
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

***DISIPACIÓN CUÁNTICA
DE UNA PARTÍCULA CARGADA***

Tesis que presenta:
Víctor Guadalupe Ibarra Sierra
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)



Asesor: **Dr. Alejandro Kunold Bello** (UAM-A).

Jurado Calificador:

Presidente: **Dr. Gerardo García Naumis**

IF-UNAM

Secretario: **Dr. Moisés Martínez Mares**

UAM-I

Vocal: **Dr. Remigio Cabrera Trujillo**

UAM-I, ICF-UNAM

Gerardo García Naumis
Moisés Martínez Mares
Remigio Cabrera Trujillo

México, D. F. Junio de 2013

A mis padres
Bernarda y Pablo

Agradecimientos

- *Este trabajo se lo dedico principalmente a mis padres Bernarda y Pablo.*
- A mi asesor *Alejandro Kunold Bello*, le agradezco su paciencia y apoyo en todo momento en la dirección de este trabajo.
- A los profesores *Gerardo García Naumis, Moisés Martínez Mares, Remigio Cabrera Trujillo*, por la lectura de la tesis y sus valiosos comentarios como miembros del jurado de sinodales.
- A José Luis Cardoso Cortés, Hugo Hernández Saldaña, Juan Carlos Sandoval Santana por las discusiones y valiosos comentarios.
- A CONACyT por el apoyo económico para realizar los estudios de maestría.
- Al coordinador de posgrado Abel Camacho Quintana y a la Comisión del Posgrado en Física de la UAM-Iztapalapa, por la facilidad de integral al profesor Alejandro Kunold como asesor externo.
- A María Iseo González Christen, le agradezco su paciencia y apoyo en los diferentes tramites académicos.
- A *Evelyn Huerta*, Guadalupe Figueroa, Dalia Marín, Juan Carlos Sandoval, Daniel Martínez, Martín Romero, Gaston de los Santos, Yoshua Chávez, Noé Atzin y Jorge Ávila, les agradezco su amistad y su apoyo.
- Al profesor Pedro Pereyra Padilla le agradezco sus valiosos consejos.

Índice general

Agradecimientos	V
Índice de figuras	IX
Resumen	XI
1. Introducción	1
1.1. Modelos de la disipación cuántica	2
1.2. Disipación de las partículas cargadas en el modelo Newtoniano . .	8
1.3. Contenido	11
2. Modelo teórico	13
2.1. Hamiltoniano de masa variable	13
2.2. Modelo de la masa dependiente del tiempo	15
2.3. Caso cuántico: transformaciones unitarias	18
2.4. Operador de evolución temporal	21
2.5. Función de Green y paquete de onda Gaussiano	30
2.5.1. Función de Green	30
2.5.2. Paquete de onda Gaussiano	31
3. Resultados numéricos	35
3.1. Campo magnético constante y campo eléctrico nulo	35
3.2. Campos magnético y eléctrico constantes	40
3.3. Campo magnético dependiente del tiempo.	42
4. Conclusiones y perspectivas	47
4.1. Conclusiones	47
4.2. Perspectivas	48
Apéndices	50

ÍNDICE GENERAL

A. Transformaciones unitarias	53
B. Cálculo de la función de Green	59
C. Artículo: Quantum and classical dissipation of charged particles	65
C.1. Resumen	65
C.2. Abstrac	65
C.3. Artículo: Annals of Physics 335(2013) 86-107	66
Bibliografía	89

Índice de figuras

1.1. Esquema ilustrativo de un sistema cuántico abierto.	5
3.1. Solución numérica de las ecuaciones diferenciales en el caso cuántico. Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$. .	37
3.2. Trayectoria 2D para un electrón en un semiconductor de <i>GaAs</i> . Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$ y $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$	38
3.3. Gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de <i>GaAs</i> . Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$	39
3.4. Solución numérica de las ecuaciones diferenciales en el caso cuántico. Con $\mathbf{B} = (90 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{E} = (100V/m) \hat{\mathbf{j}}$ y $\tau = 21.1ps$. . .	41
3.5. (a) Trayectoria 2D y (b) gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de <i>GaAs</i> . Con $\mathbf{B} = (90 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{E} = (100V/m) \hat{\mathbf{j}}$ y $\tau = 21.1ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$, $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$, $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$	41
3.6. Trayectoria 2D para un electrón en un semiconductor de <i>GaAs</i> . Con un campo magnético dependiente del tiempo dado por (3.5), potencial eléctrico ϕ nulo y $\tau = 21.1ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$ y $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$. .	44
3.7. Gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de <i>GaAs</i> . Con un campo magnético dependiente del tiempo dado por (3.5), potencial eléctrico ϕ nulo y $\tau = 21.1ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$	44

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio sobre la disipación cuántica para el movimiento bidimensional de una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético dependiente del tiempo. El problema es abordado a través de un Hamiltoniano de masa variable. En particular para la masa utilizamos un modelo que depende linealmente en el tiempo. Resolvemos este problema a partir de tres transformaciones unitarias aplicadas al Hamiltoniano. Estas transformaciones unitarias están compuestas por rotaciones, traslaciones, cizalladuras y dilataciones. Con este procedimiento reducimos el Hamiltoniano cuántico a cero y como consecuencia encontramos el operador de evolución temporal que contiene la información sobre la amortiguación y del campo electromagnético variable. A partir de este operador construimos la función de Green y como ejemplo estudiamos el movimiento de un paquete de onda Gaussiano. El resultado más relevante en este trabajo es que verificamos que el movimiento del centroide del paquete de onda Gaussiano y de la partícula cargada clásica siguen la misma trayectoria, comprobando con esto el teorema de Ehrenfest.

1

Introducción

El movimiento de partículas *en el vacío y en diversos medios con disipación* ha sido estudiado en física clásica y cuántica desde hace tiempo. Una clase importante de estos problemas, son aquellos sistemas donde partículas cargadas están inmersas en campos electromagnéticos externos. De gran interés es el estudio de sistemas cuánticos donde la disipación y el campo electromagnético externo juegan un rol crucial en el comportamiento físico de estas partículas. Ejemplos de estos problemas abarcan varios campos en mecánica cuántica tales como: el efecto Hall cuántico [1], la superconductividad de alta temperatura [2], el diamagnetismo [3], física atómica [4] y sistemas electrónicos en dos dimensiones [5].

Dentro de estos problemas cuánticos, nuestro interés y motivación son los sistemas de física del estado del sólido como metales y semiconductores. En estos sistemas la disipación de energía tiene diferentes contribuciones, tales como la interacción de los portadores de carga con la red de iones del material, la interacción de electrón-electrón a través del potencial Colombiano y eventualmente a través de radiación proveniente del exterior. Por lo que es muy importante el estudio de la disipación en estos sistemas del estado sólido. El amortiguamiento en sistemas clásicos es a menudo estudiado incluyendo un término de fricción proporcional a la velocidad en la segunda ley de Newton. Sin embargo, el tratamiento de la disipación en mecánica cuántica requiere un tratamiento más cuidadoso, ya que los Hamiltonianos independientes del tiempo conservan la energía. Para remediar es-

1. INTRODUCCIÓN

te problema, existen varios modelos que abordan el caso cuántico. Mostramos los principales modelos en la sección (1.1) con la finalidad de comprender como se estudia este fenómeno.

1.1. Modelos de la disipación cuántica

En esta sección revisamos brevemente los principales modelos en la literatura para estudiar el fenómeno de disipación en mecánica cuántica. Los objetivos de mostrar estos modelos son: Primero, mostrar que el tema de disipación en mecánica cuántica es sumamente más elaborado respecto al caso clásico. Segundo, ver las dificultades y limitaciones que posee cada uno de estos modelos en el estudio de sistemas con amortiguamiento.

En la sección (1.2) mostramos que se ha tratado de estudiar la disipación de partículas cargadas a través de uno de estos modelos sin poder reproducir correctamente su dinámica.

Hamiltoniano de Legget-Caldeira

El modelo de Legget-Caldeira fue propuesto inicialmente para estudiar la influencia de la disipación en el efecto del túnel cuántico [6, 7] y para analizar el efecto del amortiguamiento en la interferencia cuántica de dos paquetes de onda Gaussianos sujetos a un potencial armónico [8].

En este modelo se introduce la disipación de la siguiente forma. Consideramos que un sistema (S) de interés, por ejemplo una partícula con uno o pocos grados de libertad, esta inmerso en un sistema más grande formado por un conjunto de N grados de libertad, que se denomina baño térmico o reservorio (R). Este reservorio se modela por medio de un conjunto de N osciladores armónicos que interactúan (I) con el sistema de estudio. La interacción es tal que la dinámica del sistema de interés se ve afectada por cada grado de libertad del reservorio amortiguando su movimiento. Así, el sistema (S) puede transferir su energía al reservorio (R). El Hamiltoniano del sistema global descrito por las características anteriores es

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_I, \quad (1.1)$$

donde

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{q}), \quad (1.2)$$

es el Hamiltoniano del sistema (S) con \hat{p} y \hat{q} los operadores de momento y posición generalizados respectivamente, M es la masa de la partícula,

$$\hat{H}_R = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i \hat{x}_i^2 \right), \quad (1.3)$$

modela el reservorio con \hat{p}_i y \hat{x}_i los operadores de momento y posición respectivamente, y m_i es la masa de cada oscilador que forman el reservorio. El Hamiltoniano de interacción está dado por

$$\hat{H}_I = -\hat{q} \sum_{i=1}^N c_i \hat{x}_i + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i^2}, \quad (1.4)$$

donde el sistema y el baño están acoplados bilinealmente. El último término en (1.4) no depende de las coordenadas del baño y tiene que ser incluido para que $V(\hat{q})$ sea un potencial sin interacción con el reservorio [9, 10]. Notamos que el Hamiltoniano (1.1) es independiente del tiempo, por lo tanto el sistema global conserva la energía.

Una de las primeras dificultades de este formalismo es tratar con los múltiples grados de libertad del reservorio. Si utilizamos la ecuación de movimiento de Heisenberg [11] en el Hamiltoniano (1.1), obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema y de cada grado de libertad del baño. Al resolver estas ecuaciones [9] se eliminan los grados de libertad del baño obteniendo

$$M\ddot{\hat{q}} + M \int_0^t ds \gamma(t-s) \dot{\hat{q}}(s) + V'(\hat{q}) = \xi(t). \quad (1.5)$$

La relación anterior es la versión cuántica de la ecuación de Langevin generalizada para el operador \hat{q} , con $\gamma(t)$ el kernel del amortiguamiento y $\xi(t)$ una fuerza fluctuante que depende de las condiciones iniciales tanto del sistema como del reservorio. Al segundo término de esta ecuación se le denomina memoria de fuerza de fricción.

1. INTRODUCCIÓN

Otra dificultad de este modelo es el cálculo del kernel de amortiguamiento. Para esto, se considera que el número de osciladores que forman al baño tiende al infinito ($N \rightarrow \infty$) y con esto se puede emplear una distribución continua de modos. De esta manera utilizando una densidad espectral de modos del baño se calcula el kernel de amortiguamiento. Este kernel es generalmente usado en la disipación, sin embargo no estrictamente realista ya que la densidad espectral de modos diverge para frecuencias grandes.

Un trabajo reciente que se relaciona con la disipación de partículas cargadas y que emplea este modelo de Leggett-Caldeira, es el estudio de la termodinámica cuántica para un magneto-oscilador cargado en un baño térmico [12], donde se emplea diferentes kernel de amortiguamiento. En general en este trabajo, se concluye que la disipación y el efecto del campo magnético externos a bajas y a altas temperaturas es de gran importancia en sistemas cuánticos de física del estado sólido.

Sistema cuántico abierto

Otro método utilizado para estudiar la disipación en mecánica cuántica es a través de un sistema cuántico abierto. En general, un sistema cuántico abierto es un sistema S que esta acoplado a otro sistema ε llamado *entorno*. En realidad S representa un subsistema del sistema total $S + \varepsilon$ que generalmente se considera cerrado. El comportamiento de S está sujeto a su dinámica interna y a la interacción con su entorno.

Su descripción está dada por el Hamiltoniano del sistema total y su comportamiento físico es generalmente conocido como *dinámica del sistema reducido* y por este motivo a S se le conoce como *sistema reducido*. El Hamiltoniano total de este sistema se puede escribir como

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S \otimes \hat{I}_\varepsilon + \hat{I}_S \otimes \hat{H}_\varepsilon + \hat{H}_I(t), \quad (1.6)$$

donde \hat{H}_S es el Hamiltoniano del sistema reducido, \hat{H}_ε es Hamiltoniano del entorno y $\hat{H}_I(t)$ describe la interacción del sistema reducido y su entorno. Los operadores identidad \hat{I}_ε y \hat{I}_S dan las dimensiones correctas en el espacio de Hilbert al Hamiltoniano $\hat{H}(t)$ del sistema total $S + \varepsilon$. Un diagrama ilustrativo de un sistema cuántico abierto se muestra en la figura (1.1).

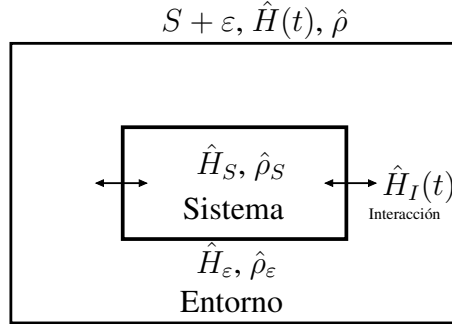


Figura 1.1: Esquema ilustrativo de un sistema cuántico abierto.

Una diferencia importante de un sistema cuántico abierto en contraste con un sistema cuántico cerrado es que su dinámica no puede ser descrita en términos de un *operador unitario de evolución temporal*¹ [13]. Por este motivo, resulta más útil plantear la ecuación de movimiento del sistema cuántico abierto en términos de su matriz de densidad.

La disipación, en este formalismo, se entiende que es el resultado de interacciones microscópicas entre el sistema en estudio y su entorno. Ya que los procesos disipativos implican *irreversibilidad*, y por lo tanto, una dirección en el tiempo, esto crea la necesidad de una nueva categoría en el estudio de sistemas cuánticos denominados *dinámica de semigrupos cuánticos*.

La forma de estudiar estos semigrupos es a través de la teoría de Lindblad [14]. En esta teoría la ecuación de von Neumann-Liouville que gobierna la evolución de un sistema cuántico cerrado se sustituye por una ecuación maestra [13] para el operador de densidad $\hat{\rho}$ en la imagen de Schrödinger. Las propiedades de este operador, Hermiticidad y una traza unitaria positiva son preservadas.

Esta ecuación maestra tiene la forma

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_S(t)] + \hat{\mathcal{D}}(\hat{\rho}_S), \quad (1.7)$$

donde $\hat{\rho}_S$ es el operador de densidad del sistema reducido, \hat{H} en este caso es el Hamiltoniano del sistema reducido más términos adicionales que son debidos al acoplamiento con su entorno y $\hat{\mathcal{D}}(\hat{\rho}_S)$ es el disipador dado por

¹En sistema cuántico cerrado una condición necesaria es que el operador de evolución temporal sea unitario, lo que implica conservación de probabilidad del sistema.

1. INTRODUCCIÓN

$$\hat{\mathcal{D}}(\hat{\rho}_S) = \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left[\hat{L}_j \hat{\rho}_S(t), \hat{L}_j^\dagger \right] + \left[\hat{L}_j, \hat{\rho}_S(t) \hat{L}_j^\dagger \right] \right\}. \quad (1.8)$$

En la ecuación anterior el operador de Lindblad \hat{L}_j describe el efecto del entorno con el sistema. En ciertas aplicaciones de (1.7), el operador \hat{L}_j representa procesos de emisión y absorción. *La gran dificultad que posee este formalismo es modelar estos operadores de Lindblad para el problema de interés.*

Dentro de los trabajos estudiados con la teoría de Lindblad se encuentran, la disipación del efecto túnel a través de una barrera de potencial parabólico [15], donde se muestra que la probabilidad del efecto túnel aumenta con la disipación y con la temperatura del baño térmico. Otro sistema es el oscilador armónico amortiguado [16], donde se analiza la incertidumbre, la entropía y decoherencia de este sistema. La disipación cuántica de una partícula Browniana [17] también han sido estudiada vía esta teoría.

Hamiltoniano de Kanai-Caldirola

En algunos casos es deseable estudiar la disipación a través de un solo Hamiltoniano. Con el fin de que el sistema pueda perder energía, tal Hamiltoniano debe depender explícitamente del tiempo. Históricamente el primer y quizá más utilizado Hamiltoniano dependiente del tiempo para estudiar la disipación en una dimensión, fue propuesto por Kanai [18] y Caldirola [19] (KC). Este es de la forma

$$H_{KC}(t) = \frac{p^2}{2m_o e^{t/\tau}} + e^{t/\tau} U(x), \quad (1.9)$$

con m_o la masa constante de la partícula, $U(x)$ el potencial y τ es el tiempo libre medio entre colisiones². Notamos que la masa en (1.9) es dependiente del tiempo $m(t) = m_o e^{t/\tau}$ y también el potencial $U(x, t) = e^{t/\tau} U(x)$.

Si aplicamos las ecuaciones canónicas de Hamilton obtenemos fácilmente la ecuación de movimiento clásica de una partícula con amortiguamiento y sujeta al potencial U

$$m_o \ddot{x} + \frac{m_o}{\tau} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1.10)$$

²A este tiempo también se le conoce como tiempo de relajación.

1.1 Modelos de la disipación cuántica

donde hemos cancelado el factor común $e^{t/\tau}$. Esta ecuación de movimiento se obtiene de la misma manera por medio de la segunda ley de movimiento de Newton incluyendo una fuerza de fricción que es proporcional a la velocidad.

En el caso cuántico, empleando (1.9) y utilizando la regla convencional de cuantización $p \rightarrow -i\hbar\partial_x$ y $x \rightarrow \hat{x}$, la ecuación de Schrödinger en una dimensión toma la forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_oe^{t/\tau}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)e^{t/\tau}\psi. \quad (1.11)$$

Algunos ejemplos físicos unidimensionales para esta ecuación son conocidos. Por ejemplo, la evolución temporal de la función de onda para una partícula Browniana ha sido estudiado en [20], donde su movimiento está dado por la ecuación clásica de Langevin

$$m_o\ddot{x} + \eta\dot{x} = F(t). \quad (1.12)$$

Aquí $F(t)$ es una fuerza aleatoria Gaussiana y $U(x) = 0$. El autor resuelve analíticamente la ecuación de Schrödinger, donde concluye que los efectos de estudiar una partícula Browniana en el caso cuántico con el Hamiltoniano de KC arroja los mismos resultados que utilizando los métodos de ecuación maestra (1.7).

Otro sistema muy estudiado a partir del Hamiltoniano KC, es el oscilador armónico amortiguado unidimensional [21–25] con $U(x) = m_o\omega_o^2x^2/2$. Las soluciones a este problema se han podido dividir en dos tipos. La primera de estas son del tipo pseudo-estacionarias, estudiadas por primera vez por Kener [21] y Stevens [22] donde, a través de cambios de variable resuelven la ecuación de Schrödinger. Alternativamente el segundo tipo de solución es a través de un paquete de onda [24, 26]

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left(\frac{m_o(\omega_o + \frac{i}{2\tau})e^{t/\tau}}{\pi\omega^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-m_o \left(\frac{\omega_o + \frac{i}{2\tau}}{2\hbar} \right) e^{1/\tau} (x - \xi(t))^2 \right. \\ & \left. + \frac{i}{\hbar} \left\{ m_o\dot{\xi}(t)e^{t/\tau} (x - \xi(t)) + \frac{1}{2}\hbar\omega_o t + \int^t \mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}, t') dt' \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Aquí $\xi(t)$ representa la solución clásica del oscilador armónico amortiguado y $\mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}, t)$ representa el *Lagrangiano clásico*

$$\mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}, t) = \left(\frac{1}{2m_o}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}m_o\omega_o^2\xi^2 \right) e^{t/\tau}. \quad (1.14)$$

1. INTRODUCCIÓN

Un aspecto importante de la solución anterior es que el Hamiltoniano en el oscilador amortiguado es cuadrático en sus coordenadas canónicas, por este motivo, la solución del paquete de onda posee a lo más términos cuadráticos en los eigenvalores de posición. Nosotros estamos interesados en este tipo de soluciones en cálculos posteriores.

Las dificultades de utilizar el Hamiltoniano de KC radica en que son muy pocos los ejemplos físicos en los que se puede modelar fácilmente. Uno de estos casos es el que se trata en este trabajo.

Como mencionamos al inicio de esta sección, la finalidad de hacer referencia estos tres modelos es mostrar que poseen limitaciones y dificultades. Sin embargo, nosotros estamos interesados en estudiar la disipación de partículas cargadas utilizando como referencia el modelo de KC, esto es, pretendemos utilizar un Hamiltoniano dependiente del tiempo. Así pues, en la siguiente sección mostramos la base fundamental de este trabajo y damos la propuesta de este Hamiltoniano dependiente del tiempo para el estudio cuántico en los siguientes capítulos.

1.2. Disipación de las partículas cargadas en el modelo Newtoniano

Nuestro objetivo es estudiar el movimiento de una partícula de masa m_o y carga q , inmersa en un campo electromagnético³ dependiente del tiempo $(\mathbf{E}(t), \mathbf{B}(t))$ y al mismo tiempo experimentando una fuerza lineal de amortiguamiento $(m_o/\tau) \dot{\mathbf{r}}$. Para analizar su dinámica en general se emplea la segunda ley de movimiento de Newton dada por

$$m_o \ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) - \frac{m_o}{\tau} \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.15)$$

A este modelo, en el que la fuerza de amortiguamiento es linealmente dependiente de la velocidad, lo denominamos *Newtoniano*, y no puede ser obtenido de un principio Hamiltoniano como veremos más adelante.

Un importante aspecto del estudio del movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos y eléctricos es su importancia en experimentos y análisis teórico de dispositivos en física del estado sólido.

³Este campo electromagnético no es función de la posición.

1.2 Disipación de las partículas cargadas en el modelo Newtoniano

Consideramos que el movimiento de la partícula cargada ocurre únicamente en el plano xy (2D) y que el campo magnético es perpendicular a su movimiento, esto es

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}, \quad (1.16)$$

cuyo potencial vectorial está dado por

$$\mathbf{A} = -\frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}. \quad (1.17)$$

El campo eléctrico en el plano de movimiento esta dado por

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\dot{B}}{2}y + E_x \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\dot{B}}{2}x - E_y \right) \hat{\mathbf{j}}, \quad (1.18)$$

con un potencial escalar

$$\phi = -E_x x - E_y y. \quad (1.19)$$

Aquí $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $B \equiv B(t)$, $E_x \equiv E_x(t)$ y $E_y \equiv E_y(t)$ son funciones sólo del tiempo.

Separando las componentes de la ecuación (1.15) utilizando (1.16) y (1.18), obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$m_o\ddot{x} + \frac{m_o}{\tau}\dot{x} - qB\dot{y} - \frac{q\dot{B}}{2}y - qE_x = 0, \quad (1.20)$$

$$m_o\ddot{y} + \frac{m_o}{\tau}\dot{y} + qB\dot{x} + \frac{q\dot{B}}{2}x - qE_y = 0. \quad (1.21)$$

Si deseamos desarrollar una teoría cuántica de la disipación para partículas cargadas, necesitamos encontrar el Hamiltoniano que genere las ecuaciones de movimiento (1.20) y (1.21). Sin embargo, la obtención de un Hamiltoniano para la partícula cargada bajo un campo electromagnético dependiente del tiempo y que incluya disipación no es tan directo como el uso del Hamiltoniano de KC.

Por ejemplo, Schuch y Moshinsky (SM) proponen un Hamiltoniano [27] en el problema 2D de una partícula con disipación en un campo magnético constante ($B = B_o$) de la forma

$$H_{SM} = \frac{1}{2m_o e^{t/\tau}} [\mathbf{p}_\tau - q\mathbf{A}_\tau]^2 + q\phi_\tau, \quad (1.22)$$

1. INTRODUCCIÓN

donde $\mathbf{A}_\tau = e^{t/\tau} \mathbf{A}$, $\phi_\tau = e^{t/\tau} \phi$ y $\mathbf{p}_\tau = e^{t/\tau} \mathbf{p}$.

Aplicando las ecuaciones canónicas de Hamilton en la forma $\dot{x} = \partial_{p_{\tau x}} H_{SM}$, $\dot{y} = \partial_{p_{\tau y}} H_{SM}$, $\dot{p}_{\tau x} = -\partial_x H_{SM}$ y $\dot{p}_{\tau y} = -\partial_y H_{SM}$ y utilizando las definiciones de los potenciales (1.17) y (1.19) obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$m_o \ddot{x} + \frac{m_o}{\tau} \dot{x} - qB_o \dot{y} + \frac{q}{\tau} A_x - qE_x = 0, \quad (1.23)$$

$$m_o \ddot{y} + \frac{m_o}{\tau} \dot{y} + qB_o \dot{x} + \frac{q}{\tau} A_y - qE_y = 0. \quad (1.24)$$

Notamos claramente que estas ecuaciones no conducen al mismo caso de campo magnético constante en el modelo Newtoniano ($\dot{B} = 0$) (1.20)-(1.21), existe un termino adicional en cada ecuación, es decir $\frac{1}{\tau} A_x$ y $\frac{1}{\tau} A_y$. Por lo tanto este Hamiltoniano es incorrecto para reproducir la dinámica del modelo Newtoniano. Parecido es el caso del Hamiltoniano propuesto por Pimpale y Razaby (PR) [28, 29] que también posee términos inconsistentes con el modelo Newtoniano.

