (5.14) indica que S_{ef} reemplaza la acción clásica del sistema. Es de hacer notar que $\lim_{\ell_0 \rightarrow 0} S_{ef} = S_{cl}$, es decir en el límite continuo se obtiene la descripción clásica.

Capítulo 6

Propagador semiclásico de la cosmología FLRW y teoría efectiva

En el presente capítulo se deriva el el propagador polimérico del modelo cósmico FLRW usando la aproximación semiclásica discutida en el capítulo 2, esto es, como $K = F \exp(iS_{ef}/\hbar)$, con el factor de fluctuación F obtenido por el método de Van Vleck-Pauli-Morette. La dinámica efectiva provista por S_{ef} que captura correcciones cuánticas poliméricas, se discute en detalle. Destaca la evasión de la singularidad del modelo clásico, que queda sustituida por un rebote. Finalmente se compara el propagador semiclásico polimérico FLRW con el exacto. La aproximación semiclásica resulta ser notablemente cercana a la exacta.

Hemos visto en el capítulo 2 que el propagador de un sistema mecánico con Hamiltoniano general $H(x, p)$ admite también una forma funcional de su propagador, ec. (2.15). Usando la aproximación semiclásica el propagador toma la forma (2.20), con factor de fluctuación dado por (2.55). Con el fin de extender este esquema de aproximación en la cuantización por lazos del modelo FLRW considerada en los dos capítulos anteriores podemos hacer referencias a la figura (6.1).

Podemos ver en (fig. 6.1) que el propagador del modelo FLRW cuantizado por lazos análogo de (2.20) fue obtenido en el capítulo 5 con resultado (5.14) y (5.15). El siguiente paso sería desarrollar el análisis que lleva a (2.55), sin embargo esto no es necesario. Debido a que el análisis realizado en el capítulo 2 considera un Hamiltoniano general $H(x, p)$, esto incluye la partícula polimérica del capítulo 3 y el modelo FLRW en (5.14). Ello válida la aplicación de (2.55) a estos casos. Además, es notable que la aproximación semiclásica (2.20) sugiere como contribución dominante la dinámica y trayectoria correspondiente a la acción allí contenida. Para la partícula libre polimérica esto es ec. (3.23) y para FLRW la ec. (5.15). De allí su designación como "acciones efectivas". No sólo esta sino que la misma permite calcular el factor de fluctuación correspondiente con base en (2.55). En la segunda sección abordaremos la dinámica efectiva del modelo FLRW después el factor de fluctuación y finalmente comparamos los propagadores semiclásico y analítico exacto que es conocido para esta versión simplificada del modelo FLRW [2].

6.1. Dinámica efectiva

De (5.15) podemos derivar¹ las ecuaciones de movimiento, α juega el papel de un multiplicador de Lagrange y se tiene una constricción Hamiltoniana $C_{ef} = p_\varphi^2 - (3\pi G\nu^2/\ell_0^2) \sin^2 \ell_0 b$. Así las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\dot{\varphi} = 2p_\varphi, \quad \dot{p}_\varphi = 0, \quad (6.1)$$

$$\dot{\nu} = \frac{6\pi G}{\ell_0} \nu^2 \sin(2\ell_0 b), \quad \dot{b} = -\frac{12\pi G}{\ell_0^2} \nu \sin^2(\ell_0 b). \quad (6.2)$$

Considerando que² $C_{ef} \approx 0$, obtenemos $p_\varphi = (\sqrt{3\pi G\nu}/\ell_0) \sin \ell_0 b$ y de (6.2)

¹Nótese que mediante el análisis variacional, las ecuaciones de Hamilton tienen un factor de $-1/2$ en b y $\dot{\nu}$. Es decir $-\dot{b}/2 = -\partial C_{ef}/\partial \nu$ y $\dot{\nu} = -2\partial C_{ef}/\partial b$.

²El símbolo $\approx$ significa que esta función no es cero en todo el espacio fase, sino que se anula en un subespacio o "superficie de constricción".

Modelo Mecánico	
Propagador	$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}[x(t)] \int \mathcal{D}[p(t)] e^{iS[x(t), p(t)]/\hbar},$ $S[x, p] = \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{x}p - H), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$
Propagador semiclásico	$K_{sc}(x_b, t_b; x_a, t_a) = F(x_b, x_a; t_b, t_a) e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a; t_b, t_a)},$ $F(x_b, x_a; t_b, t_a) = \int \mathcal{D}[\delta x] \int \mathcal{D}[\delta p] e^{\frac{i}{\hbar} S_{fl}(x_b, x_a; t_b, t_a)},$ $S_{fl}(x_b, x_a; t_b, t_a) = \int_{t_a}^{t_b} dt (\delta p \dot{\delta x} - H_{fl}(\delta x, \delta p)).$ $H_{fl}(\delta x, \delta p) = \frac{1}{2} (\partial_{x_{cl}}^2 H_{cl}) (\delta x)^2 + \frac{1}{2} (\partial_{p_{cl}}^2 H_{cl}) (\delta p)^2 + (\partial_{p_{cl} x_{cl}}^2 H_{cl}) \delta x \delta p$
Determinante de VV-P-M	$F(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar D}},$ $D = \left(-\frac{\partial^2 S_{cl}(x_b, t_b; x_a, t_a)}{\partial x_b \partial x_a} \right)^{-1}$

