Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SUBMAXIMALIDAD Y PROPIEDADES TOPOLÓGICAS MAXIMALES

Tesis que presenta

Álvaro Menéndez Calzada

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Asesor: **Dr. Richard G. Wilson**

Sinodales:

Dr. Richard G. Wilson (presidente)

Dr. Vladimir V. Tkachuk (secretario)

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa (vocal)

Ciudad de México, 23 de marzo de 2018

Resumen

En la presente Tesis, se demuestran diversos resultados sobre expansiones simples de topologías y algunas otras expansiones, haciendo énfasis en las submaximalizaciones. Una propiedad de estas últimas es la submaximalidad, misma que es intrínseca de las topologías maximales conexas y maximales tenuemente compactas. Se desarrolla el concepto de conjunto singular para después dar dos caracterizaciones de las topologías maximales conexas y mostrar propiedades de éstas a través de la conexidad esencial (una propiedad más débil que la conexidad maximal). Asimismo, se construye un ejemplo de una topología maximal conexa y de Hausdorff. Se determinan las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea maximal tenuemente compacto, tanto en espacios topológicos generales como en espacios regulares.

Índice general

Introducción

Dado un conjunto A, dotado de un orden parcial $\leq$, se dice que un elemento $\alpha \in A$ es maximal (minimal) si no existe $\beta \in A$, tal que $\beta \neq \alpha$ y $\alpha \leq \beta$ ($\beta \leq \alpha$). Llamemos $\mathfrak{T}(X)$ a la familia de todas las topologías que pueden ser definidas en un conjunto X; dentro de la teoría de Zermelo-Fraenkel, $\mathfrak{T}(X)$ es un conjunto. De acuerdo con lo anterior, como es bien sabido, la contención no estricta ($\subset$) define un orden parcial en dicho conjunto; así que lo denotaremos por $(\mathfrak{T}(X), \subset)$. Es obvio que las topologías discreta (denotada por δ) e indiscreta (denotada por ι) son, respectivamente, el único elemento maximal y el único elemento minimal de $(\mathfrak{T}(X), \subset)$.

Si P es una propiedad topológica, denotaremos por $\mathfrak{T}_{\mathrm{P}}(X)$ a la familia de todas las topologías de X con la propiedad P. Diremos que una topología τ es maximal (minimal) P si es un elemento maximal (minimal) de $\mathfrak{T}_{\mathrm{P}}(X)$ respecto a la contención. Es evidente que ni δ ni ι tiene todas las propiedades topológicas: la topología indiscreta no es T_0, pero sí es conexa; mientras que la topología discreta no es conexa, pero sí es T_0. Por ello, hay varios ejemplos de propiedades, tales que $\mathfrak{T}_{\mathrm{P}}(X)$ tiene diversos elementos maximales o minimales.

En caso de que δ (ι) tenga P, es maximal (minimal) P; luego, δ es maximal T_0 e ι es minimal conexa. Hay más propiedades para las cuales las topologías maximales (minimales) son triviales; por ejemplo, la topología discreta es la (única) topología maximal paracompacta: toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto disjunto y éste es localmente finito.

Otras propiedades, entre las que se encuentra la compacidad, tienen caracterizaciones sencillas de sus topologías maximales. Sin embargo, identificar las topologías maximales con propiedades como la compacidad tenue y, especialmente, la conexidad no es tan sencillo.

De acuerdo con [4], entre las primeras publicaciones sobre topologías maximales, se encuentran [1, 13, 14]; en la última aparece por primera vez la demostración de que las topologías compactas de Hausdorff son maximales compactas y minimales de Hausdorff. Aunque se ha hecho mención de las topologías minimales en el apartado actual, esta Tesis tratará únicamente sobre propiedades maximales.

Como es natural, las demostraciones relacionadas con topologías maximales se apoyan fuertemente en la construcción de topologías más finas a partir de topologías ya existentes. Las topologías más pequeñas que pueden ser creadas a partir de un espacio topológico (X, τ) son las expansiones simples (también llamadas extensiones simples); es decir, las generadas por las subbases de la forma $\tau \cup \{A\}$, donde A es un subconjunto de X. Hewitt [14] fue el primero en definirlas y utilizarlas como una herramienta de construcción.

El Capítulo 1 aborda los principales teoremas sobre expansiones simples, así como las condiciones necesarias o suficientes para que determinadas propiedades sean preservadas bajo una extensión simple; entre tales propiedades, se encuentran los Axiomas de Separación, la compacidad y la conexidad. Esto último fue estudiado por Ikenaga y Yoshioka [15] y, además, por Borges [2]; en cuanto a la preservación de la conexidad, una de las publicaciones más completas es la de Guthrie, Reynolds y Stone [9]. Este capítulo contiene resultados relacionados con otros tipos de expansiones, como las submaximalizaciones, que serán de gran importancia más adelante. Tanto el Capítulo 2 como el Capítulo 3 requieren de diversos resultados del Capítulo 1.

El resto de este Trabajo está dedicado a las topologías maximales conexas y a las maximales tenuemente compactas; algo que ambas tienen en común es que son submaximales. La submaximalidad se introduce en el Capítulo 1 y es una propiedad estrechamente relacionada con el Lema de Zorn o, equivalentemente, el Axioma de Elección. En efecto, para construir una topología submaximal desde una topología (una submaximalización) conexa, es necesaria la existencia de ultrafiltros de conjuntos densos. A causa de lo anterior, la construcción de una topología maximal conexa es algo complicada.

A la conexidad, que es, quizá, la propiedad sobre la que más se ha escrito en el contexto de las topologías maximales, corresponde el Capítulo 2. Ahí se incluye un par de caracterizaciones de topologías maximales conexas y ambas dependen de la submaximalidad. Una de ellas [17], al igual que el único ejemplo que se desarrollará, se apoya en el concepto de conjunto singular, así como en ultrafiltros de dicho tipo de conjuntos; la otra [7] está relacionada con un concepto similar, pero no se ha probado que los dos conceptos sean equivalentes. Asimismo, se discute brevemente la conexidad esencial, que es una propiedad más débil que la conexidad maximal y guarda varias similitudes con ésta. Por último, se muestra la construcción de uno de los pocos ejemplos que hay de una topología maximal conexa [11]. En este caso, se trata de un espacio de Hausdorff y, más que un ejemplo, es un teorema de existencia, pues, como ya se ha dicho, precisa del Axioma de Elección.

En el tercer capítulo, se dan brevemente algunos resultados sobre compacidad maximal y, posteriormente, se introduce la compacidad tenue. Se identifican las topologías maximales tenuemente compactas y, al igual que en el capítulo anterior, la submaximalidad juega un papel de suma importancia. No obstante, la compacidad tenue maximal presenta menores dificultades que la conexidad maximal. Por último, son abordadas las topologías regulares maximales débilmente compactas y se definen las familias casi disjuntas y maximales casi disjuntas; con las últimas es posible construir espacios regulares maximales débilmente compactos, siendo esto clave para caracterizar dichos espacios.

Capítulo 1

Expansiones de topologías

En este primer capítulo, se introduce el concepto de expansión simple (también conocido como extensión simple) de una topología, junto con sus principales resultados. La mayoría de los teoremas están relacionados con la preservación de determinadas propiedades topológicas bajo expansiones simples; entre dichas propiedades se encuentran los axiomas de separación, la compacidad y la conexidad.

1.1. Expansiones simples

1.1.1. Generalidades

Definición 1.1.1. Sean (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto arbitrario de X. Sea $\tau(A)$ la topología generada por la subbase $\tau \cup \{A\}$. La nueva topología $\tau(A)$ se llama expansión simple de τ por medio de A.

Cuando no haya lugar a confusión, $\tau(A)$ será denotada por τ^*; asimismo, los operadores como $int_{\tau(A)}$ y $cl_{\tau(A)}$, obedecerán la notación int_{τ^*}, cl_{τ^*}, o bien, int_*, cl_*, etcétera.

Comenzamos con un resultado de carácter técnico, que caracteriza los operadores de interior y cerradura en $(X, \tau(A))$, así como las correspondientes topologías relativas a A y su complemento.

Teorema 1.1.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, y τ^* la expansión simple de τ por medio de A. Para cualquier $B \subset X$:*

(a) $int_{\tau^*}(B) = int_\tau(B) \cup \big(int_{\tau|_A}(B \cap A)\big)$

(b) $cl_{\tau^*}(B) = cl_\tau(B) \cap [(X \smallsetminus A) \cup (A \cap cl_\tau(B \cap A))]$

(c) $(A, \tau|_A) = (A, \tau^*|_A)$ *y* $(X \smallsetminus A, \tau|_{X\smallsetminus A}) = (X \smallsetminus A, \tau^*|_{X\smallsetminus A})$

(d) $cl_{\tau^*}(B \cap A) = cl_\tau(B \cap A)$

(e) *A es cerrado en τ^* si y solo si A es cerrado en τ*

(f) *Si F es cerrado en τ o τ^*, entonces, $F \cap A$ es cerrado en $(A, \tau|_A)$ y $F \cap (X \smallsetminus A)$ es cerrado en $(X \smallsetminus A, \tau|_{X\smallsetminus A})$.*

(g) $\tau(A)|_B = (\tau|_B)(A \cap B)$*: la expansión simple conmuta con la restricción.*

(h) *Si F es cerrado en (X, τ^*), existen P Q cerrados en (X, τ) tales que $F = P \cup (Q \cap [X \smallsetminus A])$.*

Demostración.

(a) Directamente de la definición de expansión simple, se deduce que $U \in \tau^*$ si y solo si $U = (A \cap F) \cup G$, con $F, G \in \tau$; luego, el interior de B en τ^* es

$$\begin{aligned} int_{\tau^*}(B) &= \bigcup \{U \in \tau^* | B \supset U\} \\ &= \bigcup \{(A \cap F) \cup G : B \supset (A \cap F) \cup G \text{ y } F, G \in \tau\}. \end{aligned}$$

Puesto que $B \supset (A \cap F) \cup G$ si y solo si $(A \cap F) \subset B$ y $G \subset B$, la unión puede separarse, quedando

$$int_{\tau^*}(B) = \left[\bigcup_{F\in\tau} \{(A \cap F) : B \supset (A \cap F)\}\right] \cup \left[\bigcup_{G\in\tau} \{G : B \supset G\}\right]. \quad (*)$$

El segundo término es precisamente $int_\tau(B)$, y como $B \supset (A \cap F)$ es equivalente a $B \cap A \supset (A \cap F)$, se sigue que

$$\bigcup_{F\in\tau} \{(A \cap F) : B \supset (A \cap F)\} = \bigcup_{F\in\tau} \{(A \cap F) : (B \cap A) \supset (A \cap F)\};$$

además, puesto que cada subconjunto abierto de A es de la forma $A \cap F$, con F en τ, esta última unión es $int_{\tau|_A}(B \cap A)$. Sustituyendo en $(*)$, se llega a (a).

(b) De acuerdo con el inciso anterior, por la dualidad interior-cerradura,

$$\begin{aligned} cl_{\tau^*}(B) &= X \setminus int_{\tau^*}(X \setminus B) \\ &= X \setminus \left[int_\tau(X \setminus B) \cup int_{\tau|_A}([X \setminus B] \cap A) \right] \\ &= [X \setminus int_\tau(X \setminus B)] \cap \left[X \setminus int_{\tau|_A}([X \setminus B] \cap A) \right] \\ &= cl_\tau(B) \cap \left[(X \setminus A) \cup \left(X \setminus int_{\tau|_A}([X \setminus B] \cap A) \right) \right] \\ &= cl_\tau(B) \cap \left[(X \setminus A) \cup \left(A \setminus int_{\tau|_A}([X \setminus B] \cap A) \right) \right] \\ &= cl_\tau(B) \cap [(X \setminus A) \cup [A \cap cl_\tau(B \cap A)]] \end{aligned}$$

(c) La expansión simple relativa al subespacio A es

$$\begin{aligned} \tau^*|_A &= \{Q \cap A : Q \in \tau^*\} = \{[E \cup (F \cap A)] \cap A : E, F \in \tau\} \\ &= \{(E \cap A) \cup (F \cap A) : E, F \in \tau\} = \{E \cup F' : E', F' \in \tau|_A\} \\ &= \tau|_A. \end{aligned}$$

La otra ecuación se obtiene de manera muy similar.

(d) Aplicando el resultado (b) a $B \cap A$, recordando que $cl_{\tau|_A}(B) = A \cap cl_\tau(B)$ y usando las leyes de De Morgan, se deduce que

$$\begin{aligned} cl_{\tau^*}(B \cap A) &= [cl_\tau(B \cap A)] \cap [(X \setminus A) \cup (A \cap cl_\tau(B \cap A))] \\ &= [cl_\tau(B \cap A) \cap (X \setminus A)] \cup [(cl_\tau(B \cap A)) \cap A] \\ &= cl_\tau(B \cap A) \cap [(X \setminus A) \cup A] = cl_\tau(B \cap A). \end{aligned}$$

(e) Basta notar que A es cerrado en τ^* si y solo si $A = cl_{\tau^*}(A) = cl_{\tau^*}(A \cap A) = cl_\tau(A \cap A) = cl_\tau(A)$; es decir, si y solo si es cerrado en τ.

(f) De acuerdo con el inciso (c), si F es cerrado en (X, τ^*), el conjunto $F \cap A$ es cerrado en $(A, \tau^*|_A) = (A, \tau|_A)$ y $F \cap (X \setminus A)$ es cerrado en $(X \setminus A, \tau^*|_{X \setminus A}) = (X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$.

(g) Los elementos de $\tau^*|_B$ son de la forma $[U \cup (V \cap A)] \cap B = (U \cap B) \cup [(V \cap B) \cap A]$, con U, $V \in \tau$, que son precisamente los elementos de $(\tau|_B)^*$.

(h) Si F es τ^*-cerrado, es el complemento de un elemento de τ^*, o sea que $F = X \setminus [U \cup (V \cap A)]$ con U, $V \in \tau$. Sean $P' = X \setminus U$ y $Q' = X \setminus V$; por las leyes de De Morgan, $F = P' \cap [Q' \cup (X \setminus A)] = [P' \cap Q'] \cup [P' \cap (X \setminus A)]$, con $P = P' \cap Q'$ y $Q = P'$ cerrados en (X, τ).

■

Las caracterizaciones en 1.1.2(a) y 1.1.2(b) no parecen del todo sencillas, así que no es muy alentador pensar en la apariencia que tendrían si, en lugar de añadir un único conjunto a la topología, se añadieran varios. A pesar de eso, si vemos a las expansiones simples como operadores en la familia de todas las topologías, resulta que conmutan.

Teorema 1.1.3. *Sean* (X,τ) *un espacio topológico y* $A, B \subset X$. *Denotemos por* $\tau(\{A,B\})$ *(o, simplemente,* $\tau(A,B)$*) a la expansión de* τ *por medio de* $\{A,B\}$, *definida como la topología generada por la subbase* $\tau \cup \{A,B\}$, *o bien por la subbase* $\tau(A) \cup \tau(B)$. *Entonces,*

$$\tau\big(\{A,B\}\big) = \big(\tau(A)\big)(B) = \big(\tau(B)\big)(A).$$

Demostración. La expansión de $\tau(A)$ por medio de B es

$$(\tau(A))(B) = \{U \cup (V \cap B) : U, V \in \tau(A)\}$$

y, directamente de la definición de $\tau(A)$, puede escribirse como

$$(\tau(A))(B) = \Big\{[P \cup (Q \cap A)] \cup \big([S \cup (R \cap A)] \cap B\big) : P, Q, R, S \in \tau\Big\}.$$

Por las leyes de De Morgan, $[S \cup (R \cap A)] \cap B = (B \cap S) \cup (B \cap R \cap A)$; entonces,

$$(\tau(A))(B) = \Big\{P \cup (Q \cap A) \cup (B \cap S) \cup (B \cap R \cap A) : P, Q, R, S \in \tau\Big\},$$

que es una expresión simétrica respecto a A y B. En otras palabras, si efectuáramos el procedimiento análogo con $(\tau(B))(A)$, llegaríamos a conjuntos exactamente de la misma forma. Se sigue que

$$(\tau(A))(B) = (\tau(B))(A).$$

Ya sabemos que $(\tau(A))(B) \supset \tau(A)$ (pues es una expansión simple) y, por lo anterior, $(\tau(A))(B) = (\tau(B))(A) \supset \tau(A) \cup \tau(B)$; luego,

$$(\tau(A))(B) \supset \tau(\{A,B\}).$$

Por último, si $W \in (\tau(A))(B)$, entonces $W = E \cup (F \cap B)$ con $E, F \in \tau(A)$; como $B \in \tau(B)$, tenemos que $W \in \tau\{A,B\}$, de manera que $(\tau(A))(B) \subset \tau(\{A,B\})$ y, en consecuencia, $\tau(A,B) = (\tau(A))(B)$. ∎

Con la ayuda de un argumento inductivo, el teorema anterior puede generalizarse fácilmente para cualquier familia finita en lugar de $\{A, B\}$. Para el caso de las familias infinitas no hay un resultado análogo; en otras palabras, una expansión por medio de una familia infinita no necesariamente es una sucesión de expansiones simples.

Definición 1.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Denotamos por $\tau(\mathcal{F})$ a la expansión de τ por medio de $\mathcal{F}$; es decir, a la topología generada por la subbase $\tau \cup \mathcal{F}$ o, equivalentemente, por la subbase $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \tau(F)$.

A partir de este punto, los resultados estarán orientados a las condiciones necesarias o suficientes para que las extensiones simples (y algunas otras) hereden propiedades topológicas.

1.1.2. Preservación de funciones cardinales, compacidad, numerabilidad y axiomas de separación débil

Entre las propiedades que pueden ser preservadas bajo extensiones simples, se encuentran los axiomas de separación débil, la compacidad, la compacidad numerable y la propiedad de Lindelöf. En el presente apartado, además de lo ya mencionado, se incluyen resultados sobre segunda numerabilidad, separabilidad y funciones cardinales (Véase [6] para más detalle).

Antes de enunciar el primer teorema, definiremos las funciones cardinales que aparecerán en el mismo.

Definición 1.1.5. Un espacio topológico es de densidad $\leq \kappa$ si tiene un subconjunto denso de cardinalidad $\leq \kappa$.

Definición 1.1.6. Un espacio topológico (X, τ) es de calibre κ si cada $\mathcal{U} \subset \tau$ con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ tiene una subfamilia de cardinalidad κ con intersección no vacía.

Definición 1.1.7. Un espacio topológico (X, τ) es de celularidad numerable si cada colección de subconjuntos abiertos ajenos es numerable.

Teorema 1.1.8.

(a) *Si* (X, τ) *es* T_i, *entonces,* $(X, \tau(A))$ *es* T_i *para todo* $A \subset X$, $i = 0, 1, 2$.

(b) *Si* (X,τ) *es* $\mathtt{R} \in \{$*compacto, numerablemente compacto, Lindelöf*$\}$*, entonces,* $(X,\tau(A))$ *es* $\mathtt{R}$ *si y solo si* $(X \smallsetminus A, \tau|_{X\smallsetminus A})$ *es* $\mathtt{R}$.

(c) *Si* (X,τ) *es segundo numerable, también lo es* $(X,\tau(A))$.

(d) *Si* (X,τ) *es separable,* $(X,\tau(A))$ *es separable si y solo si* $(A,\tau|_A)$ *es separable.*

(e) *Sea* $\mathcal{A} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ *una familia de subconjuntos de* X*. Si* (X,τ) *es segundo numerable y, para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $(A_k, \tau|_{A_k})$ *es segundo numerable, entonces* $\tau(\mathcal{A})$ *es segundo numerable.*

(f) *Si* (X,τ) *es* $\mathtt{R} \in \{$*de densidad* $\leq \kappa$*, calibre* κ*, de celularidad numerable*$\}$ *y* $(A,\tau|_A)$ *es* $\mathtt{R}$*, entonces,* $(X,\tau(A))$ *es* $\mathtt{R}$.