Como mencionamos anteriormente, *no existe un enfoque Hamiltoniano que pueda reproducir exactamente el modelo Newtoniano de la disipación de una partícula cargada* (1.15). Dada esta limitación de correspondencia entre los enfoques Newtoniano y Hamiltoniano, es de vital importancia proponer un Hamiltoniano que cumpla con dicha correspondencia. *En este trabajo presentamos un modelo alternativo para modelar la disipación de la partícula cargada a través de un Hamiltoniano con masa dependiente del tiempo. Dicho Hamiltoniano nos permite estudiar el caso cuantico de este problema.* El Hamiltoniano que proponemos es el siguiente

$$H = \frac{1}{2m(t)} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi. \quad (1.25)$$

Al Hamiltoniano anterior el pedimos que reproduzca el estado estacionario en velocidad del modelo Newtoniano. Esto es, en el caso para $m_o \ddot{x} = m_o \ddot{y} = 0$ en (1.20)-(1.20), debido al amortiguamiento y con campo electromagnético constante, las componentes de la velocidad la partícula deben estar dadas por

$$\dot{x} = \frac{q\tau}{m_o} \frac{E_{x_o} + \omega_o \tau E_{y_o}}{1 + \omega_o^2 \tau^2}, \quad (1.26)$$

$$\dot{y} = \frac{q\tau}{m_o} \frac{E_{y_o} - \omega_o \tau E_{x_o}}{1 + \omega_o^2 \tau^2}, \quad (1.27)$$

aquí $\omega_o = qB_o/m_o$. Esta condición nos permite, como veremos más adelante, proponer una dependencia temporal en la masa para este problema.

La propuesta de este Hamiltoniano abre la posibilidad de la cuantización del modelo de Drude y encontrar los tensores de conductividad y resistividad que usualmente son encontrados desde un punto de vista puramente clásico.

Por último, como mencionamos al inicio de este capítulo, estamos interesados en el movimiento de partículas cargadas en metales o semiconductores, en este sentido, el efecto de las contribuciones de la disipación se introduce en el tiempo libre medio de colisiones τ . Esto es, en nuestro modelo no vamos a considerar el efecto microscópicos de la disipación, más bien vamos a considerar que es un efecto promedio de todas las contribuciones que intervienen. En este sentido el problema cuántico que vamos a tratar en el siguiente capítulo, lo podemos entender como una *aproximación semiclásica*.

1.3. Contenido

En este trabajo nos organizamos de la manera siguiente. En el capítulo 2, estudiamos la propuesta del Hamiltoniano con masa variable y analizamos la dependencia temporal de la masa. Posteriormente resolvemos el caso cuántico de la partícula cargada por medio de transformaciones unitarias, encontramos el operador de evolución temporal y con ayuda de éste construimos la función de Green. Por último estudiamos la evolución de un paquete de onda Gaussiano. En el capítulo 3 mostramos la solución numérica del comportamiento de las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la segunda ley de Newton, del Hamiltoniano de masa variable clásico y el centroide del paquete de onda Gaussiano. En el capítulo 4 presentamos las conclusiones y perspectivas para este trabajo. En el apéndice A desarrollamos las reglas de transformación debidas a las transformaciones unitarias. En el apéndice B mostramos el cálculo de los elementos de matriz de la función de Green. Por último, en el apéndice C presentamos el artículo que sustenta esta tesis de Maestría.

2

Modelo teórico

En este capítulo desarrollamos la teoría de la disipación cuántica de una partícula cargada a través de un Hamiltoniano de masa variable (HMV).

Inicialmente estudiamos el caso clásico del HMV y analizamos sus principales diferencias físicas con el modelo Newtoniano visto en la sección anterior. Adicionalmente se estudia la dependencia temporal de la masa. Una vez teniendo el Hamiltoniano (con coeficientes dependientes del tiempo) correcto, estudiamos el caso cuántico resolviéndolo por medio de transformaciones unitarias. Por último construimos la función de Green a partir de la transformación unitaria total y utilizamos esta función para estudiar el movimiento de un paquete de onda Gaussiano.

2.1. Hamiltoniano de masa variable

En esta sección nuestro interés es enunciar un *Hamiltoniano* para la partícula cargada y encontrar las ecuaciones de movimiento clásicas. Empezamos por el Hamiltoniano clásico para una partícula cargada [30]

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (2.1)$$

2. MODELO TEÓRICO

donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(x, y, t)$ es el potencial vectorial, $\phi \equiv \phi(x, y, t)$ es el potencial escalar eléctrico y $m \equiv m(t)$ es la masa de la partícula cargada, todas dependientes del tiempo de forma explícita.

Del Hamiltoniano anterior resaltamos la dependencia temporal de la masa y de hecho esta *propuesta* nos permite, como vamos a ver a continuación, encontrar las ecuaciones de movimiento de este problema.

Utilizando las ecuaciones de Hamilton de movimiento para (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{q}{m} \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} (p_j - qA_j) \\ &\quad - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Para ver un poco más en detalle la importancia de las ecuaciones de movimiento anteriores, las escribimos como segunda ley de Newton de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}),\tag{2.3}$$

con $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$. De esta última ecuación podemos apreciar del lado izquierdo que la fuerza de Lorentz va como la derivada del momento, con la masa dependiente del tiempo. Esta es una de las primeras diferencias respecto al modelo Newtoniano (1.15). Alternativamente la ecuación (2.3) la podemos escribir como

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) - \dot{m}\dot{\mathbf{r}}.\tag{2.4}$$

Con el fin ilustrar el modelo de disipación a través de la dependencia temporal de la masa, vamos a considerar (de la misma manera que en el caso Newtoniano) una partícula moviéndose en el plano xy en un campo magnético perpendicular y un campo eléctrico dependiente del tiempo en el plano. Ambos campos, definidos a partir de los potenciales vectorial y escalar usados en la sección (1.2)

$$\begin{aligned}\phi &= -E_x x - E_y y, \\ \mathbf{A} &= -\frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.2 Modelo de la masa dependiente del tiempo

Así, los campos magnéticos y eléctrico toman la forma

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\dot{B}}{2}y + E_x \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\dot{B}}{2}x - E_y \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (2.7)$$

aquí $B \equiv B(t)$, $E_x \equiv E_x(t)$ y $E_y \equiv E_y(t)$ son sólo funciones del tiempo.

Separando las componentes de la ecuación (2.3), obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento para la partícula

$$m\ddot{x} + \dot{m}\dot{x} - m\omega\dot{y} - \frac{q\dot{B}}{2}y - qE_x = 0, \quad (2.8)$$

$$m\ddot{y} + \dot{m}\dot{y} + m\omega\dot{x} + \frac{q\dot{B}}{2}x - qE_y = 0, \quad (2.9)$$

donde

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (2.10)$$

es, en general, dependiente del tiempo. En el caso de un electrón ($q = -e$) en campo magnético y masa constante $|\omega| = \omega_c = eB_o/m_o$ es la frecuencia del ciclotrón.

Notamos que las ecuaciones (2.8) y (2.9) a pesar de que son muy similares al modelo Newtoniano (1.20) y (1.21), tienen *estados transitorios* diferentes, es decir, el término en el caso Newtoniano - $m_o\ddot{\mathbf{r}}$ y el correspondiente en (2.3) - $m\ddot{\mathbf{r}}$ tienden a cero (debido al amortiguamiento) de forma diferente para un tiempo suficientemente grande. Sin embargo, ambos modelos poseen un *estado estacionario en velocidad* similar. Esto es debido precisamente a la dependencia temporal de la masa y se analiza su importancia en la siguiente sección.

2.2. Modelo de la masa dependiente del tiempo

Una de las interrogantes de nuestro problema es la forma temporal de la masa, o alternativamente ¿que funcionalidad debe tener la masa que se apegue lo más posible al modelo Newtoniano?.

2. MODELO TEÓRICO

Para responder a esta pregunta, consideremos el caso en que la partícula esta inmersa en campos magnético y eléctricos constantes. En este caso las ecuaciones de movimiento (2.8) y (2.9) se reducen a

$$m\ddot{x} + \dot{m}\dot{x} - qB_o\dot{y} - qE_{x_o} = 0, \quad (2.11)$$

$$m\ddot{y} + \dot{m}\dot{y} + qB_o\dot{x} - qE_{y_o} = 0. \quad (2.12)$$

En *estado estacionario* ($m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0$), la solución para las componentes de velocidad son

$$\dot{x} = \frac{q}{\dot{m}} \frac{E_{x_o} + (qB_o/\dot{m})E_{y_o}}{1 + (q^2B_o^2/\dot{m}^2)}, \quad (2.13)$$

$$\dot{y} = \frac{q}{\dot{m}} \frac{E_{y_o} - (qB_o/\dot{m})E_{x_o}}{1 + (q^2B_o^2/\dot{m}^2)}. \quad (2.14)$$

En este modelo de la masa dependiente del tiempo utilizamos estas ecuaciones como una herramienta necesaria para encontrar la forma temporal de la masa. Exploramos su utilidad en los siguientes casos.

Primero, regresando al enfoque del Hamiltoniano de KC [26, 27], en este modelo la forma temporal de la masa es

$$m = m_o e^{t/\tau}, \quad (2.15)$$

aquí por ejemplo, m_o y τ están relacionados con la masa efectiva y el tiempo libre medio entre colisiones de la partícula cargada con un dispersor en un semiconductor y con una movilidad $\mu_e = |q|\tau/m_o$. A diferencia del modelo Newtoniano, en este caso, la forma temporal de la masa en (2.15) desvanece las componentes de velocidad (2.13) y (2.14) para un tiempo suficientemente grande, e incluso en presencia de campo eléctrico.

Resultados bien conocidos, como el tensor de magneto-conductividad de semiconductores [31] en dos dimensiones

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{\dot{r}} = \frac{\sigma_o}{1 + (\omega_o\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_o\tau \\ -\omega_o\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

con $\sigma_o = nq^2\tau/m_o$ y n densidad de portadores de carga, contradicen la forma temporal de esta masa. Esta es otra razón por la que *descartamos* en este desarrollo teórico el principio Hamiltoniano de KC.

2.2 Modelo de la masa dependiente del tiempo

Como segundo ejemplo, tomamos la siguiente *elección conveniente* de la dependencia temporal de masa

$$m = m_o \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right), \quad (2.17)$$

la cual llamamos modelo lineal de la masa dependiente del tiempo (MLMDT).

De la ecuación (2.4), los dos primeros términos de lado derecho de esta ecuación corresponden a la fuerza de Lorentz, mientras que el último término modela la fuerza de disipación, de hecho para el MLMDT

$$\dot{m}\dot{\mathbf{r}} = \frac{m_o}{\tau}\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.18)$$

En este caso del MLMDT, la solución del estado estacionario para las componentes de las velocidades son

$$\dot{x} = \frac{q\tau}{m_o} \frac{E_{xo} + \omega_o\tau E_{yo}}{1 + \omega_o^2\tau^2}, \quad (2.19)$$

$$\dot{y} = \frac{q\tau}{m_o} \frac{E_{yo} - \omega_o\tau E_{xo}}{1 + \omega_o^2\tau^2}, \quad (2.20)$$

donde $\omega_o = \omega(t=0) = qB_o/m_o$.

Este enfoque produce el mismo estado estacionario, no cero, que el modelo Newtoniano (1.26) y (1.27), aunque su estado transitorio pueda ser diferente. Además estas componentes de velocidad (2.19) - (2.20) reproducen perfectamente el tensor de magneto-conductividad (2.16) de semiconductores.

Ya que el MLMDT y el modelo Newtoniano alcanzan el mismo estado estacionario, lo utilizamos durante todo el resto del trabajo y para ejemplos numéricos posteriores.

Finalizamos esta sección resaltando nuevamente esta condición en el estado estacionario de la velocidad, cuya contribución al desarrollo presentado aquí es permitir una regla para descartar algunas propuestas de principios Hamiltonianos con masa dependiente del tiempo en la partícula cargada. Adicionalmente nos proporciona una manera de proponer la dependencia temporal de la masa.

2. MODELO TEÓRICO

2.3. Caso cuántico: transformaciones unitarias

En esta sección desarrollamos el caso cuántico de la partícula cargada 2D con disipación. Proponemos una cuantización canónica al Hamiltoniano (2.1), es decir, ahora posiciones y momentos son operadores Hermíticos.

En este mismo contexto, un posible procedimiento para solucionar analíticamente el problema cuántico es realizar un conjunto de transformaciones unitarias de un cierto subgrupo del grupo afín, rotaciones, traslaciones, cizalladuras¹ y dilataciones en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$.

De forma general el procedimiento es el siguiente. Partimos de la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle, \quad (2.21)$$

donde utilizando (2.1), el Hamiltoniano mecánico-cuántico viene dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}} \right)^2 + q\phi. \quad (2.22)$$

Aquí \hat{x} , \hat{y} , \hat{p}_x y \hat{p}_y son los operadores de espacio y de momento, tal que

$$\begin{aligned} \hat{x} |x, y\rangle &= x |x, y\rangle, \\ \hat{y} |x, y\rangle &= y |x, y\rangle, \\ \hat{p}_x |p_x, p_y\rangle &= p_x |p_x, p_y\rangle, \\ \hat{p}_y |p_x, p_y\rangle &= p_y |p_x, p_y\rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $|x, y\rangle$ y $|p_x, p_y\rangle$ son los eigenestados de posición y momento respectivamente. Los operadores de espacio y momento siguen las relaciones usuales de conmutación

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{i,j}. \quad (2.24)$$

La solución de la ecuación de Schrödinger (2.21) por medio de transformaciones unitarias U_i [32–35], se puede resumir en cada paso de la solución de la siguiente forma

¹Aquí cizalladuras lo entendemos como la transformación unitaria que al aplicarla al operador de posición da como resultado la superposición de los operadores de posición y momento. Una superposición similar ocurre cuando se aplica la transformación al operador momento.

2.3 Caso cuántico: transformaciones unitarias

$$U_i \hat{H} U_i^\dagger U_i |\psi(t)\rangle = U_i \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_i^\dagger U_i |\psi(t)\rangle \quad (2.25)$$

entonces

$$\hat{H}_i |\psi_i(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i(t)\rangle \quad (2.26)$$

con $U_i U_i^\dagger = \hat{\mathbf{I}}$, $\hat{H}_i = U_i \hat{H} U_i^\dagger - U_i \left(i\hbar \partial_t U_i^\dagger \right)$, y $|\psi_i(t)\rangle = U_i |\psi(t)\rangle$.

Es conveniente en este punto definir el *Operador de Floquet* [36] dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.27)$$

así, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\left(\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle = 0, \quad (2.28)$$

aplicando las transformaciones unitarias U_i la ecuación anterior se reescribe como

$$\hat{\mathcal{H}}_i |\psi_i(t)\rangle = 0, \quad (2.29)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_i = U_i \hat{\mathcal{H}} U_i^\dagger = \hat{H}_i - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.30)$$

y

$$|\psi_i(t)\rangle = U_i |\psi(t)\rangle. \quad (2.31)$$

En general, buscamos un conjunto de transformaciones unitarias aplicadas sucesivamente que reduzcan al operador de Floquet en

$$\mathcal{U} \hat{\mathcal{H}} \mathcal{U}^\dagger = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.32)$$

donde $\mathcal{U} = \dots U_2 U_1$. Esto implica que la ecuación de Schrödinger (2.28) toma la forma

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{U} |\psi(t)\rangle) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\dots U_2 U_1 |\psi(t)\rangle] = 0. \quad (2.33)$$

2. MODELO TEÓRICO

Esta última ecuación indica que el ket aplicado de lado derecho del operador de energía debe ser constante en el tiempo, así

$$\mathcal{U} |\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle. \quad (2.34)$$

Como una consecuencia, el estado del sistema en cualquier instante $|\psi(t)\rangle$ es conectado con el estado en $t = 0$, $|\psi(0)\rangle$, de la siguiente manera

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}^\dagger |\psi(0)\rangle = \left(U_1^\dagger U_2^\dagger \dots \right) |\psi(0)\rangle, \quad (2.35)$$

es decir,

$$\mathcal{U}^\dagger(t, 0) = U_1^\dagger(t, 0) U_2^\dagger(t, 0) \dots \quad (2.36)$$

es el *operador de evolución temporal*. De hecho, nuestro objetivo en la siguiente sección es construir, utilizando el procedimiento descrito aquí, este operador para la partícula cargada en 2D.

Vamos a considerar, como en la sección (2.1), una partícula en un campo magnético perpendicular al movimiento y un campo eléctrico en las direcciones x y y , ambos dependientes del tiempo. Los potenciales vectorial magnético y eléctrico están dados por

$$\phi = -E_x \hat{x} - E_y \hat{y} \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = -\frac{B}{2} \hat{y} \hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2} \hat{x} \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.38)$$

donde como en el caso clásico, $B \equiv B(t)$, $E_x \equiv E_x(t)$ y $E_y \equiv E_y(t)$ son funciones solo del tiempo.

En esta norma y con el Hamiltoniano mecánico-cuántico (2.22), el operador de Floquet (2.27) toma la siguiente forma

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{\omega}{2} \hat{L}_z - q (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) - i \hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.39)$$

donde $\hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x$, es el operador de momento angular en la dirección z .

Para finalizar, *notamos que todos los coeficientes que forman este operador de Floquet son funciones del tiempo*. Por este motivo, el procedimiento dado en esta sección nos evitará utilizar teoría de perturbaciones dependiente del tiempo por complicado que estos coeficientes dependan de t .

2.4. Operador de evolución temporal

Nuestro objetivo en esta sección es obtener el operador de evolución temporal correspondiente al operador de Floquet (2.39), utilizando el método descrito en la sección (2.3) por medio de transformaciones unitarias de un subgrupo del grupo afín.

El procedimiento se puede resumir como sigue: 1) El tercer término en $\hat{\mathcal{H}}$ correspondiente a la componente del acoplamiento del momento angular en z , puede ser eliminado por una rotación dejando los dos primeros términos invariantes. El resultado es un operador de Floquet por dos osciladores armónicos forzados desacoplados, con masas y frecuencias variables en el tiempo; 2) una traslación dependiente del tiempo en cada dirección (x y y) se realiza para eliminar las contribuciones lineales, reduciendo a $\hat{\mathcal{H}}$ en dos osciladores armónicos unidimensionales desacoplados con coeficientes dependientes del tiempo; 3) y, finalmente una cizalladura y una dilatación en cada dirección son aplicados reduciendo a $\hat{\mathcal{H}}$ en $-i\hbar\partial_t$.

Primera transformación unitaria

Para empezar requerimos un operador unitario U_1 que genere una rotación finita en un ángulo θ alrededor de la componente z

$$U_1 = \exp\left(i\frac{\theta\hat{L}_z}{\hbar}\right), \quad (2.40)$$

con $\theta \equiv \theta(t)$ un parámetro dependiente del tiempo. Necesitamos ver el efecto que tiene U_1 sobre los operadores de posición, momento y para $i\hbar\partial_t$. Dicho efecto genera las siguientes transformaciones (ver apéndice A)

$$\begin{aligned} U_1\hat{x}U_1^\dagger &= \hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta, \\ U_1\hat{y}U_1^\dagger &= \hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta, \\ U_1\hat{p}_xU_1^\dagger &= \hat{p}_x\cos\theta - \hat{p}_y\sin\theta, \\ U_1\hat{p}_yU_1^\dagger &= \hat{p}_x\sin\theta + \hat{p}_y\cos\theta, \\ U_1\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U_1^\dagger &= \theta\hat{L}_z + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

que, como dijimos anteriormente, genera rotaciones en los operadores de posición y momento.

2. MODELO TEÓRICO

Notamos que U_1 deja invariante las formas cuadráticas $\hat{x}^2 + \hat{y}^2$ y $\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2$. Así, esta primera transformación al operador de Floquet empleando (2.41) se escribe como

$$U_1 \hat{\mathcal{H}} U_1^\dagger = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - q (E_x^R \hat{x} + E_y^R \hat{y}) - \left(\dot{\theta} + \frac{\omega}{2} \right) \hat{L}_z - i \hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Aquí E_x^R y E_y^R son las componentes rotadas del campo eléctrico, definidas como

$$\begin{aligned} E_x^R &= E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \\ E_y^R &= -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

En este punto, como parte de nuestro objetivo, vamos a imponer en (2.42) la siguiente condición

$$\dot{\theta} + \frac{\omega}{2} = 0, \quad (2.44)$$

a fin de eliminar el termino proporcional a \hat{L}_z en (2.42). El operador de Floquet ahora está completamente separado en las componentes x y y .

De la ecuación (2.30), el Hamiltoniano transformado toma la forma

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - q (E_x^R \hat{x} + E_y^R \hat{y}) \quad (2.45)$$

que corresponde a dos osciladores forzados desacoplados. Aquí es importante establecer $\theta(t=0) = 0$ como condición inicial a fin de que U_1 se reduzca al operador identidad cuando $t \rightarrow 0$. Establecemos esta misma condición inicial en todos los parámetros de las siguientes transformaciones a fin de garantizar que el operador de evolución temporal final cumpla

$$\mathcal{U}(t=0) = \hat{\mathbf{I}}. \quad (2.46)$$

Un caso particular de la ecuación (2.44) es que si m y B son independientes del tiempo, entonces $\theta = -\omega_o t/2$, con $\omega_o = qB_o/m_o$. En este caso, el movimiento de la partícula cargada es llevado a un sistema de referencia que gira a la mitad de la frecuencia angular.

Segunda transformación unitaria

La siguiente transformación corresponde a traslaciones en espacio de posición y momento. Ésta es de la forma

$$U_2 = U_{2t}U_{2x}U_{2y}, \quad (2.47)$$

donde

$$\begin{aligned} U_{2t} &= \exp\left(i\frac{S}{\hbar}\right), \\ U_{2x} &= \exp\left(i\frac{\pi_x\hat{x}}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\lambda_x\hat{p}_x}{\hbar}\right), \\ U_{2y} &= \exp\left(i\frac{\pi_y\hat{y}}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\lambda_y\hat{p}_y}{\hbar}\right), \end{aligned}$$

donde nuevamente los parámetros de esta transformación son dependientes del tiempo, es decir, $S \equiv S(t)$, $\lambda_i \equiv \lambda_i(t)$ y $\pi_i \equiv \pi_i(t)$. Este operador unitario (2.47) produce las siguientes reglas de transformación (apéndice A)

$$\begin{aligned} U_2\hat{x}U_2^\dagger &= \hat{x} + \lambda_x, \\ U_2\hat{p}_xU_2^\dagger &= \hat{p}_x - \pi_x, \\ U_2\hat{y}U_2^\dagger &= \hat{y} + \lambda_y, \\ U_2\hat{p}_yU_2^\dagger &= \hat{p}_y - \pi_y, \\ U_2\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U_2^\dagger &= \dot{S} - \dot{\lambda}_x\pi_x - \dot{\lambda}_y\pi_y + \dot{\pi}_x\hat{x} + \dot{\lambda}_x\hat{p}_x \\ &\quad + \dot{\pi}_y\hat{y} + \dot{\lambda}_y\hat{p}_y + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aplicando U_2 a la transformación anterior del operador de Floquet (2.42) obtenemos

$$\begin{aligned} U_2U_1\mathcal{H}U_1^\dagger U_2^\dagger &= \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \left[\frac{\pi_x}{m} + \dot{\lambda}_x\right]\hat{p}_x \\ &\quad - \left[\frac{\pi_y}{m} + \dot{\lambda}_y\right]\hat{p}_y + \left[\frac{1}{4}m\omega^2\lambda_x - qE_x^R - \dot{\pi}_x\right]\hat{x} \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}m\omega^2\lambda_y - qE_y^R - \dot{\pi}_y\right]\hat{y} + \mathcal{L} - \dot{S} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. MODELO TEÓRICO

donde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) + \frac{1}{8} m\omega^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) - qE_x^R \lambda_x - qE_y^R \lambda_y + \dot{\lambda}_x \pi_x + \dot{\lambda}_y \pi_y, \quad (2.50)$$

es el *lagrangiano clásico* de los parámetros π_x, π_y, λ_x y λ_y que forman el operador unitario U_2 . Si calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange de los parámetros del lagrangiano \mathcal{L} , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\pi}_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_x} = - \left[\frac{\pi_x}{m} + \dot{\lambda}_x \right] = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\pi}_y} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_y} = - \left[\frac{\pi_y}{m} + \dot{\lambda}_y \right] = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_x} = - \left[\frac{1}{4} m\omega^2 \lambda_x - qE_x^R - \dot{\pi}_x \right] = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_y} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_y} = - \left[\frac{1}{4} m\omega^2 \lambda_y - qE_y^R - \dot{\pi}_y \right] = 0. \quad (2.54)$$

De estas últimas relaciones notamos que las ecuaciones diferenciales dentro de los paréntesis cuadrados corresponden exactamente a las mismas de los términos lineales de los operadores de posición y momento en (2.49). Al imponer las ecuaciones de Euler-Lagrange a (2.51)-(2.54) se reducen los términos lineales del operador de Floquet. Adicionalmente para remover el término del lagrangiano \mathcal{L} requerimos imponer

$$\mathcal{L} - \dot{S} = 0. \quad (2.55)$$

Así, el operador de Floquet es simplificado en

$$U_2 U_1 \hat{\mathcal{H}} U_1^\dagger U_2^\dagger = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} m\omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.56)$$

y el Hamiltoniano transformado debido a U_2 es

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} m\omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2). \quad (2.57)$$

Ahora la ecuación de Schrödinger toma la forma de dos osciladores armónicos desacoplados con coeficientes dependientes del tiempo.

Como en el caso de la primera transformación, resolviendo las ecuaciones diferenciales de primer grado (2.51)-(2.55) se pueden encontrar los parámetros del operador unitario U_2 sujetos a las condiciones iniciales $\pi_i(t=0) = 0$, $\lambda_i(t=0) = 0$ y $S(t=0) = 0$.

Tercera transformación unitaria

Finalmente, la última transformación unitaria se puede dividir en las partes x y y como se muestra a continuación

$$U_3 = U_{3y}U_{3x}. \quad (2.58)$$

De esta definición describimos el operador U_{3x} , formado por una dilatación y una cizalladura

$$U_{3x} = \exp \left[-i \frac{\gamma}{4\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right] \exp \left[i \frac{\delta}{2\hbar} \left(\Delta\hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta}\hat{p}_x^2 \right) \right] \quad (2.59)$$

con $\delta \equiv \delta(t)$, $\Delta \equiv \Delta(t)$ y $\gamma \equiv \gamma(t)$ funciones del tiempo, y sus reglas de transformación (apéndice A) son

$$\begin{aligned} U_{3x}\hat{x}U_{3x}^\dagger &= e^{-\frac{\gamma}{2}}\hat{x} \cos \delta + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta}\hat{p}_x \sin \delta, \\ U_{3x}\hat{p}_xU_{3x}^\dagger &= e^{\frac{\gamma}{2}}\hat{p}_x \cos \delta - e^{-\frac{\gamma}{2}}\Delta\hat{x} \sin \delta, \\ U_{3x} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{3x}^\dagger &= \left(\frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin^2 \delta - \frac{\dot{\gamma}}{4} \right) (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \\ &\quad + \frac{e^\gamma}{2\Delta} \left(\dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{p}_x^2 \\ &\quad + \frac{\Delta e^{-\gamma}}{2} \left(\dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{x}^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Las primeras dos ecuaciones son conocidas como *transformaciones de Arnold* [37, 38] y se puede mostrar que estas cumplen con la condición necesaria de preservar el valor del Wronskiano

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\gamma} \cos \delta & \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\Delta} \sin \delta \\ -e^{-\frac{1}{2}\gamma} \Delta \sin \delta & e^{\frac{1}{2}\gamma} \cos \delta \end{pmatrix} = 1, \quad (2.62)$$

y para que la matriz de transformación completa, como veremos a continuación, sea simpléctica.

2. MODELO TEÓRICO

Con el fin de calcular (2.61) es necesario obtener la derivada del tiempo de U_3 , sin embargo no se puede calcular por derivación directa ya que el argumento del operador (2.59) no necesariamente conmuta con su derivada a todo tiempo. A pesar de esto puede ser calculada mediante la separación de (2.59) en la forma siguiente

$$U_{3x} = \exp \left[-\frac{i\gamma}{4\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right] \exp \left[\frac{i\mu}{2\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right] \\ \times \exp \left[\frac{i\delta}{2\hbar} \left(\Delta_o \hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta_o} \hat{p}_x^2 \right) \right] \exp \left[-\frac{i\mu}{2\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right], \quad (2.63)$$

donde $\mu \equiv \mu(t)$, $\Delta = \Delta_o e^{2\mu}$ y Δ_o es una constante, esto es, hemos expandido la definición de U_{3x} en dos dilataciones y una cizalladura.

Aplicando este operador U_{3x} a las transformaciones sucesivas del operador de Floquet (2.56) podemos obtener fácilmente

$$U_{3x}U_2U_1\mathcal{H}U_1^\dagger U_2^\dagger U_{3x}^\dagger = \\ \left(\frac{\Delta}{m} \cos^2 \delta + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \sin^2 \delta - \dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta \right) \frac{e^\gamma}{2\Delta} \hat{p}_x^2 \\ + \left(\frac{\Delta}{m} \sin^2 \delta + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \cos^2 \delta - \dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta \right) \frac{\Delta e^{-\gamma}}{2} \hat{x}^2 \\ + \left[\left(-\frac{\Delta}{m} + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \right) \sin \delta \cos \delta - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin^2 \delta + \frac{\dot{\gamma}}{2} \right] \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \\ + \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{8} m\omega^2 \hat{y}^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.64)$$

Con el fin de remover los términos proporcionales a $\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}$, \hat{x}^2 y \hat{p}_x^2 , hacemos cero las ecuaciones diferenciales para los parámetros δ , Δ y γ , esto es

$$\frac{\Delta}{m} \cos^2 \delta + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \sin^2 \delta - \dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta = 0, \\ \frac{\Delta}{m} \sin^2 \delta + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \cos^2 \delta - \dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta = 0, \\ \left(-\frac{\Delta}{m} + \frac{m\omega^2}{4\Delta} \right) \sin \delta \cos \delta - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin^2 \delta + \frac{\dot{\gamma}}{2} = 0, \quad (2.65)$$

reduciendo al operador de Floquet (2.64) en

2.4 Operador de evolución temporal

$$U_{3x}U_2U_1\hat{\mathcal{H}}U_1^\dagger U_2^\dagger U_{3x}^\dagger = \frac{1}{2m}\hat{p}_y^2 + \frac{1}{8}m\omega^2\hat{y}^2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (2.66)$$

La parte y del Hamiltoniano puede ser eliminada por un operador similar a (2.59)

$$U_{3y} = \exp\left[-i\frac{\gamma}{4\hbar}(\hat{y}\hat{p}_y + \hat{p}_y\hat{y})\right] \exp\left[i\frac{\delta}{2\hbar}\left(\Delta\hat{y}^2 + \frac{1}{\Delta}\hat{p}_y^2\right)\right]. \quad (2.67)$$

En este operador unitario² los parámetros δ , Δ y γ son los mismos que en (2.59) dada la simetría entre la parte x y y del Hamiltoniano (2.57), y al aplicar este operador en (2.66) producen el mismo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (2.65).

Finamente después de aplicar U_{3y} e imponer (2.65), obtenemos

$$U_3U_2U_1\hat{\mathcal{H}}U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.68)$$

esto es, el Hamiltoniano fue reducido a

$$\hat{H}_3 = 0, \quad (2.69)$$

y por lo tanto encontramos el *operador de evolución temporal* (2.36) para la partícula cargada-2D en el caso cuántico

$$\mathcal{U}^\dagger(t, 0) = U_1^\dagger(t, 0)U_2^\dagger(t, 0)U_3^\dagger(t, 0). \quad (2.70)$$

Notamos que la dependencia del tiempo entra en el operador de evolución temporal \mathcal{U}^\dagger vía los parámetros θ , λ_x , π_x , λ_y , π_y , δ , Δ y γ (todos ellos funciones del tiempo) en cada una de los operadores unitarios que hemos empleado.

A partir del operador de evolución temporal podemos extraer los operadores de posición y momento en la representación de Heisenberg

$$\begin{aligned} \hat{x}_H(t) &= \mathcal{U}\hat{x}\mathcal{U}^\dagger = U_3U_2U_1\hat{x}U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \\ \hat{y}_H(t) &= \mathcal{U}\hat{y}\mathcal{U}^\dagger = U_3U_2U_1\hat{y}U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \\ \hat{p}_{xH}(t) &= \mathcal{U}\hat{p}_x\mathcal{U}^\dagger = U_3U_2U_1\hat{p}_xU_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \\ \hat{p}_{yH}(t) &= \mathcal{U}\hat{p}_y\mathcal{U}^\dagger = U_3U_2U_1\hat{p}_yU_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger. \end{aligned} \quad (2.71)$$

²Este produce las mismas reglas de transformación que en (2.60) y (2.61) pero ahora en la componente y .

2. MODELO TEÓRICO

Para la expresión explícita de estos operadores, empleamos las reglas de transformación (2.41), (2.48) y (2.60), el resultado final es escrito en la forma simpléctica

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_H(t) \\ \hat{y}_H(t) \\ \hat{p}_{xH}(t) \\ \hat{p}_{yH}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \end{bmatrix} + \chi, \quad (2.72)$$

donde \mathbf{M} es una matriz simpléctica dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta & -\frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta \\ e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta \\ -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta & e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & -e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \\ -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

y

$$\chi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\pi_x \\ -\pi_y \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Con esto encontramos una regla de transformación general de los operadores de posición y momento, donde dicha transformación general sobre estos operadores se encuentra en la representación de Heisenberg y simplifica nuestro operador de Floquet de la partícula cuántica cargada 2D en $-i\hbar\partial_t$ imponiendo la ecuación diferencial respectiva.

Para finalizar esta sección, vamos a simplificar la estructura de las ecuaciones diferenciales acopladas (2.65) con el fin de encontrar fácilmente sus soluciones en cálculos numéricos posteriores. Si proponemos

$$\Delta = \frac{1}{2}qBe^\eta = \frac{1}{2}m\omega e^\eta \quad (2.75)$$

donde $\eta \equiv \eta(t)$ es una función dependiente del tiempo, si la dependencia temporal del campo magnético se escribe como $B = B_0 f(t)$ podemos regresar a (2.63) y encontrar $\Delta_0 = m_0\omega_0/2$ y $e^{2\mu} = f(t)e^\eta$. La condición inicial para este parámetro es $\Delta(t=0) = \Delta_0$.

2.4 Operador de evolución temporal

Con ayuda de Δ se genera la siguiente simplificación en el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (2.65)

$$\dot{\delta} = \frac{1}{2}\omega \cosh \eta \quad (2.76)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\dot{B}}{B} - \omega \sinh \eta \cot 2\delta \quad (2.77)$$

$$\dot{\gamma} = \omega \sinh \eta \tan \delta, \quad (2.78)$$

las condiciones iniciales de este sistema son $\delta(t = 0) = 0$, $\eta(t = 0) = 0$ y $\gamma(t = 0) = 0$.

En el caso más general, las soluciones de estas ecuaciones pueden obtenerse por métodos numéricos. No obstante, es posible extraer información de (2.76)-(2.78) mediante la agrupación de las tres últimas ecuaciones en una forma hiperbólica

$$\frac{\dot{\delta}^2}{a^2} - \frac{(\dot{\gamma} - \dot{\eta} - \dot{B}/B)^2}{b^2} = \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1, \quad (2.79)$$

donde $a = \omega/2$ y $b = \omega/\sin 2\delta$.

Esta última relación nos dice que cada rama de la hipérbola está asociada a una dirección de rotación de la partícula cargada. En particular, los vértices de la hipérbola corresponden al caso de campo magnético constante ($\dot{B} = 0$). Así, si nos fijamos en uno de los vértices $\dot{\delta} = a = \omega/2$ y comparando con (2.76), obtenemos $\eta = 0$ y consecuentemente $\dot{\gamma} = 0$. Este es en efecto, el caso en el que el campo magnético es constante, es decir, $B = B_o$ y $\gamma = 0$. De esta manera con MLMDT de la sección (2.2) y con la condición inicial para δ podemos integrar $\dot{\delta} = a = \omega/2$ y encontrar este parámetro.

Es bien sabido que la simetría de inversión temporal se rompe en presencia de un campo magnético constante. A pesar de que tenemos un problema de fricción, este rompimiento de la simetría es la causa de que existan dos vértices. De forma más general, en un problema donde el campo magnético es una función del tiempo, la solución es dada en otra región en la rama de la hipérbola. En otras palabras, el comportamiento hiperbólico de las ecuaciones (2.76)-(2.78) es una consecuencia de la asimetría de la inversión del tiempo debido al campo magnético.

2. MODELO TEÓRICO

2.5. Función de Green y paquete de onda Gaussiano

En esta sección utilizamos los resultados de la sección anterior a fin de obtener la función de Green y estudiar, como ejemplo, la evolución de un paquete de onda Gaussiano.

2.5.1. Función de Green

Para construir la función de Green partimos de la ecuación (2.35)

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}^\dagger |\psi(0)\rangle.$$

La función de onda se encuentra multiplicando por un *bra* de posición

$$\psi(x, y, t) = \langle x, y | \psi(t) \rangle = \langle x, y | \mathcal{U}^\dagger | \psi(0) \rangle. \quad (2.80)$$

Si insertamos correctamente una base continua $\int dx' dy' |x', y'\rangle \langle x', y'|$, la función de onda toma la forma

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \int dx' dy' \langle x, y | \mathcal{U}^\dagger | x', y' \rangle \langle x', y' | \psi(0) \rangle \\ &= \int dx' dy' G(x, y, t | x', y', 0) \psi(x', y', 0). \end{aligned} \quad (2.81)$$

La ecuación anterior nos dice que la *función de Green se define a partir del operador de evolución temporal* como

$$G(x, y, t | x', y', 0) = \langle x, y | \mathcal{U}^\dagger | x', y' \rangle, \quad (2.82)$$

y básicamente es el propagador cuántico de una partícula cargada en $2D$ en presencia de amortiguamiento.

Para obtener la forma explícita de G podemos nuevamente introducir correctamente bases continuas de posición y calcular elementos de matriz en cada una de las transformaciones unitarias U_1 , U_2 y U_3 , esto es

$$\begin{aligned} G(x, y, t | x', y', 0) &= \int \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \langle x, y | U_1^\dagger | x_1, y_1 \rangle \\ &\quad \times \langle x_1, y_1 | U_2^\dagger | x_2, y_2 \rangle \langle x_2, y_2 | U_3^\dagger | x', y' \rangle. \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.5 Función de Green y paquete de onda Gaussiano

El cálculo de estos elementos de matriz pueden verse en el apéndice B, de donde obtenemos la forma explícita de la función de Green

$$\begin{aligned}
 G(x, y, t | x', y', 0) &= \frac{\Delta e^{-\frac{\gamma}{2}}}{2\pi\hbar \sin \delta} e^{-\frac{i}{\hbar} S} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar} \cot \delta [(x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda_x)^2 + (y \cos \theta - x \sin \theta - \lambda_y)^2] \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\pi_x + \frac{\Delta}{\sin \delta} x' e^{-\gamma/2} \right) (x \cos \theta + y \sin \theta - \lambda_x) \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\pi_y + \frac{\Delta}{\sin \delta} y' e^{-\gamma/2} \right) (y \cos \theta - x \sin \theta - \lambda_y) \right\} \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar} e^{-\gamma} \cot \delta [(x')^2 + (y')^2] \right\}. \tag{2.84}
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior esta formada por términos lineales y cuadráticos de los eigenestados de posición. Esta es la forma correcta predicha por Schwinger y otros [39–41].

2.5.2. Paquete de onda Gaussiano

Ahora queremos estudiar la evolución de un paquete de onda Gaussiano para la partícula cargada bajo la acción de los campos magnético y eléctrico. Nuestro objetivo es estudiar su movimiento y probar que la trayectoria que sigue es la misma que la descrita por las ecuaciones de movimiento clásicas, es decir, probar el teorema de Ehrenfest.

Comenzamos en $t = 0$ con un paquete de onda Gaussiano de la forma

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_o} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_o^2}\right) \exp\left(i\frac{p_{xo}x + p_{yo}y}{\hbar}\right), \tag{2.85}$$

donde p_{xo} , p_{yo} y σ_o son los valores iniciales de momento y ancho de paquete. Notamos que inicialmente el centro del paquete de onda está localizado en el origen, y ya que el campo magnético apunta en la dirección z , el potencial magnético definido en (2.37) se anula. De esta manera, el momento inicial y velocidad se relacionan a través de $m\dot{\mathbf{r}}(t = 0) = p_{xo}\hat{\mathbf{i}} + p_{yo}\hat{\mathbf{j}}$.

2. MODELO TEÓRICO

Empleando la función de Green la función de onda a cualquier tiempo es explícitamente calculada por medio de la relación (2.81)

$$\begin{aligned}
\psi(x, y, t) &= \int dx' dy' G(x, y, t | x', y', 0) \psi(x', y', 0) \\
&= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}S}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \left(\frac{\hbar e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \delta}{\sigma_o \Delta} + i \sigma_o e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \delta \right) \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(x - \zeta_x^R)^2 + (y - \zeta_y^R)^2 \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ -i \frac{\sigma_o^2 e^{-\gamma}}{2\pi\sigma^2} \cot \delta \left[(x - \zeta_x^R)^2 + (y - \zeta_y^R)^2 \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ i \frac{\Delta \cot \delta}{2\hbar} \left[(x - \lambda_x^R)^2 + (y - \lambda_y^R)^2 \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\pi_x^R (x - \lambda_x^R) + \pi_y^R (y - \lambda_y^R) \right] \right\}, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

donde la desviación estándar ($\sigma \equiv \sigma(t)$) del paquete de onda está dada por

$$\sigma = \sqrt{\sigma_o^2 e^{-\gamma} \cos^2 \delta + \frac{\hbar^2 e^{\gamma} \sin^2 \delta}{\sigma_o^2 \Delta^2}}. \quad (2.87)$$

Es fácil notar que correctamente cumple con $\sigma(t = 0) = \sigma_o$. Los parámetros rotados λ_i^R , π_i^R y ζ^R son dados por

$$\begin{aligned}
\lambda_x^R &= \lambda_x \cos \theta - \lambda_y \sin \theta, \\
\lambda_y^R &= \lambda_y \cos \theta + \lambda_x \sin \theta, \\
\pi_x^R &= \pi_x \cos \theta - \pi_y \sin \theta, \\
\pi_y^R &= \pi_y \cos \theta + \pi_x \sin \theta, \\
\zeta_x^R &= \zeta_x \cos \theta - \zeta_y \sin \theta, \\
\zeta_y^R &= \zeta_y \cos \theta + \zeta_x \sin \theta. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Los parámetros ζ_x y ζ_y se componen de dos partes, la parte homogénea, indicada por el subíndice h y la solución particular

$$\begin{aligned}
\zeta_x &= \lambda_{xh} + \lambda_x, \\
\zeta_y &= \lambda_{yh} + \lambda_y, \quad (2.89)
\end{aligned}$$

2.5 Función de Green y paquete de onda Gaussiano

donde, la parte homogénea carga con las condiciones iniciales y está dada por

$$\lambda_{xh} = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sen} \delta}{\Delta} p_{xo}, \quad (2.90)$$

$$\lambda_{yh} = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sen} \delta}{\Delta} p_{yo}. \quad (2.91)$$

La densidad de probabilidad se puede obtener fácilmente a partir de la expresión de la función de onda (2.86)

$$|\psi(x, y, t)|^2 = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left[(x - \zeta_x^R)^2 + (y - \zeta_y^R)^2 \right] \right\}. \quad (2.92)$$

A partir de la expresión anterior es claro que la trayectoria del paquete de onda Gaussiano es descrita por el vector

$$\zeta^R = \zeta_x^R \hat{\mathbf{i}} + \zeta_y^R \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.93)$$

Si usamos las ecuaciones diferenciales de los parámetros de \mathcal{U} (2.44), (2.51)-(2.54) y (2.76)-(2.78) es fácil demostrar que λ_x^R y λ_y^R cumplen las mismas ecuaciones de movimiento que la partícula clásica (2.8) y (2.9)

$$m\ddot{\lambda}_x^R - m\omega\dot{\lambda}_y^R + \dot{m}\lambda_x^R - \frac{q\dot{B}}{2}\lambda_y^R - qE_x = 0, \quad (2.94)$$

$$m\ddot{\lambda}_y^R + m\omega\dot{\lambda}_x^R + \dot{m}\lambda_y^R + \frac{q\dot{B}}{2}\lambda_x^R - qE_y = 0, \quad (2.95)$$

y de igual forma, λ_{xh}^R y λ_{yh}^R cumplen con la ecuación homogénea

$$m\ddot{\lambda}_{xh}^R - m\omega\dot{\lambda}_{yh}^R + \dot{m}\lambda_{xh}^R - \frac{q\dot{B}}{2}\lambda_{yh}^R = 0, \quad (2.96)$$

$$m\ddot{\lambda}_{yh}^R + m\omega\dot{\lambda}_{xh}^R + \dot{m}\lambda_{yh}^R + \frac{q\dot{B}}{2}\lambda_{xh}^R = 0. \quad (2.97)$$

De esto último podemos inferir que $\zeta_x^R = \lambda_{xh}^R + \lambda_x^R$ y $\zeta_y^R = \lambda_{yh}^R + \lambda_y^R$ son las soluciones completas de las ecuaciones de movimiento clásicas, donde λ_x^R y λ_y^R son las soluciones particulares del sistema de las ecuaciones inhomogéneas, y λ_{xh}^R y λ_{yh}^R son las soluciones de las ecuaciones diferenciales homogéneas que contienen las condiciones iniciales del paquete de onda Gaussiano.

2. MODELO TEÓRICO

De lo anterior, el centroide del paquete de onda describe la misma trayectoria que la partícula clásica, esto es, hemos probado que se cumple el teorema de Ehrenfest. En el siguiente capítulo veremos cálculos numéricos que reafirman este resultado.

3

Resultados numéricos

En este capítulo tomamos los resultados más importantes de los capítulos anteriores y estudiamos numéricamente las ecuaciones de movimiento en el caso del modelo Newtoniano (1.15), en el caso clásico del HMV (2.1) y para el centroide del paquete de onda Gaussiano (2.93).

En un primer caso, estudiamos el movimiento de un electrón sujeto a un campo magnético constante, campo eléctrico nulo y la disipación del medio. En un segundo estudio mostramos el efecto que tienen los campos magnético y eléctrico constantes en el electrón e incluyendo amortiguación. Por último, analizamos el compartimiento del movimiento bajo un campo magnético dependiente del tiempo y disipación. En estos tres casos utilizamos el modelo MLMDT desarrollado en la sección (2.2). Y empleamos un semiconductor de *GaAs* como medio, donde se mueve el electrón. Este semiconductor está caracterizado por su valor de movilidad y por la masa efectiva que posee el electrón.

3.1. Campo magnético constante y campo eléctrico nulo

En esta sección analizamos el comportamiento de un electrón en una muestra de *GaAs* inmerso en un campo magnético uniforme de valor $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

y campo eléctrico nulo. En este semiconductor el electrón posee una carga $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}C$ y una masa efectiva¹ [42] $m_o = 0.067m_e$.

El efecto de la disipación y la naturaleza del medio se introduce en la solución numérica² por medio del tiempo libre medio entre colisiones τ en las ecuaciones (1.15) y (2.17), que se conecta con la movilidad [42] a través de la relación

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_o}. \quad (3.1)$$

Elegimos un valor [42] de $\mu_e = 23m^2/Vs$ que corresponde a un tiempo $\tau = 8.8ps$.

En primer lugar imponemos las condiciones iniciales de la solución numérica del caso cuántico. En $t = 0$ localizamos el centro del paquete de onda en el origen (2.85), es decir, $\mathbf{r}(0) = x(0)\hat{\mathbf{i}} + y(0)\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$, el valor de la velocidad inicial es de $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{x}(0)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(0)\hat{\mathbf{j}} = (95km/s)\hat{\mathbf{i}}$. El ancho inicial del paquete de onda tiene un valor de $\sigma_o = 5\mu m$. En la figura (3.1) pueden verse los resultados de la solución numérica para los parámetros de las transformaciones unitarias en el dominio $t \in [0, 2ns]$ con campo magnético $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T)\hat{\mathbf{k}}$ y campo eléctrico nulo.

Como estamos en el caso de campo magnético constante, nos encontramos en uno de los vértices de la hipérbola de la ecuación (2.79), por esta razón los parámetros η y γ son cero en todo valor del tiempo. Además Δ (2.75) se simplifica en la constante $\Delta_o = m_o\omega_o/2 = -m_o\omega_c/2$ y $\theta = -\delta$. El comportamiento de estos dos últimos parámetros es del tipo logarítmico, esto se debe a que el campo magnético es constante y al MLMDT. Para encontrar la solución de los parámetros π_i y λ_i de la segunda transformación, primero desacoplamos las ecuaciones diferenciales (2.51)-(2.54) y con esto, resolvemos dos ecuaciones diferenciales de segundo grado para λ_i . Estas ecuaciones son

$$m\ddot{\lambda}_x + \dot{m}\dot{\lambda}_x + \frac{1}{4}m\omega^2\lambda_x = qE_x^R, \quad (3.2)$$

$$m\ddot{\lambda}_y + \dot{m}\dot{\lambda}_y + \frac{1}{4}m\omega^2\lambda_y = qE_y^R. \quad (3.3)$$

¹En teoría de semiconductores, el efecto del medio provoca que el electrón posea este valor masa. Su valor depende del tipo de semiconductor y de la orientación cristalina.

²Para obtener la solución numérica de las ecuaciones diferenciales acopladas en este capítulo, utilizamos el programa de computo científico *Mathematica*®.

3.1 Campo magnético constante y campo eléctrico nulo

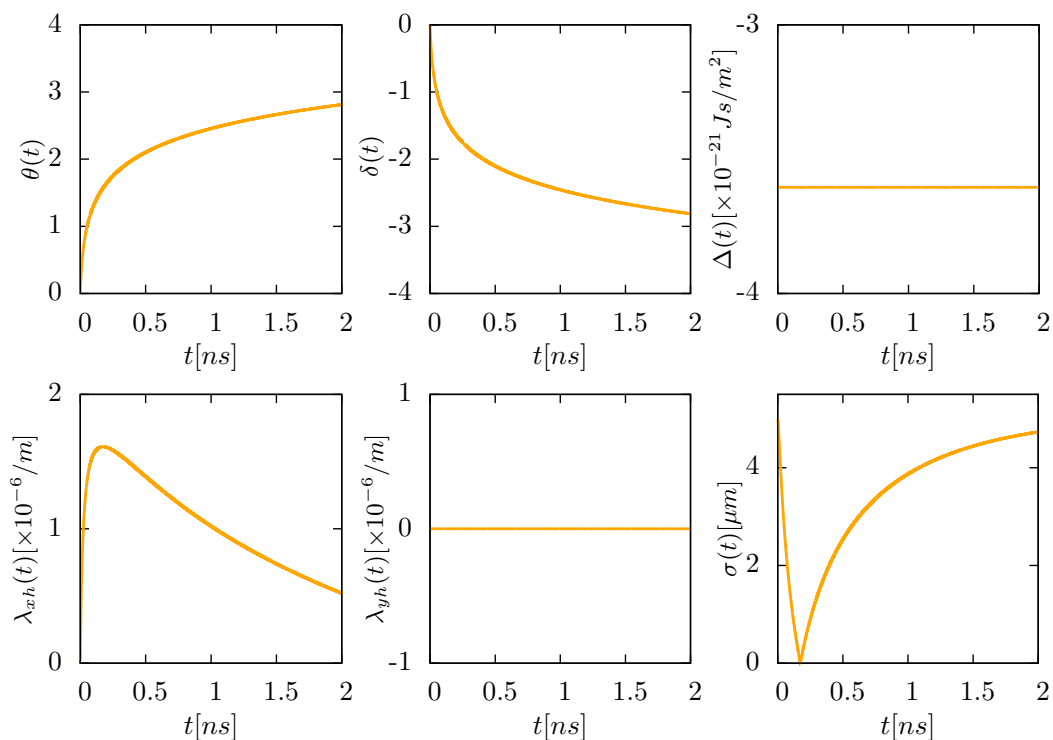


Figura 3.1: Solución numérica de las ecuaciones diferenciales en el caso cuántico. Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$.

Como el campo eléctrico es nulo, únicamente tenemos la solución de la parte homogénea. La solución de estas ecuaciones están dadas por (2.90)-(2.91), en este caso tenemos $\gamma = 0$, $\Delta = \Delta_o$ y $\mathbf{p}_o = m_o \dot{\mathbf{r}}(0)$. El comportamiento de estas soluciones homogéneas se muestra en la figura (3.1), donde por la condición inicial en velocidad en la componente x , la solución de λ_{yh} es cero ($p_{yo} = m_o \dot{y}(0) = 0$) para todo valor del tiempo. En este caso, el centroide del paquete (2.93) se reduce a $\zeta^R = \lambda_{xh} (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}})$, donde λ_{xh} contiene la posición inicial y la amplitud del movimiento del centroide a cada instante. La solución de los parámetros $\pi_i (-m \dot{\lambda}_i)$ de la segunda transformación provienen de la solución particular de las ecuaciones (3.2)-(3.3) y por lo tanto son cero.

Por último analizamos el comportamiento del ancho del paquete $\sigma(t)$. Este parte de la condición inicial, es decir $5\mu m$. Antes de $t = 0.5ps$, su valor decrece hasta que en un instante posee un ancho igual a cero, es decir, el paquete de onda se convierte en una función delta de Dirac (esta función conserva la probabilidad de nuestro sistema) y posteriormente crece hasta tener un ancho igual al inicial.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

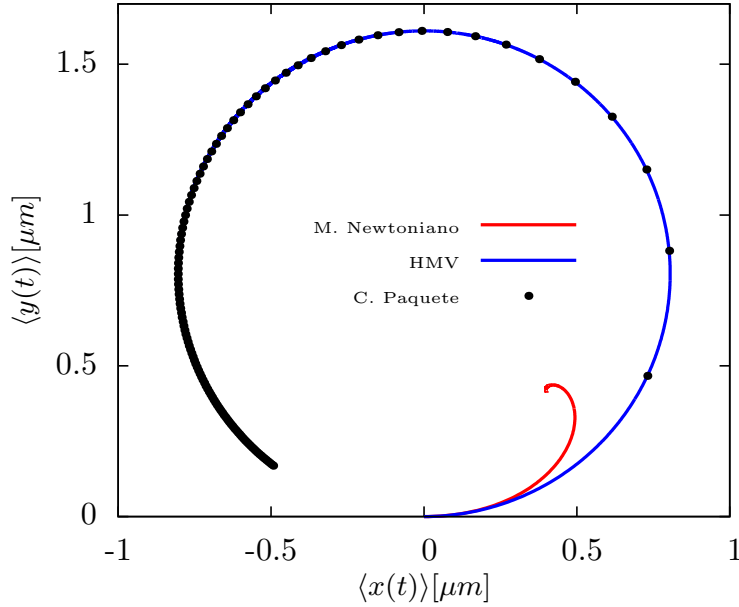


Figura 3.2: Trayectoria 2D para un electrón en un semiconductor de *GaAs*. Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HVM se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$ y $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$.

Con los resultados anteriores encontramos el centroide del paquete de onda del caso cuántico. También resolvemos numéricamente las ecuaciones diferenciales clásicas del modelo Newtoniano (1.20)-(1.21) y las ecuaciones clásicas del HVM (2.8)-(2.9) en el intervalo de tiempo $[0, 2ps]$.

Con estas soluciones numéricas mostramos en la figura (3.2) la trayectoria 2D del electrón para el modelo Newtoniano (línea roja), HVM (línea azul) y centroide del paquete de onda (puntos de color negro).

En esta figura (3.2), el electrón en el modelo del HVM clásico y para el centroide del paquete describen una misma trayectoria en todo momento. Esta es una prueba numérica del teorema de Ehrenfest. Sólo en un lapso corto de tiempo todos poseen la misma trayectoria, posteriormente el modelo Newtoniano decae rápidamente a un punto. Esto es, en el modelo Newtoniano la forma de la fuerza amortiguamiento provoca una trayectoria fuera de la órbita circular, mientras que en los otros modelos la fuerza de amortiguamiento (2.18) se realiza sobre la misma órbita circular, frenando su movimiento antes de completar una vuelta.

3.1 Campo magnético constante y campo eléctrico nulo

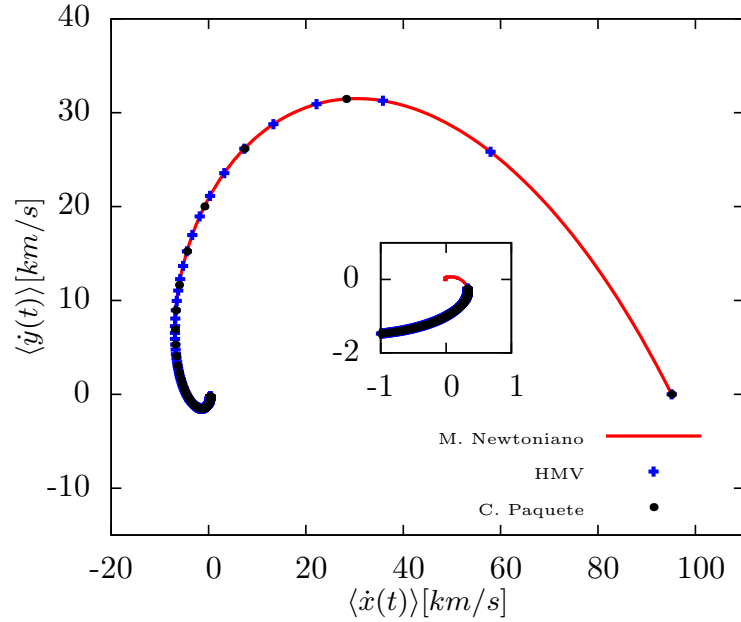


Figura 3.3: Gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de *GaAs*. Con $\mathbf{B} = (45 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$, campo eléctrico nulo y $\tau = 8.8ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HMV se tiene: $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$.

Un electrón sin fuerza de amortiguamiento, en presencia de un campo magnético perpendicular (en la dirección z), describe una trayectoria alrededor de una órbita circular en el plano (xy) con un radio dado por

$$r = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{m_0 \omega_0} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\omega_0}, \quad (3.4)$$

en la figura (3.2) observamos que el electrón se mueve en sentido antihorario en los tres casos de estudio.

En el HMV y el centroide del paquete de onda, el radio de la trayectoria en todo instante es $r = 0.805\mu m$, mientras que en caso Newtoniano el radio parte del valor anterior y posteriormente tiende a cero rápidamente.

Ahora estudiamos el comportamiento de la velocidad del electrón. En la figura (3.3) mostramos la solución en forma paramétrica de la velocidad en el modelo Newtoniano (línea roja), en la solución clásica del HMV (punto azul) y para centro del paquete (punto negro).

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

El comportamiento físico de la velocidad del electrón en la figura anterior sorprendentemente sigue una misma curva para los tres casos. Sin embargo no podemos decir que estos modelos tienen el mismo comportamiento, ya que el modelo Newtoniano alcanza el estado estacionario más rápido que los otros dos.

El valor del estado estacionario de las componentes de velocidad (2.19) - (2.20) es cero, ya que estamos en el caso de campo eléctrico nulo. Esto es, el electrón en un tiempo suficientemente grande es frenando completamente. En nuestra propuesta de disipación del HVM no alcanzamos el estado estacionario como en el caso Newtoniano, esto se debe al modelo lineal de la masa que empleamos. Sin embargo en un tiempo suficientemente mayor en la solución, se puede alcanzar este valor en velocidad terminal.

3.2. Campos magnético y eléctrico constantes

En esta sección estudiamos a un electrón sometido en campos magnético y eléctrico constantes de valores $\mathbf{B} = (90 \times 10^{-3}T) \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{E} = (100V/m) \hat{\mathbf{j}}$ respectivamente. El electrón se mueve en un medio de *GaAs*, en este caso empleamos un valor de movilidad [42] de $55.4m^2/Vs$ que corresponde a $\tau = 21.1ps$. Las condiciones iniciales son para la posición $\mathbf{r}(0) = x(0)\hat{\mathbf{i}} + y(0)\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$, y en velocidad $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{x}(0)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(0)\hat{\mathbf{j}} = (10km/s)\hat{\mathbf{j}}$. El ancho inicial del paquete de onda nuevamente es $5\mu m$.

Comenzamos con la solución de los parámetros de las transformaciones unitarias del caso cuántico. Mostramos las soluciones numérica de estos parámetros en la figura (3.4) en el dominio $t \in [0, 5ns]$.

Nuevamente estamos en el caso de campo magnético constante, así $\eta = \gamma = 0$, $\Delta = -m_o\omega_c/2$ y $\theta = -\delta$. Los dos últimos parámetros el comportamiento es logarítmico como consecuencia del MLMDT y el campo magnético constante.

En la solución de λ_i utilizamos las ecuaciones diferenciales (3.2)-(3.3). Como el campo eléctrico es constante y por la definición de las componentes del campo eléctrico rotado (2.43) en función de θ , las soluciones particulares λ_i son oscilatorias cuya amplitud aumenta con el tiempo. La solución del parámetro $\pi_i (-m\dot{\lambda}_i)$ tiene un comportamiento oscilatorio suave, cuya amplitud crece lentamente en el tiempo.

3.2 Campos magnético y eléctrico constantes

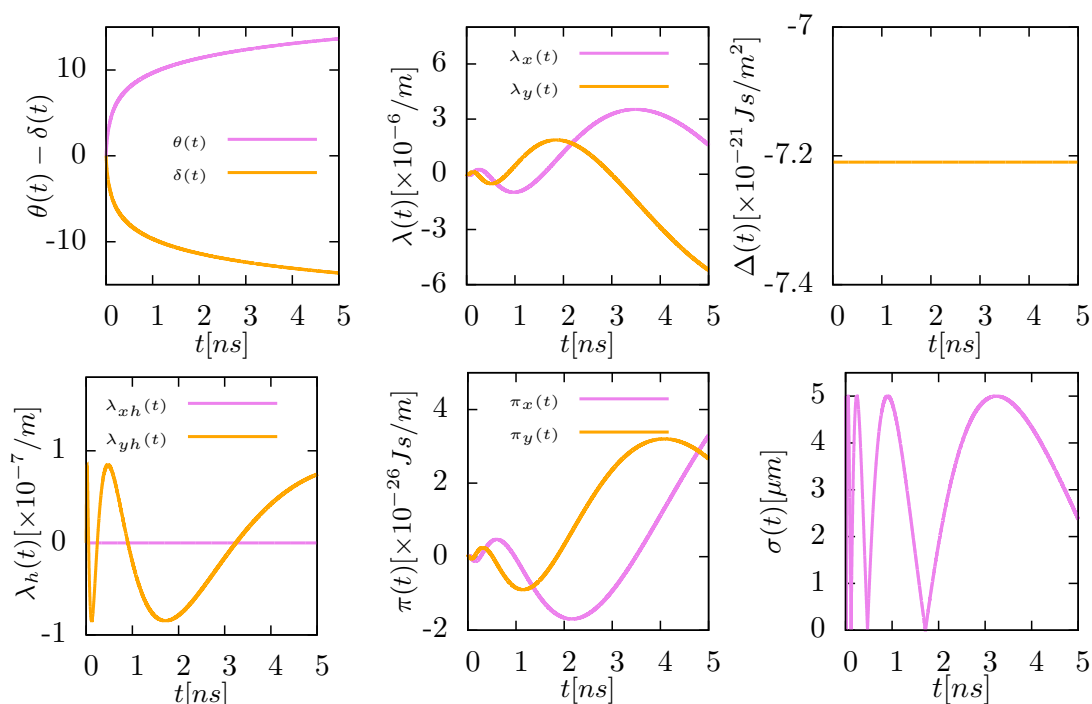


Figura 3.4: Solución numérica de las ecuaciones diferenciales en el caso cuántico. Con $\mathbf{B} = (90 \times 10^{-3} T) \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{E} = (100 V/m) \hat{\mathbf{j}}$ y $\tau = 21.1 ps$.

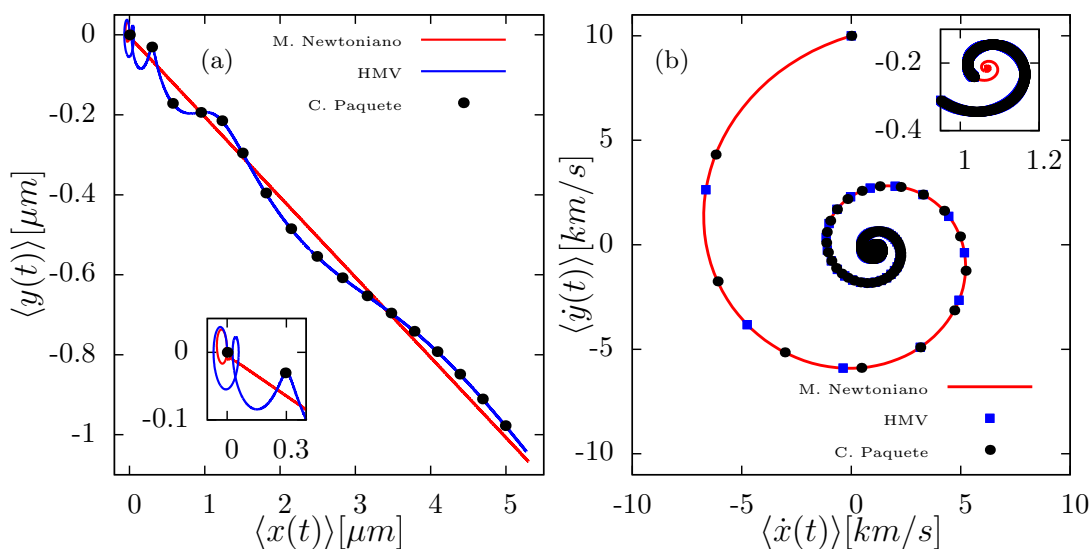


Figura 3.5: (a) Trayectoria 2D y (b) gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de *GaAs*. Con $\mathbf{B} = (90 \times 10^{-3} T) \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{E} = (100 V/m) \hat{\mathbf{j}}$ y $\tau = 21.1 ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HMV se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$, $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$, $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Respecto a las soluciones homogéneas λ_{ih} , como el momento inicial es $p_{yo} = m_o \dot{y}(0)$ la componente λ_{xh} es cero. Para λ_{yh} su comportamiento es oscilatorio debido principalmente a su definición (2.91) sobre el parámetro δ . El centroide del paquete (2.93) es $\zeta^R = \lambda_x^R \hat{\mathbf{i}} + (\lambda_y^R + \lambda_{yh}^R) \hat{\mathbf{j}}$ en este caso la componente y posee más influencia en la trayectoria.

El ancho del paquete de onda oscila entre cero y el valor inicial. Con este valor de movilidad, el paquete de onda posee más instantes en el tiempo en el que se convierte en un delta de Dirac.

Con las soluciones anteriores encontramos el centroide del paquete, también resolvemos numéricamente las ecuaciones en el caso Newtoniano y en el caso clásico HMV. En la figura (3.5), mostramos en (a) las soluciones de la trayectoria 2D y en (b) la solución en forma paramétrica de la velocidad; del modelo Newtoniano (línea roja), para HMV (línea/punto azul) y del centroide del paquete (punto negro).

El comportamiento de la trayectoria del electrón en los modelos del HMV y centroide del paquete es muy aproximada al modelo Newtoniano. En este caso, el electrón es arrastrado debido a la fuerza que provoca el campo eléctrico ($\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$), adicionalmente el campo magnético provoca un movimiento circular que es rápidamente desvanecido debido al amortiguamiento.

Para el comportamiento de la velocidad, los tres modelos siguen una misma trayectoria en forma de espiral, sin embargo el modelo Newtoniano converge más rápido al estado estacionario que el modelo del HMV y el centroide del paquete. Podemos encontrar el valor del estado estacionario usando las ecuaciones (2.19)-(2.20), el valor de campo magnético y el valor del campo eléctrico de esta sección. Así, $\dot{\mathbf{r}} = (1.07km/s)\hat{\mathbf{i}} - (0.21km/s)\hat{\mathbf{j}}$ es la velocidad terminal con la que se mueve el electrón en el semiconductor.

3.3. Campo magnético dependiente del tiempo.

Por último estudiamos el caso de un electrón sometido a un campo magnético dependiente del tiempo y con E_x, E_y iguales a cero en el potencial escalar ϕ (1.19). Elegimos la forma del campo magnético como una constante B_o más una perturbación temporal sinusoidal, dicho campo es

$$\mathbf{B} = B_o f(t) \hat{\mathbf{k}} = B_o \left[1 + \frac{1}{10} \text{sen} \left(\frac{\omega_c t}{10} \right) \right] \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.5)$$

3.3 Campo magnético dependiente del tiempo.

donde $B_o = 90 \times 10^{-3}T$ y $\omega_c = eB_o/m_o = 2.36 \times 10^{11} \frac{rad}{s}$.

De la sección (3.2) tomamos los mismos valores de movilidad, tiempo de colisión y condiciones iniciales para la solución numérica. Así $\mu_e = 55.4m^2/Vs$, $\tau = 21.1ps$, $\mathbf{r}(0) = x(0)\hat{\mathbf{i}} + y(0)\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{x}(0)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(0)\hat{\mathbf{j}} = (10km/s)\hat{\mathbf{j}}$. El electrón nuevamente se mueve en un medio de *GaAs*.

Debido a la forma temporal del campo magnético (3.5) y a que las ecuaciones diferenciales de los parámetros (2.76)-(2.78) son no lineales, la solución numérica de los parámetros es muy complicada. Para evitar este problema empleamos las ecuaciones diferenciales para la trayectoria del centroide del paquete (2.94)-(2.95) que corresponden a las mismas ecuaciones de movimiento (2.8)-(2.9) obtenidas del HMV.

Así en la figura (3.6) mostramos la solución numérica de la trayectoria 2D del electrón en el intervalo $t \in [0, 5ns]$. En (a) mostramos la solución del modelo Newtoniano (línea roja) y en (b) mostramos la solución para el HMV (línea azul) y del centroide del paquete (punto negro).

Como E_x, E_y son cero, la solución en los tres modelos se debe a la parte homogénea de la ecuación de movimiento, en este caso el centroide del paquete está dado por $\zeta^R = \lambda_{xh}^R \hat{\mathbf{i}} + \lambda_{yh}^R \hat{\mathbf{j}}$. En el caso del modelo Newtoniano la trayectoria del electrón decae en forma de una espiral, posteriormente el electrón abandona este movimiento y comienza a moverse sobre una hélice cuyo radio crece lentamente. En el modelo del HMV y centroide del paquete, el electrón se mueve en una órbita circular y debido a la perturbación sinusoidal en el campo magnético existe una fluctuación en el radio de giro (3.4), éste último varía entre los valores $3.41 \times 10^{-8}m$ y $4.34 \times 10^{-8}m$. Aquí el amortiguamiento se realiza sobre la misma órbita circular.

Respecto al comportamiento en la velocidad, en la figura (3.7) mostramos la solución en forma paramétrica del modelo Newtoniano (línea roja), para el HMV (punto azul) y del centroide del paquete (punto negro). La solución de la velocidad en los tres modelos es muy parecida, sin embargo el modelo Newtoniano no sigue estrictamente la misma trayectoria respecto al HMV y el centroide. En estos últimos dos, la trayectoria de la velocidad es la misma en todo momento.

³Esta frecuencia ($\nu = \omega_c/2\pi = 3.75 \times 10^{10}Hz$) se encuentra en el rango de microondas en el espectro electromagnético.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

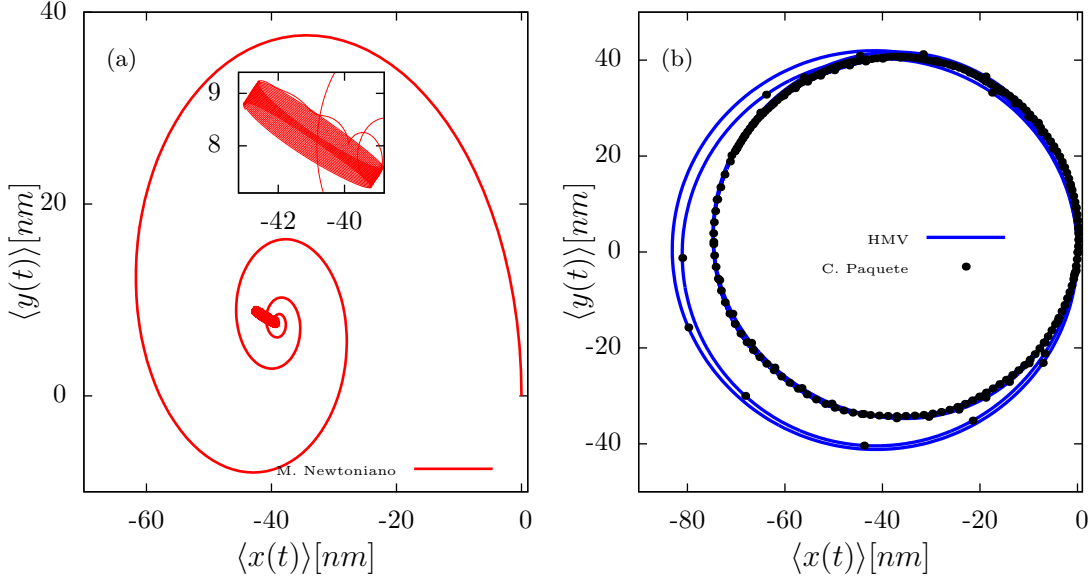


Figura 3.6: Trayectoria 2D para un electrón en un semiconductor de *GaAs*. Con un campo magnético dependiente del tiempo dado por (3.5), potencial eléctrico ϕ nulo y $\tau = 21.1ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HMV se tiene: $\langle x(t) \rangle \rightarrow x(t)$ y $\langle y(t) \rangle \rightarrow y(t)$.

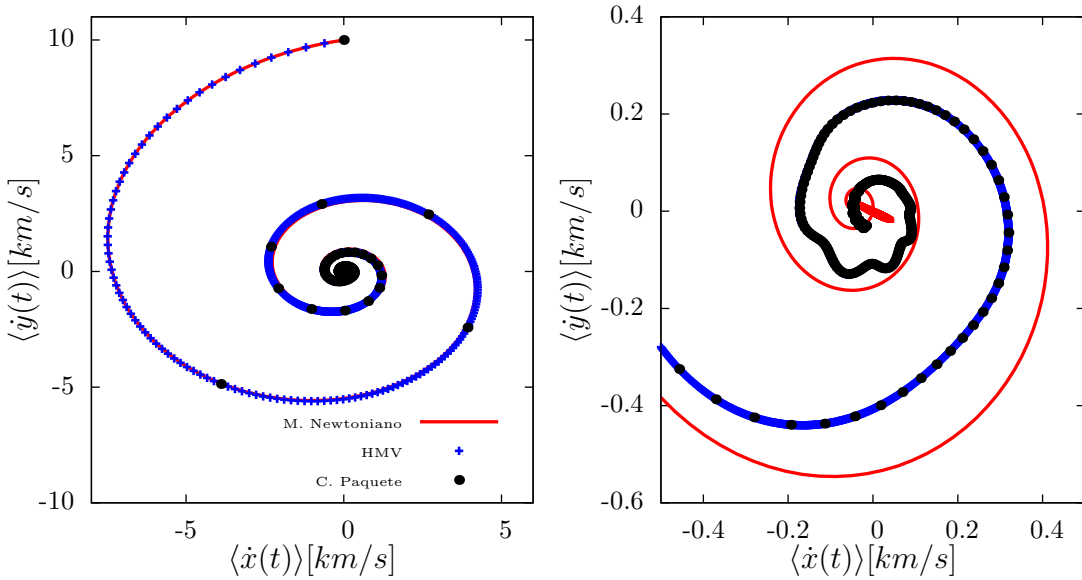


Figura 3.7: Gráfica paramétrica de la velocidad para un electrón en un semiconductor de *GaAs*. Con un campo magnético dependiente del tiempo dado por (3.5), potencial eléctrico ϕ nulo y $\tau = 21.1ps$. En los casos del modelo Newtoniano y del HMV se tiene: $\langle \dot{x}(t) \rangle \rightarrow \dot{x}(t)$ y $\langle \dot{y}(t) \rangle \rightarrow \dot{y}(t)$.

3.3 Campo magnético dependiente del tiempo.

En este caso las ecuaciones del estado estacionario (2.19)-(2.20) no son validas debido a la dependencia temporal del campo magnético. En este caso particular, para un tiempo suficientemente grande donde $m_o\ddot{x} = m\ddot{x} = 0$ en las ecuaciones del movimiento (1.15) y (2.4), las componentes de la velocidad dependen de las posiciones en los tres modelos, esto es

$$\dot{x} = \frac{q\tau\dot{B}}{2m_o} \left[\frac{y - \omega_B\tau x}{1 + \omega_B^2\tau^2} \right], \quad (3.6)$$

$$\dot{y} = -\frac{q\tau\dot{B}}{2m_o} \left[\frac{x + \omega_B\tau y}{1 + \omega_B^2\tau^2} \right], \quad (3.7)$$

donde $\omega_B = -eB/m_o = -\omega_c f(t)$. En la figura (3.7) podemos ver que el valor de las componentes se aproximan al origen en los tres modelos, pero su valor no es estrictamente cero.

4

Conclusiones y perspectivas

4.1. Conclusiones

En este trabajo estudiamos la disipación cuántica de una partícula cargada inmersa en campos magnético y eléctrico dependientes del tiempo a través de un Hamiltoniano de masa variable. A partir de un análisis clásico del problema, proponemos una dependencia temporal lineal en la masa. Esto nos permite obtener un estado estacionario en velocidad similar al modelo Newtoniano. El modelo Newtoniano se obtiene de la segunda ley de movimiento de Newton. *En general este modelo no puede ser estudiado a partir de un principio Hamiltoniano y de aquí la relevancia de este trabajo*

Para resolver el problema cuántico correspondiente, tres transformaciones unitarias son construidas explícitamente y aplicadas con el fin de reducir a cero el Hamiltoniano cuántico. En general dichas transformaciones son rotaciones, traslaciones, cizalladuras y dilataciones en el espacio de Hilbert. El problema se simplifica en ocho ecuaciones diferenciales de primer grado para los parámetros que empleamos en estas transformaciones. Este procedimiento nos permite el cálculo del operador de evolución temporal en condiciones bastantes generales, es decir, masa dependiente del tiempo y campo electromagnético variable. La función de Green se construye a través del operador de evolución temporal, la expresión obtenida es consistente con la forma obtenida por Schwinger y otros [39–41].

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Adicionalmente se encuentran los operadores de posición y momentos en la representación de Heisenberg que se expresan en términos de una combinación lineal simpléctica de su versión en la representación de Schrödinger.

Como ejemplo, se estudia la dinámica de un paquete de onda Gaussiano bajo campo magnético, campo eléctrico y amortiguación. Mostramos que la trayectoria de este paquete está dado en general, por la solución en dos ecuaciones diferenciales de segundo grado correspondientes a las componentes x y y de su movimiento. Estas ecuaciones se obtienen al combinar las ecuaciones diferenciales de los parámetros de las transformaciones unitarias y corresponden exactamente a las obtenidas clásicamente del HVM. De esta manera el paquete de onda y la partícula clásica siguen la misma trayectoria, es decir, comprobamos el teorema de Ehrenfest.

Por último resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento del modelo Newtoniano, para el HVM y del centroide del paquete para un electrón en un medio de *GaAs*, sujeto a las mismas condiciones (campo magnético, eléctrico, tiempo libre medio entre colisiones y condiciones iniciales). Estos resultados muestran que la trayectoria del electrón en el HVM y el centroide es la misma en todos los casos estudiados, lo que es una comprobación numérica del teorema de Ehrenfest. En el caso Newtoniano la trayectoria del electrón es diferente a los demás modelos. Sin embargo el comportamiento en su velocidad es muy parecido y se aproxima al mismo estado estacionario para estos tres modelos.

4.2. Perspectivas

Dentro de las perspectivas de este trabajo se deriva lo siguiente:

- Explorar nuevas formas en la dependencia de la masa con el fin de poder obtener exactamente el estado estacionario en velocidad que el modelo Newtoniano.
- Emplear otro modelo de disipación cuántica para partícula cargada, por ejemplo el modelo de Leggett-Caldeira, con el fin de comparar los resultados obtenidos en este trabajo.
- Adicionalmente dentro del estudio en la teoría de física del estado sólido, en la configuración de Hall los tensores de conductividad y resistividad son

usualmente obtenidos a partir de las ecuaciones clásicas de movimiento 2D de un electrón en un campo magnético perpendicular y un campo eléctrico en el plano. Pretendemos utilizar el operador de evolución temporal (2.70) y el operador de matriz de densidad en el cálculo los tensores de conductividad y resistividad para la configuración de Hall desde un punto de vista puramente cuántico.

Apéndices



Transformaciones unitarias

En este apéndice desarrollamos las reglas de transformación debidas a los operadores unitarios U_1 , U_2 y U_3 usadas en la sección (2.4).

Reglas de transformación de U_1

Comenzamos con la transformación para el operador de posición, si definimos

$$\hat{x}(\theta) = U_1 \hat{x} U_1^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

recordando que el operador U_1 en (2.40) es función del parámetro θ . Derivando respecto a este parámetro θ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \hat{x}(\theta) &= \left(\frac{i}{\hbar} \right) U_1 [\hat{L}_z, \hat{x}] U_1^\dagger \\ &= \left(\frac{i}{\hbar} \right) U_1 (i\hbar \hat{y}) U_1^\dagger \\ &= -\hat{y}(\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

con $\hat{y}(\theta) = U_1 \hat{y} U_1^\dagger$, similarmente

$$\frac{d}{d\theta} \hat{y}(\theta) = \hat{x}(\theta). \quad (\text{A.3})$$

A. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

Para desacoplar estas ecuaciones diferenciales para las transformaciones anteriores, derivamos una vez más respecto al parámetro θ obteniendo así las ecuaciones diferenciales de segundo grado

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\theta^2}\hat{x}(\theta) + \hat{x}(\theta) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\theta^2}\hat{y}(\theta) + \hat{y}(\theta) &= 0,\end{aligned}\tag{A.4}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}\hat{x}(\theta) &= \hat{c}_1 \cos \theta + \hat{c}_2 \sen \theta, \\ \hat{y}(\theta) &= \hat{c}_3 \cos \theta + \hat{c}_4 \sen \theta.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Si aplicamos las siguientes condiciones iniciales en este parámetro cuando $\theta(t=0) = 0$

$$\begin{aligned}\hat{x}(\theta=0) &= \hat{x}, \\ \hat{y}(\theta=0) &= \hat{y}, \\ \frac{d}{d\theta}\hat{x}(\theta)|_{\theta=0} &= -\hat{y}(\theta=0), \\ \frac{d}{d\theta}\hat{y}(\theta)|_{\theta=0} &= \hat{x}(\theta=0),\end{aligned}\tag{A.6}$$

encontramos el valor de los operadores $\hat{c}_1 = \hat{c}_4 = \hat{x}$, $\hat{c}_3 = -\hat{c}_2 = \hat{y}$, así

$$\begin{aligned}\hat{x}(\theta) &= U_1 \hat{x} U_1^\dagger = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sen \theta, \\ \hat{y}(\theta) &= U_1 \hat{y} U_1^\dagger = \hat{x} \sen \theta + \hat{y} \cos \theta.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Con un procedimiento completamente igual, se pueden deducir las reglas de transformación para los operadores de momento

$$\begin{aligned}\hat{p}_x(\theta) &= U_1 \hat{p}_x U_1^\dagger = \hat{p}_x \cos \theta - \hat{p}_y \sen \theta, \\ \hat{p}_y(\theta) &= U_1 \hat{p}_y U_1^\dagger = \hat{p}_x \sen \theta + \hat{p}_y \cos \theta.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Para la transformación de $i\hbar\partial_t$, partimos del lado derecho de la ecuación (2.26) y desarrollamos la parcial respecto al tiempo en la forma

$$U_1 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_1^\dagger [U_1 |\psi(t)\rangle] = U_1 \left(i\hbar \frac{\partial U_1^\dagger}{\partial t} \right) [U_1 |\psi(t)\rangle] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [U_1 |\psi(t)\rangle], \quad (\text{A.9})$$

así esta transformación se escribe como

$$U_1 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_1^\dagger = \dot{\theta} \hat{L}_z + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{A.10})$$

Reglas de transformación de U_2

Para encontrar las reglas de transformación debidas a U_2 mostramos únicamente como se transforma al operador de posición \hat{x} , el mismo procedimiento se realiza para los demás operadores de posición y momento. Así esta transformación se puede escribir de la siguiente manera

$$U_2 \hat{x} U_2^\dagger = \hat{x} + U_2 [\hat{x}, U_2^\dagger]. \quad (\text{A.11})$$

Para encontrar el conmutador $[\hat{x}, U_2^\dagger]$ utilizamos la siguiente relación de operadores [43]

$$[\hat{A}, F(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] \frac{\partial F(\hat{B})}{\partial \hat{B}}, \quad (\text{A.12})$$

con

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C},$$

y

$$[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0,$$

aquí $F(\hat{B})$ una función arbitraria del operador \hat{B} . Así (A.11) se reescribe como

$$U_2 \hat{x} U_2^\dagger = \hat{x} + U_2 [\hat{x}, \hat{p}_x] \frac{\partial U_2^\dagger}{\partial \hat{p}_x}, \quad (\text{A.13})$$

y de (2.47)

$$\frac{\partial U_2^\dagger}{\partial \hat{p}_x} = U_{2y}^\dagger \frac{\partial U_{2x}^\dagger}{\partial \hat{p}_x} U_{2t}^\dagger = U_2^\dagger \left(-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \right). \quad (\text{A.14})$$

A. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

De esta manera la regla de transformación del operador de posición \hat{x} es

$$U_2 \hat{x} U_2^\dagger = \hat{x} + \lambda_x. \quad (\text{A.15})$$

De manera similar para los operadores \hat{p}_x , \hat{y} y \hat{p}_y se tiene

$$\begin{aligned} U_2 \hat{p}_x U_2^\dagger &= \hat{p}_x + [\hat{p}_x, U_2^\dagger] = \hat{p}_x - \pi_x \\ U_2 \hat{y} U_2^\dagger &= \hat{y} + [\hat{y}, U_2^\dagger] = \hat{y} + \lambda_y \\ U_2 \hat{p}_y U_2^\dagger &= \hat{p}_y + [\hat{p}_y, U_2^\dagger] = \hat{p}_y - \pi_y \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

La transformación para $i\hbar\partial_t$ se obtiene de manera similar que en (A.10)

$$\begin{aligned} U_2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_2^\dagger &= U_2 \left(i\hbar \frac{\partial U_2^\dagger}{\partial t} \right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \dot{S} - \pi_x \dot{\lambda}_x - \pi_y \dot{\lambda}_y \\ &\quad + \dot{\lambda}_x \hat{p}_x + \dot{\lambda}_y \hat{p}_y + \dot{\pi}_x \hat{x} + \dot{\pi}_y \hat{y} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Reglas de transformación de U_3

Para encontrar las reglas de transformación de U_3 es necesario proceder separando en cada componente x y y usando la definición (2.58).

Comenzamos con la parte en x , recordando que el operador U_{3x} esta formado de una cizalladura y una dilatación. Escribimos este operador usando (2.59) de la siguiente manera

$$U_{3x} = U_{3x,d} U_{3x,c}, \quad (\text{A.18})$$

donde $U_{3x,d} = \exp \left[-i \frac{\gamma}{4\hbar} (\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}) \right]$ y $U_{3x,c} = \exp \left[i \frac{\delta}{2\hbar} (\Delta \hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta} \hat{p}_x^2) \right]$.

Encontramos los efectos del operador de posición y momento debido al termino de dilatación $U_{3x,d}$, siguiendo un desarrollo similar a U_1

$$\frac{d}{d\gamma} \hat{x}(\gamma) = -\frac{1}{2} \hat{x}(\gamma) \quad (\text{A.19})$$

y

$$\frac{d}{d\gamma}\hat{p}_x(\gamma) = \frac{1}{2}\hat{p}_x(\gamma). \quad (\text{A.20})$$

donde $\hat{x}(\gamma) = U_{3x,d}\hat{x}U_{3x,d}^\dagger$ y $\hat{p}_x(\gamma) = U_{3x,d}\hat{p}_xU_{3x,d}^\dagger$.

Al resolver las ecuaciones diferenciales anteriores e imponer las condiciones iniciales $\hat{x}(\gamma = 0) = \hat{x}$ y $\hat{p}_x(\gamma = 0) = \hat{p}_x$ se tiene

$$\begin{aligned} U_{3x,d}\hat{x}U_{3x,d}^\dagger &= \hat{x}e^{-\frac{\gamma}{2}}, \\ U_{3x,d}\hat{p}_xU_{3x,d}^\dagger &= \hat{p}_xe^{\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para hallar la regla de transformación para $i\hbar\partial_t$ usamos el desarrollo de (A.10)

$$U_{3x,d}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U_{3x,d}^\dagger = -\frac{\dot{\gamma}}{4}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{A.22})$$

Análogamente en el término debido a la cizalladura $U_{3x,c}$, tenemos

$$\frac{d}{d\delta}\hat{x}(\delta) = \frac{1}{\Delta}\hat{p}_x(\delta), \quad (\text{A.23})$$

y

$$\frac{d}{d\delta}\hat{p}_x(\delta) = -\Delta\hat{x}(\delta), \quad (\text{A.24})$$

aquí $\hat{x}(\delta) = U_{3x,c}\hat{x}U_{3x,c}^\dagger$ y $\hat{p}_x(\delta) = U_{3x,c}\hat{p}_xU_{3x,c}^\dagger$.

Derivando una vez más respecto al parámetro δ se pueden desacoplar el sistema anterior de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\delta^2}\hat{x}(\delta) + \hat{x}(\delta) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\delta^2}\hat{p}_x(\delta) + \hat{p}_x(\delta) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

Adicionalmente imponemos las condiciones iniciales respecto a este parámetro $\delta(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(\delta = 0) &= \hat{x}, \\
 \hat{p}_x(\delta = 0) &= \hat{p}_x, \\
 \frac{d}{d\delta}\hat{x}(\delta)|_{\delta=0} &= \frac{1}{\Delta}\hat{p}_x(\delta = 0), \\
 \frac{d}{d\delta}\hat{p}_x(\delta)|_{\delta=0} &= -\Delta\hat{x}(\delta = 0).
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Así, las reglas de transformación para $U_{3x,c}$ son

$$\begin{aligned}
 U_{3x,c}\hat{x}U_{3x,c}^\dagger &= \hat{x} \cos \delta + \frac{1}{\Delta}\hat{p}_x \sin \delta, \\
 U_{3x,c}\hat{p}_xU_{3x,c}^\dagger &= \hat{p}_x \cos \delta - \Delta\hat{x} \sin \delta.
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

En la regla de transformación para $i\hbar\partial_t$, nuevamente tenemos

$$U_{3x,c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{3x,c}^\dagger = U_{3x,c} \left(i\hbar \frac{\partial U_{3x,c}^\dagger}{\partial t} \right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \tag{A.28}$$

Para calcular la derivada $\partial U_{3x,c}^\dagger / \partial t$ usamos la definición completa de $U_{3x,c}$ (2.63) (con $\gamma = 0$), obteniendo

$$\begin{aligned}
 U_{3x,c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{3x,c}^\dagger &= \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin^2 \delta (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \\
 &+ \frac{1}{2\Delta} \left(\dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{p}_x^2 + \frac{\Delta}{2} \left(\dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{x}^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Las reglas totales de la transformación para U_{3x} se obtiene al aplicar consecutivamente $U_{3x,d}U_{3x,c}$ a cada uno de los operadores y se muestran en (2.60)-(2.61). Un desarrollo idéntico se tiene en la componente U_{3y} y las reglas de transformación son exactamente las mismas que las anteriores.

B

Cálculo de la función de Green

En este apéndice mostramos el cálculo de los elementos de matriz de la función de Green. Empleamos varias de las reglas de transformación de los operadores unitarios U_1 , U_2 y U_3 . Partimos de la definición (2.83)

$$G(x, y, t|x', y', 0) = \int \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \langle x, y|U_1^\dagger|x_1, y_1\rangle \times \langle x_1, y_1|U_2^\dagger|x_2, y_2\rangle \langle x_2, y_2|U_3^\dagger|x', y'\rangle. \quad (\text{B.1})$$

1er. Elemento de Matriz

A fin de calcular el elemento de matriz $\langle x, y|U_1^\dagger|x_1, y_1\rangle$, exploramos el efecto que tiene en el espacio de eigenket de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{x}U_1^\dagger|x, y\rangle &= U_1^\dagger U_1 \hat{x} U_1^\dagger|x, y\rangle \\ &= (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) U_1^\dagger|x, y\rangle \\ &= \hat{x}|x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, y\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

y de forma equivalente

$$\hat{y}U_1^\dagger|x, y\rangle = \hat{y}|x, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta\rangle. \quad (\text{B.3})$$

B. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE GREEN

De (B.2) y (B.3) es fácil ver que el efecto de U_1 sobre el espacio de eigenket es

$$U_1^\dagger |x, y\rangle = |x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta\rangle, \quad (\text{B.4})$$

y es fácil demostrar el efecto sobre el bra

$$\langle x, y | U_1^\dagger = \langle x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta |. \quad (\text{B.5})$$

Así el elemento de matriz toma la forma de un producto de deltas de Dirac

$$\begin{aligned} \langle x, y | U_1^\dagger | x_1, y_1 \rangle &= \langle x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta | x_1, y_1 \rangle \\ &= \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - x_1) \\ &\times \delta(y \cos \theta - x \sin \theta - y_1). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

2do. Elemento de Matriz

Para el segundo elemento de matriz $\langle x_1, y_1 | U_2^\dagger | x_2, y_2 \rangle$ dividimos la definición (2.47) en dos elementos correspondientes a cada componente x y y

$$\langle x_1, y_1 | U_2^\dagger | x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 | U_{2x}^\dagger | x_2 \rangle \langle y_1 | U_{2y}^\dagger | y_2 \rangle U_{2t}^\dagger. \quad (\text{B.7})$$

Usando la definición de U_{2x} analizamos el elemento de matriz $\langle x_1 | U_{2x}^\dagger | x_2 \rangle$ y nuevamente vemos el efecto sobre los eigenket de posición

$$U_{2x}^\dagger | x_2 \rangle = e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} e^{-i \frac{\pi_x}{\hbar} \hat{x}} | x_2 \rangle = e^{-i \frac{\pi_x}{\hbar} x_2} e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} | x_2 \rangle. \quad (\text{B.8})$$

Para calcular $e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} | x_2 \rangle$ realizamos

$$\begin{aligned} \hat{x} e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} | x_2 \rangle &= e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} e^{i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} \hat{x} e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} | x_2 \rangle \\ &= (x_2 + \lambda_x) e^{-i \frac{\lambda_x}{\hbar} \hat{p}_x} | x_2 \rangle \\ &= \hat{x} | x_2 + \lambda_x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De las relaciones (B.8) y (B.9) se obtiene

$$\langle x_1 | U_{2x}^\dagger | x_2 \rangle = e^{-i \frac{\pi_x}{\hbar} x_2} \delta(x_1 - x_2 - \lambda_x). \quad (\text{B.10})$$

Siguiendo un procedimiento equivalente en el elemento $\langle y_1 | U_{2y}^\dagger | y_2 \rangle$, obtenemos el segundo elemento de matriz (B.7)

$$\begin{aligned} \langle x_1, y_1 | U_2^\dagger | x_2, y_2 \rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\pi_x x_2 + \pi_y y_2)} \delta(x_1 - x_2 - \lambda_x) \\ &\times \delta(y_1 - y_2 - \lambda_y) U_{2t}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

3er. Elemento de Matriz

Por último encontramos el elemento $\langle x_2, y_2 | U_3^\dagger | x', y' \rangle$. De igual manera que el elemento anterior este se puede dividir en

$$\langle x_2, y_2 | U_3^\dagger | x', y' \rangle = \langle y_2 | U_{3y}^\dagger | y' \rangle \langle x_2 | U_{3x}^\dagger | x' \rangle. \quad (\text{B.12})$$

Encontramos $\langle x_2 | U_{3x}^\dagger | x' \rangle$ empleando (A.18) e introduciendo una base completa de posición

$$\langle x_2 | U_{3x}^\dagger | x' \rangle = \int dx_3 \langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle \langle x_3 | U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle. \quad (\text{B.13})$$

Para hallar $\langle x_3 | U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle$ es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} \hat{x} U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle &= U_{3x,d}^\dagger U_{3x,d} \hat{x} U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle \\ &= \mathcal{C} e^{-\gamma/2} x' U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle \\ &= \hat{x} (\mathcal{C} | e^{-\gamma/2} x' \rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

el coeficiente \mathcal{C} se debe al cambio de escala del espacio y la consecuente renormalización del eigenket, este tiene un valor $\mathcal{C} = e^{-\gamma/4}$. Por lo tanto de (B.14)

$$\langle x_3 | U_{3x,d}^\dagger | x' \rangle = e^{-\gamma/4} \delta(x_3 - e^{-\gamma/2} x'). \quad (\text{B.15})$$

Ahora pasamos al cálculo de $\langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle$. Usando las reglas de transformación (A.27) debidas a $U_{3x,c}$, realizamos el siguiente desarrollo

$$\langle x_2 | \left[U_{3x,c}^\dagger \left(U_{3x,c} \hat{x} U_{3x,c}^\dagger \right) \right] | x_3 \rangle.$$

B. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE GREEN

Con lo anterior generamos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle = - \left(\frac{i\Delta}{\hbar \sin \delta} \right) (x_2 - x_3 \cos \delta) \langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle, \quad (\text{B.16})$$

cuya solución

$$\langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle = C(x_2) \exp \left[\frac{i\Delta}{2\hbar \sin \delta} (x_3^2 \cos \delta - 2x_2 x_3) \right], \quad (\text{B.17})$$

donde $C(x_2)$ es una función y se determina a continuación.

Procediendo de manera similar para la segunda regla de transformación del operador momento obtenemos una segunda ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle = \frac{i\Delta}{\hbar} \left[\cot \delta x_2 - \frac{x_3}{\sin \delta} \right] \langle x_2 | U_{3x,c}^\dagger | x_3 \rangle, \quad (\text{B.18})$$

si utilizamos la solución (B.17) en la anterior ecuación podemos obtener una ecuación diferencial para $C(x_2)$

$$\frac{d}{dx_2} C(x_2) = i \frac{\Delta \cot \delta}{\hbar} x_2 C(x_2), \quad (\text{B.19})$$

cuya solución es

$$C(x_2) = A \exp \left(i \frac{\Delta \cot \delta}{2\hbar} x_2^2 \right) \quad (\text{B.20})$$

con A una constante.

Introduciendo (B.20) en (B.17) obtenemos

$$\langle x_2 | U_{3x,s}^\dagger | x_3 \rangle = A \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar \sin \delta} [(x_3^2 + x_2^2) \cos \delta - 2x_2 x_3] \right\}, \quad (\text{B.21})$$

la constante A se obtiene normalizando el elemento anterior y tiene un valor $A = \sqrt{\Delta / (2\pi \hbar \sin \delta)}$. Notamos que elemento de matriz para la cizalladura es de hecho el propagador para un oscilador armónico cuántico [11].

Utilizando estos elementos (B.15)-(B.21) es fácil resolver la integral (B.13) y encontrar

$$\langle x_2 | U_{3x}^\dagger | x' \rangle = \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi\hbar e^{\gamma/2} \sin \delta}} \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar \sin \delta} [(x_2^2 + (x')^2 e^{-\gamma}) \cos \delta - 2x_2 x' e^{-\gamma/2}] \right\}. \quad (\text{B.22})$$

Con un desarrollo completamente análogo se consigue el elemento $\langle y_2 | U_{3y}^\dagger | y' \rangle$.

Así el ultimo elemento de matriz involucrado (B.12) es

$$\begin{aligned} \langle x_2, y_2 | U_3^\dagger | x', y' \rangle &= \frac{\Delta e^{-\gamma/2}}{2\pi\hbar \sin \delta} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar \sin \delta} [(x_2^2 + (x')^2 e^{-\gamma}) \cos \delta - 2x_2 x' e^{-\gamma/2}] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\Delta}{2\hbar \sin \delta} [(y_2^2 + (y')^2 e^{-\gamma}) \cos \delta - 2y_2 y' e^{-\gamma/2}] \right\}. \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Empleando (B.6), (B.11) y (B.23) en la definición de la función de Green (B.1) se puede calcular muy fácilmente las integrales, ya que los dos primeros elementos de matriz contienen funciones Deltas de Dirac y únicamente se debe aplicar las propiedades de esta función. El resultado final es el mostrado en (2.84).



Artículo: Quantum and classical dissipation of charged particles

C.1. Resumen

Se presenta un enfoque Hamiltoniano para estudiar en dos dimensiones el movimiento de amortiguación para partículas cargadas en campos electromagnéticos externos dependientes del tiempo. El problema clásico y el correspondiente cuántico, se resuelven para determinados casos mediante transformaciones canónicas aplicadas a un Hamiltoniano de una partícula con masa variable. La función de Green se construye y, partir de está, se estudia el movimiento en detalle de un paquete de onda Gaussiano.

C.2. Abstrac

A Hamiltonian approach is presented to study the two dimensional motion of damped electric charges in time dependent electromagnetic fields. The classical and the corresponding quantum mechanical problems are solved for particular cases using canonical transformations applied to Hamiltonians for a particle with variable mass. Green's function is constructed and, from it, the motion of a Gaussian wave packet is studied in detail

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

C.3. Artículo: Annals of Physics 335(2013) 86-107

Annals of Physics 335 (2013) 86–107



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Annals of Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/aop



Quantum and classical dissipation of charged particles



V.G. Ibarra-Sierra^a, A. Anzaldo-Meneses^b, J.L. Cardoso^b,
H. Hernández-Saldaña^b, A. Kunold^{b,*}, J.A.E. Roa-Neri^b

^a Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana at Iztapalapa, Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, 09340 México D.F., Mexico

^b Área de Física Teórica y Materia Condensada, Universidad Autónoma Metropolitana at Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 México D.F., Mexico

H I G H L I G H T S

- Hamiltonian of a damped charged particle in time dependent electromagnetic fields.
- Exact Green's function of a charged particle in time dependent electromagnetic fields.
- Time evolution of a Gaussian wave packet of a damped charged particle.
- Classical and quantum dynamics of a damped electric charge.

A R T I C L E I N F O

Article history:

Received 27 November 2012

Accepted 29 April 2013

Available online 6 May 2013

Keywords:

Quantum dissipation

Exact result

Green function

A B S T R A C T

A Hamiltonian approach is presented to study the two dimensional motion of damped electric charges in time dependent electromagnetic fields. The classical and the corresponding quantum mechanical problems are solved for particular cases using canonical transformations applied to Hamiltonians for a particle with variable mass. Green's function is constructed and, from it, the motion of a Gaussian wave packet is studied in detail.

© 2013 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

The motion of particles in vacuum and diverse media with dissipation has been studied in classical and quantum physics since a long time. An important class of such problems is that of free electric charge carriers in a material under external time dependent electromagnetic fields. Of particular

* Corresponding author. Tel.: +52 5553189381.

E-mail address: akb@correo.azc.uam.mx (A. Kunold).

interest is the dissipation of energy through the interaction of charged carriers with the lattice ions (phonons) of the material, the carrier to carrier interaction through a Coulombian potential and, eventually, through radiation.

In classical systems damping is often described by including a velocity dependent drag term in Newton's second law. However, the inclusion of dissipation phenomena in quantum mechanics requires special care since its building blocks, time independent Hamiltonians, lead to energy conservation. This shortcoming is remedied in the heat bath approach [1,2] by coupling the single particle Hamiltonian with an infinite degrees of freedom system, e.g., an infinite collection of harmonic oscillators, to which the energy of the single particle is transferred. Even though the energy is conserved given that the single particle, heat bath and coupling Hamiltonians are time-independent, it is difficult to handle calculations with the many degrees of freedom of the heat bath [3]. The dynamics of an open quantum system [4] is often formulated in terms of a master equation for the density matrix, that allows us to work only with the single particle degrees of freedom by adding extra terms to the Von Neumann equation. Notwithstanding, the quantum system's change over time, in general, cannot be presented in terms of a unitary time evolution [3]. Other approaches to quantum dissipation include the use of effective Schrödinger equations [5,6] and functional integration [7,8].

In this work, we treat the problem of energy dissipation by means of a single charged particle *time dependent Hamiltonian* [9–11]. In contrast to time independent Hamiltonians, in the time dependent ones the energy is no longer a conserved quantity and therefore they allow for the possibility of energy loss. In particular, we study the Hamiltonian of a charged particle with minimal coupling under a time dependent electromagnetic field with a variable mass term that accounts for energy loss. Even though it has been shown that the use of minimal coupling procedure to switch on electromagnetic interactions in phenomenological quantum equations of damped motion leads to incorrect equations in the classical limit [6] we show that the standard Schrödinger equation with minimal coupling and a variable mass produce correct results for the stationary state of the particles motion and allow for the modeling of the transient state by means of the mass' time dependence.

In classical mechanics friction is usually analyzed introducing an opposing velocity-proportional force. The equation of motion of the particle can be usually built without difficulties from Newton's second law of motion. For a one dimensional particle with mass m subject to a potential U one has

$$m\ddot{x} + \frac{m}{\tau}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

where x is the position of the particle and τ is the collision time.

A deeper dynamical analysis is reached when the Hamiltonian formalism is applied. In the special case of one dimensional movement described by Eq. (1) the dynamics of a particle may be expressed by the Kanai–Caldirola (KC) Hamiltonian [9–11]

$$H = \frac{p^2}{2m} e^{-t/\tau} + U(x) e^{t/\tau}. \quad (2)$$

This Hamiltonian even allows for analytical treatment in some simple quantum mechanical systems as a free particle [12] ($U = 0$) and the harmonic oscillator [13–18].

A great deal of effort has been focused on the modeling of dissipation phenomena for a charged particle through time dependent Hamiltonians [19,20]. However, obtaining a Hamiltonian for a dissipative charged particle under electric and magnetic fields is not as straightforward as for the KC Hamiltonian (2). The assumption of a damping force proportional to the velocity does not lead to a Hamiltonian formulation, i.e., Newton's equations of motion

$$m\ddot{x} + \frac{m}{\tau}\dot{x} - qB\dot{y} - qE_x = 0, \quad (3)$$

$$m\ddot{y} + \frac{m}{\tau}\dot{y} + qB\dot{x} - qE_y = 0, \quad (4)$$

of a particle in perpendicular electric and magnetic fields $E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$ and $B\hat{k}$ respectively cannot be obtained from a Hamiltonian approach. From here on we call this the Newtonian model.

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

Nevertheless, as we shall demonstrate below, it is possible to model dissipation by introducing a time-dependent mass in the Hamiltonian for a charged particle

$$H = \frac{1}{2m(t)} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi + V. \quad (5)$$

The aim of this work is to study the dynamics of a damped charged particle in the presence of time dependent perpendicular electric and magnetic fields by means of a time dependent Hamiltonian. We obtain the general solutions for the equations of motion for the classical, as well as for the quantum problem, via the reduction of the Hamiltonian to zero by means of a series of linear canonical transformations in the classical case and corresponding unitary transformations in the quantum mechanical one. Here it is important to stress that, in general, in a large kind of dynamical systems the number of constants of motions is not enough to reduce the Hamiltonian to zero [21]. In this work, it is assumed that the Hamiltonian is at most quadratic in the canonical coordinates so that \mathbf{A} is at most linear in the generalized positions, but the scalar potentials can be quadratic.

The well known classical and quantum dynamics for a constant or a variable mass charged-particle in constant perpendicular electric and magnetic fields are recovered from our analysis.

This paper is organized as follows. In Section 2 we review the role of time dependent masses in the Hamiltonian of charged particles interacting with electromagnetic fields. In Section 3 we address the solution of the classical Hamiltonian via canonical transformations. The quantum mechanical problem is introduced in Section 4. Unitary transformations are applied to reduce the quantum mechanical Hamiltonian in Section 4.1. With the resulting time evolution unitary operator, Green's function is derived in Section 4.2. As an example we study the dynamics of a Gaussian wave packet under the action of the Hamiltonian solved in this paper in Section 4.3. We conclude in Section 4.3 with a summary of the results.

2. Hamiltonian with a variable mass

To study the above physical problems a geometric setting is adopted. Let the kinetic energy T be given by a smoothly varying family of Riemannian metrics $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{g}\dot{\mathbf{r}}) = \sum_{ij} g_{ij}(x, t) \dot{x}_i \dot{x}_j$ parametrized by time t on an n -dimensional manifold. The Lagrangian is then

$$L = T - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (6)$$

in terms of the vector potential \mathbf{A} and the scalar potential ϕ . The Hamiltonian is given by the Legendre transformation of the generalized velocities,

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = T + q\phi - q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (7)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \sum_k g_{jk} \dot{x}_k + qA_j, \quad (8)$$

and leads to a kinetic energy given in terms of the momenta as

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}, \mathbf{g}^{-1} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (g^{-1})_{ij} (p_i - qA_i) (p_j - qA_j). \quad (9)$$

In this approach it is assumed then that the media act on the particle by means of an alteration of the metric corresponding to replace the constant mass of the particle by a *time dependent* effective mass. Only the flat diagonal case $g_{ij} = \delta_{ij}m(t)$, with a time dependent mass, shall be studied here. However, more general metrics could be introduced in this manner, for example to include space inhomogeneities [22], but they shall not be considered in this work.

Let us here start with the classical Hamiltonian for a charged particle

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (10)$$

with a time dependent mass m . The equations of motion obtained from (10) are

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} - \frac{qA_i}{m}, \quad (11)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{q}{m} \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} (p_j - qA_j) - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (12)$$

written as Newton's second law they take the following form:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (13)$$

with $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ and $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$. It must be emphasized that this equation is obtained from a Hamiltonian variational principle.

In order to illustrate how to model dissipation through a time dependent mass let us consider a charged particle in uniform perpendicular magnetic and electric fields

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}}. \quad (15)$$

Separating the two components of Eq. (13) we obtain the following equations of motion for the particle

$$m\ddot{x} + \dot{m}\dot{x} - m\omega\dot{y} - qE_x = 0, \quad (16)$$

$$m\ddot{y} + \dot{m}\dot{y} + m\omega\dot{x} - qE_y = 0, \quad (17)$$

where

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (18)$$

is, in general, time dependent. Notice that for an electron ($q = -e$) for a constant magnetic field and mass $|\omega| = \omega_c = eB/m$ is the cyclotron frequency. In stationary state ($m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0$), the solution for these equations is

$$\dot{x} = \frac{q}{\dot{m}} \frac{E_x + (qB/\dot{m})E_y}{1 + (q^2B^2/\dot{m}^2)}, \quad (19)$$

$$\dot{y} = \frac{q}{\dot{m}} \frac{E_y - (qB/\dot{m})E_x}{1 + (q^2B^2/\dot{m}^2)}. \quad (20)$$

In order to test the time dependent mass model equations, especially the ones that describe the stationary state, let us try two different time dependent mass models. First we consider a KC-like mass [19,20]

$$m = m_0 e^{t/\tau}, \quad (21)$$

where, for example, m_0 and τ may be related to the effective mass and collision time in a semiconductor with mobility $\mu_e = nq^2\tau/m_0$ and charge carrier density n . Unlike the Newtonian model, in this case, the time dependent mass model yields vanishing velocity components even in the presence of an electric field. Well known results, as the magneto conductivity tensor in semiconductors [23], are contradicted by this calculation.

As a second example let us consider the following convenient choice of the mass' time dependence:

$$m = m_0 \left(\frac{t}{\tau} + k \right), \quad (22)$$

where k is a dimensionless positive parameter. We shall call this the linear time dependent mass model (LTDMM, for "short"). Eq. (13) can be conveniently recast as

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) - \dot{m}\dot{\mathbf{r}}. \quad (23)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

The two first terms on the right hand side of this equation correspond to the Lorentz force, whereas the last term accounts for damping. Indeed, for the LTDMM

$$m\dot{\mathbf{r}} = \frac{m_0}{\tau} \dot{\mathbf{r}}. \quad (24)$$

Here it is important to keep in mind that, despite the resemblance between Eq. (23) and the Newtonian model in Eqs. (3) and (4), in the former the mass is time dependent. Despite this difference, the stationary state for both models is the same. For the LTDMM the stationary state solution for the velocity components is in fact

$$\dot{x} = \frac{q\tau}{m_0} \frac{E_x + \omega_0\tau E_y}{1 + \omega_0^2\tau^2}, \quad (25)$$

$$\dot{y} = \frac{q\tau}{m_0} \frac{E_y - \omega_0\tau E_x}{1 + \omega_0^2\tau^2} \quad (26)$$

where $\omega_0 = \omega(t=0)$. Thus, our LTDMM approach and the Newtonian model given by Eqs. (3) and (4) yield the same non-vanishing stationary state solution even though their transient states might be slightly different.

However similar to the Newtonian approach, the LTDMM is only physically meaningful for $t > -k$ given that for $t \leq -k$ the mass becomes zero or even negative. One can overcome this limitation by proposing more complex models as

$$m(t) = m_0 \ln(1 + e^{t/\tau}), \quad (27)$$

that yield positive non-vanishing masses for all finite times and, regardless of its complexity, the same stationary state as the Newtonian and LTDMM models. Notice that this model interpolates between the KC model for $t \rightarrow -\infty$ and the LTDMM for $t \rightarrow \infty$.

To provide with a numerical example we have chosen a charged particle, e.g., an electron, in a GaAs sample with mobility $\mu_e = nq^2\tau/m_0 = 148 \text{ m}^2/\text{V s}$, that yields a collision time $\tau = 56 \text{ ps}$. The effective mass and charge will be set to $m_0 = 0.067m_e$ and $q = -e$, respectively, with e being the electric charge of the electron. The magnetic and electric fields are $B = 40 \text{ mT}$ and $E = 100 \text{ V/m}\hat{\mathbf{j}}$, respectively. The initial position and velocity of the particle are set to the origin and to $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}(0)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(0)\hat{\mathbf{j}} = 3.7 \text{ km/s}\hat{\mathbf{j}}$, respectively.

Fig. 1 shows a comparison between the parametric plots of $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$ for the Newtonian model (red) and the LTDMM (blue). We observe that even though both models present different trajectories for the transient state in $t \rightarrow \infty$ they have the same overall behavior.

In Fig. 2 we can see a parametric plot of the velocity vector $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{j}}$, for the LTDMM (blue dots) given by (22) and the Newtonian model (red solid line). Surprisingly both models plots are clearly over the same curve. Nevertheless we cannot say that both examples behave exactly the same since the Newtonian model reaches the terminal velocity faster than the LTDMM. This is shown in Figs. 3 and 4 where we can observe \dot{x} and \dot{y} plots for both models. We appreciate that the Newtonian model saturates after $t = 1 \text{ ns}$ meanwhile the LTDMM saturates after $t = 2.5 \text{ ns}$.

Since the LTDMM yields similar results as the Newtonian one, and both reach the same stationary state, we shall use it throughout the rest of the work for the numerical examples. Notwithstanding, all the calculations in next sections do not rely on a specific mass model.

3. The classical problem: canonical transformations

A possible procedure to solve analytically the previously depicted problem is to perform a set of canonical transformations [24]. Equivalently, also the proposal of a function of the canonical coordinates at most quadratic in the momenta has been successful in similar problems [25]. We chose this approach for the classical problem in order to establish a connection between the canonical and the unitary quantum transformations.

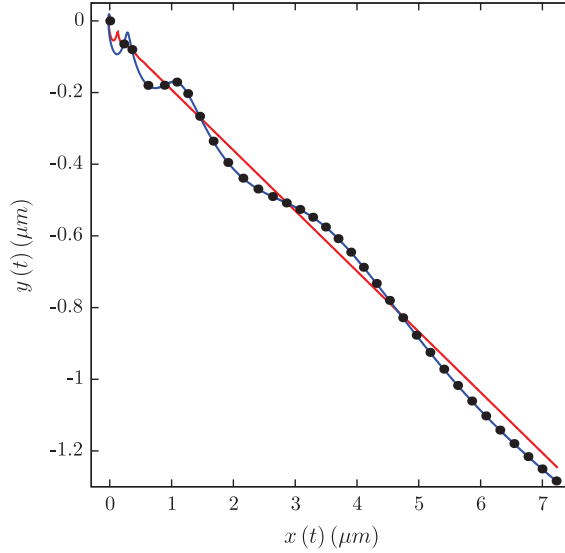


Fig. 1. (Color online) Trajectory of a charged particle for the Newtonian model (red solid line) given by Eqs. (3) and (4), the linear time dependent mass model (LTDMM) defined in Eq. (22) (blue solid line) and governed by Eqs. (16) and (17) and the center of the quantum mechanical Gaussian wave packet given by Eqs. (169)–(172) (black dots).

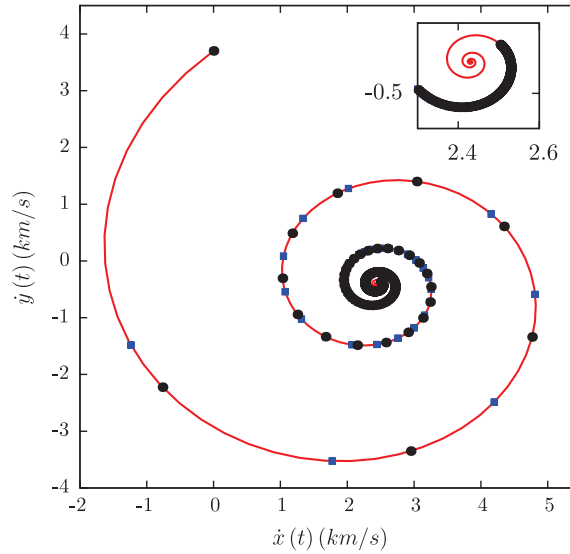


Fig. 2. (Color online) Parametric plot of the velocity components for a charged particle for the Newtonian model (red solid line) and the LTDMM for the classical case (blue dots) and the center of a quantum mechanical Gaussian wave packet (black points) as calculated in Section 4.3.

The reduction of the Hamiltonian (5) is accomplished by applying canonical transformations of a certain sub-group of the affine group, namely, translations, dilatations, shears, and rotations in phase space $\xi = (x, p)^t$,

$$\xi \mapsto \mathbf{M}\xi + \mu, \tag{28}$$

with time dependent vector μ , and time dependent non-singular symplectic matrix \mathbf{M} .

The study of a charged particle's motion under homogeneous electric and magnetic time dependent fields is of utmost importance in the experimental and theoretical analyses of solid state devices.

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

92

V.G. Ibarra-Sierra et al. / *Annals of Physics* 335 (2013) 86–107

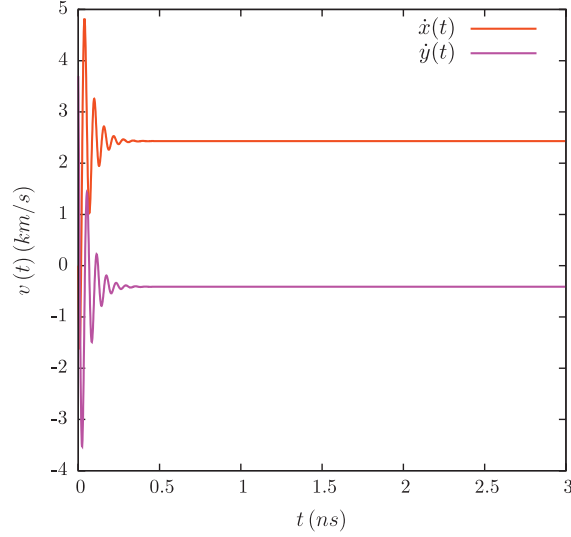


Fig. 3. (Color online) Velocity components, \dot{x} (blue solid line) and \dot{y} (red solid line), as functions of time for the Newtonian model.

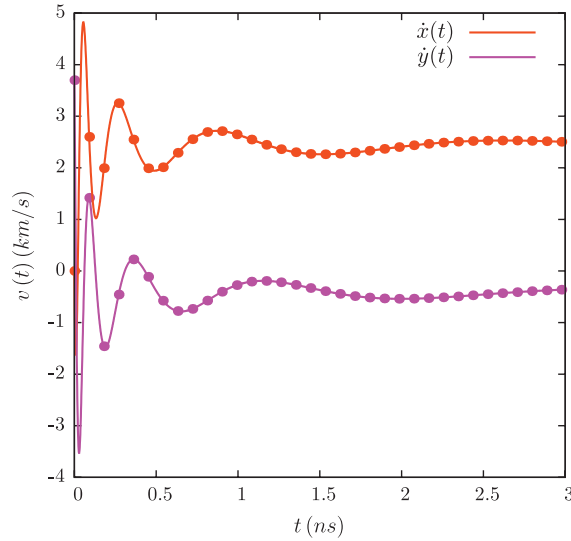


Fig. 4. (Color online) Velocity components, \dot{x} and \dot{y} , as functions of time for the LTDMM and for the center of the quantum mechanical Gaussian wave packet ζ_x^R and ζ_y^R (points) as well.

The building block of any theory explaining the integer and fractional quantum Hall effects [26,27], Shubnikov–de Haas oscillations [28], microwave induced resistance oscillations [29], Hall induced resistance oscillations, amongst others is the 2D electron in crossed electromagnetic fields. Therefore, we shall consider a 2D charge particle under a perpendicular magnetic field

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}, \quad (29)$$

with a vector potential given by

$$\mathbf{A} = -\frac{B}{2}y\hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}x\hat{\mathbf{j}}. \quad (30)$$

The in-plane electric field is

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\dot{B}}{2}y + E_x \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\dot{B}}{2}x - E_y \right) \hat{\mathbf{j}}, \quad (31)$$

with a scalar potential

$$\phi = -E_x x - E_y y. \quad (32)$$

Here B , E_x and E_y are functions only of time.

For the sake of simplicity and without any loss of generality, we have considered the simplest gauge transformation to write down the scalar and the vector potentials.

The resulting quadratic time dependent Hamiltonian for the mentioned fields is

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (x^2 + y^2) - \frac{\omega}{2} (xp_y - yp_x) - qE_x x - qE_y y, \quad (33)$$

where ω is in general a time dependent parameter given by (18). In order to generalize the problem we have added a confining potential $V = \kappa(t)(x^2 + y^2)/8$. Since z is cyclic, the momentum associated with it has been dropped but not forgotten. Here all coefficients are given smooth functions of time.

Our aim now is to reduce the Hamiltonian (33) to zero using canonical transformations (see for example [30]) of a certain sub-group of the affine group. The procedure can be summarized as follows. (1) The third term in H , corresponding to the coupling z component of the angular momentum, can be eliminated by a rotation leaving the first two terms invariant. The result is a Hamiltonian for two uncoupled one dimensional harmonic oscillators with variable masses and frequencies, as those considered in the literature; (2) a time dependent translation is performed to eliminate the linear contributions leading to an harmonic oscillator Hamiltonian with time dependent coefficients; (3) and, finally a dilatation and two shears are applied to reduce the Hamiltonian to zero. Hence, the final generalized momenta and positions are simultaneously constants of the motion and the original initial conditions, (p_0, q_0) , of our problem.

For the first step in our program we require the generating function of a rotation R for a finite angle $\theta(t)$ given by

$$F_1 = q^t R^t p_1 = xp_{x_1} \cos \theta + yp_{x_1} \sin \theta - xp_{y_1} \sin \theta + yp_{y_1} \cos \theta, \quad (34)$$

with the column vectors $q = (x, y)^t$ and $p_1 = (p_{x_1}, p_{y_1})^t$, being $p_1 = Rp$ and $q_1 = Rq$ the rotated coordinates. By means of this generating function we obtain the following transformation rules:

$$x_1 = \frac{\partial F_1}{\partial p_{x_1}} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (35)$$

$$y_1 = \frac{\partial F_1}{\partial p_{y_1}} = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (36)$$

and

$$p_x = \frac{\partial F_1}{\partial x} = p_{x_1} \cos \theta - p_{y_1} \sin \theta, \quad (37)$$

$$p_y = \frac{\partial F_1}{\partial y} = p_{x_1} \sin \theta + p_{y_1} \cos \theta. \quad (38)$$

Notice that we directly obtain the canonical transformations for p_{x_1} and p_{y_1} , given by the previous expressions, (37) and (38), but we need to solve Eqs. (35) and (36) to obtain the corresponding ones for x and y

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad (39)$$

$$y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta. \quad (40)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

Hence, the first transformed Hamiltonian is

$$H_1 = H^R + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) - \left(\frac{\omega}{2} + \dot{\theta} \right) (y_1 p_{x_1} - x_1 p_{y_1}) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (x_1^2 + y_1^2) - qE_x^R x_1 - qE_y^R y_1. \quad (41)$$

Here H^R is the original function, but now expressed in terms of the transformed coordinates and the rotated electric field

$$E_x^R = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \quad (42)$$

$$E_y^R = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta. \quad (43)$$

In order to reduce the angular momentum term in Eq. (41), we set

$$\dot{\theta} = -\frac{\omega}{2}, \quad (44)$$

and we obtain the direct sum of two one dimensional harmonic oscillator-like Hamiltonians

$$H_1 = \frac{1}{2m} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (x_1^2 + y_1^2) - qE_x^R x_1 - qE_y^R y_1. \quad (45)$$

All linear terms can now be reduced via space and momentum translations with the generating function

$$F_2 = (x_1 - \lambda_x) (p_{x_2} - \pi_x) + (y_1 - \lambda_y) (p_{y_2} - \pi_y) - S, \quad (46)$$

that yields the following transformation rules:

$$x_2 = \frac{\partial F_2}{\partial p_{x_2}} = x_1 - \lambda_x, \quad (47)$$

$$y_2 = \frac{\partial F_2}{\partial p_{y_2}} = y_1 - \lambda_y, \quad (48)$$

$$p_{x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = p_{x_2} - \pi_x, \quad (49)$$

$$p_{y_1} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = p_{y_2} - \pi_y, \quad (50)$$

where x_2, y_2, p_{x_2} and p_{y_2} are the new variables and S is the action. Here, λ_x and λ_y are time dependent parameters for the translation in coordinates, meanwhile π_x and π_y are the corresponding ones for the momentum space. In order to obtain the canonical transformations for x_1 and y_1 , we solve (47) and (48)

$$x_1 = x_2 + \lambda_x, \quad (51)$$

$$y_1 = y_2 + \lambda_y. \quad (52)$$

After transforming via F_2 the resulting Hamiltonian is

$$H_2 = \frac{1}{2m} (p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (x_2^2 + y_2^2) - \left(\frac{\pi_x}{m} + \dot{\lambda}_x \right) p_{x_2} - \left(\frac{\pi_y}{m} + \dot{\lambda}_y \right) p_{y_2} + \left[\frac{1}{4} (m\omega^2 + \kappa) \lambda_x - qE_x^R - \dot{\pi}_x \right] x_2 + \left[\frac{1}{4} (m\omega^2 + \kappa) \lambda_y - qE_y^R - \dot{\pi}_y \right] y_2 + \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) - qE_x^R \lambda_x - qE_y^R \lambda_y + \dot{\lambda}_x \pi_x + \dot{\lambda}_y \pi_y - \dot{S}. \quad (53)$$

In Hamiltonian H_2 the coefficients of x_2, y_2, p_{x_2} and p_{y_2} correspond to the Euler equations of the classical Lagrangian

$$L_1 = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) - qE_x^R \lambda_x - qE_y^R \lambda_y + \dot{\lambda}_x \pi_x + \dot{\lambda}_y \pi_y \quad (54)$$

for the translation parameters $\lambda_x, \lambda_y, \pi_x$ and π_y . In order for all the linear coefficients to vanish we require that this Lagrangian be the solution of the Euler equations for the translation parameters:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\pi}_x} - \frac{\partial L_1}{\partial \pi_x} = - \left(\frac{\pi_x}{m} + \dot{\lambda}_x \right) = 0, \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\pi}_y} - \frac{\partial L_1}{\partial \pi_y} = - \left(\frac{\pi_y}{m} + \dot{\lambda}_y \right) = 0, \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_x} - \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_x} = - \left[\frac{m\omega^2 + \kappa}{4} \lambda_x - qE_x^R - \dot{\pi}_x \right] = 0, \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_y} - \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_y} = - \left[\frac{m\omega^2 + \kappa}{4} \lambda_y - qE_y^R - \dot{\pi}_y \right] = 0. \quad (58)$$

Additionally, to remove the Lagrangian part, $L_1 - \dot{S} = 0$ must be fulfilled and consequently \dot{S} can be associated with the time derivative of the corresponding action.

The transformed Hamiltonian H_2 is thus simplified into

$$H_2 = \frac{1}{2m} (p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (x_2^2 + y_2^2). \quad (59)$$

The harmonic oscillator coefficient $m\omega^2 + \kappa$ can be expressed in terms of new parameters as

$$m\omega^2 + \kappa = m_0 \omega_0^2 e^{2\beta - \alpha}, \quad (60)$$

where $e^{2\beta} = f^2(t) + \kappa_0 e^\alpha g(t) / m_0 \omega_0^2$ contains the explicit time dependence of the given magnetic field $B = B_0 f(t)$, the confining potential $\kappa = \kappa_0 g(t)$ and

$$m(t) = m_0 e^{\alpha(t)}. \quad (61)$$

In terms of these variables, the Hamiltonian is rewritten as [31]

$$H_2 = \frac{e^{-\alpha}}{2m_0} (p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2) + \frac{1}{8} m_0 \omega_0^2 e^{2\beta - \alpha} (x_2^2 + y_2^2). \quad (62)$$

As a next step we consider a dilatation and two shears. The generating function for such a transformation is

$$F_3 = \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\cos \delta} (x_2 p_{x_3} + y_2 p_{y_3}) - \frac{e^\gamma \tan \delta}{2\Delta} (p_{x_3}^2 + p_{y_3}^2) - \frac{\Delta \tan \delta}{2} (x_2^2 + y_2^2) \quad (63)$$

with time dependent functions γ, δ and Δ . F_3 produces the following transformation rules:

$$x_3 = \frac{\partial F_3}{\partial p_{x_3}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\cos \delta} x_2 - \frac{e^\gamma \tan \delta}{\Delta} p_{x_3}, \quad (64)$$

$$y_3 = \frac{\partial F_3}{\partial p_{y_3}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\cos \delta} y_2 - \frac{e^\gamma \tan \delta}{\Delta} p_{y_3}, \quad (65)$$

$$p_{x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\cos \delta} p_{x_3} - \Delta \tan \delta x_2, \quad (66)$$

$$p_{y_2} = \frac{\partial F_3}{\partial y_2} = \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\cos \delta} p_{y_3} - \Delta \tan \delta y_2. \quad (67)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

We can obtain the corresponding canonical transformations by solving x_2 , y_2 , p_{x_2} and p_{y_2} from the previous equations

$$x_2 = e^{-\frac{1}{2}\gamma} x_3 \cos \delta + \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\Delta} p_{x_3} \sin \delta \quad (68)$$

$$p_{x_2} = e^{\frac{1}{2}\gamma} p_{x_3} \cos \delta - e^{-\frac{1}{2}\gamma} \Delta x_3 \sin \delta \quad (69)$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{2}\gamma} y_3 \cos \delta + \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\Delta} p_{y_3} \sin \delta \quad (70)$$

$$p_{y_2} = e^{\frac{1}{2}\gamma} p_{y_3} \cos \delta - e^{-\frac{1}{2}\gamma} \Delta y_3 \sin \delta. \quad (71)$$

Notice that even though the generating function F_3 in Eqs. (63)–(67) has multiple divergences when $\delta = (2n-1)\pi/2$, its corresponding canonical transformation rules (68)–(71) have none. These are the well known Arnold transformations [32,33]. It is possible to show that they comply with the condition necessary to preserve the value of the Wronskian

$$\det \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\gamma} \cos \delta & \frac{e^{\frac{1}{2}\gamma}}{\Delta} \sin \delta \\ -e^{-\frac{1}{2}\gamma} \Delta \sin \delta & e^{\frac{1}{2}\gamma} \cos \delta \end{pmatrix} = 1 \quad (72)$$

and for the transformation matrix to be symplectic.

Under F_3 , the new transformed Hamiltonian is

$$\begin{aligned} H_3 = & \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \cos^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \sin^2 \delta \right) - \dot{\delta} + \sin \delta \cos \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \right] \frac{e^\gamma}{2\Delta} (p_{x_3}^2 + p_{y_3}^2) \\ & + \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \sin^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \cos^2 \delta \right) - \dot{\delta} - \sin \delta \cos \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \right] \frac{\Delta e^{-\gamma}}{2} (x_3^2 + y_3^2) \\ & + \left[e^{-\alpha} \left(-\frac{\Delta}{m_0} + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \right) \sin \delta \cos \delta + \frac{\dot{\gamma}}{2} - \sin^2 \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \right] (x_3 p_{x_3} + y_3 p_{y_3}). \end{aligned} \quad (73)$$

In order to obtain a null Hamiltonian we set the coefficients of $(p_{x_3}^2 + p_{y_3}^2)$, $(x_3^2 + y_3^2)$ and $(x_3 p_{x_3} + y_3 p_{y_3})$ to zero. We, thus, obtain the following system of coupled differential equations for the transformation parameters:

$$0 = e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \cos^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \sin^2 \delta \right) - \dot{\delta} + \sin \delta \cos \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}, \quad (74)$$

$$0 = e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \sin^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \cos^2 \delta \right) - \dot{\delta} - \sin \delta \cos \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}, \quad (75)$$

$$0 = e^{-\alpha} \left(-\frac{\Delta}{m_0} + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \right) \sin \delta \cos \delta + \frac{\dot{\gamma}}{2} - \sin^2 \delta \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}. \quad (76)$$

The solutions to these differential equations cancel the whole Hamiltonian H_3 . In such a case x_3 , y_3 , p_{x_3} and p_{y_3} are constant in time and, therefore, they are constants of the motion. To simplify the structure of the differential equations and their solutions we propose

$$\Delta = \frac{1}{2} m_0 \omega_0 e^{\beta+\eta}, \quad (77)$$

where η is a time dependent function, yielding a simplification of the previous coupled equations

$$\dot{\delta} = \frac{1}{2} \omega_0 e^{\beta-\alpha} \cosh \eta, \quad (78)$$

$$\dot{\eta} + \dot{\beta} = \frac{1}{2}\omega_0 e^{\beta-\alpha} \sinh \eta (\tan \delta - \cot \delta), \quad (79)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_0 e^{\beta-\alpha} \sinh \eta \tan \delta. \quad (80)$$

For practical purposes the solutions of these equations, in the most general case, can be obtained by numerical methods. Nevertheless, it is possible to extract information from (78)–(80) by grouping the last three equations in a single hyperbolic one

$$\frac{\delta^2}{a^2} - \frac{(\dot{\gamma} - \dot{\beta} - \dot{\eta})^2}{b^2} = 1, \quad (81)$$

here $a = \omega_0 e^{\beta-\alpha}/2$ and $b = \omega_0 e^{\beta-\alpha}/\sin 2\delta$. If we use the η function as a parameter, we can rewrite the hyperbola with the parametric functions (78) and

$$\dot{\gamma} - \dot{\beta} - \dot{\eta} = \frac{\omega_0 e^{\beta-\alpha}}{\sin 2\delta} \sinh \eta. \quad (82)$$

For a given problem with no parabolic potential, $\kappa_0 = 0$, only one of the branches contains the physical solution. Each branch is associated with a given rotating direction of the charged particle.

In particular, the vertices of the hyperbola correspond to the constant magnetic field case. If we set ourselves in one of the vertices $\dot{\delta} = \omega_0 e^{\beta-\alpha}/2$ and by comparing with (78) we obtain that $\eta = 0$ and, consequently, $\dot{\beta} = 0$ and $\dot{\gamma} = 0$. This is indeed the case when the magnetic field is a constant, i.e. $\beta = 0$ and $\gamma = 0$. In this manner we find that with an appropriate time dependent mass model and the initial condition $\delta(0) = 0$ we can integrate $\dot{\delta} = \omega_0 e^{-\alpha}/2$ and obtain δ , the only relevant parameter under the conditions described above.

It is well-known that the time reversal symmetry is broken by a constant magnetic field, even though we have a frictionless problem, this symmetry breaking is the cause of the existence of two vertices. More generally, for a problem where the magnetic field is a function of time, the solution is given by another region at the hyperbola branch. In other words, the hyperbolic behavior of Eqs. (78)–(80) is a consequence of the magnetic field's time reversal asymmetry.

The last transformation gives the solution to the initial problem describing the motion of a charged particle under the influence of the potentials (32) and (30) where the electric and magnetic fields are only time-dependent functions. Under the previous three transformations, we find that x_3, y_3, p_{x_3} and p_{y_3} are constants along the classical orbit followed by the particle. In other words, x_3, y_3, p_{x_3} and p_{y_3} are the initial conditions and we shall rename them as $x_3 = x_0, y_3 = y_0, p_{x_3} = p_{x_0}$ and $p_{y_3} = p_{y_0}$.

It is also possible to figure out a single canonical transformation after adequately collecting all the above contributions into the following form:

$$\xi = \mathbf{M}\xi_0 + \mu, \quad (83)$$

where \mathbf{M} is a symplectic matrix given by

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta & -\frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta \\ e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta & \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta \\ -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta & -e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \\ -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta & e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \end{bmatrix} \quad (84)$$

and

$$\mu = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\pi_x \\ -\pi_y \end{bmatrix}. \quad (85)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

As an example, we consider the simplest case when the magnetic field and the mass are constants, meanwhile both the confining potential and the electric field are absent. In such a case $\delta = -\theta = (\omega_0/2)t$, $\Delta = m_0\omega_0/2$ and there is no dilatation; hence $\gamma = 0$ and $\eta = 0$. By using Eq. (83) all the position and the momentum variables can be expressed as a function of time and the initial conditions

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \omega_0 t) & \frac{1}{2} \sin \omega_0 t & \frac{\sin \omega_0 t}{\cos \omega_0 t - 1} & \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\sin \omega_0 t} \\ -\frac{1}{2} \sin \omega_0 t & \frac{1}{2}(1 + \cos \omega_0 t) & \frac{m_0 \omega_0}{m_0 \omega_0} & \frac{m_0 \omega_0}{m_0 \omega_0} \\ -\frac{1}{4} m_0 \omega_0 \sin \omega_0 t & \frac{1}{4} m_0 \omega_0 (\cos \omega_0 t - 1) & \frac{1}{2}(1 + \cos \omega_0 t) & \frac{1}{2} \sin \omega_0 t \\ \frac{1}{4} m_0 \omega_0 (1 - \cos \omega_0 t) & -\frac{1}{4} m_0 \omega_0 \sin \omega_0 t & -\frac{1}{2} \sin \omega_0 t & \frac{1}{2}(1 + \cos \omega_0 t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ p_{x_0} \\ p_{y_0} \end{bmatrix}. \quad (86)$$

This last result is consistent with the solution obtained directly from the Hamilton equations of motion. The motion described in the previous equations is periodic, with period $T = 2\pi/\omega_0$ and ω_0 is the Larmor frequency. The periodicity can be deduced from the behavior of the block matrices **a** and **d** in (84) since they become unit matrices for $t = T$, meanwhile **b** and **c** become zero. The charged particle is moving around a circular orbit in the plane xy with radius $r = \sqrt{p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2}/m_0\omega_0$. Physically, the trajectories of the particles are curved due to the Lorentz force; nevertheless, when the magnetic field B_0 is small, the motion of the particles is almost linear (r grows). For the larger values of B_0 , the particle's motion is highly curved (r decreases). The last feature is given by the off-diagonal block matrices **b** and **c**.

It is important to notice that in the Hamiltonian H_3 we can set the two first coefficients to $\omega_0/2$ instead of zero as in Eqs. (74) and (75), meanwhile we keep the null equation (76). In this case we obtain a KC-like Hamiltonian, but the equations that must be satisfied in order to obtain a solution are much more complex.

4. The quantum problem: unitary transformations

The classical calculations presented in the previous section allow us to set a framework for a quantum mechanical analog of (33) through the Schrödinger equation

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = \hat{p}_t|\psi(t)\rangle, \quad (87)$$

where the quantum mechanical Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}})^2 + q\phi + \frac{\kappa}{8} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2). \quad (88)$$

Here, \hat{p}_t is the energy operator, i.e., $\hat{p}_t \rightarrow i\hbar\partial_t$ and \hat{x} , \hat{y} , \hat{p}_x and \hat{p}_y are the space and momentum operators such that

$$\hat{x}|x, y\rangle = x|x, y\rangle, \quad (89)$$

$$\hat{y}|x, y\rangle = y|x, y\rangle, \quad (90)$$

$$\hat{p}_x|p_x, p_y\rangle = p_x|p_x, p_y\rangle, \quad (91)$$

$$\hat{p}_y|p_x, p_y\rangle = p_y|p_x, p_y\rangle, \quad (92)$$

where $|x, y\rangle$ and $|p_x, p_y\rangle$ are the space and momentum eigenstates respectively. The space and momentum operators follow the usual commutation relations

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (93)$$

as well as the energy operator and time

$$[\hat{p}_t, t] = i\hbar. \quad (94)$$

The physical electric and magnetic fields \mathbf{E} and \mathbf{B} , respectively, are obtained as usual from the scalar and vector potentials ϕ and \mathbf{A} by the relations (29) and (31) as we discussed in Section 2.

The integration of the quantum mechanical problem follows the same path as the classical problem. The reduction of the Hamiltonian is now easily achieved by unitary transformations [34–37], each one associated with one of the three classical canonical transformations applied in Section 3. Each reduction step has the following structure:

$$U\hat{H}U^\dagger U|\psi(t)\rangle = U\hat{p}_t U^\dagger U|\psi(t)\rangle \Rightarrow \hat{H}'|\psi'(t)\rangle = \hat{p}_t|\psi'(t)\rangle \quad (95)$$

with $\hat{H}' = U\hat{H}U^\dagger - U[\hat{p}_t, U^\dagger]$, and $|\psi'(t)\rangle = U|\psi(t)\rangle$.

The Floquet operator is thus given by

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} - \hat{p}_t, \quad (96)$$

and the Schrödinger equation takes the compact form

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle = (\hat{H} - \hat{p}_t)|\psi(t)\rangle = 0. \quad (97)$$

Our aim now is to study the Hamiltonian in Eq. (88) for the particular case analyzed in Section 3 of magnetic and perpendicular electric fields of Eqs. (29) and (31). Such fields can be obtained from the potentials in (30) and (32). The quantum mechanical potentials are thus given by

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} (-\hat{y}\mathbf{i} + \hat{x}\mathbf{j}), \quad (98)$$

$$\phi = -E_x(t)\hat{x} - E_y(t)\hat{y}. \quad (99)$$

In this gauge, the Floquet operator takes the following form:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{2}\hat{y} \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB}{2}\hat{x} \right)^2 \right] - q[E_x(t)\hat{x} + E_y(t)\hat{y}] + \frac{\kappa}{8}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \hat{p}_t. \quad (100)$$

4.1. Evolution operator

To obtain the evolution operator for the Hamiltonian in (88) in the presence of the magnetic and electric fields given by Eqs. (29) and (31), respectively, we proceed in a similar fashion to the classical case in Section 3. We apply a series of unitary transformations, each corresponding to a canonical transformation of the classical case.

The first unitary transformation, a rotation around the z axis [34], corresponds to the canonical transformation in Eq. (34) and is given by

$$U_1 = \exp\left(i\frac{\theta\hat{L}_z}{\hbar}\right), \quad (101)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

where $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ is the angular momentum along the z axis. It has the following effect on the position, momentum and energy operators

$$U_1\hat{x}U_1^\dagger = \hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta, \quad (102)$$

$$U_1\hat{y}U_1^\dagger = \hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta, \quad (103)$$

$$U_1\hat{p}_xU_1^\dagger = \hat{p}_x\cos\theta - \hat{p}_y\sin\theta, \quad (104)$$

$$U_1\hat{p}_yU_1^\dagger = \hat{p}_x\sin\theta + \hat{p}_y\cos\theta, \quad (105)$$

$$U_1\hat{p}_tU_1^\dagger = \hat{p}_t + \theta\hat{L}_z. \quad (106)$$

Note that U_1 leaves invariant the quadratic forms $\hat{x}^2 + \hat{y}^2$ and $\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2$, yielding the transformed Floquet operator

$$U_1HU_1^\dagger = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8}(m\omega^2 + \kappa)(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - q(E_x^R\hat{x} + E_y^R\hat{y}) - \left(\dot{\theta} + \frac{qB}{2m}\right)\hat{L}_z - \hat{p}_t, \quad (107)$$

where E_x^R and E_y^R are the rotated components of the electric field given in Eqs. (42) and (43), respectively. If the time dependent parameter θ of the U_1 transformation follows Eq. (44) it is possible to reduce the term proportional to the angular momentum \hat{L}_z . The Floquet operator is thus completely separated into the x and y parts. Now the Schrödinger equation takes the shape of two uncoupled one dimensional harmonic oscillators. Here it is important to set $\theta(0) = 0$ as the initial condition for the parameter in order that U_1 goes to unity as $t \rightarrow 0$. We will set this initial condition for all the transformations' parameters. Once the Floquet operator is separated we can proceed to reduce each part with the unitary transformations. We note that if m is time independent then $\theta = -\omega_0 t/2$ with $\omega_0 = qB_0/m_0$. In this case, the charged particle motion is taken to a reference system that turns at half the cyclotron angular frequency.

The next unitary transformation corresponds to displacements in space, momentum and energy and is associated with the canonical transformation (46). It is given by

$$U_2 = U_{2t}U_{2x}U_{2y}, \quad (108)$$

where

$$U_{2t} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(t)\right], \quad (109)$$

$$U_{2x} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\pi_x(t)\hat{x}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\lambda_x(t)\hat{p}_x\right], \quad (110)$$

$$U_{2y} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\pi_y(t)\hat{y}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\lambda_y(t)\hat{p}_y\right], \quad (111)$$

with time dependent transformation parameters $S(t)$, $\lambda_x(t)$, $\pi_x(t)$, $\lambda_y(t)$ and $\pi_y(t)$. This unitary operator (108) yields the following transformation rules:

$$U_2\hat{x}U_2^\dagger = \hat{x} + \lambda_x(t), \quad (112)$$

$$U_2\hat{p}_xU_2^\dagger = \hat{p}_x - \pi_x(t), \quad (113)$$

$$U_2\hat{y}U_2^\dagger = \hat{y} + \lambda_y(t), \quad (114)$$

$$U_2\hat{p}_yU_2^\dagger = \hat{p}_y - \pi_y(t), \quad (115)$$

$$U_2\hat{p}_tU_2^\dagger = \hat{p}_t + \dot{S} - \dot{\lambda}_x\pi_x - \dot{\lambda}_y\pi_y + \dot{\pi}_x\hat{x} + \dot{\lambda}_x\hat{p}_x + \dot{\pi}_y\hat{y} + \dot{\lambda}_y\hat{p}_y. \quad (116)$$

Now we apply successively transformations U_1 and U_2 to the Floquet operator (96) obtaining

$$U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger = \frac{1}{2m} \left[(\hat{p}_x - \pi_x)^2 + (\hat{p}_y - \pi_y)^2 \right] + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\hat{x} + \lambda_x)^2 + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\hat{y} + \lambda_y)^2 - q \left[E_x^R (\hat{x} + \lambda_x) + E_y^R (\hat{y} + \lambda_y) \right] - \hat{p}_t - \dot{S}(t) + \dot{\lambda}_x \pi_x + \dot{\lambda}_y \pi_y - \dot{\pi}_x \hat{x} - \dot{\pi}_y \hat{y} - \dot{\lambda}_x \hat{p}_x - \dot{\lambda}_y \hat{p}_y. \quad (117)$$

In the previous transformed Floquet operator, as in the classical Hamiltonian, we identify the Lagrangian L_1 of the transformation parameters and the corresponding Euler equations (55)–(58). Eq. (117) can be recast in the following form:

$$U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_x} - \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_x} \right] \hat{x} + \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\pi}_x} - \frac{\partial L_1}{\partial \pi_x} \right] \hat{p}_x - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_y} - \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_y} \right] \hat{y} + \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\pi}_y} - \frac{\partial L_1}{\partial \pi_y} \right] \hat{p}_y - p_t + L_1 - \dot{S}. \quad (118)$$

In order to reduce the linear terms and simplify the Floquet operator, we assume that the Euler equations (55)–(58) are met for the parameters $\lambda_x, \lambda_y, \pi_x, \pi_y$ and S . The transformed Floquet operator (117) is thus simplified into

$$U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \hat{p}_t. \quad (119)$$

Corresponding to the F_3 canonical transformation in Eq. (63), the last unitary transformation can be split into the x and y parts as shown below:

$$U_3 = U_{3x} U_{3y}. \quad (120)$$

The first unitary transformations on the right hand side are devoted to reducing the quadratic terms in the x part of the Floquet operator and correspondingly the second term reduces the y part of the Hamiltonian.

The first transformation corresponds to a shear and is given by

$$U_{3x} = \exp \left[-i \frac{\gamma}{4\hbar} (\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}) \right] \exp \left[i \frac{\delta}{2\hbar} \left(\Delta \hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta} \hat{p}_x^2 \right) \right], \quad (121)$$

and yields the following transformation rules:

$$U_{3x} \hat{x} U_{3x}^\dagger = e^{-\frac{\gamma}{2}} \hat{x} \cos \delta + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \hat{p}_x \sin \delta, \quad (122)$$

$$U_{3x} \hat{p}_x U_{3x}^\dagger = e^{\frac{\gamma}{2}} \hat{p}_x \cos \delta - e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \hat{x} \sin \delta, \quad (123)$$

$$U_{3x} \hat{p}_t U_{3x}^\dagger = \hat{p}_t + \left(\frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin^2 \delta - \frac{\dot{\gamma}}{4} \right) (\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}) + \frac{e^\gamma}{2\Delta} \left(\dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{p}_x^2 + \frac{\Delta e^{-\gamma}}{2} \left(\dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \sin 2\delta \right) \hat{x}^2. \quad (124)$$

The first two equations are in fact the quantum version of the Arnold transformation [32,33] as pointed out in Section 3. In order to compute Eq. (124) it is necessary to obtain the time derivative of the unitary transformation. One way to perform this derivative would be to use the Magnus formula [38,39] since it cannot be computed by direct derivation because the generator of (121) does not necessarily

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

commute with its time derivative. Nevertheless we follow an alternative method by separating the transformation (121) into a shear and a dilatation

$$U_{3x} = \exp \left[-\frac{i\gamma}{4\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right] \exp \left[\frac{i\mu}{2\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right] \\ \times \exp \left[\frac{i\delta}{2\hbar} \left(\Delta_0 \hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta_0} \hat{p}_x^2 \right) \right] \exp \left[-\frac{i\mu}{2\hbar} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \right], \quad (125)$$

where $\Delta = \Delta_0 e^{2\mu}$ and Δ_0 is a constant. Here it is convenient to set the time dependence of the mass, magnetic field and confining potential by means of (60) and (61). Applying this transformation to the Floquet operator we readily obtain

$$U_{3x} U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger U_{3x}^\dagger \\ = \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \cos^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \sin^2 \delta \right) - \dot{\delta} + \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta \right] \frac{e^\gamma}{2\Delta} \hat{p}_x^2 \\ + \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\Delta}{m_0} \sin^2 \delta + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \cos^2 \delta \right) - \dot{\delta} - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin \delta \cos \delta \right] \frac{\Delta e^{-\gamma}}{2} \hat{x}^2 \\ + \left[e^{-\alpha} \left(-\frac{\Delta}{m_0} + \frac{m_0 \omega_0^2 e^{2\beta}}{4\Delta} \right) \sin \delta \cos \delta - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \sin^2 \delta + \frac{\dot{\gamma}}{2} \right] \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) \\ + \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) \hat{y}^2 - \hat{p}_t. \quad (126)$$

In order to vanish the terms proportional to $\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}$, \hat{p}_x^2 and \hat{x}^2 , the differential equations for the γ , Δ and δ parameters between parentheses should vanish. Notice that these equations are the same as Eqs. (74)–(76) and consequently to Eqs. (78)–(80). Lastly the Floquet operator reduces to

$$U_{3x} U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger U_{3x}^\dagger = \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{1}{8} (m\omega^2 + \kappa) \hat{y}^2 - \hat{p}_t. \quad (127)$$

The y part of the Hamiltonian can be eliminated by a transformation similar to Eq. (121) given by

$$U_{3y} = \exp \left[-i \frac{\gamma}{4\hbar} (\hat{y}\hat{p}_y + \hat{p}_y\hat{y}) \right] \exp \left[i \frac{\delta}{2\hbar} \left(\Delta \hat{y}^2 + \frac{1}{\Delta} \hat{p}_y^2 \right) \right]. \quad (128)$$

In this transformation the parameters γ , Δ and δ are the same as those from Eq. (121) since the x and y parts of the Hamiltonian are symmetrical. By applying this transformation we finally obtain

$$\tilde{\mathcal{H}} = U_3 U_2 U_1 \mathcal{H} U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger = -\hat{p}_t. \quad (129)$$

In Eq. (129), the Floquet operator was reduced to the energy operator \hat{p}_t implying that any *ket* applied to the right of $\tilde{\mathcal{H}}$ as

$$\tilde{\mathcal{H}} U_3 U_2 U_1 |\psi(t)\rangle = -\hat{p}_t U_3 U_2 U_1 |\psi(t)\rangle = 0, \quad (130)$$

should be a constant one, according with Schrödinger equation (97), e.g.,

$$U_3 U_2 U_1 |\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle. \quad (131)$$

As a consequence, the state of the system at any time $|\psi(t)\rangle$ is connected to the state in $t = 0$, $|\psi(0)\rangle$, by

$$|\psi(t)\rangle = U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger |\psi(0)\rangle. \quad (132)$$

The time evolution operator is thus easily obtained as

$$\mathcal{U}(t_1, t_0) = U_1^\dagger(t_1, t_0) U_2^\dagger(t_1, t_0) U_3^\dagger(t_1, t_0) \quad (133)$$

and the state of the system at any given time t_1 evolves from t_0 according with

$$|\psi(t_1)\rangle = \mathcal{U}(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (134)$$

Notice that time enters the evolution operator \mathcal{U} through the parameters $\theta, \lambda_x, \pi_x, \lambda_y, \pi_y, \gamma, \delta$ and Δ in each of the unitary transformations.

It is easy to verify that the obtained unitary transformation \mathcal{U} corresponds to the Magnus expansion [38,39] of the Dyson series at first order

$$\mathcal{U} \equiv 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt H(t). \quad (135)$$

We can calculate the position and momentum operators in the Heisenberg representation by performing the three transformations on Schrödinger representation of the space and momentum operators

$$\hat{x}_H(t) = \mathcal{U}^\dagger \hat{x} \mathcal{U} = U_3 U_2 U_1 \hat{x} U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \quad (136)$$

$$\hat{y}_H(t) = \mathcal{U}^\dagger \hat{y} \mathcal{U} = U_3 U_2 U_1 \hat{y} U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \quad (137)$$

$$\hat{p}_{xH}(t) = \mathcal{U}^\dagger \hat{p}_x \mathcal{U} = U_3 U_2 U_1 \hat{p}_x U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger, \quad (138)$$

$$\hat{p}_{yH}(t) = \mathcal{U}^\dagger \hat{p}_y \mathcal{U} = U_3 U_2 U_1 \hat{p}_y U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger. \quad (139)$$

By working out the explicit form of the previous transformations and using the transformation rules (102)–(106), (112)–(116) and (122)–(124) we obtain

$$\begin{aligned} \hat{x}_H(t) = & e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \hat{x} - e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \hat{y} \\ & + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta \hat{p}_x - \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta \hat{p}_y + \lambda_x \cos \theta - \lambda_y \sin \theta, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_H(t) = & e^{-\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \hat{x} + e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \hat{y} \\ & + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \sin \theta \sin \delta \hat{p}_x + \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta} \cos \theta \sin \delta \hat{p}_y + \lambda_x \sin \theta + \lambda_y \cos \theta, \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{xH}(t) = & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta \hat{x} + e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta \hat{y} \\ & + e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \hat{p}_x - e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \hat{p}_y - \pi_x \cos \theta + \pi_y \sin \theta, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{yH}(t) = & -e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \sin \theta \sin \delta \hat{x} - e^{-\frac{\gamma}{2}} \Delta \cos \theta \sin \delta \hat{y} \\ & + e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \theta \cos \delta \hat{p}_x + e^{\frac{\gamma}{2}} \cos \theta \cos \delta \hat{p}_y - \pi_x \sin \theta - \pi_y \cos \theta. \end{aligned} \quad (143)$$

Here, it is worthwhile noticing that, as in the classical case, the previous equations can also be expressed in the symplectic form as

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_H \\ \hat{y}_H \\ \hat{p}_{xH} \\ \hat{p}_{yH} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \end{bmatrix} + \mu, \quad (144)$$

where \mathbf{M} and μ are given by Eqs. (84) and (85), respectively.

4.2. Green's function

Green's function is calculated as usual in terms of the evolution operator as

$$G(x, y, t|x', y', 0) = \langle x, y | \mathcal{U}(t) | x', y' \rangle. \quad (145)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

To obtain the explicit form of G we first calculate the matrix elements of each of the unitary transformations U_1 , U_2 and U_3 in order to join them by the integral

$$G(x, y, t|x', y', 0) = \iint dx_1^2 dx_2^2 \langle x, y | U_1^\dagger | x_1, y_1 \rangle \times \langle x_1, y_1 | U_2^\dagger | x_2, y_2 \rangle \langle x_2, y_2 | U_3^\dagger | x', y' \rangle. \quad (146)$$

For U_1 and U_2 it is convenient to explore their effect on a space eigenstate. The rotation U_1 has the expected effect on any space *eigenket*

$$U_1^\dagger |x, y\rangle = |x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta\rangle, \quad (147)$$

and its matrix element is hence given by

$$\langle x', y' | U_1^\dagger |x, y\rangle = \delta(x' - x \cos \theta + y \sin \theta) \delta(y' - y \cos \theta - x \sin \theta). \quad (148)$$

The transformation U_2 is a translation in space and momentum; therefore its effect on a space *eigenstate* is

$$U_2^\dagger |x, y\rangle = e^{-i\frac{\pi x x}{\hbar}} e^{-i\frac{\pi y y}{\hbar}} |x + \lambda_x, y + \lambda_y\rangle, \quad (149)$$

and its matrix element is thus given by

$$\langle x', y' | U_2^\dagger |x, y\rangle = e^{-i\frac{\pi x x}{\hbar}} e^{-i\frac{\pi y y}{\hbar}} \times \delta(x' - x - \lambda_x) \delta(y' - y - \lambda_y). \quad (150)$$

The transformation U_3 is the product of a dilatation and a shear. The dilatation has the following effect on a space *eigenstate*:

$$e^{-i\frac{\gamma}{4\hbar}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})} |x\rangle = e^{-\frac{\gamma}{4}} |xe^{-\frac{\gamma}{2}}\rangle, \quad (151)$$

where the coefficient $e^{-\frac{\gamma}{4}}$ is due to the rescaling of space and the consequent renormalization of the space *eigenket*. The matrix element of the dilatation is then given by

$$\langle x' | e^{-i\frac{\gamma}{4\hbar}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})} |x\rangle = e^{-\frac{\gamma}{4}} \delta(x' - xe^{-\frac{\gamma}{2}}). \quad (152)$$

The shear matrix element is in fact the propagator for a harmonic oscillator [40]

$$\langle x' | e^{i\frac{\delta}{2\hbar}(\Delta\hat{x}^2 + \frac{1}{\Delta}\hat{p}_x^2)} |x\rangle = \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi\hbar\sin\delta}} e^{-\frac{i\Delta}{2\hbar\sin\delta}[2xx' - (x^2 + x'^2)\cos\delta]}. \quad (153)$$

After reducing all the integrals in (146) the explicit form for Green's function is obtained as

$$G(x, y, t|x', y', 0) = \frac{\Delta e^{-\frac{\gamma}{2}}}{2\pi\hbar\sin\delta} e^{-\frac{i}{\hbar}S(t)} e^{\frac{i\Delta e^{-\gamma}}{2\hbar} \cot\delta(x'^2 + y'^2)} \times e^{\frac{i\Delta}{2\hbar} \cot\delta[(x \cos\theta + y \sin\theta - \lambda_x)^2 + (y \cos\theta - x \sin\theta - \lambda_y)^2]} \times e^{-\frac{i}{\hbar}(\pi x + \frac{\Delta}{\sin\delta} x' e^{-\gamma/2})(x \cos\theta + y \sin\theta - \lambda_x)} \times e^{-\frac{i}{\hbar}(\pi y + \frac{\Delta}{\sin\delta} y' e^{-\gamma/2})(y \cos\theta - x \sin\theta - \lambda_y)}. \quad (154)$$

This Green's function has indeed the correct shape predicted by Schwinger and others [41–43]; it should be composed only of linear and quadratic terms of the space and momentum operators.

4.3. Gaussian wave packet

As an example, we now wish to study the evolution of a charged particle Gaussian wave packet under the action of constant and uniform crossed electric and magnetic fields. For the mass we select the LTDMM from Eq. (22), and we set the same parameters from Section 2 in order to prove the Ehrenfest theorem.

We start (in $t = 0$) with a Gaussian wave packet of the form

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \exp\left(i\frac{p_{x0}x + p_{y0}y}{\hbar}\right), \quad (155)$$

where p_{x0} , p_{y0} and a are the initial momentum and wave packet width values. Note that initially the wave packet's center is located at the origin, and since the constant magnetic field is directed along the z axis, the vector potential is given by (30); therefore, its average vanishes. In this manner, the initial momentum and velocity are related by $p_{x0}\hat{\mathbf{i}} + p_{y0}\hat{\mathbf{j}} = m\mathbf{\dot{r}}(0)$.

The wave function at any time is explicitly calculated in terms of the transformation parameters as

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \int dx' dy' G(x, y, t|x', y', 0) \psi(x', y', 0) \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}S(t)}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \left(\frac{\hbar e^{\frac{\gamma}{2}} \sin \delta}{a\Delta} + iae^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \delta \right) \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(x - \zeta_x^R)^2 + (y - \zeta_y^R)^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-i\frac{a^2 e^{-\gamma}}{2\pi\sigma^2} \cot \delta \left[(x - \zeta_x^R)^2 + (y - \zeta_y^R)^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{i\frac{\Delta \cot \delta}{2\hbar} \left[(x - \lambda_x^R)^2 + (y - \lambda_y^R)^2 \right]\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \left[\pi_x^R (x - \lambda_x^R) + \pi_y^R (y - \lambda_y^R) \right]\right\}, \end{aligned} \quad (156)$$

where the standard deviation of the wave packet is given by

$$\sigma(t) = \sqrt{a^2 e^{-\gamma} \cos^2 \delta + \frac{\hbar^2 e^{\gamma} \sin^2 \delta}{a^2 \Delta^2}}, \quad (157)$$

and correctly complies with $\sigma(0) = a$. The rotated λ , π and ζ parameters are given by

$$\lambda_x^R = \lambda_x \cos \theta - \lambda_y \sin \theta, \quad (158)$$

$$\lambda_y^R = \lambda_y \cos \theta + \lambda_x \sin \theta, \quad (159)$$

$$\pi_x^R = \pi_x \cos \theta - \pi_y \sin \theta, \quad (160)$$

$$\pi_y^R = \pi_y \cos \theta + \pi_x \sin \theta, \quad (161)$$

$$\zeta_x^R = \zeta_x \cos \theta - \zeta_y \sin \theta, \quad (162)$$

$$\zeta_y^R = \zeta_y \cos \theta + \zeta_x \sin \theta. \quad (163)$$

The ζ parameters are composed of two parts

$$\zeta_x = \lambda_x + \lambda_{x0}, \quad (164)$$

$$\zeta_y = \lambda_y + \lambda_{y0}, \quad (165)$$

C. ARTÍCULO: QUANTUM AND CLASSICAL DISSIPATION OF CHARGED PARTICLES

where

$$\lambda_{x0} = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta \csc \delta} p_{x0}, \quad (166)$$

$$\lambda_{y0} = \frac{e^{\frac{\gamma}{2}}}{\Delta \csc \delta} p_{y0}. \quad (167)$$

The probability density can easily be worked out from Eq. (156) giving

$$|\psi(x, y, t)|^2 = \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} (x - \zeta_x^R)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} (y - \zeta_y^R)^2\right]. \quad (168)$$

From the previous expression it is clear that the Gaussian wave packet follows the trajectory given by the vector $\zeta^R = \zeta_x^R \hat{\mathbf{i}} + \zeta_y^R \hat{\mathbf{j}}$. Moreover, using the differential equations (44), (77)–(80) and (55)–(58) it is easily demonstrated that λ_x^R and λ_y^R fulfill the same equations of motion as the classical particle

$$m\ddot{\lambda}_x^R - m\omega\dot{\lambda}_y^R + \dot{m}\dot{\lambda}_x^R - qE_x = 0, \quad (169)$$

$$m\ddot{\lambda}_y^R + m\omega\dot{\lambda}_x^R + \dot{m}\dot{\lambda}_y^R - qE_y = 0, \quad (170)$$

and λ_{x0}^R and λ_{y0}^R fulfill the homogeneous equations

$$m\ddot{\lambda}_{x0}^R - m\omega\dot{\lambda}_{y0}^R + \dot{m}\dot{\lambda}_{x0}^R = 0, \quad (171)$$

$$m\ddot{\lambda}_{y0}^R + m\omega\dot{\lambda}_{x0}^R + \dot{m}\dot{\lambda}_{y0}^R = 0. \quad (172)$$

We can thus infer that $\zeta_x^R = \lambda_x^R + \lambda_{x0}^R$ and $\zeta_y^R = \lambda_y^R + \lambda_{y0}^R$ are the complete solutions for the classical equations of motion where λ_x^R and λ_y^R are the particular solutions of the inhomogeneous equations and λ_{x0}^R and λ_{y0}^R are the homogeneous solutions bearing the initial conditions.

In this manner, the center of the wave packet follows the same trajectory as the classical particle. This is a proof of Ehrenfest theorem. The trajectories obtained for ζ^R indeed are the same as the classical ones as was proved by direct numerical calculations of the wave packet center motion shown in Fig. 2 with black points.

Conclusions

To summarize, we have studied the classical and quantum dissipations of a charged particle in variable magnetic and electric fields through a time dependent mass Hamiltonian. To integrate the classical Hamiltonian, a series of three canonical transformations are explicitly constructed and applied in order to reduce it to zero. The final transformed variables are at the same time constants of the motion and initial conditions for the generalized momenta and positions. The final solution to the equations of motion is rendered in its symplectic form. Correspondingly, the quantum Hamiltonian is reduced to zero by three unitary transformations. This procedure allows for the calculation of the evolution operator in rather general conditions, i.e. time dependent mass, variable electric and magnetic fields. The generalized momentum and space variables in the Heisenberg picture are expressed in terms of a symplectic linear combination of their Schrödinger picture versions. In times, Green's function is constructed from the evolution operator and the calculated expression is consistent with the structure obtained by Schwinger and others [41–43]. As an example, the dynamics of a Gaussian wave packet under damping and constant crossed electric and magnetic fields is studied. Its motion is proved to follow the same trajectory as the classical particle under the exact same conditions. The results presented in this paper might be useful in solid state calculations where dissipation plays an important role.

Acknowledgments

We acknowledge the support from UAM-A CBI projects 2232203 and 2232204 and PROMEP project 2115/35621. V.G. Ibarra-Sierra acknowledges the support from CONACyT.

References

- [1] A. Caldeira, A. Leggett, *Ann. Physics* 149 (1983) 374.
- [2] A. Caldeira, A. Leggett, *Phys. Rev. A* 31 (1985) 1059.
- [3] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, New York, 2006 (Chapter 3).
- [4] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* 48 (1976) 119.
- [5] M. Razavy, *Classical and Quantum Dissipative Systems*, Imperial College Press, London, 2005 (Chapter 18).
- [6] A. Pimpale, M. Razavy, *Phys. Rev. A* 36 (1987) 2739.
- [7] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, W. Zwerger, *Quantum Transport and Dissipation*, Wiley-VCH, Germany, 1998 (Chapter 4).
- [8] D. Kochan, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 022112.
- [9] H. Bateman, *Phys. Rev.* 38 (1931) 815.
- [10] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* 18 (1941) 393.
- [11] E. Kanai, *Progr. Theoret. Phys.* 3 (1948) 440.
- [12] R.M. Cavalcanti, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 6807.
- [13] E. Kener, *Can. J. Phys.* 36 (1958) 371.
- [14] F. Bopp, *Z. Angew. Phys.* 14 (1962) 699.
- [15] W. Stevens, *Proc. Phys. Soc. Lond.* 72 (1958) 1072.
- [16] B.-G. Englert, *Ann. Phys. (NY)* 1 (1980) 129.
- [17] R. Hasse, *J. Math. Phys.* 2005 (1975) 16.
- [18] I. Edwards, *Am. J. Phys.* 153 (1979) 47.
- [19] D. Schuch, M. Moshinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003) 6571.
- [20] M. Razavy, *Classical and Quantum Dissipative Systems*, Imperial College Press, London, 2005 (Chapter 13).
- [21] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1989 (Chapter 9).
- [22] A. Anzaldo-Meneses, 2012 (in preparation).
- [23] T. Chakraborty, P. Pietiläinen, *The Quantum Hall Effects*, Springer-Verlag, Massachusetts, 1995 (Chapter 2).
- [24] H. Lewis, P. Leach, *J. Math. Phys.* 23 (1982) 165.
- [25] H. Lewis, *Phys. Rev. Lett.* 18 (1967) 510.
- [26] K. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 494.
- [27] D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1559.
- [28] F. Fang, P.J. Stiles, *Phys. Rev.* 174 (1968) 823.
- [29] M.A. Zudov, R.R. Du, J.A. Simmons, J.L. Reno, *Phys. Rev. B* 64 (2001) 201311(R).
- [30] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Heidelberg, 1950 (Chapter 9).
- [31] In order to test the physical sense of all the transformations up to now, we can consider the case of constant magnetic field and vanishing κ . In this case, the hamiltonian H_2 can be split in a time-independent Hamiltonian for two uncoupled harmonic oscillators and a smooth function of time. To eliminate the remaining time function, we introduce the additional coordinates $x_0 = t$ and $p_0 = H_2$ and the generating function $F_4 = x_2 p_{x4} + y_2 p_{y4} + f(x_0) p_0 + g(x_0)$. Therefore the final Hamiltonian is simply H_4 without any explicit time dependence.
- [32] V. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 1983.
- [33] V. Aldaya, F. Cossío, J. Guerrero, F. López-Ruiz, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 (2011) 065302.
- [34] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, John-Wiley, New York, 1958.
- [35] J.-R. Choi, *J. Phys.* 15 (2003) 823.
- [36] S. Menouar, M. Maamache, J.-R. Choi, *Chinese J. Phys.* 49 (2011) 871.
- [37] S. Menouar, M. Maamache, J.-R. Choi, *Ann. Physics* 325 (2010) 1708.
- [38] P. Pechukas, *J. Light, J. Chem. Phys.* 44 (1966) 3897.
- [39] S. Blanes, F. Casas, J. Oteo, J. Ros, *Phys. Rep.* 470 (2009) 151.
- [40] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, USA, 1994 (Chapter 2).
- [41] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 82 (1951) 664.
- [42] L. Urrutia, E. Hernández, *Internat. J. Theoret. Phys.* 23 (1984) 1105.
- [43] S. Pepore, S. Bodinchat, *Chinese J. Phys.* 47 (2009) 753.

Bibliografía

- [1] B. L. Altshuler, P. A. Lee, R. A. Webb, “Mesoscopic Phenomena in Solids”. (Elsaiver, New York, 1991).
- [2] T. M. Hong, J. M. Wheatley, Phys. Rev. B **43**, 5702, (1991).
- [3] M. Bandyopadhyay, S. Dattagupta, J. Stat. Phys. **123**, 1273, (2006).
- [4] A. Holle, J. Main, G. Wiebusch, H. Rottke, K. H. Welge, Phys. Rev. Lett. **61**, 161, (1988).
- [5] Sh. A. Kalandarov, Z. Kanokov, G. G. Adamian, N. V. Antonenkol, Phys. Rev. E **75**, 031115, (2007).
- [6] A. Caldeira and A. Leggett Phys. Rev. Lett. **46**, 211, (1981).
- [7] A. Caldeira, A. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374, (1983).
- [8] A. Caldeira, A. Leggett, Phys. Rev. **A31**, 1059, (1985).
- [9] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, W. Zwerger, “Quantum transport and dissipation”, (Wiley-VCH, Federal Republic of Germany, 1998), capítulo 4.
- [10] U. Weiss, “Quantum dissipative system”, (World Scientific, Singapore, 2008), capítulo 3.
- [11] J. J. Sakurai, “Modern quantum mechanics”, (Addison-Wesley, USA, 1994), capítulo 2.
- [12] M. Bandyopadhyay, J. Stat. Mech. **P05002**, (2009).
- [13] H.-P. Breuer, F. Petruccione, “The theory of open quantum systems”, (Oxford University Press, New York, 2006), capítulo 3.
- [14] G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119, (1976).

BIBLIOGRAFÍA

- [15] S. A. Isar, A. Sandulescu, W. Scheid, *Eur. Phys. D* **12**, 3, (2000).
- [16] A. Isar, *Fortschr. Phys.* **47**, 855, (1999).
- [17] B. Vacchini, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1374, (2000).
- [18] E. Kanai, *Progr. Theor. Phys.* **3**, 440, (1948).
- [19] P. Caldirola, *Nuovo Cim.* **18**, 393, 1941.
- [20] R. M. Cavalcanti, *Phys. Rev. E* **58**, 6807, (1998).
- [21] E. H. Kener, *Can. J. Phys.* **36**, 371, (1958).
- [22] W. K. H. Stevens, *Pro. Phys. Soc. Lon.* **72**, 1072, (1958).
- [23] B. G. Englert, *Ann. Phys.* **1**, 129, (1980).
- [24] R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **2005**, 16, (1975).
- [25] I. K. Edwards, *Am. J. Phys.* **153**, 47, (1979).
- [26] M. Razavy, “Classical and quantum dissipative systems”, (Ed. Imperial College Press, London, 2005), capítulo 13.
- [27] D. Schuch, M. Moshinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 6571, (2003).
- [28] A. Pimpale, M. Razavy, *Phys. Rev. A* **36**, 2739, (1987).
- [29] M. Razavy, “Classical and quantum dissipative systems”, (Ed. Imperial College Press, London, 2005), capítulo 6.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum mechanics”, (Wiley-Interscience, Paris, 1977), apéndice 3.
- [31] T. Chakraborty, P. Pietiläinen, “The quantum hall effects”, (Springer-Verlag, Massachusetts, 1995), capítulo 2.
- [32] A. Messiah, “Quantum mechanics” (John-Wiley, New York, 1958).
- [33] J.-R. Choi, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, 823, (2003).
- [34] S. Menouar, M. Maamache, J.-R. Choi, *Chinese J. Phys.* **49**, 871, (2011).
- [35] S. Menouar, M. Maamache, and J.-R. Choi, *Ann. Physics.* **325**, 1708, (2010).

- [36] H.-P. Breuer, F. Petruccione, “The theory of open quantum systems”, (Oxford University Press, New York, 2006), capítulo 8.
- [37] V. Arnold, “Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations”, (Springer, New York, 1983).
- [38] V. Aldaya, F. Cossío, J. Guerrero, F. F. López-Ruiz, *J. Phys. A. Math. Theor.* **44**, 065302, (2011).
- [39] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664, (1951).
- [40] L. F. Urrutia, E. Hernández, *Int. J. Theor. Phys.* **23**, 1105, (1984).
- [41] S. Pepore and S. Bodinchat, *Chinese J. Phys.* **47**, 753, (2009).
- [42] J. Singh, “Electronic and Optoelectronic Properties of Semiconductor Structures”, (Cambridge University Press, United Kingdom ,2003), capítulos 2 y 5.
- [43] C. Cohen-Tannoudji, “Quantum mechanics”, (Wiley-Interscience, Paris, 1977), capítulo 2.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO


No. 00026

Matricula: 2112800069

DISIPACION CUANTICA DE UNA PARTICULA CARGADA

En México, D.F., se presentaron a las 11:00 horas del día 28 del mes de junio del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. GERARDO GARCIA NAUMIS
DR. REMIGIO CABRERA TRUJILLO
DR. MOISES MARTINEZ MARES



VICTOR GUADALUPE IBARRA SIERRA
ALUMNO

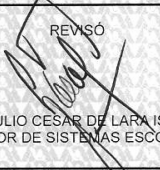
Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
DE: VICTOR GUADALUPE IBARRA SIERRA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISÓ



LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI



DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE



DR. GERARDO GARCIA NAUMIS

VOCAL



DR. REMIGIO CABRERA TRUJILLO

SECRETARIO



DR. MOISES MARTINEZ MARES