Figura 6.1: Esquema del método de aproximación del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette.

$$\begin{aligned}
\ell_0 \frac{\dot{b}}{\text{sen}(\ell_0 b)} &= -4\sqrt{3\pi G} p_\varphi = -2\sqrt{3\pi G} \dot{\varphi}, \\
\ell_0 \int db \frac{1}{\text{sen}(\ell_0 b)} &= -\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0), \\
\ln(\tan(\frac{\ell_0 b}{2})) &= -\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0), \\
\tan(\frac{\ell_0 b}{2}) &= e^{-\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)}, \\
b &= \frac{2}{\ell_0} \tan^{-1} \left(e^{-\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} \right). \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Para obtener $\nu(\varphi)$, primero obtenemos la ecuación de la órbita utilizando la regla de la cadena $\dot{\nu} = \dot{b} \frac{d\nu}{db}$ en (6.2) como

$$\begin{aligned}
\frac{d\nu}{db} \dot{b} &= \frac{6\pi G}{\ell_0} \nu^2 \text{sen}(2\ell_0 b), \\
\frac{d\nu}{db} &= -\nu \ell_0 \cot(\ell_0 b), \\
\nu &= \nu_0 \csc(\ell_0 b). \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{\nu_0}{2} \csc(\frac{\ell_0 b}{2}) \sec(\frac{\ell_0 b}{2}), \\
&= \frac{\nu_0}{2} \sqrt{\left(e^{-2\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} + 1 \right) \left(e^{2\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} + 1 \right)}, \\
&= \frac{\nu_0}{2} \sqrt{\left(e^{2\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} + 2 + e^{-2\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} \right)}, \\
&= \nu_0 \cosh(\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)). \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Notamos que la dinámica efectiva, ecs. (6.5), (6.3) evita singularidad, mientras que la dinámica clásica, ecs. (4.37), (4.39) no lo hace (ver fig. 6.2).

6.2. Factor de fluctuación

Puesto que el método de Van Vleck-Pauli-Morette del capítulo 2 requiere que las soluciones (6.5), (6.3) y la acción efectiva (5.15) se expresen en términos de valores frontera $\nu(\phi_{f,i}) = \nu_{f,i}$, procedemos a expresar las constantes de integración ν_0 y φ_0 en función de ellas, con $\phi = \phi_f - \phi_i$, como

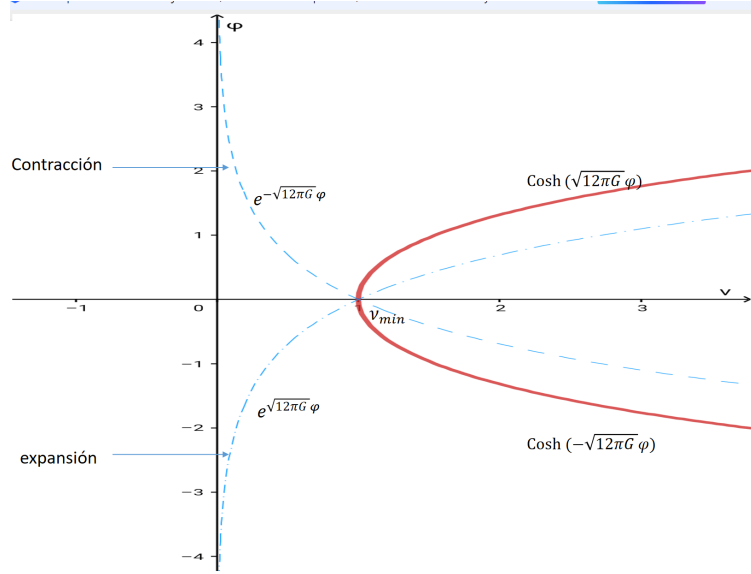


Figura 6.2: La línea punteada es el caso clásico, y la línea solida el caso efectivo, hemos optado por considerar a $\nu_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ y también interpretar la evolución no solo en un sentido, sino en ambos (es decir, la evolución del universo ampliándose o contrayéndose).

$$\begin{aligned}\nu_i &= \nu_0 \cosh(-\sqrt{12\pi G}\varphi_0), \\ \nu_f &= \nu_0 \cosh(\sqrt{12\pi G}(\phi - \varphi_0)).\end{aligned}\tag{6.6}$$