Demostración.

(a) Es una consecuencia de que cualquier topología más fuerte que una topología T_i es T_i, para $i \in \{0,1,2\}$.

(b) Necesidad. Supongamos de antemano que (X,τ) es numerablemente compacto. La compacidad numerable de $(X,\tau(A))$, dado que $X \smallsetminus A$ es cerrado en $\tau(A)$, implica que $(X\smallsetminus A, \tau(A)|_{X\smallsetminus A})$ es numerablemente compacto; pero por 1.1.2(c), $(X\smallsetminus A, \tau|_{X\smallsetminus A})$ también es numerablemente compacto.

Suficiencia. Sea $\mathcal{C} = \{U_n \cup (V_n \cap A) : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta numerable de $(X,\tau(A))$. Claramente, $X \smallsetminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \smallsetminus A)$ y , por el Teorema 1.1.2(c), $U_n \smallsetminus A \in \tau(A)|_{X\smallsetminus A} = \tau|_{X\smallsetminus A}$. Como $(X\smallsetminus A, \tau|_{X\smallsetminus A})$ es numerablemente compacto, podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que existe $M \in \mathbb{N}$, tal que

$$X \smallsetminus A \subset \bigcup_{n=1}^{N}(U_n \smallsetminus A) \subset \bigcup_{n=1}^{N}[U_n \cup (V_n \cap A)].$$

Por otro lado, es evidente que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \cup V_n)$ y la compacidad numerable de (X,τ) implica la existencia de $M \in \mathbb{N}$, tal que $M \geq N$ y $X \subset \bigcup_{n=1}^{M}(U_n \cup V_n)$; en consecuencia,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{M}[U_n \cup (V_n \cap A)];$$

puesto que $M \geq N$, resulta que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{M} [U_n \cup (V_n \cap A)].$$

Con los cambios correspondientes, esta demostración funciona para la propiedad de Lindelöf y la compacidad.

(c) Consideremos una base numerable $\mathcal{B} = \{B_n\}_{\mathbb{N}}$ de τ. Sea

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{A \cap B_n\}_{\mathbb{N}}. \tag{1.1}$$

La familia $\mathcal{B}^*$ es numerable y afirmamos que es una base de $\tau(A)$. En efecto, cada $E \in \tau(A)$ tiene la representación $E = U \cup (V \cap A)$. Tomando en cuenta la primera base,

$$E = \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \cup \left(\left[\bigcup_{j \in J} B_j \right] \cap A \right), \tag{1.2}$$

con $K, J \subset \mathbb{N}$; pero $[\bigcup_{j \in J} B_j] \cap A = \bigcup_{j \in J} [A \cap B_j]$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}^*$, y como $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$, el conjunto E es una unión de elementos de $\mathcal{B}^*$. Se sigue que $(X, \tau(A))$ es segundo numerable.

(d) Sean D y $D' \subset A$, densos en (X, τ) y $(A, \tau|_A)$, respectivamente. Afirmamos que $D \cup D'$ es denso en $(X, \tau(A))$. Para probar esto, notemos que, por el Teorema (1.1.2)(b) $cl_{\tau(A)}(D) \supset cl_\tau(D) \cap (X \setminus A) = X \setminus A$. El mismo teorema y la densidad de D' implican que $A = cl_{\tau|_A}(D') = cl_{\tau(A)|_A}(D') = A \cap cl_{\tau(A)}(D')$; en consecuencia, $cl_{\tau(A)}(D \cup D') = cl_{\tau(A)}(D) \cup cl_{\tau(A)}(D') \supset X$ y se tiene la igualdad. Así, si D y D' son numerables, $D \cup D'$ también lo será; de manera que $(X, \tau(A))$ es separable.

Puesto que hay más conjuntos densos en (X, τ) (por ser más débil) que en (X, τ^*), no se precisa que (X, τ) sea separable para probar la necesidad; dado que A es abierto en $(X, \tau(A))$, hereda la separabilidad de este último.

(e) Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de (X, τ). Definimos $\mathcal{F} = \{\bigcap_{i \in F} A_i : F \subset \mathbb{N}$ es finito$\}$ y $\mathcal{H} = \{F \cap B : F \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{B}\}$. Veremos que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$ es una base numerable de $(X, \tau(\mathcal{A}))$.

En primer lugar, es importante destacar que $\mathcal{F}$ es numerable por estar compuesta de intersecciones finitas de $\mathcal{A}$, el conjunto de las cuales es numerable. Asimismo, $\mathcal{H}$ es numerable porque consta de intersecciones de pares de elementos de dos familias numerables. Por lo anterior, $\mathcal{B}^*$ es numerable.

Por definición de $\tau(\mathcal{A})$ (1.1.4), una subbase de ésta es $\tau \cup \mathcal{A}$ y, de acuerdo con el párrafo anterior, una base de la misma es $\tau \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{M} = \tau \cup \mathcal{M}$, siendo $\mathcal{M} = \{\Phi \cap W : \Phi \in \mathcal{F}, W \in \tau\}$ (es evidente que $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$); así que

$$\tau(A) = \left\{ U \cup \left[\bigcup_{\alpha \in I} (\Phi_\alpha \cap V_\alpha) \right] : \Phi_\alpha \in \mathcal{F} \text{ y } V_\alpha \in \tau \right\}. \tag{1.3}$$

Pero

$$\Phi_\alpha \cap V_\alpha = \Phi_\alpha \cap \left[\bigcup_{k(\alpha) \in I_\alpha} V_{n_{k(\alpha)}} \right] = \bigcup_{k(\alpha) \in I_\alpha} \left[\Phi_\alpha \cap V_{n_{k(\alpha)}} \right], \tag{1.4}$$

con $V_{n_{k(\alpha)}} \in \mathcal{B}$ e $I_\alpha \subset \mathbb{N}$; entonces, $\Phi_\alpha \cap V_\alpha$ resulta ser una unión de elementos de $\mathcal{B}^*$ y, por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in I}(\Phi_\alpha \cap V_\alpha)$ también es unión de elementos de dicha familia. Consecuentemente, cada conjunto abierto de $(X, \tau(A))$ puede ser expresado como una unión de elementos de $\mathcal{B}^*$, de modo que esta última es una base numerable de $(X, \tau(A))$.

(f) Probaremos que si $(A, \tau(A))$ y (X, τ) son de densidad $\leq \kappa$, también lo es $(X, \tau(A))$. En la demostración del inciso (d), se dedujo que, dados D y $D' \subset A$ densos en (X, τ) y $(A, \tau|_A)$ respectivamente, $D \cup D'$ es denso en $(X, \tau(A))$. Si $|D| \leq \kappa$ y $|D'| \leq \kappa$, entonces $|D \cup D'| \leq \kappa$; o sea que $(X, \tau(A))$ tiene un subconjunto denso de cardinalidad $\leq \kappa$.

Veremos ahora que si $(A, \tau(A))$ y (X, τ) son de calibre κ, también $(X, \tau(A))$ es de calibre κ. Para ello, sea $\mathcal{W} = \{U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A) : a \in I\}$ una subfamilia de $\tau(A)$, con $|\mathcal{W}| = \kappa$. Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\mathcal{V} = \{V_\alpha \cap A : \alpha \in I\}$. Como (X, τ) es de calibre κ, si $|\mathcal{U}| = \kappa$, entonces $\mathcal{U}$ tiene una subfamilia $\mathcal{U}^*$, con cardinalidad κ, tal que $\bigcap \mathcal{U}^* \neq \varnothing$; luego, $\bigcap\{U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A) : U_\alpha \in \mathcal{U}^*\} \neq \varnothing$. En caso de que $\bigcap \mathcal{U}^* < \kappa$, tenemos que $|\mathcal{V}| = \kappa$ y, debido a que $(A, \tau(A))$ es de calibre κ, existe $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$, cuya cardinalidad es κ y tal que $\bigcap \mathcal{V}^* \neq \varnothing$. Por lo tanto, $\bigcap\{U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A) : V_\alpha \in \mathcal{V}^*\} \neq \varnothing$ y la unión de esta familia con la otra que se encontró para $\mathcal{U}^*$ es una subfamilia de $\mathcal{W}$ con cardinalidad κ e intersección no vacía. Se sigue que $(X, \tau(A))$ es de calibre κ.

Finalmente, supongamos que $(A, \tau(A))$ y (X, τ) son de celularidad numerable. Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de abiertos disjuntos en $(X, \tau(A))$. Sabemos que $F_\alpha = U_\alpha \cup (V_\alpha \cap A)$, con U_α, $V_\alpha \in \tau$. Como $U_\alpha \subset F_\alpha$ y $V_\alpha \cap A \subset F_\alpha$, los U_α forman una familia disjunta y los $V_\alpha \cap A$ también. Debido a que $(A, \tau(A))$ es de celularidad numerable, la familia de los $V_\alpha \cap A$ es numerable; por otro lado, la familia de los U_α es numerable porque (X, τ) es de celularidad numerable; se sigue que $\mathcal{F}$ es numerable y, por lo tanto, $(X, \tau(A))$ tiene celularidad numerable.

■

1.1.3. Preservación de axiomas de separación fuerte

Los axiomas de separación fuerte (T_3, $T_{3.5}$ y T_4) no son preservados por las expansiones simples de manera tan trivial como los de separación débil. La regularidad de una expansión simple se caracteriza en términos del concepto de conjunto localmente cerrado, que puede verse de varias formas distintas.

Definición 1.1.9. Un conjunto A de un espacio topológico (X, τ), es R-abierto si $A \in \tau|_{cl(A)}$.

Definición 1.1.10. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$; se dice que A es localmente cerrado si es la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado.

El siguiente teorema establece la equivalencia entre estas dos definiciones y, con ello, caracteriza la regularidad de la expansión simple de una topología regular.

Teorema 1.1.11. *[15] Sean (X, τ) un espacio regular y $A \subset X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $(X, \tau(A))$ *es regular.*

(b) $cl_\tau(A) \setminus A$ *es cerrado en* τ.

(c) A *es R-abierto.*

(d) A *es localmente cerrado.*

Demostración. Usaremos la notación $cl\,(A) = cl_\tau(A)$, $A^c = X \setminus A$, $\tau^* = \tau(A)$, para abreviar la escritura. U, V, W siempre serán conjuntos abiertos de τ, mientras que U^*, V^*, W^* serán abiertos de τ^*.

(b) $\Longrightarrow$ **(c)**. Si $cl\,(A) \setminus A$ es cerrado en τ, su complemento es abierto, es decir, $B = [X \setminus cl\,(A)] \cup A \in \tau$. Claramente, $B \cap cl\,(A) = A$ y, entonces, A es R-abierto.

(c) $\Longrightarrow$ **(b)**. Si A es R-abierto, existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap cl\,(A)$, así que $A^c = U^c \cup cl\,(A)^c$ y, por tanto, $cl\,(A) \setminus A = cl\,(A) \cap [U^c \cup cl\,(A)^c] = cl\,(A) \cap U^c$ es un conjunto cerrado en (X, τ).

(c) $\Longleftrightarrow$ **(d)**. Supongamos que A es localmente cerrado; entonces, existen $U \in \tau$ y C cerrado, tales que $A = U \cap C$. Como $A \subset cl\,(A) \subset C$, $A \cap cl\,(A) = U \cap C \cap cl\,(A) = U \cap cl\,(A)$; esto significa que A es R-abierto. La necesidad es obvia.

(a) $\Longrightarrow$ **(c)**. Procediendo por contradicción, supongamos que A no es R-abierto. Para probar que (X, τ) no es regular, es suficiente deducir que A (mismo que es una τ^*-vecindad de algún punto x) no contiene la cerradura de ninguna otra τ^*-vecindad de x. Esto se reduce a demostrar que para cualquier τ^*-vecindad abierta básica $V \cap A$ de x, se tiene que $cl_{\tau^*}(V \cap A) \not\subseteq A$. Dado que A no es R-abierto, existe $x \in A$, que no es punto $\tau|_{cl(A)}$-interior de A. En consecuencia, $V \cap cl\,(A) \not\subseteq A$ y existe $y \in V \cap cl\,(A)$ no perteneciente a A, así que toda vecindad de y en τ^* es simplemente una vecindad en τ. Sea U una vecindad de y; $y \in cl\,(A) \implies U \cap A \neq \varnothing$. Como V es vecindad de y también $U \cap V$ lo es, resulta que $U \cap (V \cap A) \neq \varnothing$. A causa de que U es una τ^*-vecindad arbitraria de y, tal resultado se interpreta como que $y \in cl_{\tau^*}(V \cap A)$ y por lo tanto, (X, τ^*) no es regular.

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** Sean $x \in A^c$ y V^* una τ^*-vecindad básica de x. Como $x \notin A$, $V^* \in \tau$; luego, la regularidad de (X, τ) garantiza la existencia de una τ-vecindad U, tal que $cl\,(U) \subset V^*$. Como $\tau \subset \tau^*$, $U \in \tau^*$ y $cl_*(U) \subset cl\,(U) \subset V^*$. Ahora, tomemos $x \in A$ y en este caso una τ^*-vecindad abierta básica será de la forma $V \cap A$ $(V \in \tau)$. Debido a que A es R-abierto, existe $U \in \tau$, tal que $x \in U \subset V$ y $U \cap cl\,(A) \subset A$. Por la regularidad de (X, τ), x tiene una vecindad $W \in \tau$, tal que $cl\,(W) \subset U$. Entonces, $W \cap A$ es una τ^*-vecindad de x y $cl_*(W \cap A) \subset cl\,(W \cap A) \subset cl\,(W) \cap cl\,(A) \subset U \cap cl\,(A) \subset U \cap A \subset V \cap A$. Con esto y lo anterior, se ha probado que (X, τ^*) es regular.

■

Como consecuencias inmediatas de este teorema, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.1.12. *Si* (X,τ) *es un espacio regular y* $A, B \subset X$*, entonces,*

(a) $(X,\tau(A))$ *es regular si* A *es cerrado.*

(b) Si A *es denso en* X *y* $A \notin \tau$*,* $(X,\tau(A))$ *no es regular.*

(c) Si $(X,\tau(A))$ *y* $(X,\tau(B))$ *son regulares, entonces* $\big(X,\tau(A \cap B)\big)$ *también lo es.*

Demostración.

(a) Es inmediato del Teorema 1.1.11, pues todo conjunto abierto o cerrado es localmente cerrado.

(b) Dado que A es denso en X, $cl\,(A) \setminus A = X \setminus A$ no es cerrado porque A no es abierto en (X,τ); así, de acuerdo con el teorema anterior, (X,τ^*) no puede ser regular.

(c) Por el teorema anterior, que $(X,\tau(A))$ y $(X,\tau(B))$ sean regulares, implica que tanto A como B, son localmente cerrados; luego existen $U, V \in \tau$ y C, D τ-cerrados, tales que $A = U \cap C$ y $B = V \cap D$. Se sigue que $A \cap B = U \cap C \cap V \cap D = (U \cap V) \cap (C \cap D)$ es la intersección de un abierto y un cerrado y, por el mismo teorema, $\big(X,\tau(A \cap B)\big)$ es regular. ∎

Teorema 1.1.13. *Sean* τ *y* τ' *topologías de* X*, y* $\tau \vee \tau'$ *la topología generada por la subbase* $\tau \cup \tau'$*. Si* (X,τ) *y* (X,τ') *son regulares,* $(X,\tau \vee \tau')$ *es regular.*

Demostración. Sean $\sigma = \tau \vee \tau'$ y $x \in X$; sea V^* una σ-vecindad abierta básica de x. Entonces, $V^* = V \cap V'$, con $V \in \tau$ y $V' \in \tau'$. Por regularidad de τ y τ', existen $W \in \tau$ y $W' \in \tau'$, tales que $x \in W \cap W'$, $cl_\tau(W) \subset V$ y $cl_{\tau'}(W') \subset V'$. Esto implica que $cl_\sigma(W \cap W') \subset cl_\sigma(W) \cap cl_\sigma(W') \subset cl_\tau(W) \cap cl_{\tau'}(W') \subset V^*$, o sea que $W \cap W'$ es una σ-vecindad de x, cuya σ-cerradura está contenida en V^* ∎

Teorema 1.1.14. *[15] Sean* (X,τ) *un espacio completamente regular y* $A \subset X$*; entonces,* $(X,\tau(A))$ *es completamente regular si y solo si* $(X,\tau(A))$ *es regular.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio completamente regular, tal que (X,τ^*) es regular. Antes de comenzar, es conveniente notar que la regularidad completa tiene una versión local: un punto $x \in X$ es completamente regular si, dado cualquier conjunto cerrado $C \subset X \setminus \{x\}$, existe una función continua $g : (X,\tau) \to [0,1]$, tal que $g(x) = 0$ y $g(C) = 1$. Esto último equivale a que, dada cualquier vecindad abierta (de hecho, cualquier vecindad abierta básica) de x, la misma función se anule en x y valga 1 fuera de la vecindad. Obviamente, de acuerdo con la versión local mencionada, un espacio es completamente regular si y solo si cada uno de sus puntos es completamente regular.

Sean $x \in X$ y V^* una τ^*-vecindad de x; buscamos una función continua $f : (X,\tau^*) \to [0,1]$, con $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V^*) = 1$. Si $x \in X \setminus A$, entonces V^* es también τ-vecindad; como (X,τ) es completamente regular y $\tau \subset \tau^*$, se tiene la función deseada. Supongamos que $x \in A$; sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $V^* = V \cap A$, siendo V una τ-vecindad de x. Puesto que (X,τ^*) es regular, x tiene una τ^*-vecindad abierta básica $U \cap A$, tal que $cl_*(U \cap A) \subset V \cap A$. Se sabe que $(A,\tau|_A)$ hereda la regularidad completa de (X,τ), y por 1.1.2(c), $(A,\tau^*|_A)$ es completamente regular. Consecuentemente, existe una función $g : (A,\tau^*|_A) \to [0,1]$, tal que $g(x) = 0$ y $g(A \setminus [U \cap A]) = 1$. Ahora, definimos la función f de la siguiente manera: $f(y) = g(y)$, para $y \in A$; $f(y) = 1$, para $y \notin A$. Es claro que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V^*) = 1$; aparte, f es continua ya que $cl_*(U \cap A) \subset A$. Por lo anterior, (X,τ^*) es completamente regular. La necesidad es obvia. ■

Teorema 1.1.15. *[2] Sean (X,τ) un espacio normal y $A \subset X$. Para que $(X,\tau(A))$ sea normal, es necesario y suficiente que $(X \setminus A, \tau|_{X\setminus A})$ sea normal y $(X,\tau(A))$ sea regular.*

Demostración. Sean E, F conjuntos cerrados ajenos en (X,τ^*) y

$$E_1 = E \cap (cl\,(A) \setminus A), \quad F_1 = F \cap (cl\,(A) \setminus A).$$

Por regularidad de (X,τ), el conjunto $cl\,(A) \setminus A$ es cerrado en τ. Según el Teorema 1.1.2 (h), existen P, Q cerrados en (X,τ), tales que $E = P \cup (Q \cap A^c)$. De acuerdo con lo anterior, E_1 y F_1 son cerrados en (X,τ); luego, la normalidad de (X,τ) asegura la existencia de $U, V \in \tau$, tales que

$$U \cap V = \varnothing, \quad E_1 \subset U, \quad F_1 \subset V.$$

Afirmamos que $E_1 \cap cl(F) = F_1 \cap cl(E) = \varnothing$. Puesto que $F = cl_*(F)$, el Teorema 1.1.2(b) implica que $F \supset cl(F) \cap A^c$, entonces, $E_1 \cap F \supset E_1 \cap cl(F) \cap A^c = E_1 \cap cl(F)$; pero como $E_1 \cap F = \varnothing$, resulta que $E_1 \cap cl(F) = \varnothing$.

Dado que $E_1 \cap cl(F)$ y $F_1 \cap cl(E)$ son vacíos, la normalidad también permite añadir una condición más a las que ya satisfacen los mismos U y V:

$$cl(U) \cap cl(V) = cl(U) \cap F = cl(V) \cap E = \varnothing.$$

Consideremos ahora los conjuntos cerrados (en $(X \smallsetminus A, \tau_{X \smallsetminus A})$) y disjuntos

$$E_2 = E \cap A^c \cap U^c, \quad F_2 = F \cap A^c \cap V^c.$$

Debido a la normalidad de $(X \smallsetminus A, \tau_{X \smallsetminus A})$, existen $U_1, V_1 \in \tau$, con

$$E_2 \subset U_1 \cap A^c, \quad F_2 \subset V_1 \cap A^c, \quad (U_1 \smallsetminus A) \cap (V_1 \smallsetminus A) = \varnothing.$$

Directamente de las definiciones de E_2 y y E_1, se infiere que $E_2 \cap cl(A) = E_1 \cap U^c = \varnothing$ (pues $E_! \subset U$); entonces, $E_2 \subset cl(A)^c$. Por consiguiente, lo anterior puede ser reemplazado por

$$E_2 \subset U_1 \cap cl(A)^c, \quad F_2 \subset V_1 \cap cl(A)^c, \quad (U_1 \smallsetminus cl(A)) \cap (V_1 \smallsetminus cl(A)) = \varnothing.$$

Es evidente que los conjuntos abiertos (en (X, τ)), definidos como

$$U_2 = U \cup [U_1 \smallsetminus (cl(A) \cup cl(V))], \quad V_2 = V \cup [V_1 \smallsetminus (cl(A) \cup cl(U))]$$

son disjuntos. Por la manera en que fueron elegidos U y V, $E \smallsetminus A \subset cl(V)^c$; luego, es posible dividir a $E \smallsetminus A$ en dos partes:

$$E \smallsetminus A = \big[(E \smallsetminus A) \cap U\big] \cup \big[(E \smallsetminus A) \cap (cl(V)^c \smallsetminus U)\big].$$

Es claro que la primera parte se encuentra en U_2; asimismo, la definición de E_2 implica que la segunda parte es precisamente $E_2 \cap cl(V)^c$; pero por las propiedades de U_1, se tiene que $E_2 \cap cl(V)^c \subset U_1 \smallsetminus (cl(A) \cup cl(V))$. Consecuentemente,

$$E \smallsetminus A \subset U_2, \quad F \smallsetminus A \subset V_2.$$

Sean

$$E_3 = E \smallsetminus U_2, \quad F_3 = F \smallsetminus V_2;$$

es obvio que son cerrados disjuntos y que $cl(U) \cup E_3$ y $cl(V) \cup F_3$ también lo son. Una vez más, existen M, $N \in \tau$, ajenos, tales que

$$M \supset cl(U) \cup E_3, \quad N \supset cl(V) \cup F_3.$$

En virtud de esto último,

$$U_3 = U_2 \cup (M \cap A), \quad V_3 = V_2 \cup (N \cap A),$$

son abiertos de (X, τ^*) y disjuntos, pues $U \cap N = \varnothing = V \cap M$, debido a que $U \subset M$ y $V \subset N$. Finalmente, es fácil probar que $M \cap A \supset (E \cap A) \smallsetminus U_2$; entonces, $E \subset U_3$ y $F \subset V_3$, lo cual prueba que (X, τ^*) es normal. ■

1.1.4. Preservación de conexidad

Continuamos ahora con la preservación de conexidad bajo extensiones simples. El primer resultado caracteriza las expansiones simples conexas.

Teorema 1.1.16. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces, $(X,\tau(A))$ es conexo si y solo si no existe un conjunto $C \subset X$, no vacío ni total, con las siguientes propiedades:*

(a) $C \cap A$ pertenece a $\tau|_A$;

(b) $(X \setminus C) \cap A$ pertenece a $\tau|_A$;

(c) $C \cap (X \setminus A)$ pertenece a $\tau|_{(X\setminus A)\cup(X\setminus C)}$;

(d) $(X \setminus C) \cap (X \setminus A)$ pertenece a $\tau|_{(X\setminus A)\cup C}$.

Demostración. Suficiencia. Supongamos que $(X,\tau(A))$ es disconexo; entonces, debe existir un conjunto C no vacío ni total, que es tanto abierto como cerrado en (X,τ). Por el Teorema 1.1.2(c), como $C\cap A \in \tau^*|_A$, pertenece a $\tau|_A$; igualmente, puesto que C es cerrado en (X,τ^*), tenemos que $(X\setminus C)\cap A \in \tau|_A$. Por ser C y su complemento elementos de τ^*, existen T, U, V, $W \in \tau$, tales que $C = T \cup (U \cap A)$ y $X \setminus C = V \cup (W \cap A)$. Claramente, $T \setminus A = C \setminus A$ y $T \setminus C = \varnothing$; luego, $C \cap (X \setminus A) = T \cap (A^c \cup C^c)$ es abierto en $\tau|_{(X\setminus A)\cup(X\setminus C)}$. Análogamente a lo anterior, $V \setminus A = (X \setminus C) \cap (X \setminus A)$ y $V \cap C = \varnothing$ (pues $V \subset X \setminus C$); entonces, $(X \setminus C) \cap (X \setminus A) = V \cap [(X \setminus A) \cup C]$ es abierto en $\tau|_{(X\setminus A)\cup C}$.

Necesidad. Consideremos ahora un conjunto no trivial C, que satisfaga las condiciones *(a)*-*(d)*. Por *(a)*, existe $U \in \tau$, tal que $C \cap A = U \cap A$; por *(c)*, hay un conjunto $T \in \tau$, que satisface $C \cap (X \setminus A) = T \cap [(X \setminus A) \cup (X \setminus C)]$. De unir ambas ecuaciones, resulta que $C = (U \cap A) \cup (T \setminus A) \cup (T \setminus C)$; esto implica que $T \subset C$, por lo cual $C \subset (U\cap A)\cup(T\setminus A)\cup(T\setminus C) \subset (U\cap A)\cup T \subset C$. Se sigue que $C = T \cup (U \cap A) \in \tau^*$.

Los incisos *(b)* y *(d)* implican la existencia de W, $V \in \tau$, tales que $(X \setminus C) \cap A = W \cap A$ y $(X \setminus C) \cap (X \setminus A) = V \cap [(X \setminus A) \cup C]$. De nuevo uniendo las igualdades, se obtiene $X \setminus C = (W \cap A) \cup (V \setminus A) \cup (V \cap C)$ y, por consiguiente, $V \subset X \setminus C$. Similarmente a como se hizo para ver que $C \in \tau^*$, se demuestra que $X \setminus C = V \cup (W \cap A)$. Finalmente, se concluye que C y su complemento forman una desconexión de (X,τ^*).

■

A continuación, se dan diversas condiciones suficientes para que, dada una topología conexa, una extensión simple de la misma sea también conexa.

Teorema 1.1.17. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico conexo; entonces,* $(X, \tau(A))$ *es conexo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

(a) *A es denso en X.*

(b) *A es denso en algún subconjunto $W \in \tau$.*

(c) *$X \setminus A \notin \tau$ y tanto $(A, \tau|_A)$ como $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$ son conexos.*

(d) *$(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$ es conexo y ninguna componente conexa de A es τ-cerrada.*

(e) *A es conexo y ninguna unión de componentes conexas de $X \setminus A$ es abierta.*

Demostración. (a) Supongamos que $(X, \tau(A))$ no es conexo; luego, existen U_1^*, $U_2^* \in \tau^*$, disjuntos no triviales, tales que $X = U_1^* \cup U_2^*$. Por pertenecer a τ^*, dichos conjuntos tienen las representaciones $U_1^* = U_1 \cup (V_1 \cap A)$ y $U_2^* = U_2 \cup (V_2 \cap A)$, con U_1, V_1, U_2, $V_2 \in \tau$. De las leyes distributivas, se sigue que U_1^* y U_2^* son disjuntos si y solo si $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap V_2 \cap A = U_2 \cap V_1 \cap A = V_1 \cap V_2 \cap A = \varnothing$; pero esto equivale a que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap V_2 = U_2 \cap V_1 = V_1 \cap V_2 = \varnothing$, pues como A es denso, $(U_1 \cap V_2) \cap A = \varnothing$ si y solo si $U_1 \cap V_2 = \varnothing$ (lo mismo ocurre con las otras intersecciones). Notemos ahora que $X \subset U_1^* \cup U_2^* \subset (U_1 \cup V_1) \cup (U_2 \cup V_2) \subset X$ y, por lo anterior, $U_1 \cup V_1$ y $U_2 \cup V_2$ deben ser abiertos disjuntos en (X, τ), negándose así la conexidad de dicho espacio.

(b) Sea $W \in \tau$, tal que A es denso en W. El conjunto definido como $B = A \cup (X \setminus cl\,(A))$ es denso en X; en efecto, $cl\,(B) = cl\,(A) \cup cl\,(X \setminus cl\,(A)) \supset cl\,(A) \cup (X \setminus cl\,(A)) = X$. Por otro lado, es evidente que $B \in \tau(A)$; además, debido a que A es denso en W, $A \subset W$ y $W = cl_W(A) = W \cap cl\,(A) \subset cl\,(A)$; entonces, $B \cap W = (A \cap W) \cup [(X \setminus cl\,(A)) \cap W] = A$. De lo anterior se concluye que $\tau(A) = \tau(B)$; pero B es denso en X y, por el inciso *(a)*, $\tau(B)$ (y en consecuencia $\tau(A)$) es conexa.

(c) Supongamos que existen en (X, τ^*) abiertos disjuntos U^*, $V^* \in \tau^* \setminus \{\varnothing, X\}$, cuya unión es X. Afirmamos que uno de los dos (A o A^c) debe intersecar tanto a U^* como a V^*. Para probar la afirmación, notemos que ninguno de ellos puede coincidir con A o con su complemento; en efecto, $A = U^*$ si y solo si $A^c = V^*$ y, entonces, $A^c \in \tau(A)$, lo cual implicaría que $A^c \in \tau$. Por lo tanto, si $A \subset U^*$, entonces $A \subsetneq U^*$ y $A^c \supsetneq V^*$, de modo que U^* interseca a A y a A^c. Repitiendo el mismo argumento para las otras posibilidades ($U^* \subset X \setminus A$, $V^* \subset X \setminus A$, $V^* \subset A$) se demuestra la afirmación. Como U^* y V^* forman una partición, se tiene que $A = (A \cap U^*) \cup (A \cap V^*)$ y $A^c = (A^c \cap U^*) \cup (A^c \cap V^*)$. Por el Teorema 2.1*(c)*, $A \cap U^*,\ A \cap V^* \in \tau|_A$ y $A^c \cap U^*,\ A^c \cap V^* \in \tau|_{A^c}$. De acuerdo con la afirmación que probamos, puesto que $(X, \tau|_A)$ y $(X, \tau|_{A^c})$ son conexos, estas dos parejas de conjuntos ajenos (ya sea de $(A, \tau|_A)$ o de $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$) desconectarían A o A^c, pues al menos para uno de ellos, la correspondiente pareja de abiertos disjuntos no está constituida por $\varnothing$ y X.

(d) Si $(X, \tau(A))$ no es conexo, existe C, no vacío ni total, τ^*-abierto-cerrado. Por el Teorema 1.1.2(c), si $C \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, entonces $C \supset X \setminus A$; de otro modo, $C \cap (X \setminus A)$ es abierto-cerrado en $(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A})$. De manera que $X \setminus A \subset X \setminus C$ o $X \setminus A \subset C$, o, equivalentemente, $C \subset A$ o $X \setminus C \subset A$. De nuevo, por el Teorema 1.1.2(c), si $C \subset A$, resulta que C es τ-abierto-cerrado en A, así que contiene una componente de A, a la que llamaremos Q. Claramente, Q es cerrada en A, o sea que $Q = F \cap A$ para algún F τ-cerrado. Puesto que $C \subset A$ y C es τ^*-cerrado, el Teorema 1.1.2(h) implica que C es τ-cerrado; en consecuencia, $Q = F \cap A = F \cap A \cap C = F \cap C$ es τ-cerrado en contraste con la hipótesis. El caso en que $X \setminus C \subset A$ es análogo. Se sigue que $(X, \tau(A))$ es conexo.

(e) La demostración es muy similar a la del inciso anterior, así que se omite.

■

1.2. Submaximalidad y filtros de conjuntos densos

Hasta ahora, hemos visto que, dependiendo de ciertas condiciones, la conexidad es preservada bajo extensiones simples. Hay extensiones que no son simples y preservan la conexidad; una de ellas es la extensión por medio de un ultrafiltro de conjuntos densos.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{D}$ la familia de todos los conjuntos densos en un espacio topológico (X, τ). Decimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-filtro si satisface las siguientes condiciones:

(a) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(b) $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

(c) $F_1 \in \mathcal{F}$ y $F_2 \supset F_1 \implies F_2 \in \mathcal{F}$.

Un $\mathcal{D}$-filtro maximal es llamado $\mathcal{D}$-ultrafiltro.

Los filtros de conjuntos densos comparten algunas características con los filtros.

Teorema 1.2.2. *Cada $\mathcal{D}$-ultrafiltro $\mathcal{F}$ es un filtro primo; es decir, si A, $B \in \mathcal{D}$ y $A \cup B \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}$-ultrafiltro. Supongamos que existen A, $B \in \mathcal{D}$, tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$, pero $A \notin \mathcal{F}$ y $B \notin \mathcal{F}$. Sean $\mathcal{B}_A = \{F \cap A \in \mathcal{D} : F \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{B}_B = \{F \cap B \in \mathcal{D} : F \in \mathcal{F}\}$. Puesto que $A \cup B \in \mathcal{F}$, tenemos que $A \in \mathcal{B}_A$ y $B \in \mathcal{B}_B$, así que $\mathcal{B}_A$ y $\mathcal{B}_B$ son no vacías. Claramente, ambas familias son cerradas bajo intersecciones finitas, por tener $\mathcal{F}$ dicha propiedad. Además, el conjunto vacío no pertenece al menos a alguna de ellas; en efecto, si hubiera dos conjuntos E, $F \in \mathcal{F}$, tales que $A \cap E = B \cap F = \varnothing$, habría un elemento del filtro $(E \cap F)$, que no intersecaría a $A \cup B$, contradiciéndose la hipótesis de que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Con lo anterior se ha probado que $\mathcal{B}_A$ o $\mathcal{B}_B$ es base de filtro (digamos que es $\mathcal{B}_A$); llamemos $\mathcal{G}$ al $\mathcal{D}$-filtro que genera. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \supset F \cap A \in \mathcal{G}$; en consecuencia, $F \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. La contención es propia porque $A \notin \mathcal{F}$, pero $A \in \mathcal{B}_A \subset \mathcal{G}$; de manera que $\mathcal{F}$ no es un $\mathcal{D}$-ultrafiltro y, así, se ha llegado a una contradicción. ∎

Un aspecto sencillo de las expansiones por medio de ultrafiltros de conjuntos densos, que será de gran utilidad, es descrito en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{G}$ un ultrafiltro de conjuntos densos. La topología generada por la subbase $\mathcal{S} = \tau \cup \mathcal{G}$, o sea $\tau(\mathcal{G})$, es $\mathcal{B} = \{D \cap U : D \in \mathcal{G},\ U \in \tau\}$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{D}$-filtro, $\mathcal{B}$ es precisamente la base generada por $\mathcal{S}$; para probar que es una topología, es suficiente demostrar que es cerrada bajo uniones arbitrarias. Para un elemento arbitrario $W \in \tau(\mathcal{G})$, sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha \in \tau : \alpha \in A\}$ y $\mathcal{F} = \{F_\alpha \in \mathcal{G} : \alpha \in A\}$, tales que $W = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap F_\alpha)$.

Sea $F = W \cup (\bigcap_{\alpha \in A}[X \smallsetminus U_\alpha])$. Afirmamos que F es denso en τ. Dado $V \in \tau$, si para todo $\alpha \in A$, $V \cap U_\alpha = \varnothing$, resulta que $V \subset F$; si $V \cap U_{\alpha'} \neq \varnothing$ para algún $\alpha' \in A$, como los F_β son τ-densos, $(V \cap U_{\alpha'}) \cap F_\beta \neq \varnothing$ para todo $\beta \in A$. Con esto se ha probado la afirmación. Si hubiera algún $E \in \mathcal{G}$ con $E \cap F = \varnothing$, se tendría que $E \cap U_\alpha \cap F_\alpha = \varnothing$, lo cual es imposible porque $E \cap F_\alpha \in \mathcal{G}$; luego $F \in \mathcal{G}$. Evidentemente, $W = F \cap (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \in \mathcal{B}$. ■

Con el resultado anterior, procedemos a mostrar que la expansión de una topología conexa por medio de un ultrafiltro de conjuntos densos es conexa.

Teorema 1.2.4. *Sean (X, τ) un espacio conexo y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}$-ultrafiltro; entonces, $(X, \tau(\mathcal{F}))$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\tau(\mathcal{F})$ es disconexa; entonces, existen U^*, $V^* \in \tau(\mathcal{F})$, disjuntos, no vacíos, tales que $X = U^* \cup V^*$. Por el Teorema 1.2.3, existen S, $T \in \tau$ y G, $H \in \mathcal{G}$, tales que $U^* = S \cap G$ y $V^* = T \cap H$. Lo anterior exige que $(S \cap T) \cap (G \cap H)$ sea vacío, pero $G \cap H$ es denso en X porque G, $H \in \mathcal{G}$; luego, $S \cap T = \varnothing$. Por otro lado, $U^* \subset S$ y $V^* \subset T$; de modo que $X \subset S \cup T$. Por lo tanto, S y T desconectan a (X, τ). Se sigue que $(X, \tau(\mathcal{F}))$ es conexo. ■

Definición 1.2.5. Un espacio topológico (X, τ) es submaximal si cada subconjunto denso de X es abierto.

Hay diversas caracterizaciones de la submaximalidad; una de las más importantes es la siguiente:

Teorema 1.2.6. *Un espacio (X, τ) es submaximal si y solo si cada subconjunto de X es localmente cerrado.*

Demostración. Necesidad. Dado cualquier conjunto $A \subset X$, sea $B = A \cup (X \smallsetminus cl\,(A))$. Como $cl\,(B) \supset cl\,(A) \cup (X \smallsetminus cl\,(A))$, B es denso y, por lo tanto, abierto; entonces, $A = B \cap cl\,(A)$ es intersección de un abierto y un cerrado.

Suficiencia. Si D es denso y abierto en su cerradura, $cl\,(D) \smallsetminus D = X \smallsetminus D$ es cerrado; luego D es abierto. ■

Como se dijo en la Introducción, la submaximalidad está vinculada con los filtros de conjuntos densos.

Teorema 1.2.7. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}$-ultrafiltro en X; entonces, $\tau(\mathcal{F})$ es submaximal. En particular, debido al Teorema 1.2.4, toda topología conexa puede ser expandida a una topología submaximal conexa.*

Demostración. Si D denso en $(X, \tau(\mathcal{F}))$ y $D \notin \mathcal{F}$, obsérvese que D interseca a todos los miembros de $\mathcal{F}$; luego, existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $F \cap D$ no es denso o, de otro modo, D pertenecería a $\mathcal{F}$. Sin embargo, $F \cap D$ es la intersección de un conjunto denso y un conjunto denso y abierto; así que es denso. Esto es contradictorio y, por tanto, $D \in \tau(\mathcal{F})$. ∎

Definición 1.2.8. Llamamos submaximalización de τ a cualquier expansión de la forma $\tau(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{D}$-ultrafiltro.

Obviamente, el teorema anterior dice que toda submaximalización es submaximal. Aunque toda topología submaximal es, trivialmente, una submaximalización de sí misma (basta añadir todos los conjuntos densos), no toda topología submaximal es una submaximalización de una topología estrictamente más débil.

Capítulo 2

Conexidad Maximal

2.1. Introducción

En el capítulo anterior, se demostraron algunos teoremas sobre la preservación de conexidad bajo expansiones simples. Asimismo, se introdujeron los conceptos de topología submaximal y submaximalización, que serán cruciales en este capítulo. Ahora se tratarán las topologías maximales conexas y se exhibirá uno de los pocos ejemplos que, hasta ahora, han sido construidos.

Definición 2.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo; se dice que τ es una topología maximal conexa si no está contenida propiamente en ninguna otra topología conexa de X. Naturalmente, lo anterior equivale a que, dada cualquier topología σ de X, si $\tau \subsetneq \sigma$, entonces σ es disconexa.

Nótese que, si una topología τ de un espacio X es conexa, pero no maximal conexa, existe un subconjunto A de X, tal que $A \notin \tau$ y $\tau(A)$ es conexa.

Una de las implicaciones más sencillas de que una topología sea maximal conexa es que tal topología es submaximal.

Teorema 2.1.2. *Todo espacio maximal conexo es submaximal.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio maximal conexo; si A es denso en X, por el Teorema 1.1.17(a), $\tau(A)$ debe ser una topología conexa, pero como τ es maximal, $\tau(A) = \tau$; se sigue que $A \in \tau$. ■

Aunque una submaximalización de un espacio conexo es una expansión conexa del mismo (Teorema 1.2.7) y los espacios maximales conexos son submaximales, no todo espacio conexo tiene una expansión maximal conexa (véase [12]).

Definición 2.1.3. Un espacio conexo (X, τ) es esencialmente conexo si todos sus subconjuntos conexos siguen siendo conexos en cualquier topología conexa más fina que τ; es decir, si los subespacios conexos de τ permanecen conexos en cualquier expansión conexa de τ.

Si (X, τ) es maximal conexo, la única topología conexa más fina que τ es ella misma; entonces, los conexos de (X, τ) son también conexos en cualquier topología conexa más fina que τ. Con esto se ha demostrado lo siguiente:

Teorema 2.1.4. *Todo espacio maximal conexo es esencialmente conexo.*

A continuación veremos un resultado sobre conexidad y expansiones simples, con la idea de establecer condiciones suficientes para que la conexidad esencial y la conexidad maximal sean heredadas a subespacios.

Teorema 2.1.5. *Sean (X, τ) un espacio conexo y S un subespacio conexo de X, ya sea abierto o cerrado. Si $(S, \tau|_S(A))$ es conexo para algún $A \subset S$, entonces $(X, \tau(A))$ es conexo.*

Demostración. En primer lugar, notemos que, si K^* es $\tau(A)$-abierto-cerrado y $K^* \cap S \neq \varnothing$, entonces $S \subset K^*$; de otro modo, $K^* \cap S$ desconectaría a $(S, \tau|_S(A))$ (1.1.2(g)). Se sigue que sólo hay dos opciones: $K^* \supset S$ o $K^* \cap S = \varnothing$.

Supongamos que $S \in \tau$ y $(X, \tau(A))$ no es conexo; entonces, hay un conjunto $G^* \notin \{\varnothing, X\}$ que es abierto y cerrado en dicho espacio. Si G^* no interseca a S (si lo interseca, usamos su complemento), entonces $G^* \subset S^c \subset A^c$ y, así, $G^* \in \tau$. Ya que G^* también es $\tau(A)$-cerrado, podemos escribirlo como $Y \cup (Z \cap A^c)$ (con Y y Z τ-cerrados) y, por ser subconjunto de A^c, tenemos que $G^* = Z \cap A^c$; pero $G^* = G^* \cap S^c = Z \cap S^c$ es τ-cerrado. Con esto se prueba el teorema para S abierto.

Para el caso en que $S^c \in \tau$, supongamos que E^* y F^* son cerrados complementarios y no vacíos en $(X, \tau(A))$; de manera que existen conjuntos τ-cerrados F, G, P, Q, tales que $E^* = F \cup (G \cap A^c)$ y $F^* = P \cup (Q \cap A^c)$. Podemos dar por hecho que $E^* \supset S$, lo cual equivale a que $E^* = E^* \cup S$; luego, $E^* = (F \cup S) \cup (G \cap A^c)$ y, por tanto, $E^* = S \cup F \cup G$ es cerrado en (X, τ).

Por ser E^* y F^* complementarios, $F^* \subset S^c \subset A^c$; así que podemos escribir $F^* = Q \cap A^c$ y $F^* = Q \setminus A = Q \setminus S$. Puesto que E^* es τ-cerrado, $Q \setminus S \in \tau$. Esto significa que $int_\tau(Q \setminus S) = int(Q) \cap S^c = Q \cap S^c$; es decir, Q es τ-abierto en $S^c \in \tau$ y, por tanto, $Q \in \tau$. No obstante, Q es τ-cerrado y (X, τ) es conexo. ∎

Este último resultado puede ser fácilmente generalizado:

Teorema 2.1.6. *Sean* (X,τ) *un espacio conexo y* S *un subespacio conexo de* X*. Si* $(S,\tau|_S(A))$ *es conexo para algún* $A \subset S$*, entonces* $(X,\tau(A))$ *es conexo.*

Demostración. Dado que $(S,\tau(A)|_S)$ es conexo, $\left(cl_{\tau(A)}(S),\tau(A)|_{cl_{\tau(A)}(S)}\right)$ es conexo. Pero de acuerdo con el Teorema 1.1.2(b), $cl_{\tau(A)}(S) = cl_\tau(S)$, así que $\left(cl_\tau(S),\tau|_{cl_\tau(S)}(A)\right)$ es un subespacio conexo y τ-cerrado, de (X,τ). Por el último teorema, esto implica que $(X,\tau(A))$ es conexo. ∎

El Teorema 2.1.6 permite demostrar que la conexidad maximal y la conexidad esencial son heredadas a subespacios conexos.

Teorema 2.1.7. *Todo subespacio conexo de un espacio maximal conexo es maximal conexo.*

Demostración. Sean (X,τ) un espacio maximal conexo y $S \subset X$ un subespacio conexo. Si S no es maximal conexo, existe $A \subset S$ tal que $(S,\tau|_S(A))$ es conexo y $\tau|_S(A) \supsetneq \tau|_S$, de lo cual se deduce que $A \notin \tau$ y, por tanto, $\tau(A) \supsetneq \tau$. En virtud del Teorema 2.1.6, $(X,\tau(A))$ es conexo, contradiciendo la conexidad maximal de (X,τ). ∎

Teorema 2.1.8. *Cualquier subespacio conexo de un espacio esencialmente conexo es esencialmente conexo.*

Demostración. Sea (X,τ) esencialmente conexo y supongamos que un subespacio conexo $C \subset X$ no lo es; o sea que existe $\sigma \supset \tau|_C$, tal que $K \subset C$ es $(C,\tau|_C)$-conexo y (C,σ)-disconexo. Sea $\{K_1,K_2\}$ una desconexión de (K,σ).

En caso de que C sea abierto, existen subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de C y, por tanto, abiertos en X, tales que $U_1 \cap K = K_1$ y $U_2 \cap K = K_2$. Consideramos la topología $\tau(U_1,U_2) \subseteq \sigma$.

Evidentemente, $(K,\tau(U_1,U_2)|_K)$ es disconexo. Por otra parte, $(C,\tau(U_1,U_2)|_C)$ es conexo: $C \in \tau \implies \tau(U_1,U_2)|_C \subset \sigma$. Entonces, si $\{A,B\}$ fuera una desconexión de $(X,\tau(U_1,U_2))$, podríamos dar por hecho que $C \subset A$. En consecuencia, $B \cap U_i = \varnothing$ y, como $B \in \tau(U_1,U_2)$, B es τ-abierto-cerrado. Con esto, se ha demostrado que $(X,\tau(U_1,U_2))$ es conexo.

Al ser $(X,\tau(U_1,U_2))$ conexo, la conexidad esencial de (X,τ) implica que $(K,\tau(U_1,U_2)|_K)$ es conexo, en contraste con lo que antes se había probado. En conclusión, $(C,\tau|_C)$ es esencialmente conexo si C es abierto.

En caso de que C sea cerrado, existen subconjuntos cerrados D_1 y D_2 de C y, por tanto, cerrados en X, tales que $D_1 \cap K = K_1$ y $D_2 \cap K = K_2$. Consideramos la topología $\tau(X \setminus D_1, X \setminus D_2) \subseteq \sigma$.

Para C cerrado en (X, τ), $\tau(V_1, V_2)|_{X \setminus C} \subset \sigma$ y, así, $X \setminus C$ es $\tau(V_1, V_2)$-conexo y podemos suponer que $X \setminus C \subset A$. El resto del argumento sería similar al que ya se desarrolló; en vez de usar a U_i, habría que usar a V_i.

Si C es un subespacio conexo arbitrario de (X, τ), $cl_\tau(C)$ es conexo y, por tanto, esencialmente conexo; además, dado que C es τ-denso en $cl_\tau(C)$, $\big(cl_\tau(C), \tau|_{cl_\tau(C)}(C)\big)$ es conexo. Pero C es abierto en esta última expansión, misma que, en C, es indistinguible de τ. Consecuentemente, C es esencialmente conexo.

$\blacksquare$

Para el caso en que los espacios T_1 son esencialmente conexos, tenemos lo siguiente:

Teorema 2.1.9. *Sean (X, τ) un espacio T_1 esencialmente conexo y C, un subconjunto conexo de X que consta al menos de dos puntos. Entonces, $int(C)$ es denso en C.*

Demostración. Probemos primero que el interior de C es no vacío. Para esto, supongamos que $int(C) = \varnothing$; entonces, $X \setminus C$ es denso. Por el Teorema 1.2.7, existe una expansión submaximal conexa σ, de τ, y, naturalmente, $X \setminus C$ y todos sus superconjuntos (que también son densos), pertenecen a σ. Puesto que para todo $x \in C$, se satisface $\{x\} = [\{x\} \cup (X \setminus C)] \cap C$, el subespacio $(C, \sigma|_C)$ es discreto, contradiciéndose así la conexidad esencial de (X, τ).

Supongamos ahora que $I = int(C)$ no es denso en C; entonces, $C \setminus I$ tiene interior no vacío en la topología de subespacio. Por otro lado, dado que I es no vacío, $I \cup (X \setminus C)$ es denso en (X, τ); en efecto, su complemento es $cl\,(X \setminus C) \cap C \subset fr(C)$, que no contiene elemento alguno de τ. Recurriendo nuevamente al Teorema 1.2.7, podemos asegurar la existencia de una expansión submaximal conexa σ, en la que cada superconjunto de $I \cup (X \setminus C)$ es abierto. Con un argumento similar al empleado en la primera parte de esta demostración, se prueba que $C \setminus I$ es un subespacio discreto de (X, σ), con interior no vacío. Se sigue que C tiene un punto aislado. $\blacksquare$

2.2. Conexidad esencial y espacios ETDLO-conexos

La preservación de la conexidad bajo las intersecciones guarda una relación estrecha con la conexidad esencial. En particular, nos interesa dar condiciones necesarias y suficientes para que ciertos espacios (con otro tipo de conexidad) sean esencialmente conexos. Antes de demostrar resultados al respecto, introduciremos algunos conceptos.

Definición 2.2.1. Se dice que un espacio (X, τ) tiene la propiedad int2 si la intersección de cualquier par de subconjuntos conexos de X es conexa.

Definición 2.2.2. Un espacio (X, τ) tiene la propiedad int cuando las intersecciones arbitrarias de subconjuntos conexos de X son conexas. Estos espacios también han sido llamados irreduciblemente conexos [10].

Definición 2.2.3. Un subespacio Y, de (X, τ), es autónomo si, dado cualquier Z que satisfaga $Y \subsetneq Z \subset X$, existen U, V, subconjuntos cerrados disjuntos de Z, tales que $Y \subset U$, $U \cup V = Z$ y $V \neq \varnothing$.

Es sencillo demostrar que todo subespacio autónomo es cerrado. También es posible probar que $\{X \setminus Y : Y \text{ es autónomo en } (X, \tau)\}$ es una topología de X que, de hecho, es más débil que τ.

Definición 2.2.4. Llamamos $a_X(\tau)$ a la topología mencionada en el párrafo anterior. Para abreviar la notación, en lugar de escribir "$a_X(\tau)$-denso en X", escribiremos "$a(\tau)$-denso en X".

Los subespacios autónomos fueron introducidos y desarrollados en [16]. En el presente trabajo, serán utilizados únicamente como herramienta para la próxima demostración, así que nos limitaremos a enunciar los resultados requeridos de [17, 16].

Lema 2.2.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $B, C \subset X$. Si B es τ-conexo y $C \cap B$ es $a(\tau)$-denso en C, entonces, $B \cup C$ es conexo.*

Lema 2.2.6. *Sea Y un subespacio de un espacio conexo (X, τ). Si Y_1, $Y_2 \subset Y$ son disjuntos y $Y_1 \cup Y_2 = Y$, entonces, existen subespacios disjuntos X_1, X_2, de X, tales que $X_i \cap Y = Y_i$, $X_1 \cup X_2 = X$ y Y_i es $a(\tau)$-denso en X_i ($i = 1, 2$).*

Lema 2.2.7. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. El conjunto Y es $a(\tau)$-denso en X si y solo si cada subconjunto abierto-cerrado no vacío de X interseca a Y.*

Teorema 2.2.8. *Los espacios esencialmente conexos tienen la propiedad* int2.

Demostración. Supongamos que $A,\ B \subset X$ son conexos, pero $A \cap B$ no lo es. Por el Teorema 2.1.8, podemos considerar que $X = A \cup B$ sin pérdida de generalidad. Sea $\{Y_1,\ Y_2\}$ una desconexión de $Y = A \cap B$. De acuerdo con el Lema 2.2.6, existe una partición $\{B_1,\ B_2\}$, de B, tal que Y_j es $a(\tau)$-denso en B_j y $B_j \cap Y = Y_j$, para $j = 1,2$.

Sean $C_j = B_j \cup [cl_\tau(Y_j) \cap A]$ y σ, la topología generada por la subbase $\tau \cup \{(X \setminus C_1)\} \cup \{(X \setminus C_2)\}$. Es sencillo ver que $C_j \cap B = B_j$, luego, B es la unión de dos conjuntos $\sigma|_B$-cerrados ajenos y es, por tanto, σ-disconexo. No obstante, A es σ-conexo: es evidente que $B_j \cap A = Y_j = Y_j \cap A$, de manera que $C_j \cap A = cl_\tau(Y_j) \cap A$ es σ-cerrado en A.

Por otro lado, $C_1 \cap B_1 = B_1 \cap Y_1 = B_1$ y $C_2 \cap B_1 = B_1 \cap Y_2 = \varnothing$; así que σ y τ son indistinguibles en B_j, lo cual, por el Lema 2.2.7, implica que Y_j es $a(\sigma)$-denso en B_j. Así, es posible aplicar el Lema 2.2.5, siendo A el primer conjunto del enunciado y B_j, el segundo; entonces, $B_j \cap A$ es σ-conexo y, consecuentemente, $X = A \cup B_1 \cup B_2$ también es σ-conexo. Según lo anterior, σ es un refinamiento conexo de (X,τ), que desconecta a B; mas esto es imposible dada la conexidad esencial de (X,τ). ■

Como ya se dijo, estamos interesados en espacios con determinado tipo de conexidad. Los mismos están muy relacionados con los órdenes lineales, concretamente, con subespacios topológicos linealmente ordenados.

Definición 2.2.9. Sea (X,τ) un espacio topológico. Si existe un orden en X, cuya topología de intervalos abiertos coincide con τ, decimos que (X,τ) es un espacio topológico linealmente ordenado (ETLO). Si la topología inducida por el orden es más débil que τ, decimos que (X,τ) es un espacio topológico débilmente linealmente ordenado (ETDLO).

Definición 2.2.10. Un espacio (X,τ) es ETDLO-conexo si para cada par de puntos $a,\ b \in X$, existe un subespacio $E \subset X$, que es un ETDLO τ-conexo y contiene a ambos puntos. No hay que confundir un espacio ETDLO-conexo con un ETDLO conexo (es decir, con un ETDLO que es τ- conexo) [10].

En la Definición 2.2.10, es posible exigir a E con a y b como puntos extremos. Esta versión es más práctica y a continuación se muestra la equivalencia entre ambas.

Teorema 2.2.11. *Un espacio* (X,τ) *es ETDLO-conexo si y solo si para cualesquiera* a, $b \in X$, *existe un subespacio conexo* $E \subset X$, *que es un ETDLO y cuyos puntos extremos son* a *y* b.

Demostración. La suficiencia es inmediata de la definición de espacio ETDLO-conexo. Para la necesidad, sean a, $b \in X$ y $E \subset X$ un $ETDLO$ τ-conexo con a, $b \in E$. Sea σ la topología inducida por el orden y denotemos a E por $E = (-\infty, \infty)$. Es obvio que $F = [a, b]$ es un ETDLO σ-conexo y veremos que también es τ-conexo. Si $\{U, V\} \subset \tau_F$ fuera una desconexión de F con $a \in U$, entonces $(-\infty, a) \cup U$ sería τ-abierto-cerrado en E. ∎

Procedemos a dar las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio ETDLO-conexo sea esencialmente conexo.

Teorema 2.2.12. *[17] Sea* (X,τ) *un espacio ETDLO-conexo. Entonces,* (X,τ) *es esencialmente conexo si y solo si cada refinamiento conexo de* (X,τ) *es ETDLO-conexo y* (X,τ) *tiene la propiedad* int2.

Demostración. Si $\tau' \supset \tau$, entonces τ'-conexo implica τ-conexo; de modo que si τ es esencialmente conexa, τ' también lo es. De igual manera, si para dos puntos existe un subespacio τ-conexo que es ETDLO y los contiene, éste seguirá siendo conexo en τ'; es decir, cualquier refinamiento de τ es ETDLO-conexo. Esto, junto con el Teorema 2.2.8, demuestra la necesidad.

Con la finalidad de probar la suficiencia, supondremos que (X,τ) no es esencialmente conexo, pero cada uno de sus refinamientos conexos es un ETDLO-conexo. Mostraremos que, bajo dicha suposición, (X,τ) no tiene la propiedad int2.

Por hipótesis, para algún conjunto conexo $A \subset X$, existe una topología σ más fuerte que τ, en la cual A es disconexo. Tomemos $x, y \in A$, no pertenecientes a la misma componente conexa de A. Como (X,τ) es un ETDLO-conexo, por el Teorema 2.2.11, hay subespacio τ-conexo $(L, \tau|_L)$, ETDLO, tal que x e y son sus extremos. De la misma manera, hay un espacio $(M, \tau|_M)$, que es un ETDLO σ-conexo y también tiene como extremos a x y a y. Por ser L un ETDLO y A, τ-conexo, $L \subset A$. De otra manera, existiría $r \in L \setminus A$; luego, $L \cap A$ sería disconexo en la topología del orden (ya no sería un intervalo) y, por tanto, en τ, terminando así la demostración. A causa de lo anterior y de que

x e y pertenecen a distintas componentes de A, el conjunto L es σ-disconexo; entonces, $M \notin L$ (de lo contrario, x e y estarían en distintas componentes de L). A través de un argumento similar al que se usó para probar que $L \subset A$, se deduce que $L \subset M$. Sea $z \in M \setminus L$. Los segmentos $[x,z]_M$ y $[z,y]_M$ son σ-conexos y, consecuentemente, τ-conexos. Si $L \cap [x,z]_M$ o $L \cap [z,y]_M$ es disconexo, hemos terminado. En caso de los dos sean conexos, son ajenos (pues $z \notin L$) y son subintervalos de L, cuya unión es L. Dado que L y M tienen como extremos a x e y, $M \setminus L \subset (x,y)_M$ y L debe ser una unión de intervalos en el orden de M. Para encontrar el par de conjuntos conexos buscado, cuya intersección sea disconexa, basta considerar, sin pérdida de generalidad, que $[x,z]_M \cap L = [x,a)_L$ y $[z,y]_M \cap L = (a,y]_L$. Si definimos $B = [x,z]_M \cup \{a\}$ y $C = [z,y]_M$, por tratarse de segmentos de M, B y C son σ-conexos y, por ello, τ-conexos. Finalmente, $C \cap B = \{a,z\}$ no es τ-conexo y (X,τ) no tiene la propiedad int2. ∎

No es difícil determinar cuándo un producto de espacios esencialmente conexos es esencialmente conexo:

Teorema 2.2.13. *Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios esencialmente conexos. El producto $X \times Y$ es esencialmente conexo si y solo si uno de ellos consta de un solo punto.*

Demostración. Supongamos que tanto X como Y tienen más de un punto; sean x, $x' \in X$ e y, $y' \in Y$ distintos. En caso de que ni $\{x,x'\}$ ni $\{y,y'\}$ sean discretos, a lo sumo uno de los puntos x y x' (respectivamente, y y y') constituye un conjunto abierto; sin pérdida de generalidad, podemos dar por hecho que $\{x\}$ y $\{y\}$ no son abiertos. Claramente, $S = \{x,x'\} \times \{y,y'\}$ es conexo; sea η la topología producto de $X \times Y$. Si $\{x'\}$ y $\{y'\}$ son abiertos en $\{x,x'\}$ y $\{y,y'\}$ respectivamente, $(x',y') \in \eta$ y $\{x'\} \times \{y,y'\}$ es un subespacio $\eta|_S$-conexo; pero es evidente que la expansión $\eta|_S(\{(x',y)\})$ es conexa y desconecta a $\{x'\} \times \{y,y'\}$. Esto contradice al Teorema 2.2.8 (si sólo $\{x'\}$ o $\{y'\}$ (o ninguno) es abierto en su correspondiente espacio, el argumento es muy similar).

En caso de que $\{x,x'\}$ o $\{y,y'\}$ sea discreto, los subespacios $A = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ y $B = (\{x'\} \times Y) \cup (X \times \{y'\})$ son conexos; pero es evidente que $A \cap B = \{(x,y'),(x',y)\}$ es disconexo y esto también contradice al Teorema 2.2.8.

∎

2.3. Caracterizaciones de espacios maximales conexos

Ya hemos demostrado que los subespacios maximales conexos son submaximales. Para la primera caracterización de espacios maximales conexos, además de los filtros de conjuntos densos, son importantes los filtros de conjuntos abiertos y los de conjuntos singulares. Primero hay que definir los filtros de conjuntos abiertos.

Definición 2.3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que una familia no vacía $\mathcal{F} \subset \tau$ es un filtro de conjuntos abiertos si:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
2. $F_1\ F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
3. $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \tau$ y $F_2 \supset F_1 \implies F_2 \in \mathcal{F}$.

Naturalmente, los ultrafiltros de conjuntos abiertos son los filtros de conjuntos abiertos maximales dentro de τ.

Un resultado conocido que usaremos posteriormente es el próximo.

Teorema 2.3.2. *Un filtro $\mathcal{F}$ de conjuntos abiertos es un ultrafiltro (de conjuntos abiertos) si y solo si $A \in \tau$ y $A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$ implican $A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que A es abierto y $A \notin \mathcal{F}$, pero $A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{B} = \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$. Por ser $\mathcal{F}$ un filtro de conjuntos abiertos, es evidente que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y, por hipótesis, $\varnothing \notin \mathcal{F}$; así que $\mathcal{B}$ es una base de filtro (de conjuntos abiertos). Llamemos $\mathcal{G}$ al filtro de conjuntos abiertos generado por $\mathcal{B}$. Es claro que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $A \in \mathcal{G}$, de modo que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro de conjuntos abiertos. Esto prueba la necesidad.

Para demostrar la suficiencia, supongamos que $\mathcal{G}$ es un filtro de conjuntos abiertos y $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Si $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, entonces $A \cap G \neq \varnothing$ para todo $G \in \mathcal{G}$ y, en particular, para todo $F \in \mathcal{F}$; de acuerdo con la hipótesis, $A \in \mathcal{F}$. Se sigue que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de conjuntos abiertos. ■

A partir de aquí, comenzaremos a utilizar el concepto de conjunto singular, que fue definido en [11]. En el presente trabajo, precisaremos de una versión más general [17].

Definición 2.3.3. Se dice que un subconjunto A de (X, τ) es singular en $p \in A$ si:

1. $A \smallsetminus \{p\} \in \tau$;

2. $p \in cl\,(A \cap C)$, para todo conjunto abierto-cerrado $C \neq \varnothing$ del subespacio $X \smallsetminus \{p\}$.

Llamaremos $\mathcal{P}_\tau(p)$ a la familia de todos los conjuntos τ-singulares en p.

Nótese que, a causa de la segunda condición, p debe ser punto de acumulación de A; si fuera punto aislado, tendría una vecindad que no intersecaría a $A \smallsetminus \{p\}$ y, así, tampoco a $A \cap C$. Se concluye que todo conjunto A, singular en p, es una vecindad abierta de p o es de la forma $A = W \cup \{p\}$, con $p \in fr(A)$ y $W \in \tau$.

Una vez definidos los filtros de conjuntos abiertos, podemos introducir los filtros de conjuntos singulares.

Definición 2.3.4. Sea (X, τ) un un espacio T_1. Para cada $p \in X$, denotamos por $\mathcal{F}_\tau(p)$ al filtro de conjuntos abiertos $\{U \in \tau : p \in U\}$.

Definición 2.3.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $p \in X$. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_\tau(p)$ es un filtro de conjuntos singulares en p si cumple con lo siguiente:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

2. $F_1\ F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

3. $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{P}_\tau(p)$ y $F_2 \supset F_1 \implies F_2 \in \mathcal{F}$.

Más adelante será útil el siguiente resultado.

Teorema 2.3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una base de $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-ultrafiltro si y solo si $A \in \mathcal{P}_\tau(p)$ y $A \cap F \in \mathcal{P}_\tau(p)$ para todo $F \in \mathcal{F}$ implican que $A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{P}_\tau(p)$ y $A \notin \mathcal{F}$, pero $A \cap F \in \mathcal{P}_\tau(p)$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{B} = \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$. Por ser $\mathcal{F}$ una base de $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro, es evidente que $\mathcal{B}$ también lo es; llamemos $\mathcal{G}$ al $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro generado por $\mathcal{B}$. Claramente $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $A \in \mathcal{G}$, de modo que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ no es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-ultrafiltro. Esto prueba la necesidad.

Para la suficiencia, supongamos que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-ultrafiltro y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro, tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Si $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, $A \cap G \neq \varnothing$ para todo $G \in \mathcal{G}$ y, en particular, para todo $F \in \mathcal{F}$; entonces, de acuerdo con la hipótesis, $A \in \mathcal{F}$. Se sigue que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-ultrafiltro. ∎

En los espacios T_1, la conexidad es equivalente a que el filtro de vecindades abiertas de cada punto del espacio (un filtro de conjuntos abiertos) sea una subfamilia del filtro de conjuntos singulares en dicho punto.

Lema 2.3.7. *Sea* (X, τ) *un espacio* T_1*; entonces,* $(X\tau)$ *es conexo si y solo si* $\mathcal{F}_\tau(p) \subset \mathcal{P}_\tau(p)$ *para todo* $p \in X$.

Demostración. Necesidad. Sean $A \in \mathcal{F}_\tau(p)$ y C un abierto-cerrado de $X \setminus \{p\}$; obviamente, $A \setminus \{p\} \in \tau$. Puesto que (X, τ) es conexo, p es punto de acumulación de C; luego, cualquier vecindad abierta V, de p, contiene puntos de C diferentes de p. Podemos suponer que $V \subset A$ (o tomar $V \cap A$); así, V tiene puntos de $C \cap A$ y, por lo tanto, $p \in cl\,(A \cap C)$. Se sigue que A es singular en p.

Suficiencia. Supongamos que (X, τ) es disconexo y, en consecuencia, existe A, abierto-cerrado no trivial en X, tal que $p \in A$; naturalmente, $A \in \mathcal{P}_\tau(p)$. Pero $A \notin \mathcal{F}_\tau(p)$ porque, junto con $X \setminus A$ (que es abierto-cerrado en $X \setminus \{p\}$), no cumple con la segunda condición de la Definición 2.3.3. ∎

El siguiente lema determina cuándo, en los espacios conexos y T_1, los filtros de vecindades son ultrafiltros de conjuntos singulares.

Lema 2.3.8. *Sea* (X, τ) *un espacio conexo* T_1*. Entonces,* $\mathcal{F}_\tau(p)$ *es un* $\mathcal{P}_\tau(p)$*-ultrafiltro si y solo si* $\mathcal{F}_\tau(p) = \mathcal{P}_\tau(p)$.

Demostración. Suficiencia. Por hipótesis, $\mathcal{P}_\tau(p)$ es cerrado bajo intersecciones finitas y bajo superconjuntos singulares; entonces, es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro y contiene a cualquier otro $\mathcal{P}_\tau(p)$-filtro.

Necesidad. Supongamos que existe $A \in \mathcal{P}_\tau(p) \setminus \mathcal{F}_\tau(p)$ y $\mathcal{F}_\tau(p)$ es un $\mathcal{P}_\tau(p)$-ultrafiltro; de manera que (Teorema 2.3.6) hay un $U \in \mathcal{F}_\tau(p)$, tal que $U \cap A \notin \mathcal{P}_\tau(p)$. Evidentemente, $(U \cap A) \setminus \{p\}$ es abierto y, a causa de lo anterior, existe C, abierto-cerrado en $X \setminus \{p\}$, tal que $p \notin cl[(U \cap A) \cap C] = E$; es decir, $p \in X \setminus E$. Entonces, $U \cap [X \setminus E] \in \mathcal{F}_\tau(p)$. Como A es singular en p, tenemos que $p \in cl(A \cap C)$ y cualquier vecindad de p (en particular U) interseca a $A \cap C$; o sea que $p \in E$, en contraste con lo que se acaba de probar. ∎

Una consecuencia del lema precedente es que las expansiones simples por medio de conjuntos singulares preservan la conexidad.

Teorema 2.3.9. *Sea (X,τ) un espacio T_1 conexo. Si A es τ-singular en p, $(X,\tau(A))$ es conexo.*

Demostración. Si $(X,\tau(A))$ fuera disconexo, existiría un conjunto $\tau(A)$-abierto-cerrado C, tal que $p \notin C$. Por lo anterior, es claro que $C \in \tau$. Además, $A \notin \tau \implies \tau(A) = \tau(\{p\})$, de manera que $\tau(A)|_{X \setminus \{p\}} = \tau|_{X \setminus \{p\}}$. Entonces, C es τ-cerrado en $X \setminus \{p\}$, o sea que $C = cl_\tau(C) \setminus \{p\}$. Ya que p es punto de τ-acumulación de C porque A es singular en p, se sigue que $cl_\tau(C) = C \cup \{p\}$ y C es τ-abierto-cerrado en $X \setminus \{p\}$. Como $p \in X \setminus C \in \tau(A)$, existen U, $V \in \tau$, tales que $p \in U \cup (V \cap A) \subset X \setminus C$. Debido a que $p \in cl_\tau C$, se tiene que $p \notin U$ (si no fuera así, p sería punto τ-interior de $X \setminus C$); entonces, $p \in A \cap V \subset X \setminus C$ y $(A \cap V) \cap C = \varnothing$. Esto significa que hay una τ-vecindad de p, que no interseca a $A \cap C$ y, por ende, A no es singular en p. ∎

En los espacios maximales conexos que son T_1, no hay diferencia entre una vecindad abierta y un conjunto singular.

Teorema 2.3.10. *Si (X,τ) es un espacio maximal conexo y T_1, entonces $\mathcal{F}_\tau(p) = \mathcal{P}_\tau(p)$ para todo $p \in X$.*

Demostración. Sea A singular en p; por el Teorema 2.3.9, $\tau(A)$ es conexa. Puesto que τ es maximal conexa, $\tau = \tau(A)$, o sea que $A \in \tau$ y $p \in A$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}_\tau(p)$ y $\mathcal{F}_\tau(p) \supset \mathcal{P}_\tau(p)$. El Lema 2.3.7 garantiza la igualdad. ∎

Con el Teorema 2.3.10, estamos en posición de da la primera caracterización de espacios maximales conexos. Lo haremos para espacios T_1, en términos de submaximalidad y conjuntos singulares.

Teorema 2.3.11. *[17] Un espacio T_1 (X,τ) es maximal conexo si y solo si*

1. *Es submaximal y*
2. *$\mathcal{F}_\tau(p) = \mathcal{P}_\tau(p)$ para todo $p \in X$.*

Demostración. La necesidad es consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1.2 y 2.3.10. Para probar la suficiencia, supondremos que (X,τ) es submaximal conexo, mas no maximal conexo y demostraremos que, para algún $p \in X$, se satisface $\mathcal{F}_\tau(p) \subsetneq \mathcal{P}_\tau(p)$. Puesto que (X,τ) no es maximal conexo, existe un conjunto $B \subset X$, que no es abierto y cuya expansión simple, $\tau(B)$, es conexa. Obviamente, $X \setminus B$ no es abierto y, por ser (X,τ) submaximal, $B \setminus int_\tau(B) \neq \varnothing$. Además de lo anterior, $C = B \cap \big[X \setminus cl_\tau\big(int_\tau(B)\big)\big] \in \tau(B)$, pero su τ-interior es vacío. Por la submaximalidad de τ (todo conjunto con interior vacío es cerrado), C es τ-cerrado y, por tanto, $\tau(B)$-cerrado. Dado que $\tau(B)$ es conexa, resulta que $C = \varnothing$ y así, $B \subset cl_\tau\big(int_\tau(B)\big)$. Ahora escogemos $p \in B \setminus int_\tau(B)$ y definimos $D = int_\tau(B) \cup \{p\}$. Como $B \setminus int_\tau(B)$ es cerrado y discreto (de nuevo por la submaximalidad de τ), existe una τ-vecindad abierta U de $\{p\}$, tal que $\{p\} = U \cap [B \setminus int_\tau(B)]$; de modo que $D = int_\tau(B) \cup (U \cap B)$ y $D \in \tau(B)$. Claramente, $D \notin \tau$ y por tanto, $\tau \subsetneq \tau(D) \subset \tau(B)$; así que $\tau(D)$ es una expansión propia conexa de τ. Esto implica (Lema 2.3.7) que D es $\tau(D)$-singular en p; entonces, $\tau(D)|_{X\setminus\{p\}} = \tau|_{X\setminus\{p\}}$. Finalmente, debido a que D es $\tau(D)$-singular en $\{p\}$ para cada F $\tau(D)$-abierto-cerrado en $X \setminus \{p\}$ (o, equivalentemente, para cada F τ-abierto-cerrado en $X \setminus \{p\}$), resulta que $p \in cl_{\tau(D)}(D \cap F) \subset cl\,(D \cap F)$. Se sigue que D es τ-singular en p, pero, por definición, $D \notin \mathcal{F}_\tau(p)$. ■

La última parte de esta sección corresponde a la segunda caracterización. Ésta es muy distinta a la primera porque, aunque también incluye la submaximalidad, no está relacionada (al menos explícitamente) con conjuntos singulares o filtros de conjuntos abiertos.

Definición 2.3.12. Un espacio conexo (X,τ) es casi maximal conexo si para todo conjunto regularmente abierto (igual al interior de su cerradura) $A \subset X$ y para cada $p \in fr(A)$, hay una vecindad V de p y conjunto $U \in \tau \setminus \{\varnothing, X\}$, tales que $A \cap V \cap U = \varnothing$ y $U \cup \{p\}$ es cerrado.

Como consecuencia inmediata de esta definición, se tiene que $p \notin U$, pues si así fuera, (X,τ) sería disconexo; además, $\{p\} \notin \tau$, ya que, de ser así, $U \cup \{p\}$ desconectaría a X. Será útil un lema sobre espacios submaximales.

Lema 2.3.13. *Sea (X,τ) un espacio submaximal. Sean U, V, W, tales que $V \subset W \subset U \subset cl\,(V)$. Entonces, $U \in \tau \implies W \in \tau$.*

Demostración. Puesto que V es abierto en su cerradura, existe $V' \in \tau$, tal que $V = V' \cap cl\,(V)$. Como $U \in \tau$ y $V \subset U \subset cl\,(V)$, se tiene que $V = U \cap V = V' \cap U \cap cl\,(V) = V' \cap U \in \tau$. Por submaximalidad, $cl\,(V) \setminus V$ es cerrado y discreto, al igual que cualquiera de sus subconjuntos, en particular, $U \setminus W$. Entonces, $W = U \setminus (U \setminus W)$ es la diferencia entre un conjunto abierto y uno cerrado. Se sigue que W es abierto. ■

Finalmente damos la caracterización anunciada.

Teorema 2.3.14. *[7] Un espacio (X,τ) es maximal conexo si y solo si es submaximal y casi maximal conexo.*

Demostración. Si (X,τ) es maximal conexo, es submaximal. Sean $A \subset X$ regularmente abierto y $p \in fr(A)$. Puesto que $p \in fr(A)$, tenemos que $A \cup \{p\} \notin \tau$; de manera que $\tau^* = \tau(A \cup \{p\})$ es disconexa. Dado cualquier conjunto U en (X,τ^*), abierto-cerrado no vacío ni total, él mismo o su complemento debe pertenecer a τ; en efecto, los elementos de $\tau^* \setminus \tau$ no pueden ser conjuntos complementarios porque son de la forma $W \cup \{p\}$, donde $W \in \tau$ y $p \notin W$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U \in \tau$ y $p \notin U$.

Como $U \in \tau$, no es cerrado en τ, pero sí en τ^*, así que existe $q \in cl_\tau(U) \setminus U$. Dicho punto sólo puede ser p; en otras palabras, $\{p\} = cl_\tau(U) \setminus cl_{\tau^*}(U)$. Esto es debido a que cualquier τ-vecindad de $z \neq p$ será una τ^*-vecindad del mismo; mientras que una τ^*-vecindad de p (por ejemplo, cualquier elemento de $\tau^* \setminus \tau$) no necesariamente es τ-vecindad. Por consiguiente, $U \cup \{p\}$ es τ-cerrado.

Ya que $p \notin cl_{\tau^*}(U)$, existe $W^* \in \tau^*$, tal que $W^* \cap U = \varnothing$; pero $W^* = W \cap (A \cup \{p\})$, con $W \in \tau$. Entonces, V es una τ-vecindad de p, que satisface $V \cap (A \cup \{p\}) \cap U = \varnothing$.

Para probar el recíproco, supondremos que τ es submaximal y casi maximal. Sean $\tau^* \supset \tau$ y $U \in \tau^* \setminus \tau$. La submaximalidad de τ implica que $int_\tau(U) \neq \varnothing$, pues de lo contrario, U sería τ-cerrado y desconectaría a (X,τ). Sea $V_1 = int_\tau(U)$; puesto que $U \setminus cl_\tau(V_1) \in \tau^*$ y, claramente, tiene τ-interior vacío, debe ser vacío para no desconectar a (X,τ^*). Entonces, $V_1 \subset U \subset cl_\tau(V_1)$. Sea $V = int_\tau\big(cl_\tau(V_1)\big)$; en virtud de que $cl_\tau\Big(int_\tau\big(cl_\tau(W)\big)\Big) = cl_\tau(W)$ para todo $W \in \tau$, tenemos $cl_\tau(V) = cl_\tau(V_1)$ y, consecuentemente, $V = int_\tau\big(cl_\tau(V)\big)$.

Si $U \subset V$, resultaría que $V_1 \subset U \subset V \subset cl_\tau(V_1)$ y, de acuerdo con el Lema 2.3.13, $U \in \tau$, contradiciendo la hipótesis; de manera que $U \nsubseteq V$. Si $U \cup V \in \tau$, $U \setminus int_\tau(U) = U \setminus V_1 \subset V$; pero como $V_1 \subset V$, esto significaría que $U \cup V_1 = U \subset V$ y, por ende, $U \cup V \in \tau^* \setminus \tau$.

Sea $W = U \cup V$. Puesto que $V_1 \subset U \subset cl_\tau(V_1)$ y $V_1 \subset V \subset cl_\tau(V_1)$, se satisface $V_1 \subset W \subset cl_\tau(V_1)$. De modo que podemos reemplazar a U por W o, equivalentemente, dar por hecho que $V \subset U$. Ahora, afirmamos que $U \subset cl_{\tau^*}(V)$. En caso contrario, $U \setminus cl_{\tau^*}(V) \in \tau^*$. Puesto que $U \subset cl_\tau(V)$, V es τ-denso en U; luego, $U \setminus V$ es cerrado y discreto en τ. Pero $U \setminus cl_{\tau^*}(V) \subset U \setminus V$ también sería τ-cerrado y, así, τ^*-cerrado, desconectando a (X,τ^*). En virtud de lo anterior, podemos escribir $V \subset U \subset cl_{\tau^*}(V)$. Con ello, si $p \in U \setminus V$, $V \cup \{p\}$ es τ^*-denso en U y $V \cup \{p\} \in \tau^*$.

A causa de que (X, τ) es casi maximal conexo, existen $U_2 \in \tau \setminus \{\varnothing, X\}$ y una vecindad U_1, de $\{p\}$, tales que $U_1 \cap V \cap U_2 = \varnothing$ y $U_2 \cap \{p\}$ es τ-cerrado. Pero como $p \notin U_2$, el conjunto $(V \cup \{p\}) \cap U_1$ es una τ^*-vecindad de p, que no interseca a U_2; luego, U_2 es cerrado en τ^*. Resulta que (X, τ^*) es disconexo y, por lo tanto, (X, τ) es maximal conexo. ■

2.4. Construcción de una topología maximal conexa

Denotaremos por ε a la topología euclidiana de los números reales y por I, al intervalo $[0,1]$; entonces, $(\mathbb{R}, \varepsilon)$ será la recta real con dicha topología. La construcción que se desarrollará en esta sección proviene de [11].

Teorema 2.4.1. *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro de conjuntos ε-densos. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $\mathcal{G}_x$ un ultrafiltro de conjuntos ε-singulares en x. Sea $\mathcal{G} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_x$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $\mathcal{P}_{\varepsilon(\mathcal{D})}(x)$-ultrafiltro $\mathcal{F}_x$ (un ultrafiltro de conjuntos $\varepsilon(\mathcal{D})$-singulares en x), tal que $\varepsilon(\mathcal{G})(\mathcal{D}) = \varepsilon(\mathcal{D})(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_x$.*

Demostración. Antes de comenzar, notemos que los conjuntos $\varepsilon(\mathcal{D})$-abierto-cerrados de $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$) son exactamente sus conjuntos ε-abierto-cerrados. Para demostrar esto, sean $I_{x-} = (-\infty, x)$ e $I_{x+} = (x, \infty)$, los conjuntos ε-abierto-cerrados de $(\mathbb{R}, \varepsilon|_{\mathbb{R} \setminus \{x\}})$. Si $I \notin \{I_{x-},\ I_{x+}\}$ es $\varepsilon(\mathcal{D})|_{\mathbb{R} \setminus \{x\}}$-abierto-cerrado, $I \cap I_{x-}$ también lo es, tanto en $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ como en I_{x-}. Entonces, por el Teorema 1.2.3, existen $U_1,\ U_2 \in \varepsilon$ y $D_1,\ D_2 \in \mathcal{D}$, tales que $\{U_1 \cap D_1, U_2 \cap D_2\}$ es una desconexión de I_{x-}. Como $\mathcal{D}$ es un filtro de conjuntos densos, esto implica que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ y, dado que $I_{x-} \subset U_1 \cup U_2$, el par $\{U_1, U_2\}$ es una desconexión de I_{x-}.

Para $x \in \mathbb{R}$, definimos $\mathcal{F}_x = \{(G \cap D) \cup \{x\} : G \in \mathcal{G}_x,\ D \in \mathcal{D}\}$. Nótese que $\mathcal{F}_x$ es una base de filtro, pues dados $(G_1 \cap D_1) \cup \{x\}$ y $(G_2 \cap D_2) \cup \{x\}$ en $\mathcal{F}_x$, la intersección de ambos contiene a $(G_1 \cap G_2) \cap (D_1 \cap D_2) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_x$. Aparte de ello, todos los elementos de $\mathcal{F}_x$ son ε-singulares en x. Esto es consecuencia de la ε-singularidad de los elementos de $\mathcal{G}_x$: si $(G \cap D) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_x$ y C es $\varepsilon|_{\mathbb{R} \setminus \{x\}}$-abierto-cerrado, dada una $\varepsilon(\mathcal{D})$-vecindad $V \cap E$ ($V \in \varepsilon$, $E \in \mathcal{D}$) de x, se cumple $G \cap C \cap V \neq \varnothing$. Ya que este último conjunto es abierto en ε y $D \cap E$

es ε-denso, $(G \cap D) \cap (V \cap E) \cap C \neq \varnothing$; es decir, $(G \cap D) \cup \{x\}$ es $\varepsilon(\mathcal{D})$-singular en x.

Sea H $\varepsilon(\mathcal{D})$ singular en x, tal que $H \cap F$ es $\varepsilon(\mathcal{D})$-singular en x. Entonces, $H \setminus \{x\} = W \cap E$, con $W \in \tau$ y $E \in \mathcal{D}$. Como H es $\varepsilon(\mathcal{D})$-singular en x, dada una $\varepsilon(\mathcal{D})$-vecindad abierta $U' \cap E'$ ($U' \in \varepsilon$ y $E' \in \mathcal{D}$) y un conjunto abierto-cerrado de $\mathbb{R} \setminus \{x\}$, $(W \cap E) \cap (U' \cap E') \cap C \neq \varnothing$. Por lo tanto, $W \cap U' \cap C \neq \varnothing$, o sea que $W \cup \{x\}$ es ε-singular en x. Sea $F \in \mathcal{F}$, $F = (G \cap D) \cup \{x\}$ ($G \in \mathcal{G}_x$ y $D \in \mathcal{D}$). Por la singularidad de $H \cap F$, para cualquier conjunto abierto cerrado C y cualquier $\varepsilon(\mathcal{D})$-vecindad $U' \cap E'$ de x, se tiene $(W \cap D) \cap (G \cap D) \cap (U' \cap E') \cap C \neq \varnothing$; así que $(W \cap G) \cap U' \cap C \neq \varnothing$ y $(W \cup \{x\} \cap G)$ es ε-singular para todo $G \in \mathcal{G}_x$. Se sigue que $W \cup \{X\} \in \mathcal{G}$ y, por el Teorema 2.3.6, $H \in \mathcal{F}$. Con lo anterior, se ha probado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de conjuntos $\varepsilon(\mathcal{D})$-singulares en x.

Las expansiones $\varepsilon(\mathcal{F})(\mathcal{D})$ y $\varepsilon(\mathcal{D})(\mathcal{F})$ son iguales, ya que los conjuntos abiertos básicos de ambas tienen la forma $V \cap D \cap F$, con $V \in \varepsilon$, $D \in \mathcal{D}$ y $F \in \mathcal{F}_x$ (para algún $x \in X$). La contención $\mathcal{G}_x \subset \mathcal{F}_x$ implica $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$; entonces, $\varepsilon(\mathcal{G})(\mathcal{D}) \subset \varepsilon(\mathcal{F})(\mathcal{D}) = \varepsilon(\mathcal{D})(\mathcal{F})$. Por pertenecer a $\mathcal{F}_x$, tenemos la igualdad $F = G \cap E$ para $G \in \mathcal{G}_x$ y $E \in \mathcal{D}$. Se tiene que $V \cap D \cap F = V \cap D \cap (G \cap E) = V \cap G \cap (D \cap E) \in \varepsilon(\mathcal{G})(\mathcal{D})$. Finalmente, $\varepsilon(\mathcal{D})(\mathcal{F}) \subset \varepsilon(\mathcal{G})(\mathcal{D})$ y, a causa de ello, se satisface la igualdad. ■

Definición 2.4.2. Un conjunto $A \subset (I, \varepsilon)$ es de Cantor si es homeomorfo al conjunto de Cantor; es decir, si es compacto, perfecto y totalmente disconexo [3].

Definición 2.4.3. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\sigma \supset \tau$. Se dice que σ es una expansión singular de τ si cada $x \in X$ tiene una base de σ-vecindades, la cual es, al mismo tiempo, una base de filtro de conjuntos τ-singulares en x. Si la base de σ-vecindades mencionada es un ultrafiltro de conjuntos τ-singulares en x, entonces σ es llamada expansión maximal singular de τ.

Teorema 2.4.4. *Sea (I, σ) una expansión singular de (I, ε). Si $\{A, B\}$ es una desconexión de (I, σ) y $C = I \setminus [int_\varepsilon(A) \cup int_\varepsilon(B)]$, entonces $(C, \varepsilon|_C)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Puesto que todo conjunto ε-singular contiene un conjunto ε-abierto, $int_\varepsilon(A)$ e $int_\varepsilon(B)$ son no vacíos; la conexidad de ε garantiza que $C \neq \varnothing$. Además, C es ε-totalmente disconexo. En efecto, si hubiera un intervalo abierto $K \subset C$, dado que σ es una expansión singular, existiría $U \in \tau$, tal que $U \subset K \cap A$; de manera que $C \cap int_\varepsilon(A) \neq \varnothing$.

Veremos que C es perfecto. Si $x \in C = cl_\varepsilon(A) \cap cl_\varepsilon(B)$ es un punto aislado, existe un intervalo $J = (a, b) \in \sigma$, tal que $J \setminus \{x\} \subset int_\varepsilon(A) \cup int_\varepsilon(B)$. No puede ser que $(a, x), (x, b) \subset int_\varepsilon(A)$, pues $J \setminus \{x\}$ no contendría puntos de $cl_\varepsilon(B)$ y, por tanto, $x \notin C$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \in A$, $(a, x) \subset int_\varepsilon(A)$ y $(x, b) \subset int_\varepsilon(B)$. Como δ es una expansión singular de ε, existe $W \in \varepsilon$, tal que $x \notin W$, $W \cup \{x\}$ es ε-singular en x y $W \cup \{x\} \subset A$. Entonces, $J \cap W \cap (x, 1] = W \cap (x, b) \neq \varnothing$, lo cual es contradictorio porque $(x, b) \subset B$. Se concluye que C es un conjunto de Cantor. ∎

Lema 2.4.5. *Sean $C \subset (I, \varepsilon)$ el Conjunto de Cantor y J, su complemento. Existe una función $f : J \to \{0, 1\}$, tal que $C \subset cl(f^{-1}(0)) \cap cl(f^{-1}(1))$. La función f no es única; si $\Phi(C)$ es la familia de todas las funciones con la propiedad de f, entonces $|\Phi| = 2^\omega = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Denotemos por D_n a la n-ésima etapa de construcción de C; por ejemplo, $D_0 = [0, 1]$, $D_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y así sucesivamente. Sea $x \in C$. Puesto que C tiene interior vacío en I, cualquier vecindad V de x tiene puntos de J y, entonces, de $I \setminus D_n$, para todo $n \geq N$, donde N es algún número natural determinado por x. Nótese que los $I \setminus D_n$ forman una sucesión creciente. Si ponemos $f(x) = 0$ para $x \in D_{2n} \setminus D_{2n-1}$ $(n > 0)$ y $f(x) = 1$ para $x \in D_{2n+1} \setminus D_{2n}$ $(n \geq 0)$, por lo anterior, resulta que V tiene puntos donde f vale cero y puntos donde f vale uno; es decir, $x \in cl(f^{-1}(0)) \cap cl(f^{-1}(1))$. Pudimos haber construido esta función de muchas maneras, evitando que existiera algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $f(D_n \setminus D_{n-1}) = 0$ o $f(D_n \setminus D_{n-1}) = 1$, para $n \geq k$. A partir de esto, es sencillo inferir que hay tantas de tales funciones como sucesiones de ceros y unos; luego, hay $2^\omega = \mathfrak{c}$ de dichas funciones. ∎

Teorema 2.4.6. *Existe una expansión de (I, ε), que es conexa y maximal singular.*

Demostración. Sea $\mathcal{J}$ la familia de todos los complementos de subconjuntos cerrados de Cantor de (I, ε). Cada $J \in \mathcal{J}$ es una unión numerable de intervalos abiertos. El conjunto J está determinado por los extremos de dichos intervalos y, entonces, $|\mathcal{J}| \leq c^\omega = c$, donde $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Denotamos por $\mathcal{C}(J, \{0, 1\})$ al conjunto de las funciones continuas de J a $\{0, 1\}$. Por el lema 2.4.5, a cada $J \in \mathcal{J}$ corresponden $2^\omega = \mathfrak{c}$ de tales funciones. Todo elemento de $\mathcal{C}(J, \{0, 1\})$ debe ser constante en cada uno de los intervalos abiertos cuya unión es J. Sea $\mathcal{B} = \{(J, f) : J \in \mathcal{J},\ f \in \mathcal{C}(J, \{0, 1\}) \text{ e } I \setminus J \subset cl_\varepsilon(f^{-1}(0)) \cap cl_\varepsilon(f^{-1}(1))\}$.

Sea $\prec$ un buen orden en $\mathcal{B}$, con el ordinal λ correspondiente a su cardinalidad: $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$. De igual manera, para cada conjunto de Cantor $C = I \smallsetminus J$, sea $\prec_J$ un buen orden, con el mínimo ordinal isomorfo a $\mathfrak{c}$: $C = \{x_\alpha : x_\alpha \in I \smallsetminus J, \alpha < \mathfrak{c}\}$.

A continuación, construimos una función $g : \mathcal{B} \to I$ por inducción transfinita. A $B_0 = (J, f)$ asignamos x_0, el primer elemento de $I \smallsetminus J$. Si $B_\alpha = (J', f')$ para $\alpha < \beta$, definimos $g(B_\alpha)$ como el primer elemento de $I \smallsetminus J'$ que no haya sido escogido anteriormente.

Puesto que $\beta < \mathfrak{c}$, podemos escoger a $g(B_\beta)$, como el primer elemento de $I \smallsetminus J'$, distinto de los $g(B_\alpha)$ $(\alpha < \beta)$, donde $B_\beta = (J'', f'')$.

Construiremos una expansión de (I, ε), asignando a cada $x \in I$ un ultrafiltro $\mathcal{G}_x$, de conjuntos singulares en x. Dicho ultrafiltro será arbitrario si $x \in I \smallsetminus g(B)$. Para $x \in g(B)$, uno de sus elementos deberá ser

$$G_x = \left[f^{-1}(0) \cap (0, x]\right] \cup \left[f^{-1}(1) \cap (x, 1]\right],$$

donde $x = g(B)$ y $B = (J, f)$. Por definición de $\mathcal{B}$, $G_x \neq \varnothing$. De esta manera, si $\mathcal{G} = \bigcup_{x \in I} \mathcal{G}_x$, la topología $\sigma = \varepsilon(\mathcal{G})$ es una expansión singular maximal de ε.

Procedemos a mostrar que σ es conexa. Por el Teorema 2.4.4, si existiera una desconexión $\{A, B\} \subset \sigma$, entonces $I \smallsetminus [int_\varepsilon(A) \cup int_\varepsilon(B)]$ sería un conjunto de Cantor en I. Consecuentemente, $int_\varepsilon(A) \cup int_\varepsilon(B) = J \in \mathcal{J}$ y habría una función f, tal que $int_\varepsilon(A) = f^{-1}(0)$ e $int_\varepsilon(B) = f^{-1}(1)$; o sea que podríamos asociar un elemento $B_\alpha = (J, f)$ a la desconexión. Pero $x_\alpha = g(B_\alpha) \notin J$ y, como los elementos de $\mathcal{G}_x$ fueron escogidos de modo que intersecaran a G_x, cada σ-vecindad de x interseca tanto a A como a B. Por lo tanto, no hay desconexiones de (I, σ). ■

Teorema 2.4.7. *Sea δ una expansión submaximal de (I, ε) y sea μ una expansión maximal singular de (I, δ). Entonces, si μ es conexa, es maximal conexa.*

Demostración. Supongamos que, para algún $A \subset I$, la expansión $\mu(A)$ es conexa. Veremos que $A \in \mu$; para eso basta probar que $A \cap fr_\mu(A) = \varnothing$. Sea $x \in A \cap fr_\mu(A)$; entonces, $x \in A \cap fr_\delta(A)$ y, como δ es submaximal, existe $W \in \delta$, tal que $W \cap fr_\delta(A) = \{x\}$. Afirmamos que, para todo $b > x$, se satisface $W \cap int_\delta(A) \cap (x, b) \neq \varnothing$. En efecto (considerando a $\delta|_{[0,b)}$), si dicha intersección fuera vacía, resultaría que $W \cap int_\delta(A) \subset [0, x]$; esto implicaría que $W \cap A \subset [0, x]$ y, como $x \in W \cap A \in \mu(A)$, el intervalo $[0, x]$ sería $\mu(A)$-abierto-cerrado.

Sean $\mathcal{U}_x$ el ultrafiltro de conjuntos δ-singulares que constituye una base de vecindades de x, y $V \in \mathcal{U}_x$. Haciendo uso del mismo argumento del párrafo anterior, poniendo $W \cap V$ en lugar de W, se concluye que $[(V \cap W) \cap int_\delta(A)] \cup \{x\} = [V \cap (W \cap int_\delta(A))] \cup \{x\}$ es δ-singular en x. O sea que la intersección de $[W \cap int_\delta(A)] \cup \{x\}$ con cualquier elemento de $\mathcal{U}_x$ es δ-singular en x y, por el Teorema 2.3.6, $W \cap int_\delta(A) \cup \{x\} \in \mathcal{U}_x$. Consecuentemente, $[W \cap int_\delta(A)] \cup \{x\} \in \mu$ y $x \notin fr_\mu(A)$; luego, $A \in \mu$.

■

Teorema 2.4.8. *Existe una topología μ en $\mathbb{R}$, que refina a ε y es maximal conexa.*

Demostración. Como I contiene una copia homeomorfa de $\mathbb{R}$, a causa del Teorema 2.1.7, es suficiente mostrar que existe un refinamiento maximal conexo de (I, ε). Por el Teorema 2.4.6, I tiene una topología conexa y maximal singular σ, que refina a ε. Sea μ una expansión submaximal de σ; en virtud del Teorema 2.4.1, μ puede ser vista como una expansión submaximal seguida de una expansión maximal singular. Finalmente, el Teorema 2.4.7 asegura que μ sea maximal conexa. ■

En cuanto a los productos, este resultado permite construir de manera sencilla una topología maximal conexa de $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, si consideramos dos espacios (X, τ) y (Y, σ) maximales conexos, según el Teorema 2.1.4, si $X \times Y$ fuera maximal conexo, sería esencialmente conexo; pero de acuerdo con el Teorema 2.2.13, X o Y debe tener un solo punto. Cabría preguntarse en un sentido más general si, dados (X, τ) y (Y, σ) tales que σ y τ tuvieran refinamientos maximales conexos, el producto $X \times Y$ tendría un refinamiento maximal conexo η.

Capítulo 3

Compacidad Tenue Maximal

3.1. Introducción

En este capítulo, se dan dos caracterizaciones sencillas de las topologías maximales compactas. Asimismo, se introduce la compacidad tenue para después determinar las topologías maximales tenuemente compactas, tanto en cualquier espacio topológico como en espacios regulares. La submaximalidad juega un papel importante al igual que en el capítulo anterior.

Comenzamos con un resultado sencillo sobre compacidad, que fue uno de los primeros conocidos.

Teorema 3.1.1. *Todo espacio compacto de Hausdorff es maximal compacto y minimal de Hausdorff.*

Demostración. Sea (X, τ) compacto T_2. Supongamos que hay una topología compacta $\sigma \supset \tau$; entonces, la función identidad $i : (X, \sigma) \to (X, \tau)$ es continua. Si E es σ-cerrado, es compacto e $i(E)$ también lo es; como τ es de Hausdorff, $i(E)$ es cerrado. En consecuencia, i es un homeomorfismo y $\sigma = \tau$.

Ahora, supongamos la existencia de una topología de Hausdorff $\rho \subset \tau$. La identidad $i : (X, \tau) \to (X, \rho)$ es continua y cualquier conjunto E τ-cerrado es compacto; de manera que $i(E)$ es compacto. Por ser (X, ρ) espacio de Hausdorff, $i(E)$ es ρ-cerrado. Se sigue que i es un homeomorfismo. ■

A continuación, presentamos dos caracterizaciones de espacios maximales compactos.

Teorema 3.1.2. *Un espacio (X,τ) es maximal compacto si y solo si sus subespacios compactos coinciden con sus subespacios cerrados; es decir, si y solo si todo subespacio compacto de (X,τ) es cerrado.*

Demostración. Necesidad. Sea (X,τ) un espacio maximal compacto; supongamos que existe un subespacio compacto $F \subset X$, que no es cerrado. En virtud del Teorema 1.1.8 (b), $(X \setminus F, \tau(X \setminus F))$ es compacto. Como F no es cerrado, $\tau(X \setminus F)$ es una expansión propia compacta de τ.

Suficiencia. Supongamos que (X,τ) no es maximal compacto; entonces, hay una topología compacta $\sigma \supsetneq \tau$. Puesto que la contención es propia, podemos escoger $E \subset X$, σ-cerrado, mas no τ-cerrado. Por ser E cerrado en el espacio compacto (X,σ), el subespacio $(E,\sigma|_E)$ es compacto y en consecuencia $(E,\tau|_E)$ es compacto. O sea que E es un subespacio compacto de (X,τ), que no es τ-cerrado. ∎

Teorema 3.1.3. *Sea (X,τ) un espacio compacto. (X,τ) es maximal compacto si y solo si cualquier biyección continua $f : Y \to X$ es un homeomorfismo para todo (Y,σ) compacto.*

Demostración. Si (X,σ) es compacto y $\sigma \supset \tau$, la función identidad $i : (X,\sigma) \to (X,\tau)$, que es una biyección continua, es un homeomorfismo; luego $\tau = \sigma$.

Consideremos una biyección continua $f : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$; sea g su inversa. Por compacidad de (Y,σ), si $C \subset Y$ es σ-cerrado, es σ-compacto; luego $f(C)$ es un subespacio τ-compacto de X y, por el teorema anterior, es τ-cerrado. Pero $f(C) = g^{-1}(C)$; entonces, g es continua y f es un homeomorfismo. ∎

La compacidad tenue es una propiedad más débil que la compacidad:

Definición 3.1.4. Un espacio (X,τ) es tenuemente compacto si cada familia localmente finita $\mathcal{U} \subset \tau \setminus \{\varnothing\}$ es finita.

Normalmente, es más cómodo trabajar con la siguiente caracterización; su obvia demostración se omite.

Teorema 3.1.5. *Un espacio (X,τ) es tenuemente compacto si y solo si cada familia infinita $\mathcal{U}$, de conjuntos abiertos no vacíos de X, tiene un punto de acumulación; o sea que existe $x \in X$, tal que cada una de sus vecindades interseca a una infinidad de miembros de $\mathcal{U}$.*

Además del teorema precedente, hay diversas equivalencias; varias de ellas se enuncian y demuestran a continuación.

Teorema 3.1.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) *es tenuemente compacto.*

(2) Si $\mathcal{U} \subset \tau \setminus \{\varnothing\}$ *es una familia disjunta y localmente finita, entonces es finita.*

(3) Si $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ *es una familia cuyos miembros no son vacíos y* $U_{n+1} \subset U_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl\,(U_n) \neq \varnothing$.

(4) Toda cubierta abierta numerable de (X, τ) *contiene una subfamilia finita cuya unión es densa.*

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Es obvio.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Sea $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia anidada de conjuntos abiertos no vacíos. Sean $V_n = U_n \setminus cl\,(U_{n+1})$ y $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N},\ V_n \neq \varnothing\}$. En caso de que $V_n \neq \varnothing$ sólo para una cantidad finita de valores de $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $V_n = \varnothing$ para $n \geq n_0$. Resulta que $n \geq n_0 \implies cl\,(U_n) \supset U_{n_0}$ y, así, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl\,(U_n) \neq \varnothing$. Si $\mathcal{V}$ no es finita, (2) implica que no es localmente finita y, por lo tanto, existe $x \in X$, tal que cualquiera de sus vecindades interseca a una infinidad de elementos de $\mathcal{V}$; o sea que $x \in cl\,(V_n)$ para una infinidad de valores de n. Por definición, $cl\,(V_n) \subset cl\,(U_n)$; luego, $x \in cl\,(U_n)$ para un número infinito de n y, como $\mathcal{U}$ es decreciente, esto es equivalente a que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl\,(U_n)$.

(3) $\Longrightarrow$ **(4)** Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable de X, tal que la unión de cualquiera de sus subfamilias finitas no es densa en X. Entonces, para toda $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ finita tenemos que $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} cl\,(A) \subsetneq X$; de manera que $\mathcal{B} = \{B_n = X \setminus cl\,(C_n) : n \in \mathbb{N}\}$ (donde $C_n = \bigcup_1^n A_k$) es una familia decreciente de conjuntos abiertos no vacíos y, por (3), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(B_n) \neq \varnothing$. Nótese que $B_n \subset X \setminus C_n$ y, así, $cl\,(B_n) \subset cl\,(X \setminus C_n) = X \setminus C_n$. Si $x \in cl\,(B_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in X \setminus C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; luego $x \in X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, lo cual es contradictorio.

(4) $\Longrightarrow$ **(3)** Sea $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia decreciente de conjuntos abiertos no vacíos, con $\bigcap_{n=1}^{\infty} cl\,(U_n) = \varnothing$. Sean $V_n = X \setminus cl\,(U_n)$ y $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$; entonces, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$. Dado que $\mathcal{U}$ es decreciente, $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta creciente y, por ello, $\bigcup_{j=1}^{k} V_j \subset V_k$; o sea que la unión de cualquier subfamilia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$ no es densa, contradiciendo (4).

(3) $\Longrightarrow$ (1) Sea $\mathcal{U} \subset \tau$ una familia infinita de conjuntos no vacíos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{U}$ es numerable. Sea $\mathcal{V} = \{V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ya que $\mathcal{V} \subset \tau$ es decreciente y ninguno de sus miembros es vacío, por (3), existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\,(V_n)$; esto significa que cualquier vecindad W, de x, interseca a todos los V_n y, por tanto, a un número infinito de los U_n. Por consiguiente, x es punto de acumulación de $\mathcal{U}$.

∎

El próximo resultado reúne algunas propiedades conocidas de la compacidad tenue, que serán necesarias para llegar a los teoremas principales del capítulo. Una de tales propiedades es la semirregularidad:

Definición 3.1.7. Sean (X,τ) un espacio topológico y τ_s la semirregularización de τ; es decir, la topología generada por los conjuntos τ-regularmente abiertos. Una propiedad topológica R es *semirregular* si (X,τ) tiene R si y solo si (X,τ_s) la tiene.

Lema 3.1.8. *Si $U \subset X$ es τ-abierto (X,τ), entonces $cl_\tau(U) = cl_{\tau_s}(U)$.*

Demostración. Sea $U \in \tau$; sabemos que $cl_\tau(U) \subset cl_{\tau_s}(U)$ (pues $\tau_s \subset \tau$) y veremos que $cl_{\tau_s}(U) \subset cl_\tau(U)$. Es evidente que $U \subset int_\tau cl_\tau(U) \subset cl_\tau(U)$, de lo cual se deduce que $G = cl_\tau int_\tau cl_\tau(U)$ satisface $U \subset G \subset cl_\tau(U)$. Pero como G es τ-regularmente cerrado, es τ_s-cerrado y, así, $U \subset cl_{\tau_s}(U) \subset G \subset cl_\tau(U)$. ∎

Teorema 3.1.9.

1. *Las uniones finitas de subespacios tenuemente compactos son tenuemente compactas.*

2. *Las imágenes continuas de espacios tenuemente compactos son tenuemente compactas.*

3. *Los subespacios regularmente cerrados de espacios tenuemente compactos son tenuemente compactos.*

4. *Si A es un subespacio tenuemente compacto de (X,τ), cualquier T, tal que $A \subset T \subset cl(A)$, es tenuemente compacto. En particular, si D es denso en (X,τ) y D es tenuemente compacto, también (X,τ) lo es.*

5. *La compacidad tenue es una propiedad semirregular.*

Demostración.

1. Sean A y B subespacios tenuemente compactos de (X,τ). Podemos suponer que $X = A \cup B$; sea $\mathcal{U} \subset \tau$ una familia infinita de conjuntos no vacíos. Puesto que A y B forman una cubierta de X, damos por hecho que $\mathcal{V} = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\} \subset \tau|_A$ es infinita. Como A es tenuemente compacto, $\mathcal{V}$ (y, en consecuencia, $\mathcal{U}$) tiene un punto de τ-acumulación x.

2. Sean $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ continua y sobreyectiva, y $\mathcal{U} \subset \sigma \smallsetminus \{\varnothing\}$ una familia infinita. Entonces, $\mathcal{U}_{-1} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\} \subset \tau$ es infinita y, por tanto, tiene un punto de τ-acumulación. Si $V \in \sigma$ es vecindad de $f(x)$, la preimagen $f^{-1}(V)$ interseca a una infinidad de elementos de $\mathcal{U}_{-1}$. Por sobreyectividad, V interseca a una infinidad de elementos de $\mathcal{U}$.

3. Sean (X,τ) un espacio tenuemente compacto y $A \subset X$ regularmente cerrado. Sean $\mathcal{U} \subset \tau|_A$ una familia infinita sin miembros vacíos y $\mathcal{V} = \{U \cap int(A) : U \in \mathcal{U}\}$. Es inmediato que $\mathcal{V} \subset \tau$ y por ello, $\mathcal{V}$ tiene un punto de acumulación $x \in cl\big(int(A)\big) = A$. Es fácil ver que x es también un punto de acumulación de $\mathcal{U}$.

4. Sea $D \subset X$ denso en (X,τ) y tenuemente compacto. Supongamos que $\mathcal{U} \subset \tau \smallsetminus \{\varnothing\}$ es τ-localmente finita, disjunta e infinita. Entonces, $\mathcal{V} = \{U \cap D : U \in \mathcal{U}\} \subset \tau|_D$ es $\tau|_D$-localmente finita y, por tanto, finita. Pero $\mathcal{U}$ es finita. En efecto, si no lo fuera, existiría $U \in \mathcal{U}$ con $\{V \in \mathcal{U} : V \cap D = U \cap D\}$ infinito; o sea que cualquier vecindad de $x \in U \cap D$ intersecaría a una infinidad de elementos de $\mathcal{U}$. Se sigue que (X,τ) es tenuemente compacto.

   De acuerdo con el párrafo anterior, como A es denso en T, el conjunto $cl_T(A)$ es tenuemente compacto; así que $T = T \cap cl(A) = cl_T(A)$ es tenuemente compacto.

5. Puesto que $\tau_s \subset \tau$, si τ es tenuemente compacta, también lo es τ_s. Recíprocamente, si $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ es una familia decreciente de conjuntos no vacíos, entonces $\mathcal{V} = \big\{int_\tau\big(cl_\tau(U_n)\big) : n \in \mathbb{N}\big\} \subset \tau_s$ también lo es. A causa del Teorema 3.1.6(3) y de la compacidad tenue de τ_s, se

cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\tau_s}\Big(int_\tau\big(cl_\tau(U_n)\big)\Big) \neq \varnothing$. Pero por el Lema 3.1.8, esto es lo mismo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_{\tau}\Big(int_\tau\big(cl_\tau(U_n)\big)\Big) \neq \varnothing$. Es fácil probar que $cl_\tau int_\tau cl_\tau int_\tau(A) \subset cl_\tau int_\tau(A)$ para cualquier $A \subset X$; como $\mathcal{U} \subset \tau$, resulta que $cl_\tau\Big(int_\tau\big(cl_\tau(U_n)\big)\Big) \subset cl_\tau(U_n)$. De esto último se deduce que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_\tau(U_n) \neq \varnothing$, de modo que (X,τ) es tenuemente compacto.

■

Una vez expuestos los resultados generales sobre la compacidad tenue, podemos ocuparnos de las topologías maximales tenuemente compactas.

3.2. Caracterizaciones de topologías maximales tenuemente compactas

Las topologías maximales tenuemente compactas no son tan simples de caracterizar como las maximales compactas. Esto se debe, en parte, a que las primeras son submaximales, siendo ello consecuencia de que la compacidad tenue es una propiedad semirregular.

Teorema 3.2.1. *Si* R *es una propiedad topológica semirregular, los espacios maximales* R *son submaximales.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio maximal R. Primero veremos que una submaximalización σ de τ tiene la misma semirregularización que τ. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro de conjuntos densos, tal que $\sigma = \tau(\mathcal{F})$, y tomemos $U^* \in \sigma$. Por el Teorema 1.2.3, existen $U \in \tau$, $D \in \mathcal{F}$, tales que $U^* = U \cap D$; además, todo elemento de $\mathcal{F}$ es σ-denso. De lo anterior, se concluye que $cl_\sigma(U^*) = cl_\sigma(U \cap D) = cl_\sigma(U)$. Todo conjunto σ-cerrado C^* puede ser visto como $C^* = V^c \cup E^c$, con $V \in \tau$, $E \in \mathcal{F}$, lo cual implica que existe un conjunto τ-cerrado C (precisamente, V^c), tal que $C \subset C^*$; por consiguiente, $cl_\tau(U) \subset cl_\sigma(U)$ y, así, $cl_\sigma(U) = cl_\tau(U)$. Por lo anterior, $cl_\sigma(U^*) = cl_\tau(U)$; de manera que todo conjunto σ-regularmente cerrado es τ-regularmente cerrado. Entonces, $\sigma_s = \tau_s$.

Ya que $\sigma_s = \tau_s$ y R es semirregular, τ_s tiene R y, entonces, σ_s también la tiene; por semirregularidad, σ tiene R. Como τ es maximal y $\sigma \supset \tau$, tenemos que $\tau = \sigma$. ■

Ahora, caracterizaremos los espacios submaximales con ciertas propiedades topológicas (entre las que se encuentra la compacidad tenue) que son maximales. Los primeros resultados al respecto aparecen en [5].

Teorema 3.2.2. *Sea* R *una propiedad topológica con las siguientes características:*

(a) R *es invariante bajo sobreyecciones continuas.*

(b) Si X tiene R *y U es abierto, entonces, $cl(U)$ tiene* R*.*

(c) R *es semirregular.*

(d) Si un subconjunto denso de un espacio X tiene la propiedad R*, entonces X la tiene.*

(e) Si A y B tienen R*, y $X = A \cup B$, entonces X tiene* R.

Entonces, un espacio submaximal es maximal R *si y solo si para cualquier $A \subset X$, tal que $X \setminus int_\tau(A)$ y A tienen la propiedad* R*, el conjunto A es cerrado.*

Demostración. Probaremos primero la suficiencia: si (X, τ) es submaximal, pero no maximal R, existe una topología $\tau' \supsetneq \tau$, tal que (X, τ') tiene R. Puesto que las topologías submaximales son maximales R en las clases de equivalencia definidas por $\sigma \sim \sigma' \iff \sigma_s = \sigma'_s$, se cumple que $\tau'_s \neq \tau_s$. En consecuencia, existe $U \in \tau'$, tal que $cl_{\tau'}(U) \subsetneq cl_\tau(U)$; luego, $A = cl_{\tau'}(U)$ no es τ-cerrado.

Siendo cerraduras de conjuntos abiertos, A y $cl_{\tau'}(X \setminus A)$ son subespacios regularmente cerrados de (X, τ'). Por (b), ambos tienen R en (X, τ'), y por (a), tienen R en (X, τ) (basta tomar la identidad de $(X, \tau') \to (X, \tau)$). A causa de (d), las cerraduras de espacios con R tienen también R; tomando en cuenta que $cl_\tau cl_{\tau'} = cl_\tau$, se deduce que

$$cl_\tau\big(cl_{\tau'}(X \setminus A)\big) = cl_\tau(X \setminus A) = X \setminus int_\tau(A)$$

es un conjunto con la propiedad R. En conclusión, A y $X \setminus int_\tau(A)$ tienen R, no obstante A no es τ-cerrado; así que hemos llegado a una contradicción.

Para la necesidad, consideremos un subconjunto no cerrado $A \subset X$, tal que A y $X \setminus int_\tau(A) = cl_\tau(X \setminus A)$ tengan la propiedad R. Como (X, τ) es submaximal, $B = (X \setminus A) \cup int_\tau(A)$, siendo denso, es abierto; además, si

$C = cl_\tau(X \smallsetminus A)$, entonces $X \smallsetminus A = C \cap B$. Puesto que, para $F,\ G \subset X$ arbitrarios, $\tau(F)|_G = \tau|_G(F)$ (Teorema 1.1.2(g)), lo anterior implica que $\tau(X \smallsetminus A)|_C = \tau|_C(X \smallsetminus A) = \tau|_C$. Es evidente que $\tau|_A = \tau(X \smallsetminus A)|_A$, de manera que $(A, \tau|_A)$ y $(C, \tau|_C)$ son subespacios de $(X, \tau(X \smallsetminus A))$, con la propiedad R. Dado que $X = A \cup C$, por la condición (e), $(X, \tau(X \smallsetminus A))$ tiene R y, así, (X, τ) no es maximal R. ∎

El Teorema 3.1.9 garantiza que la compacidad tenue satisfaga las hipótesis del Teorema 3.2.2, mismo que tiene el próximo corolario.

Corolario 3.2.3. *Sea* R *una propiedad topológica que satisface las condiciones* (a)–(e). *Sea* (X, τ) *un espacio submaximal con* R, *tal que cada subespacio con* R *es cerrado. Entonces,* (X, τ) *es maximal* R.

Una consecuencia importante del Teorema 3.2.2 es la siguiente.

Teorema 3.2.4. *Sea* R *una propiedad topológica que satisface las condiciones* (a)–(e). *Si los conjuntos que constan de un sólo punto tienen* R, *los espacios maximales* R *son* T_1.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio maximal R; por el Teorema 3.2.1, (X, τ) es submaximal. Entonces, para $x \in X$ con $\{x\} \notin \tau$, el conjunto $X \smallsetminus \{x\}$ es denso y, por tanto, $\{x\}$ es cerrado. Si $\{x\} \in \tau$, descartando el caso trivial en que (X, τ) es discreto, podemos encontrar $y \in X$, tal que $y \neq x$ y $\{y\} \notin \tau$.

Si $cl(\{x\}) \smallsetminus int\big(cl(\{x\})\big) = \varnothing$, entonces $cl\{x\} = int\big(cl(\{x\})\big)$; luego, $X \smallsetminus cl(\{x\})$ es abierto- cerrado y, por (b), tiene R. Como $\{x\}$ tiene R, por (d), $cl(\{x\}) \smallsetminus \{y\}$ tiene R; además, por hipótesis, $cl\{y\} = \{y\}$ tiene R. Según (e), la unión topológica de los espacios $\big(X \smallsetminus cl(\{x\}), \tau|_{X \smallsetminus cl(\{x\})}\big)$, $\big(cl(\{x\}) \smallsetminus \{y\}, \tau|_{cl(\{x\}) \smallsetminus \{y\}}\big)$ y $\big(\{y\}, \tau|_{\{y\}}\big)$ tiene R; no obstante es más fina que τ. Esto contradice la maximalidad de τ.

En caso de que $z \in cl(\{x\}) \smallsetminus int\big(cl(\{x\})\big)$, tenemos que $\{z\} \notin \tau$ y, por submaximalidad, $\{z\}$ es cerrado; así que $A = cl(\{x\}) \smallsetminus \{z\}$ no es cerrado, pero tiene R (pues $\{x\}$ es denso en A). Es claro que $int(A) = int\big(cl(\{x\})\big) \smallsetminus \{z\}$ y, de acuerdo con la manera en que se definió z, se cumple la igualdad $int(A) = int\big(cl(\{x\})\big)$; luego, su complemento es regularmente cerrado y tiene R. El Teorema 3.2.2 implica que A es cerrado, lo cual es contradictorio porque $\{x\} \subset A$ y $cl(\{x\}) \not\subset A$. ∎

Para la compacidad tenue resumimos los tres últimos teoremas con el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5. *Los espacios maximales tenuemente compactos son T_1 y submaximales.*

En este momento, ya es posible dar una primera caracterización de los espacios maximales tenuemente compactos.

Teorema 3.2.6. *[18] Un espacio es maximal tenuemente compacto si y solo si:*

(I) es submaximal y

(II) todos sus subespacios tenuemente compactos, son cerrados.

Demostración. De acuerdo con el Corolario 3.2.3, (I) y (II) son condiciones suficientes. Por el Corolario 3.2.5, la submaximalidad es necesaria; sólo restaría probar que (II) también lo es. Para ello, supongamos que (X,τ) es maximal tenuemente compacto y que un subespacio $A \subset X$ es tenuemente compacto, pero no cerrado. Entonces, existe $p \in cl\,(A) \smallsetminus A$. Según el Teorema 3.1.9(4), como A es denso en $B = cl\,(A) \smallsetminus \{p\}$, el conjunto B es tenuemente compacto. Puesto que (X,τ) es T_1, $int(B) = int\big(cl\,(A)\big) \cap int\big(X \smallsetminus \{p\}\big) = int\big(cl\,(A)\big) \smallsetminus \{p\}$; de manera que $X \smallsetminus int(B) = \big[X \smallsetminus int\big(cl\,(A)\big)\big] \cup \{p\}$ es tenuemente compacto. De hecho, $X \smallsetminus int(B)$ es unión de dos subespacios tenuemente compactos: $X \smallsetminus int\big(cl\,(A)\big)$, que es regularmente cerrado, y un punto. Por el Teorema 3.2.2, B es cerrado para cualquier $p \in cl\,(A) \smallsetminus A$; llamémoslo B_p. Resulta que $A = \bigcap_{p\in cl(A)\smallsetminus A} B_p$ es cerrado; esto es una contradicción. ∎

La compacidad tenue es hereditaria bajo conjuntos regularmente cerrados; a continuación, se demuestra que la compacidad tenue maximal es heredada a subespacios tenuemente compactos.

Teorema 3.2.7. *Los subespacios tenuemente compactos de espacios maximales tenuemente compactos son maximales tenuemente compactos.*

Demostración. Sean (X,τ) un espacio maximal tenuemente compacto y S un subespacio tenuemente compacto de X. Claramente, la submaximalidad de X se hereda a S y, por el teorema anterior, S es cerrado. Entonces, los subespacios tenuemente compactos de S, además de ser cerrados en X, son cerrados en S. Como S es submaximal, es maximal tenuemente compacto. ∎

La segunda caracterización de espacios maximales tenuemente compactos es más explícita en relación a los subespacios.

Teorema 3.2.8. *Un espacio* (X, τ) *es maximal tenuemente compacto si y solo si es* T_1 *y submaximal, y cada uno de sus subespacios tenuemente compactos es la unión de un conjunto regularmente cerrado con un conjunto finito.*

Demostración. La suficiencia se infiere del Teorema 3.2.6 y del hecho de que, en un (X, τ) un espacio T_1, los conjuntos finitos son cerrados. En cuanto a la necesidad, consideremos un subespacio $A \subset X$, tenuemente compacto. Como (X, τ) es maximal tenuemente compacto, A es cerrado, de modo que $cl_X\big(int_X(A)\big) \subset A$. Sea $B = A \smallsetminus cl_X\big(int_X(A)\big)$. Puesto que B es abierto en A, el conjunto $cl_A(B)$ es regularmente cerrado en A y, por tanto, tenuemente compacto. Por otro lado, $B \subset A \smallsetminus int_X(A)$ y este último conjunto es cerrado; como A es cerrado, $cl_A(B) \subset A \smallsetminus int_X(A)$. O sea que $cl_A(B)$ tiene interior vacío y, por la submaximalidad de A (heredada de X), es cerrado y discreto. Puesto que, en un espacio discreto, los conjuntos de un solo punto forman una familia localmente finita, $cl_A(B)$ es finito. En consecuencia, B es finito y $A = B \cup \big[cl_X\big(int_X(A)\big)\big]$ es la unión de un conjunto regularmente cerrado con un conjunto finito. ∎

3.3. Espacios regulares maximales tenuemente compactos

Una vez identificadas las topologías maximales tenuemente compactas, cabe preguntarse si es posible identificar entre los espacios regulares, a los que son maximales tenuemente compactos. Para tal propósito, precisaremos de las familias maximales casi disjuntas.

Definición 3.3.1. Dado un conjunto D, una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos infinitos de D es casi disjunta (abreviado c.d.) si $A \cap B$ es finito para cualesquiera conjuntos distintos A, $B \in \mathcal{M}$. Cuando $\mathcal{M}$ es maximal respecto a la propiedad de ser casi disjunta (esto es, cuando no está contenida propiamente en otra familia c. d.), decimos que es maximal casi disjunta (m. c. d.).

Es posible construir un espacio topológico a partir de una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de D, que sea m. c. d.; esto se hace anexando a D un conjunto P con $P \cap D = \varnothing$, tal que exista una biyección $p : \mathcal{M} \to P$. Entonces, se define una topología τ sobre $D \cup P$ de la siguiente manera: $x \in D \implies \{x\} \in \tau$

y para cada $p(M) \in P$, toda τ-vecindad básica de $p(M)$ es de la forma $\{p(M)\} \cup (M \setminus F)$, con F finito.

Es evidente que τ es de Hausdorff, ya que cada vecindad abierta de cada elemento de P es cofinita en algún miembro de $\mathcal{M}$, misma que es una familia c. d. También es sencillo ver que $(P \cup D, \tau)$ es localmente compacto, pues $p(M) \cup M$ es una vecindad compacta de $p(M) \in P$. Al ser $(P \cup D, \tau)$ un espacio de Hausdorff localmente compacto, es $T_{3.5}$.

Aparte de lo anterior, resulta que $(P \cup D, \tau)$ es maximal tenuemente compacto; no obstante, dicha afirmación no es trivial. De aquí en adelante, llamaremos $\Psi(\mathcal{M})$ a $(P \cup D, \tau)$.

Teorema 3.3.2. *El espacio $\Psi(\mathcal{M})$ es maximal tenuemente compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia disjunta, localmente finita de conjuntos abiertos no vacíos en $\Psi(\mathcal{M})$. Por ser D denso en $\Psi(\mathcal{M})$, podemos escoger $x_U \in D \cap U$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea $A = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$. Dado que A es un subconjunto infinito de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{M}$ es una familia m.c.d., existe $M \in \mathcal{M}$, tal que $M \cap A$ es infinito. Se sigue que $p(M)$ es punto de acumulación de A y por lo tanto de $\mathcal{U}$.

Es claro que $\Psi(\mathcal{M})$ es submaximal porque cada subconjunto denso F de $P \cup D$ debe contener a D. Puesto que $\Psi(\mathcal{M})$ es un espacio de Fréchet, si σ es una topología más fuerte que τ, hay una sucesión convergente en $(P \cup D, \tau)$ y no convergente en $(P \cup D, \sigma)$. Consecuentemente, existe un subconjunto infinito de D que no tiene punto de acumulación. Así, $(P \cup D, \sigma)$ no es tenuemente compacto.

■

Con esta última construcción, caracterizaremos los espacios regulares que son maximales tenuemente compactos. Pero primero probaremos un lema relacionado con el conjunto de puntos aislados de un espacio (X, τ). El conjunto mencionado será denotado por $I(X)$.

Lema 3.3.3. *Sea (X, τ) un espacio regular y maximal tenuemente compacto; entonces, $I(X)$ es denso en X.*

Demostración. En primer lugar, afirmamos que, para todo $p \in X \setminus I(X)$, existe una familia disjunta $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$, de conjuntos no vacíos, tal que $\langle U_n \rangle \to p$; en otras palabras, para cualquier vecindad V de p existe un $N \in \mathbb{N}$, que satisface $n > N \implies U_n \subset V$. Para probar la afirmación, supongamos que, para toda familia $\mathcal{U} \subset \tau \setminus \{\varnothing\}$ disjunta y numerable, existe una vecindad W de p con $U_n \setminus W \neq \varnothing$ para una infinidad de valores de n. Por regularidad, podemos suponer que W es cerrada. Entonces, la familia de los $U_n \setminus W$, $n \in \mathbb{N}$, es infinita y, por compacidad tenue, debe tener un punto de acumulación $q \neq p$; no obstante, q también es punto de acumulación de $\mathcal{U}$. Consecuentemente, $\tau(\{p\})$ es tenuemente compacta, pues p no es el único punto de acumulación de ninguna familia disjunta, numerable, de conjuntos abiertos no vacíos; de manera que se contradice la maximalidad de τ. Hemos demostrado la afirmación.

Tomemos un $x_n \in U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $B = \{x_n : x_n \notin I(X),\ x \neq p\}$ es discreto y, debido a ello, denso en ninguna parte; luego, por la submaximalidad de (X, τ), es cerrado y discreto. Como $\langle U_n \rangle \to p$, si B fuera infinito, sería de la forma $\langle x_{n_k} : k \in \mathbb{N} \rangle$, con $\langle x_{n_k} \rangle \to p$; pero $p \notin B$, contradiciéndose el hecho de que B es cerrado. En consecuencia, B es finito y, por lo tanto, p es el límite de una sucesión de puntos aislados; luego, $I(X)$ es denso en X. ∎

Por último, tenemos la caracterización de los espacios maximales tenuemente compactos en términos de espacios $\Psi(\mathcal{M})$.

Teorema 3.3.4. *[18] Un espacio regular es maximal tenuemente compacto, si y solo si es homeomorfo a $\Psi(\mathcal{M})$ para alguna familia maximal casi ajena en un conjunto discreto $\mathcal{D}$.*

Demostración. La suficiencia es clara en virtud del Teorema 3.3.2. Para demostrar la necesidad, consideremos un espacio (X, τ) regular y maximal tenuemente compacto. Por el Lema 3.3.3, $I(X)$ (el conjunto de puntos aislados de (X, τ)) es denso en X; como τ es submaximal, $E = X \setminus I(X)$ es cerrado y discreto. Puesto que X es T_1 y, por hipótesis, regular, para cada $p \in E$, existe $V(p) \in \tau$, tal que $p \in V(p)$ y $E \cap cl\,(V(p)) = \{p\}$; es decir, p es el único punto no τ-aislado de $cl\,(V(p))$. Luego, el Teorema 3.1.9(3), garantiza que este último es tenuemente compacto. Sea $\mathcal{M} = \{V(p) \cap I(X) : p \in E\}$. Debido a que los $p \in E$ son puntos no aislados de X, todos los miembros de $\mathcal{M}$ son infinitos.

Sean $p,\ q \in E$ $(p \neq q)$ y $S = V(p) \cap V(q) \cap I(X)$. Si S es infinito, $\{\{s\} : s \in S\}$ es una familia infinita de conjuntos abiertos y, como X es tenuemente compacto, debe tener un punto de acumulación $t \in E$ (t no puede pertenecer a $I(X)$). En consecuencia, $t \in E \cap cl\,(V(p)) \cap cl\,(V(q))$ y $p = q = t$, lo cual es contradictorio. Se sigue que S es finito y, por lo tanto, $\mathcal{M}$ es una familia casi disjunta de subconjuntos de $I(X)$.

Si hubiera un $A \subset I(X)$, tal que $A \notin \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \cup \{A\}$ siguiera siendo una familia casi disjunta en $I(X)$, A tendría que ser infinito; de modo que (una vez más, porque X es tenuemente compacto) $\{\{a\} : a \in A\}$ tendría un punto de acumulación $b \in E$. Por consiguiente, $V(b) \cap A$ sería infinito, no obstante $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es casi disjunta. Resulta que $\mathcal{M}$ es una familia m. c. d. en X. Finalmente, definimos $\lambda : \Psi(\mathcal{M}) \to X$ como $\lambda(x) = x$ para $x \in I(X)$ y $\lambda(p(M)) = d$ para $M = V(d) \cap I(X)$. Entonces, la función λ es un homeomorfismo de $\Psi(\mathcal{M})$ a X. ∎

Conclusiones y Perspectivas

Como se ha dicho desde la Introducción, las caracterizaciones de espacios maximales conexos, al depender de la submaximalidad, involucran el Axioma de Elección. Como consecuencia de ello, no ha sido posible dar una descripción más detallada de las topologías maximales conexas.

Los conceptos de conjunto singular y topología casi maximal parecen estar vinculados entre sí y las caracterizaciones de espacios maximales conexos desarrolladas en el presente trabajo tienen cierta similitud, excepto que una involucra al axioma T_1 y la otra no. De manera que queda pendiente aclarar la relación entre ambas caracterizaciones y determinar cuáles son los espacios maximales conexos que no son T_1.

El ejemplo de una topología maximal conexa dado en esta Tesis es de Hausdorff, además de ser una expansión del espacio euclidiano. No obstante, hace falta determinar si existen expansiones de la topología euclidiana que sean regulares o satisfagan axiomas de separación más fuertes. En particular, es un problema abierto determinar si todo espacio metrizable tiene una expansión maximal conexa.

De las topologías que no tienen refinamientos maximales conexos, hace falta encontrar una que satisfaga axiomas de separación más fuertes que la de [12], por ejemplo, que sea $T_{3.5}$. En relación a los productos, no se sabe si el producto de dos espacios con refinamiento maximal conexo tiene refinamiento maximal conexo. Otro de los muchos problemas abiertos en relación a la conexidad maximal sería encontrar una extensión maximal conexa de la compactificación de Stone-Cech de alguna topología carente de expansiones maximales conexas.

La conexidad y la compacidad tenue maximales no son las únicas propiedades que dependen de la submaximalidad. Sería interesante identificar más propiedades maximales que dependan de la misma y buscar características comunes entre ellas.

Bibliografía

[1] P. Alexandrov, H. Hopf, Topologie (1935).

[2] C. J. Borges Jr., On extensions of topologies, *Canadian Mathematical Journal,* **19** (1967), 474-487.

[3] L. E. J. Brower, On the structure of perfect sets of points, *Proc. Akad. Amsterdam,* **12** (1910), 785-794.

[4] D. Cameron, A survey of maximal topological spaces, *Topology Proceedings,* **2** (1977), 11-60.

[5] D. Cameron, A class of maximal topologies, *Pacific Journal of Mathematics,* **70** (1977), 101-104.

[6] D. Cameron, Δ-maximal topologies for some cardinal functions, *General Topology and its Applications,* **9** (1978), 59-70.

[7] B. Clark, V. Schneider, A characterization of maximal connected spaces and maximal arcwise connected spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **104** (1988), 1256-1260.

[8] R. Engelking, General Topology, *Sigma Series in Pure Mathematics*, Berlín, (1989).

[9] J. A. Guthrie, D. F. Reynolds, H. E. Stone, Connected expansions of topologies, *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* **9** (1973), 259-265.

[10] J. Guthrie, H. Stone, Spaces whose connected expansions preserve connected subsets, *Fundamenta Mathematicae,* **80** (1973), 91-100.

[11] J. A. Guthrie, H. E. Stone, M. Wage, Maximal connected expansions of the reals, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **69** (1978), 159-165.

[12] I. Baggs, A connected Hausdorff space which is not contained in a maximal connected space, *Pacific Journal of Mathematics,* **51** (1974), 11-18.

[13] F. Hausdorff, Theory of Sets (1937).

[14] E. Hewitt, A problem of set theoretic topology, *Duke Mathematical Journal,* **10** (1943), 309-333.

[15] S. Ikenaga, I. Yoshioka, Extensions of topologies, *Proceedings of the Japan Academy,* **41** (1965), 11-16.

[16] V. Neumann-Lara, Autonomous subsets of topological spaces, *Anales del Instituto de Matemáticas-UNAM,* **19** (1979), 177-184.

[17] V. Neumann-Lara, R. G. Wilson, Some properties of essentially connected and maximally connected spaces, *Houston Journal of Mathematics,* **12** (1986), 419-429.

[18] J. R. Porter, R. M. Stephenson Jr., R. G. Woods, Maximal feebly compact spaces, *Topology and its Applications,* **52** (1993), 203-219.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00175
Matrícula: 2152800945

SUBMAXIMALIDAD Y PROPIEDADES TOPOLÓGICAS MAXIMALES

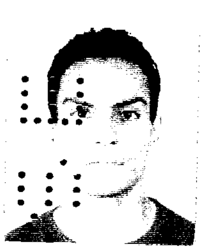
En la Ciudad de México, se presentaron a las 14:00 horas del día 23 del mes de marzo del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: ALVARO MENENDEZ CALZADA



ALVARO MENENDEZ CALZADA
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

SECRETARIO

DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH