

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

BIFURCACION EN SISTEMAS DE CONTROL //

TESIS QUE PRESENTA EL

/ MAT. JUAN MANUEL RAMIREZ IRRA

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

/ MAESTRO EN MATEMATICAS

ABRIL 1991 /

ASESOR DE TESIS

DR. RODOLFO SUAREZ CORTES

127892

/ DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

AGRADECIMIENTOS

U. A. M IZTAPALAPA BIBLIOTECA

A MARY,
POR SU AMOR

A MIS PADRES:
RAFAEL RAMIREZ MIRANDA
Y
AMPARO IRRA AYVAR
POR SU AMOR Y CARÍÑO

A LOS PROFESORES SINODALES:

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

DR. PEDRO ARMENDARIZ MORALES,

DR. ISMAEL MUÑOZ MAYA,

DR. RODOLFO SUARES CORTES

DRA. SHIRLEY BROMBERG,

M. EN C. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

POR SU BUENA DISPOSICION A ESTE TRABAJO

Agradezco al Dr. Rodolfo Suárez, mi asesor, por su motivación y paciencia. Muy especialmente al Dr. Pedro Armendáriz por su apoyo incondicional. A Héctor Juárez y Joaquín Delgado.

A Martha Patricia Sánchez y Marilén Miranda por su ayuda.

INDICE

CAP.

I INTRODUCCION

- | | |
|---|----|
| 1. Conceptos básicos | 1 |
| 2. La bifurcación trinche | 3 |
| 3. Un reactor con tanque continuamente agitado (CSTR) | 17 |

II EL PROBLEMA DE RECONOCIMIENTO

- | | |
|--|----|
| 1. Introducción | 27 |
| 2. Gérmenes | 31 |
| 3. El espacio tangente restringido | 33 |
| 4. Cálculo de $RT(g)$ | 35 |
| 5. Algebra básica | 39 |
| 6. Determinación finita | 43 |
| 7. Un ejemplo no trivial | 58 |
| 8. Ideales intrínsecos | 63 |
| 9. Formulación de los resultados principales | 70 |
| 10. Solución de problemas de reconocimiento | 74 |

III TEORIA DE DESDOBLAMIENTO

- | | |
|---|-----|
| 1. Introducción | 80 |
| 2. Desdoblamiento y desdoblamiento universal | 81 |
| 3. Una caracterización de desdoblamientos universales | 85 |
| 4. Ejemplos de desdoblamientos universales | 92 |
| 5. El problema de reconocimiento para desdoblamientos universales | 97 |
| 6. Diagramas de bifurcación no persistentes | 105 |
| 7. Exposición del teorema geométrico principal | 110 |
| 8. El trinche | 114 |
| 9. La cúspide | 117 |

IV DOS SISTEMAS CON BIFURCACION

- | | |
|-------------------------------|-----|
| 1. El CSTR | 125 |
| 2. Un proceso de fermentación | 130 |

CAPITULO I

INTRODUCCION

1. Conceptos básicos

Estudiaremos problemas de bifurcación local con una variable de estado. Tales problemas pueden formularse con una ecuación de la forma

$$g(x, \lambda) = 0, \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, la variable de estado y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro auxiliar, el parámetro de bifurcación. Llamaremos al conjunto

$$\{(x, \lambda) : g(x, \lambda) = 0\}$$

el diagrama de bifurcación o el conjunto solución de g . Las cuestiones centrales relacionadas con (1.1) se deben a las soluciones múltiples que pueda exhibir. Para cada λ , sea $n(\lambda)$ el número de x 's tales que (x, λ) es solución de (1.1). En el sentido clásico (x_0, λ_0) es un punto de bifurcación si $n(\lambda)$ cambia cuando λ varía en una vecindad de λ_0 . Por simplicidad supondremos que g es una función infinitamente diferenciable.

Hay una gran variedad de problemas en matemáticas aplicadas que exhiben ecuaciones de estado con múltiples soluciones de equilibrio, y sistemas con un número infinito de grados de libertad que pueden reducirse a la forma (1.1) mediante la reducción de Liapunov-Schmidt ([CH], [GS]).

El teorema de la función implícita ([CH],[GS]) da una condición necesaria para que (x_0, λ_0) sea un punto de bifurcación de (1.1): $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$. Porque si $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$, entonces (1.1) puede resolverse para x , en forma única, como una función de λ ; con (x, λ) en una vecindad de (x_0, λ_0) . Al punto (x_0, λ_0) para el cual

$$g(x_0, \lambda_0) = g_x(x_0, \lambda_0) = 0 \quad (1.2)$$

lo llamaremos una singularidad.

Una singularidad no necesariamente es un punto de bifurcación en el sentido clásico. Por ejemplo, $(0,0)$ es un singularidad para $g(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2 = 0$, pero no un punto de bifurcación.

2. La bifurcación trinche

Quizás la bifurcación *trinche* sea el ejemplo más importante en la literatura clásica([GS],[GH], por ejemplo). Discutiremos la información que proporciona la teoría de singularidades sobre este ejemplo. Este tipo de bifurcación tiene la propiedad de que cuando λ cruza algún valor λ_0 , $n(\lambda)$ cambia de uno a tres. La ecuación más simple con este comportamiento es

$$x^3 - \lambda x = 0, \quad (2.1)$$

donde $\lambda_0 = 0$. El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 2.1, la cual explica el cambio de $n(\lambda)$ en $\lambda = 0$.

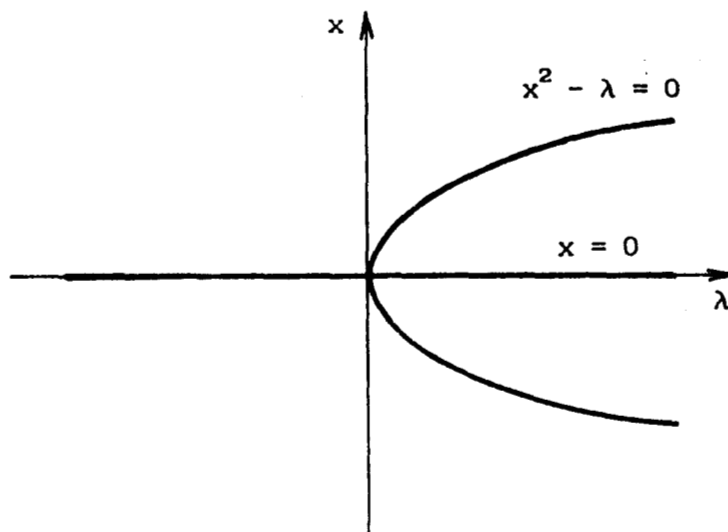


Figura 2.1. Diagrama de bifurcación trinche.

2.1 Un ejemplo de bifurcación trinche

En la Figura 2.2 se ilustra un sistema físico que exhibe una bifurcación trinche.

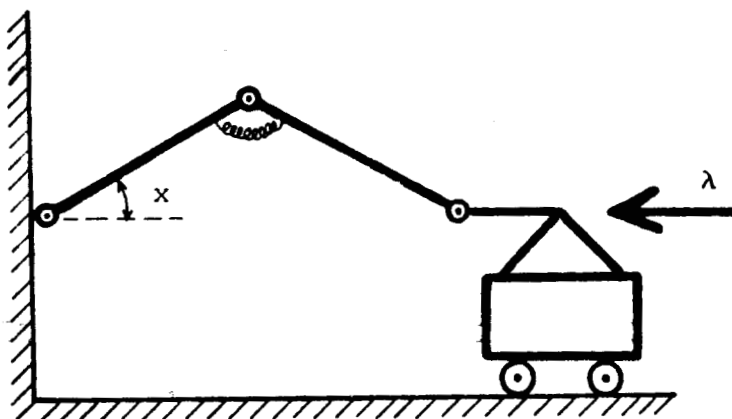


Figura 2.2. Sistema de Euler.

El sistema de Euler consiste de dos barras rígidas de longitud unitaria conectadas mediante rótulas que permiten el movimiento sobre un plano; el sistema se somete a una fuerza de compresión λ a la cual se opone un resorte de esfuerzo unitario. El estado se describe por el ángulo x que mide la desviación de las barras respecto a la horizontal. La energía potencial del sistema es

$$V(x, \lambda) = \frac{x^2}{2} + 2\lambda(\cos x - 1),$$

donde $x^2/2$ representa la energía almacenada por el resorte y $2\lambda(\cos x - 1)$ es el trabajo debido a la fuerza externa λ . Los estados de equilibrio se describen mediante una ecuación de la forma (1.1), ésta es

$$g(x, \lambda) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda) = x - 2\lambda \sin x \quad (2.2)$$

Esta función tiene una singularidad en $(x_0, \lambda_0) = (0, 1/2)$ y la siguiente expansión en serie de Taylor alrededor de $(0, 1/2)$

$$g(x, \lambda) = \frac{x^3}{6} - 2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x + \text{t.o.m.a.}, \quad (2.3)$$

donde t.o.m.a. son términos de orden más alto (del orden x^5 , $(\lambda - \frac{1}{2})^2 x$, o mayor). La ecuación (2.3) tiene una fuerte similitud con (2.1), sólo difiere en tres aspectos:

1. La singularidad de (2.3) no es el origen.
2. Los coeficientes de (2.3) no son la unidad.
3. La existencia de t.o.m.a. en (2.3).

Los primeros aspectos pueden absorberse por un cambio de coordenadas lineal, específicamente, T definido por

$$T(x, \lambda) = \left(\sqrt[3]{6} x, \frac{1}{2} (\lambda + 1) \right).$$

Lo cual quiere decir que estas diferencias no tienen efecto cualitativo sobre el diagrama de bifurcación. El tercer aspecto tampoco tiene efecto sobre el comportamiento cualitativo local. Posteriormente describiremos como es que los t.o.m.a. pueden absorberse con un cambio de coordenadas no lineal.

2.2 Determinación finita y el problema de reconocimiento

¿ Hasta qué términos de orden bajo en la expresión en serie de Taylor de un problema de bifurcación se determina su comportamiento cualitativo?. Usaremos el término **determinación finita** de la teoría de singularidades para describir este tipo de problema. Para el caso de la bifurcación trinche nuestra respuesta, en parte, es la siguiente. Sea $g(x, \lambda)$ un problema de bifurcación tal que

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \quad g_{xxx} g_{x\lambda} < 0, \quad (2.4)$$

cuando $(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0)$. Entonces $n(\lambda)$, cambia de uno a tres cuando λ , creciendo, cruza λ_0 (si $g_{xxx} g_{x\lambda} > 0$, $n(\lambda)$ cambia de tres a uno;

si $g_{xxx} g_{x\lambda} = 0$, se requiere más información).

Más precisamente, si $g(x, \lambda)$ satisface (2.4) en (x_0, λ_0) entonces existen:

(i) Un difeomorfismo local de $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$(x, \lambda) \mapsto (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$$

$$\text{con } X(0, 0) = x_0 \text{ y } \Lambda(0) = \lambda_0.$$

(ii) Una función $S(x, \lambda)$, no nula, tal que

$$S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)) = x^3 - \lambda x$$

cerca del origen, donde más aún, $X_x(x, \lambda) > 0$ y $\Lambda'(\lambda) > 0$.

Ya que el factor $S(x, \lambda)$ no es cero, las soluciones de $g(x, \lambda) = 0$ difiere de las de $x^3 - \lambda x = 0$ sólo por el difeomorfismo (X, Λ) . Este es el sentido estricto en el cual los t.o.m.a. en (2.3) no pueden tener efecto localmente sobre el comportamiento cualitativo del modelo.

Diremos que dos problemas de bifurcación g y h son **equivalentes** si pueden relacionarse mediante una ecuación

$$S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)) = h(x, \lambda), \quad (2.5)$$

donde $S > 0$ y (X, Λ) es un difeomorfismo que preserva orientación.

Si g y h son equivalentes entonces las funciones de multiplicidad están relacionadas por

$$n_g(\Lambda(\lambda)) = n_h(\lambda); \quad (2.6)$$

una consecuencia importante de (2.5). La ecuación (2.6) está estrechamente relacionada con la restricción de que Λ no dependa de x . Generalmente λ está asociada a fuerzas externas del sistema,

mientras que x está asociada con el estado interno que resulta de la elección de λ .

El estudio que hacemos de la bifurcación trinche representa la aplicación general de la teoría de singularidades a problemas de determinación. Resumamos lo anterior a manera de introducir la notación del Cap.II. Llamamos a $x^3 - \lambda x = 0$ una **forma normal** para la bifurcación trinche. Cualquier problema de bifurcación $g(x, \lambda)$, el cual en un punto específico (x_0, λ_0) satisface

$$g = g_x = g_{xx} = g_\lambda = 0, \quad g_{xxx} > 0, \quad g_{\lambda x} < 0 \quad (2.7)$$

es equivalente a esta forma normal. Diremos que (2.7) resuelve el **problema de reconocimiento** para esta forma normal, es decir, (2.7) caracteriza los problemas de bifurcación equivalentes a $x^3 - \lambda x = 0$. Problemas de bifurcación equivalentes tienen las mismas propiedades cualitativas y el objetivo es estudiar propiedades cualitativas.

2.3 Desdoblamiento universal y bifurcación perturbada

El segundo de los temas centrales de este trabajo, en la teoría de bifurcación, es el estudio de la dependencia de parámetros que puede tener un problema de bifurcación. En un problema de bifurcación $g(x, \lambda)$, pequeñas variaciones de un parámetro auxiliar usualmente conducen a cambios en el diagrama de bifurcación, en una singularidad de g . Consideremos la bifurcación trinche perturbada

$$G(x, \lambda, \epsilon) = x^3 - \lambda x + \epsilon = 0 \quad (2.8)$$

Los diagramas de bifurcación de (2.8) se muestran en la Figura 2.3.

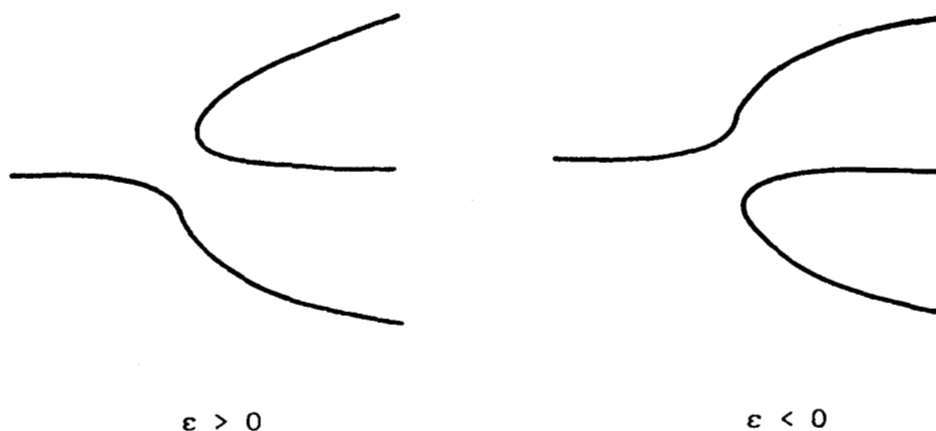


Figura 2.3. Perturbaciones de la bifurcación trinche
 $x^3 - \lambda x - \epsilon = 0$.

En la ecuación no perturbada, $G(x, \lambda, 0) = 0$, G es no singular fuera del origen, es decir, $G_x(x, \lambda, 0) = 3x^2 - \lambda \neq 0$ en ambas ramas de soluciones, $x = 0$ y $x^2 - \lambda = 0$, excepto en el origen. De esta manera, por el teorema de la función implícita, la solución x de (2.8) depende suavemente de ϵ (así como de λ) fuera del origen. En otras palabras, fuera del origen los diagramas de la Figura 2.3 se asemejan al trinche (Figura 2.1) para el cual $\epsilon = 0$. De otra manera, cerca del origen, el término λx es más importante que x^3 ; por lo que las gráficas de la Figura 2.3 deben parecerse a $\lambda x = \epsilon$.

Las ecuaciones matemáticas que resultan de modelar un cierto fenómeno físico son, invariablemente, una idealización; una descripción más completa llevaría, casi seguramente, a un conjunto de ecuaciones perturbadas. Estas desviaciones de la idealización, *imperfecciones*, pueden describirse considerando parámetros auxiliares en las ecuaciones.

Veamos como una bifurcación imperfecta puede introducir

parámetros en el modelo de la sección 2.1. Una perturbación natural que podemos considerar es una fuerza vertical pequeña ϵ aplicada a la rótula central (Figura 2.4), esta fuerza modela el peso de la estructura. Otra perturbación que podemos considerar viene de suponer que el resorte es ligeramente asimétrico, y ejerce un torque cero cuando $x = \delta$ (Figura 2.4).

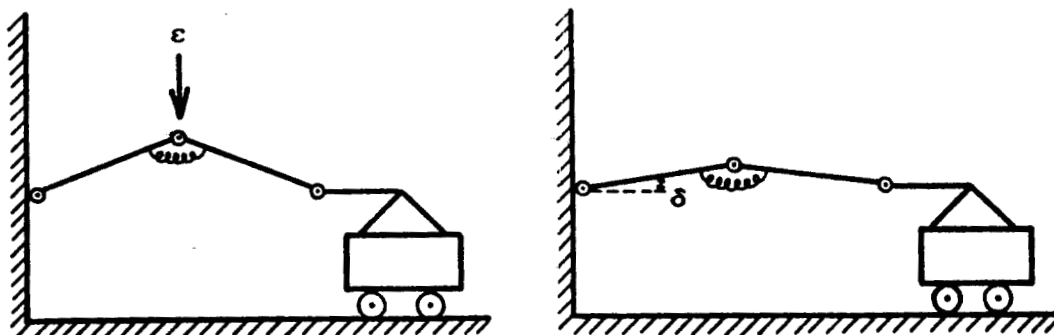


Figura 2.4. Dos posibles imperfecciones en el sistema de Euler.

La función de potencial con estas dos perturbaciones es

$$V(x, \lambda, \epsilon, \delta) = \frac{(x-\delta)^2}{2} + 2\lambda(\cos x - 1) + \epsilon \sin x,$$

y la ecuación de equilibrio es

$$x - \delta - 2\lambda \sin x + \epsilon \cos x = 0 \quad (2.9)$$

Observe que (2.9) es una perturbación de (2.2) que depende de dos parámetros auxiliares. Cerca de la singularidad del problema no perturbado, en $x = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, (2.9) tiene la expansión

$$\frac{x^3}{6} - 2(\lambda - \frac{1}{2})x + (\epsilon - \delta) - \frac{\epsilon}{2}x^2 + \text{t.o.m.a.} \quad (2.10)$$

En el contexto de teoría de singularidades, la ocurrencia de

parámetros auxiliares es una parte importante del problema de bifurcación, y uno intenta clasificar todos los posibles comportamientos ocasionados por su presencia. Este problema se resuelve en dos pasos. Dado un problema de bifurcación g , el primer paso es construir una familia distinguida de perturbaciones de g . Supongamos que $G(x, \lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es una familia k -paramétrica de problemas de bifurcación; llamaremos a G una **perturbación** de g si

$$G(x, \lambda, 0, \dots, 0) = g(x, \lambda).$$

Por supuesto, $G(x, \lambda, \alpha)$ sólo necesita definirse para $\alpha \in \mathbb{R}^k$ cerca del origen. En el primer paso para resolver el problema de clasificación buscamos una familia k -paramétrica, G , de perturbaciones de g , para la cual cualquier perturbación de g siga siendo equivalente a $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ para algún α cerca del origen. En otras palabras, dada cualquier perturbación $\varepsilon p(x, \lambda, \varepsilon)$, existe $\alpha(\varepsilon)$ tal que, para ε pequeño, $g + \varepsilon p$ es equivalente a $G(\cdot, \cdot, \alpha(\varepsilon))$ en el sentido de (2.5). Llamaremos a G un **desdoblamiento universal** de g . No todo problema de bifurcación admite un desdoblamiento universal, pero, en cierto sentido aclararemos en el Cap. III, que la mayoría lo tiene. El número k de parámetros requeridos para un desdoblamiento universal depende de la función específica g en consideración. Por ejemplo mostraremos, en el Cap. III, que

$$G(x, \lambda, \alpha) = x^3 - \lambda x + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 \quad (2.11)$$

es un desdoblamiento universal del trinche (observe la similitud con (2.10) módulo t.o.m.a., tomando $\alpha_1 = \varepsilon - \delta$ y $\alpha_2 = -\varepsilon$).

El segundo paso para resolver el problema de clasificación es explorar el espacio de parámetros, del desdoblamiento universal,

con la idea de enumerar los diferentes diagramas de bifurcación $\{(x, \lambda : G(x, \lambda, \alpha) = 0)\}$ que pueden ocurrir cuando α varía. En la Figura 2.5 se exhiben los distintos diagramas de bifurcación de (2.11).

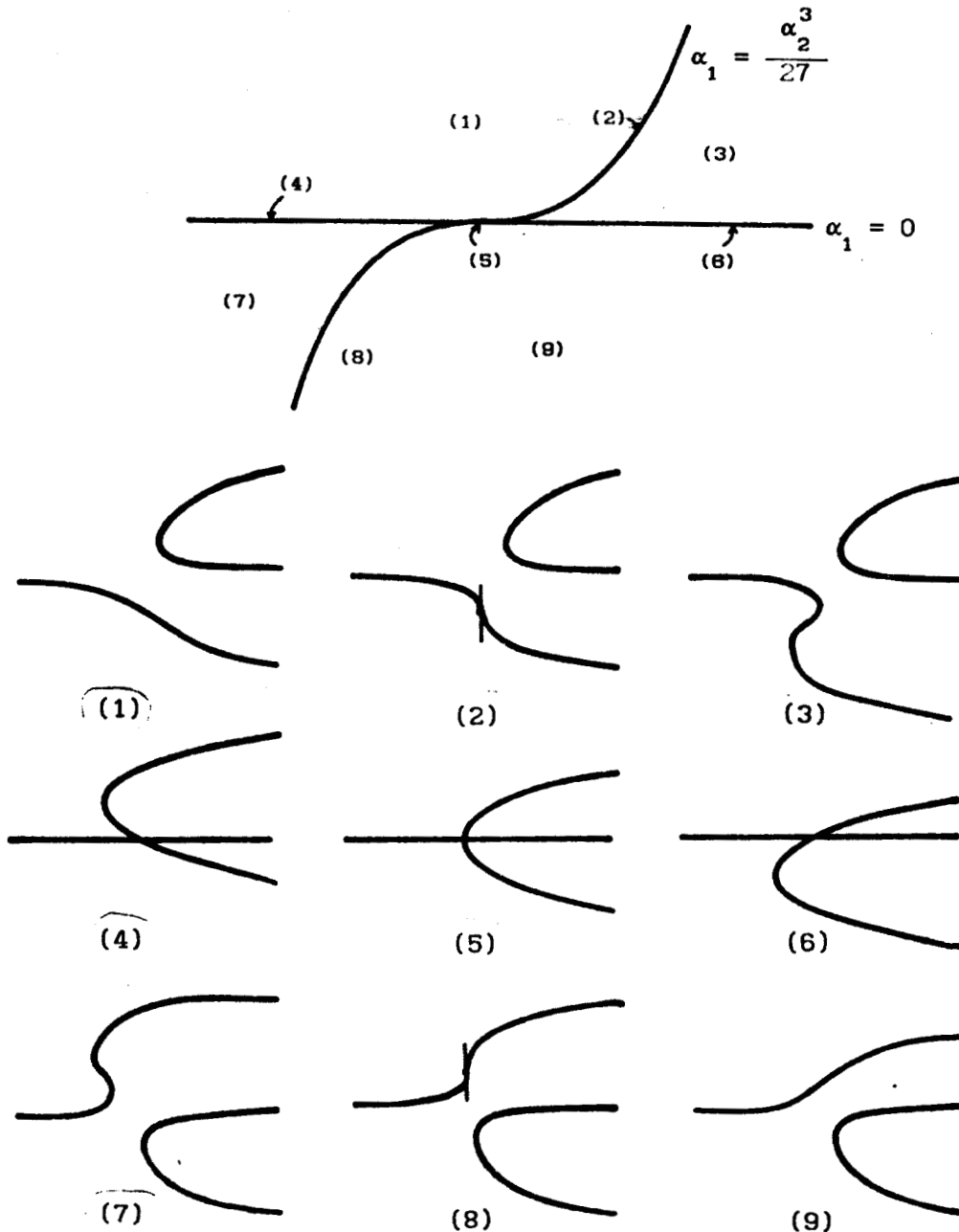


Figura 2.5. Desdoblamiento Universal del trinche.

Con la exploración de la Figura 2.5 podríamos especular sobre

lo que puede suceder al introducir tres o más parámetros en el modelo. De hecho, si añadimos más parámetros, no ocurre ningún comportamiento distinto a éstos. Este hecho es una consecuencia de la aserción de que (2.11) es un desdoblamiento universal del trinche([GS]). La teoría de singularidades da métodos para decir exactamente cual es el número de parámetros que se necesitan para describir la perturbación más general de un problema de bifurcación.

Hagamos algunas observaciones sobre la Figura 2.5. En las regiones (4), (5) y (6) el origen es un punto de bifurcación. En las regiones (2) y (8) los puntos con tangente vertical los llamamos puntos de histéresis.

El trinche es la singularidad más simple que exhibe bifurcación e histéresis. Hay una singularidad que no exhibe ninguna de éstas, el punto límite. estudiaremos esta singularidad en el Cap.II, la cual está definida por las ecuaciones

$$g = g_x = 0, \quad g_{xx} \neq 0, \quad g_\lambda \neq 0 \quad \text{en } (0,0),$$

y es equivalente a la forma normal $\pm x^2 \pm \lambda$ para alguna elección de signos. En las regiones (1), (3), (7) y (9) las singularidades son puntos límites; como veremos más tarde, este es un caso de un fenómeno más general.

2.4 Estabilidad

En las aplicaciones, los equilibrios de algunos sistemas físicos se describen por ecuaciones de la forma $g(x, \lambda) = 0$. La noción de estabilidad de tales equilibrios es el propósito de

estudio de una teoría de estados-estacionarios; y la estabilidad de un sistema sólo puede definirse en una teoría que siga su evolución en el tiempo. Discutamos brevemente la estabilidad en el contexto del sistema mecánico de la Figura 2.2.

Para este modelo, las ecuaciones de movimiento de Newton son

$$M \ddot{x} = - \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda) - C\dot{x} \quad (2.12)$$

donde M y C son constantes positivas. Observe que la función constante $x(t) = x_0$ satisface (2.12) si y sólo si $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = 0$; en otras palabras, debido a (2.2), las soluciones de equilibrio de (2.12) están caracterizadas por $x - 2\lambda \sin x = 0$.

Llamamos a una solución de equilibrio x_0 de (2.12) **asintóticamente estable** si para todo ε_1 y ε_2 suficientemente pequeños, la solución de (2.12) con valores iniciales perturbados

$$x(0) = x_0 + \varepsilon_1, \quad \dot{x}(0) = \varepsilon_2$$

tiende a x_0 cuando $t \rightarrow \infty$. De otra manera decimos que x_0 es **inestable**.

Hay una condición suficiente para la estabilidad, la cual involucra el signo de V_{xx} (ver por ejemplo [HS]). Definamos $y = \dot{x}$ y escribamos (2.12) como

$$\begin{aligned} \dot{x} - y &= 0 \\ \dot{y} + \frac{1}{M} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda) + Cy \right\} &= 0 \end{aligned}$$

El jacobiano de la función en esta ecuación diferencial ordinaria es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{M} V_{xx} & \frac{C}{M} \end{bmatrix}.$$

Los valores propios del jacobiano son

$$\mu_{+,-} = \frac{1}{M} \left\{ \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - M V_{xx}} + \frac{C}{2} \right\}$$

Ahora, μ_+ y μ_- tienen parte real positiva si y sólo si $V_{xx} > 0$; mientras que μ_- tiene parte real negativa si y sólo si $V_{xx} < 0$. De acuerdo a estos resultados, x_0 es asintóticamente estable si $V_{xx} > 0$, o asintóticamente inestable si $V_{xx} < 0$.

Observe que $V_{xx} > 0$ es precisamente la condición para que el potencial $V(\cdot, \lambda_0)$ tenga un mínimo local no degenerado en x_0 . Por consiguiente, x_0 es asintóticamente estable si $V(\cdot, \lambda_0)$ tiene un mínimo local no degenerado en x_0 . Similarmente, x_0 es asintóticamente inestable si $V(\cdot, \lambda_0)$ tiene un máximo local no degenerado en x_0 .

Relacionemos esta discusión con la subsección 2.1. Los puntos de equilibrio de (2.12) están caracterizados por la ecuación $g(x, \lambda) = 0$, donde $g(x, \lambda) = V_x(x, \lambda)$. De modo que, un punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable si $g_x(x_0, \lambda_0) > 0$ y asintóticamente inestable si $g_x(x_0, \lambda_0) < 0$. El caso extremo donde $g_x = V_{xx} = 0$ ocurre precisamente cuando g tiene una singularidad, como lo definimos en la subsección 2.1. (Una relación más general entre estabilidad y singularidad se puede ver en [GH]).

Apliquemos este criterio de estabilidad al modelo de la sección 2.1. Tenemos

$$g_x(x, \lambda) = 1 - 2\lambda \cos x. \quad (2.13)$$

Hemos visto que $g(x, \lambda) = x - 2\lambda \sin x$ tiene dos ramas de soluciones, $x = 0$ y

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + \text{t.o.m.a.}, \quad (2.14)$$

las cuales se deducen de (2.3). Para $x = 0$, tenemos

$$g_x(x, \lambda) = 1 - 2\lambda$$

De modo que, $x = 0$ es asintóticamente estable para $\lambda < \frac{1}{2}$ y asintóticamente inestable para $\lambda > \frac{1}{2}$. Para (2.14), sustituimos ésta en (2.13) y obtenemos

$$g_x = \frac{x^2}{3} + \text{t.o.m.a.}$$

De donde (2.14) es asintóticamente estable para $x \neq 0$. Hay, por supuesto, una relación estrecha entre la estabilidad y el diagrama de bifurcación, llamamos a este fenómeno *cambio de estabilidad*.

El diagrama de bifurcación (Figura 2.6) divide al plano $x\lambda$ en cuatro regiones; en cada una de las cuales el signo de g , como se indica, es constante.

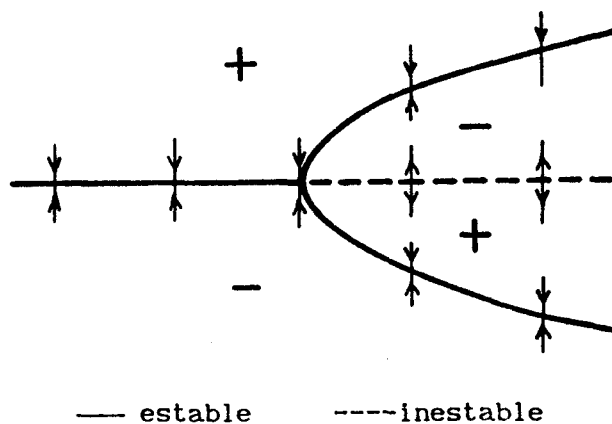


Figura 2.6. Asignación de estabilidad para el trinche.

Mostremos como usar los signos de g para determinar la estabilidad en algunos diagramas perturbados. Para ésto, sigamos la siguiente regla: $g_x > 0$ (hay estabilidad) en la parte del diagrama de bifurcación comprendida entre regiones donde $g > 0$ por arriba, y $g < 0$ por abajo; $g_x < 0$ (hay inestabilidad) cuando la situación es al contrario. La Figura 2.7(a),(b) muestra esta asignación para los diagramas de las regiones (1) y (7) de la Figura 2.5, respectivamente.

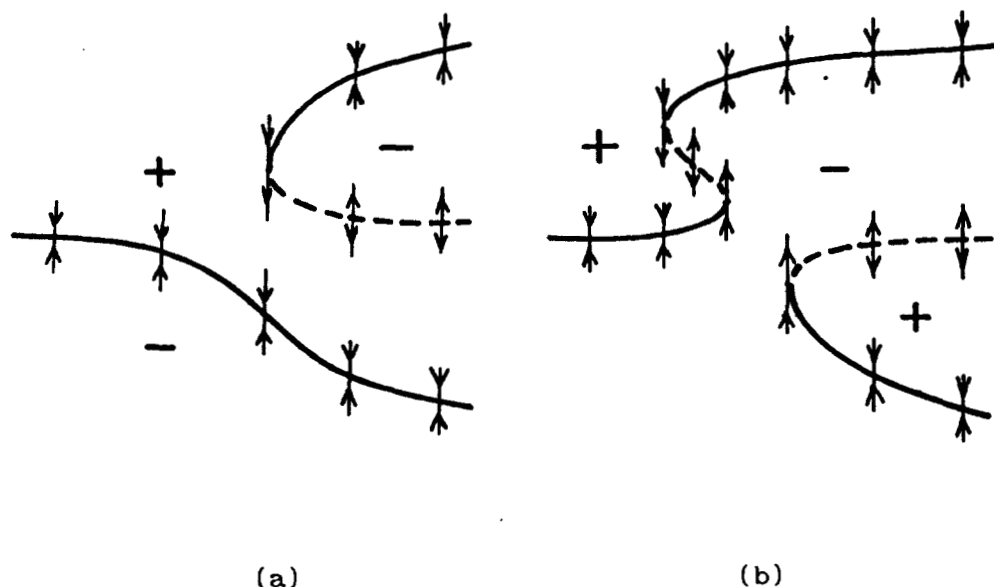


Figura 2.7. Asignación de estabilidad para perturbaciones del trinche.

En la práctica, una solución inestable no es observable realmente. Esto es porque en un experimento hay, aunque pequeñas, perturbaciones incontrolables o no consideradas en la situación idealizada. Las cuales causan que el sistema deje cualquier vecindad de un punto de equilibrio en cuestión.

3. Un reactor con tanque agitado de flujo continuo (CSTR)

Discutiremos la aplicación de los métodos de teoría de singularidades al CSTR; un modelo de ingeniería química que exhibe soluciones múltiples. Sólo se da una explicación y en los Cap II. y Cap. III se dan las pruebas debidas a Golubitsky y Schaeffer [GS].

3.1 Formulación del modelo del CSTR

La Figura 3.1 da un esquema del CSTR. En este problema los reactivos fluyen a una vasija de volumen unitario a razón r y experimentan una reacción exotérmica para formar productos inertes. Si el reactor está bien agitado, significa que la concentración c y la temperatura T son uniformes en el tanque. Los reactivos no utilizados y los productos fluyen del tanque a la misma razón de entrada; la concentración y la temperatura de salida son iguales a los del tanque. El calor del reactor se remueve por un fluido de enfriamiento a temperatura T_c .

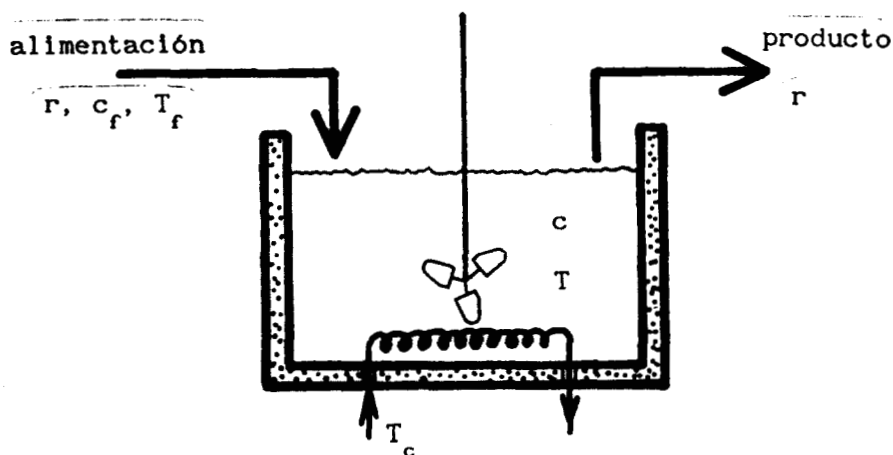


Figura 3.1. Esquema del CSTR.

La concentración y la temperatura en el reactor se modelan por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dc}{dt} &= r(c_f - c) - ZcA(T), \\ (b) \quad \frac{dT}{dt} &= r(T_f - T) + k(T_c - T) + hZcA(T). \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

c_f - concentración de entrada.

T_f - temperatura de entrada.

r - razón de flujo.

T_c - temperatura de enfriamiento.

k - involucra transferencia de calor, calores específicos, etc.

Z - razón de reacción a la temperatura T_f .

$A(T)$ - modela la dependencia de T respecto de la razón de reacción; normalmente tiene la forma de Arrhenius

$$A(T) = \exp [T_a / T_f - T_a / T].$$

T_a - energía de activación (normalmente T_a es mucho más grande que T_f , digamos $\gamma = T_a / T_f > 10$).

h - parámetro de proporcionalidad del calor liberado por la reacción.

De (3.1) nos interesan sus soluciones de equilibrio; así que igualando (3.1) a cero; de las ecuaciones que resulten, despejamos c de la primera y sustituimos esta expresión para c en la segunda. De esta manera, obtenemos

$$r(T_f - T) + k(T_c - T) + \frac{rhc_f}{1 + \frac{r}{ZA(T)}} = 0 \quad (3.2)$$

Con el fin de adimensionalizar (3.2) , definamos una temperatura normalizada

$$x = \frac{T - T_f}{T_f}$$

Entonces, tomando $\lambda = \frac{r}{k}$, $\delta = \frac{k}{Z}$, $\eta = \frac{T_c - T_f}{T_f}$, $B = \frac{hc_f}{T_f}$, y

$$A(x) = \exp \left[- \frac{\gamma x}{1 + x} \right],$$

podemos escribir

$$g(x, \lambda) = (1 + \lambda)x - \eta - \frac{B\lambda}{1 + \delta\lambda A(x)} = 0 \quad (3.3)$$

Observe que λ y δ representan comparaciones de la razón de flujo y la razón de reacción, con la razón de pérdida de calor, respectivamente; η y γ comparan parámetros de temperatura con la temperatura de entrada; y B es una medida adimensional del calor de reacción.

Observación. La ecuación (3.1) es de la forma $\dot{x} = f(x)$, y nosotros hemos hecho un pequeño cambio al pasar de (3.2) a (3.3); consideramos $\dot{x} - f(x) = 0$, sólo por las cuestiones de estabilidad vistas en la sección 2.4.

3.2 Ocurrencia de soluciones múltiples

La ecuación (3.3) determina, mediante x, los posibles equilibrios de la temperatura del CSTR. Estos equilibrios dependen de los parámetros auxiliares; dentro de los cuales λ es un parámetro distinguido, ya que es la cantidad de mejor manejo en el práctica.

Es fácil ver que (3.3) puede tener soluciones múltiples (Aris [AR]). En la Figura 3.2 aparecen las gráficas de las curvas

$$y = \frac{B\lambda}{1 + \delta\lambda A(x)}$$

y

$$y = (1 + \lambda)x - \eta.$$

Las soluciones de (3.3) corresponden a la intersecciones de estas curvas, las cuales pueden ser una o tres. Las soluciones múltiples resultan de los diferentes balances que pueden realizarse entre un término no lineal y uno lineal.

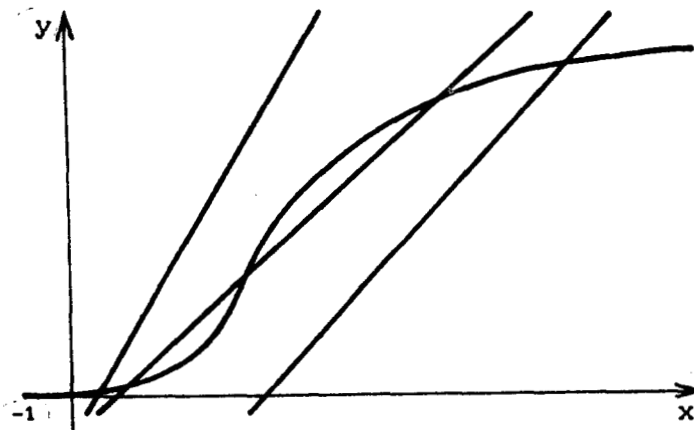


Figura 3.2. Ocurrencia de soluciones múltiples.

En los casos límite, cuando $\lambda \rightarrow 0$ o $\lambda \rightarrow \infty$, la solución de (3.3) es única. Si $\lambda \rightarrow 0$, entonces la temperatura del reactivo es insuficiente para continuar la reacción, de modo que el sistema llegará al equilibrio aproximadamente a la temperatura de enfriamiento T_c . Si $\lambda \rightarrow \infty$, entonces la temperatura del reactivo no cambia significativamente por el calor producido por la reacción o absorbido por la temperatura de enfriamiento, ya que el reactivo en el reactor permanece un tiempo muy corto; de modo que la

temperatura de equilibrio será T_f , aproximadamente. Por lo tanto las soluciones múltiples sólo pueden ocurrir para valores intermedios de λ .

Uppal *et al*[UR] descubrieron que había dos rangos distintos de λ donde (3.3) tiene soluciones múltiples y que algunas de estas soluciones puede estar en una rama aislada no conectada a la solución única de (3.3) que ocurre cuando $\lambda \rightarrow 0$ o $\lambda \rightarrow \infty$. Uppal *et al*[UR] hicieron un extensivo estudio numérico del problema. Presentamos algunos de sus resultados en la Figura 3.3. En el primer plano de esta figura el primer cuadrante del plano $\delta^{-1}B$ se divide por las curvas B_1B_2 y H_1H_2 en cinco regiones.

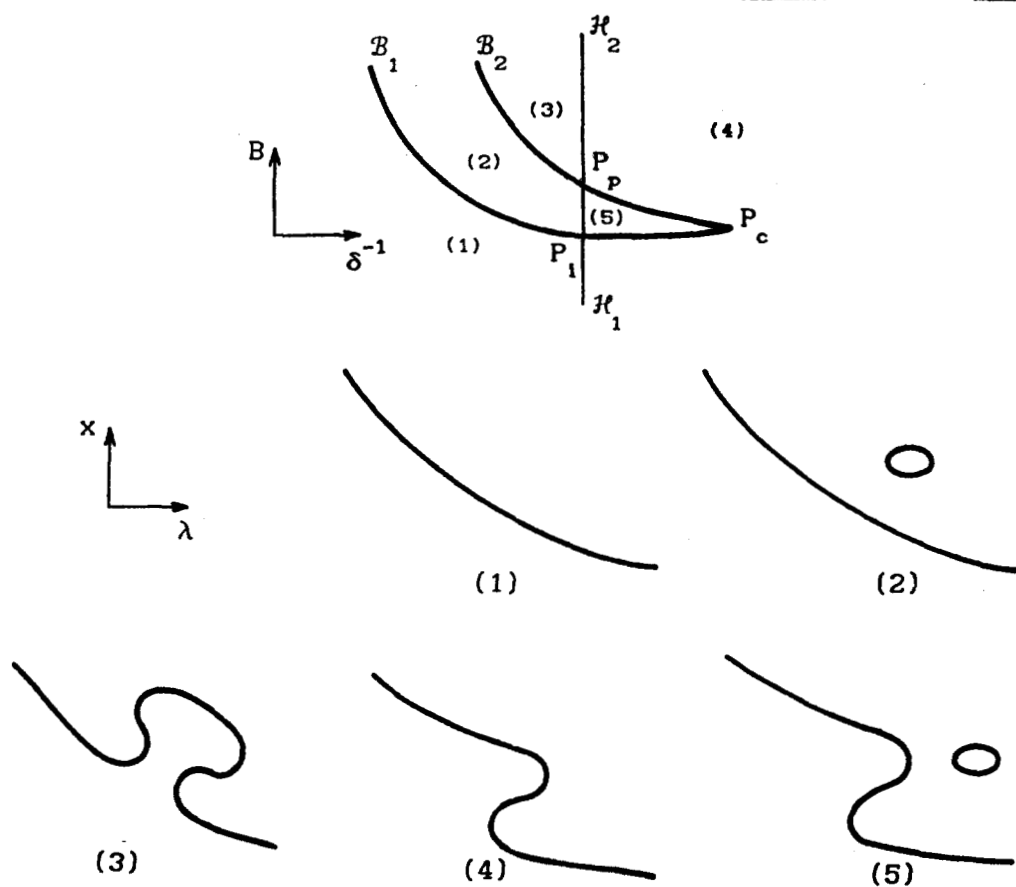


Figura 3.3. Diagramas de bifurcación debidos a Uppal *et al*[].

Las gráficas restantes corresponden a los diagramas de bifurcación en cada una de las regiones. (Uppal et al[UR] utilizan el tiempo de residencia $\tau = \frac{1}{\lambda}$ como parámetro de bifurcación). El parámetro η se mantiene fijo.

3.3 Aplicación de la teoría de singularidades

Los resultados expuestos en la Figura 3.3 tienen una explicación natural. La información vertida por la teoría muestra que las dos curvas $B_1 B_2$ y $H_1 H_2$ deben ser tangentes en su punto de intersección, P_p , un hecho que no es aparentemente claro de la evidencia numérica (Figura 3.3), ésta es una ventaja de los métodos de la teoría de singularidades.

Para entender como aplicar los métodos de la teoría de singularidades a problemas como éste, es importante considerar la dependencia de x respecto a λ , cuando δ y B están en alguna de las fronteras de las regiones de la Figura 3.3. En este sentido, hay siete porciones de frontera distintas:

$$B_1 P_1, P_1 P_c, P_c P_p, P_p B_2, H_1 P_1, P_1 P_p, P_p H_2,$$

las cuales dan los diagramas de bifurcación ilustrados en la Figura 3.4.

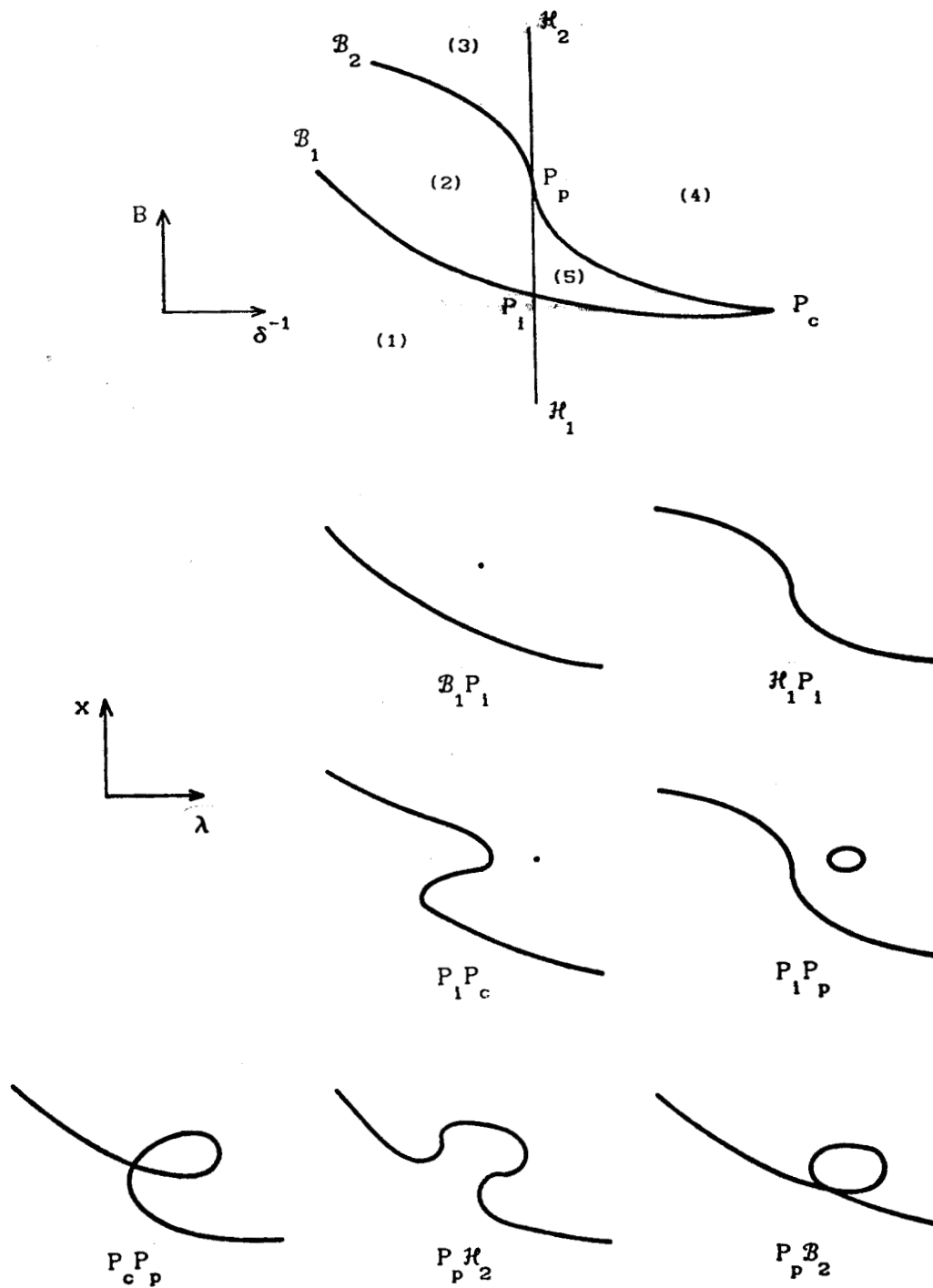


Figura 3.4. Diagramas de bifurcación a lo largo de las fronteras entre las distintas regiones.

Etiquetamos con $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$ una de las curvas frontera porque tradicionalmente el fenómeno de bifurcación, como puede verse en la Figura 3.4, ocurre a lo largo de esta curva. De igual manera, $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$, es la curva donde ocurre el fenómeno de histéresis (tangente vertical). Los puntos P_p , P_c y P_i , representan el trinche, la cúspide y la intersección, respectivamente (Figura 3.5).

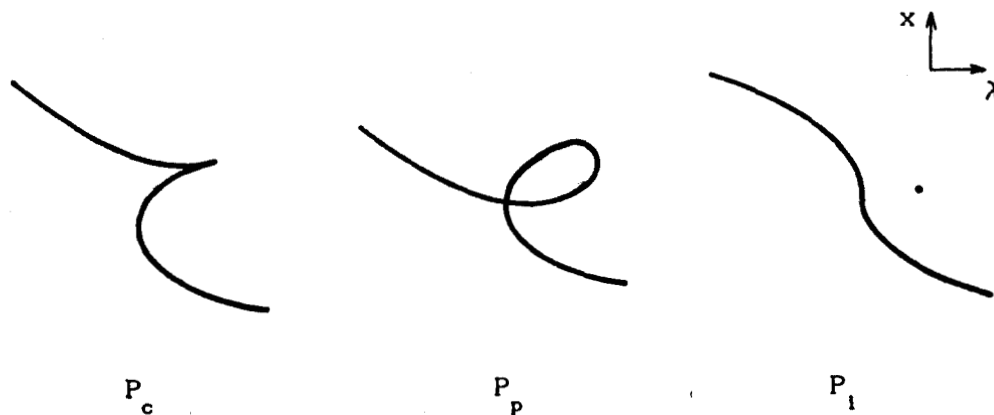


Figura 3.5. Diagramas de bifurcación.

La teoría de singularidades se enfoca principalmente sobre casos degenerados. Llevemos este enfoque al extremo. Específicamente, se muestra en [GK] que es posible variar η de manera que, los puntos P_c , P_p , y P_i coinciden en un sólo punto superdegenerado (Figura 3.6).



Figura 3.6. Diagrama de bifurcación del centro organizador de la Figura 3.3.

Por supuesto, puede haber otras variaciones de η que nos lleven al diagrama de bifurcación de la Figura 3.7(a) y perturbaciones de éste Figura 3.7(b), (c).

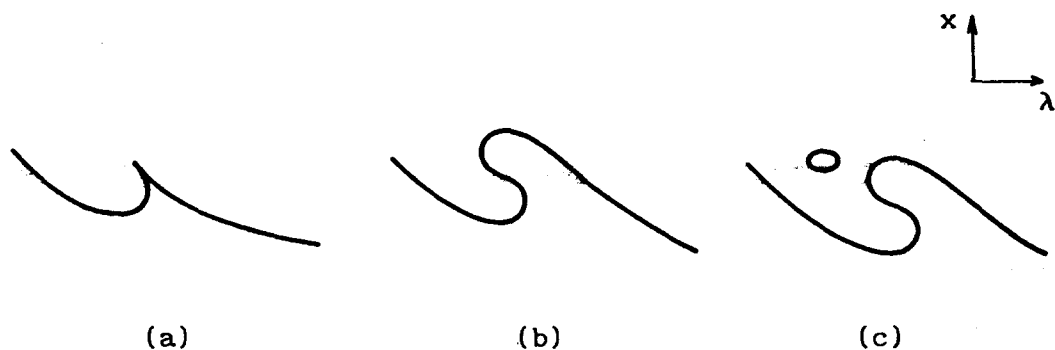


Figura 3.7. Diagramas de bifurcación debidos a la teoría de singularidades.

Resumamos esta aplicación. La forma normal apropiada que describe el diagrama de bifurcación de la Figura 3.6 es

$$h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2, \quad (3.4)$$

cerca de la singularidad. En Cap. II se muestra que el problema de reconocimiento está resuelto por las siguientes condiciones:

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0, \quad g_{xxx} > 0 \quad \text{y} \quad g_{\lambda\lambda} > 0. \quad (3.6)$$

En otras palabras, una función $g(x, \lambda)$ tiene una singularidad equivalente a (3.4) en algún punto (x_0, λ_0) si y sólo si en ese punto (3.6) se satisface. También prueban que hay un único conjunto de valores para δ , B , η tales que g tiene una singularidad equivalente a (3.4). Posteriormente dan el desdoblamiento universal de (3.5) a manera de entender el conjunto de soluciones de (2.4) para δ , B , η cerca de δ_0 , B_0 , η_0 , donde se satisface (3.6).

Aunque los métodos anteriores son locales, Balakotaiah y Luss [BL] han verificado numéricamente que las conclusiones son, de hecho, válidas *globalmente*. En particular los siete diagramas predichos teóricamente han sido encontrados numéricamente. Esta verificación procede de un cálculo numérico de las curvas de transición en el espacio global de parámetros. Balakotaiah y Luss [BL, BL2, BL3] han aplicado estas ideas a un buen número de sistemas de reactores químicos.

El término *centro organizador* es la forma en que René Thom designa al diagrama de bifurcación de la Figura 3.6.

CAPITULO II

EL PROBLEMA DE RECONOCIMIENTO

1. Introducción

Consideremos la siguiente relación de equivalencia: Dos funciones suaves, $g, h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en una vecindad del origen son fuertemente equivalentes si existen funciones suaves $X(x, \lambda)$ y $S(x, \lambda)$ tales que la relación

$$g(x, \lambda) = S(x, \lambda)h(X(x, \lambda), \lambda) \quad (1.1)$$

se satisface cerca del origen. Esta definición difiere de (I.2.5) en que aquí no se permite que λ cambie. También se requiere que

$$X(0,0) = 0, \quad X_x(x, \lambda) > 0, \quad S(x, \lambda) > 0. \quad (1.2)$$

Sin pérdida de generalidad trabajaremos en una vecindad del origen.

Por resolver el problema de reconocimiento entendemos lo siguiente: Dada una función suave $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en una vecindad del origen, caracterizar explícitamente las funciones suaves que sean fuertemente equivalentes a h . Por ejemplo, mostraremos que una función g es fuertemente equivalente a $x^3 - \lambda x$ si

$$g(0,0) = g_x(0,0) = g_{xx}(0,0) = g_\lambda(0,0) = 0 \quad (1.3)$$

y

$$g_{xxx}(0,0) > 0, \quad g_{\lambda x}(0,0) < 0.$$

En otras palabras, (1.3) resuelve el problema de reconocimiento.

En este capítulo presentaremos algoritmos que nos resuelvan el problema de reconocimiento para una función en general. Esta información es útil en las aplicaciones, en el sentido que se pueda probar que una ecuación $g(x, \lambda) = 0$ sea equivalente a otra ecuación $h(x, \lambda) = 0$, presumiblemente más simple. No obstante, esta información es incompleta, pues no nos dice como encontrar esa h apropiada. Nos referimos a tal h como un **forma normal** para el problema de bifurcación; h es un representante de toda una clase de equivalencia de funciones.

Encontrar una forma normal apropiada para un problema de bifurcación es uno de los aspectos más sutiles de esta teoría. En primera instancia nos limitaremos a las siguientes observaciones:

- (i) Dada una función $g(x, \lambda)$, es posible calcular cuales de sus derivadas se anulan en el punto de bifurcación. Supongamos que tenemos esa lista

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^{k_i} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \right]^{l_i} g(x, \lambda), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

Una selección natural para h es una combinación lineal de los monomios $x^{k_i} \lambda^{l_i}$ de *orden menor* que no aparezcan en (1.4). No obstante, aún en ejemplos relativamente sencillos este procedimiento requiere de mucho cuidado en su implementación.

- (ii) Frecuentemente, en las aplicaciones, uno tiene alguna idea de la clase de bifurcación que se espera. En [GS, Cap. IV, Secc. 4] se exhiben los diagramas de bifurcación asociados a distintas

formas normales. Examinar cuidadosamente estas formas normales y el comportamiento esperado del problema es otra manera de tener candidatos para la forma normal.

Consideremos las formas normales $h(x, \lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, donde $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$. Si $\delta = -1$, el conjunto de ceros de h forman dos rectas cruzadas; si $\delta = 1$, consiste de un punto. Por consiguiente, los diagramas de bifurcación de estos dos casos son completamente diferentes, aunque algebraicamente sean similares. En la sección 10 justificaremos la siguiente solución del problema de reconocimiento para $\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$:

Si una función g satisface

$$g(x, \lambda) = g_x(0, 0) = g_\lambda(0, 0) = 0 \quad (1.5)$$

$$g_{xx}(0, 0) \neq 0, \quad \det[d^2g(x, \lambda)] \neq 0,$$

entonces g es fuertemente equivalente a $\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, donde $\varepsilon = \text{sgn } g_{xx}(0, 0)$ y $\delta = \text{sgn } \det[d^2g(0, 0)]$. Aquí d^2g representa la matriz hessiana

$$d^2g = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{\lambda x} \\ g_{x\lambda} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}.$$

La parte notable de (1.3) y (1.5) es que sólo involucran un número pequeño de derivadas de g . Decimos que h es finitamente determinada si sólo necesitamos calcular un número finito de términos, en la expansión de Taylor de g , para decir que g es fuertemente equivalente a h .

Mencionemos a grandes rasgos la finalidad de cada una de las secciones restantes del capítulo. De la 2 a la 8 se desarrolla el material necesario para una presentación eficiente de los resultados principales. En la 2 presentamos el formalismo de los gérmenes. En la 3 se define el espacio tangente restringido $RT(g)$, que es el resultado teórico fundamental del capítulo. De la 4 a la 8 se refieren al cálculo de $RT(g)$. Ejemplos del cálculo de $RT(g)$ se dan en 4 y 7. En 5, 6 y 8 se da la formulación algebraica natural de los principios generales del cálculo de las primeras secciones. La 9 contiene los resultados principales del capítulo, donde describimos los algoritmos que resuelven el problema de reconocimiento para una función h . En la 10 aplicamos los resultados de la 9 para determinar formas normales de los problemas de bifurcación que presentamos en este trabajo.

2. Gérmenes

La teoría es local; es decir, los resultados son válidos sólo en una vecindad suficientemente pequeña de algún punto fijo. La terminología de gérmenes ([BR],[MT]) proporciona una manera conveniente de formalizar resultados en una teoría local evitando la repetición incesante de la frase *en una vecindad suficientemente pequeña del origen*.

Para entender mejor que significa que esta teoría sea local, consideremos la función $g(x,\lambda) = x^3 - \lambda x + ax^4$; g satisface (1.3), de modo que g es fuertemente equivalente a $x^3 - \lambda x$. Sin embargo, el conjunto de ceros de g mostrados en la Figura 2.1 cuando $a > 0$, consiste de las curvas $x = 0$ y $\lambda = x^2 + ax^3$.

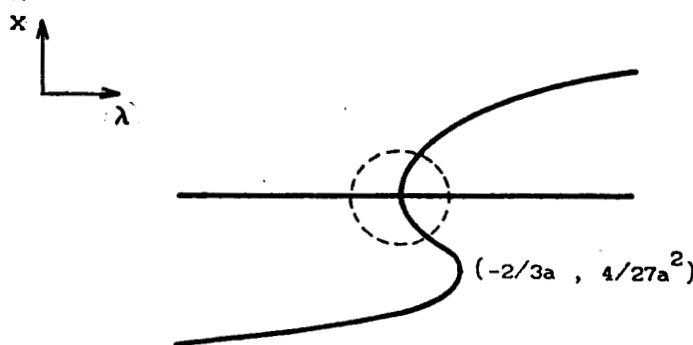


Figura 2.1. Conjunto solución de $x^3 - \lambda x + ax^4 = 0$, $a > 0$.

Intuitivamente, es claro que $x^3 - \lambda x + ax^4$ es equivalente a $x^3 - \lambda x$ sólo en una vecindad del origen que no sea tan grande. Específicamente, la equivalencia sólo puede verificarse en una vecindad que excluya el punto límite de $\lambda = x^2 + ax^3$ en $(x,\lambda) =$

127892

$(-2/3a, 4/27a^2)$; observe que, el disco donde se obtiene la equivalencia se hace pequeño conforme $a \rightarrow \infty$, y esto hace imposible escoger una vecindad del origen en la cual (1.3) implique un comportamiento similar a $x^3 - \lambda x = 0$, de trinche. Sin embargo, dadas cotas adecuadas sobre las derivadas de g , es posible estimar el tamaño adecuado de la vecindad que haga posible la equivalencia.

Definición 2.1. Decimos que dos funciones definidas alrededor del origen, posiblemente para conjuntos diferentes, son iguales como gérmenes si hay alguna vecindad del origen en la cual coinciden.

Denotemos por $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ al espacio de todas las funciones $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que esten definidas y sean $\mathcal{C}^\infty$ en alguna vecindad del origen. Llamamos gérmenes a los elementos de $\mathcal{E}_{x,\lambda}$. Un germen es una clase de equivalencia con respecto a la Definición 2.1.

El concepto de germen nos permite disminuir el dominio de una función tanto como sea necesario. En vista de esto, en (1.2) es suficiente requerir $X_x(0,0) > 0$, $S(0,0) > 0$; por continuidad estas desigualdades siguen cumpliéndose en alguna vecindad del origen.

Al tratar con gérmenes debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- (i) La evaluación de un germen en un punto fijo distinto del origen no está bien definida. La derivada de cualquier germen en el origen está bien definida.
- (ii) Los procesos de límite con gérmenes pueden conducir a errores pues los dominios pueden convertirse en un punto en el límite. Por supuesto, los procesos finitos no poseen tal problema.

3. El espacio tangente restringido

Dado un germen, ¿Para qué perturbaciones p es $g + tp$ fuertemente equivalente a g para toda t pequeña?. Suponga que para alguna perturbación p la respuesta es afirmativa; entonces para todo t pequeño existen funciones $S(x, \lambda, t)$ y $X(x, \lambda, t)$ tales que

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t) g(X(x, \lambda, t), \lambda), \quad (3.1)$$

donde

$$X(0, 0, t) \equiv 0. \quad (3.2)$$

Suponga además que S y X varían suavemente en x , λ y t , y que en $t = 0$, S y X definen la transformación identidad sobre g ; esto es

$$S(x, \lambda, 0) \equiv 1, \quad X(x, \lambda, 0) = x \quad (3.3)$$

Derivando (3.1) respecto a t , poniendo $t = 0$, y usando (3.3) para simplificar obtenemos $p(x, \lambda) = S(x, \lambda, 0) g_x(x, \lambda) + g_x(x, \lambda) X_t(x, \lambda, 0)$.

Esto motiva a definir el espacio tangente restringido.

Definición 3.1. El espacio tangente restringido de un germen g , denotado $RT(g)$, es el conjunto de todos los gérmenes p que pueden escribirse en la forma

$$p(x, \lambda) = a(x, \lambda)g(x, \lambda) + b(x, \lambda)g_x(x, \lambda), \quad (3.4)$$

donde $a, b \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ y $b(0, 0) = 0$.

Se usa la palabra *restringido* para indicar una construcción asociada con la equivalencia fuerte.

De la discusión anterior se sigue que $p \in RT(g)$ es una condición necesaria para que $g + tp$ sea fuertemente equivalente a g

para t pequeño. No es una condición suficiente pero se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2. Sean g y p gérmenes en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$. Si

$$RT(g + tp) = RT(g) \text{ para todo } t \in [0,1], \quad (3.5)$$

entonces $g + tp$ es fuertemente equivalente a g para todo $t \in [0,1]$.

Demostración. Para una demostración ver [GS, pag.98].

Mostremos que si la condición (3.5) se satisface entonces $p \in RT(g)$. En efecto, supongamos que (3.5) se satisface para algún $t \neq 0$. Claramente $g + tp \in RT(g + tp)$, como se puede ver escogiendo $a \equiv 1$ y $b \equiv 0$ en (3.4). Por consiguiente, de la suposición y (3.4), vemos que $g + tp = ag + bg_x$ para algunos $a, b \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, donde $b(0,0) = 0$. Despejando p obtenemos

$$p = \frac{a-1}{t} g + \frac{b}{t} g_x,$$

lo cual muestra que $p \in RT(g)$.

4. Cálculo de $RT(g)$

4.1 Principios Básicos.

Denotemos por $\mathcal{E}_n$ al espacio de gérmenes de funciones suaves $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 4.1. Sea $f \in \mathcal{E}_n$ con $f(0) = 0$. Entonces existen gérmenes $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}_n$ tales que $f(x) = x_1 a_1(x) + \dots + x_n a_n(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Demostración. Supongamos que f está definida en alguna bola $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$. Para cualquier x fijo en B_ε definimos la función $h(s) = f(sx)$, $s \in [0, 1]$. Observe que $h(0) = f(0) = 0$. Luego

$$f(x) = h(1) - h(0) = \int_0^1 \frac{dh}{ds}(s) ds.$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{dh}{ds}(s) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx),$$

definiendo $a_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx) ds$ se obtiene lo deseado. ■

Lema 4.2. Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. Un germen f pertenece a $RT(g)$ si y sólo si existen gérmenes $a, b, c \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ tales que

$$f = ag + (xb + \lambda c)g_x. \quad (4.1)$$

Demostración. Si $f = ag + (xb + \lambda c)g_x$, entonces (3.4) implica que $f \in RT(g)$. Recíprocamente, supongamos que $f \in RT(g)$, entonces f

tiene la forma (3.4). Como $b(0,0) = 0$, del Lema 4.1, existen gérmenes $a_1, a_2 \in \mathcal{E}_n$ tales que $b = xa_1 + \lambda a_2$; substituyendo esta expresión para b en (3.4) se obtiene (4.1). ■

Definición 4.3. Si $f \in \mathcal{E}_n$, el k -jet de f en el origen, $j^k f$, es el polinomio de Taylor de orden k de f en el origen. Escribimos

$$j^k f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^\alpha f(0) x^\alpha,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un índice múltiple y

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \right]^{\alpha_1} \dots \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{\alpha_n}.$$

Lema 4.4. (Teorema de Taylor). Sea $f \in \mathcal{E}_n$. Para cualquier entero no negativo k , existen gérmenes $a_\alpha \in \mathcal{E}_n$, α un índice múltiple con $|\alpha| = k + 1$, tales que

$$f(x) = j^k f(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} a_\alpha(x) x^\alpha. \quad (4.2)$$

4.2 Ejemplos

Ejemplo 1. Para $g = x^2 + \lambda$ probaremos que

$$RT(x^2 + \lambda) = \left\{ f \in \mathcal{E}_{x,\lambda} : f(0,0) = f_x(0,0) = 0 \right\}. \quad (4.3)$$

Prueba. Del Lema 4.2, $RT(x^2 + \lambda)$ consiste de todos los gérmenes de la forma

$$a(x^2 + \lambda) + (xb + \lambda c)(2x) = (a + 2b)x^2 + (a + 2xc)\lambda. \quad (4.4)$$

donde $a, b, c \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. Afirmamos que $RT(x^2 + \lambda)$ consiste de todos los gérmenes de la forma

$$\alpha x^2 + \beta \lambda, \quad (4.5)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. En efecto, todo germen de la forma (4.4) tiene la forma (4.5). Recíprocamente, dados $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ tenemos

$$\alpha x^2 + \beta \lambda = [\beta + 2(\alpha - \beta)/2]x^2 + (\beta)\lambda,$$

tomando $a = \beta$, $b = (\alpha - \beta)/2$ y $c = 0$ se obtiene la forma (4.4) para $\alpha x^2 + \beta \lambda$. Esto prueba la afirmación.

Por otro lado, si $f \in RT(x^2 + \lambda)$, entonces f tiene la forma (4.5) y de ésta, $f(0,0) = f_x(0,0) = 0$. Recíprocamente, supongamos $f(0,0) = f_x(0,0) = 0$, entonces del Lema 4.4 con $k = 1$, vemos que existen $a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ tales que

$$f(x, \lambda) = f_\lambda(0,0)\lambda + a_{20}x^2 + a_{11}\lambda x + a_{02}\lambda^2 \quad (4.6)$$

poniendo $\alpha = a_{20}$, $\beta = f_\lambda(0,0) + a_{11}x + a_{02}\lambda$ en (4.6), f adquiere la forma (4.5). Esto completa la prueba.

Ejemplo 2. Sea $g = x^3 - \lambda x$, entonces

$$RT(x^3 - \lambda x) = \left\{ f \in \mathcal{E}_{x, \lambda} : f = f_x = f_\lambda = f_{xx} = 0, \text{ en } (0,0) \right\} \quad (4.7)$$

Prueba. Aplicando el Lema 4.2, $RT(x^3 - \lambda x)$ consiste de gérmenes de la forma

$$(a + 3b)x^3 - (a + 2b - 3xc)\lambda x - c\lambda^2, \quad (4.8)$$

donde $a, b, c \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. Claramente todo germen de la forma (4.8) puede escribirse como

$$\alpha x^3 + \beta \lambda x + \gamma \lambda^2, \quad (4.9)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$; menos trivialmente, todo germen de la forma (4.9) puede escribirse de la forma (4.8), siempre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} a + 3b &= \alpha \\ -a - 2b + 3c &= \beta \\ -c &= \gamma. \end{aligned}$$

sea invertible. Finalmente aplicando el Lema 4.4 se muestra que un germen f puede ser expresado como (4.9) si y sólo si

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_\lambda(0,0) = f_{xx}(0,0) = 0.$$

Esto prueba lo deseado.

Observaciones. Considere una combinación lineal tal como

$$a(x^2 + \lambda) + b(2x^2) + c(2\lambda x), \quad (4.10)$$

$a, b, c, \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. Nos referimos a los términos $x^2 + \lambda$, $2x^2$, $2\lambda x$ como generadores de $RT(x^2 + \lambda)$. Los siguientes tres pasos son importantes en el cálculo de $RT(g)$:

- (a) Desechar generadores redundantes.
- (b) Formar combinaciones lineales de generadores para simplificarlos.
- (c) Pasar de los generadores de $RT(g)$ a una caracterización de éste.

En las siguientes secciones formalizaremos estos pasos.

5. Algebra básica

5.1 Terminología

El conjunto $\mathcal{E}_n$ es un espacio vectorial, esto significa que dados $f, g \in \mathcal{E}_n$, y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; entonces, $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{E}_n$. Por consiguiente, $\mathcal{E}_n$ es un anillo pues es posible multiplicar gérmenes.

Un ideal $\mathcal{I}$ en $\mathcal{E}_n$ es un subespacio lineal con la siguiente propiedad:

$$\text{si } \phi \in \mathcal{E}_n \text{ y } f \in \mathcal{I}, \text{ entonces } \phi f \in \mathcal{I}.$$

En relación con nuestra aplicación es muy fácil probar que si $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, entonces $RT(g)$ es un ideal en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$. En efecto, de la caracterización en el Lema 4.2 de $RT(g)$

$$ag + bxg_x + c\lambda g_x, \quad (5.1)$$

donde $a, b, c \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. Ahora, si f_1 y f_2 tienen la forma (5.1), también la tiene $f_1 + f_2$. Además, si f tiene la forma (5.1) para algunos $a, b, c \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, ϕ tiene la forma (5.1) para $\phi a, \phi b, \phi c \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. La caracterización (5.1) de $RT(g)$ es una construcción típica de la teoría de anillos. Más generalmente, si $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{E}_n$, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales $a_1 p_1 + \dots + a_k p_k$, $a_i \in \mathcal{E}_n$, es un ideal en $\mathcal{E}_n$. Representamos a este ideal por $\langle p_1, \dots, p_k \rangle$; a $p_1, \dots, p_k$ se les llama **generadores** del ideal. Con esta notación, podemos resumir el Lema 4.2 como

$$RT(g) = \langle g, xg_x, \lambda g_x \rangle. \quad (5.2)$$

A un ideal generado por un número finito de generadores se le llama **finitamente generado**.

5.2 Principios para calcular $RT(g)$

Los siguientes lemas formalizan los pasos (a) y (b) de la sección 4 usando el lenguaje algebraico introducido.

Lema 5.1. Sea $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ un ideal en $\mathcal{E}_n$. si

$p_k = a_1 p_1 + \dots + a_{k-1} p_{k-1}$, para algunos gérmenes $a_i \in \mathcal{E}_n$, entonces $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle$.

Demostración. Obviamente $\langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle \subset \mathcal{J}$. Sea $f \in \mathcal{J}$, entonces $f = b_1 p_1 + \dots + b_k p_k$ para algunos $b_i \in \mathcal{E}_n$. Si $p_k = a_1 p_1 + \dots + a_{k-1} p_{k-1}$, para algunos gérmenes $a_i \in \mathcal{E}_n$, entonces

$$f = (b_1 + a_1 b_k) p_1 + \dots + (b_{k-1} + a_{k-1} b_k) p_{k-1} \in \langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle,$$

esto es, $\mathcal{J} \subset \langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle$. Por lo tanto $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle$. ■

Lema 5.2. Sea $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ un ideal en $\mathcal{E}_n$ y sean

$$q_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} p_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.3)$$

donde $a_{ij} \in \mathcal{E}_n$. Si la matriz $k \times k$, $[a_{ij}(0)]$, $i, j = 1, \dots, k$, es invertible, entonces $\mathcal{J} = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$.

Demostración. Debemos mostrar que $\langle q_1, \dots, q_k \rangle = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$.

Primero afirmamos que $\langle q_1, \dots, q_k \rangle \subset \langle p_1, \dots, p_k \rangle$, ya que de (5.3) q_i es una combinación lineal de $p_1, \dots, p_k$. Pero cualquier f en $\langle q_1, \dots, q_k \rangle$ es una combinación lineal de $q_1, \dots, q_k$. Como todo ideal es cerrado bajo estas operaciones, $f \in \langle p_1, \dots, p_k \rangle$, lo cual prueba la afirmación.

Para obtener la contención inversa, invirtamos (5.3). Sea $A(x)$ la matriz $k \times k$ con entradas $a_{ij}(x)$. De la regla de Cramer:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A). \quad (5.4)$$

Por hipótesis $\det A(0) \neq 0$, y por la continuidad de $\det A(x)$ es diferente de cero en alguna vecindad del origen. Por consiguiente, de (4.8) se sigue que las entradas de $A^{-1}(x)$, son gérmenes suaves, dado que las de $A(x)$ lo son. Invirtiendo (5.3) obtenemos

$$p_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} q_j,$$

donde $b_{ij} \in \mathcal{E}_n$ es la (i,j) -ésima entrada de $A^{-1}(x)$. Luego, cada generador p_i es una combinación lineal de $q_1, \dots, q_k$. En forma análoga a la prueba de la contención inversa se deduce que $\langle p_1, \dots, p_k \rangle \subset \langle q_1, \dots, q_k \rangle$, lo cual termina la prueba del lema. ■

En vista de estos dos lemas, ocupémoslos para reescribir el argumento que nos lleva a (4.5) en forma más compacta, esto es: De la definición (5.2) de $RT(g)$,

$$RT(x^2 + \lambda) = \langle x^2 + \lambda, 2x^2, 2\lambda x \rangle.$$

Observemos que $2\lambda x = 2x(x^2 + \lambda) - x(2x^2)$, entonces del Lema 5.1

$$RT(x^2 + \lambda) = \langle x^2 + \lambda, 2x^2 \rangle.$$

Ahora, expresemos ese conjunto de generadores en términos de otros de la siguiente manera:

127892

$$\begin{bmatrix} x^2 + \lambda \\ 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Debido a que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible para $x = \lambda = 0$ (en realidad lo es para todo (x, λ)), cada par de gérmenes en (5.5) genera $RT(x^2 + \lambda)$.

Similarmente obtengamos (4.9):

$$RT(x^3 - \lambda x) = \langle x^3 - \lambda x, 3x^3 - \lambda x, 3x^2\lambda - \lambda^2 \rangle$$

debido a (5.2). Ahora, observemos que

$$\begin{bmatrix} x^3 - \lambda x \\ 3x^3 - \lambda x \\ 3x^2\lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 \\ \lambda x \\ \lambda^2 \end{bmatrix},$$

en donde la matriz 3×3 es no singular en $x = 0, \lambda = 0$. Luego, del Lema 5.2, podemos escribir

$$RT(x^3 - \lambda x) = \langle x^3, \lambda x, \lambda^2 \rangle. \quad (5.6)$$

6. Determinación Finita

El paso (c) en la sección 4 consiste en pasar de los generadores de $RT(g)$ a una caracterización de $RT(g)$ mediante condiciones sobre una función y sus derivadas en el origen. En esta sección exploraremos este tercer paso y esto nos llevará a las ideas fundamentales de la teoría de singularidades aplicadas a bifurcación.

6.1 Terminología Algebraica Adicional.

Sea

$$M = \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}. \quad (6.1)$$

Si $\phi \in \mathcal{E}_n$ y $f, f_1, f_2 \in M$, entonces

$$(i) \phi f \in M, \text{ ya que } \phi f(0) = \phi(0) = 0.$$

$$(ii) f_1 + f_2 \in M, \text{ ya que } (f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0.$$

Por lo tanto M es un ideal. Afirmamos que M es generado por $x_1, \dots, x_n$; esto es,

$$M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Obviamente $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset M$, pues cada generador x_i está en M .

Recíprocamente, si $f \in M$ entonces del Lema 4.1 $f = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$

para algunos $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}_n$; luego $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, y por lo tanto

$M \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Más aún M es un ideal maximal en el sentido

siguiente: para cualquier ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}_n$, se tiene $\mathcal{I} \subset M$ o $\mathcal{I} = \mathcal{E}_n$.

Para ver esto supongamos que $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{E}_n$ y que $g \in \mathcal{I}$ es tal

que $g(0) \neq 0$, entonces $1/g \in \mathcal{E}_n$ y $(g)(1/g) = 1 \in \mathcal{I}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{I} = \mathcal{E}_n.$$

Dados dos ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ en $\mathcal{E}_n$, hay construcciones estándares en la teoría de anillos que nos llevan a nuevos ideales, el ideal suma $\mathcal{I} + \mathcal{J}$, que consiste de todos los gérmenes de la forma $f + g$ donde $f \in \mathcal{I}$ y $g \in \mathcal{J}$; y el ideal producto $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$, que consiste de todas las sumas finitas de la forma $f_1 g_1 + \dots + f_m g_m$, donde $f_i \in \mathcal{I}$ y $g_i \in \mathcal{J}$. Además si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son finitamente generados, digamos $\mathcal{I} = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ y $\mathcal{J} = \langle q_1, \dots, q_l \rangle$, entonces $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ e $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ son finitamente generados como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} + \mathcal{J} &= \langle p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \rangle \quad \text{y} \\ \mathcal{I} \cdot \mathcal{J} &= \langle p_i q_j \rangle, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Demos dos ejemplos de la construcción del ideal producto.

Ejemplo 1. Si $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$, entonces $\mathcal{M} = \langle x, \lambda \rangle$ y $\text{RT}(g) = \langle g, xg_x, \lambda g_x \rangle$.

Por consiguiente, de (6.2)

$$\mathcal{M} \cdot \text{RT}(g) = \langle xg, \lambda g, x^2 g_x, \lambda g_x, \lambda^2 g_x \rangle.$$

Observe que los generadores $x(\lambda g_x)$ y $\lambda(xg_x)$ son redundantes.

Ejemplo 2. En $\mathcal{E}_n$, procediendo inductivamente definamos la sucesión de ideales

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^3 = \mathcal{M}\mathcal{M}^2, \quad \mathcal{M}^4 = \mathcal{M}\mathcal{M}^3, \dots$$

Se sigue de (6.2) que $\mathcal{M}^k$ es generado por todos los monomios de grado k ,

$$\mathcal{M}^k = \{x^\alpha : |\alpha| = k\}$$

Luego del Teorema de Taylor tenemos una caracterización alternativa para $\mathcal{M}^k$

$$\mathcal{M}^k = \left\{ f \in \mathcal{E}_n : \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^\alpha f(0) = 0 \quad \text{para} \quad |\alpha| \leq k-1 \right\}. \quad (6.3)$$

Sea $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{E}_n$. Decimos que dos gérmenes f y g en $\mathcal{E}_n$ son iguales módulo $\mathcal{J}$, y escribimos $f \equiv g \pmod{\mathcal{J}}$, si $f - g \in \mathcal{J}$. Por ejemplo, usando esta terminología podemos reescribir el Teorema de Taylor (Lema 4.4) como sigue

$$f \equiv j^k f \pmod{\mathcal{M}^{k+1}}. \quad (6.4)$$

Las operaciones algebraicas en $\mathcal{E}_n$ preservan esta noción de igualdad. Por consiguiente, si $f_1 \equiv f_2 \pmod{\mathcal{J}}$ y $g_1 \equiv g_2 \pmod{\mathcal{J}}$, entonces $f_1 + g_1 \equiv (f_2 + g_2) \pmod{\mathcal{J}}$ y $f_1 g_1 \equiv f_2 g_2 \pmod{\mathcal{J}}$.

6.2 Condiciones de pertenencia en $RT(g)$

Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. Por ahora la finalidad es probar que si para algún k entero no negativo, $\mathcal{M}^k \subset RT(g)$, entonces decidir si un germen dado $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ pertenece a $RT(g)$ se reduce a un problema de álgebra lineal en dimensión finita. Esta conclusión se sigue del lema siguiente. Consideremos la notación de índice múltiple

$$D^\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \right]^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Lema 6.1. Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, y supongamos que para un k entero no negativo, $\mathcal{M}^k \subset RT(g)$. Un germen $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ pertenece a $RT(g)$ si y sólo si existen polinomios $a(x,\lambda)$, $b(x,\lambda)$ y $c(x,\lambda)$ de grado menor o igual k que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$D^\alpha [f - (ag + bxg_x + c\lambda g_\lambda)](0,0) = 0 \quad (6.5)$$

para $|\alpha| = k$.

Demostración. Si $f \in RT(g)$, existen gérmenes $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ tales que

$$f - (\tilde{a}g + \tilde{b}xg_x + \tilde{c}\lambda g_x) = 0 \quad (6.6)$$

para toda (x, λ) . Sean a, b, c los polinomios de Taylor de orden k de $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ respectivamente. Entonces

$$D^\alpha a(0,0) = D^\alpha \tilde{a}(0,0) \quad \text{para} \quad |\alpha| \leq k,$$

y fórmulas similares satisfacen b y c . La ecuación (6.5) resulta de combinar esta observación con las derivadas apropiadas de (6.6). Recíprocamente, suponga que $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ satisface (6.5) para ciertos polinomios. Sea $r = f - (ag + bxg_x + c\lambda g_x)$, vemos de (6.3) que $r \in M^{k+1} \subset RT(g)$. Ahora, la fórmula $f = (ag + bxg_x + c\lambda g_x) + r$ expresa a f como la suma de dos términos en $RT(g)$; por consiguiente $f \in RT(g)$. ■

El Lema 6.1 reduce la condición de pertenencia a $RT(g)$ a la solubilidad de (6.5). Interpretamos a (6.5) como un sistema de $(k+1)(k+2)/2$ ecuaciones lineales con coeficientes polinomiales variables

$$a(x, \lambda) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}, \dots \quad (6.7)$$

Hay $3k(k+1)/2$ de tales coeficientes variables. Debido a los términos $D^\alpha f(0,0)$ en (6.5), este sistema es no homogéneo. Esto hace que (6.5) no pueda resolverse al menos que la homogeneidad $D^\alpha f(0,0)$ satisfaga condiciones auxiliares; esto es, por supuesto, algo familiar en álgebra lineal.

Ilustremos estas ideas relacionándolas con los cálculos de $RT(x^3 - \lambda x)$. Primero afirmamos que

$$M^3 \subset RT(x^3 - \lambda x). \quad (6.8)$$

Por (4.9), $RT(x^3 - \lambda x) = \langle x^3, \lambda x, \lambda^2 \rangle$. Para cada generador de M^3 tenemos la representación

$$\begin{aligned} x^3 &= 1(x^3), & \lambda x &= 1(\lambda x), \\ \lambda x^2 &= x(\lambda x), & \lambda^3 &= \lambda(\lambda^2). \end{aligned}$$

Esto muestra que todos los generadores de M^3 pertenecen a $RT(x^3 - \lambda x)$, lo cual prueba la afirmación.

Ahora desarrollemos (6.5) para $g = x^3 - \lambda x$, tomando $k = 2$.

Observe que si $|\alpha| \leq 2$

$$D^\alpha[a(x, \lambda)(x^3 - \lambda x)](0, 0) = \begin{cases} -a(0, 0) & \text{si } \alpha = (1, 1), \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

En otras palabras, sólo el primer coeficiente a_0 de $a(x, \lambda)$ contribuye realmente en (6.5), porque $x^3 - \lambda x$ siempre se anula para órdenes más altos ($|\alpha| > 2$). Similarmente para los otros polinomios desconocidos, b y c , sólo b_0 y c_0 contribuyen en (6.5). Desarrollando (6.5) obtenemos el siguiente sistema no homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas, a_0, b_0, c_0 :

$$\begin{aligned} 0 &= f(0, 0) \\ 0 &= f_x(0, 0) \\ 0 &= f_\lambda(0, 0) \\ 0 &= f_{xx}(0, 0) \\ -a_0 - b_0 &= f_{\lambda x}(0, 0) \\ -c_0 &= f_{\lambda\lambda}(0, 0), \end{aligned}$$

claramente este sistema es soluble si y sólo si

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_\lambda(0,0) = f_{xx}(0,0) = 0.$$

lo cual es el resultado que queríamos.

Es de gran importancia el hecho siguiente: La condición de solubilidad de (6.5) sólo involucra un número finito de derivadas de f en el origen. En otras palabras, si las derivadas de f de orden menor o igual que k son tales que (6.5) es soluble, entonces $f \in RT(g)$ no importa que tan altas puedan ser las derivadas de f . De modo que el Lema 6.1 nos lleva al tema fundamental de la determinación finita.

6.3 El Lema de Nakayama

El Lema 6.1 indica la importancia de poder averiguar si alguna potencia de M está contenida en $RT(g)$. Relacionado con esto, es de gran utilidad el llamado *Lema de Nakayama*; dado un entero k , este resultado nos proporciona una prueba sencilla para ver si M^k está o no contenido en $RT(g)$.

Lema 6.2. (Lema de Nakayama). Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales en $\mathcal{E}_n$, supongamos que $\mathcal{J}$ es finitamente generado, $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$. Entonces $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ si y sólo si $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} + M \cdot \mathcal{J}$.

Demostración. Ya que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J} + M \cdot \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ implica que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} + M \cdot \mathcal{J}$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} + M \cdot \mathcal{J}$, esto significa que cada generado p_i de $\mathcal{I}$ puede escribirse como

$$p_i = f_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j, \quad (6.9)$$

donde $f_i \in \mathcal{J}$ y $a_{ij} \in \mathcal{E}_n$ con $a_{ij}(0) = 0$ para $i, j = 1, \dots, m$. La forma del segundo término en (6.9) se sigue del hecho de que $M \cdot \mathcal{J}$ es generado por productos de los p_j con gérmenes que se anulan en el origen. Sea A la matriz $m \times m$ con entradas a_{ij} ; sea I la matriz identidad $m \times m$. Reescribamos (6.9) en notación matricial

$$(I-A) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Ahora $(I-A)|_{x=0} = I$, de modo que $I-A$ es invertible en alguna vecindad del origen. Invirtiendo $(I-A)$ de (6.10) encontramos que

$$p_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j,$$

$i = 1, \dots, m$. Esto muestra que cada p_i es una combinación lineal de los f_j y por tanto pertenece a $\mathcal{J}$. Consecuentemente, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. ■

Veamos algunas consecuencias útiles del Lema de Nakayama.

Corolario 6.3. (a) Sea $\mathcal{J} = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$ un ideal de $\mathcal{E}_n$ y suponga que $q_1, \dots, q_m \in M \cdot \mathcal{J}$. Entonces $\mathcal{J}$ también es generado por $p_1 + q_1, \dots, p_m + q_m$.
 (b) Si g es un germen tal que $M^k \subset RT(g)$, entonces g es fuertemente equivalente a $j^k g$.

Demostración. (a) Ya que $q_j \in M \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ se sigue que $p_j + q_j \in \mathcal{J}$ lo cual implica que $\langle p_1 + q_1, \dots, p_m + q_m \rangle \subset \mathcal{J}$. Recíprocamente, cada

$p_j = (p_j + q_j) - q_j \in \langle p_1 + q_1, \dots, p_m + q_m \rangle + M \cdot \mathcal{J}$, esto implica que $\mathcal{J} \subset \langle p_1 + q_1, \dots, p_m + q_m \rangle + M \cdot \mathcal{J}$, se sigue del Lema de Nakayama que $\mathcal{J} \subset \langle p_1 + q_1, \dots, p_m + q_m \rangle$.

(b) Escribamos $g = j^k g - r$, donde $r \in M^{k+1}$. De acuerdo al Teorema 3.2, para probar que g es fuertemente equivalente a $j^k g$, es suficiente probar que $RT(g) = RT(g + tr)$ para todo $t \in [0, 1]$. Ahora, $RT(g + tr)$ es generado por $g + tr$, $x(g_x + tr_x)$ y $\lambda(g_x + tr_x)$. Cada uno de estos generadores difiere de los correspondientes generadores de $RT(g)$ en un elemento de $M^{k+1} \subset M \cdot RT(g)$. De la parte (a) se sigue que $RT(g) = RT(g + tr)$. ■

El caso especial más relevante del Lema de Nakayama es el siguiente.

Lema 6.4. Sean $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$, y k un entero positivo. Si $M^k \subset RT(g) + M^{k+1}$, entonces $M^k \subset RT(g)$.

Demostración. La conclusión se sigue del Lema de Nakayama tomando $\mathcal{J} = M^k$ y $\mathcal{J} = RT(g)$. ■

Apliquemos este caso especial a dos ejemplos específicos.

Como primera aplicación, obtengamos (6.8). Por definición

$$RT(x^3 - \lambda x) = \langle x^3 - \lambda, 3x^3 - \lambda x, 3\lambda x^2 - \lambda^2 \rangle. \quad (6.11)$$

Podemos expresar cada uno de los generadores de M^3 en términos de los tres generadores de (6.11) módulo M^4 :

$$\begin{aligned}
x^3 &= -\frac{1}{2}(x^3 - \lambda x) + \frac{1}{2}(3x^3 - \lambda x), \\
\lambda x^2 &= -x(x^3 - \lambda x) + r_1(x, \lambda), \\
\lambda^2 x &= -\lambda(x^3 - \lambda x) + r_2(x, \lambda), \\
\lambda^3 &= -\lambda(3\lambda x^2 - \lambda^2) + r_3(x, \lambda),
\end{aligned} \tag{6.12}$$

donde $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{M}^4$. Vemos de (6.12) que

$$\mathcal{M}^3 \subset \text{RT}(x^3 - \lambda x) + \mathcal{M}^4$$

de modo que (6.8) se sigue del Lema 6.4.

En general el Lema 6.3 simplifica el manejo de los términos de orden alto en un problema de bifurcación. Para ilustrar esto, consideremos la siguiente perturbación del trinche:

$$g(x, \lambda) = x^3 - \lambda x + ax^4$$

donde $a \in \mathbb{R}$ (ver II.Á1). Específicamente probaremos que

$$\mathcal{M}^3 \subset \text{RT}(g) \tag{6.13}$$

En realidad, sólo repetiremos (6.12) para este ejemplo. Ya que, $ax^4 \in \mathcal{M}^4$, cada ecuación de (6.12) es perturbada por algún elemento de $\mathcal{M}^4$; esto es,

$$\begin{aligned}
x^3 &= -\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}xg_x + \tilde{r}_0(x, \lambda), \\
\lambda x^2 &= -xg + \tilde{r}_1(x, \lambda), \\
\lambda^2 x &= -\lambda g + \tilde{r}_2(x, \lambda), \\
\lambda^3 &= -\lambda(\lambda g_x) + \tilde{r}_3(x, \lambda),
\end{aligned}$$

donde $\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3 \in \mathcal{M}^4$. Con esto (6.13) se sigue de Lema 6.4.

Observaciones. (i) Es posible obtener (6.13) directamente, obteniendo explícitamente los generadores como combinaciones lineales de g , xg_x y λg_x .

(ii) La prueba del Lema de Nakayama tiene mucho en común con la prueba del Lema 5.2. La ventaja del Lema de Nakayama es que no es necesario ser tan explícito en especificar la relación entre dos conjuntos de generadores.

6.4 Codimensión finita para ideales

El concepto de codimensión finita está estrechamente relacionado con el hecho de si un ideal contiene una potencia del ideal maximal $\mathcal{M}$.

Definición 6.5. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ un subespacio vectorial. Decimos que $\mathcal{J}$ tiene **codimensión finita** si existe un subespacio vectorial $V \subset \mathcal{E}_n$ de dimensión finita tal que

$$\mathcal{J} + V = \mathcal{E}_n. \quad (6.14)$$

Si no existe tal espacio decimos que $\mathcal{J}$ tiene **codimensión infinita**.

Usualmente aplicaremos este concepto a un subespacio vectorial $\mathcal{J}$ que en realidad es un ideal, por lo menos en este trabajo. Consideremos algunos ejemplos para aclarar esta definición. Afirmamos que $\mathcal{M}^k$ tiene codimensión finita para cualquier entero positivo k . Por supuesto, si $f \in \mathcal{E}_n$, podemos escribir

$$f = [f - j^{k-1}f] + j^{k-1}f.$$

Por (6.3) el primer término pertenece a $\mathcal{M}^k$, y el segundo término es

un polinomio de grado a lo más $k-1$. Por consiguiente

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{M}^k + \mathbb{R}\{x^\alpha : |\alpha| \leq k-1\}, \quad (6.15)$$

donde el segundo término indica todas las combinaciones lineales de monomios de grado menor o igual que $k-1$. Se sigue de (6.15) que $\mathcal{M}^k$ tiene codimensión finita para cualquier k como afirmamos.

Como segundo ejemplo, afirmamos que $RT(x^3 - \lambda x)$ tiene codimensión finita en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$. Recordemos la caracterización (4.7) de $RT(x^3 - \lambda x)$. Para cualquier $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ hay un único polinomio de la forma

$$\pi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \lambda + c_4 x^2,$$

tal que $f - \pi \in RT(x^3 - \lambda x)$. Luego

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = RT(x^3 - \lambda x) + \mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2\}, \quad (6.16)$$

lo cual prueba la afirmación.

En (6.14) es natural requerir que V tenga dimensión pequeña tanto como sea posible. Esto ocurre si y sólo si $\mathcal{J} \cap V = \{0\}$, en cuyo caso decimos que $\mathcal{E}_n$ es la suma directa de $\mathcal{J}$ y V , y escribimos $\mathcal{E}_n = \mathcal{J} \oplus V$. Las descomposiciones (6.15) y (6.16) son en suma directa. Veamos esto para (6.16). Si $f \in RT(x^3 - \lambda x) \cap \mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2\}$, se deben satisfacer simultáneamente las condiciones en (4.7) y $f = a + bx + c\lambda + dx^2$ para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Luego $a = b = c = d = 0$ y por tanto $f \equiv 0$, lo cual prueba que (6.16) es una suma directa. Estas ideas nos llevan a un refinamiento de la Definición (6.5).

Definición 6.6. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ un subespacio vectorial de codimensión finita. La codimensión es la dimensión de cualquier subespacio vectorial $V \subset \mathcal{E}_n$, tal que $\mathcal{E}_n = \mathcal{J} \oplus V$. Escribimos

$$\text{codim} \mathcal{J} = \dim V.$$

Proposición 6.7. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ un ideal. Hay un entero k tal que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$ si y sólo si $\mathcal{J}$ tiene codimensión finita.

Demostración. Si $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$, entonces $\text{codim} \mathcal{J} \leq \text{codim} \mathcal{M}^k < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{J}$ tiene codimensión finita. Digamos $\text{codim} \mathcal{J} = m - 1$. Obviamente, tenemos las inclusiones

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}^m \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}^{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}.$$

Por lo tanto

$$1 = \text{codim}(\mathcal{J} + \mathcal{M}) \leq \text{codim}(\mathcal{J} + \mathcal{M}^2) \leq \dots \leq \text{codim}(\mathcal{J} + \mathcal{M}^m) \leq \text{codim}(\mathcal{J}) = m - 1.$$

La igualdad debe verificarse por lo menos para un caso, porque disponemos de menos enteros que desigualdades. Entonces, existe un entero $1 \leq k < m$ tal que

$$\text{codim}(\mathcal{J} + \mathcal{M}^k) = \text{codim}(\mathcal{J} + \mathcal{M}^{k+1}).$$

Sin embargo, $\mathcal{J} + \mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}^k$. Luego estos ideales pueden tener igual codimensión sólo si son iguales; $\mathcal{J} + \mathcal{M}^{k+1} = \mathcal{J} + \mathcal{M}^k$. En particular, $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}^{k+1}$. Se sigue del Lema de Nakayama que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$. ■

Corolario 6.8. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$, $n \geq 2$, un ideal generado sólo por un germen p tal que $p(0) = 0$, entonces $\mathcal{J}$ tiene codimensión infinita.

Demostración. Supongamos que $\text{codim } \mathcal{F} < \infty$. Por la Proposición 6.7 hay un entero k tal que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{F} = \langle p \rangle$. Puesto que $p = j^k p + r$ donde $r \in \mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{M}\langle p \rangle$ se sigue del Corolario 6.3 que $\langle p \rangle = \langle j^k p \rangle$. De modo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que p es un polinomio de grado a lo más k . Ya que p es un polinomio podemos extenderlo a una función sobre $\mathbb{C}^n$. Más aún, $p(0)=0$. Ahora, en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$; el conjunto de ceros de un polinomio nunca es un punto aislado, necesariamente en cualquier vecindad del origen hay una infinidad de puntos donde p se anula.

Por otra parte, ya que $\mathcal{M}^k \subset \langle p \rangle$, cualquier monomio q de grado k puede ser factorizado como $q = ap$, para algún $a \in \mathcal{E}_n$. En realidad, a debe ser un polinomio de grado menor o igual que k . La factorización también se satisface sobre $\mathbb{C}$, por consiguiente, cualesquiera de tales monomios q se anula donde p se anula, y esto se logra en una infinidad de puntos. Esto contradice el hecho de que los monomios de grado k sólo se anulan simultáneamente en el origen, un punto aislado. ■

Apliquemos este corolario para construir dos ejemplos de gérmenes g tales que $\text{RT}(g)$ tenga codimensión infinita.

Ejemplo 3. Consideremos un germen de la forma $g(x, \lambda) = \lambda q(x, \lambda)$, donde $q \in \mathcal{E}_n$. Ahora, $\text{RT}(g) = \langle g, xg_x, \lambda g_x \rangle$; se ve fácilmente que λ es factor de los tres generadores. De modo que, $\text{RT}(g) \subset \langle \lambda \rangle$ y por lo tanto del Corolario 6.8 $\text{RT}(g)$ tiene codimensión infinita.

Los gérmenes de la forma $\lambda q(x, \lambda)$ no tienen la propiedad de la determinación finita, dada en el Lema 6.1. De hecho los gérmenes

$$g(x, \lambda) = \lambda$$

y

$$f(x, \lambda) = \lambda + e^{-1/x^2}$$

tienen derivadas de todos los órdenes iguales en el origen, a pesar de que g y f no sean equivalentes. Para verificar esto, vemos que los conjuntos de ceros de f y g son diferentes, como se muestra en la Figura 6.1(a).

Ejemplo 4. Consideremos cualquier germen de la forma $x^2 q(x, \lambda)$. En este caso, x es un factor de los tres generadores de $RT(g)$ de modo que $RT(g) \subset \langle x \rangle$. Por consiguiente $RT(g)$ tiene codimensión infinita. Observe también que los gérmenes

$$g(x, \lambda) = x^2$$

y

$$f(x, \lambda) = x^2 + e^{-1/x^2} \sin(1/\lambda^2)$$

tienen la misma expansión como serie de Taylor en el origen, pero los conjuntos de ceros de g y f son muy diferentes. Figura 6.1(b).

Los Ejemplos 3 y 4 muestran las dificultades con las que uno se puede encontrar cuando $RT(g)$ tiene codimensión infinita. El comportamiento patológico es la regla en vez de la excepción.

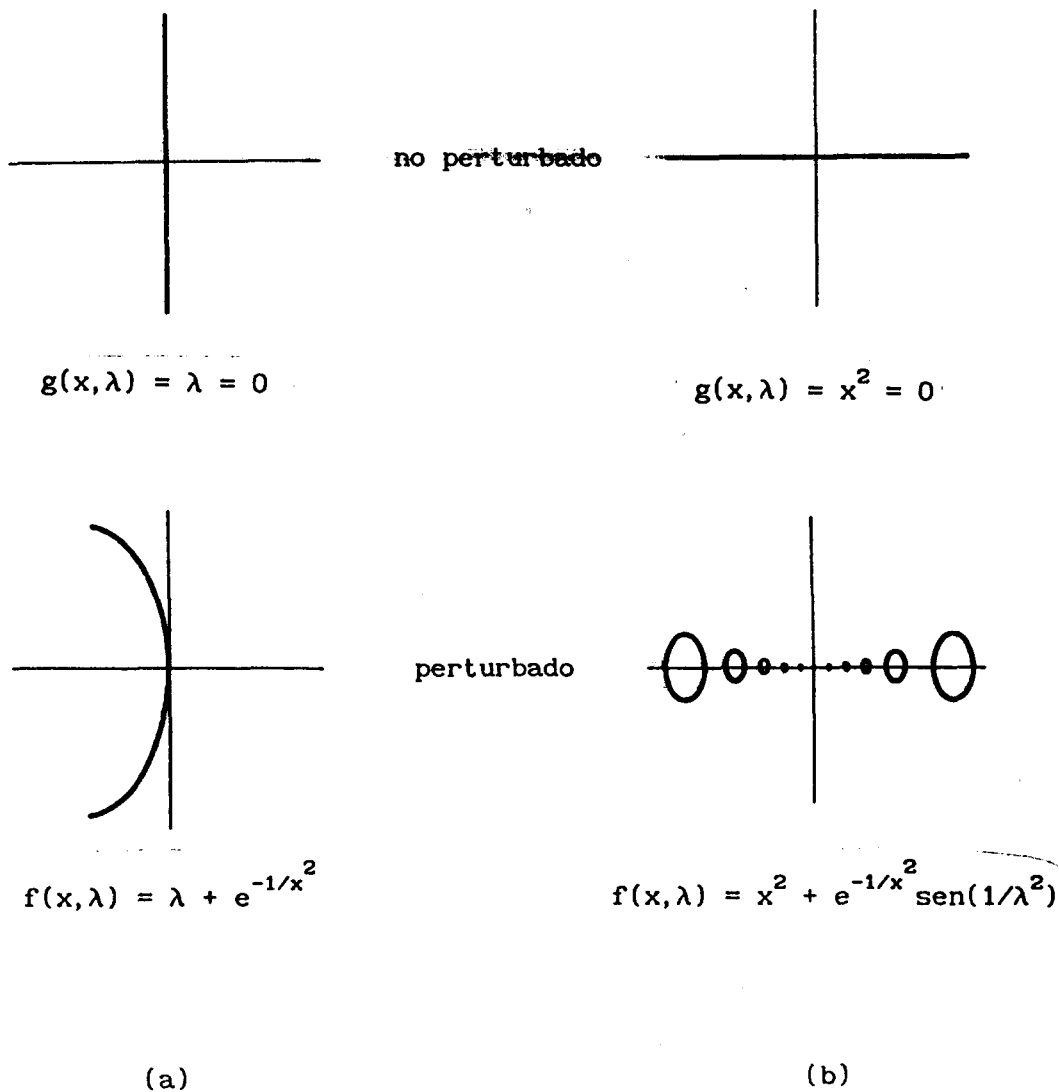


Figura 6.1. Perturbaciones de problemas de bifurcación de Codimensión infinita.

7. Un ejemplo no trivial

Calcularemos $RT(g)$ para

$$g(x, \lambda) = x^5 + \lambda x^3 + \lambda^2. \quad (7.1)$$

Como en la sección 4 caracterizaremos $RT(x^5 + \lambda x^2 + \lambda^2)$ mediante:

(a) Generadores.

(b) Condiciones de pertenencia sobre una función.

(a) Específicamente, la caracterización de $RT(x^5 + \lambda x^2 + \lambda^2)$ por generadores es

$$RT(x^5 + \lambda x^2 + \lambda^2) = M^6 + M^4 \langle \lambda \rangle + M \langle \lambda^2 \rangle + R\{x^5 + \lambda x^2 + \lambda^2, 5x^5 + 3\lambda x^3\}. \quad (7.2)$$

Comparemos (7.2) con (4.9), la fórmula correspondiente para $x^3 - \lambda x$. Para facilitar esta comparación reescribimos (4.9) como (7.2), afirmamos que

$$RT(x^3 - \lambda x) = M^3 + M \langle \lambda \rangle. \quad (7.3)$$

En efecto vemos de (4.9) que $RT(x^3 - \lambda x)$ es generado por $x^3, \lambda x, \lambda^2$. Ahora bien, $M^3 + M \langle \lambda \rangle$ tiene generadores $x^3, \lambda x^2, \lambda^2 x, \lambda^3, \lambda x, \lambda^2$. Usemos el Lema 5.1 para descartar los generadores redundantes $\lambda x^2, \lambda^2 x$ y λ^3 de la lista anterior, con esto se prueba (7.3). Parte de la dificultad de (7.1) reside en que (7.2) no es generado por monomios.

1. Como primer paso para derivar (7.2) usemos el Lema 6.4 para probar que

$$M^6 \subset RT(g) \quad (7.4)$$

Ahora

$$\begin{aligned} RT(g) &= \langle g, xg_x, \lambda g_x \rangle \\ &= \langle x^5 + \lambda x^3 + \lambda^2, 5x^5 + 3\lambda x^3, 5\lambda x^4 + 3\lambda x^2 \rangle \end{aligned} \quad (7.5)$$

Debemos probar que cada generador de M^6 (digamos, $x^6, \lambda x^5, \dots, \lambda^6$) pertenece a $RT(g) + M^7$. Observemos que

$$\begin{aligned} \lambda x^5 &= \frac{x^2}{3} (xg_x) + r_1, \\ \lambda^2 x^4 &= x^4 g + r_2, \\ \lambda^3 x^3 &= \lambda x^3 g + r_3, \\ \lambda^4 x^2 &= \lambda^2 x^2 g + r_4, \\ \lambda^5 x &= \lambda^3 x g + r_5, \\ \lambda^6 &= \lambda^4 g + r_6 \end{aligned}$$

y

$$x^6 = \frac{9}{25} x^2 g + \left[\frac{1}{5} x - \frac{3}{25} x^2 \right] (xg_x) - \frac{3}{25} (\lambda g_x) + r_0, \quad (7.6)$$

donde $r_0, \dots, r_6 \in M^7$. De modo que (7.4) se sigue del Lema 6.4.

El Lema 6.1 nos lleva también a (7.4), pero de una manera muy tediosa.

2. Como siguiente paso probemos que

$$M^4 \langle \lambda \rangle \subset RT(g) \quad (7.7)$$

ahora, $M^4 \langle \lambda \rangle$ es generado por $x^4 \lambda, x^3 \lambda^2, x^2 \lambda^3, x \lambda^4, \lambda^5$. Cada uno de estos generadores tiene una representación

$$\begin{aligned}
x^4\lambda &= \frac{1}{3}x(xg_x) = r_1, \\
x^3\lambda^2 &= x^3g + r_2, \\
x^2\lambda^3 &= x^2g + r_3, \\
x\lambda^3 &= \lambda^2xg + r_4, \\
\lambda^5 &= \lambda^3g + r_5,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

donde $r_1, \dots, r_5 \in M^6$. Pero $M^6 \subset RT(g)$, de modo que ambos términos del lado derecho en (7.8) pertenecen a $RT(g)$. Esto prueba (7.7).

3. Procedamos análogamente para probar que

$$M\langle\lambda^2\rangle \subset RT(g). \tag{7.9}$$

Específicamente tenemos que, para los generadores de $M\langle\lambda^2\rangle$

$$\begin{aligned}
x\lambda^2 &= xg + r_1, \\
\lambda^3 &= \lambda g + r_2,
\end{aligned}$$

donde $r_1, r_2 \in M^6 + M^4 \subset RT(g)$. Por lo tanto se sigue (7.9).

Se sigue de (7.4), (7.7) y (7.9) que

$$M^6 + M^4\langle\lambda\rangle + M\langle\lambda^2\rangle \tag{7.10}$$

está contenido en $RT(g)$.

4. Para completar la caracterización (7.2) debemos especificar los elementos que no están contenidos en (7.10). Ahora bien, $RT(g)$ consiste de todos los gérmenes de la forma

$$ag + b(xg_x) + c(\lambda g_x), \tag{7.11}$$

donde $a, b, c \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. Observe que λg_x ya pertenece a (7.10), de modo que este elemento no contribuye con nuevos elementos en $RT(g)$. Aún

cuando g y xg_x no pertenecen a (7.10), tenemos lo siguiente

$$xg, \lambda g, x(xg_x), \lambda(xg_x) \in M^6 + M^4\langle\lambda\rangle + M\langle\lambda^2\rangle. \quad (7.12)$$

Por otro lado, para cualquier $a \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ podemos escribir

$$a = a(0,0) + \tilde{a},$$

donde $\tilde{a} \in M$; con esto

$$ag = a(0,0)g + \tilde{a}g$$

y por (7.12) el término $\tilde{a}g$ pertenece a (7.10). Una situación similar se tiene para $b(xg_x)$. En conclusión, todo germen de la forma (7.11) puede ser escrito como

$$a(0,0)g + b(0,0)xg_x + r$$

donde $r \in M^6 + M^4\langle\lambda\rangle + M\langle\lambda^2\rangle$, lo cual completa la prueba.

(b) Ahora obtengamos condiciones sobre una función que caractericen la pertenencia a $RT(g)$.

Primero afirmamos que $f \in RT(g)$ si y sólo si $j^5 f \in RT(g)$. Para ver esto, observemos que $f = j^4 f + (f - j^5 f)$; por (6.3) $f - j^5 f \in M^6 \subset RT(g)$ y de esto se sigue la afirmación.

Escribamos

$$j^5 f = \sum_{|\alpha| \leq 5} a_\alpha x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}, \quad (7.13)$$

utilizando la notación de índice múltiple. Se sigue de (7.7) y (7.9) que muchos de los coeficientes en (7.13) no influyen para decir que $j^5 f \in RT(g)$. Considere por ejemplo, a_{12} , el coeficiente de $x\lambda^2$. Observe que

127892

$$j^5 f = (j^5 f - a_{12} x \lambda^2) + a_{12} x \lambda^2.$$

Dado que $x \lambda^2 \in M\langle \lambda^2 \rangle \subset RT(g)$, $j^5 f \in RT(g)$ si y sólo si $j^5 f - a_{12} x \lambda^2 \in RT(g)$. Hagamos esto con todos los monomios en (7.13) que pertenezcan a $M^4\langle \lambda \rangle + M\langle \lambda^2 \rangle$, entonces $j^5 f \in RT(g)$ si y sólo si

$$\left[\sum_{i=0}^5 a_{i0} x^i \right] + \left[\sum_{i=0}^3 a_{i1} x^i \right] \lambda + a_{05} x^5 \quad (7.14)$$

pertenece a $RT(g)$. Los tres generadores g , xg_x , λg_x de $RT(g)$ satisfacen

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^j f(0,0) = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^j \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \right] f(0,0) = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, 2.$$

y también cualquier combinación de esos generadores, como (7.11), satisfacen estas condiciones. Por consiguiente, f pertenece a $RT(g)$ sólo si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad j = 0, 1, 2.$$

En tal caso, (7.14) se reduce a

$$a_{50} x^5 + a_{31} x^3 \lambda + a_{02} \lambda^2$$

Este polinomio pertenece a $RT(g)$ si y sólo si puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base $x^5 + \lambda x^3 + \lambda^2$ y $5x^5 + 3\lambda x^3$ en (7.2); es decir, si y sólo si

$$3a_{50} - 5a_{31} - 2a_{02} = 0.$$

8. Ideales intrínsecos

Los conceptos descritos en esta sección sólo se aplican a $\mathcal{E}_{x,\lambda}$, más que a $\mathcal{E}_n$ para n arbitrario, ya que se trabaja con transformaciones de equivalencia.

Conceptos básicos

Llamamos a un ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$ intrínseco si la siguiente implicación es válida:

$g \in \mathcal{I}$ y h fuertemente equivalente a g , entonces $h \in \mathcal{I}$.

Alternativamente, un ideal es intrínseco si como conjunto, es invariante bajo toda transformación de equivalencia.

Por ejemplo, es fácil verificar de (1.1) y (1.2) que $\mathcal{M}$ y $\langle \lambda \rangle$ son ideales intrínsecos. Más aún, si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales intrínsecos, también lo son $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ y $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$. Vemos esto para $\mathcal{I} + \mathcal{J}$, supongamos que $g \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$ y $h = Sg(X, \lambda)$. Podemos escribir $g = g_1 + g_2$ donde $g_1 \in \mathcal{I}$ y $g_2 \in \mathcal{J}$. Luego

$$h = S(g_1 + g_2)(X, \lambda) = Sg_1(X, \lambda) + Sg_2(X, \lambda).$$

Pero $Sg_1(X, \lambda) \in \mathcal{I}$ y $Sg_2(X, \lambda) \in \mathcal{J}$ ya que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son intrínsecos. Por consiguiente $h \in \mathcal{I} + \mathcal{J}$.

Necesitamos el siguiente lema para probar otros resultados.

Lema 8.1. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$ un ideal intrínseco de codimensión finita. Si $f \in \mathcal{I}$, entonces xf_x y λf_x pertenecen a $\mathcal{I}$. En particular $RT(f) \subset \mathcal{I}$.

Demostración. Ya que $\mathcal{I}$ tiene codimensión finita, hay un k tal que $\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{I}$. Por el teorema de Taylor

$$f(x, \lambda) = j^k f(x, \lambda) + r(x, \lambda),$$

donde $r \in \mathcal{M}^{k+1}$. Dado que xr_x , λr_x pertenecen a $\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{J}$, podemos reemplazar f por $j^k f(x, \lambda)$ en el lema. De modo que, es suficiente probarlo para f un polinomio de grado menor o igual que k , es decir, cuando $f \in (\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap \mathcal{J}$. Observe que $f(tx, \lambda) \in (\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap \mathcal{J}$, ya que $\mathcal{J}$ es intrínseco. Por consiguiente,

$$\rho(t) = \frac{f(tx, \lambda) - f(x, \lambda)}{t - 1}$$

está en $(\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap \mathcal{J}$. Más aún, $(\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap \mathcal{J}$ es cerrado, pues es un subespacio lineal del espacio $(\mathcal{M}^{k+1})^\perp$ de dimensión finita. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = xf_x(x, \lambda) \in (\mathcal{M}^{k+1})^\perp \cap \mathcal{J}.$$

Similarmente, $f(x + t\lambda, \lambda) \in \mathcal{J}$ para todo t pues $\mathcal{J}$ es intrínseco.

Entonces

$$f_t(x + t\lambda, \lambda) \Big|_{t=0} = \lambda f_x(x, \lambda) \in \mathcal{J}. \quad \blacksquare$$

Observación. El Lema 8.1 se vale si f es un polinomio y $\text{codim}(\mathcal{J}) < \infty$.

Corolario 8.2. Sea $\mathcal{J}$ un ideal de codimensión finita, si un monomio $x^l \lambda^m$ pertenece a $\mathcal{J}$, entonces $\mathcal{M}^l \langle \lambda^m \rangle \subset \mathcal{J}$.

Demostración. Probaremos que los generadores de $\mathcal{M}^l \langle \lambda^m \rangle$ pertenecen a $\mathcal{J}$; esto es,

$$x^l \lambda^m, x^{l-1} \lambda^{m+1}, \dots, \lambda^{l+m} \in \mathcal{J}.$$

Esto se sigue aplicando repetidamente $\lambda \frac{\partial}{\partial x}$ a $x^l \lambda^m$ como en el Lema 8.1.

Proposición 8.3. Sea $\mathcal{J}$ un ideal intrínseco de codimensión finita.

Un polinomio

$$p(x, \lambda) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}$$

pertenece a $\mathcal{J}$ si y sólo si para toda α tal que $a_{\alpha} \neq 0$, el monomio $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}$ pertenece a $\mathcal{J}$.

Demostración. El sólo si es trivial. Para probar la recíproca, consideraremos un índice múltiple arbitrario $\alpha = (l, m)$ tal que $a_{\alpha} \neq 0$, y probaremos que $x^l \lambda^m \in \mathcal{J}$. Si $l + m > k$ la conclusión se sigue trivialmente; supongamos pues que $l + m \leq k$. Como en la demostración del Lema 8.1 podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, al caso en que p es un polinomio de grado menor o igual que k . Expresemos a p como

$$p(x, \lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)x + \dots + p_k(\lambda)x^k. \quad (8.1)$$

Afirmamos que $p_j(\lambda) \in \mathcal{J}$ para $j = 1, \dots, k$. Para probar esto, observemos, como en la prueba del Lema 8.1, que

$$p(tx, \lambda) = p_0(\lambda) + tp_1(\lambda)x + \dots + t^k p_k(\lambda)x^k$$

pertenece a $\mathcal{J}$ para toda $t > 0$. Derivando repetidamente, $p(tx, \lambda)$, respecto a t , se obtienen gémegos en $\mathcal{J}$. Haciendo esto k veces esto, vemos que $p_k(\lambda)x^k$ esta en $\mathcal{J}$. La afirmación se sigue inductivamente partiendo de $p_k(\lambda)x^k$.

Ahora, fijémonos en $p_1(\lambda)$, el coeficiente de x^1 en (8.1).

Escribamos

$$p_1(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_{k-1} \lambda^{k-1}. \quad (8.2)$$

El polinomio no puede anularse idénticamente pues $b_m = a_{\alpha} \neq 0$. Sea

b_μ el primer coeficiente distinto de cero en (8.2); entonces $\mu \leq m$. Por consiguiente, $p_1(\lambda) = \lambda^\mu q(\lambda)$ donde $q(0) \neq 0$; esto significa que $1/q \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, de modo que $\lambda^\mu = p_1(\lambda)/q(\lambda)$. Por consiguiente

$$x^1 \lambda^m = \lambda^{\mu-m} (\lambda^\mu x^m) = \lambda^{\mu-m} \frac{1}{q(\lambda)} p_1(\lambda) x^m.$$

Pero $p_1(\lambda)x^m$ está en el ideal $\mathcal{J}$, por lo tanto $x^1 \lambda^m \in \mathcal{J}$. ■

La siguiente proposición muestra que los ideales intrínsecos pueden obtenerse de los ejemplos básicos, $\mathcal{M}$ y $\langle \lambda \rangle$, mediante sumas y productos.

Proposición 8.4. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$, un ideal de codimensión finita. Entonces $\mathcal{J}$ es intrínseco si y sólo si

$$\mathcal{J} = \mathcal{M}^k + \mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda^{l_1} \rangle + \dots + \mathcal{M}^{k_s} \langle \lambda^{l_s} \rangle \quad (8.3)$$

para algún conjunto finito de enteros no negativos k_1, l_1 .

Demostración. Claramente todo ideal de la forma (8.3) es intrínseco, ya que sumas y productos de ideales intrínsecos son intrínsecos y $\mathcal{M}$ y $\langle \lambda \rangle$ lo son. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{J}$ es un ideal intrínseco de codimensión finita. Escojamos el entero k más pequeño tal que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$ y, supongamos que hay elementos diferentes de cero en $\mathcal{J} \setminus \mathcal{M}^k$; podemos considerar que son polinomios. Por la Proposición 8.3, hay monomios $x^1 \lambda^m$ en $\mathcal{J} \setminus \mathcal{M}^k$. Luego del Corolario 8.2, $\mathcal{M}^1 \langle \lambda^m \rangle \subset \mathcal{J}$. Aplicando estas ideas a cada uno de los monomios en $\mathcal{J} \setminus \mathcal{M}^k$, los cuales son un número finito, concluimos que $\mathcal{J}$ es suma de ideales de la forma $\mathcal{M}^{k_1} \langle \lambda^{l_1} \rangle$. ■

Para eliminar redundancias en (8.3) podemos requerir

$$\begin{aligned} (a) \quad 0 < l_1 < \dots < l_s \\ (b) \quad k > k_1 + l_1 > \dots > k_s + l_s \end{aligned} \quad (8.4)$$

Discutamos ahora las razones por las cuales para cualquier ideal, $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$, de codimensión finita; hay un ideal intrínseco, el más grande, contenido en $\mathcal{J}$. Por la Proposición 6.7 hay un entero k tal que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$. Se sigue de la Proposición 8.4 que hay un número finito de ideales intrínsecos $\mathcal{J}$ tales que

$$\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{J} \quad (8.5)$$

La suma de todos éstos, es un ideal intrínseco el cual también satisface (8.5); de esta manera, debe ser el ideal intrínseco más grande contenido en $\mathcal{J}$. Denotémoslo por $\text{Itr}\mathcal{J}$. Debido a (8.5) $\text{Itr}\mathcal{J}$ tiene codimensión finita.

La fórmula (7.2) muestra en general que $\text{RT}(g)$ no necesariamente es un ideal intrínseco. Sin embargo, podemos interpretar los cálculos de la sección 7 en términos de este concepto como sigue: Primero se encontró $\text{Itr}(g)$, a saber, $\text{Itr}(g) = \mathcal{M}^6 + \mathcal{M}^4\langle\lambda\rangle + \mathcal{M}\langle\lambda^2\rangle$ y luego se caracterizó. Exploremos cuidadosamente este método.

Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$ un ideal de codimensión finita. Denotamos por $\mathcal{J}^\perp$ al subespacio nectorial de dimensión finita de $\mathcal{E}_{x,\lambda}$, generado por los monomios que no pertenecen a $\mathcal{J}$. Afirmamos que

$$\mathcal{J} + \mathcal{J}^\perp = \mathcal{E}_{x,\lambda} \quad (8.6)$$

En efecto, ya que $\mathcal{J}$ tiene codimensión finita, de la Proposición 6.7 hay un entero k tal que $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{J}$. Por otro lado, para cualquier

$f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, podemos escribir $f = j^k f + (f - j^k f)$, donde $f - j^k f$ pertenece a $M^{k+1} \subset \mathcal{J}$. Por consiguiente, para determinar si f pertenece a $\mathcal{J} + \mathcal{J}^\perp$ sólo necesitamos considerar si $j^k f$ pertenece a $\mathcal{J} + \mathcal{J}^\perp$. Ahora, dividamos al conjunto de monomios de grado menor que $k + 1$ en dos conjuntos: el de monomios que están en $\mathcal{J}$ y el de los que no están en $\mathcal{J}$. Usando esta división podemos escribir $j^k f = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in \mathcal{J}$ y $f_2 \in \mathcal{J}^\perp$, lo cual prueba la afirmación.

En general, no tenemos $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp = \{0\}$ (p.ej. $\mathcal{J} = \langle x^2 + \lambda^2 x \lambda \rangle$). Sin embargo para ideales intrínsecos la situación es diferente.

Lema 8.5. Si $\mathcal{J}$ es un ideal intrínseco de codimensión finita, entonces $\mathcal{E}_{x,\lambda} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}^\perp$.

Demostración. En vista de (8.6), sólo necesitamos probar que $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp = \{0\}$. Sea $f \in \mathcal{J}^\perp$, entonces $f = \sum a_\alpha x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}$ para un número finito de a_α 's; donde $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \notin \mathcal{J}$ para cada $a_\alpha \neq 0$. Por lo tanto, de la Proposición 8.3, $f \notin \mathcal{J}$. Consecuentemente, es claro que, $\mathcal{J} + \mathcal{J}^\perp = \mathcal{E}_{x,\lambda}$. ■

Corolario 8.6. Sea $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{x,\lambda}$ un ideal de codimensión finita. Entonces

$$\mathcal{J} = (\text{Itr} \mathcal{J}) \oplus V, \quad (8.7)$$

donde $V = \mathcal{J} \cap (\text{Itr} \mathcal{J})^\perp$

Demostración. Ya que $V \subset (\text{Itr} \mathcal{J})^\perp$, se sigue del Lema 8.5 aplicado a

$\text{Itr} \mathcal{J}$ que $(\text{Itr} \mathcal{J}) \cap V = \{0\}$. Por otra parte, para cualquier $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ podemos escribir $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in \text{Itr} \mathcal{J}$ y $f_2 \in (\text{Itr} \mathcal{J})^\perp$. Si $f \in \mathcal{J}$, entonces $f_2 = f - f_1 \in \mathcal{J}$, ya que $f_1 \in \text{Itr} \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$. De este modo, $f_2 \in \mathcal{J} \cap (\text{Itr} \mathcal{J})^\perp = V$. Esto muestra que $\mathcal{J} = (\text{Itr} \mathcal{J}) + V$, lo cual completa la prueba. ■

9. Formulación de los resultados principales

El algoritmo para resolver el problema de reconocimiento descompone a los monomios en tres clases de acuerdo al orden: bajo, intermedio y alto.

9.1 Términos de orden bajo

Para describir los términos de orden bajo, consideremos al ideal intrínseco más pequeño que contiene a un germen h , como la intersección de todos los ideales intrínsecos que contienen a h .

Definición 9.1. Si $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, denotamos por $\mathcal{I}(h)$ al ideal intrínseco más pequeño que contiene a h .

Teorema 9.2. Sea $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ tal que $RT(h)$ tiene codimensión finita.

(a) $\mathcal{I}(h)$ es de codimensión finita.

(b) $\mathcal{I}(h) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} \{M^{\alpha_1} \langle \lambda^{\alpha_2} \rangle : D^\alpha h(0,0) \neq 0\}.$

(b) Si g es equivalente a h , entonces $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(h).$

Demostración Para una demostración ver [GS].

Teorema 9.3. Sea $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ y $RT(h)$ de codimensión finita. Si g es equivalente a h , entonces para todo monomio $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in \mathcal{I}(h)^\perp$, tenemos $D^\alpha g(0,0) = 0.$

Demostración. Suponga $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in \mathcal{I}(h)^\perp$ y $D^\alpha g(0,0) \neq 0.$ Por el Teorema 9.2(b), $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in \mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(h)$, lo cual es una contradicción. ■

$\mathcal{L}(h)$ también da información acerca de los términos de orden intermedio.

Teorema 9.4. Sea $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ y $RT(h)$ de codimensión finita. Si g es equivalente a h , entonces para todo generador intrínseco $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}$ de $\mathcal{L}(h)$, tenemos $D^\alpha g(0,0) \neq 0$.

Demostración. Considere un generador intrínseco $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}$ de $\mathcal{L}(h)$.

Por el Teorema 9.2(b)

$$\mathcal{L}(g) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} \{M^{\alpha_1} \langle \lambda^{\alpha_2} \rangle : D^\alpha g(0,0) \neq 0\} \quad (9.2)$$

Por el Teorema 9.3, $D^\alpha g(0,0) = 0$ para todos los multiíndices α tales que $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in \mathcal{L}(h)^\perp$; de modo que, estos términos no contribuyen. De los términos que quedan, sólo los de $M^k \langle \lambda^1 \rangle$ pueden contribuir. Por el Teorema 9.2(c), $x^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \in \mathcal{L}(g)$, de manera que este término debe contribuir en (9.2); esto es,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^1 g(0,0) \neq 0.$$

9.2 Términos de orden alto

Definición 9.5. Si $h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, definimos $\mathcal{P}(h)$ por: $p \in \mathcal{P}(h)$ si para g fuertemente equivalente a h y todo $t \in \mathbb{R}$

$$RT(g + tp) = RT(g).$$

$\mathcal{P}(h)$ es el conjunto de los términos de orden alto en el problema de reconocimiento para h .

Proposición 9.6. (a) si $p \in \mathcal{P}(h)$ y g es fuertemente equivalente a h , entonces $g + p$ es fuertemente equivalente a g .

(b) Si $RT(h)$ es de codimensión finita, entonces $\mathcal{P}(h)$ es un ideal intrínseco de codimensión finita.

Demostración. (a) se sigue del Teorema 3.2. (b) ver [GS, II.12].

Teorema 9.7. Si $RT(h)$ es de codimensión finita, entonces $\mathcal{P}(h) = \text{Itr } \mathcal{J}(h)$ donde

$$\mathcal{J}(h) = \langle xh, \lambda h, x^2 h_x, \lambda h_x \rangle. \quad (9.3)$$

Demostración. Ver [GS, II.13].

Otra fórmula para $\mathcal{J}(h)$ es:

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{M} \cdot RT(h) + R\{\lambda h_x\} \quad (9.4)$$

Este resultado identifica los términos de orden alto que pueden no entrar en la solución del problema de reconocimiento.

Describimos un problema de bifurcación h como k -determinado si $h + p$ es equivalente a h para toda $p \in \mathcal{M}^{k+1}$. Para que h sea k -determinado, es necesario y suficiente que $\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{P}(h)$.

9.3 Términos de orden intermedio

Tratar términos de orden intermedio no es tan fácil como con términos de orden bajo o alto; por la siguiente razón: Una descripción concisa de lo que pasa en este nivel requiere fuertemente de conceptos matemáticos sofisticados de la teoría de

grupos de Lie. Nuestro manejo de términos de orden intermedio, en el problema de reconocimiento, es un cálculo explícito que involucra un número finito de parámetros indeterminados. Estos cálculos deben hacerse caso por caso. El Teorema 9.4 es de gran utilidad para empezar estos cálculos.

En ejemplos elementales los términos de orden intermedio, que contribuyen en el problema de reconocimiento, se manejan con desigualdades.

10. Solución de problema de reconocimiento

Resolveremos el problema de reconocimiento para las siguientes formas normales:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2), \\ (b) \quad & \varepsilon x^3 + \delta\lambda^2, \\ (c) \quad & \varepsilon x^k + \delta\lambda x, \quad k \geq 3, \\ (d) \quad & \varepsilon x^k + \delta\lambda, \quad k \geq 2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ y $\delta = \pm 1$.

Proposición 10.1. Un germen $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ es fuertemente equivalente a (10.1a), $h(x,\lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, si y sólo si en $(x,\lambda) = (0,0)$

$$g = g_x = g_\lambda = 0 \tag{10.2a}$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} g_{xx}, \quad \delta = \operatorname{sgn} \det(d^2g) \tag{10.2b}$$

donde sgn es la función signo y d^2g es la matriz hessiana de g .

Demostración. Del Teorema 9.2(b), tenemos que $\mathcal{L}(h) = \mathcal{M}^2$. Los Teoremas 9.3 y 9.4 implican que

$$g(x,\lambda) = ax^2 + p(x,\lambda) \tag{10.3}$$

donde $a \neq 0$ y $p \in \mathcal{M}^3 + \mathcal{M}\langle\lambda\rangle$. En particular, (10.2a) se cumple.

Ahora, del Teorema 9.7, $\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^3$; de modo que, no todos los posibles residuos en (10.3) pueden descartarse. Sin embargo, podemos escribir

$$g(x,\lambda) = ax^2 + b\lambda x + c\lambda^2 + \tilde{p}(x,\lambda),$$

donde $\tilde{p} \in \mathcal{M}^3$. Debemos averiguar cuando

127892

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax^2 + b\lambda x + c\lambda^2$$

es equivalente a h. Ahora, debido a la restricción de signos en (1.2), una transformación de equivalencia no puede cambiar $\text{sgn } g_{xx}$ o $\text{sgn } \det(d^2g)$, de modo que (10.2b) es una condición necesaria. Usando el hecho de que la composición de transformaciones de equivalencia es una transformación de equivalencia, podemos reducir $\tilde{g}$ a h en pasos. Si (10.2b) se satisface, considerando

$$X(x, \lambda) = \left[\frac{|4ac - b^2|^{1/2}}{2|a|} \right] x - \left[\frac{b}{2a} \right] \lambda$$

y el reescalamiento

$$S = \frac{4|a|}{|4ac - b^2|}$$

obtenemos

$$\varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2) = S \cdot \tilde{g}(X(x, \lambda), \lambda).$$

Proposición 10.2. Un germen $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ es fuertemente equivalente a (10.1b), $h(x, \lambda) = \varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$, si y sólo si en $(x, \lambda) = (0, 0)$

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{x\lambda} = 0, \quad (10.4a)$$

y

$$\varepsilon = \text{sgn } g_{xxx}, \quad \delta = \text{sgn } g_{\lambda\lambda}. \quad (10.4b)$$

Demostración. Del Teorema 9.2(b) tenemos que

$$\mathcal{L}(h) = M^3 + \langle \lambda^2 \rangle.$$

Si g es fuertemente equivalente a h, se sigue de los Teoremas 9.3 y 9.4 que

$$g(x, \lambda) = ax^3 + b\lambda^2 + p(x, \lambda) \quad (10.5)$$

donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $p \in \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}\langle \lambda^2 \rangle$. En particular g satisface (10.4a).

Ahora podemos ver que

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2\langle \lambda \rangle$$

y por lo tanto, del Teorema 9.7,

$$\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^4 + \mathcal{M}^2\langle \lambda \rangle.$$

Pero $p \in \mathcal{P}(h)$, de modo que p no contribuye en (10.5) a que g sea, o no, fuertemente equivalente a h . Entonces preguntémonos si

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax^3 + b\lambda^2$$

es fuertemente equivalente a h . En efecto lo es; (10.4b) se satisface si y sólo si tomando

$$X(x, \lambda) = \left[\frac{|b|^{1/3}}{|a|^{1/3}} x, \lambda \right]$$

y el reescalamiento $S = |b|^{-1}$, obtenemos

$$\epsilon x^3 + \delta \lambda^2 = S \cdot \tilde{g}(X(x, \lambda), \lambda).$$

Proposición 10.3. Un germen $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ es fuertemente equivalente a (10.1c), $h(x, \lambda) = \epsilon x^k + \delta \lambda x$, si y sólo si en $(x, \lambda) = (0, 0)$

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} g = \frac{\partial}{\partial \lambda} g = 0, \quad (10.6a)$$

y

$$\epsilon = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k g, \quad \delta = \operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} g. \quad (10.6b)$$

Demostración. Tenemos

$$\mathcal{L}(h) = M^k + M\langle\lambda\rangle$$

de modo que si g es fuertemente equivalente a h , se sigue de los Teoremas 9.3 y 9.7 que

$$g(x, \lambda) = ax^k + b\lambda x + p(x, \lambda)$$

donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y

$$p \in M^{k+1} + M^2\langle\lambda\rangle + \langle\lambda^2\rangle. \quad (10.7)$$

En particular (10.6a) se satisface.

Ahora, del Teorema 9.7, $\mathcal{P}(h)$ es precisamente el ideal en (10.7), de modo que $p(x, \lambda)$ no contribuye en la equivalencia fuerte de g y h . Finalmente veamos que

$$\tilde{g}(x, \lambda) = ax^k + b\lambda x$$

es fuertemente equivalente a h . En efecto, (10.6b) se satisface si y sólo si tomando

$$X(x, \lambda) = \left| \frac{b}{a} \right|^{1/(k-1)} x$$

y un reescalamiento

$$S = \frac{1}{|b|} \left| \frac{a}{b} \right|^{1/(k-1)},$$

obtenemos

$$\epsilon x^k + \delta \lambda x = S \cdot g(X(x, \lambda), \lambda).$$

Proposición 10.4. Un germen $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ es fuertemente equivalente a (10.1d), $h(x, \lambda) = \epsilon x^k + \delta \lambda$, si y sólo si en $(x, \lambda) = (0, 0)$

$$g = \frac{\partial}{\partial x} g = \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} g = 0, \quad (10.8a)$$

y

$$\epsilon = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k g, \quad \delta = \operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial \lambda} g. \quad (10.8b)$$

Demostración. Primero aplicamos el Teorema 9.2(b) para deducir que

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{M}^k + \langle \lambda \rangle.$$

Se sigue de los Teoremas 9.3 y 9.4 que si un germen g es fuertemente equivalente a h , entonces

$$g(x, \lambda) = ax^k + b\lambda + p(x, \lambda) \quad (10.9)$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y $p \in \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}\langle \lambda \rangle$. En particular, se satisface (10.8a).

Ahora, calculamos

$$RT(h) = \langle x^k, kx^{k-1}, \lambda \rangle = \mathcal{M}^k + \langle \lambda \rangle.$$

Se sigue del teorema 9.7 que $\mathcal{P}(h) = \mathcal{M}^{k+1} + \mathcal{M}\langle \lambda \rangle$. En otras palabras, el término p en (10.9) no contribuye a que g sea equivalente o no a h .

Finalmente, nos preguntamos si $\tilde{g}(x, \lambda) = ax^k + b\lambda$ es fuertemente equivalente a h . Si (10.8b) se satisface, entonces tomamos un simple reescalamiento

$$\epsilon x^k + \delta \lambda = \frac{1}{|b|} \tilde{g} \left(\left| \frac{b}{a} \right|^{1/k} x, \lambda \right)$$

Si (10.8b) no se satisface tal transformación no es posible, debido a las condiciones (1.2).

Hemos resuelto cuatro problemas de reconocimiento para formas normales, los dos primeros corresponden a los problemas de aplicación del Cap.IV. El tercero es una generalización de la forma normal del trinche ($k = 3$). El cuarto, en particular, es útil para encontrar los diagramas persistentes de bifurcación perturbada en el desdoblamiento universal de la cúspide.

CAPITULO III

TEORIA DE DESDOBLAMIENTO

1. Introducción

Estudiaremos el problema de bifurcación imperfecta utilizando el concepto de desdoblamiento universal de la teoría de singularidades.

Rigurosamente hablando, un desdoblamiento universal de g es una familia parametrizada de funciones $G(x, \lambda, \alpha)$, donde α es un parámetro en $\mathbb{R}^k$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$.

b) Cualquier perturbación suficientemente pequeña de g es equivalente a $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ para algún α cerca de 0.

El objetivo es presentar un algoritmo que permita enumerar, bajo equivalencias, todas las posibles perturbaciones de un problema de bifurcación dado $g(x, \lambda) = 0$. Este algoritmo se divide en dos partes, una analítica y otra geométrica. Las primeras cinco secciones corresponden a la parte analítica y las restantes a la geométrica.

2. Desdoblamiento y desdoblamiento universal.

El objetivo de esta sección es aclarar como una teoría local puede dar información del comportamiento global. El concepto de *desdoblamiento* es la noción de perturbación con la cual trabajaremos.

Definición. Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. Un desdoblamiento k -paramétrico de g es un germen G en $\mathcal{E}_{x,\lambda,\alpha}$, donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, tal que para $\alpha = 0$

$$G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda). \quad (2.1)$$

Aquí G es un germen en las variables $x, \lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k$. De modo que G esta definida y es $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de cero en $\mathbb{R}^{k+2}$. La restricción $\alpha = 0$ en (2.1) es compatible con los conceptos de germen.

Sea $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ y $H(x, \lambda, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}^m$ dos desdoblamientos de un germen g , donde k y m no necesariamente son iguales. Suponga que para cada $\beta \in \mathbb{R}^m$, $H(\cdot, \cdot, \beta)$ es equivalente a algún miembro del desdoblamiento G ; en símbolos

$$H(\cdot, \cdot, \beta) \sim G(\cdot, \cdot, A(\beta)), \quad (2.2)$$

donde $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. En tal caso diremos que todas las perturbaciones en H están contenidas en G . Formalicemos esto.

Definición 2.1. Sean $G(x, \lambda, \alpha)$ y $H(x, \lambda, \beta)$ desdoblamientos de un germen g . Decimos que H se factoriza mediante G si existen funciones suaves S, X, A y A tales que

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta) G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)) \quad (2.3)$$

donde, $S(x, \lambda, 0) \equiv 1$, $X(x, \lambda, 0) \equiv 0$, $\Lambda(\lambda, 0) \equiv \lambda$ y $A(0) = 0$.

Definición 2.2. Un desdoblamiento G de g es **versal** si cualquier otro desdoblamiento de g se factoriza mediante G . Si un desdoblamiento versal de g depende del mínimo número de parámetros posible se llama **universal**. El mínimo número se llama la **codimensión** de g . Si g no posee un desdoblamiento versal decimos que tiene **codimensión infinita**.

Discutamos como podemos obtener información global de consideraciones locales. Una singularidad degenerada simple puede descomponerse, después de la perturbación, en varias singularidades menos degeneradas. Para un diagrama de bifurcación perturbada específico, la manera exacta en la cual estas singularidades menos degeneradas están conectadas proporciona información global del diagrama de bifurcación. Por ejemplo, la perturbación de la cúspide, $x^3 + \lambda^2 = 0$ (Figura 2.1(a)), puede llevar al diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 2.1(b).

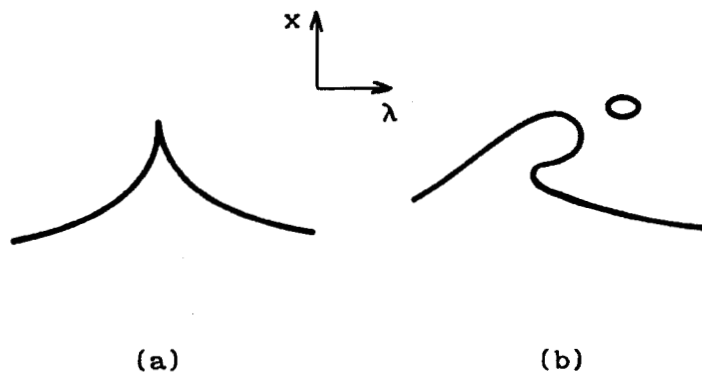


Figura 2.1. La cúspide y una perturbación.

Observe que esta perturbación contiene cuatro puntos límite, dos en cada rama de soluciones aisladas. En realidad es imposible entender este comportamiento con un estudio local en un punto del diagrama perturbado; sin embargo, se sigue naturalmente de un análisis local del diagrama degenerado y sus perturbaciones. La cuestión es que cuando el tamaño de la perturbación tiende a cero, los cuatro puntos límite de la Figura 2.1(b) se colapsan en una sola singularidad degenerada. En otras palabras, para perturbaciones suficientemente pequeñas, la porción de interés del diagrama de bifurcación estará completamente dentro de cualquier vecindad de la singularidad degenerada.

Un aspecto importante de los gérmenes es que tiene puntos base; es decir, un germen está definido localmente en algún punto dado. En el diagrama de bifurcación no perturbado de la Figura 2.1(a) hay en realidad un punto distinguido, el cual puede servir como el punto base del germen. Sin embargo, en el diagrama de bifurcación perturbada (Figura 2.1(b)) hay varios, y la información vital podría perderse si nos enfocamos en uno, excluyendo los otros. En otras palabras, para $\alpha \neq 0$ en un desdoblamiento, es de gran importancia no tener un punto base. Para que haya compatibilidad con el concepto de germen debemos dar una cuidadosa definición de desdoblamiento. Definimos un desdoblamiento como un germen en $\mathbb{R}^{k+2}$; de modo que el punto $x = \lambda = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ es distinguido, y ningún otro. En conclusión, debería parecer que las nociones

- (i) $G \in \mathcal{E}_{x, \lambda, \alpha}$ y
- (ii) para toda α , $G(\cdot, \cdot, \alpha) \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$.

son virtualmente indistinguibles, pero ésto está lejos de serlo; porque para problemas con puntos base, la segunda noción sería completamente insatisfactoria para nuestros propósitos.

3. Una caracterización de desdoblamientos universales

Formularemos una condición necesaria y suficiente que caracterice precisamente cuando un desdoblamiento es universal.

3.1. Motivación

Supongamos que $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, es un desdoblamiento universal de un germen $g \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$. Esto significa, en particular, que todo desdoblamiento uni-paramétrico de g puede factorizarse mediante G . Veamos las implicaciones de esta factorización.

Para cualquier $q \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$, considere el desdoblamiento uniparamétrico de g

$$H(x, \lambda, \varepsilon) = g(x, \lambda) + \varepsilon q(x, \lambda)$$

Ya que G es universal, H se factoriza mediante G . Luego podemos escribir

$$H(x, \lambda, \varepsilon) = S(x, \lambda, \varepsilon) \cdot G(X(x, \lambda, \varepsilon), \Lambda(\lambda, \varepsilon), A(\varepsilon)), \quad (3.1)$$

donde

$$S(x, \lambda, 0) = 1, \quad X(x, \lambda, 0) = x, \quad \Lambda(\lambda, 0) = \lambda, \quad A(0) = 0. \quad (3.2)$$

Diferenciando (3.1) respecto a ε y evaluando en $\varepsilon = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} q(x, \lambda) = & \left. \frac{d}{d\varepsilon} [S(x, \lambda, \varepsilon) g(X(x, \lambda, \varepsilon), \Lambda(\lambda, \varepsilon), A(\varepsilon))] \right|_{\varepsilon=0} \\ & + \sum_{i=1}^k \dot{A}_i(0) \frac{\partial G}{\partial \alpha_i}(x, \lambda, 0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $A(\varepsilon) = (A_1(\varepsilon), \dots, A_k(\varepsilon))$ y el punto indica la derivada respecto a ε . El primer término del lado derecho de (3.3) es similar al de la derivación de $RT(g)$ en sección 3 del Cap. II. Sin

embargo, hay dos diferencias importantes:

- (i) Antes teníamos $\Lambda(\lambda, \epsilon) \equiv \lambda$; aquí Λ puede ser cualquier germen suave.
- (ii) Antes teníamos $X(0,0,\epsilon) = 0$ para todo ϵ ; aquí no se requiere esto.

Apliquemos la regla de la cadena al primer término en (3.3) y usemos (3.2) para obtener

$$\dot{S}(x, \lambda, 0) g(x, \lambda) + g_x(x, \lambda) \dot{X}(x, \lambda, 0) + g_\lambda(x, \lambda) \dot{\Lambda}(\lambda, 0). \quad (3.4)$$

En vista de esto definamos el espacio tangente para g .

Definición 3.1. El espacio tangente para un germen g en $\mathcal{E}_{x, \lambda}$, denotado por $T(g)$, consiste de todos los gérmenes de la forma

$$ag + bg_x + cg_\lambda,$$

donde $a, b \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ y $c \in \mathcal{E}_\lambda$.

Observación. A diferencia del espacio tangente restringido, $T(g)$ no es un ideal. La razón reside en el término $c(\lambda)g_\lambda(x, \lambda)$ (la multiplicación de este término por un germen arbitrario en $\mathcal{E}_{x, \lambda}$ no preserva esta forma). Este hecho es consecuencia de la suposición que cambios de coordenadas en λ son independientes de x .

Ahora derivemos una condición necesaria para que G sea un desdoblamiento universal de g . Para eso, mostremos que cualquier $q \in \mathcal{E}_{x, \lambda}$ admite la representación (3.3). El primer término de (3.3) es justamente un elemento de $T(g)$. El segundo término es un elemento del subespacio vectorial $\mathcal{E}_{x, \lambda}$ generado por los k gérmenes

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, \frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(x, \lambda, 0),$$

ya que los coeficientes $\dot{A}_i(0)$ son escalares. Luego si G es un desdoblamiento universal de g , entonces

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = T(g) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, \frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(x, \lambda, 0)\right\}. \quad (3.5)$$

3.2 Teorema del desdoblamiento universal

El principal resultado de este tema es que la condición necesaria (3.5) también es suficiente.

Teorema 3.2. (Teorema del desdoblamiento universal). Sea g un germen en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ y sea G un desdoblamiento k -paramétrico de g . Entonces G es un desdoblamiento versal si y sólo si

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = T(g) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, \frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(x, \lambda, 0)\right\}. \quad (3.6)$$

Demostración. En [GS, Vol. II] se prueba la suficiencia.

De acuerdo a la Definición 2.2, un desdoblamiento versal G de un germen g es universal si G contiene el mínimo número de parámetros. El Teorema 3.2 nos lleva a una caracterización conveniente de este número. Específicamente, el mínimo número de parámetros en un desdoblamiento versal de g es el mínimo número para el cual la ecuación (3.6) se verifica. Pero dicho número es precisamente la codimensión de $T(g)$, por la Definición II,6.6.

Corolario 3.3. Un desdoblamiento versal G de un germen g es universal si y sólo si el número de parámetros en G es igual a la codimensión de $T(g)$.

Corolario 3.4. Sea g un germen en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ de codimensión k . Supongamos que existen k gérmenes $p_1, \dots, p_k$ en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ tales que

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = T(g) \oplus R\{p_1, \dots, p_k\}. \quad (3.7)$$

Entonces

$$G(x, \lambda, \lambda) = g(x, \lambda) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(x, \lambda) \quad (3.8)$$

es un desdoblamiento universal de g .

De lo anterior observamos que $\text{codim } g$, como fue dada en la Definición 2.2, es igual a $\text{codim } T(g)$, como fue dada en la Definición II, 6.6. En el Corolario 3.5 veremos que estas nociones de codimensión son iguales a una tercera.

Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ un germen de codimensión finita. Llamamos la órbita de g al conjunto de todos los gérmenes $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ que son equivalentes a g ; denotamos

$$\mathcal{O}_g = \{ f \in \mathcal{E}_{x,\lambda} : f \sim g \}.$$

Pensamos a $\mathcal{O}_g$ como una subvariedad de $\mathcal{E}_{x,\lambda}$. Supongamos que aplicamos los métodos de la sección 9, Cap. II, para caracterizar gérmenes equivalentes a g por un conjunto de condiciones de definición

$$P_i(f, Df, \dots, D^m f) = 0 \text{ en } x = \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.9)$$

y un conjunto de condiciones de no-degeneración (desigualdades).

La tercera noción de codimensión es $K-2$, donde K es el número de ecuaciones en (3.9). Esta definición es análoga a la definición de codimensión de subvariedades de dimensión infinita. En un espacio de dimensión N , un sistema de K ecuaciones, normalmente, define una variedad de dimensión $N-K$, o codimensión K . Aquí consideramos a $\mathcal{O}_g$ como el conjunto solución en el espacio de dimensión infinita $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ de las K ecuaciones en (3.9).

Corolario 3.5. Si g es un germen de codimensión finita en $\mathcal{E}_{x,\lambda}$, entonces los siguientes enteros son iguales:

- (i) $\text{codim } g$. (Definición 2.2).
- (ii) $\text{codim } T(g)$. (Definición II,6.6).
- (iii) (número de condiciones de definición para g) - 2.

Demostración. En [GS, sección 2, Cap.III].

3.3 Cálculo de desdoblamientos universales con álgebra lineal

Hemos observado que $T(g)$ generalmente no es un ideal, en contraste a $RT(g)$. Esto significa que la mayoría de las técnicas algebraicas del Cap.II no son aplicables a $T(g)$. Sin embargo, mostraremos que estas técnicas pueden adaptarse al presente contexto. Más específicamente, suponga que deseamos encontrar un desdoblamiento universal de un germen $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, y que hemos determinado $RT(g)$. Dividamos los cálculos para poder aplicar el teorema del desdoblamiento universal en tres pasos:

(i) Determinar un entero positivo m tal que

$$T(g) = RT(g) \oplus R\{g_x, g_\lambda, \lambda g_\lambda, \dots, \lambda^m g_\lambda\}. \quad (3.10)$$

(ii) Descomponer $T(g)$ en la forma

$$T(g) = [Itr T(g)] \oplus V_g, \quad (3.11)$$

donde $V_g = T(g) \cap [Itr T(g)]^\perp$.

(iii) Encontrar una base para el complemento de V_g en el espacio de dimensión finita $[Itr T(g)]^\perp$; en símbolos, encontrar gérmenes linealmente $p_1, \dots, p_k$ en $[Itr T(g)]^\perp$ tales que

$$[Itr T(g)]^\perp = V_g \oplus R\{p_1, \dots, p_k\}. \quad (3.12)$$

Entonces (3.8) proporciona un desdoblamiento universal para g . Veamos que las construcciones anteriores son posibles.

Lema 3.6. $RT(g)$ tiene codimensión finita si y sólo si $T(g)$ tiene codimensión finita.

Demostración. En [GS, Secc. 2, Cap. III].

Sea $g \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ un germen con codimensión finita. Mostraremos que hay un entero m tal que (3.10) se satisface. Recordemos que un germen en $T(g)$ tiene la forma

$$a(x,\lambda)g + b(x,\lambda) + c(\lambda)g_\lambda.$$

Tal germen está en $RT(g)$ si $b(0,0) = 0$ y $c(\lambda) \equiv 0$. Luego

$$T(g) = RT(g) + R\{g_x\} + \mathcal{E}_\lambda\{g_\lambda\}. \quad (3.13)$$

Por el Lema 3.6, $RT(g)$ tiene codimensión finita, lo cual implica

que $\lambda^s \in RT(g)$ para toda s suficientemente grande. Por lo tanto $\lambda^s g_\lambda \in RT(g)$. Ya que $RT(g)$ es un ideal, hay un único m que satisface

$$\lambda^m g_\lambda \notin RT(g) \text{ y } \lambda^{m+1} g_\lambda \in RT(g). \quad (3.14)$$

La ecuación (3.10) se sigue de (3.13) y (3.14).

En lo que refiere a (3.11), repitamos la construcción de la sección 8 del Cap. II para mostrar que $T(g)$ tiene una parte intrínseca bien definida. Por el Lema 3.6, $RT(g)$ tiene codimensión finita; de modo que, por la Proposición II, 6.7, $RT(g)$ contiene a M^k para algún k . $T(g)$ contiene a $RT(g)$, entonces también contiene a M^k . Se sigue de la Proposición II, 8.4 que hay un número finito de ideales intrínsecos $\mathcal{J}$ tales que

$$M^k \subset \mathcal{J} \subset T(g).$$

La suma de todos éstos es el ideal intrínseco más grande contenido en $T(g)$, denotado $Itr T(g)$.

En el Corolario II, 8.6 se muestra que es posible descomponer un ideal de codimensión finita en la forma (3.11); de hecho vale para subespacios que contengan a M^k para algún k . Por consiguiente, muestra la validez de (3.11).

Sean $p_1, \dots, p_k \in [Itr T(g)]^\perp$ escogidos como en (3.12), donde $k = \text{codim } T(g)$. Se sigue de (3.11) que la condición (3.7) se verifica; de esta manera, por el Corolario 3.3, (3.8) es un desdoblamiento versal de g . Ya que $p_1, \dots, p_k$ son linealmente independientes, (3.8) es un desdoblamiento universal.

4. Ejemplos de desdoblamiento universales

Calcularemos algunos desdoblamientos universales usando los pasos descritos en la subsección 3.3 y estudiaremos singularidades de codimensión uno.

4.1 El punto límite, la bifurcación simple, el trinche y la cúspide

El punto límite

Consideremos la singularidad más simple, $h(x, \lambda) = x^2 + \lambda$. Recordemos de la expresión II, (4.3) que

$$RT(x^2 + \lambda) = M^2 + \langle \lambda \rangle$$

usando (3.10) llegamos a

$$T(x^2 + \lambda) = (M^2 + \langle \lambda \rangle) \oplus R\{1, x\} = \mathcal{E}_{x, \lambda}.$$

Por lo tanto la codimensión del punto límite es cero, y el punto límite es su propio desdoblamiento.

La bifurcación simple

Probaremos que

$$G(x, \lambda, \alpha) = x^2 \pm \lambda^2 + \alpha \quad (4.1)$$

es un desdoblamiento universal para la bifurcación simple, $h(x, \lambda) = x^2 \pm \lambda^2$. Primero calculemos $T(h)$, para eso calculemos $RT(h)$

$$RT(x^2 \pm \lambda^2) = M^2$$

y observemos que

$$\lambda h_\lambda = \pm 2\lambda^2 \in RT(x^2 \pm \lambda^2) = M^2.$$

Por consiguiente, de (3.10),

$$T(x^2 \pm \lambda^2) = M^2 \oplus \mathbb{R}\{2x, 2\lambda\}$$

tiene la forma (3.11), $\text{Itr } [T(x^2 \pm \lambda^2) \oplus V_g]$. Ahora, dado que

$$[\text{Itr } [T(x^2 \pm \lambda^2) \oplus V_g]]^\perp = (M^2)^\perp = \mathbb{R}\{1, x, \lambda\},$$

entonces una base para el subespacio complementario a

$$V_g = \mathbb{R}\{2x, 2\lambda\}$$

en $\mathbb{R}\{1, x, \lambda\}$, es $\{1\}$. Aplicando el Corolario 3.3 tenemos la codimensión de la bifurcación simple es de codimensión uno y su desdoblamiento universal es (4.1).

El trinche

Mostraremos que

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad G(x, \lambda, \alpha, \beta) &= x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x^2 \\ \text{(b)} \quad H(x, \lambda, \alpha, \beta) &= x^3 - \lambda x + \alpha + \beta \lambda \end{aligned} \tag{4.2}$$

son desdoblamientos universales del trinche, $h(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$.

Primero calculemos $T(x^3 - \lambda x)$. Recordemos de II, (7.3) que

$$RT(x^3 - \lambda x) = M^3 + M\langle \lambda \rangle$$

y observemos lo siguiente

$$\lambda h = x\lambda \in M\langle \lambda \rangle \subset RT(x^3 - \lambda x).$$

Por lo tanto, de (3.10), se sigue que

$$T(x^3 - \lambda x) = (M^3 + M\langle \lambda \rangle) \oplus \mathbb{R}\{3x^2 - \lambda, x\},$$

tiene la forma (3.11), $[\text{Itr } T(x^3 - \lambda x)] \oplus V_g$. Ahora, dado que

$$[\text{Itr } T(x^3 - \lambda x)]^\perp = (M^3 + M\langle \lambda \rangle)^\perp = \mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2\},$$

sólo necesitamos encontrar una base para el subespacio

complementario a

$$V_g = \mathbb{R}\{3x^2 - \lambda, x\}$$

en $\mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2\}$. Es fácil ver que $\{1, x^2\}$ o $\{1, \lambda\}$ forman tal base. Aplicando el Corolario 3.3, llegamos a que ambos desdoblamientos en (4.2) son universales, y que la codimensión del trinche es dos.

La cúspide

Mostraremos que

$$G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = x^3 + \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma x \lambda \quad (4.3)$$

es un desdoblamiento universal para la cúspide, $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$. Calculemos $T(h)$; para eso recordemos que

$$RT(x^3 + \lambda^2) = M^3 + \langle \lambda^2 \rangle.$$

Ahora observemos que $\lambda h_\lambda = 2\lambda^2 \in RT(x^3 + \lambda^2)$, por consiguiente, de (3.10),

$$T(x^3 + \lambda^2) = (M^3 + \langle \lambda^2 \rangle) \oplus \mathbb{R}\{3x^2, 2\lambda\}$$

tiene la forma (3.11), $[\text{Itr } T(x^3 + \lambda^2)] \oplus V_g$. Luego, dado que

$$[\text{Itr } T(x^3 + \lambda^2)]^\perp = (M^3 + \langle \lambda^2 \rangle)^\perp = \mathbb{R}\{1, x, \lambda, \lambda x, x^2\},$$

entonces una base para el subespacio complementario a

$$V_g = \mathbb{R}\{3x^2, 2\lambda\}$$

en $\mathbb{R}\{1, x, \lambda, \lambda x, x^2\}$ es $\{1, x, \lambda x\}$. Aplicando el Corolario 3.3 tenemos que la cúspide es de codimensión tres y (4.3) es el desdoblamiento universal.

4.2 Singularidades de codimensión uno

Llamamos a la forma normal $x^3 - \lambda^2$ **bifurcación simple**, porque es la forma normal del problema de bifurcación más simple (en el sentido de codimensión baja) en el cual ocurre la bifurcación en el sentido clásico. Los diagramas de bifurcación contenidos en el desdoblamiento universal $x^2 - \lambda^2 + \alpha$ se ilustran en la Figura 4.1.

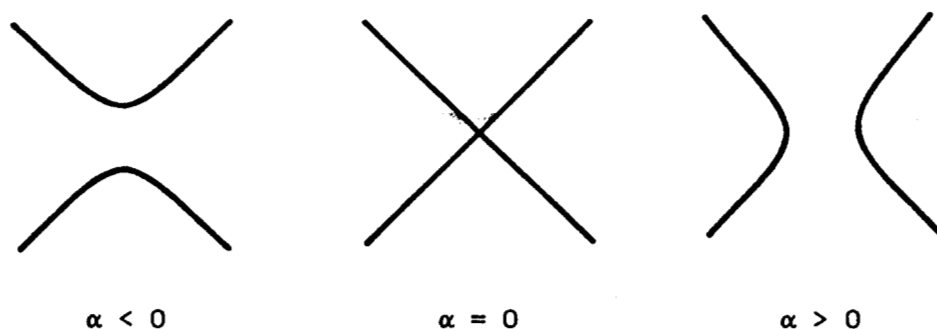


Figura 4.1. Desdoblamiento universal de la bifurcación simple.

$$x^2 - \lambda^2 + \alpha = 0.$$

El problema de bifurcación $x^2 + \lambda^2$ se llama **centro aislado**. Este problema se encuentra observado frecuentemente en la literatura de ingeniería química. En el CSTR (sección.3, Cap.I) podemos ver este tipo de problema. Los diagramas de bifurcación contenidos en el desdoblamiento universal $x^2 + \lambda^2 + \alpha$ aparecen en la Figura 4.2.

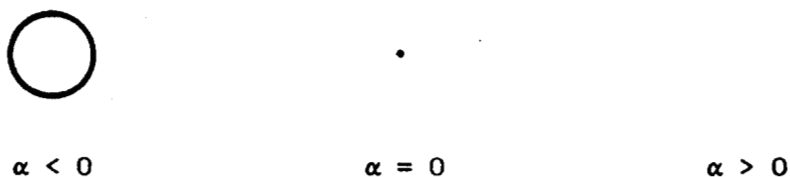


Figura 4.2. Desdoblamiento universal del centro aislado,

$$x^2 + \lambda^2 + \alpha = 0.$$

Al problema de bifurcación $x^3 - \lambda$ le llamamos punto de histéresis. Los diagramas de bifurcación contenidos en su desdoblamiento universal $x^3 - \lambda + \alpha x = 0$ se presentan en la Figura 4.3. Los puntos de histéresis se observan frecuentemente en la teoría de combustión.

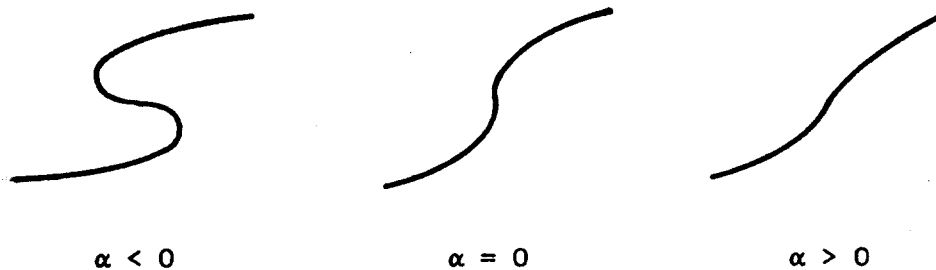


Figura 4.3. Desdoblamiento universal del punto de histéresis,
 $x^3 - \lambda + \alpha x = 0$.

5. El problema de reconocimiento para desdoblamientos universales

Sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un desdoblamiento de un germen g , donde g es equivalente a una forma normal h . ¿ Bajo qué condiciones G es un desdoblamiento universal de g ? El Teorema 3.2 da una manera de responder a esta pregunta, pero aplicar directamente este teorema, frecuentemente, lleva cálculos complicados. Trataremos de reducir estas complicaciones, ayudándonos con la simplicidad de la forma normal h , a una tarea muy específica. Más precisamente, mostraremos que G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si un cierto determinante $m \times m$ es distinto de cero, donde m es la codimensión de $\text{Itr } T(h)$. Las entradas de este determinante son las derivadas de G .

5.1 Base teórica del método

Sea G un desdoblamiento k -paramétrico de g , donde g es equivalente a una forma normal h . Combinando el Teorema 3.2 y la fórmula (3.11) vemos que g es un desdoblamiento universal de g siempre que

$$\mathcal{E}_{x, \lambda} = [\text{Itr } T(g)] \otimes V_g \otimes \left\{ \frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, \frac{\partial G}{\partial \alpha_k}(x, \lambda, 0) \right\} \quad (5.1)$$

Lema 5.1. Si g y h son gérmenes equivalentes en $\mathcal{E}_{x, \lambda}$, entonces

$$\text{Itr } T(g) = \text{Itr } T(h)$$

Demostración. En [GS, Cap. III, sección 4].

Mostraremos que (5.1) puede ser verificada mediante cálculos

realizados en el espacio de dimensión finita $[\text{Itr } T(g)]^\perp$. Ahora por el Lema 5.1, V_g ya está contenido en $[\text{Itr } T(g)]^\perp$. Sin embargo, el tercer sumando de (5.1) no está contenido en $[\text{Itr } T(g)]^\perp$. Para tratar este inconveniente construyamos la proyección

$$J : \mathcal{E}_{x,\lambda} \longrightarrow [\text{Itr } T(g)]^\perp \quad (5.2)$$

asociada a la descomposición

$$\mathcal{E}_{x,\lambda} = [\text{Itr } T(g)] \oplus [\text{Itr } T(g)]^\perp. \quad (5.3)$$

Afirmamos que para cualquier $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$

$$Jf = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0,0) x_1^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}, \quad (5.4)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es tal que $x_1^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \notin \text{Itr } T(g)$. Ciertamente $Jf \in [\text{Itr } T(g)]^\perp$ y $(f - Jf) \in \text{Itr } T(g)$, de modo que tenemos el siguiente resultado (observe que, si $\text{Itr } T(g) = \mathcal{M}^{k+1}$, entonces $Jf = j^k f$).

Lema 5.2. Sea G un desdoblamiento k -paramétrico de un germen g de codimensión k . La fórmula (5.1) es válida si y sólo si

$$[\text{Itr } T(g)]^\perp = V_g + \mathbb{R} \left\{ J \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} (x, \lambda, 0), \dots, J \frac{\partial G}{\partial \alpha_k} (x, \lambda, 0) \right\}. \quad (5.5)$$

Demostración. En [GS, Cap. III, sección 4].

Observación. Se sigue, contando dimensiones, que si (5.5) se verifica, la suma (5.5) es, en efecto, una suma directa.

El Lema 5.2 proporciona los fundamentos, con cálculos de álgebra lineal, para la solución del problema de reconocimiento del

desdoblamiento universal; es decir, para probar que G es un desdoblamiento universal de g es suficiente verificar (5.5), y esto se puede lograr calculando cierto determinante. Sin embargo, para mostrar ésto es necesario escoger una base para V_g , lo cual puede hacerse sólo sobre cada caso. Veamos, V_g puede caracterizarse como la imagen de $T(g)$ en $[Itr T(g)]^1$ bajo J . Se sigue de la definición de $T(g)$, que V_g es generado por los gérmenes

$$J(x^r \lambda^s g), J(x^r \lambda^s g_x), J(x^r \lambda^s g_\lambda), \quad (5.6)$$

donde $r, s \geq 0$. Por supuesto, por la determinación finita sólo un número finito de términos en (5.6) son distintos de cero. Ahora queda el problema de cuáles seleccionar para obtener una base de V_g . Para atacar este problema usemos información del problema de reconocimiento para formas normales, para hacer que la selección requiera de menos cálculos.

5.2 Ejemplos

Proposición 5.3. Supongamos que g es equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda$, y sea G un desdoblamiento uniparamétrico de g . Entonces G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} g_x & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (5.7)$$

en $x = \lambda = \alpha = 0$.

Observación. Ya que $G(x, \lambda, 0) \equiv g(x, \lambda)$, reemplazamos en el primer renglón de (5.7) G por g .

Demostración. Consideremos $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda$; la consideración de otra posible combinación de signos no cambia la prueba. Siguiendo los pasos de la sección 5.1, observemos que

$$T(x^3 + \lambda) = (M^3 + \langle \lambda \rangle) \otimes R\{1\}.$$

Por consiguiente, del Lema 5.1,

$$[\text{Itr } T(g)]^1 = [\text{Itr } T(h)]^1 = R\{1, x\}.$$

La proyección J en (5.4) se reduce a

$$Jf = f(0,0) + f_x(0,0) x, \quad (5.8a)$$

o en componentes

$$Jf = (f(0,0), f_x(0,0)). \quad (5.8b)$$

De acuerdo al Lema 5.2, G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$R\{1, x\} = V_g + R\{J \frac{\partial G}{\partial \alpha}\}. \quad (5.9)$$

Ahora escojamos una base para el espacio (unidimensional) V_g de la lista (5.6). En este paso utilizamos la información del problema de reconocimiento para gérmenes. Específicamente, ya que g es equivalente a $x^3 + \lambda$, sabemos que

$$g = g_x = g_{xx} = 0, \quad \text{en } x = \lambda = 0.$$

Substituyendo en (5.8) vemos que

$$Jg = 0, \quad Jg_x = 0, \quad J(\lambda g_\lambda) = 0.$$

En otras palabras, en la lista (5.6) sólo el término Jg_λ es distinto de cero. De modo que, Jg_λ forma la base para V_g , y podemos reescribir (5.1) como

$$R\{1, x\} = R\{Jg_x, JG_\alpha\}. \quad (5.10)$$

Para concluir, G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si (5.10) se verifica. Escribiendo estos dos vectores en términos de componentes como en (5.8b) llegamos a (5.7). ■

Observaciones. (1) (4.11) contiene la derivada $g_{\lambda x}$ la cual no entra en la solución del problema de reconocimiento para la forma normal $x^3 + \lambda$. Esto es clásico, los términos de orden alto en el problema de reconocimiento para formas normales puede no ser término de orden alto en el problema de reconocimiento para desdoblamientos universales.

(2) Ya que $x^3 + \lambda + \alpha x$ es un desdoblamiento universal de $x^3 + \lambda$, se podría pensar que G es un desdoblamiento universal de g si $G_{\alpha x}$ es distinto de cero. Sin embargo, vemos de (5.5) que esta proposición es válida sólo si $g_{\lambda x} = 0$. Pero, aunque $g_{\lambda x} = 0$, para la forma normal $x^3 + \lambda$, $g_{\lambda x}$ no es cero para toda g equivalente a $x^3 + \lambda$.

Proposición 5.4. Sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta)$ un desdoblamiento biparamétrico de un germen g equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda x$. Entonces G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.11)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = 0$.

Demostración. Consideremos el caso $h(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$. Hemos visto que

$$T(x^3 - \lambda x) = (M^3 + M\langle \lambda \rangle) \oplus R\{3x^2 - \lambda, x\}$$

Por consiguiente

$$Jf = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_\lambda(0,0)\lambda + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2. \quad (5.12)$$

Por el Lema 5.2, G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$R\{1, x, \lambda, x^2\} = V_g + R\{JG_\alpha, JG_\beta\}. \quad (5.13)$$

Para escoger una base para V_g de la lista (5.6), recordemos que si g es equivalente al trinche, entonces

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = 0 \quad (5.14)$$

en $x = \lambda = 0$. De modo que

$$Jg = 0, \quad J(xg_x) = 0, \quad J(\lambda g_\lambda) = 0, \quad J(\lambda g_\lambda) = 0.$$

En otras palabras, sólo Jg_x y Jg_λ en (5.6), son distintos de cero. Reescribamos (5.13) como

$$R\{1, x, \lambda, x^2\} = R\{Jg_x, Jg_\lambda, JG_\alpha, JG_\beta\}. \quad (5.15)$$

Escribiendo (5.15) en componentes y utilizando (5.14) para eliminar algunos términos iguales a cero, obtenemos (5.11). ■

Proposición 5.5. Sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ un desdoblamiento triparamétrico de un germen g equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda^2$. Entonces G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.16)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Demostración. Consideremos el caso $h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2$. Sabemos que

$$T\{x^3 + \lambda^2\} = (\mathcal{M}^3 + \langle \lambda \rangle) \oplus \mathbb{R}\{x^2, \lambda\}.$$

Por consiguiente

$$Jf = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_\lambda(0,0)\lambda + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{\lambda x}(0,0)\lambda x.$$

Luego, G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si

$$\mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2, \lambda x\} = V_g + \mathbb{R}\{JG_\alpha, JG_\beta, JG_\gamma\} \quad (5.17)$$

Para escoger una base para V_g de la lista (5.6), recordemos que si g es equivalente a la cúspide, entonces

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0$$

en $x = \lambda = 0$. Por consiguiente

$$Jg = 0, \quad J(xg_x) = 0, \quad J(\lambda g_\lambda) = 0, \quad J(\lambda g_\lambda) = 0.$$

Reescribamos (5.17) como

$$\mathbb{R}\{1, x, \lambda, x^2, \lambda x\} = \mathbb{R}\{Jg_x, Jg_\lambda, JG_\alpha, JG_\beta, JG_\gamma\},$$

de lo cual se sigue (5.16). ■

Proposición 5.6. Sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un desdoblamiento uniparamétrico de un germen g equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^2 \pm \lambda^2$. Entonces G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si $G_\alpha \neq 0$ en $x = \lambda = 0$.

Demostración. Consideremos el caso $x^2 - \lambda^2$. Sabemos que $T(x^2 - \lambda^2) = M^2 \oplus M = M$, así que $Jf = f(0,0)$. Por el Lema 5.2, G es un desdoblamiento universal de g si y sólo si $R\{1\} = V_g + R\{JG_\alpha\}$. Pero $Jg = 0$, entonces podemos escribir $R\{1\} = R\{JG_\alpha\}$. Se sigue inmediatamente que $G_\alpha \neq 0$ en $x = \lambda = \alpha = 0$. ■

5.3 Resumen

Sea g un desdoblamiento de un germen g , donde g es equivalente a una forma normal h . Supongamos que h tiene codimensión k . El problema de reconocimiento para h debe resolverse antes de aplicar este método; en particular, consideremos $\text{Itr } T(h)$ como conocido. El método nos lleva a un determinante $m \times m$ que caracteriza la universalidad de G , donde m es la codimensión de $\text{Itr } T(g)$.

Resumamos la aplicación del método en los siguientes tres pasos conceptuales:

- (1) Dado $\text{Itr } T(h)$, construir la proyección J como en (5.4).
- (2) Usar el problema de reconocimiento de h para eliminar gérmenes linealmente dependientes de la lista (5.6); esto nos lleva a una base para V_g , digamos $Jp_1, \dots, Jp_r$ donde $r = m - k$.
- (3) Expandir los m vectores $Jp_1, \dots, Jp_r, JG_{\alpha_1}, \dots, JG_{\alpha_k}$, en la base de monomios de $[\text{Itr } T(h)]^{-1}$ para obtener el determinante $m \times m$.

6. Diagramas de bifurcación no persistentes

El resto del capítulo consiste en cómo enumerar los distintos diagramas de bifurcación de un desdoblamiento universal dado.

Para llevar a cabo esta enumeración nos centraremos sobre la siguiente cuestión: ¿Cuáles de los diagramas de bifurcación perturbada en el desdoblamiento de g no cambian (en el sentido cualitativo de equivalencia) si se someten a pequeñas perturbaciones ?. Llamaremos a tales diagramas persistentes. Realmente nos enfocaremos sobre diagramas no persistentes. Mostraremos que sólo hay tres fuentes de no persistencia; a saber, bifurcación, histéresis y puntos límites dobles. En la Figura 6.1 bosquejamos estos tres fenómenos; junto con pequeñas perturbaciones, los cuales muestran su no persistencia.

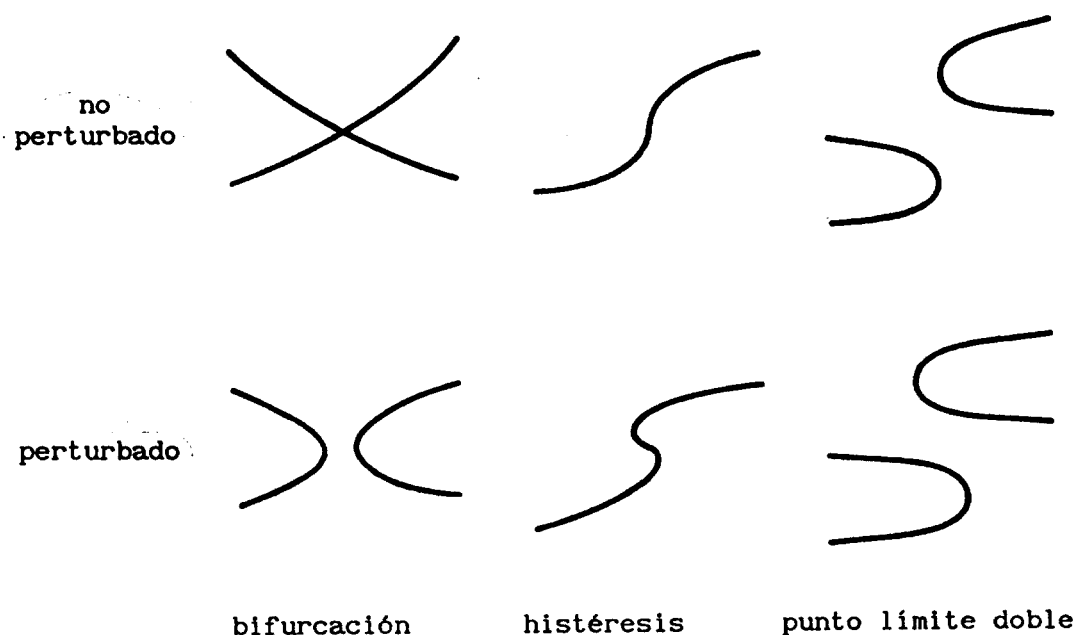


Figura 6.1. Fenómeno de no persistencia.

Más formalmente, sea $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un desdoblamiento universal de un germen $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Resumamos los fenómenos anteriores de no persistencia en la siguiente definición.

Definición 6.1

- (a) $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists (x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.
- (b) $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists (x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$.
- (c) $\mathcal{D} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \text{ tal que } G = G_x = 0 \text{ en } (x_i, \lambda, \alpha), i = 1, 2\}$.
- (d) $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D}$, el conjunto de transición.

Respecto a los problemas de bifurcación de codimensión uno (sección 4.3) hagamos las siguientes observaciones.

Observación. (i) Hemos agrupado la bifurcación simple y el centro aislado en el conjunto $\mathcal{B}$, ya que el problema de reconocimiento para cada una involucra exactamente las mismas ecuaciones. Sólo las condiciones de no degeneración son diferentes, los cuales se ignoran en la Definición 6.1.

(ii) Los puntos límites dobles no aparecen en la sección 4.1 porque son casi-globales en el siguiente sentido: dos puntos distintos se incluyen en la definición de $\mathcal{D}$. Sin embargo puntos límites dobles pueden ocurrir con pequeñas perturbaciones de una singularidad degenerada; en este sentido el fenómeno se considera local. La noción global de puntos límites dobles es necesaria en cualquier teoría local la cual maneje perturbaciones pequeñas.

Ahora argüimos, al menos huerísticamente, que cada uno de los

tres conjuntos de la Definición 6.1 está descrito por una ecuación escalar $\psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$, $i = \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$. Considere, por ejemplo, las ecuaciones que definen a $\mathcal{B}$:

$$G(x, \lambda, \alpha) = G_x(x, \lambda, \alpha) = G_\lambda(x, \lambda, \alpha) = 0 \quad (6.1)$$

Si resolvemos dos de las ecuaciones en (6.1) para x y λ , como función de α , y sustituimos el resultado en la tercera ecuación, obtenemos una ecuación simple para α . Procedemos similarmente para $\mathcal{H}$ y $\mathcal{D}$.

Este análisis está sujeto a tres inconveniencias. Primera, parece concebible que las tres ecuaciones escalares en (6.1) no son independientes, lo cual, por supuesto, estropearía el argumento. Sin embargo, la hipótesis que G es un desdoblamiento universal evita esta posibilidad, al menos en una vecindad adecuada de la singularidad. No probamos esta aserción en general; pero la derivamos explícitamente para cada uno de los ejemplos considerados.

La segunda inconveniencia es que el proceso de eliminación puede introducir singularidades en las ecuaciones ψ_i que las definen. Por ejemplo, el conjunto de bifurcación de la singularidad desdoblada

$$x^2 - \lambda^3 + \alpha_1 + \alpha_2 \lambda$$

es la cúspide

$$\left[\frac{\alpha_1}{2} \right]^2 = \left[\frac{\alpha_2}{3} \right]^3$$

La tercera inconveniencia proviene del hecho de que trabajamos sobre los reales; y puede suceder que al eliminar x y λ ciertas

desigualdades mezclen las α 's. Por ejemplo, considere el sistema con $k = 2$:

$$x^2 - \alpha_1 = 0, \quad \lambda = 0, \quad \alpha_2 = 0;$$

al eliminar x y λ de este sistema se obtiene

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0,$$

una semi-recta en el plano.

Estas ideas tienen una sencilla, pero notable, consecuencia: para casi toda $\alpha \in \mathbb{R}^k$ el diagrama de bifurcación

$$\{(x, \lambda) : G(x, \lambda, \alpha) = 0\} \quad (6.2)$$

consiste de curvas regulares que no se intersectan, cuyas únicas singularidades son puntos límites. Esto puede verse combinando los siguientes hechos:

- (1) Los diagramas de bifurcación en (6.2) consisten de curvas regulares que no se intersectan si $\alpha \notin \mathcal{B}$.
- (2) Las únicas singularidades que aparecen en (6.2) son puntos límites si $\alpha \notin \mathcal{B} \cup \mathcal{H}$.
- (3) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ son (posiblemente singulares) superficies en $\mathbb{R}^k$ de dimensión $k - 1$.

Resumamos la discusión anterior en el siguiente teorema. Cambiemos las coordenadas, de modo que G sea un polinomio en todos sus argumentos; esto es posible porque g tiene codimensión finita. En el teorema hacemos referencia a los siguientes conceptos de geometría algebraica. Una variedad algebraica S en $\mathbb{R}^k$ es un conjunto que puede expresarse como los ceros simultáneos de un número finito de ecuaciones polinómicas:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

La **codimension** de S es el número de ecuaciones más pequeño que puede ser usado para representar a S . En particular, una variedad de **codimension uno** es una hipersuperficie; sin embargo, esta hipersuperficie puede tener cierto tipo de singularidades tales como **autointersecciones** o **cúspides**. Una **variedad semi-algebraica** es un subconjunto de una variedad algebraica la cual satisface ciertas desigualdades polinómicas, digamos

$$S' = \{\alpha \in S : Q_j(\alpha) \geq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Teorema 6.2. Sea $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica de codimensión finita, y sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un desdoblamiento universal, también polinómico, de g . El conjunto Σ de la Definición 6.1 es una variedad semialgebraica en $\mathbb{R}^k$ de codimensión uno.

Observación. La ecuación que describe la unión $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D}$ viene del producto

$$\psi_{\mathcal{B}}(\alpha) \psi_{\mathcal{H}}(\alpha) \psi_{\mathcal{D}}(\alpha) = 0,$$

donde $\psi_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{H}}$ y $\psi_{\mathcal{D}}$ describen las superficies $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente. Puede ser que se necesiten varias desigualdades para caracterizar a Σ .

7. Exposición del teorema geométrico principal

En la mayor parte del trabajo se han formulado los resultados en términos de gérmenes. Con este formalismo uno, frecuentemente, evita especificar explícitamente vecindades sobre las cuales un teorema es válido; esto puede simplificar la exposición de resultados. Con el formalismo se trabaja mejor en los casos donde todos los cálculos se realizan en una vecindad de algún punto fijo (x_0, λ_0) ; por ejemplo, en el caso de $\mathcal{P}(g)$, los términos de orden alto asociados con un germen g dado. En tales casos hemos considerado en nuestras equivalencias sólo difeomorfismos (X, Λ) los cuales fijan (x_0, λ_0) . Sin embargo, en casos donde debemos considerar difeomorfismos que no fijen puntos, el formalismo de gérmenes es menos satisfactorio. Tales transformaciones ocurren en la Definición 2.1, la definición de un desdoblamiento a través de otro; no obstante, el concepto de germen es adecuado para estos tópicos. En esta sección olvidaremos temporalmente el formalismo de gérmenes.

Suponga que $g(x, \lambda)$ es un germen de codimensión finita con desdoblamiento universal $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Definimos a Σ como en la Definición 6.1, y sea W una vecindad apropiada de cero en $\mathbb{R}^k$. En términos generales, el resultado principal de esta sección establece que si α_1, α_2 pertenecen a la misma componente conexa de $W \sim \Sigma$, entonces $G(\cdot, \cdot, \alpha_1)$ y $G(\cdot, \cdot, \alpha_2)$ son equivalentes a otro. En otras palabras, para cada par α_1, α_2 en una componente dada de $W \sim \Sigma$, hay una transformación de equivalencia que liga $G(\cdot, \cdot, \alpha_1)$ y $G(\cdot, \cdot, \alpha_2)$. Ya que ninguno de estos difeomorfismos necesita dejar los puntos fijos, parece imposible manejar la situación

adecuadamente con el concepto de germen.

No obstante, el resultado que buscamos se sigue del análisis local. Escogeremos cuidadosamente una vecindad V del origen en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y entonces se prueba la equivalencia de $G(\cdot, \cdot, \alpha_1)$ y $G(\cdot, \cdot, \alpha_2)$ sobre V (para $\alpha_1, \alpha_2 \in W$ adecuadas). Debido a que consideramos difeomorfismos (X, Λ) donde Λ no depende de x , es conveniente tomar a V como una vecindad rectangular de $(0,0)$; esto es, $V = U \times L$ donde U y L son intervalos cerrados. Diremos que una función $g: U \times L \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$, si g admite una extensión $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de $U \times L$.

Formulemos el resultado principal. Supongamos que $g(x, \lambda)$ tiene una singularidad de codimensión finita en el origen. Primero escojamos una vecindad apropiada $U \times L$ del origen. Específicamente, escojamos $U \times L$ tal que

- (a) g y g_x no se anulen simultáneamente en $\partial(U \times L)$
 - (b) g no se anula en $(\partial U) \times L$.
- (7.1)

Esto siempre es posible por lo siguiente. Ya que el ideal $\langle g, g_x \rangle$ tiene codimensión finita podemos concluir que el origen es una solución aislada (ver [ZS, pag. 293]) al par de ecuaciones

$$g(x, \lambda) = g_x(x, \lambda) = 0.$$

De modo que para cualquier rectángulo suficientemente pequeño que contenga al origen se satisface (7.1.a). Para verificar (7.1.b) observemos que por la codimensión finita

$$g(x, 0) = ax^m + \mathcal{O}(x^{m+1})$$

para algún entero m y algún $a \neq 0$. En otras palabras, el origen es un cero aislado de $g(x, 0)$ que pertenece a U . Sea U un intervalo

(cerrado) pequeño que contiene al cero, tal que ningún otro cero de $g(x,0)$ pertenece a U . Entonces g es diferente de cero en $\partial U \times \{0\}$; por continuidad podemos escoger un intervalo L , también pequeño, para el cual g es diferente de cero en $(\partial U) \times L$. Con esto se satisface (7.1.b).

Sea $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}^k$ un desdoblamiento universal de g . Ahora $G(\cdot, \cdot, 0) = g$, la cual satisface (7.1). Por continuidad podemos escoger una vecindad de cero, $W \subset \mathbb{R}^k$, tal que para cualquier $\alpha \in W$

- (a) G y G_x no se anulan simultáneamente en $\partial(U \times L)$
 - (b) G no se anula en $(\partial U) \times L$.
- (7.2)

Para construir los conjuntos $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{D}$ asociados a G , modificamos la Definición 6.1 restringiendo (x, λ) a $U \times L$; por ejemplo tomamos

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in W : \exists (x, \lambda) \in U \times L \text{ tal que } G = G_x = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}. \quad (7.3)$$

Similarmente para $\mathcal{H}$ y $\mathcal{D}$ y entonces Σ .

Teorema 7.1. Sean g, G, U, L, W y Σ como antes. Si α_1 y α_2 pertenecen a la misma componente conexa de $W \sim \Sigma$, entonces existe un difeomorfismo $(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$ que mapea $U \times L$ sobre si mismo y una función positiva $S(x, \lambda)$ tales que

$$G(x, \lambda, \alpha_2) = S(x, \lambda) G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), \alpha_1).$$

Además $S(\partial(U \times L)) = \partial(U \times L)$.

Demostración. [GS, Cap. III, sección 9].

En otras palabras, los diagramas de bifurcación persistentes en el desdoblamiento G son enumerados por los componentes de $W \sim \Sigma$. *A priori* es posible que diagramas equivalentes pudieran ocurrir en componentes diferentes de $W \sim \Sigma$, pero no encontramos ejemplos donde esto ocurra.

8. El trinche.

Apliquemos el Teorema 7.1 para derivar la información contenida en la figura 2.5, Cap. I, Secc. 1 acerca de las perturbaciones del trinche.

Sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x^2$ el desdoblamiento universal del trinche, y sean $U, L \subset \mathbb{R}$ y $W \subset \mathbb{R}^2$ vecindades que verifiquen las condiciones del Teorema 7.1. (Por ejemplo, $U = [-1, 1]$, $L = [-1, 1]$ y $W = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 + \beta^2 < 1\}$). Observe que la única singularidad del problema perturbado (solución de $g = g_x = 0$) ocurre en el origen, y por supuesto la selección de U , L y W garantiza que para $(\alpha, \beta) \in W$ la singularidad no escapa. (cruzando $\partial(U \times L)$). Por consiguiente la modificación (7.1) de la Definición 6.1 no tiene efecto aquí. Afirmamos que este problema no tiene puntos límites dobles.

Lema 8.1. Si $h(x)$ es un polinomio de grado 3 o menor tal que $h = h_x = 0$ en dos puntos distintos, entonces $h \equiv 0$.

Demostración. Efectuando una traslación de ejes, $x \rightarrow (x - x_1)$, podemos suponer $x_1 = 0$. Entonces $h(0) = h_x(0) = 0$, lo cual implica que $h(x)$ tiene la forma $h(x) = ax^3 + bx^2$ para algunos coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$. Ahora, las ecuaciones $h(x_2) = h_x(x_2) = 0$ pueden escribirse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_2^3 & x_2^2 \\ 3x_2^2 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0.$$

Pero el determinante de esta matriz es $-x_2^4 \neq 0$, lo cual implica que $a = b = 0$. ■

Se sigue del Lema 8.1 que no es posible que $G = G_x = 0$ en dos puntos x_1 y x_2 diferentes, par α , β y λ fijos, ya que G tiene grado 3 en x . Esto prueba que $\mathcal{D} = \emptyset$.

Para calcular $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ calculemos

$$\begin{aligned} G &= x^3 + \beta x^2 - \lambda x + \alpha \\ G_x &= 3x^2 + 2\beta x - \lambda \\ G_\lambda &= -x \\ G_{xx} &= 6x + 2\beta \end{aligned}$$

Para determinar $\mathcal{B}$, observe que $G_\lambda = G_x = 0$ implica $x = \lambda = 0$. De $G = 0$, obtenemos la ecuación $\alpha = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) \in W : \alpha = 0\}.$$

Para determinar $\mathcal{H}$, observe que $G = G_x = G_{xx} = 0$ implica

$$x = -\frac{\beta}{3}, \quad \lambda = -\frac{\beta^2}{3}, \quad \alpha = \frac{\beta^3}{27}$$

De modo que

$$\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) \in W : \alpha = \frac{\beta^3}{27}\}.$$

De acuerdo al Teorema 7.1, cualquier selección de parámetros en la misma componente de $W \sim \Sigma$ (Figura 8.1) da diagramas de bifurcación equivalentes (Figura 8.2).

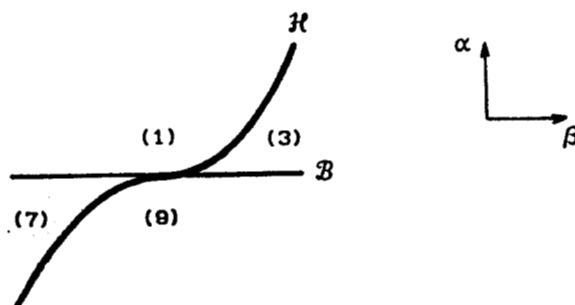


Figura 8.1. Conjunto Σ del trinche, $x^3 - \lambda x$.

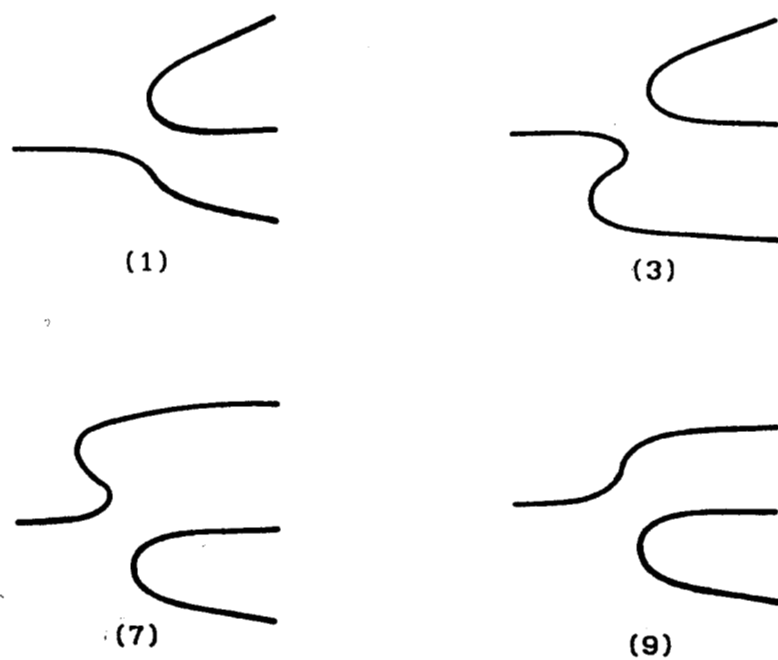


Figura 8.2. Perturbaciones persistentes del trìnche.

9. La cúspide.

Estudiaremos con detalle el desdoblamiento universal

$$G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma) = x^3 + \lambda^2 + \gamma\lambda x + \beta x + \alpha \quad (9.1)$$

de la cúspide. Usaremos el Teorema 7.1 para enlistar los diferentes diagramas de bifurcación persistentes que pueden encontrarse en el desdoblamiento universal G .

Para facilitar la exposición trabajaremos globalmente en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, bajo la observación de que los resultados son técnicamente válidos en vecindades U, L y W como en el Teorema 7.1.

Empecemos observando que la variedad $\mathcal{D}$ para G es el vacío. Este hecho se sigue directamente del Lema 8.1, ya que G es un polinomio cúbico en x . Para encontrar las variedades $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ notemos que

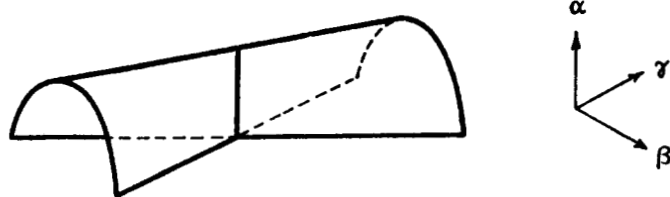
$$\begin{aligned} G_x &= 3x^2 + \gamma\lambda + \beta, \\ G_\lambda &= 2\lambda + \gamma x, \\ G_{xx} &= 6x. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Primero calculamos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ por separado y después construimos $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H}$, luego enlistamos las componentes de $\mathbb{R}^3 \sim \Sigma$ y finalmente determinamos los diagramas de bifurcación asociados.

Recordemos que la variedad de histéresis $\mathcal{H}$ está definida por $G = G_x = G_{xx} = 0$. Se sigue de (9.1) y (9.2) que

$$\mathcal{H} = \{(\gamma, \beta, \alpha) : \alpha\gamma^2 = -\beta^2; \alpha \leq 0\}. \quad (9.3)$$

A $\mathcal{H}$, de esta forma, se llama comúnmente *la sombrilla de Whitney*. (Ver Figura 9.1(a)). En la Figura 9.1(b) se grafican cortes con γ constante.



(a) $\mathcal{H}$, la sombrilla de Whitney.



$\gamma = 0$

$\gamma \neq 0$

(b) Cortes de $\mathcal{H}$ con γ constante.

Figura 9.1. La variedad de histéresis de la cúspide.

La variedad de bifurcación $\mathcal{B}$ está determinada por las ecuaciones $G = G_x = G_\lambda = 0$. Para determinar $\mathcal{B}$ es más fácil hacerlo en forma paramétrica (en x y γ) como:

$$\begin{aligned}\beta &= -3x^2 + \gamma^2 \left(\frac{x}{2}\right) \\ \alpha &= 2x^3 - \gamma^2 \left(\frac{x^2}{4}\right)\end{aligned}\tag{9.4}$$

Ahora podemos graficar cortes de $\mathcal{B}$ con γ constante. Cuando $\gamma = 0$, obtenemos la cúspide $\left(\frac{\beta}{3}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0$. Cuando $\gamma \neq 0$, obtenemos una cúspide deformada (Figura 9.2). Observe que el vértice de la cúspide está definido por $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dx} = 0$ y ocurre en $x = \frac{\gamma^2}{12}$. Para

ver que la cúspide se dirige hacia abajo, calculamos $\frac{d\alpha}{d\beta} = -x$ la cual es negativa en el vértice. Es fácil ver que la cúspide no tiene autointersecciones. Esto completa el dibujo.

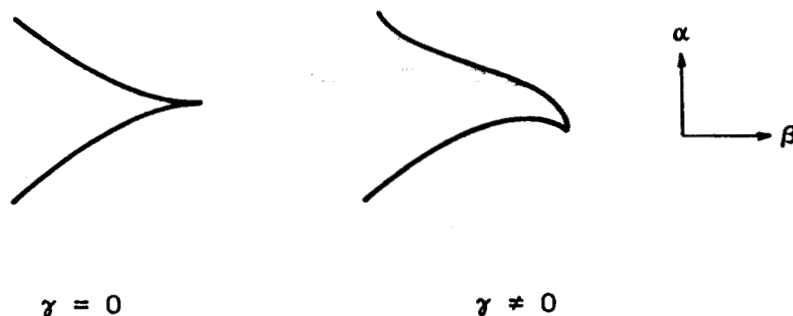


Figura 9.2. Cortes de $\mathcal{B}$ con γ constante.

Ahora discutamos $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H}$. De la discusión anterior parece muy natural graficar cortes de Σ con γ constante. Aunque los cortes de Σ con γ y $-\gamma$ son idénticos, los damos en la Figura 9.3, porque ambas copias son necesarias para determinar el número de componentes conexas en el complemento de Σ . Estas componentes se enumeran en la misma figura.

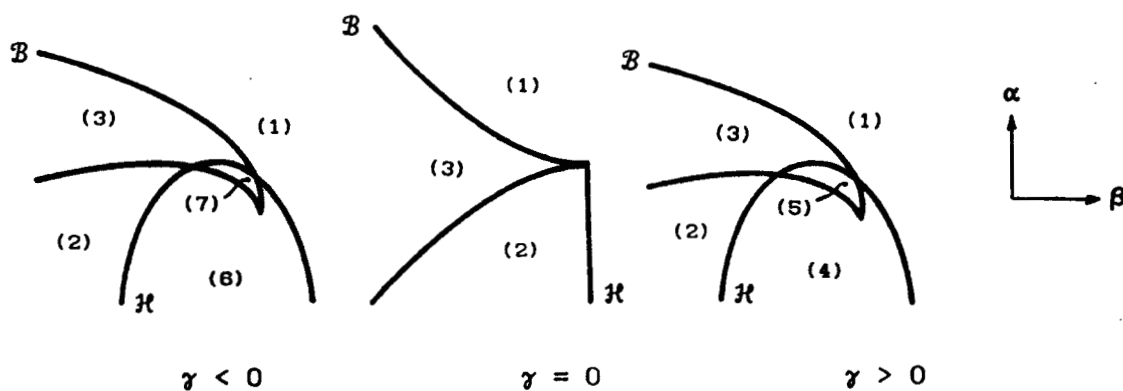


Figura 9.3. Cortes de Σ con γ constante.

La gráfica de Σ para $\gamma = 0$ se logra fácilmente de las características de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$. Para $\gamma = 0$, el dibujo de Σ es plausible, dado que $\mathcal{H}$ es una parábola que se abre hacia abajo y $\mathcal{B}$ es una cúspide dirigida hacia abajo. A manera de reafirmar este dibujo checamos dos puntos. Primero, mostremos que para cada $\gamma \neq 0$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}$ consiste de dos puntos, uno en cada parte de $\mathcal{B}$; y segundo, mostremos que en la intersección de la segunda parte de $\mathcal{B}$ con $\mathcal{H}$, estas dos superficies se cruzan tangencialmente.

El primer punto es para calcular $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}$. Hagamos esto substituyendo la parametrización (9.4) para $\mathcal{B}$, en la ecuación (9.3) para $\mathcal{H}$, de modo que obtenemos la ecuación para x

$$x^3(9x - \gamma^2) = 0. \quad (9.5)$$

Las dos soluciones de (9.5) son las intersecciones. Una intersección ocurre en cada parte de $\mathcal{B}$, ya que el vértice ocurre en $x = \frac{\gamma^2}{12}$ y este punto está entre las dos soluciones de (9.5). Para verificar lo segundo, consideremos la solución $x = 0$ en (9.5); esta yace sobre la segunda parte de $\mathcal{B}$. Por (9.4), $\alpha = \beta = 0$ en este punto. Afirmamos que en este punto el desdoblamiento

$$G(x, \lambda, 0, 0, \gamma) = x^3 + \lambda^2 + \gamma\lambda x$$

tiene una singularidad de trinche en $(0,0)$, lo cual se checa fácilmente usando la solución del problema de reconocimiento para el trinche (Proposición II, 10.3). Más aun, el desdoblamiento biparamétrico $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ de $G(x, \lambda, 0, 0, \gamma)$ es un desdoblamiento universal; esto se sigue de la Proposición 5.4. Recordemos del estudio del trinche en la sección 8, especialmente la Figura 8.1, que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ son tangentes y se cortan en $\alpha = \beta = 0$.

Dadas las gráficas de la Figura 9.3, es fácil enumerar las siete componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \sim \Sigma$ como se indica en la figura. Observe que las regiones (4) y (6), y las regiones (5) y (7) no son conexas en $\mathbb{R}^3 \sim \Sigma$.

Para completar nuestro estudio de la cúspide, encontremos los siete diagramas persistentes de bifurcación perturbada predichos por el análisis anterior de Σ . Estos siete diagramas se dan en la Figura 9.4 (los números corresponden a la Figura 9.3). Usaremos fuertemente la existencia del trinche en $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$, en la derivación de estos diagramas.

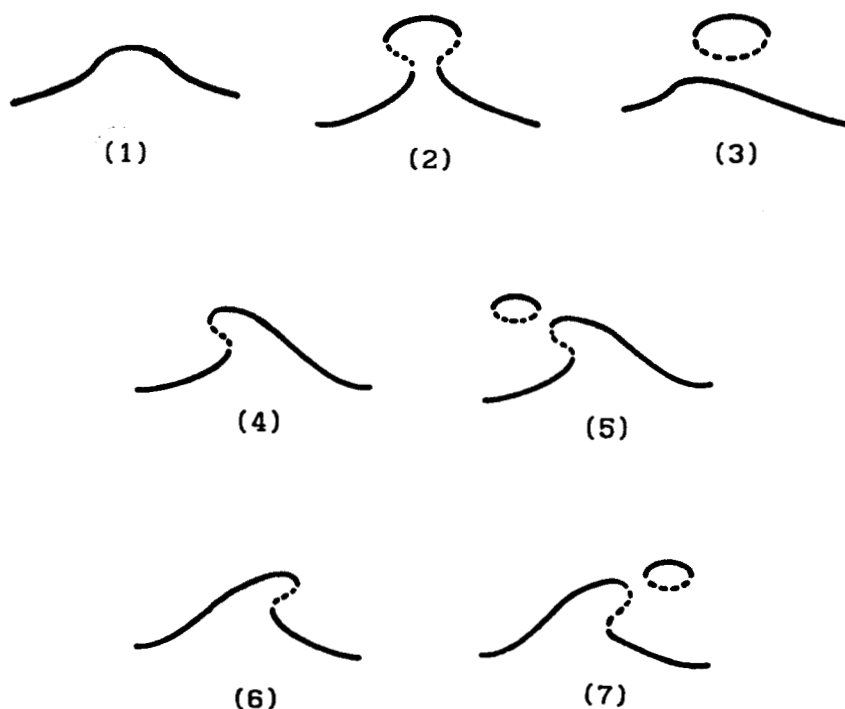


Figura 9.4. Perturbaciones persistentes de la cúspide.

Empecemos analizando la región (1). Sea $\beta = \gamma = 0$, $\alpha > 0$.

La ecuación

$$G(x, \lambda, \alpha, 0, 0) = x^3 + \lambda^2 \alpha = 0$$

puede resolverse fácilmente, encontrando

$$x(\lambda) = -(\lambda^2 + \alpha)^{1/3}. \quad (9.6)$$

Observe que $x(\lambda)$ es $\mathcal{C}^\infty$, ya que $\alpha > 0$. Entonces podemos ver que el diagrama de la región (1) es el mostrado en la Figura 9.4(1).

Ahora mostremos que si $\beta = \gamma = 0$, $\alpha > 0$, entonces el diagrama de bifurcación es el mostrado en la Figura 9.5; éste tiene dos puntos de histéresis.



Figura 9.5. $x^3 + \lambda^2 + \alpha = 0$, $\alpha > 0$.

Note que (9.6) sigue siendo válida, de modo que hay una solución x para cada λ . Sin embargo, $G = G_x = G_{xx} = 0$ en $(x, \lambda) = (0, \pm|\alpha|^{1/2})$ mientras que $G_{xxx} G_\lambda \neq 0$ en estos puntos. Usando la Proposición II, 10.4, vemos que $(0, \pm|\alpha|^{1/2})$ son puntos de histéresis $G(x, \lambda, \alpha, 0, 0)$ (estos puntos se consideran sobre las autointersecciones de $\mathcal{H}$). Por la Proposición 5.3, el desdoblamiento uniparamétrico $G(x, \lambda, \alpha, \beta, 0)$ de $G(x, \lambda, \alpha, 0, 0)$, es un desdoblamiento universal para cada uno de estos puntos de

histéresis. Por consiguiente, par $\beta \neq 0$, habrá cero o dos puntos límite cerca de cada punto de histéresis, dependiendo del signo de β . Ya que los diagramas de bifurcación que corresponden a la región (1) no tienen puntos límite, se sigue que los de la región (2) deben tener cuatro puntos límite y que los diagramas correspondientes deben ser como los de la Figura 9.4(2).

Ahora recordemos que $G(x, \lambda, 0, 0, \gamma)$ tiene una bifurcación trinche en $(0, 0)$ para $\gamma \neq 0$. Los diagramas de bifurcación para $G(x, \lambda, 0, 0, \gamma) = 0$ se dan en la Figura 9.6. Fijemos $\gamma < 0$ para una discusión adicional. Como hemos visto, $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ es un desdoblamiento del trinche $G(x, \lambda, 0, 0, \gamma)$.



Figura 9.6. $x^3 + \lambda^2 + \gamma\lambda x = 0$.

La perturbación del trinche con $\gamma < 0$, en la Figura 9.6, nos conduce a los cuatro diagramas de bifurcación mostrados en la Figura 9.7; esto puede derivarse de la discusión del desdoblamiento universal del trinche en la sección 8, especialmente de la Figura 8.2. Afirmamos que los cuatro diagramas en las Figuras 9.7(a), (b), (c), (d), se identifican con las regiones (3), (6), (7), (2) de la Figura 9.3, respectivamente.

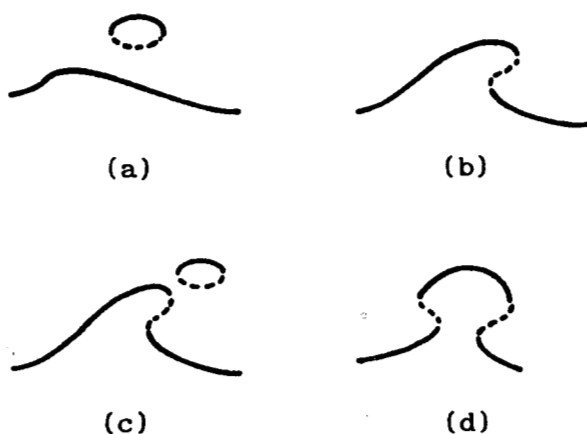


Figura 9.7. $G = 0$ para α, β pequeños comparados con $|\gamma|$, $\gamma < 0$.

Hemos hecho ya la identificación de (d) con (2). Ya que se cruza $\mathcal{B}$ cuando uno se mueve de la región (2) a la región (3) en la Figura 9.3, se sigue que (a) se identifica con (3). Por otro lado, los diagramas (a) y (b) corresponden a las regiones *gordas* en la Figura 8.1, mientras que los diagramas (c) y (d) corresponden a las regiones *flacas* en esa figura. Esto nos lleva las identificaciones restantes, (b) con (6) y (c) con (7). Un análisis similar nos permite completar la Figura 9.4.

CAPITULO IV

DOS SISTEMAS CON BIFURCACION

1. El CSTR

En el capítulo I, sección 3 delineamos un programa de análisis para el CSTR; éste es estudiado por Golubitsky y Schaeffer [GS] con detalle. En la presente sección consideraremos un modelo más general. En realidad el parámetro B (medida adimensional del calor de reacción), en (I.3.3), depende de la temperatura; en otras palabras, B depende de x . Normalmente B es de la forma $B = \beta e^{-\varepsilon x}$ donde $\beta > 0$ (ya que la reacción es exotérmica) y $\varepsilon > 0$ es un parámetro fijo que depende del proceso. Entonces la ecuación de equilibrios para el CSTR es

$$G(x, \lambda, \beta, \delta, \eta) = (1+\lambda)\alpha - \eta - \frac{B\lambda}{1+d\lambda A(x)} = 0 \quad (1.1)$$

donde

$$B = \beta e^{-\varepsilon x} \quad \text{y} \quad A(x) = \exp\left[\frac{-\delta x}{1+x}\right]$$

(Observemos que no se incluyen ε y γ como argumentos en (1.1) puesto que no varían). Nuestro propósito es analizar (1.1) en términos de la singularidad cúspide, es decir

$$h(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2. \quad (1.2)$$

Específicamente, probaremos un teorema, el que corresponde al problema de reconocimiento para una forma normal.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^5$ el conjunto físicamente aceptable; a saber

$$\Omega = \left\{ (x, \lambda, \beta, \delta, \eta) : \beta, \lambda, \delta > 0 \text{ y } x, \eta > -1 \right\} \quad (1.3)$$

Teorema 1.1. Sean $\gamma > 0$ y $0 \leq \varepsilon < 1$ parámetros fijos, entonces existe un único punto $z_0 = (x_0, \lambda_0, \beta_0, \delta_0, \eta_0) \in \Omega$ tal que $G(x, \lambda, \beta_0, \delta_0, \eta_0)$ es equivalente a la cúspide (1.2) en una vecindad de (x_0, λ_0) .

Demostración. De acuerdo a la Proposición 10.2 del capítulo II, debemos probar que para cada γ y ε fijos existe una solución única $(x_0, \lambda_0, \beta_0, \delta_0, \eta_0) = z_0$ en Ω para el sistema de ecuaciones

$$G = G_x = G_{xx} = G_\lambda = G_{x\lambda} = 0 \quad (1.4a)$$

en las variables $x, \lambda, \beta, \delta, \eta$ y además

$$G_{xxx} > 0 \text{ y } G_{xx} > 0 \text{ en } z_0. \quad (1.4b)$$

Empecemos calculando las derivadas de (1.4a). Por simplicidad escribamos

$$\Delta = 1 + \delta \lambda A(x).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (a) \quad G &= (1+\lambda)x - \eta - B\lambda/\Delta, \\ (b) \quad G_\lambda &= x - B/\Delta^2, \\ (c) \quad G_x &= (1+\lambda) + B\lambda(\varepsilon\Delta + \delta\lambda A')/\Delta^2, \\ (d) \quad G_{x\lambda} &= 1 + B(\varepsilon\Delta + 2\delta\lambda A')/\Delta^3, \\ (e) \quad G_{xx} &= B\lambda[-\varepsilon^2\Delta^2 + (A'' - 2\varepsilon A')\delta\lambda\Delta - 2(\delta\lambda A')^2]/\Delta^3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde las derivadas de $A(x)$

$$\begin{aligned}
(a) \quad A &= \exp\left[\frac{-\gamma x}{1+x}\right] > 0, \\
(b) \quad A' &= \frac{-\gamma}{(1+x)^2} A(x) < 0, \\
(c) \quad A'' &= \frac{\gamma^2 + 2\gamma(1+x)}{(1+x)^4} A(x) > 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

satisfacen las desigualdades para $x > -1$.

La principal dificultad para resolver (1.4a) reside en el hecho de que la dependencia de x , en las derivadas en (1.5), es terriblemente no lineal. Trataremos esta dificultad manipulando (1.4a) para obtener una ecuación polinomial que dependa de x . Teniendo resulta esta ecuación para x , será relativamente sencillo resolver para las variables restantes.

Observemos de (1.5b) que

$$B = \Delta^2 x. \tag{1.7}$$

usando (1.7) en $G_{x\lambda} = 0$, obtenemos

$$\delta\lambda[(1+\epsilon x)A + 2xA'] = -(1+\epsilon x). \tag{1.8}$$

donde

$$(1+\epsilon x)A + 2xA' \tag{1.9}$$

es distinto de cero porque $\delta\lambda > 0$, $x > -1$ y $0 \leq \epsilon < 1$. Ahora

$$\begin{aligned}
G_{x\lambda} = \frac{B\lambda}{\Delta^3} \left[-\epsilon^2 + (-2\epsilon^2 A + A'' - 2\epsilon A')\delta\lambda + \right. \\
\left. (-\epsilon^2 A^2 + AA'' - 2\epsilon AA' - 2(A')^2)(\delta\lambda)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

En esta expresión, cancelando el término $B\lambda/\Delta^3$ distinto de cero, multiplicando por (1.9) y usando (1.8) simplificamos para obtener

$$(1+\varepsilon^2 x^2)A' + x(1+\varepsilon x)A'' = 0$$

o equivalentemente, de (1.6b) y (1.6c),

$$\left[-\gamma(1+\varepsilon^2 x^2)(1+x)^2 + (x+\varepsilon x^2)(\gamma^2 + 2\gamma(1+x)) \right] A/(1+x)^4 = 0$$

Dado que $x > -1$ y en vista de (1.6a), podemos cancelar $A/(1+x)^4$ para obtener una ecuación polinomial en x de cuarto grado

$$\varepsilon^2 x^4 + 2(\varepsilon^2 - \varepsilon)x^3 + [\varepsilon^2 - \varepsilon(\gamma+2) - 1]x^2 - \gamma x + 1 = 0. \quad (1.10)$$

Le ecuación (1.10), de acuerdo a la regla de los signos de Descartes tiene dos soluciones reales positivas o ninguna. Además la expresión del lado izquierdo de (1.10) es positiva en $x = 0$ y negativa en $x = 1$ si $\gamma > 0$. Por consiguiente (1.10) tiene una solución única x_0 que satisface $x_0 > 1$ dado que la expresión del lado izquierdo es positiva para x suficientemente grande.

Ahora resolvamos para δ y λ . Sustituyendo la expresión para B en (1.7) en la ecuación $G_x = 0$, se deduce

$$\delta\lambda(\varepsilon A + A') = - \frac{1+(1+\varepsilon x)\lambda}{\lambda x} \quad (1.11)$$

dividiendo (1.11) miembro a miembro por (1.9) obtenemos una expresión para λ_0

$$\lambda_0 = - \frac{(1+\varepsilon x)A + 2xA'}{(1+\varepsilon x)(A + xA')} \Big|_{x=x_0},$$

sustituyendo λ_0 en (1.8)

$$\delta_0 = \frac{(1+\varepsilon x)^2 (A + xA')}{[(1+\varepsilon x)A + 2xA']^2} \Big|_{x=x_0},$$

de (1.7)

$$B_0 = x_0 \Delta_0^2, \quad \Delta_0 = 1 + \delta_0 \lambda_0 A(x_0)$$

y

$$\eta_0 = (1+\lambda_0)x_0 - B_0\lambda_0/\Delta_0.$$

Finalmente es fácil checar que z_0 está en Ω .

2. Un proceso de fermentación

Suárez *et al* [SAG] diseñan un control deslizante para un proceso de fermentación continua. Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned} (a) \quad \dot{x} &= \mu_m \frac{sx}{k+s} - Dx, \\ (b) \quad \dot{s} &= D(S_a - s) - \frac{\mu_m}{Y} \frac{sx}{k+s} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde las variables de estado, x y s , son las concentraciones de biomasa y sustrato, respectivamente; D es la razón de dilución; S_a es la concentración del sustrato de alimentación, y μ_m , Y y k son parámetros característicos del proceso. En el modelo se considera la tasa de mortalidad insignificante respecto a la tasa de crecimiento.

Suárez *et al* [SAG] hacen un análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.1), ver Figura 2.1, cuando el parámetro D cambia.

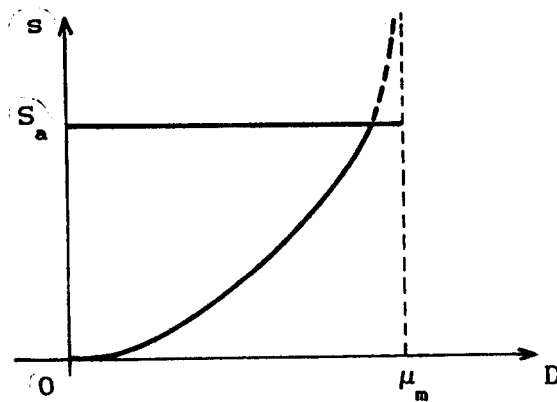


Figura 2.1. Puntos de equilibrio.

Evidentemente, el sistema (2.1) presenta una bifurcación. Nuestro propósito es hacer un análisis de bifurcación como sigue:

1. Definiremos la ecuación del problema de bifurcación.
2. Encontremos una forma normal para el problema.
3. Daremos un desdoblamiento universal para la forma normal.
(Consideraremos todas las posibles perturbaciones).

2.1 Definición del problema

Igualando las ecuaciones (2.1) a cero

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mu_m \frac{sx}{k+s} - Dx = 0 \\ (b) \quad & D(S_a - s) - \frac{\mu_m}{Y} \frac{sx}{k+s} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sumando (2.2a) y (2.2b) obtenemos

$$DY(S_a - s) - Dx = 0,$$

esta ecuación muestra una relación lineal entre s y x . Siguiendo el trabajo de Suárez *et al* [SAG], dividamos el estudio en dos casos: $D = 0$ y $D > 0$.

El caso $D = 0$ nos conduce a dos ramas de soluciones $s = 0$ o $x = 0$ mostradas en la Figura 2.2.

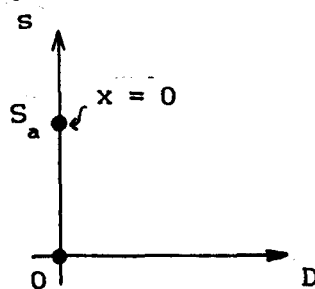


Figura 2.2. Soluciones de equilibrio con $D = 0$.

En el caso $D > 0$, de (2.2), despejamos a x de una de las

ecuaciones y sustituimos la expresión obtenida en la otra, para obtener

$$(S_a - s) [\mu_m s - D(k + s)] = 0.$$

Esto nos motiva a definir la ecuación de bifurcación, g , mediante

$$g(s, D) = (S_a - s) [\mu_m s - D(k + s)] = 0, \quad (2.3)$$

donde D es el parámetro de bifurcación. El diagrama de bifurcación correspondiente se ilustra en la Figura 2.3. El punto donde se intersectan las ramas de soluciones es (S_a, D_0) , donde

$$D = \mu_m \frac{S_a}{k + S_a}.$$

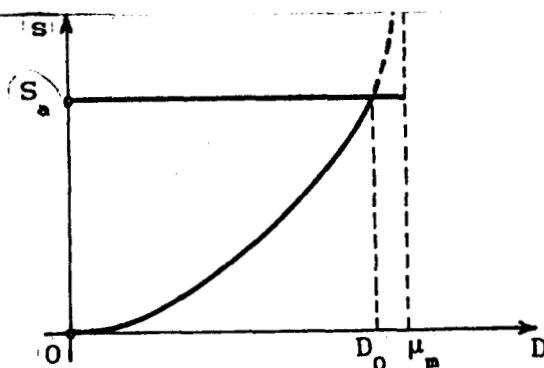


Figura 2.3. Soluciones de equilibrio con $D > 0$.

Observe que, para el análisis de bifurcación, podemos considerar los casos $D = 0$ y $D > 0$ en un sólo, usando (2.3) para $D \geq 0$. En la Figura 2.4 se muestra esta situación y se hace el análisis de estabilidad como se vió en el Cap. I, secc. 2.4.

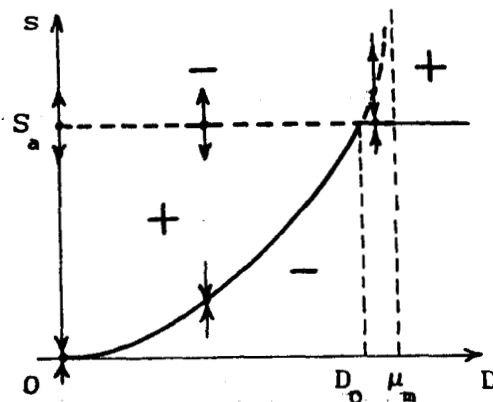


Figura 2.4. Diagrama de bifurcación y análisis de estabilidad de $g(s,D) = (S_a - s) [\mu_m - D(k + s)] = 0$,

2.2 Forma normal

Evidentemente (2.3) es un problema de bifurcación en (S_a, D_0) , probaremos que presenta una bifurcación simple; es decir, (2.3) en (S_a, D_0) es equivalente a la forma normal

$$h(s,D) = -s^2 + D^2 = 0. \quad (2.4)$$

en $(0,0)$. Para esto, en vista de la Proposición II,10.1, basta probar que g satisface las condiciones

$$g = g_s = g_D = 0, \quad g_{ss} < 0 \quad \text{y} \quad \det(d^2g) < 0$$

en (S_a, D_0) .

Calculemos las derivadas de g

$$g(s, D) = (S_a - s)[\mu_m - D(k + s)],$$

$$g(s, D) = (S_a - s)(\mu_m - D) - [(\mu_m - D)s - Dk],$$

$$g_D(s, D) = - (S_a - s)(k + s),$$

$$g_{ss}(s, D) = - 2(\mu_m - D),$$

$$g_{sD}(s, D) = - (S_a - s) + (k + s),$$

$$g_{DD} = 0.$$

Ahora, evalúemos en (S_a, D_0) cada una de estas expresiones

$$\begin{aligned}
g(S_a, D_0) &= g_s(S_a, D_0) = g_D(S_a, D_0) = 0, \\
g_{ss}(S_a, D_0) &= -2(\mu_m - D_0) < 0, \quad \mu_m < D_0 \\
g_{sD}(S_a, D_0) &= (k + s), \quad g_{DD} = 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\det d^2g(S_a, D_0) = -(k + s)^2 < 0.$$

Por lo tanto la singularidad de g en (S_a, D_0) es equivalente a la singularidad de h en $(0,0)$. En la Figura 2.5 presentamos el diagrama de bifurcación para h .

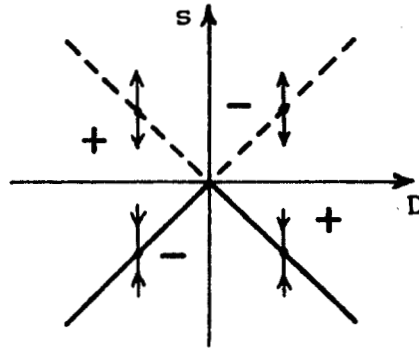


Figura 2.5. Diagrama de bifurcación, $-s^2 + D^2 = 0$.

2.3 Desdoblamiento universal

Daremos el desdoblamiento universal para la forma normal h , de la ecuación (2.4), y entonces probaremos que ese desdoblamiento también es universal para la g de la ecuación (2.3).

Por lo visto en la sección 4.1 del Cap.III el desdoblamiento

$$G(s, D, \alpha) = -s^2 + D^2 + \alpha \quad (2.5)$$

es universal para h . Ahora, dado que g es equivalente a h , de la Proposición III,5.6, basta probar que $G_\alpha \neq 0$ en $s = D = 0$ para decir que G también es un desdoblamiento universal para g .

Efectivamente $G_\alpha \neq 0$.

Los diagramas de bifurcación del desdoblamiento (2.5) se muestran en la Figura 2.6.

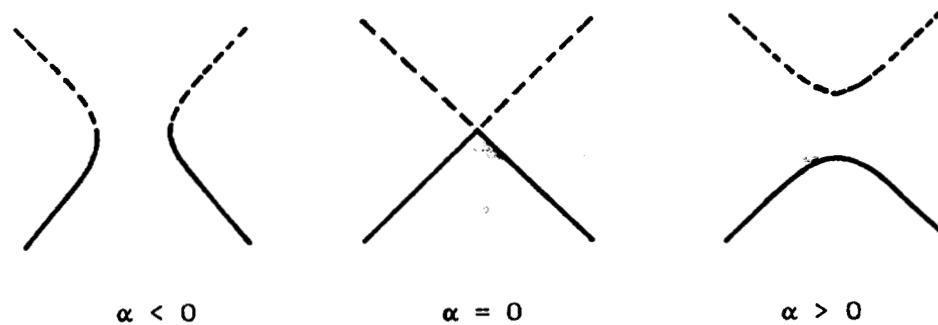


Figura 2.6 Desdoblamiento universal $-s^2 + D^2 + \alpha = 0$.

Finalmente, los diagramas de bifurcación de todas las posibles perturbaciones de (2.3) se presentan en la Figura 2.7.

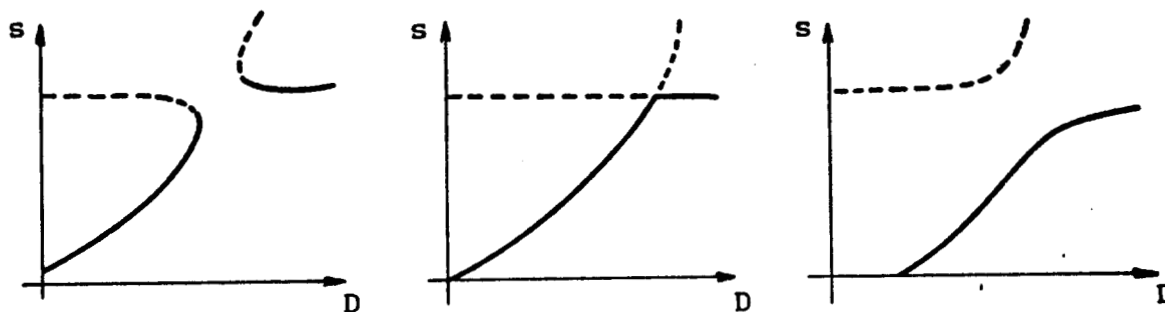


Figura 2.7. Diagramas de bifurcación de perturbaciones de
 $g(s, D) = (S_a - s)[\mu s_m - D(k + s)] = 0$.

REFERENCIAS

- [CH] Chow, S.N., and Hale, J. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer Verlag: New York [1982].
- [GS] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, I*. Springer Verlag: New York [1985].
- [GH] Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Springer Verlag: New York. [1983].
- [HS] Hirsch, M.W. and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press: New York [1974].
- [BR] Brocker, Th. *Differential Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society. Cambridge University Press: [1975].
- [MT] Martinet, J. *Singularities of Smooth Functions and Maps*. London Mathematical Society. Cambridge University Press [1982].
- [GS₂] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. A. Theory for imperfect bifurcation theory via Singularity theory. *Commun. Pure Appl. Math.*, 32, 21-90. 1979.
- [GK] Golubitsky, M. and Keyfilz, B.L. A qualitative study of the steady state solutions for a continuous flow stirred tank chemical reactor. *Siam J. Math. Anal.*, 11, 316-339, 1980.

dynamic behavior of continuous stirred tank reactors-influence of reactor residence time. Chem. Eng. Sci., 31, 205-214. [1976].

[BL] Balakotaiah, V. and Luss, D. Analysis of the multiplicity patterns of a CSTR. Chem. Eng. Commun., 13, 111-132. 1981.

[BL₂] Balakotaiah, V. and Luss, D. Structure of the steady-state solutions of lumped parameter chemically reacting systems. Chem. Eng. Sci., 37, No. 11, 1611-1623. 1982.

[BL₃] Balakotaiah, V. and Luss, D. Multiplicity features of reacting systems. Dependence of the steady-states of a CSTR on the residence time. Chem. Eng. Sci., 38, No. 10, 1709-1721 1983.

[ZS] Zariski, O. and Samuel, P. [1960]. Commutative Algebra, Vol. II. Van Nostrand, Princeton, N.J.