Dividimos ν_f entre ν_i de (6.6). Usando la forma exponencial del coseno hiperbólico llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\nu_f}{\nu_i} &= \frac{e^{\sqrt{12\pi G}(\phi - \varphi_0)} + e^{-\sqrt{12\pi G}(\phi - \varphi_0)}}{e^{-\sqrt{12\pi G}\varphi_0} + e^{\sqrt{12\pi G}\varphi_0}}, \\ &= \frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} + e^{-\sqrt{12\pi G}(\phi - 2\varphi_0)}}{1 + e^{2\sqrt{12\pi G}\varphi_0}}, \\ e^{\sqrt{12\pi G}\varphi_0} &= \sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}}}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

De (6.6) obtenemos ν_0 como

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \frac{2\nu_i}{e^{-\sqrt{12\pi G}\varphi_0} + e^{\sqrt{12\pi G}\varphi_0}} = \frac{2\nu_i e^{\sqrt{12\pi G}\varphi_0}}{1 + e^{2\sqrt{12\pi G}\varphi_0}}, \\
&= 2\nu_i \sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}}} / \left(\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - e^{-\sqrt{12\pi G}\phi}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}} \right), \\
&= \frac{\nu_i}{\sinh \sqrt{12\pi G}\phi} \sqrt{\left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \left(-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i} \right)}. \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Ya obtenidas las constantes de integración ν_0 (6.8) y φ_0 (6.7) en términos de los valores de frontera ($\nu_f, \nu_i, \phi = \phi_f - \phi_i$), teniendo en cuenta que $C_{ef} \approx 0$ y por las ecuaciones de movimiento (6.1) y (6.2) vemos que

$$\begin{aligned}
p_\varphi \dot{\varphi} &= 2p_\varphi^2 = \frac{6\pi G}{\ell_0} \nu^2 \sin^2(\ell_0 b), \\
&= -\frac{\nu}{2} \left(-\frac{12\pi G}{\ell_0} \nu \sin^2(\ell_0 b) \right) = -\frac{\nu}{2} \dot{b}. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Ahora expresamos la acción (5.15) en términos de los valores de frontera

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \int d\tau \left(p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} b \dot{\nu} \right) = -\frac{1}{2} \int d\tau \left(\nu \dot{b} + b \dot{\nu} \right), \\
&= \frac{1}{2} (\nu_i b_i - \nu_f b_f). \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Remplazando (6.7) en (6.3), sabiendo que $b_i = b(\varphi = 0)$ y $b_f = b(\varphi = \phi)$, obtenemos a la acción efectiva expresada en términos de valores de frontera

$$\begin{aligned}
S_{ef} &= \frac{\nu_i}{\ell_0} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}}} \right) \\
&\quad - \frac{\nu_f}{\ell_0} \tan^{-1} \left(e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} \sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}}} \right). \quad (6.11)
\end{aligned}$$

El propagador semiclásico de acuerdo a (2.20) y (2.55) para el caso FLRW tomará la forma

$$\begin{aligned}
K_{sc}(\nu_f, \nu_i; \varphi) &= F \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{ef}(\nu_f, \nu_i; \varphi) \right), \\
F &= \ell_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar}} \left(-\frac{\partial^2 S_{ef}}{\partial \nu_f \partial \nu_i} \right)^{1/2}. \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Para calcular el factor de fluctuación, definimos $\alpha \equiv e^{\sqrt{12\pi G}\phi}$, $\beta \equiv -e^{-\sqrt{12\pi G}\phi}$, y $\epsilon \equiv \sqrt{(\alpha\nu_i - \nu_f)/(\beta\nu_i + \nu_f)}$ tal que la acción efectiva (6.11) es

$$\ell_0 S_{ef} = \nu_i \tan^{-1} \epsilon - \nu_f \tan^{-1} (-\beta\epsilon) \quad (6.13)$$

Obtenemos el determinante, derivando respecto a los volúmenes inicial ν_i y final ν_f , es decir

$$\begin{aligned} \ell_0 \frac{\partial^2 S_{ef}}{\partial \nu_f \partial \nu_i} &= \frac{1}{1 + \epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f} + \frac{\beta}{1 + \beta^2 \epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i} - 2 \left(\frac{\nu_i \epsilon}{(1 + \epsilon^2)^2} + \frac{\nu_f \beta^3 \epsilon}{(1 + \beta^2 \epsilon^2)^2} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f} \\ &\quad + \left(\frac{\nu_i}{1 + \epsilon^2} + \frac{\beta \nu_f}{1 + \beta^2 \epsilon^2} \right) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \nu_i \partial \nu_f}, \\ &= \frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{\nu_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f} - \frac{1}{\nu_f} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i} \right) - \frac{2\epsilon(\beta \nu_i + \nu_f)^3}{\nu_i \nu_f (\alpha + \beta)^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde se ha utilizado la definición de ϵ , dependiente de α y β , por lo que solo es necesario calcular $\frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i}$ y $\frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f}$, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_i} &= \frac{\partial}{\partial \nu_i} \sqrt{\frac{\alpha \nu_i - \nu_f}{\beta \nu_i + \nu_f}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{\alpha}{\beta \nu_i + \nu_f} - \frac{(\alpha \nu_i - \nu_f) \beta}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right), \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{\alpha(\beta \nu_i + \nu_f) - \beta(\alpha \nu_i - \nu_f)}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{\nu_f(\alpha + \beta)}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right), \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_f} &= \frac{\partial}{\partial \nu_f} \sqrt{\frac{\alpha \nu_i - \nu_f}{\beta \nu_i + \nu_f}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{-1}{\beta \nu_i + \nu_f} - \frac{(\alpha \nu_i - \nu_f)}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right), \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{\beta \nu_i + \nu_f + (\alpha \nu_i - \nu_f)}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} \left(\frac{\nu_i(\alpha + \beta)}{(\beta \nu_i + \nu_f)^2} \right). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \ell_0 \frac{\partial^2 S_{ef}}{\partial \nu_f \partial \nu_i} &= -\frac{1}{(\beta \nu_i + \nu_f)} \sqrt{\frac{\beta \nu_i + \nu_f}{\alpha \nu_i - \nu_f}} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\alpha \nu_i - \nu_f}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\alpha \nu_i - \nu_f)(\beta \nu_i + \nu_f)}}, \\ &= -\frac{1}{2} \left(\nu_i^2 \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \left(-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

en la cual se han sustituido las definiciones de α , β y ϵ . Finalmente el propagador semiclásico (6.12) tiene un factor de fluctuación

$$F = \sqrt{\frac{\ell_0}{4\pi\hbar}} \left(\nu_i^2 \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \left(-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \right)^{-1/4}. \quad (6.16)$$

Siendo S_{ef} la acción efectiva (6.11). Este resultado fue obtenido por Ashtekar et al en [2], usando un método Hamiltoniano³, combinado con la integral de trayectoria. Este atajo, no es necesario como hemos demostrado aquí.

6.3. Región prohibida y continuación analítica

Por el factor de fluctuación (6.16), podemos notar que existen dos singularidades

$$e^{\sqrt{12\pi G}\phi} = \frac{\nu_f}{\nu_i}, \quad \text{y} \quad e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} = \frac{\nu_f}{\nu_i},$$

es decir existe una región efectivamente permitida, la cual está en

$$\frac{\nu_f}{\nu_i} > e^{-\sqrt{12\pi G}\phi}, \quad \text{y} \quad \frac{\nu_f}{\nu_i} < e^{\sqrt{12\pi G}\phi}.$$

Esto se puede ver en la figura (6.2), la región efectivamente permitida incluye el rebote. Sin embargo hay regiones prohibidas.

Para extender el análisis y la comparación con el resultado exacto, procedemos a hacer una continuación analítica. De forma similar a como se procedió en el problema de la partícula libre polimérica, proponemos

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= ib, \quad \tilde{\alpha} = i\alpha, \quad \tilde{p}_\varphi = ip_\varphi, \quad \tilde{S}_{ef} = iS_{ef}, \\ C &= H_{ef} = \tilde{p}_\varphi^2 - \frac{3\pi G\nu^2}{\ell_0^2} \sin^2\left(\frac{\ell_0 \tilde{b}}{i}\right), \\ \tilde{S}_{ef} &= \int d\tau \left(\tilde{p}_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \tilde{b} \dot{\nu} + \tilde{\alpha} \left(\tilde{p}_\varphi^2 - \frac{3\pi G\nu^2}{\ell_0^2} \sin^2\left(\frac{\ell_0 \tilde{b}}{i}\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Cuya solución es

³Ver apéndice A, del artículo mencionado.

$$\begin{aligned}
\nu(\varphi) &= \nu_0 \sinh(\sqrt{12\pi G(\varphi - \varphi_0)}), \quad \tilde{b}(\varphi) = \frac{2}{\ell_0} \tanh^{-1} \left(e^{-\sqrt{12\pi G}(\varphi - \varphi_0)} \right), \\
e^{-\sqrt{12\pi G}\varphi_0} &= \sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}{e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}}, \\
\nu_0 &= \frac{\nu_i}{\sinh(\sqrt{12\pi G}\phi)} \sqrt{\left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i \right) \left(e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i \right)}. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

La acción efectiva en la zona efectivamente prohibida será

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{ef} &= \frac{\nu_i}{\ell_0} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}} \right) \\
&\quad - \frac{\nu_f}{\ell_0} \tanh^{-1} \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} \sqrt{\frac{e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \nu_f/\nu_i}} \right) \quad (6.19)
\end{aligned}$$

con $\phi = \phi_f - \phi_i$

Notemos que (6.11) es similar a (6.19), es decir⁴

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{ef}(\nu_f, \nu_i; \phi) &= i S_{ef}(\nu_f, \nu_i; -\phi) \\
\frac{\partial^2 \tilde{S}_{ef}(\nu_f, \nu_i; -\phi)}{\partial \nu_f \partial \nu_i} &= i \frac{\partial^2 S_{ef}(\nu_f, \nu_i; \phi)}{\partial \nu_f \partial \nu_i} \\
&= -\frac{1}{2\ell_0} \left(\nu_i^2 \left(e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \right)^{-1/2} \quad (6.20)
\end{aligned}$$

Por lo que el propagador semiclásico en la extensión analítica será

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{sc} &= \tilde{F} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \tilde{S}_{ef}(\nu_f, \nu_i; \phi) \right), \\
\tilde{F} &= \sqrt{\frac{\ell_0}{4\pi\hbar}} \left(\nu_i^2 \left(e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i} \right) \right)^{-1/4} \quad (6.21)
\end{aligned}$$

con $\tilde{S}_{ef}(\nu_f, \nu_i; \phi)$ como (6.19).

⁴Esto, si definimos a $\tilde{\phi} = -\phi$, y usamos que $\tanh^{-1}(ix) = i \tan^{-1}(x)$

6.4. Comparación con el resultado exacto sLQC

Este modelo está bien estudiado y se conoce el resultado analítico exacto del propagador [2], el cual tiene la forma

$$\begin{aligned} K(\nu_f, \phi_f, \nu_i, \phi_i) &= -2\sqrt{n_i n_f} \int_0^\infty \frac{dk}{\sinh(\pi k)} P_{n_f}(k) P_{n_i}(k) k e^{ikt} \\ &= -\frac{\sqrt{n_i n_f}}{\pi^2} P_{n_f}(-i\partial_t) P_{n_i}(-i\partial_t) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} - i\frac{t}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

con $\nu_i = 4\ell_0 \hbar n_i$, $\nu_f = 4\ell_0 \hbar n_f$, $t = \sqrt{12\pi G}(\phi_f - \phi_i)$ y $\psi^{(1)}(z) = d \log \Gamma(z)/dz$, siendo $\Gamma(z)$ la función Gamma, y

$$P_n(k) = \frac{1}{ik(2n)!} \left(\frac{d^{2n}}{ds^{2n}} \Big|_{s=0} \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{ik} \right) = \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!(2n-m)!} \prod_{l=1}^{2n-1} (ik + m - l),$$

En la fig. (6.3) podemos apreciar la eficiencia de la aproximación semiclásica que captura las características esenciales del propagador analítico exacto. La coincidencia es notable⁵. En este trabajo este resultado se obtuvo completamente en el esquema de integral de trayectoria, un contraste con el método combinado, Hamiltoniano e integral de trayectoria, de Ashtekar et al [2].

⁵Nótese la aparente discontinuidad en la zona de empalme del propagador en la zona efectivamente permitida con la prohibida, esto se debe al problema computacional en Mathematica en cuanto se trata de infinitos.

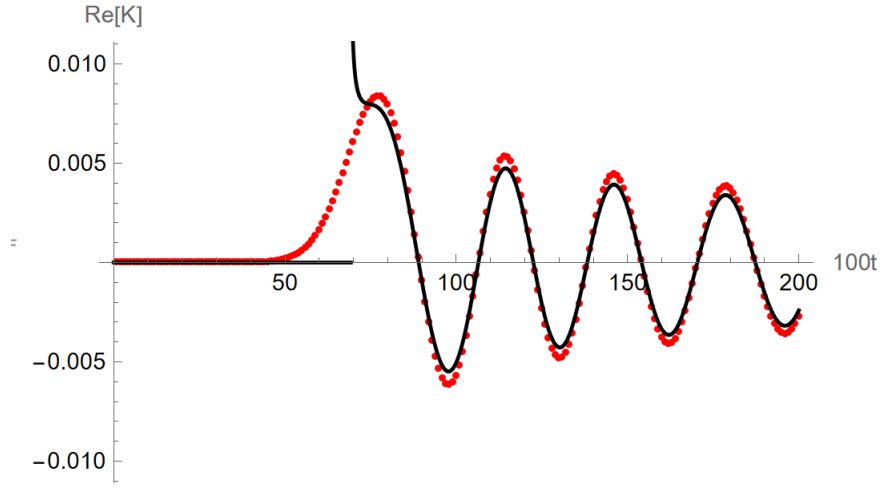


Figura 6.3: Parte real del propagador exacto (línea roja punteada), y el propagador semiclásico (línea negra sólida), en función del tiempo re-escalado $100t$. Usamos $\nu_i = 4\ell_0\hbar n_i$, $\nu_f = 4\ell_0\hbar n_f$ y $t = \sqrt{12\pi G}(\phi_f - \phi_i)$. Hemos considerado $n_i = 10$ y $n_f = 20$. Nótese la presencia de la singularidad en $t = \ln(2) \simeq 0.6931$.

Capítulo 7

Discusión, conclusiones y perspectivas

En la presente tesis se ha analizado un aspecto particular de LQC, y es el haber obtenido una forma analítica del propagador semiclásico del modelo cósmico FLRW $k = 0$, cuantizado a la lazos, ya anteriormente estudiada por Ashtekar et al en [2]. Sin embargo, en esta tesis se ha obtenido mediante un método distinto basado completamente en integral de trayectoria, en [30, 32, 43, 44].

En el capítulo 2 después de recordar brevemente la técnica de aproximación semiclásica en el formalismo hamiltoniano hemos retomado la metodología correspondiente de integral de trayectoria de [4]. Se ha demostrado que la fórmula del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette es válida para cualquier Hamiltoniano analítico¹ $H(x, p, t)$.

En el capítulo 3 se ha utilizado la formula obtenida para el determinante de Van Vleck-Pauli-Morette, para una partícula libre polimérica. El propagador semiclásico captura el comportamiento esencial del propagador exacto (ver fig. 3.2) [33, 34].

En los capítulos 4 y 5, recordamos el tratamiento cuántico, Hamiltoniano y de integral de trayectoria, respectivamente para el modelo cósmico FLRW [49, 50, 51]. En el capítulo 4 se presenta su análisis canónico [23]. Expresamos la dinámica clásica en términos de variables de Ashtekar-Barbero. Posteriormente pasamos a su cuantización por lazos [18, 19, 20, 22].

En el capítulo 5 expresamos el propagador FLRW en forma funcional [2].

Finalmente, en el capítulo 6, se obtiene la dinámica efectiva del modelo FLRW $k = 0$ cuantizado a la lazos, llegando al resultado del rebote cósmico, en el cual la singularidad del “Big Bang”, es remplazada por dicho rebote (“Big Bounce”) (fig. 6.2). Se emplea el método de aproximación semiclásica en integral de trayectoria desarrollado en el capítulo 2. El propagador semiclásico obtenido coincide con el

¹Aquí analizamos tres modelos distintos, el de la partícula libre, partícula libre polimérica y modelo cósmico FLRW $k = 0$ a la lazos simplificado (ver fig. 7.1).

Modelo	Propagador exacto	Propagador semiclásico $K_{sc} = F \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{ef}\right)$
Partícula libre no relativista	$K = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)$	$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$ $F = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}$
Partícula libre polimérica	$K = i^{-\Delta x/\mu} J_{-\Delta x/\mu}\left(\frac{\hbar \Delta t}{m\mu^2}\right) \exp\left[-i\left(\frac{\hbar \Delta t}{m\mu^2}\right)\right]$ $J_\alpha(\beta)$ es la función de Bessel de la especie de orden α y argumento β.	$S_{ef} = \frac{\hbar}{\mu} \sin^{-1}\left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \Delta x$ $-\frac{\Delta t \hbar^2}{m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}\right)$ $F = \mu \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \left(1 - \left(\frac{m\mu}{\hbar} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right)^{-1/4}$
FLRW, $k=0$, Cuantizado a la lazos simplificado	$K = -2\sqrt{n_i n_f} \int_0^\infty \frac{dk}{\sinh(\pi k)} P_{n_f}(k) P_{n_i}(k) k e^{ikt}$ $= -\frac{\sqrt{n_i n_f}}{\pi^2} P_{n_f}(-i\partial_t) P_{n_i}(-i\partial_t) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} - i\frac{t}{2\pi}\right)$ con $\nu_i = 4\ell_0 n_i$, $\nu_f = 4\ell_0 n_f$, $t = \sqrt{12\pi G}(\phi_f - \phi_i)$, $\psi(z) = d \log \Gamma(z)/dz$; $P_n(k) = \frac{1}{ik(2n)!} \left(\frac{d^{2n}}{ds^{2n}}\right)_{s=0} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{ik}$ $= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!(2n-m)!} \prod_{l=1}^{2n-1} (ik+m-l),$	$S_{ef} = \frac{\nu_i}{\ell_0} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}}}\right)$ $-\frac{\nu_f}{\ell_0} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_i}{\nu_f}}{-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_i}{\nu_f}}}\right)$ $F = \sqrt{\frac{\ell_0}{4\pi\hbar}} \left(\nu_i^2 \left(e^{\sqrt{12\pi G}\phi} - \frac{\nu_f}{\nu_i}\right) \left(-e^{-\sqrt{12\pi G}\phi} + \frac{\nu_f}{\nu_i}\right)\right)^{-1/4}$

Figura 7.1: Propagador exacto y semiclásico de partícula libre, partícula libre polimérica y FLRW $k = 0$ a la lazos, simplificado.

resultado de Ashtekar et al [2], pero a diferencia de este no se utilizan métodos Hamiltonianos, sino exclusivamente de integral de trayectoria.

Tanto para la partícula libre polimérica como para el modelo cosmológico FLRW, se tiene una región prohibida en la que el comportamiento cuántico cambia y técnicamente se describe mediante una continuación analítica pertinente.

Las perspectivas a futuro es que este método (capítulo 2) de aproximación semiclásica en integral de trayectoria, pueda ser aplicado a modelos de mayor interés como lo es el modelo cósmico no soluble [17], interior de agujero negro de Schwarzschild [9, 10, 37], FLRW abierto o cerrado [21], Bianchi [16], o modelos mecánicos como oscilador armónico [35] y partícula libre relativista [36].

La dificultad técnica de este método radica en que el sistema tiene que ser integrable, para expresar la acción en términos de valores frontera (q_f, q_i) , para utilizar la formula del determinante de Van Vleck-Pauli-Morette (2.55). Estudiar una salida a este limitante es de gran interés.

Capítulo 8

Bibliografía

Bibliografía

- [1] Bojowald, M.; *Absence of a Singularity in Loop Quantum Cosmology*; Phys-RevLett.86.5227; 2001
- [2] Ashtekar, A., Campiglia, M., Henderson, A.; *Path integrals and the WKB approximations in loop quantum cosmology*; PRD 82, 124043; 2010
- [3] Ashtekar, A., Corichi, A., Singh, P.; *Robustness of key features of loop quantum cosmology*; PRD, 77, 024046; 2008
- [4] Kleinert, Hagen; *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, Freie Universit at Berlin, 2006, Tercera edición.
- [5] Ashtekar, A., Pullin, A.; *Loop Quantum Gravity. The first 30 years*; 100 years of General Relativity; World Scientific publishing, 2017
- [6] Ashtekar, A.; *New Variables for classical and Quantum Gravity*; PRL, vol. 57, No. 18; 1986
- [7] Ashtekar, A., Bianchi, E.; *A Short Review of Loop Quantum Gravity*; 2021
- [8] Ashtekar, A.; *Introduction to Loop Quantum Gravity*, 2012
- [9] Böhmer, C., Vandersloot, K.; *Loop quantum dynamics of the Schwarzschild interior*; PRD 76, 104030; 2007
- [10] Corichi, A., Singh, P.; *Loop quantization of the Schwarzschild interior revisited*; Class. Quantum Grav. 33 055006 (20pp); 2016
- [11] Bojowald, M.; *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, Quantum Gravity*; Cambridge University Press, 2011
- [12] Thiemann, T.; *Modern Canonical Quantum General Relativity*; Cambridge University Press; 2007
- [13] Rovelli, C., Vidotto, F.; *Covariant Loop Quantum Gravity An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*, Cambridge University Press, 2015

- [14] Gambini, R., Pullin, J.; *A First Course in Loop Quantum Gravity*; Oxford University Press; 2011
- [15] Ashtekar, A., Gupta, B., Sreenath, V.; *Cosmic Tango Between the Very Small and the Very Large: Addressing CMB Anomalies Through Loop Quantum Cosmology*, Frontiers in Astronomy and Space Sciences Vol. 8, 685288; 2021
- [16] Kazuya, F., Toshifumi, F.; *Behavior of Bianchi type I spacetime by path integral*; PRD Vol. 85; 2012
- [17] Ashtekar, A., Pawłowski, T., Singh, P.; *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*; PRL 74, 084003, 2006
- [18] Ashtekar, A.; *Loop quantum cosmology: an overview*; Gen Relativ Gravity 41:707–741; 2009
- [19] Ashtekar, A., Bojowald, M., Lewandowski, J.; *Mathematical structure of loop quantum cosmology*; Adv. Theor. Math. Phys. 233-268, 2003
- [20] Banerje, K., Calcagni, G., Martin-Benito, M., *Introduction to Loop Quantum Cosmology*; SIGMA 8, 016, 73 pages; 2012
- [21] Ashtekar, A., Del Rio, A.; *Probing cosmological singularities with quantum fields: Open and closed FLRW universes*; 2022
- [22] Yang, J., Ding, Y., Ma, Y.; *Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology*; Physics Letters B 682, 1–7; 2009
- [23] Bojowald, M.; *Quantum Cosmology: A Fundamental Description of the Universe*; Springer; 2011
- [24] Olmedo, J., Martin-Benito, M., Maruga, Mena, G.; *Further improvements in the understanding of LQC*; Journal of Physics Conference Series, Vol. 314; 2011
- [25] Tavera, V.; *Correction to the Friedmann equations from loop quantum gravity for a universe with a free scalar field*; PRD 78(6); 2008
- [26] Bojowald; *Loop Quantum Cosmology*, Living Reviews in Relativity 8(1); 2005
- [27] Jeffreys, Harold; *On certain approximate solution of linear differential equation of the second order*; Proceedings of the London Mathematical Society 23 428-436; 1924
- [28] Choquard, Ph., Steiner, F.; *The story of van Vleck's and Morette-van Hove's determinants*; Helv Phys Acta Vol. 69; 1996
- [29] Kleinert, van den Bossche; *Global derivation of the fluctuation determinant from group property of time evolution*, arXiv:quant-ph/0002008v1 2feb 2000

- [30] Morette, C.; *On the definition and approximation of Feynman's path integrals*; PR, Vol. 81, No. 5; 1950
- [31] Visser, M.; *van Vleck determinants: geodesic focussing and defocussing in Lorentzian spacetimes.*; 1993
- [32] Van Vleck, J.; *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*; J. H National Academy of Sciences, Vol. 14, No. 2; 1928
- [33] Flores-Gonzales, E., Morales-Tecotl, H., Reyes, J.; *Propagators in polymer quantum mechanics*, Annals of Physics 336, 394–412; 2013
- [34] Flores-Gonzales, E., Morales-Tecotl, H., Reyes, J.; *Free Particle Propagator in Polymer Quantum Mechanics*, AIP 1473, 148-152; 2013
- [35] Parra, L., Vergara, D.; *Polymer quantum mechanics some examples using path integrals*; AIP 1577, 269; 2014
- [36] Morales-Tecotl, H., Rastgoo, S., Ruelas, JC.; *Path integral polymer propagator of relativistic and nonrelativistic particles*, PRD 95, 065026; 2017
- [37] Cortez, J., Cuervo, W., Morales-Tecotl, H., Ruelas, JC., *Effective loop quantum geometry of Schwarzschild interior*; PRD 95, 064041; 2017
- [38] Chung, A., Morales, H., Reyes, J.; *Espacios de Hilbert y las representaciones de Schrödinger y polimérica en Henri Poincaré y David Hilbert y los fundamentos de la física matemática*; pags. (379-419). UAM; 2016
- [39] Supernova Search Team; *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*; The Astronomical Journal Vol. 116, No 3; 1998
- [40] Abbott et al. (LIGO Scientific collaboration); *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*; PRL, Vol. 116, No. 6; 2016
- [41] Planck Collaboration; *Planck 2015 results. XVIII. Background geometry and topology of the universe*; Astronomy and Astrophysics, Vol. 594, A18; 2016
- [42] Feynman, R.; *Quantum Mechanics and Path Integrals*; Dover Publications; 1965
- [43] Grosche, C., Steiner, F.; *Handbook of Feynman Path Integrals*; Springer; 1998
- [44] Pauli, W.; *Selected Topics in Field Quantization*; Dover, Pauli Lectures Physics vol. 6; 1973
- [45] Griffiths, D. J.; *Introduction to quantum mechanics*, Cambridge University Press, 2018, tercera edición

- [46] Sakurai, J. J.; Napolitano, Jim; *Modern quantum mechanics*, Addison Wesley, 1994 segunda edición
- [47] Greiner, Reinhard; *Field quantization*, Springer, 1996
- [48] Polchinski, J.; *String Theory*, Cambridge University Press, 2005
- [49] Schutz, B.; *A first course in general relativity*; Cambridge University Press, third edition; 2022
- [50] Misner, C., Thorne, K., Wheeler J.A.; *Gravitation*; Princeton University Press; 2017
- [51] Wald, R.; *General Relativity*; The University of Chicago Press; 1984
- [52] Corichi, A., Nuñez, D.; *Introducción al formalismo ADM*; Revista Mexicana de Física 37, No.4, 720-747; 1991



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00156

Matrícula: 2222800199

Propagador polimérico
semiclásico y determinante
de Van Vleck-Pauli-Morette
para partícula libre y
modelo cósmico FLRW

En la Ciudad de México, se presentaron a las 10:00 horas
del día 3 del mes de octubre del año 2025 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL
DR. HECTOR HUGO HERNANDEZ HERNANDEZ
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: ANGEL JOEL SANJUAN GARCIA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al
interesado el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALBA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL
DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL

VOCAL

DR. HECTOR HUGO HERNANDEZ HERNANDEZ
DR. HECTOR HUGO HERNANDEZ HERNANDEZ

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA