

**Tesis Doctoral**  
**Estabilidad y Desempeño de**  
**Controladores Lineales para Robots**  
**Manipuladores**

**Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Iztapalapa**

**Estabilidad y Desempeño de Controladores Lineales para  
Robots Manipuladores**

**TESIS**

Que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN CIENCIAS**

**Presenta**

**M. I. Ilse Cervantes Camacho**

**Asesor: Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez**

**México, D.F.**

**1-Junio-2001**



**ESTABILIDAD Y DESEMPEÑO DE CONTROLADORES  
LINEALES PARA ROBOTS MANIPULADORES**

por

**Ilse Cervantes Camacho**

**TESIS DE DOCTORADO**

**Comité de Tesis.**

---

---

---

---

---

80	Clasificación de...
82	Ejemplo...
83	Conclusiones...
89	Control por Campo de...
90	Introducción...
91	Formulación del Problema...
92	El Plan de Control...
93	Diseño del Plan de Control...
94	Aplicación en los Control...
95	El Método del...
96	Control de...
97	Investación Experimental...
98	Conclusiones...
100	III Conclusiones...
101	Conclusiones...
102	Trabajo...
103	Apéndice...



# Índice General

Resumen . . . . .	6
<b>1 Introducción General</b>	<b>9</b>
Motivación . . . . .	9
Planteamiento de los Problemas . . . . .	10
Regulación . . . . .	10
Seguimiento de Trayectorias . . . . .	12
Objetivos y Relevancia del Trabajo . . . . .	12
Organización de la Tesis . . . . .	14
<b>2 Modelo Dinámico</b>	<b>17</b>
Formulación Euler Lagrange . . . . .	17
Propiedades de la Ecuación de Movimiento . . . . .	18
Propiedades de la Matriz de Inercia . . . . .	19
Propiedades del Vector de Coriolis . . . . .	19
Propiedades del Vector de Gravedad . . . . .	20
<b>I Regulación</b>	<b>21</b>
<b>3 Regulación con Control Lineal PID</b>	<b>23</b>
Introducción . . . . .	23
Formulación del Problema de Control . . . . .	25
Configuración Robusta de Control Lineal PID . . . . .	26
Ecuaciones en lazo Cerrado . . . . .	29
Estabilidad Robusta . . . . .	30
Desempeño Robusto . . . . .	33
Guías de Sintonizado . . . . .	34
	1

Ejemplo . . . . .	36
Conclusiones . . . . .	40
<b>4 Estabilización con Retroalimentación de Salida</b>	<b>41</b>
Introducción . . . . .	41
Formulación del Problema . . . . .	43
Diseño de la Ley de Control . . . . .	44
Estructura del Controlador . . . . .	46
Dinámica en lazo Cerrado . . . . .	47
Análisis de Estabilidad . . . . .	51
Guías de Sintonizado . . . . .	55
Ejemplo . . . . .	56
Simulaciones Numéricas . . . . .	58
Pruebas Experimentales . . . . .	58
Conclusiones . . . . .	62
<b>5 Estabilización con Entradas de Control Acotadas</b>	<b>65</b>
Introducción . . . . .	65
Formulación del Problema . . . . .	66
Ley de Control PID Saturada . . . . .	67
Resultado Principal . . . . .	68
Ley de Control PD Saturada . . . . .	69
Prueba del Teorema 1 . . . . .	73
Ley de Control PID Saturada con Retroalimentación de Salida . . . . .	76
Conclusiones . . . . .	78
<b>II Seguimiento de Trayectorias</b>	<b>79</b>
<b>6 Seguimiento de Trayectorias</b>	<b>81</b>
Introducción . . . . .	81
Formulación del Problema . . . . .	82
Configuración de Control Lineal PID . . . . .	83
Ecuaciones en lazo Cerrado . . . . .	86
Análisis de Estabilidad . . . . .	87



<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>3</b>
Guías de Sintonizado . . . . .	90
Ejemplo . . . . .	92
Conclusiones . . . . .	97
<b>7 Control por Campo de Velocidad</b>	<b>99</b>
Introducción . . . . .	99
Formulación del Problema . . . . .	100
La Ley de Control Inversa . . . . .	101
Diseño del la Ley de Control Robusta . . . . .	102
Ecuaciones en lazo Cerrado . . . . .	105
Estabilidad del Sistema . . . . .	105
Guías de Sintonizado . . . . .	108
Evaluación Experimental . . . . .	109
Conclusiones . . . . .	113
<b>III Conclusiones</b>	<b>115</b>
Conclusiones Generales . . . . .	117
Trabajo Futuro . . . . .	119
Apéndice . . . . .	121

# Índice de Figuras

3-1	Evolución de los errores de posicionamiento en simulaciones numéricas. . . . .	37
3-2	Pruebas experimentales de los errores de posición. . . . .	38
3-3	Efecto del ruido en el desempeño a lazo cerrado, como función del parámetro de estimación. . . . .	39
4-1	Evolución de los errores de posicionamiento en simulaciones numéricas. . . . .	57
4-2	Desempeño con el esquema ARW. . . . .	59
4-3	Desempeño sin el esquema ARW. . . . .	60
4-4	Inestabilidad para condiciones muy demandantes (sin esquema ARW). . . . .	61
4-5	Evolución experimental de las posiciones del brazo. . . . .	63
4-6	Desempeño experimental del controlador propuesto. . . . .	64
6-1	Error de seguimiento del primer eslabón; (a) $q_{r,\alpha}$ , (b) $q_{r,\beta}$ . . . . .	93
6-2	Error de seguimiento del segundo eslabón; (a) $q_{r,\alpha}$ , (b) $q_{r,\beta}$ . . . . .	94
6-3	Retrato fase de las trayectorias seguidas en comparación con la deseada; (a) $q_{r,\alpha}$ , (b) $q_{r,\beta}$ . . . . .	96
7-1	Conjunto límite del campo vectorial deseado. . . . .	110
7-2	Conjunto límite experimental $R(q)$ en comparación con el deseado. . . . .	111
7-3	Evolución del error de seguimiento del campo de velocidad en el primer eslabón. . . . .	112
7-4	Evolución del error de seguimiento del campo de velocidad en el segundo eslabón. . . . .	114
7-5	Brazo mecánico. . . . .	122





## Resumen

Esta tesis trata el problema de posicionamiento de robots manipuladores rígidos en coordenadas articulares con controladores lineales tipo PID (Proporcional-Integral-Derivativo), en los casos de regulación y de seguimiento de trayectorias. La motivación, se deriva del hecho de que a pesar de que este tipo de controladores son ampliamente utilizados en robots industriales por su sencillez, versatilidad y amplia capacidad estabilizadora, sorprendentemente no existe fundamento teórico que explique sus cualidades observadas.

Desde un punto de vista teórico, existe la creencia general de que los controladores PID son inadecuados para estabilizar sistemas altamente no lineales, debido a que su diseño está basado en argumentos de tipo local. Aún más, se desconoce la manera en que el dominio de convergencia del controlador es afectado por las ganancias del control y no existen investigaciones acerca del desempeño inducido por estos controladores. Es por estas razones que los resultados sobre estabilidad y desempeño de controladores PID, están muy lejos de ser concluyentes.

El objetivo de esta tesis es el de obtener un mejor entendimiento de las capacidades estabilizadoras y del funcionamiento del controlador PID en robots manipuladores. Con este fin, se estudia el control clásico PID dentro del marco de la teoría moderna de sistemas no lineales y bajo las siguientes hipótesis:

- (a) Dinámica incierta del robot (paramétrica y estructural)
- (b) Presencia de términos de energía disipativos y no disipativos
- (c) Retroalimentación de estados/salidas
- (d) Acciones de control acotadas

El ingrediente principal en la formulación de los problemas abordados, es el uso de una configuración novedosa de control PID basada en ideas de compensación de modelado[3]. De manera general, se reescribe el controlador clásico PID como un controlador inverso aproximado más la acción de un estimador de incertidumbres. Usando esta representación, se interpreta la acción integral del error de posicionamiento como el efecto del estimador de incertidumbres. Este hecho es esencial en la fundamentación de la robustez del controlador PID. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se analiza utilizando herramientas de sistemas singularmente perturbados y se derivan resultados de estabilidad



*semiglobal*. Además, por primera vez, se da una interpretación *geométrica* del papel de la acción integral en la estabilización del sistema. Específicamente, se muestra que la acción integral tiene la función de buscar la posición deseada, deslizándose a lo largo de la curva de equilibrios.

Se estudia el desempeño del sistema en lazo cerrado y se muestra que el control PID, en el caso de regulación, puede recuperar un desempeño preestablecido. Esta recuperación incluye regiones de atracción y trayectorias. Los resultados obtenidos en esta tesis, son ilustrados via simulaciones numéricas y pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.

---

# Capítulo 1

---

## Introducción General

### Motivación

Existe la creencia general de que los controladores PID son inadecuados para estabilizar sistemas altamente no lineales, debido a que su diseño está basado en argumentos de tipo local. Aún más, se desconoce la manera en que el dominio de convergencia del controlador es afectado por las ganancias del control y no existen investigaciones acerca del desempeño inducido por estos controladores. Es por estas razones que los resultados sobre estabilidad y desempeño de controladores PID, están muy lejos de ser concluyentes.

El objetivo de este trabajo es el de estudiar el control lineal PID de robots manipuladores en el contexto de la teoría moderna de control y el de explicar su funcionamiento en términos de la estabilidad y desempeño asociados. La motivación, se deriva de la necesidad de contar con resultados realmente explotables, que permitan una sintonización adecuada, en términos de la estabilidad y desempeño del sistema en lazo cerrado.



# Planteamiento de los Problemas

En esta tesis, se tratan dos de los problemas clásicos de posicionamiento de robots manipuladores: regulación y seguimiento de trayectorias en coordenadas articulares y bajo una ley de retroalimentación PID. En las siguientes secciones se plantea el problema de manera genérica y se hace una revisión del estado del arte. El planteamiento formal de estos problemas se hace en el inicio de cada capítulo, siendo el propósito de esta sección, el de situar al(a) lector(a), de manera rápida y concreta, en los problemas que se abordarán.

## Regulación

La tarea de regular la posición en robots manipuladores, puede resumirse como aquella de alcanzar una posición articular deseada  $q_d$ , desde una configuración arbitraria de posición y velocidad inicial. Para resolver este problema, se han propuesto varios tipos de controladores (por ejemplo; adaptables, de estructura variable,  $\mathcal{H}_\infty$ , etc.). Sin embargo, los controladores más ampliamente utilizados en la industria son los controles PID. Las razones de ello, son su versatilidad, su sencillez (que lo hace fácilmente asimilable por el personal de la planta) y el hecho de que un control PID bien sintonizado cumple e incluso puede exceder los requerimientos deseados en su desempeño.

Sin embargo, en el ambiente teórico, generalmente se acepta que los controladores PID son incapaces de manejar sistemas altamente no lineales y que la estabilidad obtenida utilizando este tipo de controladores es sólo local [4],[37]; la razón, es que no se ha mostrado lo contrario. De hecho, se sabe que bajo ciertas consideraciones en la dinámica del robot, puede garantizarse estabilidad asintótica local.

Por ejemplo, Arimoto y Miyazaki [4] propusieron una prueba de estabilidad para el control PID, la cual es una extensión de la bien conocida prueba de estabilidad asintótica para controladores PD con compensación de gravedad. Esta prueba utiliza una función de Lyapunov que requiere de condiciones restrictivas en los parámetros del robot y en las matrices de ganancia. Esta prueba es de naturaleza local.

Por otro lado, Rocco [37] presentó una prueba de estabilidad basada en una reformulación de la dinámica del robot, la cual está dividida en una parte lineal y en otra no lineal desconocida. Los resultados obtenidos son locales. La contribución principal de [37], es el establecimiento de la existencia de una condición escalar que garantiza estabilidad alrededor de una región de la referencia.



La mayoría de los resultados de estabilidad con controladores PID son de naturaleza local. Aunque el análisis de estabilidad reportado por Arimoto y Miyazaki [4] puede extenderse para obtener resultados no locales, hasta la fecha, sólo ha sido probado explícitamente por Ortega *et al.* [34], para el caso de retroalimentación de salidas. En [34], la prueba de estabilidad utiliza el principio de invarianza de LaSalle y las condiciones de estabilidad dependen del conocimiento del vector de gravedad (incierto) y de las cotas de la matriz de inercia.

Por otro lado, los trabajos mencionados anteriormente consideran sólo el problema de estabilidad del sistema en lazo cerrado dejando a un lado el estudio del desempeño. Así pues el estudio de controladores PID en robots manipuladores, se motiva y justifica por la necesidad de contar con resultados de estabilidad que concuerden con la experiencia de los operadores y por la necesidad de contar con un esquema de control sencillo que garantice un desempeño deseado.

En lo que respecta al problema de regulación con entradas de control acotadas; existen algunos intentos en la literatura, de diseño de controladores tipo PD. En [18], [29], [39] se ha reportado un controlador lineal PD con un término de compensación de gravedad. Este controlador es simple y se construye a partir de saturaciones no acopladas de los términos proporcional y derivativo más la compensación de gravedad. La sintonización se hace con base en las cotas de los términos de gravedad de cada eslabón del robot. El sistema en lazo cerrado es globalmente asintóticamente estable y se garantiza el acotamiento de las acciones de control, si los límites de la entrada de control son más grandes que las cotas de los pares gravitacionales. Sin embargo, esta ley de control presenta sesgo en estado estacionario, si la dinámica del robot es incierta (*i.e.* efectos gravitacionales).

Hasta donde se conoce, el problema de regulación con controladores PID acotados y pares gravitacionales inciertos no ha sido estudiado aún. Específicamente, la capacidad de estabilización del controlador lineal PID saturado con dinámica del robot incierta merece un estudio sistemático. El objetivo de esta tesis en este respecto, es el de usar la ley de control PID (ya sea con retroalimentación de estados o de salidas) para regulación de posición, y garantizar su acotamiento y estabilidad aún si los pares gravitacionales son inciertos.

## Seguimiento de Trayectorias

El problema de seguimiento de trayectorias puede formularse como aquel de alcanzar y seguir una configuración articular deseada variante en tiempo desde una configuración arbitraria de posición y velocidad. Se han propuesto varios controladores para solucionar este problema, la mayoría basados en pasividad. Sin embargo, a pesar de que estos enfoques han probado ser exitosos [28], [30], [43], [46], no han sido empleados industrialmente y hasta la fecha la gran mayoría de los controladores empleados en la industria son de tipo PID.

Desde un punto de vista teórico, existe la creencia de que los controladores PID son incapaces de lidiar con sistemas altamente no lineales o de realizar tareas como la de seguimiento de trayectorias. Entre los resultados más importantes reportados en la literatura sobre control PID para seguimiento de trayectorias se pueden mencionar los siguientes

- Kawamura *et al.* [31] mostraron que existen ganancias PID que garantizan que el robot sigue una trayectoria deseada con precisión arbitraria si las condiciones iniciales en posición y velocidad son suficientemente pequeñas.
- Wen and Murphy [47] extendieron los resultados de estabilidad local de Arimoto y Miyazaki [4] al caso de seguimiento de trayectorias. Se muestra que cuando se utilizan ganancias PD suficientemente grandes y ganancia integral suficientemente pequeña puede obtenerse estabilidad asintótica local cuando las trayectorias de referencia son lentas.

Debe mencionarse que los resultados reportados en la literatura sobre control PID para el caso de seguimiento de trayectorias son de naturaleza *local*.

## Objetivos y Relevancia del Trabajo

Como se ha visto anteriormente, los resultados sobre estabilidad de control PID de robots manipuladores son de naturaleza local y no existen estudios sobre el desempeño de este tipo de controladores. La motivación de esta tesis se deriva de la necesidad de contar con resultados realmente explotables, que permitan una sintonización adecuada en términos de la estabilidad y desempeño del sistema en lazo cerrado. Particularmente, *el objetivo de*



*esta tesis es entender las capacidades estabilizadoras y el funcionamiento del controlador PID en robots manipuladores y mostrar que con este tipo de controladores puede obtenerse estabilidad semiglobal.*

Esta tesis puede verse, además, como un intento de *unificar y completar* muchos de los resultados existentes en la literatura. Por ejemplo para controladores lineales como PD o PD + compensación de gravedad se sabe lo siguiente.

- Los controladores PD aseguran estabilidad asintótica global del equilibrio, pero este equilibrio puede no coincidir con la posición deseada (por ejemplo, en presencia de fuerzas no disipativas).
- Los controladores PD + compensación de gravedad aseguran estabilidad asintótica de la posición deseada, pero es necesario un conocimiento exacto de los términos gravitacionales.

Como se ha visto en estos casos, la estabilidad de la posición deseada no es asegurada, si existe incertidumbre en el sistema. En este trabajo, se muestra que el papel de la acción integral es el de robustecer la ley de control ante estas incertidumbres. Es decir, se interpreta la acción integral como el efecto de un estimador de incertidumbres y bajo esta perspectiva, el control PID puede verse como una "*generalización*" de los controladores PD. Se propone una sintonización a partir de la determinación de velocidades de estimación mínimas que permiten reconstruir las incertidumbres del sistema.

Una herramienta básica en el estudio del controlador PID realizado en esta tesis es el establecimiento de un principio de separación para una clase de sistemas no lineales, de la manera en que se estableció en [3] y posteriormente en [5]. Es decir, la acción conjunta de un controlador y un observador, deriva en la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo ciertas condiciones [3]. Utilizando estas ideas, se interpreta al controlador PID como la fusión de un controlador inverso y un estimador de incertidumbres (principio de equivalencia cierta). De esta manera, la estabilidad del robot en lazo cerrado puede establecerse usando resultados de sistemas singularmente perturbados y en donde el parámetro de perturbación es el inverso de la velocidad de estimación.

En esta tesis, se estudia el funcionamiento de los controladores PID bajo las siguientes hipótesis:

(a) Robot Rígidos



- (b) Dinámica incierta del robot (paramétrica y estructural)
- (c) Retroalimentación de estados / salidas
- (d) Acciones de control acotadas

Algunas de las aportaciones más significativas de este trabajo son:

- Se obtiene un mejor entendimiento del funcionamiento de los controladores PID. Particularmente, se estudia el papel de la acción integral como una acción estimadora de incertidumbres. Bajo esta perspectiva, se derivan reglas de sintonización simples las cuales son físicamente significativas ya que están relacionadas con la dinámica del robot.
- Se garantiza estabilidad semiglobal del sistema en lazo cerrado. La ventaja principal es que la prueba sólo requiere de algunas cotas sobre la matriz de inercia.
- En el caso de regulación, se prueba que el control PID es capaz de recuperar el desempeño del controlador inverso exacto en el límite de alta ganancia. La recuperación del desempeño incluye tanto trayectorias como regiones de atracción.
- Se da una interpretación geométrica del funcionamiento de la acción integral en el control PID. Esta interpretación puede ser válida aún cuando la acción del controlador está limitada.
- Se garantiza estabilidad semiglobal con acciones de control PID acotadas.

## Organización de la Tesis

La tesis está organizada en tres partes. La primera parte se ocupa del problema de regulación; la segunda, del problema de seguimiento de trayectorias y la tercera presenta las conclusiones de la tesis. En el Capítulo 2 se muestran las propiedades del modelo dinámico del robot; estas propiedades serán útiles para derivar los resultados de estabilidad y para simplificar el procedimiento de sintonización. El Capítulo 3 trata el problema de regulación robusta de posición bajo la hipótesis de retroalimentación de estados (*i.e.* posición y velocidad). Se muestra que el desempeño inducido por el controlador inverso

exacto puede obtenerse con el control PID en el límite de alta ganancia. Se derivan reglas de sintonizado con base en un análisis de estabilidad semiglobal. Los resultados obtenidos se ilustran con simulaciones numéricas y con pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.

El Capítulo 4 trata el problema de regulación bajo la hipótesis de retroalimentación de salidas (*i.e.* posición). Se prueba que bajo un esquema de observación incertidumbres-velocidad es posible obtener estabilidad asintótica semiglobal y además obtener el desempeño inducida por la de la ley de control inversa en el límite de alta ganancia. El Capítulo 5 trata el problema de regulación robusta cuando las entradas de control están acotadas. Hasta donde se sabe, el problema abordado en esta tesis, es el único que contempla pares de gravedad inciertos. Además, por primera vez, se da una interpretación geométrica del papel de la acción integral en la estabilización de sistema. Específicamente, se muestra que la acción integral del control PID tiene la función de buscar la posición deseada, deslizándose a lo largo de la curva de equilibrios que corresponde al sistema en lazo cerrado bajo la acción de control PD.

El Capítulo 6 trata el problema de seguimiento de trayectorias, se muestra que es posible obtener un resultado de estabilidad semiglobal práctica (ver definición en [40]), bajo una ley de retroalimentación PID. Es decir, se prueba que para cualquier conjunto de condiciones iniciales  $W_x$ , existen ganancias PID tales que todas las trayectorias que empiezan en  $W_x$  convergen a un *conjunto residual de tamaño arbitrario*. Por otro lado, en el Capítulo 7 se obtiene un resultado de estabilidad similar, cuando se estudia el problema de seguimiento de trayectorias bajo una formulación novedosa que utiliza campos vectoriales llamada *control por campo de velocidad*. Se muestra que el control por campo de velocidad es un caso particular de control cascada, el cual tiene la ventaja de que la especificación de la tarea y la velocidad a la cual se realiza, puede ser desacoplada. Finalmente, en el Capítulo 7 se dan las conclusiones generales.

En cada uno de los capítulos se dedica una sección al estado del arte y al resumen de las contribuciones de este trabajo para cada caso en particular, de manera que el(la) lector(a) pueda enterarse rápidamente de las cualidades, resultados y limitaciones de las metodologías utilizadas en cada capítulo. Los resultados obtenidos en esta tesis son ilustrados vía simulaciones numéricas y/o pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad, cuyo modelo dinámico se presenta en el Apéndice.



exacto como se obtiene con el control PID en el límite de alta ganancia de retroalimentación. Los resultados se muestran en el gráfico de la figura 1.1. Se puede observar que el sistema es estable y que el error de seguimiento es muy pequeño.

El Capítulo 2 trata el problema de regulación de un sistema de control en lazo cerrado. Se presenta un ejemplo de un sistema de control en lazo cerrado y se muestra cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño. Se muestra también cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño.

El Capítulo 3 trata el problema de seguimiento de una referencia en un sistema de control en lazo cerrado. Se muestra cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño. Se muestra también cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño.

En cada uno de los capítulos se muestra cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño. Se muestra también cómo se puede diseñar un controlador PID para que el sistema sea estable y que el error de seguimiento sea muy pequeño.



---

## Capítulo 2

---

### Modelo Dinámico

#### Formulación Euler Lagrange

El tipo de robot manipuladores considerado en este trabajo puede describirse según las ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma siguiente

$$\frac{d}{dt} \left[ \nabla_{\dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right] - \nabla_q \mathcal{L}(q, \dot{q}) = Q^T \quad (2.1)$$

donde  $q, Q \in \mathbb{R}^n$  son las coordenadas generalizadas y los pares debidos a fuerzas externas, respectivamente,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q)$$

es la función Lagrangiana, la cual se supone como una función suave de sus argumentos,  $K(q, \dot{q})$  es la energía cinética, la cual tiene la forma

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y positiva definida. La función  $P(q)$  es la energía potencial, que se considera acotada inferiormente. El gradiente es un vector renglón definido como  $\nabla_z(.) := \partial(.)/\partial z$ , y  $(.)^T$  denota transposición.

Los pares debidos a fuerzas externas  $Q \in \mathbb{R}^n$  consisten en acciones de control  $\tau \in \mathbb{R}^n$ , fuerzas disipativas (fricción) las cuales pueden ser caracterizadas por funciones no negativas tipo Rayleigh  $\mathcal{F}(\dot{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , y fuerzas no disipativas  $\mathcal{N}(q, \dot{q}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  que toman en cuenta la interacción del sistema con el ambiente. De esta manera

$$Q = \tau - \mathcal{F}(\dot{q}) - \mathcal{N}(q, \dot{q}, t) \quad (2.2)$$

Debido a que las fuerzas disipativas  $\mathcal{F}(\dot{q})$  contribuyen al amortiguamiento requerido para la estabilización del sistema, sin pérdida de generalidad se considerará el caso crítico en el que  $\mathcal{F}(\dot{q}) = 0$ .

El sistema Euler-Lagrange con fuerzas externas  $Q$  puede ser escrito en la forma

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + \mathcal{N}(q, \dot{q}, t) = \tau \quad (2.3)$$

donde  $g(q) = \nabla P(q) \in \mathbb{R}^n$  y el elemento  $kj$  de  $C(q, \dot{q})$  está unívocamente determinado por los elementos de  $M(q)$  usando los símbolos de Christoffel de primera clase [40]

$$c_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \quad (2.4)$$

tal que

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (2.5)$$

Sea  $v \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q} \in \mathbb{R}^n$  y el vector de estados  $x = (q, v)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . Entonces, la dinámica del robot manipulador puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= M^{-1}(q)(-C(x)v - g(q) - \mathcal{N}(x, t) + \tau) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.6) consideran el caso de sistemas mecánicos en contacto con obstáculos móviles [12] y sistemas mecatrónicos [44]. La formulación Euler-Lagrange ha sido utilizada también para modelar la dinámica del cuerpo humano sobre una base de soporte [45], así como la dinámica de los brazos humanos [38]. En estos casos, las fuerzas no disipativas  $\mathcal{N}(q, \dot{q}, t)$  representan la interacción del cuerpo humano con obstáculos móviles.

## Propiedades de la Ecuación de Movimiento

Esta sección detalla la estructura y las propiedades de la ecuación dinámica del robot (2.3). Estas propiedades serán útiles para simplificar las pruebas de estabilidad obtenidas



en esta tesis.

## Propiedades de la Matriz de Inercia

La matriz de inercia  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cumple con las siguientes propiedades:

**P1.** Es simétrica y positiva definida

**P2.** Es acotada superior e inferiormente; es decir, existen dos escalares<sup>1</sup>  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tales que

$$\mu_1 I \leq M(q) \leq \mu_2 I$$

Entendiéndose por  $\mu_1 I \leq M(q)$  que la matriz  $(M(q) - \mu_1 I)$  es positiva semi-definida. Esto es que

$$z^T (M(q) - \mu_1 I) z \geq 0$$

para todo  $z \in \mathbb{R}^n$ . De la misma manera, la inversa de la matriz cumple con

$$\mu_2^{-1} I \leq M(q) \leq \mu_1^{-1} I$$

Esta propiedad de acotamiento puede expresarse de forma equivalente como

$$m_1 \leq \|M(q)\| \leq m_2$$

en robots prismáticos  $m_1, m_2$  son funciones escalares de la posición  $q$ .

**P3.** Es continuamente diferenciable

## Propiedades del Vector de Coriolis

El vector de fuerzas centripetas y de Coriolis  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  cumple con las siguientes propiedades.

**P4.** El término  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  es lineal en  $\dot{q}$ , por lo que  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  es cuadrático en  $\dot{q}$ . Esto es, este término es superiormente acotado por

$$\|C(q, \dot{q}) \dot{q}\| \leq \mu_b(q) \dot{q}^2$$

---

<sup>1</sup>El cálculo de las constantes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  requiere el uso de los valores propios máximo y mínimo de la matriz de inercia para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . Esta tarea puede ser complicada, pues requiere de la solución de ecuaciones no lineales. Sin embargo, existe programas como Matlab o Maple que puede ayudar a realizar los cálculos rápidamente.



donde  $\mu_b$  es una función escalar. Para brazos de juntas rotacionales  $\mu_b(q)$  es una constante independiente de  $q$ . De hecho, es posible reescribir  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  [10] de la siguiente manera

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T C_1(q) \dot{q} \\ \dot{q}^T C_2(q) \dot{q} \\ \dots \\ \dot{q}^T C_n(q) \dot{q} \end{bmatrix} = (I_n \otimes \dot{q}^T) \bar{C}(q) \dot{q}$$

donde  $C_i(q)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son matrices simétricas definidas apropiadamente.

**P5.** La matriz  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica donde

$$\dot{M}(q) = \left[ \frac{\partial M(q)}{\partial q} \right]^T (\dot{q} \otimes I_n) = (\dot{q}^T \otimes I_n) \frac{\partial M(q)}{\partial q}$$

para todo  $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y donde  $\otimes$  producto de Kronecker [40].

## Propiedades del Vector de Gravedad

El vector de gravedad  $g(q)$  cumple con las siguientes propiedades:

**P6.** El vector de pares gravitacionales  $g(q)$  está acotado para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . Esto es existen constantes finitas  $\gamma_i \geq 0$  tales que

$$\sup_{q \in \mathbb{R}^n} |g_i(q)| \leq \gamma_i, \quad i = 1 \dots n$$

**P7.** Existe una constante positiva  $k_g$  tal que

$$k_g > \|Dg(q)\|, \quad \text{para todo } q \in \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

$$\text{donde } Dg(q) = \frac{\partial g(q)}{\partial q}.$$

Los siguientes tres capítulos constituyen la primera parte de esta tesis, en donde se estudia la tarea de regulación de posición en robots manipuladores. En cada uno de los capítulos se dedica una sección al resumen de las contribuciones de este trabajo y a las conclusiones, de manera que el(la) lector(a) pueda enterarse rápidamente de los resultados y limitaciones de las metodologías utilizadas y expuestas en cada capítulo.

**Parte I**

**Regulación**



Part 1

Regulation

---

## Capítulo 3

---

# Regulación con Control Lineal PID

## Introducción

La mayoría de los robots industriales son controlados utilizando PID. En la práctica, con un controlador PID sintonizado apropiadamente, se cumplen los requerimientos de estabilidad y desempeño en las tareas de posicionamiento. Por estas razones, los controladores clásicos PID son ampliamente utilizados en la industria. Desde un punto de vista teórico, el posicionamiento de robots manipuladores ha sido ampliamente estudiado. En [17] se ha probado que con control PID y bajo ciertas consideraciones en la dinámica del robot, puede garantizarse estabilidad asintótica local en el caso de regulación. Sin embargo, aspectos como un sintonizado que garantice un desempeño deseado, no han sido estudiados [17]. El objetivo de este capítulo, es estudiar el funcionamiento de los robots manipuladores descritos por la Ecuación (2.3), bajo una ley de control PID, utilizando la teoría moderna de sistemas no lineales.

A continuación se detallan algunos resultados encontrados en la literatura. Por un lado, se sabe que los resultados sobre estabilidad de controladores PID, están lejos de ser concluyentes [4],[37]. Se cree que los controladores PID, son inadecuados para lidiar con sistemas altamente no lineales, debido a que su diseño está basado en argumentos



de tipo local [4],[37]. Por otro lado, tampoco se conoce la manera en que el dominio de convergencia del controlador es afectado por las ganancias [47]. Las razones de esto, pueden ser originadas por la dificultad del problema, lo cual empeora si además, se pretende acomodar el control clásico PID dentro del marco de la teoría de control moderna [37].

Arimoto y Miyazaki [4] propusieron una prueba de estabilidad del control PID, la cual es una extensión de la bien conocida prueba de estabilidad asintótica para controladores PD con compensación de gravedad. Esta prueba utiliza una función de Lyapunov que requiere de condiciones restrictivas en los parámetros del robot y en la matrices de ganancia. Esta prueba es de naturaleza local. Por otro lado, Rocco [37] presentó una prueba de estabilidad basada en una reformulación de la dinámica del robot, la cual está dividida en una parte lineal y en otra no lineal desconocida. Los resultados obtenidos son locales. La contribución principal de [37], es el establecimiento de la existencia de una región alrededor de la referencia donde se garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Kelly [17] propuso un procedimiento sistemático de sintonización de controladores PID. Este procedimiento requiere del conocimiento de la estructura de la matriz de inercia y del vector de pares gravitacionales. El procedimiento de sintonizado se extrae de un análisis de estabilidad local.

La mayoría de los resultados de estabilidad en el problema de regulación con controladores PID son de naturaleza local. El análisis de estabilidad reportado por Arimoto y Miyazaki [4] puede extenderse para obtener resultados no locales, pero hasta la fecha, sólo ha sido probado explícitamente por Ortega *et al.* [34]. La prueba de estabilidad utiliza el principio de invariancia de LaSalle y las condiciones de estabilidad dependen de las cotas de la matriz de inercia y del vector de pares gravitacionales.

Por otro lado, los trabajos mencionados anteriormente consideran sólo el problema de estabilidad, dejando a un lado el estudio del desempeño del sistema en lazo cerrado. El trabajo expuesto en este capítulo, se motiva por la necesidad de contar con resultados de estabilidad no local de leyes de controladores PID y por la necesidad de contar con un esquema de control sencillo que garantice un desempeño deseado.

En este trabajo, se considera el posicionamiento de robot en coordenadas articulares. El ingrediente principal en la formulación del problema, es el uso de una configuración novedosa de control PID basada en ideas de compensación de modelado. Se muestra que el desempeño inducido por el controlador inverso exacto puede obtenerse con el control PID en el límite de alta ganancia. Se derivan reglas de sintonizado con base en un



análisis de estabilidad semiglobal. Los resultados obtenidos se ilustran con simulaciones numéricas y con pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.

Con respecto a resultados previos, las contribuciones de este trabajo son las siguientes:

- (a) Se introduce una prueba de estabilidad semiglobal. La ventaja principal es que sólo requiere de algunas cotas de la matriz de inercia
- (b) Se derivan reglas de sintonizado simples, las cuales son físicamente significativas ya que están relacionadas con la dinámica del robot. Estas reglas no necesitan del conocimiento de la estructura de la matriz de inercia y torques gravitacionales como en el caso de [17].
- (c) Se estudia el caso en el cual están presentes fuerzas no disipativas (por ejemplo, un robot en contacto con un obstáculo en movimiento)
- (d) Se hace un análisis de desempeño robusto. Específicamente, se muestra que el control PID es capaz de recuperar el desempeño inducido por el control inverso en el límite de alta ganancia. Esta recuperación incluye tanto trayectorias como regiones de atracción.

## Formulación del Problema de Control

Considere las ecuaciones generales de movimiento de un robot rígido de  $n$  grados de libertad (2.3). Sea  $q_d \in \mathbb{R}^n$  una posición de referencia constante. La ley de control PID está definida por

$$\tau = K_P e_r + K_I \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma + K_D \dot{e}_r \quad (3.1)$$

donde  $e_r = q_d - q \in \mathbb{R}^n$  es el error de posicionamiento,  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son las ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente. Dado un conjunto compacto arbitrario  $W_x \subset \mathbb{R}^{2n}$ , el problema de regulación puede formularse como el de seleccionar estas matrices de ganancia de manera que

*El error de posicionamiento  $e_r(t)$  se aproxime a cero con el tiempo; es decir*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$$

*para toda condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0))^T \in W_x$ .*



## Configuración Robusta de Control Lineal PID

El objetivo de esta sección es mostrar la construcción de una configuración de control PID robusta con base en ideas de compensación de error de modelado. Esta configuración permitirá parametrizar las ganancias de control  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$ . Este paso será esencial para analizar la estabilidad del sistema y para establecer reglas de sintonizado.

Sin pérdida de generalidad y para simplificar las ecuaciones, consideraremos el caso en el que  $q_d = 0^1$ . Además debido que las fuerzas disipativas contribuyen al amortiguamiento necesario para estabilizar al sistema, se considerará el caso crítico en el que no existe disipación natural (*i.e.*,  $\mathcal{F}(\dot{q}) = 0$ ). Sea  $\psi(x, t)$  una función que contiene los términos no disipativos y de Coriolis definida como

$$\psi(x, t) = -C(x)v - g(q) - \mathcal{N}(x, t) \quad (3.2)$$

donde  $v \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $x = (q, v)^T \in \mathbb{R}^{2n}$  es el vector de estados. Entonces, debido a que el control clásico PID hace uso de un mínimo conocimiento del sistema, puede definirse una función de error de modelado  $\eta(x, \tau, t) \in \mathbb{R}^n$  como sigue

$$\eta(x, \tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} M(q)^{-1}\psi(x, t) + [M^{-1}(q) - \bar{M}^{-1}]\tau \quad (3.3)$$

donde  $\bar{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida que corresponde a un estimado constante de la matriz de inercia  $M(q)$ . Utilizando esta definición, la ecuación (2.3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= \eta(x, \tau, t) + \bar{M}^{-1}\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sean  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices positivas definidas tales que

$$A_c = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (3.5)$$

es una matriz Hurwitz. La ley de control inversa

$$\tau^{inv} = \bar{M} [-\eta(x, \tau, t) - K_1 q - K_2 v] \quad (3.6)$$

induce el comportamiento lineal en lazo cerrado  $\dot{x} = A_c x$ .

<sup>1</sup>Esto puede ser hecho mediante un cambio de coordenadas.

**Comentario 1.** *Es posible asignar un determinado desempeño en lazo cerrado, al escoger las ganancias internas  $K_1$  y  $K_2$ . Por ejemplo, si  $K_1$  y  $K_2$  son matrices diagonales, se obtiene un control independiente para cada junta del robot.*

Desafortunadamente la ley de control (3.6) no puede ser implementada debido a que se ha supuesto que la señal de error de modelado  $\eta(x(t), \tau(t), t)$  es incierta. Sin embargo, esta señal es observable (es decir, puede expresarse en términos de la entrada y la salida y sus derivadas; de hecho,  $\eta(t) \equiv \dot{v}(t) - \overline{M}^{-1}\tau(t)$ , para todo  $t \geq 0$ )<sup>2</sup>. La idea es construir un observador para estimar la no linealidad  $\eta(x, \tau, t)$  y usar esta aproximación para diseñar un controlador retroalimentado. Se propone el siguiente observador

$$\dot{\bar{\eta}} = \varepsilon^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (3.7)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro ajustable. Utilizando esta observación  $\bar{\eta}$  que aproxima a  $\eta$ , el controlador implementable es

$$\tau = \overline{M} [-\bar{\eta} - K_1 q - K_2 v] \quad (3.8)$$

El controlador resultante está compuesto por el estimador de error de modelado (3.7) y la función de retroalimentación (3.8).

**Comentario 2.** *Para implementar el estimador de error de modelado (3.7) se explota el hecho de que  $\eta \equiv \dot{v} - \overline{M}^{-1}\tau$ , de esta manera*

$$\dot{\bar{\eta}} = \varepsilon^{-1}(\dot{v} - \overline{M}^{-1}\tau - \bar{\eta}) \quad (3.9)$$

Sea  $w \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \bar{\eta} - v$ . Entonces la señal estimada de error de modelado  $\bar{\eta}(t)$  se obtiene del siguiente filtro

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\overline{M}^{-1}\tau - \varepsilon^{-1}(w + v) \\ \bar{\eta} &= \varepsilon^{-1}(w + v) \end{aligned} \quad (3.10)$$

que puede inicializarse como sigue. Debido a que la señal de error de modelado  $\eta(t)$  es incierta, puede tomarse un estimado inicial de  $\bar{\eta}(0) = 0$ , de esta manera se tiene que  $w(0) = -v(0)$ .

**Comentario 3.** *El observador (3.7) juega el papel de observador de orden reducido en la estimación de la señal de error de modelado  $\eta(t)$ .*

<sup>2</sup>En lo que resta de este capítulo, se hará un abuso de notación denotando con la misma letra  $\eta$  la función de error de modelado  $\eta(x, \tau)$  y la señal de error de modelado  $\eta(t) \equiv \eta(x(t), \tau(t))$ .



**Proposición 1.** El controlador propuesto (3.8),(3.10) es equivalente a un controlador clásico PID.

**Demostración.** De (3.10), se sabe que  $\dot{w} = -\bar{M}^{-1}\tau_c - \bar{\eta} + \bar{M}^{-1}(\tau_c - \tau)$ , donde  $\tau_c$  es la entrada de control calculada y  $\tau$  la entrada de control real. Esta ecuación puede ser combinada con (3.8) para obtener

$$w = K_1 \int_0^t q(\sigma) d\sigma + K_2 q + \bar{M}^{-1} \int (\tau_c - \tau) d\sigma \quad (3.11)$$

Entonces,  $\bar{\eta} = \varepsilon^{-1}[K_1 \int_0^t q(\sigma) d\sigma + K_2 q + v]$ . Esta expresión puede usarse en (3.8) para dar

$$\tau = \bar{M} [-(K_1 + \varepsilon^{-1}K_2)q - \varepsilon^{-1}K_1 \int_0^t q(\sigma) d\sigma - (K_2 + \varepsilon^{-1}I_{n \times n})v] + \varepsilon^{-1} \int (\tau_c - \tau) d\sigma \quad (3.12)$$

Esto muestra que la ley de control (3.8),(3.10) es equivalente al controlador clásico multivariable PID (3.1) con ganancias

$$\begin{aligned} K_P &= \bar{M}(K_1 + \varepsilon^{-1}K_2) \\ K_I &= \varepsilon^{-1}\bar{M}K_1 \\ K_D &= \bar{M}(K_2 + \varepsilon^{-1}I_{n \times n}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

y el término de "antireset wind-up"  $\varepsilon^{-1} \int (\tau_c - \tau) d\sigma$ . De esta manera, cada valor de  $\varepsilon > 0$  define un *único* conjunto de ganancias PID. ■

**Comentario 4.** El resultado de la Proposición 1 muestra que la ley de control es entrada-salida equivalente a un controlador clásico PID, pero con una estructura explícita de estimación-control. Sin embargo, esta configuración tiene dos ventajas importantes respecto de su representación estándar.

- (i) Los estados del controlador  $w \in \mathbb{R}^n$  son significativos como estimados de la dinámica del robot; esto es  $\varepsilon^{-1}(w + v)$  es un estimado del error de modelado  $\eta$  asociado con el control PID.
- (ii) Cuenta con un esquema natural de "antireset-windup" (ARW) para manejar limitaciones en la entrada de control. De hecho, si  $\tau^{sat} = sat(\tau^c)$  es el par aplicado al robot, donde  $sat(\cdot)$  es una función de saturación definida apropiadamente, entonces la ley de control (3.8),(3.10) puede escribirse como

$$\tau^c = -K_P q - K_I \int_0^t q(\sigma) d\sigma - K_D v + \varepsilon^{-1} \int_0^t (\tau^{sat}(\sigma) - \tau^c(\sigma)) d\sigma$$

donde las ganancias del control PID están dadas por (3.13). La estructura de ARW está dada por la señal retroalimentada  $\varepsilon^{-1} \int_0^t (\tau^{sat} - \tau^c) d\sigma$ . De esta manera, cuando la entrada de control se satura (i.e.,  $\tau^{sat} - \tau^c \neq 0$ ), esta señal trata de llevar el error de la entrada de control  $\tau^{sat} - \tau^c$  a cero, recalculando la integral de manera que la salida del controlador  $\tau^c$  se encuentra exactamente en el límite de la saturación [22].

## Ecuaciones en lazo Cerrado

Se tomará ventaja de la configuración controlador-observador introducida en la sección anterior para calcular las ecuaciones en lazo cerrado. Con este fin, se introduce el error de estimación  $e \stackrel{def}{=} \eta - \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces la dinámica del robot en lazo cerrado es

$$\dot{x} = A_c x + H e \quad (3.14)$$

donde  $A_c$  está dada por la ecuación (3.5) y  $H = [0_{n \times n}, I_{n \times n}]^T \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ . Por otro lado, de la ecuación (3.7) la dinámica del error de observación está dada por

$$\dot{e} = -\varepsilon^{-1} e + \dot{\eta} \quad (3.15)$$

De las ecuaciones (3.3) y (3.8), se obtiene

$$M(q)\eta = \psi(x, t) + [\bar{M} - M(q)](-\bar{\eta} + Kx) \quad (3.16)$$

donde  $K \stackrel{def}{=} (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ . Esta identidad y las ecuaciones (3.2) y (3.7) se utilizan para calcular  $\dot{\eta}$ , que está dada por

$$\dot{\eta} = -\varepsilon^{-1} M(q)^{-1} [\bar{M} - M(q)] e + \varphi(x, e, t) \quad (3.17)$$

donde

$$\varphi(x, e, t) = M(q)^{-1} \{ [\nabla_x \psi(x, t) + (\bar{M} - M(q))K][A_c x + H e] + \partial \psi(x, t) / \partial t - T_2(x)[Kx + e] \} \quad (3.18)$$

$\nabla_x \psi(x, t)$  es la matriz jacobiana de  $\psi(x, t)$  y

$$T_2(x) = \sum_{i=1}^n (\partial M / \partial q_i) \dot{q}_i = (v^T \otimes I_n) \partial M / \partial q \quad (3.19)$$



donde  $\otimes$  denota producto de Kronecker. Usando (3.17) en (3.15) se obtiene lo siguiente

$$\dot{e} = -\varepsilon^{-1}M(q)^{-1}\overline{M}e + \varphi(x, e, t) \quad (3.20)$$

Entonces, la dinámica del robot en lazo cerrado con la ley de control PID (3.8),(3.10) está completamente determinada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + H e \\ \varepsilon \dot{e} &= -M(q)^{-1}\overline{M}e + \varepsilon \varphi(x, e, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La idea para estabilizar el sistema (3.21) es la de escoger un valor suficientemente pequeño del parámetro de estimación (ganancia del observador)  $\varepsilon > 0$ . De esta forma, el sistema (3.21) puede verse como un sistema estándar singularmente perturbado donde  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $e \in \mathbb{R}^n$  son las variables lenta y rápida respectivamente y  $\varepsilon$  es el parámetro de perturbación. El sistema reducido se define haciendo  $\varepsilon = 0$  en (3.21), obteniéndose el sistema lineal

$$\dot{x} = A_c x \quad (3.22)$$

Sea  $t' = t/\varepsilon$  y  $e' = de/dt'$ . El sistema de capa límite se obtiene haciendo  $\varepsilon = 0$  en (3.21)

$$e' = -M(q)^{-1}\overline{M}e \quad (3.23)$$

## Estabilidad Robusta

Por construcción el sistema reducido (3.22) es globalmente asintóticamente estable. De hecho, existe una matriz simétrica positiva definida  $P_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisface la ecuación de Lyapunov  $A_c^T P_c + P_c A_c = -I_{n \times n}$ . Esto es, la función de Lyapunov del sistema reducido es  $V_x(x) = x^T P_c x$ . Por otro lado, la estabilidad del sistema de capa límite puede establecerse de acuerdo con el siguiente Lema.

**Lema 1.** Suponga que  $\|\Gamma(q)\| = \|I_{n \times n} - M(q)^{-1}\overline{M}\| \leq \alpha < 1$  para algún  $\alpha$ , y todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, el sistema de capa límite (3.23), es globalmente asintóticamente estable.

**Demostración.** Se reescribe el sistema de capa límite de la siguiente forma

$$e' = -(I_{n \times n} - \Gamma(q))e \quad (3.24)$$

La derivada respecto al tiempo de  $V_e = e^T e$  a lo largo de las trayectorias de (3.23) satisface

$$V_e' = -2V_e + e^T [\Gamma(q) + \Gamma(q)^T] e \leq -2(1 - \alpha)V_e < 0, \text{ para } V_e \neq 0. \quad (3.25)$$

Esto muestra que (3.24) es globalmente exponencialmente estable y su función de Lyapunov es  $V_e(e) = e^T e$ . ■

**Comentario 5.** *La suposición  $\|\Gamma(q)\| = \|I_{n \times n} - M(q)^{-1} \bar{M}\| \leq \alpha < 1$  para algún  $\alpha$ , y todo  $q \in \mathbb{R}^n$  parece ser muy restrictiva, pero no es así. Esta suposición está relacionada con la precisión con que la matriz de inercia del robot debe ser estimada, para que el sistema de capa límite sea estable. Debido a la propiedad P2 (Capítulo 1), existen dos constantes positivas  $m_{\max}$ ,  $m_{\min}$  tales que  $m_{\min} \leq \|M(q)^{-1}\| \leq m_{\max}$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . Si se elige  $\bar{M} = c^{-1}I$ , donde  $c = (m_{\max} + m_{\min})/2$ , esta elección satisface esta suposición [40].*

La siguiente proposición establece la estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.21), explotando el hecho de que su estructura es la de un sistema singularmente perturbado.

**Proposición 2.** El origen del sistema (2.3) es asintóticamente estable de forma semiglobal, bajo la ley de control PID. Esto es, para cada conjunto  $W_x \subset \mathbb{R}^{2n}$  existen ganancias  $\{K_P, K_I, K_D\}$  y un conjunto compacto  $W_e \subset \mathbb{R}^n$  tales que el origen del sistema en lazo cerrado (3.21) es asintóticamente estable y su región de atracción contiene a  $W_x \times W_e$ .

**Demostración.** Considere la configuración PID (3.8), (3.10) cuyas ganancias han sido parametrizadas con  $\varepsilon$  según la ecuación (3.13). escoja la matriz  $\bar{M}$  de manera que se satisfaga la restricción del Lema 1. Entonces, la estabilidad del robot en lazo cerrado está completamente determinada por la estabilidad del sistema (3.21). En relación a este sistema, se hace notar lo siguiente

- (a) Debido a que  $\partial \mathcal{N}(0, t) / \partial t = 0$  y que  $M(0)^{-1}$  es uniformemente acotada, se tiene que  $\varphi(0, 0, t) = M(0)^{-1} \partial \mathcal{N}(0, t) / \partial t = 0$ . De esta manera, el origen es un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (3.21).
- (b) Debido a que el estimador de error de modelado (3.10) fue inicializado como  $w(0) = -v(0)$  y debido a que la función de error de modelado es una función continua de sus argumentos, puede deducirse que  $e(0)$  está contenido en el conjunto compacto  $W_e \subset \mathbb{R}^n$  el cual contiene al origen en su interior. Esto quiere decir que el error de estimación está contenido en un conjunto compacto.



- (c) Considere el conjunto compacto  $W = W_x \times W_e \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n$  que contiene el origen en su interior, y considere la función cuadrática

$$\vartheta(x, e) = \frac{V_x(x)}{\gamma_x} + \frac{V_e(e)}{\gamma_e} \quad (3.26)$$

donde  $\gamma_x$  y  $\gamma_e$  son constantes positivas. Defina el compacto  $\Omega$  como

$$\Omega = \{(x, e) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n : \vartheta(x, e) \leq 1\} \quad (3.27)$$

Debido a que  $\vartheta(x, e)$  es una función propia de forma global, entonces  $W \subseteq \Omega$  para valores suficientemente grandes de  $\gamma_x$  y  $\gamma_e$ . Lo que implica que  $W_x \subset \Omega$  y  $W_e \subset \Omega$ .

- (d) Debido a que  $\Omega$  es un conjunto compacto, la continuidad de  $\varphi(x, e, t)$  y el hecho de que  $\varphi(0, 0, t) = 0$  implican la existencia de dos constantes positivas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  (vea Comentario 6), ambas independientes de  $\varepsilon$ , tales que

$$|\varphi(x, e, t)| \leq \beta_1 |x| + \beta_2 |e|, \text{ para todo } (x, e, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3.28)$$

Utilizando los hechos anteriores y calculando  $\dot{\vartheta}$  a lo largo de (3.21) se obtiene

$$\dot{\vartheta} \leq -\gamma_x^{-1} |x|^2 - 2\gamma_e^{-1}(\varepsilon^{-1}(1 - \alpha) - \beta_2) |e|^2 + 2(\gamma_x^{-1}\lambda_{\max}(P_c) + \gamma_e^{-1}\beta_1) |x| |e| \quad (3.29)$$

para todo  $(x, e) \in \Omega$ . Puede mostrarse que existe  $\varepsilon_{\max} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\max})$  el lado derecho de la desigualdad (3.29) es negativo definido de manera uniforme en  $\varepsilon$ . De hecho, un estimado de  $\varepsilon_{\max}$  es el siguiente

$$\varepsilon_{\max} = \frac{4(1 - \alpha)}{\beta_3^2 \gamma_x \gamma_e + 4\beta_2} \quad (3.30)$$

donde  $\beta_3 = 2(\gamma_x^{-1}\lambda_{\max}(P_c) + \gamma_e^{-1}\beta_1)$ . Entonces  $\vartheta(x, e)$  es una función de Lyapunov y el origen es asintóticamente estable. Más aún, debido a que la desigualdad (3.28) implica que  $\Omega$  es un conjunto invariante con respecto de la dinámica de (3.21), para cada  $(x(0), e(0)) \in \Omega$ , entonces  $(x(t; \varepsilon), e(t; \varepsilon)) \in \Omega$  y  $(x(t; \varepsilon), e(t; \varepsilon)) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto implica que  $\Omega$  es un estimado de la región de atracción. De esta manera, el conjunto compacto de las condiciones iniciales  $W$  está incluido en la región de atracción. En otras palabras, dada cualquier condición inicial  $|x(0)|, |e(0)|$ , según la Proposición 2, existen ganancias  $\{K_P, K_I, K_D\}$  que aseguran que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, \varepsilon)| = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t, \varepsilon)| = 0$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{\max})$ . ■

**Comentario 6.** Debido a que la función de acoplamiento  $\varphi(x, e, t)$  no es globalmente Lipchitz debido a las fuerzas de Coriolis  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ , las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado (6.23) están restringidas a algún conjunto compacto. Esto implica que el resultado de estabilidad obtenido es semiglobal. Es decir, de (3.30) puede concluirse que la estabilización de condiciones iniciales grandes ( $q(0) - q_d, \dot{q}(0)$ ) y funciones altamente no lineales, requerirán de velocidades de estimación más grandes  $\varepsilon_{\max}^{-1} < \varepsilon^{-1}$  y por lo tanto, de ganancias de controlador mayores (ver ecuación (3.13)). Esto concuerda con trabajos preliminares y con observaciones reportadas [34].

Si las matrices  $\bar{M}$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  se escogen como diagonales, entonces se obtiene un esquema de control PID descentralizado (también conocido como control independiente de juntas). Esto implica, que puede obtenerse como corolario de la Proposición 2, estabilidad asintótica semiglobal para el caso del control independiente PID.

**Corolario 1.** El origen del sistema (2.3) es asintóticamente estable de forma semiglobal con control independiente de juntas PID.

**Comentario 7.** Debe mencionarse que el resultado de la Proposición 2 fue probado anteriormente por Ortega et al. [34] para el caso en donde las fuerzas no disipativas son cero  $\mathcal{N}(q, \dot{q}, t) = 0$ . Sin embargo, la prueba mostrada aquí además de ser más simple, en el sentido de que se necesita una función de Lyapunov con menos términos, requiere sólo de algunas cotas de la matriz de inercia. De forma contrastante, el enfoque utilizado por Ortega et al. [17], [34], requiere además de cotas en el vector de gravedad  $\|\partial g(q)/\partial q\|$ .

## Desempeño Robusto

Sean  $x_r(t) = \exp(A_c t)x_r(0)$  y  $x(t, \varepsilon)$  las soluciones del sistema reducido (3.22) y del sistema perturbado (3.21) respectivamente, con base en estas definiciones, el concepto de desempeño robusto se da en la siguiente proposición.

**Proposición 3.** Para cada  $(x(0), e(0)) \in \Omega$  la siguiente expresión se cumple uniformemente en  $[0, \infty)$ :

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow x_r(t) \quad (3.31)$$



cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

**Demostración.** Según la Proposición 2, el método de expansión asintótica de soluciones (matched asymptotic expansions) puede ser utilizado para construir las soluciones de (3.21) [14]. Estas soluciones satisfacen

$$x(t, \varepsilon) = x_r(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

para todo  $(x(0), e(0)) \in \Omega$ , donde  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  se cumple uniformemente para  $t \geq 0$ . Entonces,  $x(t, \varepsilon) \rightarrow x_r(t)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . ■

El límite (3.31) establece que la solución del sistema perturbado (3.21) converge a la solución del sistema lineal (3.22) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tal comportamiento lineal es inducido por el control inverso (3.6). Utilizando la ecuación (3.3), puede mostrarse que el control inverso (3.6) es equivalente al así llamado par calculado (*computed torque control (CTC)*)

$$\tau^{CTC} = M(q)(-K_1\dot{q} - K_2v) - \psi(x, t) \quad (3.32)$$

**Corolario 2.** En la medida que el parámetro  $\varepsilon$  se aproxima a cero, el control PID (3.8), (3.10) recupera el desempeño inducido por el control de par calculado (3.32). Esto significa que  $x(t, \varepsilon) \rightarrow \exp(A_c t)x(0)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para todo  $x(0) \in W_x$ .

Aún más, debido a que el sistema reducido (3.22) es exponencialmente estable (por ejemplo,  $x_r(t) = \exp(A_c t)x(0)$ ), se tiene el siguiente corolario de la Proposición 3:

**Corolario 3.** Existe  $\varepsilon^* > 0$  tal que para  $0 < \varepsilon < \varepsilon^* \leq \varepsilon_{\max}$ , el origen del sistema (2.3) es exponencialmente estable bajo la ley de retroalimentación de estados PID.

## Guías de Sintonizado

Para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ , la parametrización en  $\varepsilon$  (3.13) define una trayectoria en el espacio de ganancias  $\{K_P, K_I, K_D\}$  para el cual se asegura la estabilidad del sistema controlado. Este hecho y el análisis de estabilidad de la sección anterior nos permite extraer reglas de sintonizado que garantizan la estabilidad y el desempeño en lazo cerrado. El procedimiento de sintonizado se expresa en términos de la matriz de inercia  $M(q)$ , de las ganancias internas  $\{K_1, K_2\}$  y del parámetro de estimación  $\varepsilon$ .

- i) Escoja  $\bar{M}$  de manera que se cumpla con la restricción del Lema 1. Es decir,  $\bar{M} = cI$  con  $c = (m_{\min} + m_{\max})/2$  (vea Comentario 5). Note que puede escogerse  $m_{\min} = 0$  y  $m_{\max} \geq \lambda_{\max}(M(q))$ , de esta manera, no es necesario conocer los valores exactos de las cotas de la matriz de inercia. Debe mencionarse que esta no es una regla estricta, de hecho, las simulaciones numéricas y experimentos realizados con el controlador, y los cuales se muestran en la siguiente sección, nos permiten observar un buen desempeño si  $\bar{M}$  se escoge como un sobrestimado de los valores de la diagonal de  $M(q)$ .
- ii) Escoja las ganancias internas  $K_1$  y  $K_2$  de acuerdo a cierto criterio de desempeño (por ejemplo: colocación de polos, etc). Si se quiere un control descentralizado, escoja las matrices  $K_1$  y  $K_2$  como  $K_1 = \text{diag}(K_{1,1}, K_{1,2}, \dots, K_{1,n})$  y  $K_2 = \text{diag}(K_{2,1}, K_{2,2}, \dots, K_{2,n})$ ; donde los escalares positivos  $K_{1,j}$  y  $K_{2,j}$  asociados al eslabón  $j$ , pueden ser parametrizadas en términos de la constante de tiempo en lazo cerrado  $\tau_{c,j}$  y del coeficiente de amortiguamiento  $\xi_{c,j}$

$$\begin{aligned} K_{1,j} &= \tau_{c,j}^{-2} \\ K_{2,j} &= 2\xi_{c,j}\tau_{c,j}^{-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

- iii) Escoja un valor suficientemente pequeño de  $\varepsilon > 0$  de manera que se obtenga un comportamiento en lazo cerrado aceptable (Proposiciones 2 y 3). Calcule las ganancias del controlador según la ecuación (3.13).

Note que  $\varepsilon$  afecta inversamente el desempeño del controlador PID. Entre menor es el valor de  $\varepsilon > 0$ , se obtiene una región de atracción más grande y el desempeño obtenido se acerca más a  $x(t) = \exp(A_c t)x(0)$ .

**Comentario 8.** *Las reglas de sintonizado descritas anteriormente son más simples que las propuestas en la literatura anteriormente [17], [34], [37]. De hecho, mientras que las reglas de sintonizado reportadas dependen de los pares gravitacionales y de las matrices de inercia y de Coriolis, las reglas propuestas en este trabajo sólo dependen de las cotas de la matriz de inercia.*

**Comentario 9.** *En la práctica, el sintonizado del control PID se hace más fácil si se escoge un esquema de control descentralizado. Esta modalidad es ampliamente utilizada en la sintonización y la aplicación de controladores industriales. Es por ello, que el Corolario 1 y la parametrización de ganancias internas (3.33) dan fundamento a esta práctica industrial.*



## Ejemplo

Para mostrar el desempeño y la estabilidad del controlador PID, se llevaron al cabo simulaciones numéricas y experimentos en un brazo mecánico de dos grado de libertad. El manipulador fue diseñado y construido en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE). El brazo mecánico se mueve en el plano vertical. Una descripción física completa del robot, así como sus parámetros pueden encontrarse en [35], [36]. En el Apéndice se muestra la descripción dinámica de brazo utilizado. Aunque los efectos de la fricción no fueron modelados, se les considera como parte de la dinámica incierta del sistema y fueron incluidos en la función de error de modelado.

Se utilizaron simulaciones numéricas para ilustrar el límite (3.31). Con este fin se eligió  $\bar{M} = \text{diag}(3.0, 0.2)$ . Esto es,  $\bar{M}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las cotas superiores de los elementos de la diagonal  $M(q)$ . La posición deseada se eligió como  $q_{d,1} = 45^\circ$ ,  $q_{d,2} = 90^\circ$ . Las ganancias internas del controlador  $K_1$  y  $K_2$  se escogieron diagonales y parametrizadas según la ecuación (3.33). Los valores numéricos de los parámetros en lazo cerrado son:  $\tau_{c,1} = 0.13$  s,  $\tau_{c,2} = 0.13$  s,  $\xi_{c,1} = 0.95$ , y  $\xi_{c,2} = 0.95$ . Las condiciones iniciales fueron  $q_1(0) = 0$  rad,  $q_2(0) = 0$  rad,  $v_1(0) = 0$  rad/s y  $v_2(0) = 0$  rad/s.

La Figura 3.1 presenta la evolución del error de posicionamiento del primer y segundo eslabón, para tres diferentes valores de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 2.0$  s,  $\varepsilon = 0.5$  s y  $\varepsilon = 0.2$  s). La Figura 3.1 también presenta la respuesta del brazo al control de par calculado (ecuación (3.32)). Puede observarse que el desempeño del controlador PID converge uniformemente al control inverso (par calculado) en la medida en que  $\varepsilon$  se aproxima a cero.

Además de simulaciones numéricas, se realizaron experimentos para evaluar el desempeño del controlador. Los parámetros utilizados fueron los mismos que en las simulaciones numéricas. La velocidad de los eslabones fue calculada mediante diferencias finitas atrasadas, con un tiempo de muestreo de 2.5 ms. La Figura 3.2 presenta la evolución de los errores de posicionamiento para tres diferentes valores de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 10.0$  s,  $\varepsilon = 1.0$  s y  $\varepsilon = 0.05$  s). Como en el caso de las simulaciones numéricas puede notarse que valores pequeños de  $\varepsilon$ , proporcionan un mejor desempeño en lazo cerrado. Sin embargo, en la Figura 3.3 puede notarse que la presencia de ruido limita el desempeño alcanzado *i.e.*, existe un valor mínimo práctico del parámetro de estimación  $\varepsilon_{\min} = \mathcal{O}(T)$  tal que el efecto del ruido puede ser despreciado. La Figura 3.3 muestra como valores más pequeños de  $\varepsilon$

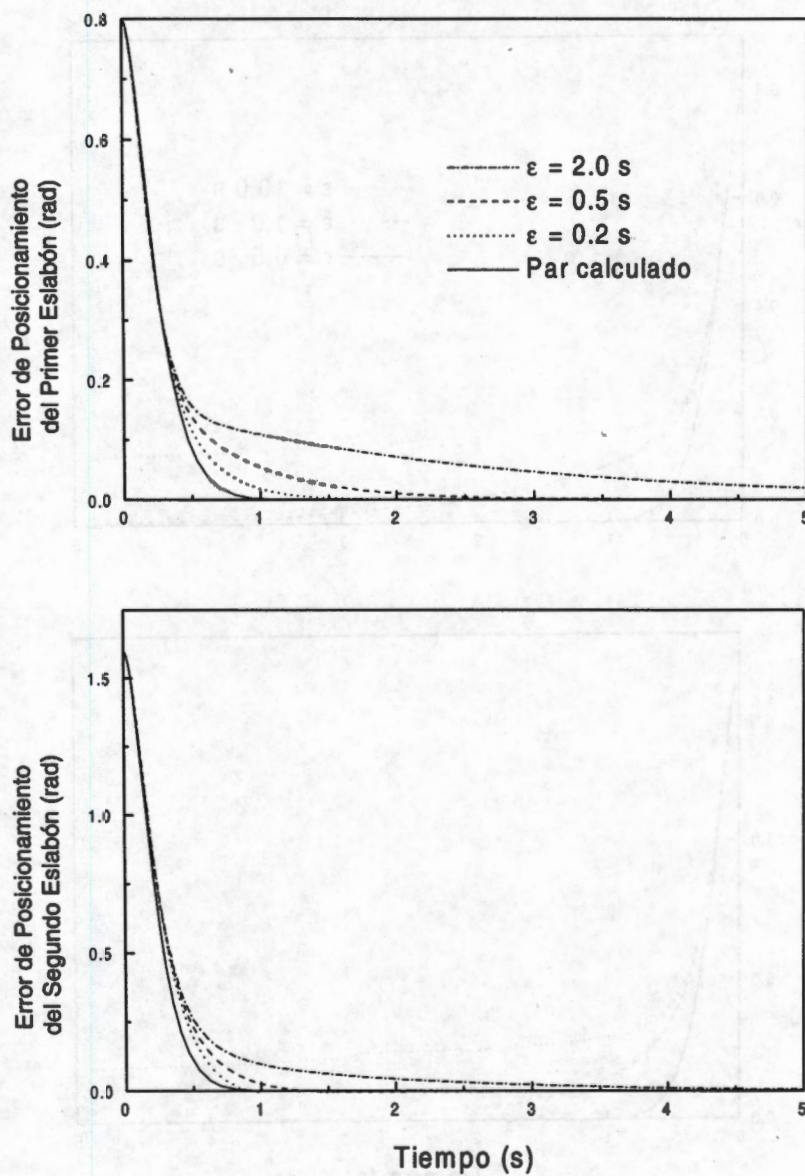


Figura 3-1 Evolución de los errores de posicionamiento en simulaciones numéricas.



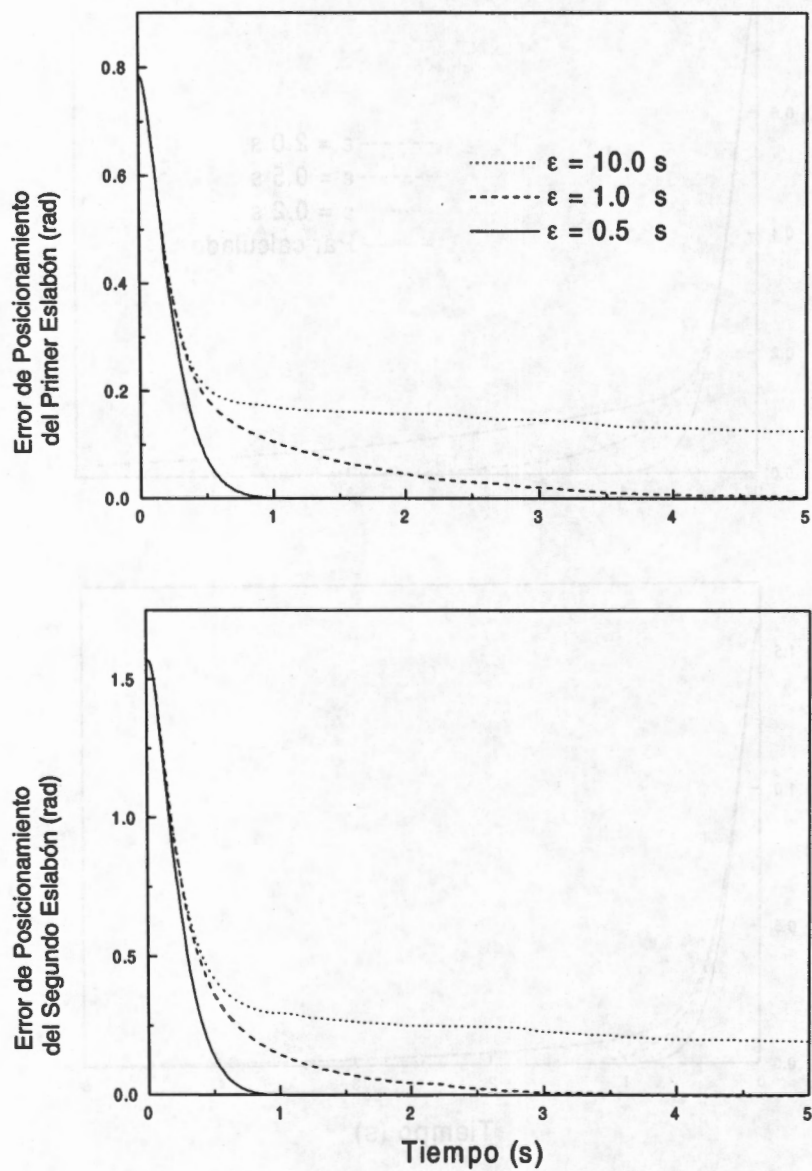


Figura 3-2 Pruebas experimentales de los errores de posición.

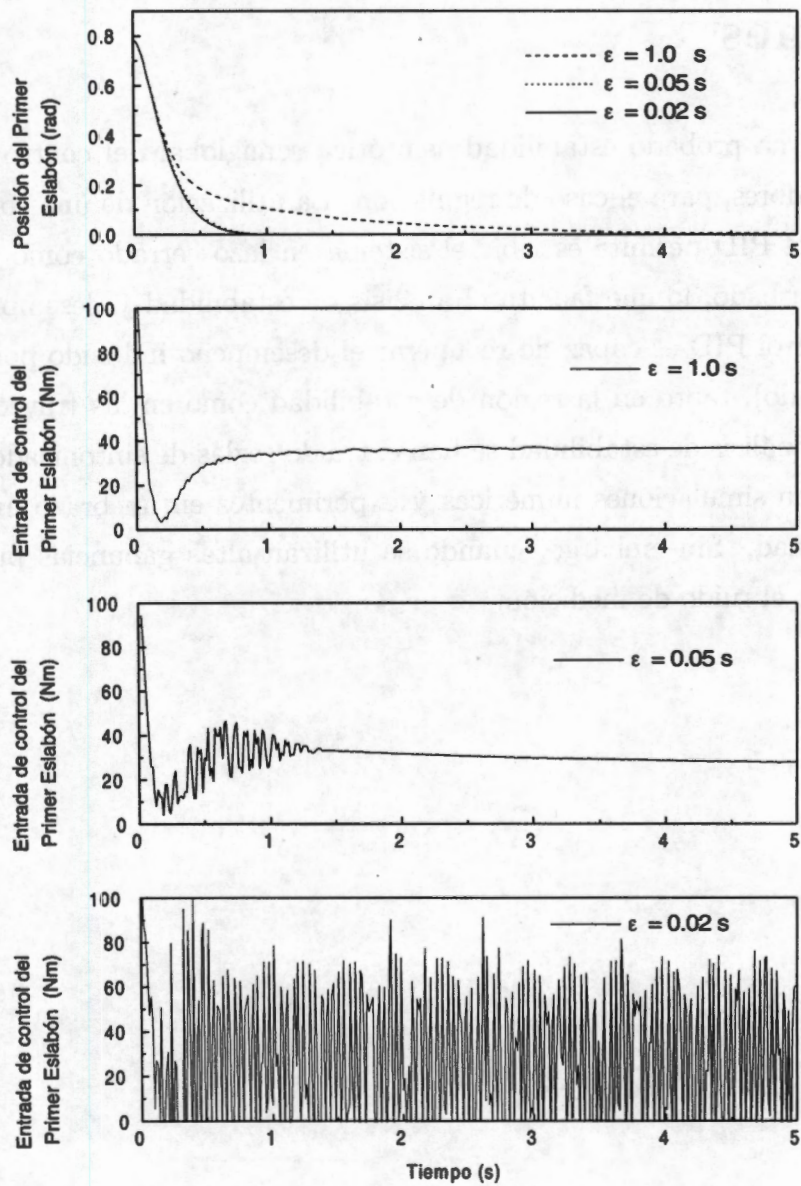


Figura 3-3 Efecto del ruido en el desempeño a lazo cerrado, como función del parámetro de estimación.



implican controladores más sensibles (*i.e.* ganancias más grandes).

## Conclusiones

En este capítulo se ha probado estabilidad asintótica semiglobal del control lineal PID en robots manipuladores, para el caso de regulación. La utilización de una configuración novedosa del control PID permite escribir el sistema en lazo cerrado como un sistema singularmente perturbado, lo que facilita el análisis de estabilidad y desempeño. Se ha probado que el control PID es capaz de recuperar el desempeño inducido por el control inverso (par calculado), tanto en la región de estabilidad como en las trayectorias (ver también [14]). Del análisis de estabilidad se han extraído reglas de sintonizado las cuales fueron ilustradas con simulaciones numéricas y experimentos en un brazo mecánico de dos grados de libertad. Sin embargo, cuando se utilizan altas ganancias puede haber efectos adversos por el ruido de medición.

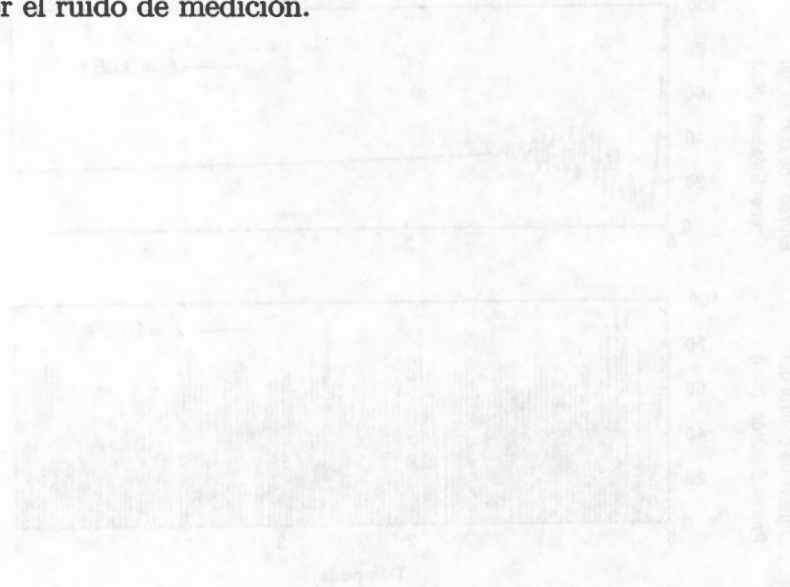


Figura 3.10 Efecto del ruido en el desempeño en lazo cerrado cuando funciona el controlador PID.

---

## Capítulo 4

---

# Estabilización con Retroalimentación de Salida

## Introducción

El control clásico PID (Proporcional-Integral-Derivativo) requiere de la retroalimentación de la velocidad del robot. En la práctica industrial, la medición de velocidad se evita debido a que el equipo de medición incrementa el costo, el volumen y el peso del robot. Por otro lado, debido a que los medidores de velocidad son muy ruidosos, éstos imponen serias restricciones en el ancho de banda alcanzable. Comúnmente, el problema de retroalimentación de velocidad se resuelve utilizando diferenciación numérica de una medida precisa de posición. Sin embargo, mientras que esta idea trabaja bien para velocidades moderadas, presenta algunos problemas en los regímenes de alta o baja velocidad, debido a que por un lado, velocidades altas requieren de tiempos de muestreos pequeño y por el otro, en bajas velocidades la posición deriva aproximaciones muy pobres de velocidad [9]. Así que, aunque esta técnica es fácil de implementar puede provocar una degradación seria del desempeño o inclusive inestabilidad [20].

En la literatura de control, el estudio sistemático de controladores de retroalimen-



tación de salida tipo PID es reciente. Se ha obtenido estabilidad asintótica global con controladores PD con compensación de gravedad [1], [7] [16]. Este diseño de control, se basa en pasividad, donde la idea principal es reestructurar la energía potencial natural del sistema y adicionarle amortiguamiento con fines de estabilidad. Para resolver la carencia de medidas de velocidad, se utiliza un compensador de primer orden, el cual hace las veces de un observador de velocidad.

En presencia de error de modelado; por ejemplo en los pares gravitacionales, esta estrategia de control presenta un sesgo en la posición. Una práctica común para eliminar el sesgo es la adición de un término de retroalimentación integral a la ley de control. (es decir, se compensan los efectos gravitatorios). Recientemente, en [34] se propone un controlador tipo PID que asegura estabilidad asintótica semiglobal y que no requiere del conocimiento exacto del vector de gravedad. Este controlador es lineal y tiene la estructura de un control PD con un doble compensador integral (es decir, un control  $PI^2D$ ). De manera interesante, tal controlador puede interpretarse como un control clásico PID con un filtro de primer orden (ver [32]).

A pesar de los avances recientes en el diseño de controladores tipo PID, algunos problemas de tipo teórico necesitan estudio adicional. En particular, no existen estudios concernientes al desempeño inducido por este tipo de controladores o sobre el efecto de la saturación del controlador en presencia de acciones integrales (*windup*).

Motivado por lo anterior, en este capítulo se deriva un controlador robusto tipo PID para posicionamiento de robots que es capaz de asegurar estabilidad semiglobal, desempeño robusto y además cuenta con un esquema de *antireset windup* para lidiar con saturaciones en el actuador. Este diseño cae en la categoría de las metodologías de error de modelado (ver por ejemplo [3]). La idea es utilizar un observador de orden reducido para estimar simultáneamente el error de modelado y la velocidad. El controlador obtenido puede reducirse en un caso particular, al controlador  $PI^2D$  estudiado por [34]. Los resultados obtenidos superan a los existentes en el sentido de que además se estudia el desempeño del controlador en lazo cerrado. Se muestra que puede recuperarse el desempeño del par calculado (retroalimentación de estados) en el límite de alta ganancia. En este sentido, este trabajo revela una conexión, aparentemente inexistente entre el control inverso y el control tipo PID.

Los resultados obtenidos son ilustrados via simulaciones numéricas y pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.

## Formulación del Problema

Considere las ecuaciones generales de movimiento de un robot rígido de  $n$  grados de libertad (2.3). Sea  $q_d \in \mathbb{R}^n$  una configuración articular deseada del robot. Suponga que sólo se tienen acceso a mediciones de posición y que además, las entradas de control del sistema están restringidas a

$$\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}] \text{ with } \tau_{\min} < g(q_d) < \tau_{\max}$$

donde  $\tau_{\min} < g(q_d) < \tau_{\max}$  quiere decir que  $\tau_{\min,i} < g_i(q_d) < \tau_{\max,i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$

Con el fin de formular apropiadamente el problema de control, se describirán brevemente a continuación, algunos resultados sobre control inverso saturado. Sea  $Sat : \mathbb{R}^n \rightarrow [\tau_{\min}, \tau_{\max}] \subset \mathbb{R}^n$  una función de saturación *decentralizada* (i.e.,  $Sat(\tau) = \text{diag}(Sat_1(\tau_1), \dots, Sat_n(\tau_n))$ ) dada por

$$Sat_i(\tau_i) = \begin{cases} \tau_{i,\min} & \text{si } \tau_i \leq \tau_{i,\min} \\ \tau_i & \text{si } \tau_{i,\min} < \tau_i < \tau_{i,\max} \\ \tau_{i,\max} & \text{si } \tau_i \geq \tau_{i,\max} \end{cases}$$

Note que  $\|Sat(\tau) - Sat(\bar{\tau})\| \leq \|\tau - \bar{\tau}\|$  para todo  $\tau, \bar{\tau} \in \mathbb{R}^n$ . Con el fin de simplificar las ecuaciones, sin pérdida de generalidad se elegirá,  $q_d \equiv 0^1$ . La versión saturada del control inverso para el robot está dado por (ver [40])

$$\tau = Sat[\varphi_{inv}(x)] \quad (4.1)$$

donde  $x = [q, v]^T \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\varphi_{inv}(x) = P(x) - M(q)Kx \quad (4.2)$$

con

$$P(x) = -C(x)v - g(q)$$

está dada por la Ecuación (3.2) y la matriz de ganancia

$$K = (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$$

se escoge de manera que la matriz en lazo cerrado

$$A_c = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Esto puede ser hecho por un cambio de coordenadas.



sea Hurwitz. Bajo la ley de control (4.1), la dinámica del robot es

$$\dot{x} = \Phi(x) \quad (4.4)$$

donde

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} v \\ M(q)^{-1} [Sat(\varphi_{inv}(x)) - P(x)] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

La condición  $\tau_{\min} < g(q_d) < \tau_{\max}$  implica que  $\{Sat[\varphi(x)] = \varphi(x)\}$ , para todo  $x$  es una vecindad del origen. De esta manera, el origen tiene una región de atracción  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  cuyo tamaño depende la magnitud de los límites de saturación  $\tau_{\min}$  y  $\tau_{\max}$ . Bajo ciertas condiciones en estos límites de saturación, el origen puede ser un atractor global (i.e.,  $\Omega^* = \mathbb{R}^{2n}$ ) (ver por ejemplo [29]). Saturar la ley de control inverso (4.2) evita la cancelación exacta de los términos no lineales y en general, limita la región de atracción y afecta adversamente el desempeño en lazo cerrado. Debe mencionarse, que en este trabajo no se analizará la manera en que los límites de saturación afectan el desempeño o la región de atracción en lazo cerrado. Simplemente, se partirá de la existencia de una región de atracción dada  $\Omega^*$ , ya sea global o no y de un desempeño (i.e. trayectoria en tiempo a lazo cerrado)  $x_r(t, x_0)$ ,  $x_0 \in \Omega^*$ , donde  $x_r(t, x_0)$  es la solución de (4.4) con condición inicial  $x_0$ .

*De esta manera, el problema de control puede formularse como el problema de diseñar una ley de control tipo PID con capacidad de recuperar el desempeño inducido por la ley de control inversa saturada (4.1). Es decir, diseñar una ley de control que sea capaz de recuperar, tanto la región de atracción  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  como el desempeño  $x_r(t, x_0)$ ,  $x(0) \in \Omega^*$ , inducido por el control (4.4).*

## Diseño de la Ley de Control

Sea  $\bar{P}(x)$  el estimado  $P(x)$ . Se define la función de error de modelado como

$$\eta(x, \tau) \stackrel{def}{=} -M(q)^{-1}P(x) + \bar{M}(q)^{-1}\bar{P}(x) + [M(q)^{-1} - \bar{M}(q)^{-1}]\tau \quad (4.5)$$

De esta manera, el sistema (2.3) puede ser descrito como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= \eta(x, \tau) + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \bar{P}(x)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

y la ley de control inversa saturada correspondiente es

$$\tau = \text{Sat} [\psi(x, \eta)] \quad (4.7)$$

donde

$$\psi(x, \eta) = \bar{M}(q) [-\eta(x, \tau) + \bar{M}(q)^{-1} \bar{P}(x) - Kx] \quad (4.8)$$

Desafortunadamente, la ley de control (4.7), (4.8) no puede ser implementada porque la señal de error de modelado  $\eta(x(t), \tau(t))$  y la velocidad  $v(t)$  no están disponibles para retroalimentarse. Sin embargo, ambas señales pueden ser reconstruidas. De hecho<sup>2</sup>,  $\eta(t) = \ddot{q}(t) - \bar{M}^{-1}(\tau(t) - \bar{P}(x(t)))$ , para todo  $t \geq 0$ . Para tratar simultáneamente los problemas de reconstrucción de la velocidad y de error de modelado se propone el siguiente observador

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= \bar{\eta} + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \bar{P}(\bar{x})] + LG_1(\dot{q} - \bar{v}) \\ \dot{\bar{\eta}} &= \phantom{\bar{v}} + L^2G_2(\dot{q} - \bar{v}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $L > 0$  es un parámetro ajustable,  $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (q, \bar{v})^T$ ,  $\bar{\eta}$  y  $\bar{v}$  son respectivamente los estimados de  $\eta$  y  $v$ , y  $G_1$  y  $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices positivas definidas que se especificarán más adelante. Con base en estas observaciones, el controlador práctico es

$$\tau = \text{Sat} [\psi(\bar{x}, \bar{\eta})] \quad (4.10)$$

El controlador resultante está compuesto del estimador (4.9) y la función de equivalencia cierta (4.10).

**Comentario 10.** Para evitar el uso de diferenciadores, el observador (4.9) puede ser implementado como

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \bar{\eta} + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \bar{P}(\bar{x})] - LG_1\bar{v}, & w_1(0) &= \bar{v}(0) - LG_1q(0) \\ \dot{w}_2 &= -L^2G_2\bar{v}, & w_2(0) &= -LG_2q(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde la velocidad estimada  $\bar{v}$  y la señal de error de modelado  $\bar{\eta}$  están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{v} &= w_1 + LG_1q \\ \bar{\eta} &= w_2 + L^2G_2q \end{aligned} \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>Para simplificar la notación se utilizará  $\eta(t)$  para denotar la señal  $\eta(q(t), v(t), \tau(t))$ .



y donde se consideró la condición inicial  $\bar{\eta}(0) = 0$ . Debido a que el estimador de error de modelado fue inicializado según las ecuaciones (4.11) y (4.12), y debido a que la función de error de modelado es una función continua de sus argumentos, puede deducirse que los errores de estimación de la velocidad y de la señal  $\eta$  están contenidos en un conjunto compacto que contiene al origen en su interior.

### Estructura del Controlador

El control retroalimentado descrito anteriormente puede ser reescrito en un formato tradicional. Sustituyendo la ley de control (4.10), en el observador (4.9) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\bar{v}} &= -K_1q - K_2\bar{v} + LG_1(\dot{q} - \bar{v}) + \bar{M}(q)^{-1}(\tau - \tau^c) \\ \dot{\bar{\eta}} &= +L^2G_2(\dot{q} - \bar{v})\end{aligned}\quad (4.13)$$

donde

$$\tau^c \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\bar{x}, \bar{\eta})$$

es la ley de control calculada (i.e., la entrada de la función saturación). Sea  $p \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$ .

De (4.13), se tiene

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (pI + LG_1 + K_2)^{-1} [(-K_1 + LG_1p)q + \bar{M}(q)^{-1}(\tau^c - \tau)] \\ \bar{\eta} &= G_2L^2 \{q - p^{-1}(pI + LG_1 + K_2)^{-1} [(-K_1 + LG_1p)q + \bar{M}(q)^{-1}(\tau^c - \tau)]\}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Esta ecuación puede ser introducida en (4.8), (4.10) para obtener

$$\tau^c = \bar{P}(x) + \bar{M}(q)C(p)q + G_{ARW}(p)(\tau^c - \tau)\quad (4.15)$$

donde

$$C(p) = K_1 + L^2G_2 + (K_2 - L^2G_2p^{-1})(pI + LG_1 + K_2)^{-1}(-K_1 + LG_1p)\quad (4.16)$$

y  $G_{ARW}(p)$  es el esquema de "antireset windup" el cual reduce los efectos de la saturación del control, dada por

$$G_{ARW}(p) = \bar{M}(L^2G_2p^{-1} - K_2)(p^2I + LG_1p + K_2p)^{-1}\bar{M}^{-1}\quad (4.17)$$

#### Casos Particulares

- 1) Cuando  $\bar{M}$  y  $\bar{P}$  son matrices constantes se obtiene un controlador lineal.

- 2) Si  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $G_1$  y  $G_2$  son matrices diagonales, el compensador lineal  $C(p)$  en (4.16) puede ser escrito como un controlador PID filtrado (ver [32])

$$C(p) = C_{PID}(p)F(p)$$

donde  $F(p)$  es un filtro pasa-bajas de primer orden

$$F(p) = (pI + K_2 + LG_1)^{-1} \quad (4.18)$$

y  $C_{PID}(p)$  es un controlador clásico PID diagonal

$$C_{PID}(p) = K_c(1 + \tau_I^{-1}p^{-1} + \tau_D p) \quad (4.19)$$

con ganancia ( $K_c$ ) y matrices de tiempo integral ( $\tau_I$ ) y derivativo ( $\tau_D$ ) (diagonales) dadas por

$$\begin{aligned} K_c &= L^2 K_2 G_2 + L K_1 G_1 \\ \tau_I &= L(L K_2 G_2 + K_1 G_1)^{-1} G_2 K_1 \\ \tau_D &= (L^2 K_2 G_2 + L K_1 G_1)^{-1} (L^2 G_2 + K_1 + L K_2 G_1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note que  $\lim_{L \rightarrow \infty} \|K_c\| = \infty$ , lo que evidencia la naturaleza de alta ganancia de la parametrización (4.20).

- 3) Si además,  $\bar{M}$  es una matriz diagonal y  $\bar{P}(x) = 0$ , el control (4.15) es un PID lineal *decentralizado* con un esquema de "antireset windup". Es interesante notar que el compensador decentralizado  $C(p) = C_{PID}(p)F(p)$  puede ser escrito de manera alternativa como un regulador PI<sup>2</sup>D (ver [34]). De esta manera, el control con retroalimentación de salida (4.15) puede ser visto como una generalización del controlador PI<sup>2</sup>D estudiado en [34].

## Dinámica en lazo Cerrado

Para evitar notación extensa y sin pérdida de generalidad, se considerará el caso cuando  $\bar{P}(x) = 0$  y  $\bar{M}(q)$  son matrices constantes. De esta manera

$$\eta(x, \tau) = -Q(x) + [M(q)^{-1} - \bar{M}^{-1}] \tau \quad (4.21)$$

donde

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} M(q)^{-1} P(x)$$



Sea  $e = (e_1, e_2)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ , donde

$$\begin{aligned} e_1 &\stackrel{\text{def}}{=} L(v - \bar{v}) \\ e_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \eta - \bar{\eta} \end{aligned}$$

es el error de estimación. De las ecuaciones (4.8), (4.10), (4.12) se tiene

$$\tau = \text{Sat} [F(x, e, \tau; L)] \quad (4.22)$$

donde

$$F(x, e, \tau; L) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{M} \left[ -Kx + L^{-1}K_2e_1 + e_2 + Q(x) - (M(q)^{-1} - \bar{M}^{-1})\tau \right]$$

Note que bajo las coordenadas  $(x, e)$ , la entrada de control  $\tau$  se encuentra definida implícitamente. Con el fin de calcular el comportamiento en lazo cerrado, deberá mostrarse que la ecuación (4.22) tiene una única solución  $\tau(x, e; L)$ .

**Lema 2.** Suponga que  $\|\bar{M}M(q)^{-1} - I\| \leq \alpha < 1$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$  y algún  $\alpha > 0$ .

Entonces, existe una única función continua  $\tau = \Theta(x, e; L)$  que es solución de (4.22).

**Demostración.** Sea  $\Pi(x, e, \tau; L) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sat} [F(x, e, \tau; L)]$ . Debido a que  $\|\text{Sat}(F) - \text{Sat}(F_1)\| \leq \|F - F_1\|$ , se tiene que para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $e \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $L \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|\Pi(x, e, \tau; L) - \Pi(x, e, \tau_1; L)\| &\leq \|\bar{M}M(q)^{-1} - I\| |(\tau - \tau_1)| \\ &\leq \alpha |(\tau - \tau_1)| \end{aligned}$$

Esto muestra que  $\Pi(x, e, \tau; L)$  es una *contracción* [21]. Entonces, el teorema de contracción de mapas Banach implica la existencia y unicidad de una función continua  $\tau = \Theta(x, e; L)$  que es solución de la ecuación (4.22). ■

**Proposición 4.** La función  $\Theta(x, e; L)$  satisface que:

- a)  $\Theta(x, e; L)$  está acotada y<sup>3</sup> es  $\mathcal{O}(L^r)$ ,  $r \leq 0$ ,
- b)  $\Theta(0, 0; L) = g(0)$ .
- c)  $\Theta(x, 0; L) = \text{Sat} [\varphi_{\text{inv}}(x)]$ .

<sup>3</sup>Una función de  $L$  se denota  $\mathcal{O}(L^r)$  cuando para todo  $r \in [0, r_*]$  ó  $r \in [r_*, 0]$  su norma es menor que  $cL^r$ , donde  $c > 0$  y  $r_*$ ,  $r$  son algunas constantes.

**Demostración:**

- a) Que la función  $\tau = \Theta(x, e; L)$  esté acotada, es una consecuencia del hecho de que  $\tau = \text{Sat}[F(x, e, \tau; L)] \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $e \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $L > 1$ . Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\Theta(x, e; L) - \Theta(x, e; L_1)\| &\leq \|\text{Sat}[F(x, e, \tau; L)] - \text{Sat}[F(x, e, \tau; L_1)]\| \\ &\leq \|\overline{M}K_2e_1\| |L^{-1} - L_1^{-1}| \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $e \in \mathbb{R}^{2n}$ , de manera que  $\Theta(x, e; L)$  es  $\mathcal{O}(L^r)$ ,  $r \leq 1$ . Que  $\Theta(x, e; L)$  sea  $\mathcal{O}(L^r)$  con  $r \leq 0$  implica que esta función no crece con  $L$ . Este hecho será esencial en la prueba de estabilidad del sistema en lazo cerrado que se realizará más adelante.

- b) Debido a que  $Q(0) = M(0)^{-1}g(0)$ , la condición  $\tau_{\min} < g(0) < \tau_{\max}$  implica que  $\tau = g(0)$  es una solución de (4.22) para  $x = 0$  y  $e = 0$ . El lema anterior implica que  $\tau = g(0)$  es la única solución. Entonces,  $\Theta(0, 0; L) = g(0)$ .
- c) Puede hacerse de manera similar a la prueba de la Proposición A.2 en [3], así que será omitido por brevedad. ■

Utilizando el Lema 2 y la Proposición 4.c se tiene

$$\dot{x} = H(x, e; L) \quad (4.23)$$

donde

$$H(x, e; L) = \begin{pmatrix} v \\ M(q)^{-1}\Theta(x, e; L) - Q(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.24)$$

Note que  $H(0, 0; L) = 0$  (Proposición 4.b). Por otro lado, se tiene que  $\dot{e}_1 = L(\dot{v} - \ddot{v})$ . Usando las ecuaciones (4.6), (4.13) en esta expresión se tiene que

$$\dot{e}_1 = L(e_2 - G_1e_1)$$

Más aún,  $\dot{e}_2 = \dot{\eta} - \ddot{\eta} = \dot{\eta} - LG_2e_1$ . Entonces de (4.5) se tiene<sup>4</sup>

$$\dot{\eta} = - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) H(x, e) + (v^T \otimes I_{n \times n}) \left( \frac{\partial M^{-1}}{\partial q} \right) \tau + [M(q)^{-1} - \overline{M}^{-1}] \dot{\tau} \quad (4.25)$$

<sup>4</sup>Los argumentos de las funciones serán omitidos por simplicidad, dándose explícitamente sólo cuando pueda surgir confusión.



donde  $\otimes$  denota producto de Kronecker [8]. Con el fin de calcular la derivada respecto al tiempo de la señal de error de modelado  $\eta(t)$ , se requerirá calcular la derivada en tiempo de la entrada de control  $\tau$ . En este caso, se tiene que  $\tau = \text{Sat}(\psi(\bar{x}, \bar{\eta}))$ , donde  $\psi(\bar{x}, \bar{\eta}) = \bar{M}[-\bar{\eta} - K\bar{x}]$ .

**Comentario 11.** Debido a que la función de saturación  $\text{Sat}_i(\tau_i)$  tiene dos puntos no diferenciables ( $\tau_i = \tau_{i,\max}$  y  $\tau_i = \tau_{i,\min}$ ), es necesario hacer ciertas consideraciones para calcular la derivada en tiempo de  $\text{Sat}(\psi(\bar{x}, \bar{\eta}))$ . Debido a que  $\text{Sat}_i(\tau_i)$  es continua y sólo no diferenciable en dos puntos aislados, es posible obtener una aproximación suave  $\text{Sat}_{\varepsilon,i}(\tau_i)$  tal que

$$|\text{Sat}_{\varepsilon,i}(\tau_i) - \text{Sat}_i(\tau_i)| \begin{cases} < \delta(\varepsilon) & \text{si } \tau_i \in \mathcal{N}_{\max}(\varepsilon) \cup \mathcal{N}_{\min}(\varepsilon) \\ = 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{N}_{\max}(\varepsilon)$  y  $\mathcal{N}_{\min}(\varepsilon)$  son respectivamente vecindades de tamaño  $\varepsilon$  de  $\tau_{i,\max}$  y  $\tau_{i,\min}$ , y  $\delta(\varepsilon)$  es una función suave no negativa que cumple con  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$  (ver [11]). Esto significa que  $\text{Sat}_{\varepsilon,i}(\tau_i) \rightarrow \text{Sat}_i(\tau_i)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y la función suave  $\text{Sat}_{\varepsilon,i}(\tau_i)$  está arbitrariamente cerca de la función no diferenciable  $\text{Sat}_i(\tau_i)$  (i.e., el error de aproximación  $\delta(\varepsilon)$  puede hacerse arbitrariamente pequeño).

En vista de los hechos establecidos, para el análisis de estabilidad se considera que la entrada de control está dada por  $\tau = \text{Sat}_{\varepsilon}(\psi(\bar{x}, \bar{\eta}))$ . Entonces

$$\dot{\tau} = \left( \frac{d\text{Sat}_{\varepsilon}(\psi)}{d\psi} \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \right)$$

y usando el hecho de que  $x = \bar{x} - B_1 e_1$ , donde  $B_1 = (0_n, L^{-1}1_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ , se obtiene

$$\dot{\tau} = (d\text{Sat}_{\varepsilon}(\psi)/d\psi) \bar{M}[-LG_2 e_1 - KH(x, e; L) - B_2 e] \quad (4.26)$$

donde  $B_2 = (G_1, I_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ . Usando esta expresión en (4.25), se puede escribir la dinámica del error de estimación como

$$\dot{e} = L(A_o + \kappa(x, e))e + \phi(x, e; L)$$

donde

$$A_o = \begin{bmatrix} -G_1 & I_{n \times n} \\ -G_2 & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

y  $\kappa(x, e)$  es una matriz de dimensión  $2n$  dada por

$$\kappa(x, e) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ (M^{-1} - \bar{M}^{-1}) (dSat_e(\vartheta(x, e))/d\vartheta) \bar{M} G_2 & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

con

$$\vartheta(x, e) \stackrel{def}{=} \psi(x + B_1 e_1, \eta(x, \Theta(x, e; L)) - e_2)$$

y

$$\begin{aligned} \phi(x, e; L) = & - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) H(x, e) + (v \otimes I_n) \left( \frac{\partial M^{-1}}{\partial q} \right) \Theta(x, e; L) \\ & - [M(q)^{-1} - \bar{M}] (dSat_e(\vartheta)/d\vartheta) \bar{M} (KH(x, e; L) + B_2 e) \end{aligned} \quad (4.29)$$

**Proposición 5.** La función  $\phi(x, e; L)$  satisface

- a)  $\phi(0, 0; L) = 0$ , para todo  $L$ , y
- b)  $\phi(x, e; L)$  es  $\mathcal{O}(L^r)$ ,  $r \leq 0$ .

**Demostración:**

- a) Es consecuencia directa del hecho de que  $H(0, 0; L) = 0$ ,
- b) Debido a que  $\Theta(x, e; L)$  es  $\mathcal{O}(L^r)$ ,  $r \leq 0$  (Proposición 4.9), se tiene que  $H(x, e; L)$  es también de orden  $\mathcal{O}(L^r)$ ,  $r \leq 0$ . El resultado se deriva de una inspección directa de la ecuación (4.24). ■

## Análisis de Estabilidad

Resumiendo, la dinámica en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H(x, e; L) \\ \dot{e} &= L(A_o + \kappa(x, e))e + \phi(x, e; L) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para  $L \gg 1$ , el sistema (4.30) es un sistema no lineal singularmente perturbado, donde  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $e \in \mathbb{R}^{2n}$  son respectivamente las variables lenta y rápida. El sistema reducido es

$$\dot{x} = H(x, 0, L) \quad (4.31)$$



y el sistema de capa límite es

$$e' = (A_o + \kappa(x, e)) e \quad (4.32)$$

donde  $e' = de/d\xi$  y el tiempo escalado  $\xi = Lt$ .

**Lema 3.** Suponga que  $\|\overline{M}M(q)^{-1} - I_{n \times n}\| \leq \alpha < 1$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$  y algún  $\alpha > 0$ . Si las matrices  $G_1$  y  $G_2$  se escogen como

$$G_1 = 2I_{n \times n}, \quad G_2 = I_{n \times n} \quad (4.33)$$

Entonces, el sistema de capa límite (4.32) es uniforme y exponencialmente estable alrededor del origen. Esto es, existe una matriz definida positiva  $P_e$  tal que  $V_e \stackrel{\text{def}}{=} e^T P_e e$  es una función de Lyapunov para el sistema (4.32).

**Demostración.** Se reescribe el sistema (4.32) como sigue

$$e' = A_o e + DF_2(x, e) E e \quad (4.34)$$

donde  $D^T = [0_{n \times n}, \gamma I_{n \times n}]$ ,  $E = [I_{n \times n}, 0_{n \times n}]$ ,

$$F_2(x, e) = -\gamma^{-1} [M^{-1} - \overline{M}^{-1}] (d\text{Sat}_e(\vartheta(x, e))/d\vartheta) \overline{M}$$

y  $\alpha < \gamma < 1$ . Con el fin de determinar la estabilidad del sistema (4.34), se hará uso del Teorema 2.7 en [19], el cual establece que el origen del sistema (4.34) es globalmente exponencialmente estable si y sólo si:

- a)  $A_o$  es Hurwitz,
- b)  $\|F_2(x, e)\| \leq 1$ , y
- c)  $\|E(sI - A_o)^{-1}D\|_\infty < 1$ .

Por construcción,  $A_o$  es Hurwitz. Por otro lado, la condición c) se satisface debido a que

$$\|E(sI - A_o)^{-1}D\|_\infty = \left\| \frac{\gamma}{(s+1)^2} I_{n \times n} \right\|_\infty \leq \gamma < 1$$

y la condición b) se satisface si

$$\|F_2(x, e)\| = \left\| \gamma^{-1} [M^{-1} - \overline{M}] \frac{d\text{Sat}_e(\vartheta)}{d\vartheta} \overline{M} \right\| \leq \gamma^{-1} \|M^{-1}\overline{M} - I_{n \times n}\|$$

Puede mostrarse que para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|M(q)^{-1}\bar{M} - I_{n \times n}\| = \|\bar{M}M(q)^{-1} - I_{n \times n}\| = \alpha < 1$$

Esto quiere decir que

$$\|F_2(x, e)\| \leq \gamma^{-1} \|M^{-1}\bar{M} - I_{n \times n}\| \leq \gamma^{-1}\alpha < 1$$

Esto concluye la prueba. ■

**Comentario 12.** La condición  $\|\bar{M}M(q)^{-1} - I_{n \times n}\| \leq \alpha < 1$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$  y algún  $\alpha > 0$ , de los Lemas 2 y 3 parece ser muy restrictiva, pero no es así. Esta suposición está relacionada con la precisión con la que la matriz de inercia del robot debe ser estimada. Debido a la propiedad P2 la matriz de inercia cumple que  $m_{\min} \leq \|M(q)^{-1}\| \leq m_{\max}$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . Si la estructura de la matriz de inercia del robot es conocida,  $m_{\min} = \lambda_{\min}(M(q)^{-1})$  y  $m_{\max} = \lambda_{\max}(M(q)^{-1})$  pueden tomarse. Si  $\bar{M} = c^{-1}I$ , donde  $c = (m_{\max} + m_{\min})/2$ , entonces

$$\|\bar{M}M(q)^{-1} - I_{n \times n}\| \leq \frac{m_{\max} - m_{\min}}{m_{\max} + m_{\min}} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha < 1$$

Es por ello que siempre existe una elección de  $\bar{M}$  que satisface la suposición de los Lemas 2 y 3.

**Proposición 6.** (Recuperación de la región de atracción) Suponga que

$$\|\bar{M}M(q)^{-1} - I_{n \times n}\| \leq \alpha < 1$$

para todo  $q \in \mathbb{R}^n$  y algún  $\alpha > 0$ . El origen de sistema (2.3) es estabilizable asintótica y semiglobalmente con respecto al conjunto  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  por la ley de retroalimentación de salida tipo PID (4.9), (4.10). Esto es, para cada conjunto compacto  $W_x \subset \Omega^*$  existen parámetros de control  $\{K_c, \tau_I, \tau_D\}$  dados por la ecuación (4.20) tales que el origen del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable y cuya base de atracción contiene a  $W_x$ .

**Demostración.** Se tiene los siguientes hechos

- (a) Debido a que para todo  $L > 0$ ,  $H(0, 0; L) = 0$  y  $\phi(0, 0; L) = 0$ , el origen es un punto de equilibrio del sistema.



- (b) Debido a que  $H(x, e; L)$  y  $\phi(x, e; L)$  son funciones suaves de sus argumentos, estas funciones tienen derivadas acotadas en conjuntos compactos.
- (c) Usando el Lema 2, el sistema de capa límite (4.32) es uniforme y exponencialmente estable, lo que quiere decir que existe una matriz definida positiva  $P_e$  tal que  $V(e) = e^T P_e e$  es una función de Lyapunov para el sistema (4.32).
- (d) Usando la Proposición 5, el sistema reducido  $\dot{x} = H(x, 0; L) = \Phi(x)$  (ver Ec. (4.29)), es globalmente asintóticamente estable alrededor del origen con respecto a la región  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ , que es su región de atracción<sup>5</sup>.

El Teorema 3 de [14] implica la existencia de una constante positiva  $L_{\min}$  tal que para todo  $L > L_{\min}$ , el origen del sistema (2.3) es asintóticamente estable con base de atracción  $\Omega_L \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ . Más aún, si  $\Omega_{L,x}$  es la proyección de  $\Omega_L$  de las coordenadas  $x$ , entonces

$$\Omega_{L,x} \rightarrow \Omega^* \text{ cuando } L \rightarrow \infty$$

Esto concluye la prueba. ■

**Comentario 13.** *Además del interés práctico de asegurar estabilidad cuando se tienen entradas de control saturadas, existe otra motivación para introducir las saturaciones en el lazo de control. Esta reside en el hecho de que el observador (4.13) es de alta ganancia, lo cual permite la recuperación de la región de atracción  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ . Sin embargo, la alta ganancia puede introducir valores muy grandes de los estimados de velocidad  $\bar{v}$  y del error de modelado  $\bar{\eta}$  en un periodo corto ( $\mathcal{O}(L^{-1})$ ) de tiempo. Este fenómeno es conocido como "peaking" (ver [13]). Introducir un control saturado es una manera de reducir el efecto desestabilizante del "peaking", asegurando que las señales  $(\bar{v}, \bar{\eta})$  convergen a las reales  $(v, \eta)$ .*

<sup>5</sup>El hecho de que las acciones de control estén limitadas, limita también la región de atracción del controlador. En este contexto, el concepto de estabilidad global del origen con respecto a una región  $\Omega^*$ , quiere decir que el conjunto  $\Omega^*$  coincide exactamente con la región de atracción. Como se verá más adelante, la región de atracción del sistema bajo la acción del control PID saturada, no coincide con  $\Omega^*$ . Sin embargo, puede utilizarse el parámetro  $L$  para hacer que la región de atracción tienda a  $\Omega^*$ , a este concepto se le llamará semiglobalidad con respecto a una región  $\Omega^*$ .

El siguiente resultado muestra que la ley de retroalimentación de salida tipo PID es capaz de recuperar el desempeño inducido por el control inverso (retroalimentación de estados).

**Proposición 7. (Recuperación del desempeño)** Para cada  $x(0) = x_0 \in \Omega_{L,x}$ , la siguiente expresión se cumple uniformemente en  $[0, \infty)$ :

$$x(t, x_0, L) \rightarrow x_r(t, x_0) \quad (4.35)$$

cuando  $L \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donde  $x(t, x_0, L)$  y  $x_r(t, x_0)$  son respectivamente soluciones del sistema (4.30) y (4.31).

**Demostración.** Usando la Proposición 6, el método de expansión asintótica de soluciones puede ser usado para construir las soluciones de (4.30) [14]. Estas soluciones satisfacen

$$x(t, x_0, L) = x_r(t, x_0) + \mathcal{O}(L^{-1}) \quad (4.36)$$

para todo  $(x(0), e(0)) \in \Omega_L$ , donde  $\mathcal{O}(L^{-1})$  se cumple uniformemente para  $t \geq 0$ . Entonces,  $x(t, x_0, L) \rightarrow x_r(t, x_0)$  cuando  $L \rightarrow \infty$ . ■

**Comentario 14.** El límite (4.35) establece que cuando  $L \rightarrow \infty$ , la solución del sistema no lineal singularmente perturbado (4.30) converge uniformemente a la solución del sistema (4.31). De esta manera, la Proposición 7 implica que cuando el parámetro de observación  $L \rightarrow \infty$ , el controlador propuesto recupera el desempeño inducido por el control inverso saturado (4.1). Por supuesto, que el parámetro del observador de alta ganancia está limitado por el ruido de medición y por la dinámica no modelada (por ejemplo: la dinámica del motor), los cuales son inevitables. Sin embargo, el parámetro del observador provee una dirección en la cual, el desempeño del controlador puede mejorarse. Más precisamente, valores más grandes de  $L$  resultan en comportamientos dinámicos con mejor desempeño.

## Guías de Sintonizado

Para  $L > L_{\min}$ , el sistema (4.9)-(4.10) define un controlador tipo PID, que asegura estabilidad asintótica en lazo cerrado. Este hecho y el análisis de estabilidad presentado con anterioridad, permite derivar reglas de sintonizado que aseguran una implementación estable del controlador



- a) Escoja  $\bar{M}$  de manera que se cumpla con la restricción del Lema 3. Es decir,  $\bar{M} = cI$  con  $c = (m_{\min} + m_{\max})/2$ . Note que puede escogerse  $m_{\min} = 0$  y  $m_{\max} \geq \lambda_{\max}(M(q))$ , de esta manera, no es necesario conocer los valores exactos de las cotas de la matriz de inercia.
- b) Escoja las ganancias internas  $K_1$  y  $K_2$  de acuerdo a cierto criterio de desempeño (por ejemplo: colocación de polos, etc). Si se quiere un control descentralizado, escoja las matrices  $K_1$  y  $K_2$  como  $K_1 = \text{diag}(K_{1,1}, K_{1,2}, \dots, K_{1,n})$  y  $K_2 = \text{diag}(K_{2,1}, K_{2,2}, \dots, K_{2,n})$ ; donde los escalares positivos  $K_{1,j}$  y  $K_{2,j}$  asociados al eslabón  $j$  pueden ser parametrizados en términos de la constante de tiempo en lazo cerrado  $\tau_{c,j}$  y del coeficiente de amortiguamiento  $\xi_{c,j}$

$$\begin{aligned} K_{1,j} &= \tau_{c,j}^{-2} \\ K_{2,j} &= 2\xi_{c,j}\tau_{c,j}^{-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

- c) Elija un valor suficientemente grande de  $L$  de manera que se obtenga un comportamiento en lazo cerrado aceptable (Proposiciones 6 y 7). Como regla heurística no escoja valores de  $L$  mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Estas guías de sintonizado, corroboran la usanza industrial. Aún más, el sintonizado del controlador tipo PID es particularmente fácil, en vista del hecho de que, a pesar de la limitación en la ganancia del observador por la existencia del ruido de medición y la dinámica no modeada, la robustez del sistema en lazo cerrado se incrementa monótonicamente con  $L$ .

## Ejemplo

Para mostrar el desempeño y la estabilidad del controlador tipo PID, se realizaron simulaciones numéricas y experimentos en un brazo mecánico de dos grados de libertad. En el Apéndice se hace una breve descripción de la dinámica del brazo mecánico utilizado.

Se eligieron  $\bar{P}(x) = 0$  y  $\bar{M} = \text{diag}(3.0, 0.2)$  (i.e.,  $\bar{M}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las cotas superiores de los elementos de la diagonal de la matriz  $M(q)$ ). Las ganancias de control  $K_1$  y  $K_2$  se escogieron diagonales y parametrizadas según la ecuación (4.20). Los valores de las constantes de tiempo y de los coeficientes de amortiguamiento

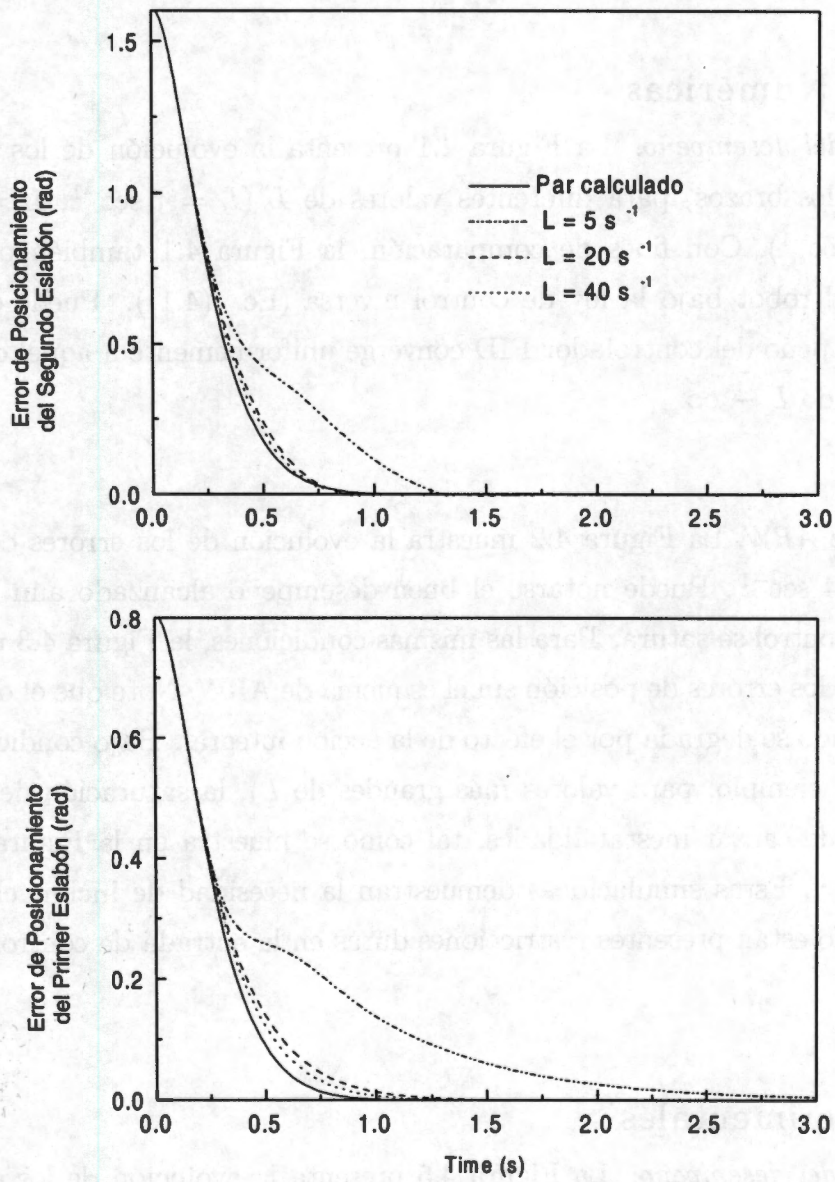


Figura 4-1 Evolución de los errores de posicionamiento en simulaciones numéricas.



en lazo cerrado fueron  $\tau_{c,1} = 0.15 \text{ s}$ ,  $\tau_{c,2} = 0.15 \text{ s}$ ,  $\xi_{c,1} = 0.95$ , y  $\xi_{c,2} = 0.95$ . La posición de referencia fue  $q_{d,1} = 0.8 \text{ rad}$  y  $q_{d,2} = 1.6 \text{ rad}$ . Los límites de saturación fueron  $-\tau_{1,\min} = \tau_{1,\max} = 200 \text{ Nm}$  y  $-\tau_{2,\min} = \tau_{2,\max} = 15 \text{ Nm}$ .

## Simulaciones Numéricas

- a) *Recuperación del desempeño.* La Figura 4.1 presenta la evolución de los errores de posición de los brazos, para diferentes valores de  $L$  ( $L = 5 \text{ sec}^{-1}$ ,  $L = 20 \text{ sec}^{-1}$  y  $L = 40 \text{ sec}^{-1}$ ). Con fines de comparación, la Figura 4.1 también presenta la respuesta del robot bajo la ley de control inversa (Ec. (4.1)). Puede observarse que el desempeño del controlador PID converge uniformemente a aquel del control inverso cuando  $L \rightarrow \infty$ .
- b) *El esquema de ARW.* La Figura 4.2 muestra la evolución de los errores de posición para  $L = 14 \text{ sec}^{-1}$ . Puede notarse el buen desempeño alcanzado aún cuando la entrada de control se satura. Para las mismas condiciones, la Figura 4.3 muestra la evolución de los errores de posición sin el esquema de ARW. Note que el desempeño en lazo cerrado se degrada por el efecto de la acción integral. Bajo condiciones más severas (por ejemplo, para valores más grandes de  $L$ ), la saturación de la acción integral puede causar inestabilidades, tal como se muestra en la Figura 4.4 para  $L = 16 \text{ sec}^{-1}$ . Estas simulaciones demuestran la necesidad de incluir el esquema ARW cuando están presentes restricciones duras en la entrada de control.

## Pruebas Experimentales

- a) *Recuperación del desempeño.* La Figura 4.5 presenta la evolución de los errores de posición de los brazos para tres diferentes valores de  $L$  ( $L = 5 \text{ sec}^{-1}$ ,  $L = 20 \text{ sec}^{-1}$  y  $L = 40 \text{ sec}^{-1}$ ). Como en el caso de las simulaciones numéricas, valores más grandes de  $L$ , permiten obtener mejores desempeños. Debe mencionarse que este buen desempeño fue alcanzado con el control lineal tipo PID, el cual requiere de un conocimiento mínimo del sistema (estimado constante de la matriz de inercia). El tiempo de muestreo utilizado es de 2.5 ms, el controlador se discretizó utilizando diferencias finitas atrasadas.

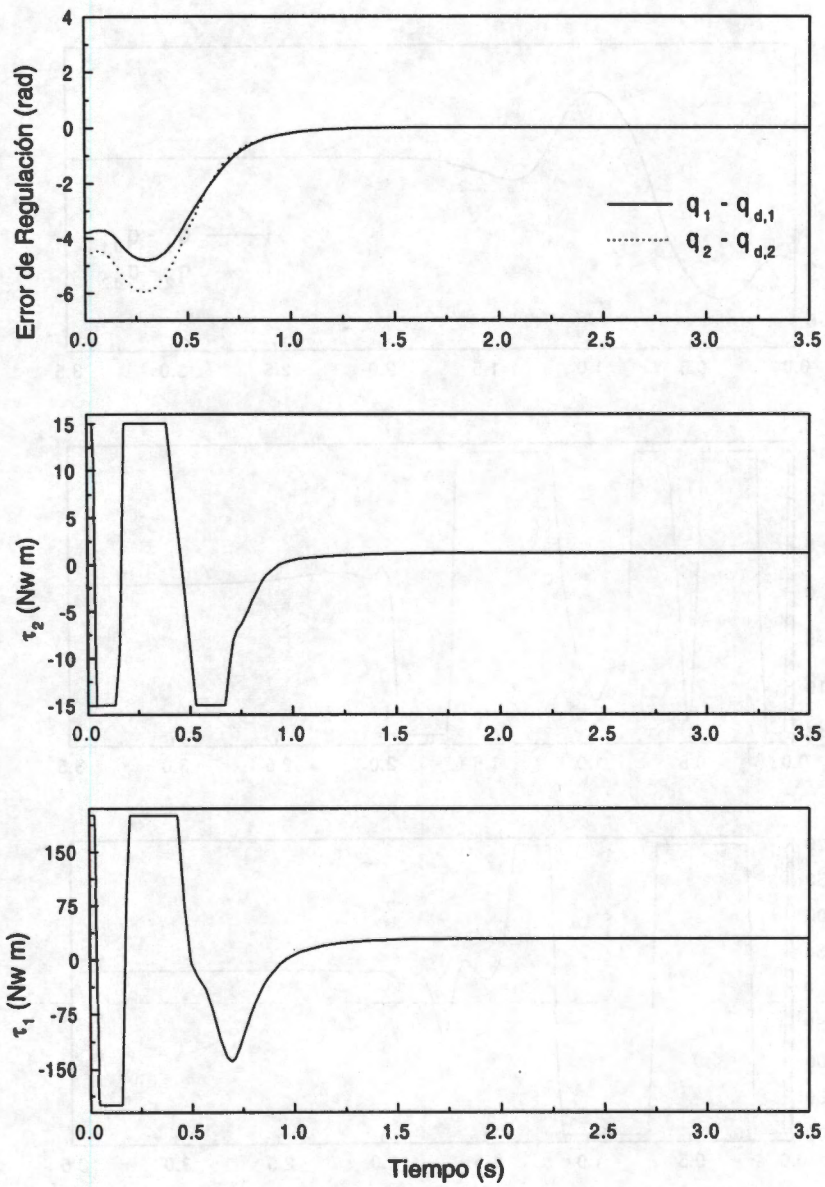


Figura 4-2 Desempeño con el esquema ARW.



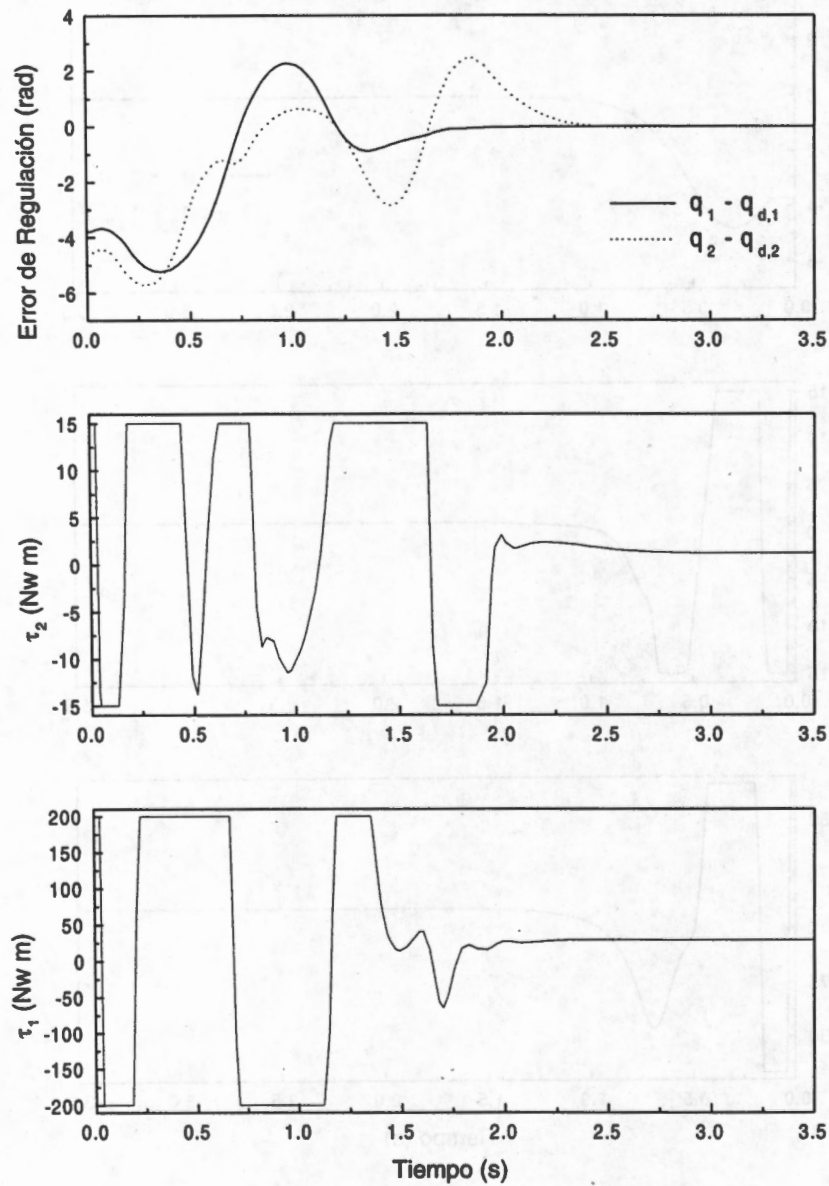
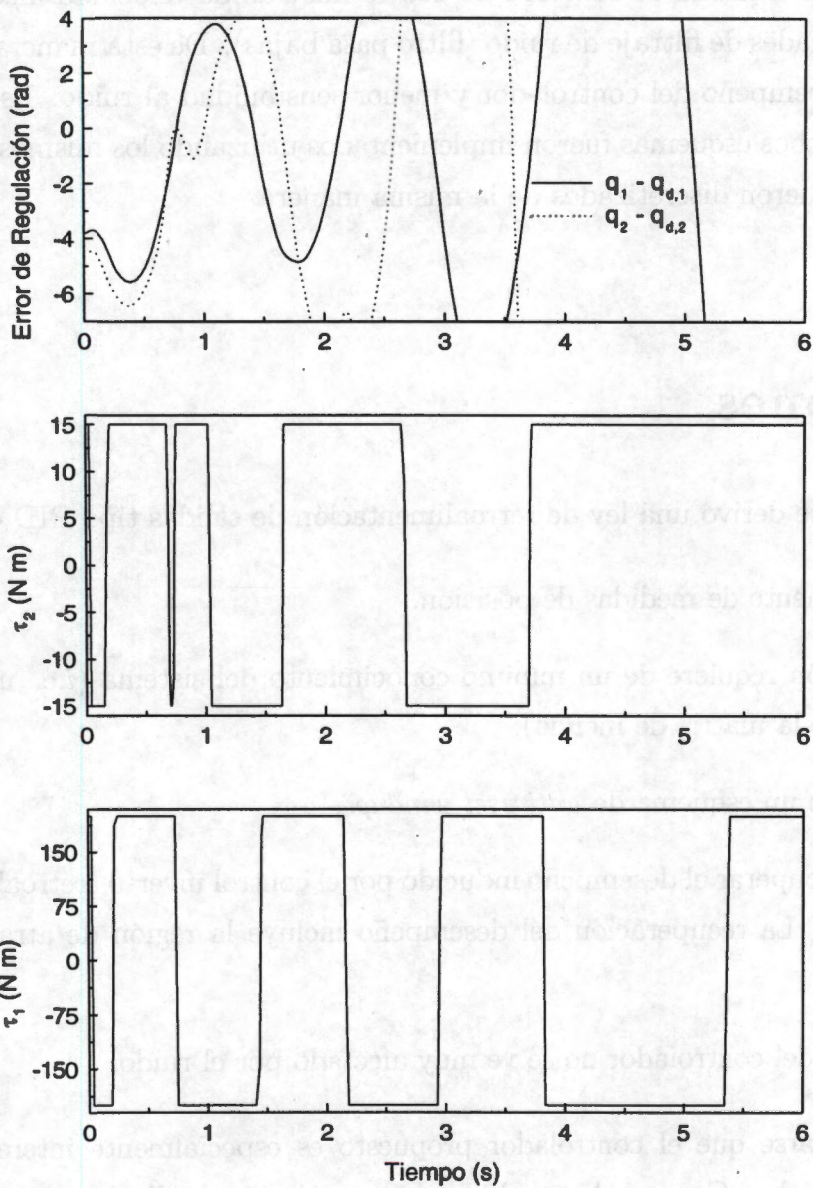


Figura 4-3 Desempeño sin el esquema ARW.



Figura~4-4 Inestabilidad para condiciones muy demandantes (sin esquema ARW).



- (b) Sensibilidad al Ruido. La Figura 4.6 presenta la evolución de las entradas de control para tres diferentes valores de  $L$  ( $L = 5 \text{ sec}^{-1}$ ,  $L = 20 \text{ sec}^{-1}$  y  $L = 40 \text{ sec}^{-1}$ ). Al comparar esta figura con la mostrada en el capítulo anterior, Figura 3.3, puede observarse como el esquema de control PID con estimación de velocidad-incertidumbres tiene propiedades de filtraje de ruido (filtro pasa bajas). De esta manera, se obtiene un mejor desempeño del controlador y menor sensibilidad al ruido. Es interesante notar que ambos esquemas fueron implementados utilizando los mismos tiempos de muestreo y fueron discretizados de la misma manera.

## Conclusiones

En este capítulo, se derivó una ley de retroalimentación de salidas tipo PID que:

- a) Requiere solamente de medidas de posición.
- b) Su sintonización requiere de un mínimo conocimiento del sistema (*i.e.* un estimado constante de la matriz de inercia).
- c) Está dotado de un esquema de *antireset windup*.
- d) Es capaz de recuperar el desempeño inducido por el control inverso (retroalimentación de estados). La recuperación del desempeño incluye la región de atracción y las trayectorias.
- e) El desempeño del controlador no se ve muy afectado por el ruido.

Debe mencionarse que el controlador propuesto es especialmente interesante para propósitos industriales. Como es bien sabido, una restricción de diseño importante en el desarrollo de un sistema robótico es su factibilidad económica. El controlador desarrollado en esta sección reemplaza la necesidad de un medidor de velocidad, por un compensador de segundo orden, el cual es fácilmente implementable.

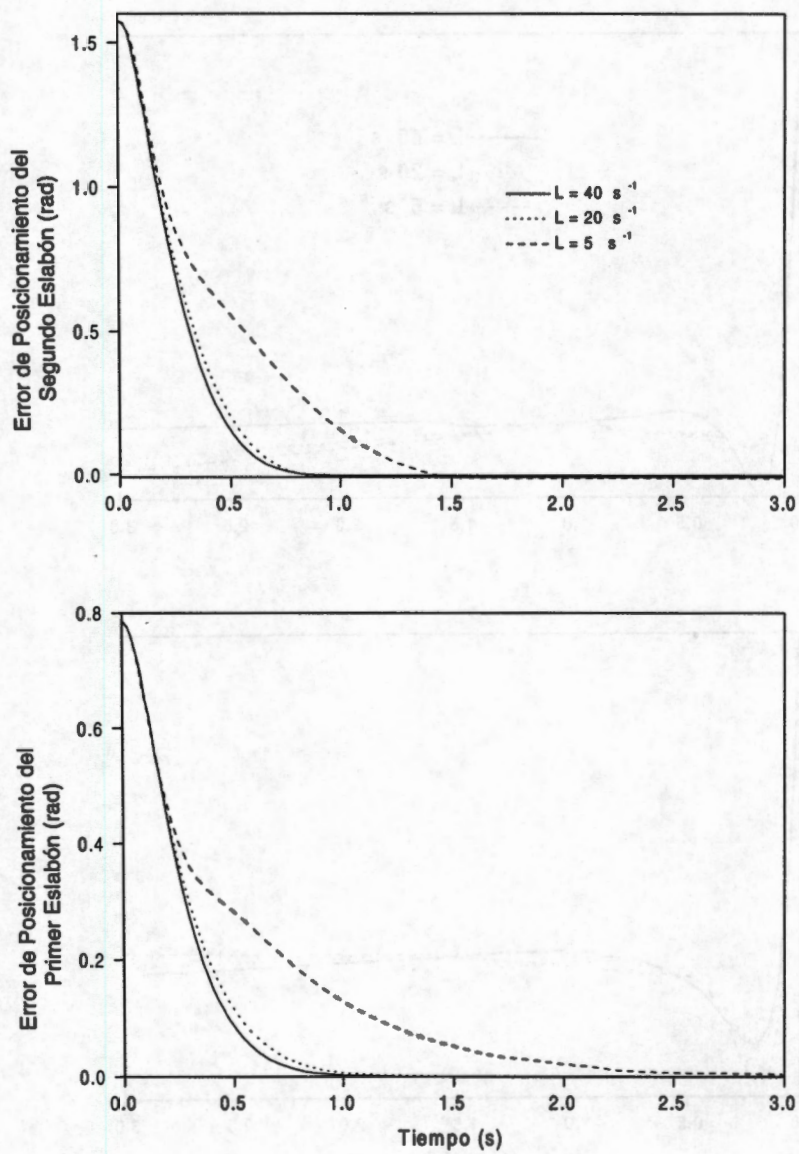


Figura 4-5 Evolución experimental de las posiciones del brazo.



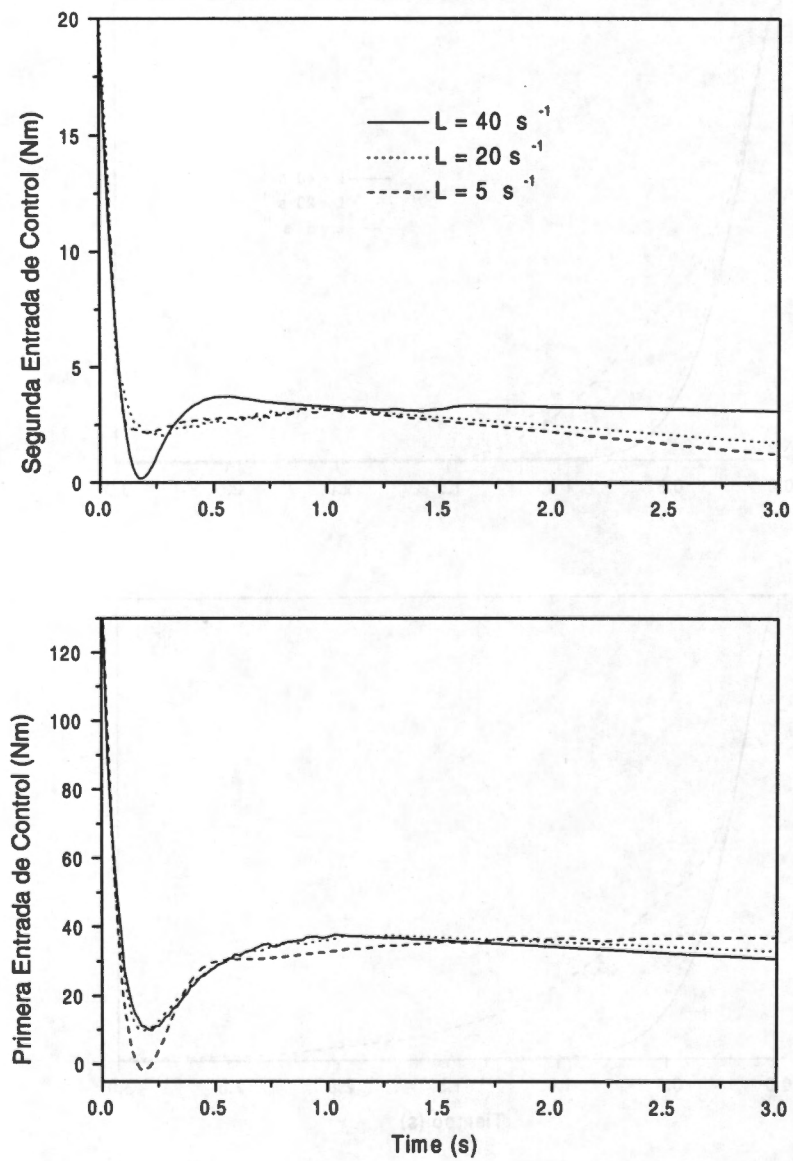


Figura 4-6 Desempeño experimental del controlador propuesto.

---

## Capítulo 5

---

# Estabilización con Entradas de Control Acotadas

## Introducción

Algunos de los controladores lineales utilizados en la industria son controladores clásicos PD con algún tipo de saturación en la entrada de control, la cual protege al actuador en el caso de sobredisparos o bajodisparos [10].

Existen algunos intentos en la literatura, de diseño de controladores tipo PD con entradas de control acotadas (*i.e.*, par acotado). [39], [29], [18] han reportado un controlador lineal PD con un término de compensación de gravedad. Este controlador es simple y se construye a partir de saturaciones *no acopladas* de los términos proporcional y derivativo más la compensación de gravedad. La sintonización se hace con base en las cotas de los términos de gravedad de cada eslabón del robot. El sistema en lazo cerrado es global y asintóticamente estable, y se garantiza el acotamiento de la acción de control si los límites de la entrada de control son más grandes que las cotas de los efectos gravitacionales. Sin embargo, esta ley de control presenta sesgo en estado estacionario, si la dinámica del robot es incierta (*i.e.* efectos gravitacionales).



Hasta donde se conoce, el problema de regulación con controladores PID acotados y pares gravitacionales inciertos no ha sido estudiado aún. Específicamente, la capacidad de estabilización del controlador lineal PID saturado con dinámica del robot incierta merece un estudio sistemático. En el capítulo anterior se desarrolló una ley de regulación con retroalimentación de salidas la cual está provista de un esquema de antirest windup (ARW) para manejar saturaciones en el actuador. Como se explicó anteriormente la motivación de la saturación de la entrada de control es con el fin de garantizar la estabilidad a lazo cerrado. El objetivo de este capítulo, en contraste, es el de diseñar una ley de control (ya sea con retroalimentación de estados o de salidas) para regulación de posición, la cual sea siempre acotada. Específicamente, en este capítulo, se prueba que un control lineal PID bajo restricciones en el actuador, es capaz de obtener estabilidad semiglobal, si los límites de la entrada de control son más grandes que los pares gravitacionales y si las ganancias proporcional y derivativa son lo suficientemente grandes. El análisis de estabilidad se hace utilizando herramientas de sistemas singularmente perturbados y se da una interpretación geométrica del funcionamiento del controlador PID. Las aportaciones más significativas de este capítulo son:

- a) El desarrollo de una ley de control saturada que no necesita de compensación de gravedad.
- b) El esclarecimiento del papel de la acción integral en la estabilización y en la compensación de incertidumbres en el sistema en lazo cerrado.

## Formulación del Problema

Para presentar formalmente el problema de control, se utilizará la siguiente notación. El vector de la función saturada es

$$Sat(\tau; \tau^{\max}) \stackrel{def}{=} (sat(\tau_1; \tau_1^{\max}), \dots, sat(\tau_n; \tau_n^{\max}))^T \in \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

donde la función de saturación  $sat(\tau_i; \tau_i^{\max})$  se define como

$$sat(\tau_i; \tau_i^{\max}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} -\tau_i^{\max} & \text{if } \tau_i < -\tau_i^{\max} \\ \tau_i & \text{if } -\tau_i^{\max} \leq \tau_i \leq \tau_i^{\max} \\ +\tau_i^{\max} & \text{if } \tau_i > \tau_i^{\max} \end{cases}$$

Considere la dinámica de un robot manipulador de juntas rotacionales de  $n$ -grados de libertad (Ec. (2.3)), que cumple con las propiedades P5, P6 y P7 del Capítulo 2 y la ley de control

$$\tau = T_u^{PID}(q, \dot{q}) \stackrel{def}{=} \tau_{dc} - K_p(q - q_d) - K_I \int_0^t [q(\sigma) - q_d] d\sigma - K_D \dot{q} \quad (5.2)$$

donde  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son matrices simétricas positivas definidas, el sesgo en estado estacionario o "dc-bias"  $\tau_{dc}$  puede ser un estimado  $\bar{g}(q_d)$  de los pares gravitacionales en una posición deseada  $q_d$ , un valor medio de los pares gravitacionales o simplemente cero. Entonces, el problema de control puede formularse como el de seleccionar las matrices de ganancia  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  de manera que:

- el error de posicionamiento  $e_r = q - q_d$  se aproxime a cero con el tiempo; es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$$

- la condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0))$  esté contenida en la región de atracción.

### Ley de Control PID Saturada

Sea  $\tau_i^{\max} > 0$  el máximo par disponible en el actuador del  $i$ -ésimo eslabón. El problema de posicionamiento con el control lineal PID (5.2) y entradas de control acotadas, se estudiará bajo las siguientes hipótesis.

**Suposición 1.** Se conocen los pares máximos disponibles  $\tau_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Suposición 2.** Los límites de la entrada de control  $\tau_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , satisfacen  $\tau_i^{\max} > \gamma_i$ .

**Comentario 15.** La información proporcionada por el fabricante del actuador de control, es usualmente suficiente para obtener el máximo par disponible  $\tau_i^{\max}$ . La condición  $\tau_i^{\max} > \gamma_i$  significa que los actuadores del robot son capaces de alcanzar y mantener cualquier posición deseada  $q_d \in R^n$ . Esta es una situación típica de los robots industriales.

La versión saturada del controlador lineal PID (5.2) está dada por

$$\tau = T_s^{PID}(q, \dot{q}) \stackrel{def}{=} \text{Sat} \left( \tau_{dc} - K_p(q - q_d) - K_I \int_0^t [q(\sigma) - q_d] d\sigma; \tau_P^{\max} \right) + \text{Sat} \left( -K_D \dot{q}; \tau_D^{\max} \right) \quad (5.3)$$



De esta manera, es claro que

$$\left| T_s^{PID}(q, \dot{q})_i \right| \leq \tau_{P,i}^{\max} + \tau_{D,i}^{\max}, i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

La motivación para la configuración (5.3) proviene de la metodología de modeo de energía (energy shaping) y de inyección de amortiguamiento (damping injection) introducido por [41]. El primer término reestructura la energía potencial del robot en lazo cerrado, mientras que la acción integral compensa los pares gravitacionales. Por otro lado, el segundo término proporciona amortiguamiento al sistema para asegurar estabilidad asintótica de las trayectorias. Además de su estructura simple, el control saturado PID (5.3) simplifica el análisis de estabilidad y requiere de los mismos límites en la entrada de control  $\tau_i^{\max}$  que aquellos diseños en donde se compensa gravedad ([39], [29], [18]) para alcanzar estabilidad asintótica y en consecuencia  $q(t) \rightarrow q_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## Resultado Principal

De manera concreta, se establecerá lo siguiente. Dada la dinámica del robot (2.3) y si  $\|K_D\|$  es lo suficientemente grande y  $\|K_I\|$  suficientemente pequeña, entonces el control lineal PID saturado (5.3) asegura estabilidad asintótica semiglobal. Más precisamente, se probará el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Considere la dinámica del robot (2.3) bajo la ley de control saturada PID (5.3). Si  $\lambda_{\min}(K_P) > k_g$  y  $\gamma_i < \tau_{P,i}^{\max} < \tau_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable de forma semiglobal. Esto es, para cada conjunto compacto  $W_x \subset \mathbb{R}^{2n}$ , existen ganancias  $\{K_P, K_I, K_D\}$  tales que  $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T = [q_d, 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el robot en lazo cerrado y la región de atracción contiene a  $W_x$ .

La prueba del Teorema 1 se establecerá en dos pasos. Primero, se estudiará la estabilidad del robot bajo una ley de control saturada PD. Específicamente, se establecerán algunas propiedades del sistema en estado estacionario y se estudiará su estabilidad. Después con base en estos resultados y en resultados de sistemas sigularmente perturbados se probará el Teorema 1.

## Ley de Control PD Saturada

En esta parte, se estudiará la estabilidad del robot (2.3) bajo la ley de control saturada PD

$$\tau = T_s^{PD}(q, \dot{q}; \bar{\tau}_I) \stackrel{def}{=} Sat(\tau_{dc} - K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) + Sat(-K_D \dot{q}; \tau_D^{\max}) \quad (5.5)$$

donde  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ . Se estudiarán las propiedades de estabilidad del mapeo no lineal entrada-salida  $\bar{\tau}_I \rightarrow q$ . En lo que resta de este capítulo y para simplificar la notación se supondrá  $\tau_{dc} = 0$  y control descentralizado (*i.e.*, las matrices  $K_p$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son diagonales).

De esta manera, el robot en lazo cerrado es

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = T_s^{PD}(q, \dot{q}; \bar{\tau}_I) \quad (5.6)$$

donde  $\mathcal{N}(x, t) = 0$ . La posición de equilibrio está dada por

$$E^{PD}(\bar{q}; \bar{\tau}_I) \stackrel{def}{=} g(\bar{q}) - T_s^{PD}(\bar{q}, 0; \bar{\tau}_I) = 0 \quad (5.7)$$

A continuación se establece la existencia y unicidad de la posición de equilibrio bajo la ley de control saturada PD.

**Proposición 8.** Suponga que  $\lambda_{\min}(K_p) > k_g$ . Entonces, existe una función  $C^1$  globalmente definida denotada por  $\varphi(\bar{\tau}_I)$ , tal que  $E^{PD}(\varphi(\bar{\tau}_I); \bar{\tau}_I) = 0$ . Esto es, el sistema no lineal  $E^{PD}(\bar{q}; \bar{\tau}_I) = 0$  tiene una solución única  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$ , para todo  $q_d \in \mathbb{R}^n$  y todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ .

**Demostración.** El sistema (5.7) puede reescribirse como

$$g(\bar{q}) - Sat(-K_p(\bar{q} - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) = 0 \quad (5.8)$$

Primero, se probará que  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$  es una solución de (5.7) si y sólo si

$$g(\bar{q}) + K_p(\bar{q} - q_d) + \bar{\tau}_I = 0 \quad (5.9)$$

Con este fin, considere  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  como el conjunto de  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$  que forman la región no saturada de la función

$$Sat(-K_p(\bar{q} - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max})$$

*i.e.* el conjunto definido por la siguiente desigualdad

$$sat(-K_{P,j}(\bar{q}_j - q_{d,j}) - \bar{\tau}_{I,j}; \tau_{P,j}^{\max}) < \tau_{P,j}^{\max} \quad j = 1 \dots n$$



Es claro que en esta región

$$\text{Sat}(-K_p(\bar{q} - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) = -K_p(\bar{q} - q_d) - \bar{\tau}_I \quad (5.10)$$

Por otro lado, debido a que  $\lambda_{\min}(K_P) > k_g$  y usando el teorema de contracción de mapas [21], la ecuación (5.9) tiene una única solución  $\bar{q}$ . Este hecho, junto con la hipótesis de que  $\gamma_i < \tau_{P,i}^{\max} < \tau_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$  implican que  $\bar{q} \in U$ . Entonces,  $\bar{q}$  es también solución de (5.8).

De esta manera, se ha encontrado que todas las soluciones de (5.8) están en la región no saturada  $U$ . Debido a que la existencia de una solución fuera de esta región implica que al menos un componente, por ejemplo el elemento  $j$  de  $\text{Sat}(-K_p(\bar{q} - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max})$  está saturado, es decir,

$$\text{sat}(-K_{p,j}(\bar{q}_j - q_{d,j}) - \bar{\tau}_{I,j}; \tau_{P,j}^{\max}) = \pm \tau_{P,j}^{\max}$$

Esto implica que  $g_j(\bar{q}_j) = \pm \tau_{P,j}^{\max}$ , o de manera equivalente,  $|g_j(\bar{q}_j)| = \tau_{P,j}^{\max}$ . Esto es una contradicción a la Suposición 2. Entonces, todas las soluciones de (5.8) satisfacen (5.9). ■

El signo de la ganancia de estado estacionario del mapeo  $\bar{\tau}_I \rightarrow \bar{q}$  está dado por el siguiente resultado. Como se verá más adelante, este signo definirá el signo de la acción integral.

**Proposición 9.** El mapeo en estado estacionario  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  es estrictamente decreciente e invertible para todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

(a) *Estrictamente decreciente.* De la prueba de la Proposición 8, se sabe que

$$g(\varphi(\bar{\tau}_I)) + K_p(\varphi(\bar{\tau}_I) - q_d) + \bar{\tau}_I = 0 \quad (5.11)$$

para todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ . Así que

$$Dg(\bar{q})D\varphi(\bar{\tau}_I) + K_P D\varphi(\bar{\tau}_I) + I = 0$$

o de manera equivalente

$$[Dg(\bar{q}) + K_P] D\varphi(\bar{\tau}_I) = -I \quad (5.12)$$

La suposición  $\lambda_{\min}(K_P) > k_g$  implica que  $Dg(\bar{q}) + K_P$  es una matriz positiva definida para todo  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$D\varphi(\bar{\tau}_I) = -[Dg(\bar{q}) + K_P]^{-1} \quad (5.13)$$

Debido a que  $[Dg(\bar{q}) + K_P]^{-1}$  es también una matriz positiva definida, se concluye que  $D\varphi(\bar{\tau}_I)$  es una matriz negativa definida para  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$ . Esto implica que  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  es estrictamente decreciente. Esto es, existe  $\beta > 0$  tal que para todo  $\bar{\tau}_{I,1}, \bar{\tau}_{I,2} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$[\varphi(\bar{\tau}_{I,2}) - \varphi(\bar{\tau}_{I,1})]^T [\bar{\tau}_{I,2} - \bar{\tau}_{I,1}] \leq -\beta |\bar{\tau}_{I,2} - \bar{\tau}_{I,1}|^2 \quad (5.14)$$

(b) *Invertibilidad.* De (5.9) se tiene que  $g(\bar{q}) + K_p(\bar{q} - q_d) + \bar{\tau}_I = 0$ . Lo que implica que

$$\varphi^{-1}(\bar{q}) = -g(\bar{q}) - K_p(\bar{q} - q_d) \quad (5.15)$$

■

Hasta este momento, se ha probado que el sistema en lazo cerrado (5.6) tiene un único punto de equilibrio  $\bar{q} := \varphi(\bar{\tau}_I)$  para cada entrada de control constante  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ . El análisis de estabilidad del equilibrio se da a continuación.

**Proposición 10.** La posición de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  del robot bajo la ley control saturado PD (5.5) es globalmente asintóticamente estable y localmente exponencialmente estable para todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

a) *Estabilidad asintótica global.* Usando la Proposición 8, el sistema en lazo cerrado

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) - \text{Sat}(-K_D\dot{q}; \tau_D^{\max}) - \text{Sat}(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) = 0 \quad (5.16)$$

tiene un único punto de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$ . Sea  $\Sigma(q; \bar{\tau}_I)$  una función primitiva  $C^1$  de la acción derivativa saturada  $-\text{Sat}(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max})$ . Esto es, la función saturada puede expresarse como el gradiente de la función de potencial artificial [39]

$$-\text{Sat}(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) = D_1\Sigma(q; \bar{\tau}_I) \quad (5.17)$$

La función  $\Sigma(q; \bar{\tau}_I)$  es el potencial retroalimentado. El potencial total del sistema controlado es

$$\Pi(q; \bar{\tau}_I) = G(q) + \Sigma(q; \bar{\tau}_I) \quad (5.18)$$



(recordar que  $g(q) = DG(q)$ ). Se considera el candidato a función de Lyapunov

$$V(q, \dot{q}; \bar{\tau}_I) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \Pi(q; \bar{\tau}_I) - \Pi(\bar{q}; \bar{\tau}_I) \quad (5.19)$$

No es difícil ver que la Suposición 2 y la condición  $\lambda_{\min}(K_P) > k_g$  implican que  $V(q, \dot{q}; \bar{\tau}_I)$  es una función positiva definida y radialmente no acotada de  $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Usando la Propiedad P5 y simplificando términos, la derivada con respecto del tiempo de  $V(q, \dot{q}; \bar{\tau}_I)$  a lo largo de las trayectorias de (5.16) es (ver [18])

$$\dot{V}_{(5.16)} = -\dot{q}^T \left[ \text{Sat} \left( K_D \dot{q}; \tau_D^{\max} \right) \right]$$

la cual, debido a que  $K_D > 0$  y usando la definición de función saturación  $\text{Sat} \left( K_D \dot{q}; \tau_D^{\max} \right)$ , es una función negativa semidefinida de  $(q, \dot{q})^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . Debido a que el sistema (5.16) es autónomo, puede usarse el teorema de LaSalle para probar la existencia de un atractor global. Con este fin, se define el conjunto

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (q, \dot{q})^T \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}_{(5.16)} = 0 \right\} \\ &= \left\{ q \in \mathbb{R}^n, \dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^n \right\} \end{aligned}$$

Debido a que el conjunto invariante más grande en  $\Omega$  es  $\bar{q}$  (Proposición 8), el teorema de LaSalle implica que el equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  es global y asintóticamente estable.

- b) *Estabilidad exponencial local.* Para probar que el sistema (5.16) es localmente estable alrededor de  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$ , es suficiente probar estabilidad asintótica de una linealización local del sistema (5.16) alrededor del equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$ :

$$M(\bar{q}) \ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + [Dg(\bar{q}) + K_P] \tilde{q} = 0 \quad (5.20)$$

donde  $\tilde{q} = q - \bar{q}$  y

$$\text{Sat} \left( -K_D \dot{\tilde{q}}; \tau_D^{\max} \right) = -K_D \dot{\tilde{q}} \quad (5.21)$$

y

$$\text{Sat} \left( -K_P(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max} \right) = -K_P(q - q_d) + \bar{\tau}_I \quad (5.22)$$

en una vecindad de la posición de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  (ver la prueba de la Proposición 8). Se considera la función cuadrática

$$V^L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\bar{q}) \dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T [Dg(\bar{q}) + K_P] \tilde{q} \quad (5.23)$$

La Suposición 2 implica que  $V^L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  es una función convexa. Entonces, se puede deducir que el sistema (5.16) es localmente estable, de manera similar a como se hizo en la prueba de c) de esta proposición. ■

Resumiendo, se ha probado que el sistema (2.3) bajo una ley de control PD saturada tiene un único punto de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$ , para todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ . Debido a que  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  es una función invertible, existe un único valor  $\tau_{I,d} \in \mathbb{R}^n$  que corresponde a una posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}^n$ . Estos resultados se utilizarán para probar el Teorema 1. De hecho, la idea es utilizar la acción integral  $K_I \int_0^t [q(\sigma) - q_d] d\sigma$  en lugar de la entrada constante  $\bar{\tau}_I$ . De esta manera, el papel de la acción integral es el de buscar el valor correcto de  $\tau_{I,d} \in \mathbb{R}^n$ , que corresponde a la posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}^n$ .

### Prueba del Teorema 1

Sea  $x = (x_1^T, x_2^T) \in \mathbb{R}^{2n}$ , con  $x_1 = q \in \mathbb{R}^n$  y  $x_2 = \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ . Se puede escribir el sistema (2.3) bajo la ley de control PID saturada (5.3) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z_I) \\ \dot{z}_I &= K_I(x_1 - q_d)\end{aligned}\tag{5.24}$$

donde  $z_I \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(0) := x_0 = (q_0^T, \dot{q}_0^T)^T$ ,  $z_I(0) = z_{I,0}$ ,

$$f(x, z_I) = \begin{bmatrix} f_1(x, z_I) \\ f_2(x, z_I) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_2 \\ M(x_1)^{-1} \{ -C(x_1, x_2)x_2 - g(x_1) + \\ \text{Sat}(-K_P(x_1 - q_d) - z_I; \tau_P^{\max}) + \text{Sat}(-K_D x_2; \tau_D^{\max}) \} \end{bmatrix}\tag{5.25}$$

Primero, se mueve el punto de equilibrio con un cambio de coordenadas. Con este fin, se define la entrada constante  $\tau_{I,d} \in \mathbb{R}^n$  correspondiente a la posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}^n$  como sigue

$$q_d = \varphi(\tau_{I,d})\tag{5.26}$$

La unicidad de  $\tau_{I,d}$  está garantizada, debido a que  $\varphi(\tau_{I,d})$  es una función invertible. Por simplicidad en la notación, se define la función aumentada  $\varphi_a(\bar{\tau}_I) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(\bar{\tau}_I)^T, 0_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$  y se introducen las variables

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) - \varphi_a(z_I(t)) \\ \tilde{z}_I(t) &= z_I(t) - \tau_{I,d}\end{aligned}\tag{5.27}$$



Usando  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{z}_I(t)$  como variables de estado, el sistema (5.24) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= f(\tilde{x} + \varphi_a(\tilde{z}_I + \tau_{I,d}), \tilde{z}_I + \tau_{I,d}) - \\ &\quad K_I D\varphi_a(\tilde{z}_I + \tau_{I,d}) E_1 [\tilde{x} + \varphi_a(\tilde{z}_I + \tau_{I,d}) - \varphi_a(\tau_{I,d})] \\ \dot{\tilde{z}}_I &= K_I E_1 [\tilde{x} + \varphi_a(\tilde{z}_I + \tau_{I,d}) - \varphi_a(\tau_{I,d})]\end{aligned}\quad (5.28)$$

donde  $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}[I_{n \times n}, 0_{n \times n}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ . Sea

$$K_I = \varepsilon \bar{K}_I$$

donde  $\bar{K}_I$  es una matriz definida positiva y  $\varepsilon > 0$  un parámetro pequeño. Sea  $t' \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon t$  una nueva escala de tiempo ( $t'$  es lento comparado con  $t$ ). Se definen las variables  $\chi(t')$  y  $\xi(t')$  como

$$\begin{aligned}\chi(t') &= \tilde{x}(t'/\varepsilon) \\ \xi_I(t') &= \tilde{z}_I(t'/\varepsilon)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Usando  $t'$ ,  $\chi(t')$  y  $\xi(t')$  como nuevas variables (entonces,  $\chi'$  denota  $d\chi/dt'$ , etc.), se reescribe la ecuación (5.28) como

$$\begin{aligned}\varepsilon \chi' &= f(\chi + \varphi_a(\xi_I + \tau_{I,d}), \xi_I + \tau_{I,d}) - \\ &\quad \varepsilon \bar{K}_I D\varphi_a(\xi_I + \tau_{I,d}) E_1 [\chi + \varphi_a(\xi_I + \tau_{I,d}) - \varphi_a(\tau_{I,d})] \\ \xi_I' &= \bar{K}_I E_1 [\chi + \varphi_a(\xi_I + \tau_{I,d}) - \varphi_a(\tau_{I,d})]\end{aligned}\quad (5.30)$$

Claramente,  $(\chi, \xi) = (0_{2n}, 0_n)$  es el punto de equilibrio de (5.30). Debido a que  $\varepsilon > 0$ ,  $(\chi(t'), \xi(t')) \rightarrow (0_{2n}, 0_n)$  cuando  $t' \rightarrow \infty$  implica que  $(\tilde{x}(t), \tilde{z}_I(t)) \rightarrow (0_{2n}, 0_n)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $\varepsilon \ll 1$ , el sistema (5.30) se encuentra en la forma de un sistema singularmente perturbado [14], donde  $\chi$  y  $\xi_I$  son respectivamente las variables rápida y lenta. Para probar el Teorema 1, es necesario mostrar que las condiciones del Teorema 3 de Hoppensteadt [14] se satisfacen. Si en (5.28), se hace  $\varepsilon = 0$  (i.e.,  $K_I = 0$ ), entonces  $\tilde{z}_I(t) = \tilde{z}_I(0) = \tilde{z}_{I,0} = -\tau_{I,d}$ , se tiene

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x} + \varphi_a(z_{I,0}), z_{I,0}) \quad (5.31)$$

El sistema (5.31) con  $z_{I,0}$  visto como un parámetro fijo se llama el sistema de capa límite. De (5.25), se puede ver que el sistema (5.31) es el robot (2.3) con la ley de control PD saturada, el cual es globalmente asintóticamente estable y localmente exponencialmente estable. Por otro lado, si en (5.30) se hace  $\varepsilon = 0$ , entonces (5.30) se reduce a  $\chi = 0_{2n}$  y

$$\xi_I' = \bar{K}_I E_1 [\varphi_a(\xi_I + \tau_{I,d}) - \varphi_a(\tau_{I,d})] \quad (5.32)$$

El sistema (5.32) es el sistema reducido del sistema singularmente perturbado (5.30). Note que  $0_n$  es un punto de equilibrio de (5.32). Debido a que  $E_1\varphi_a = \varphi$ , el sistema (5.32) puede ser escrito como

$$\xi_I' = \bar{K}_I [\varphi(\xi_I + \tau_{I,d}) - \varphi(\tau_{I,d})] \quad (5.33)$$

Debido a que  $\bar{K}_I > 0$ , el sistema (5.33) es exponencialmente estable alrededor del origen. De hecho, si se toma la función cuadrática  $P(\xi_I) = |\xi_I|^2$ . La derivada  $P'_{(5.33)}$  a lo largo de las trayectorias de (5.33) está dada por

$$P'_{(5.33)} = 2\xi_I^T \xi_I' = 2\bar{K}_I [\varphi(\xi_I + \tau_{I,d}) - \varphi(\tau_{I,d})]^T \xi_I \leq -\beta \|\bar{K}_I\| |\xi_I|^2 \quad (5.34)$$

donde se ha usado el hecho de que  $\varphi(\bar{\tau}_I)$  es una función estrictamente decreciente. De esta manera,

$$P(\xi_I(t')) \leq P(\xi_I(0)) \exp(-\beta \|\bar{K}_I\| t')$$

Esto prueba que el sistema reducido (5.32) es exponencialmente estable. Finalmente el Teorema 3 de Hoppensteadt [14] requiere que las derivadas del lado derecho de la ecuación (5.30) sean acotadas. De esta manera, note que  $f_2(x, z_I)$  depende de los pares de Coriolis. Esto implica que  $f_2(x, z_I)$  tiene un término cuadrático en  $x_2$ , y que  $f_2(x, z_I)$  no es globalmente Lipschitz. Sin embargo,  $f_2(x, z_I)$  tiene derivadas acotadas en conjuntos compactos. De esta manera el Teorema 3 de Hoppensteadt, implica la existencia de una constante positiva  $\varepsilon^{\max}$  tal que el origen del espacio de estado correspondiente al sistema singularmente perturbado es asintóticamente estable de forma semiglobal para  $0 < \varepsilon < \varepsilon^{\max}$ . En otras palabras, el sistema (2.3) bajo la ley de control PID saturada es semiglobalmente estable y localmente exponencialmente estable para ganancia integral  $K_I$  suficientemente pequeña. Esto concluye la prueba. ■

**Comentario 16.** *La prueba del Teorema 1 ilustra el funcionamiento de los controladores PID con o sin saturación. La propiedad principal es que el sistema de capa límite (rápido) es el robot bajo la acción PD, y el sistema reducido (lento) es la acción integral. De esta manera, en periodos cortos de tiempo  $\mathcal{O}(\|K_I\|)$  las trayectorias en lazo cerrado convergen a una vecindad  $\mathcal{N}_0$  de la posición  $q_{I,0} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z_{I,0})$ , la cual está localizada en la superficie de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$ . En periodos largos de tiempo, la acción integral empieza a cobrar importancia y trata de reconocer la posición correcta  $q_d = \varphi(\tau_{I,d})$ . En esos momentos, las trayectorias en lazo cerrado se deslizan a lo largo de la superficie de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  hacia la posición deseada  $q_d$ .*



## Ley de Control PID Saturada con Retroalimentación de Salida

En las secciones anteriores, se ha supuesto que la posición y la velocidad son medibles. Sin embargo, esta suposición no es realista, puesto que usualmente sólo se tienen medidas de posición y la velocidad se estima utilizando filtros. En [16], [7] se propone una clase de observadores de orden reducido como estimadores de velocidad. Se ha probado la efectividad de esta clase de filtraje para alcanzar estabilidad en lazo cerrado utilizando leyes de control PD con compensación de gravedad. En esta sección, se probará que se preserva el resultado del Teorema 1, cuando se utilizan estos observadores de orden reducido para estimar la velocidad.

Sea  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$  un estimado de la velocidad del robot  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ . Este estimado se obtiene como la salida de un filtro propio [16], [7], [1]

$$\vartheta = \text{diag} \left\{ \frac{b_i p}{p + a_i} \right\} q \quad (5.35)$$

donde  $a_i$  y  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son constantes positivas y  $p \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$  denota el operador diferencial. Una realización en el espacio de estados del filtro (5.35) es

$$\dot{\vartheta} = -A\vartheta + B\dot{q} \quad (5.36)$$

donde  $A = \text{diag} \{a_i\}$  y  $B = \text{diag} \{b_i\}$ . La implementación del filtro (5.36) puede ser realizada como

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -Aw - ABq \\ \vartheta &= w + Bq \end{aligned} \quad (5.37)$$

La ley de control PID saturada con retroalimentación de salida se obtiene reemplazando la velocidad  $\dot{q}$  por la salida del filtro  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \tau = T_{o,s}^{PID}(q, \vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} & \text{Sat} \left( \tau_{dc} - K_p(q - q_d) - K_I \int_0^t [q(\sigma) - q_d] d\sigma; \tau_P^{\max} \right) + \\ & \text{Sat}(-K_D\vartheta; \tau_D^{\max}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

De manera similar al caso de retroalimentación de estados, se puede establecer la estabilidad de este sistema como sigue.

**Teorema 2. (Retroalimentación de salida)** Considere el sistema (2.3) bajo la ley de retroalimentación PID saturada con retroalimentación de salida

(5.38). Si  $\lambda_{\min}(K_P) > k_g$  y  $\gamma_i < \tau_{P_i}^{\max} < \tau_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces el sistema en lazo cerrado asintóticamente estable de forma semiglobal.. Esto es, para cada conjunto compacto  $W_x \subset \mathbb{R}^{2n}$  y posición deseada  $q_d \in W_x$  constante, existen ganancias PID  $\{K_P, K_I, K_D\}$  tales que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable y su región de atracción contiene a  $W_x$ .

**Demostración.** La prueba puede realizarse siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior. Con este fin, se considera el sistema (2.3) bajo la ley de control PD saturada con retroalimentación de salida

$$\tau = T_{o,s}^{PD}(q, \vartheta) \stackrel{def}{=} Sat(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) + Sat(-K_D\vartheta; \tau_D^{\max}) \quad (5.39)$$

donde, como en el caso anterior,  $\tau_{dc} = 0$  se tomó por simplicidad. El sistema en lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + (q, \dot{q})\dot{q} + g(q) &= Sat(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) + Sat(-K_D\vartheta; \tau_D^{\max}) \\ \dot{\vartheta} &= -A\vartheta + B\dot{q} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Debido a que  $A$  es una matriz invertible, los puntos de equilibrio de (5.40) están definidos por las soluciones del sistema no lineal

$$g(q) = Sat(-K_p(q - q_d) - \bar{\tau}_I; \tau_P^{\max}) \quad (5.41)$$

que es la misma condición que en el caso de retroalimentación de estados. De esta manera, bajo las mismas suposiciones, las Proposiciones 8 y 9 también se cumplen para el caso de retroalimentación de salida. De manera análoga a como se hizo en la Proposición 10, para probar que la posición de equilibrio  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  del robot bajo la ley de retroalimentación de salida PD saturado es globalmente estable y localmente exponencialmente estable para todo  $\bar{\tau}_I \in \mathbb{R}^n$ ; se propone un candidato a función de Lyapunov similar a aquel de la Proposición 10, pero con un término adicional

$$V(q, \dot{q}, \vartheta; \bar{\tau}_I) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \Pi(q; \bar{\tau}_I) - \Pi(\bar{q}; \bar{\tau}_I) + \mathcal{F}_{ad}(\vartheta) \quad (5.42)$$

donde  $\mathcal{F}_{ad}(\vartheta) = B^{-1}\mathcal{F}(\vartheta)$ , y  $\mathcal{F}(\vartheta)$  se escoge tal que

$$D\mathcal{F}(\vartheta) = -Sat(-K_D\vartheta; \tau_D^{\max}) \quad (5.43)$$

Esto es,  $\mathcal{F}(\vartheta)$  es la función de disipación de la que se deriva la acción de amortiguamiento  $Sat(-K_D\vartheta; \tau_D^{\max})$ . Note que  $B^{-1}\mathcal{F}(\vartheta)$  es una función radialmente no acotada y positiva



definida, así que  $V(q, \dot{q}, \vartheta; \bar{\tau}_I)$  también lo es. La derivada en tiempo de  $V(q, \dot{q}, \vartheta; \bar{\tau}_I)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (5.40) es

$$\dot{V}_{(5.40)} = \vartheta^T AB^{-1} \text{Sat}(-K_D \vartheta; \tau_D^{\max}) \quad (5.44)$$

donde se utilizó el hecho de que

$$\dot{\mathcal{F}}_{ad}(\vartheta) = -\vartheta^T AB^{-1} D\mathcal{F}(\vartheta) + \dot{q}^T D\mathcal{F}(\vartheta)$$

Note que  $\dot{V}_{(5.40)}$  es negativa semidefinida de  $(q, \dot{q}, \vartheta)$ . También note que  $\vartheta = 0$  implica que  $\dot{\vartheta} = 0$  y de (5.36) se tiene que  $\dot{q} = 0$ . De esta manera, puede establecerse estabilidad asintótica global de  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  por el teorema de invariancia de LaSalle. Por otro lado, estabilidad local exponencial de  $\bar{q} = \varphi(\bar{\tau}_I)$  puede establecerse utilizando ideas similares de linealización local del sistema (5.40) alrededor de la posición de equilibrio  $(\bar{q}, 0_n, 0_n)^T \in \mathbb{R}^{3n}$ . Utilizando los resultados de las Propositiones 8 y 9, la prueba del Teorema 2 puede hacerse bajo los mismos argumentos de la prueba del Teorema 1. ■

## Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la estabilidad del control lineal PID saturado. Básicamente, se ha probado que con este controlador puede obtenerse estabilidad asintótica semiglobal de la posición deseada y entradas de control acotadas. Además, si las matrices de ganancia proporcional y derivativa cumplen ciertas condiciones, el tamaño de la base de atracción aumenta, cuando la ganancia integral es reducida. Desde un punto de vista práctico, este hecho impone limitaciones en el valor máximo de la acción integral; en el sentido de que se necesita de la acción integral, para dominar los términos cuadráticos introducidos por el término de Coriolis. Debe mencionarse, que hasta la fecha no existen estudios comparativos al realizado en este capítulo.

## **Parte II**

# **Seguimiento de Trayectorias**



Parte II

Seguimiento de Trayectorias

---

## Capítulo 6

---

# Seguimiento de Trayectorias

## Introducción

En la literatura se han propuesto varios controladores para solucionar el problema de seguimiento de trayectorias, la mayoría basados en pasividad. Sin embargo, a pesar de que estos enfoques han probado ser exitosos [28], [30], [43], [46], hasta la fecha la mayoría de los controladores empleados en la industria son tipo PID.

Desde un punto de vista teórico, existe la creencia de que los controladores PID son incapaces de lidiar con sistemas altamente no lineales o de realizar tareas como la de seguimiento de trayectorias. Entre los resultados más importantes reportados en la literatura sobre control PID para seguimiento de trayectorias se pueden mencionar los siguientes

- Kawamura *et al.* [31] mostraron que existen ganancias PID que garantizan que el robot sigue una trayectoria deseada con precisión arbitraria, si las condiciones iniciales en posición y velocidad son suficientemente pequeñas.
- Wen and Murphy [47] extendieron los resultados de estabilidad local de Arimoto y Miyazaki [4] al caso de seguimiento de trayectorias. Se muestra que cuando se



utilizan ganancias PD suficientemente grandes y ganancia integral suficientemente pequeña puede obtenerse estabilidad asintótica local cuando las trayectorias de referencia son lentas.

Debe mencionarse que los resultados reportados en la literatura sobre control PID para el caso de seguimiento de trayectorias son de naturaleza local. En este capítulo se muestra que es posible obtener un resultado de estabilidad semiglobal, bajo una ley de retroalimentación PID. Es decir, se prueba que para cualquier conjunto de condiciones iniciales  $W_x$ , existen ganancias PID tales que todas las trayectorias que empiezan en  $W_x$  convergen a un conjunto residual arbitrariamente pequeño. Para ello, se desarrolla un configuración novedosa PID, la cual permite simplificar el análisis de estabilidad y desarrollar guías de sintonizado. Los resultados obtenidos son ilustrados con simulaciones numéricas en un brazo de dos grados de libertad.

Con respecto de los resultados existentes, se hacen las siguientes extensiones:

- Se provee de una prueba de estabilidad semiglobal (práctica), la cual sólo requiere de las cotas de la matriz de inercia.
- Se desarrollan guías de sintonizado sencillas.

## Formulación del Problema

Considere el modelo dinámico de un robot de  $n$ -grados de libertad. La ley de control PID puede ser escrita de manera general como sigue

$$\tau = B_{dc} + K_P e_r + K_I \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma + K_D \dot{e}_r \quad (6.1)$$

donde  $e_r(t) \stackrel{def}{=} q(t) - q_d(t) \in \mathbb{R}^n$  es el error de seguimiento,  $B_{dc} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de sesgo en estado estacionario  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son las matrices de ganancias proporcional, integral y derivativa del control PID.

El problema de control puede formularse como el de seleccionar ganancias  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  tales que el error de seguimiento  $e_r(t)$  sea suficientemente pequeño asintóticamente, para cualquier condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0))^T \in \mathbb{R}^{2n}$  contenida en un conjunto compacto.

## Configuración de Control Lineal PID

En principio puede utilizarse la representación (6.1) para estudiar la estabilidad del sistema controlado. Sin embargo, no es fácil acomodar la acción integral del control para obtener un resultado de estabilidad no local [31], [37], [47]. En esta sección, se desarrolla un esquema de control PID basado en observadores, que ayuda a resolver esta complicación.

Se sabe que

$$q(t) = q_d(t) + e_r(t)$$

Entonces la dinámica del robot (2.3) puede escribirse como

$$M(e_r + q_d)[\ddot{e}_r + \ddot{q}_d] + C(e_r + q_d, \dot{e}_r + \dot{q}_d)[\dot{e}_r + \dot{q}_d] + G(e_r + q_d) = \tau \quad (6.2)$$

donde  $\mathcal{N}(x, t) = 0$ . En lo que resta de este capítulo se utilizará la siguiente notación  $x = [e_r, \dot{e}_r]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $q_d^j = d^j q_d / dt^j$ ,

$$Q_{d,k} = [q_d^T, \dot{q}_d^T, \dots, q_d^{kT}]^T \in \mathbb{R}^{(k+1)n}$$

$$M_r(e_r, q_d) = M(e_r + q_d)$$

$$C_r(x, Q_{d,1}) = C(e_r + q_d, \dot{e}_r + \dot{q}_d)$$

$$G_r(e_r, q_d) = G(e_r + q_d)$$

Para diseñar el controlador se supondrá que la trayectoria deseada  $q_d(t)$  y sus primeras tres derivadas en tiempo (*i.e.*,  $\dot{q}_d$ ,  $\ddot{q}_d$  y  $\dddot{q}_d$ ) son uniformemente acotadas. Con base en esta suposición  $Q_{d,k} \in D_{Q,k}$ , donde  $D_{Q,k} \subset \mathbb{R}^{(k+1)n}$  está en un conjunto compacto.

Por simplicidad en la notación, se considera la función

$$\psi(x, Q_{d,1}) = C_r(x, Q_{d,1})[\dot{e}_r + \dot{q}_d] + G_r(e_r, q_d) \quad (6.3)$$

Usando (6.2) y (6.3)

$$M_r(e_r, q_d)[\ddot{e}_r + \ddot{q}_d] + \psi(x, Q_{d,1}) = \tau \quad (6.4)$$

Sea  $v \stackrel{\text{def}}{=} \dot{e}_r \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, una representación en espacio de estados de (6.4) es la siguiente

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= v \\ \dot{v} &= -\ddot{q}_d + M_r(e_r, q_d)^{-1}[-\psi(x, Q_{d,1}) + \tau] \end{aligned} \quad (6.5)$$



El control clásico PID no hace uso del conocimiento de la dinámica del robot. De esta manera, para diseñar la configuración PID, se define la función de error de modelado  $\eta(x, Q_{d,1}, \tau) \in \mathbb{R}^n$  como sigue

$$\eta(x, Q_{d,1}, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} -M_r(e_r, q_d)^{-1} \psi(x, Q_{d,1}) + [M_r(e_r, q_d)^{-1} - \bar{M}^{-1}] \tau \quad (6.6)$$

donde  $\bar{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida que corresponde a un estimado constante de la matriz de inercia  $M(q)$ . Entonces, el sistema (6.5) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= v \\ \dot{v} &= -\ddot{q}_d + \eta(x, Q_{d,1}, \tau) + \bar{M}^{-1} \tau \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sea  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices positivas definidas tales que la matriz

$$A_c = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (6.8)$$

es Hurwitz. La ley de control inversa es

$$\tau^{id} = \bar{M} [\ddot{q}_d - \eta(x, Q_{d,1}, \tau) - Kx] \quad (6.9)$$

donde  $K \stackrel{\text{def}}{=} [K_1, K_2] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ , induce el comportamiento en lazo cerrado  $\dot{x} = A_c x$ .

**Comentario 17.** *El desempeño en lazo cerrado  $x(t)$  puede ser asignado utilizando las ganancias de control internas  $K_1$  y  $K_2$ . Por ejemplo, si  $K_1$  y  $K_2$  se escogen como matrices diagonales, se obtiene un esquema de control independiente para cada eslabón del robot.*

La ley de control (6.9) no puede ser implementada porque la función  $\eta(x, Q_{d,1}, \tau)$  no está disponible para retroalimentación. Sin embargo, puede notarse que la señal de error de modelado es observable, es decir, puede expresarse en términos de la entrada y la salida y sus derivadas. De hecho,  $\eta(x, Q_{d,1}, \tau) = \dot{v} + \ddot{q}_d - \bar{M}^{-1} \tau$ , para todo  $t \geq 0$ . La idea que se utilizará para solucionar este problema es la de construir un observador para aproximar la función no lineal  $\eta(x, Q_{d,1}, \tau)$  y utilizar esta aproximación  $\bar{\eta}$  dentro del marco del principio de equivalencia cierta [3], [5]. Se elige el siguiente observador

$$\dot{\bar{\eta}} = \varepsilon^{-1}(\eta - \bar{\eta}) \quad (6.10)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro de estimación. La dinámica de observación puede ser vista como la parte adaptable del controlador con velocidad de adaptación  $\varepsilon^{-1}$ . Con base en esta observación  $\bar{\eta}$  que aproxima  $\eta$ , el control práctico es

$$\tau = \bar{M}[\ddot{q}_d - \bar{\eta} - Kx] \quad (6.11)$$

El controlador resultante está compuesto por el estimador de error de modelado (6.10) y la función de equivalencia cierta (6.11).

**Comentario 18.** Para implementar el estimador de error de modelado (6.10), puede procederse de la siguiente forma. Se sabe que  $\eta(x, Q_{d,1}, \tau) \equiv \dot{v} + \ddot{q}_d - \bar{M}^{-1}\tau$ , así que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \ddot{q}_d - \bar{M}^{-1}\tau - \varepsilon^{-1}(w + v) \\ \bar{\eta} &= \varepsilon^{-1}(w + v) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Debido a que la señal de error de modelado  $\eta$  es incierta, se puede tomar un estimado inicial  $\bar{\eta}(0) = 0$ , tal que  $w(0) = -v(0)$ .

**Proposición 11.** La ley de retroalimentación (6.11), (6.12) es equivalente a un controlador clásico PID.

**Demostración.** Usando (6.11) en (6.12) y recordando que  $v = \dot{e}_r$ , se obtiene

$$\dot{w} = K_1 e_r + K_2 \dot{e}_r$$

así que

$$w(t) = K_1 \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma + K_2 (e_r - e_r(0)) \quad (6.13)$$

Entonces

$$\bar{\eta} = \varepsilon^{-1} \left[ K_1 \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma + K_2 (e_r - e_r(0)) + \dot{e}_r \right] \quad (6.14)$$

Esta expresión puede ser usada en (6.11) para obtener

$$\begin{aligned} \tau &= -\bar{M}[-\varepsilon^{-1}K_2 e_r(0) - \ddot{q}_d + (K_1 + \varepsilon^{-1}K_2) e_r + \\ &\quad \varepsilon^{-1}K_1 \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma + (K_2 + \varepsilon^{-1}I) \dot{e}_r] \end{aligned} \quad (6.15)$$

el cual es el control lineal PID con sesgo en estado estacionario

$$B_{dc} = \varepsilon^{-1} \bar{M} K_2 e_r(0) \quad (6.16)$$



y ganancias

$$\begin{aligned} K_P &= \bar{M}(K_1 + \varepsilon^{-1}K_2) \\ K_I &= \varepsilon^{-1}\bar{M}K_1 \\ K_D &= \bar{M}(K_2 + \varepsilon^{-1}I) \end{aligned} \quad (6.17)$$

De esta manera, cada valor de  $\varepsilon > 0$  define un *único* conjunto de ganancias PID. Note que el controlador PID (6.15) tiene un término adicional  $F(q_d) = \bar{M} \ddot{q}_d$  inducido por la dinámica de la trayectoria de referencia  $q_d(t)$ . ■

## Ecuaciones en lazo Cerrado

Para calcular la dinámica en lazo cerrado, se tomará ventaja de la configuración PID basada en observador. Con este fin, se introduce el error de estimación  $e_o \stackrel{def}{=} \eta - \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, la dinámica en lazo cerrado del robot es

$$\dot{x} = A_c x + H e_o \quad (6.18)$$

donde  $A_c$  está dada por la ecuación (6.8) y  $H = [0_{n \times n}, I_{n \times n}]^T \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ . Por otro lado, de (6.10) la dinámica del error de modelado es

$$\dot{e}_o = -\varepsilon^{-1} e_o + \dot{\eta} \quad (6.19)$$

De las ecuaciones (6.6) y (6.11), no es difícil obtener la siguiente identidad

$$\eta = -\bar{M}^{-1} \psi(x, Q_{d,1}) + \left[ I - \bar{M}^{-1} M_r(e_r, q_d) \right] (e_o + \ddot{q}_d - Kx)$$

que, junto con las ecuaciones (6.3) y (6.18), se utilizan para calcular la derivada en tiempo de  $\eta$ :

$$\dot{\eta} = -\varepsilon^{-1} [M_r(e_r, q_d)^{-1} \bar{M} - I] e_o + \Psi(x, e_o, Q_{d,3}) \quad (6.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi(x, e_o, Q_{d,3}) &= -M_r^{-1} \left[ (\partial\psi/\partial x) (A_c x + H e_o) + (\partial\psi/\partial Q_{d,1}) \dot{Q}_{r,1} \right] - \\ &M_r^{-1} \left[ (\dot{e}_r \otimes I_n) (\partial M_r / \partial e_r) + (\dot{q}_d \otimes I_n) (\partial M_r / \partial q_d) \right] (e_o + \ddot{q}_d - Kx) + \\ &(M_r^{-1} \bar{M} - I) (\ddot{q}_d - K A_c x - K H e_o) \end{aligned} \quad (6.21)$$

y  $\otimes$  es el producto de Kronecker<sup>1</sup>. Usando (6.20) en (6.19) se obtiene

$$\dot{e}_o = -\varepsilon^{-1} M_r^{-1} \bar{M} e_o + \Psi(x, e_o, Q_{d,3}) \quad (6.22)$$

Entonces, la estabilidad del sistema en lazo cerrado está completamente determinado por la estabilidad del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + H e_o \\ \dot{e}_o &= -\varepsilon^{-1} M_r^{-1} \bar{M} e_o + \Psi(x, e_o, Q_{d,3}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Este sistema muestra que la dinámica del error de seguimiento de trayectorias  $x$  y el error de estimación  $e_o$  están acopladas en ambas direcciones.

## Análisis de Estabilidad

La idea para estabilizar el control PID es escoger un valor suficientemente pequeño del parámetro de estimación  $\varepsilon > 0$ . De esta manera, el sistema (6.23) puede ser visto como un sistema no lineal singularmente perturbado donde  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  y  $e_o \in \mathbb{R}^n$  son respectivamente las variables lenta y rápida y  $\varepsilon$  es el parámetro de perturbación. El sistema reducido se define haciendo  $\varepsilon = 0$  en (6.23)

$$\dot{x} = A_c x \quad (6.24)$$

El sistema de capa límite se define tomando el tiempo escalado  $t' = t/\varepsilon$  y haciendo  $\varepsilon = 0$  en (6.23)

$$e'_o = -M_r^{-1} \bar{M} e_o \quad (6.25)$$

donde  $e'_o = de_o/dt'$ .

Se usará el Lema 2.4 en [42] para establecer la estabilidad del sistema (6.23). Con este fin, se necesitará probar que el sistema reducido es global y asintóticamente estable, y que el sistema de capa límite es estable exponencialmente

**Lema 4.** Por construcción, el sistema reducido es globalmente exponencialmente estable. Esto es, existe una matriz positiva definida  $P_c \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  que satisface la ecuación de Lyapunov  $A_c^T P_c + P_c A_c = -I_{2n \times 2n}$ .

<sup>1</sup>Para simplificar la notación se omitirán los argumentos de las funciones, dándose explícitamente sólo cuando se requieran por claridad.



**Lema 5.** Suponga que  $\|\Pi(e_r, q_d)\| \stackrel{def}{=} \|I - M^{-1}\bar{M}\| \leq \alpha < 1$  para algún  $\alpha$ , y todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ . Entonces el sistema de capa límite (6.25) es globalmente exponencialmente estable.

**Demostración.** Reescribir el sistema de capa límite como

$$e'_o = -(I - \Pi(e_r, q_d))e_o \quad (6.26)$$

Entonces la función cuadrática  $V_1(e_o) = e_o^T e_o$ , tiene derivada en tiempo

$$\begin{aligned} V'_1 &= -2V_1 + e_o^T [\Pi(e_r, q_d) + \Pi(e_r, q_d)^T] e_o \\ &\leq -2(1 - \|\Pi(e_r, q_d)\|) V_1 \leq -2(1 - \alpha)V_1 < 0, \text{ for } V_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que el sistema de capa límite es exponencialmente estable con función de Lyapunov  $V_1(e_o)$  ■

En esta sección  $(x(t, \varepsilon), e_o(t, \varepsilon))$  denota la trayectoria del sistema (2.23) con condición inicial  $(x(0), e_o(0))$ . La siguiente proposición establece la estabilidad del robot en lazo cerrado

**Proposición 12.** El origen del sistema (2.3) es prácticamente estabilizable por la ley de control clásica PID. Esto es, para cada par de conjuntos compactos  $(B_x, W_x)$ , en la vecindad del origen y  $B_x \subset W_x \subset \mathbb{R}^{2n}$ , existen ganancias PID  $\{K_P, K_I, K_D\}$  y un par de conjuntos compactos  $(B_{e_o}, W_{e_o})$ , en la vecindad del origen y  $B_{e_o} \subset W_{e_o} \subset \mathbb{R}^n$  tales que las soluciones del sistema en lazo cerrado (6.23), con condiciones iniciales en  $W_x \times W_{e_o} \subset \mathbb{R}^{3n}$ , son capturadas por el conjunto  $B_x \times B_{e_o} \subset \mathbb{R}^{3n}$ .

**Demostración.** Dadas las matrices de ganancia  $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , cada valor del parámetro de estimación  $\varepsilon > 0$  define un único conjunto de ganancias PID  $\{K_P, K_I, K_D\}$ . Entonces, es suficiente probar que el sistema en lazo cerrado (6.23) prácticamente estable alrededor del origen en forma semiglobal. Con este propósito, mostraremos que las hipótesis del Lema 2.4 en [42] se cumplen

El filtro (6.12) se inicializa como  $\bar{\eta}(0) = 0$ , entonces  $e_o(0) = \eta(0)$  o de manera equivalente

$$e_o(0) = -M(q(0))^{-1}\psi(x(0), Q_{d,1}(0)) + [M(q(0))^{-1}\bar{M} - I][\ddot{q}_d(0) - Kx(0)].$$

Debido a que  $x(0)$  y  $Q_{d,3}(0)$  están contenidos en conjuntos compactos,  $W_x$  y  $D_{Q_{d,3}}$ ,  $e_o(0)$  también lo están (por ejemplo  $W_{e_o}$ ). Entonces, las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado (6.23) están contenidas en el conjunto compacto  $W_x \times W_{e_o} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n$ . Por otro lado, la función  $V_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^T P_c x$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  es propia debido a que existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{2n} : V_2(x) \leq c + 1\}$$

está en un conjunto compacto con  $W_x$  en su interior. Debido a que la matriz  $M_r(e_r, q_d)$  y  $\psi(x, Q_{d,1})$  son funciones suaves de sus argumentos y que  $\Psi(x, e_o, Q_{d,3})$  es una función lineal de  $e_o$ , existen números reales positivos  $\nu_1$  y  $\nu_2$  que satisfacen

$$|\Psi(x, e_o, Q_{d,3})| \leq \nu_1 + \nu_2 |e_o|, \text{ for all } (x, e_o, Q_{d,3}) \in \Gamma \times \mathbb{R}^n \times D_{Q_{d,3}}$$

Con base en estos hechos y en el Lema 5, la prueba puede establecerse bajo los mismo términos que la prueba del Lema 2.4 en [42]. Esto es, para un conjunto compacto dado  $B_x \times B_{e_o} \subset W_x \times W_{e_o} \subset \mathbb{R}^{3n}$  que contiene al origen, existe un  $\varepsilon_{\max} > 0$  tal que para cada  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ , las trayectorias  $(x(t, \varepsilon), e_o(t, \varepsilon))$  del sistema (6.23), que empiezan en  $W \stackrel{\text{def}}{=} W_x \times W_{e_o}$ , son acotadas para todo  $t \geq 0$ , y son capturadas por el conjunto  $B_x \times B_{e_o} \subset \mathbb{R}^{3n}$  en tiempo finito  $T_1(\varepsilon) > 0$ . ■

**Comentario 19.** *Debido a que la función de acoplamiento  $\Psi(x, e_o, Q_{d,3})$  no es globalmente Lipchitz debido a las fuerzas de Coriolis  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ , las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado (6.23) están restringidas a algún conjunto compacto. Esto implica que el resultado de estabilidad obtenido es semiglobal.*

**Comentario 20.** *El Lema 2.4 en [42] muestra que si el sistema reducido (6.24) es asintóticamente estable y el sistema de capa límite es exponencialmente estable, entonces para un valor pequeño de  $\varepsilon > 0$ , el sistema en lazo cerrado (6.23) es estable. Además, el resultado de la Proposición 12 establece que para cualquier condición inicial de posición y velocidad en un conjunto compacto, existen ganancias PID que garantizan que el robot sigue una trayectoria deseada, con precisión arbitraria (estabilidad práctica). Esto se logra tomando valores suficientemente pequeños del parámetro  $\varepsilon > 0$ . El conjunto  $B_x \times B_{e_o}$  se conoce como atractor en tiempo finito [6] o conjunto residual [15]. Note que la constante  $\varepsilon_{\max} > 0$  depende de los conjuntos  $W_x$  y  $B_x$ . En general, un conjunto más grande condiciones iniciales  $W_x$  o un conjunto residual más pequeño  $B_x$ , implica un valor más pequeño de  $\varepsilon_{\max}$ . De*



(6.17) esto implica ganancias de control PID más grandes, lo cual concuerda con resultados previos de naturaleza local [31], [3] [37], [47].

**Comentario 21.** Debe notarse que las acciones de control siempre están limitados en la realidad. La saturación del control, puede afectar adversamente la estabilidad y el desempeño del sistema en lazo cerrado. Siguiendo las mismas ideas descritas anteriormente, puede utilizarse la ley de control saturada

$$\tau = \text{Sat} \left\{ \bar{M} [\ddot{q}_d - \bar{\eta} - Kx] \right\} \quad (6.27)$$

y mostrar (utilizando el Lema 2.4 de [42]) que puede obtenerse un resultado de estabilidad semiglobal con respecto de la máxima región de estabilidad del control inverso  $\Omega_{\max} \subseteq R^{2n}$ . Esto es, las restricciones en la entrada de control, limitan la región de estabilidad  $W_x \times W_e \subset \Omega_{\max}$  que puede obtenerse bajo la ley de control lineal PID.

## Guías de Sintonizado

En vista de la simplicidad del controlador PID y su aplicabilidad en operaciones industriales, es interesante desarrollar guías de sintonizado para estos controladores. La estructura PID propuesta puede ser explotada, para proponer un procedimiento de sintonizado como se describe a continuación:

- i) Escoja  $\bar{M}$  de manera que se cumpla con la restricción del Lema 5.
- ii) Escoja las ganancias internas  $K_1$  y  $K_2$  de acuerdo a cierto criterio de desempeño (por ejemplo: colocación de polos, etc). Si se quiere un control descentralizado, escoja las matrices  $K_1$  y  $K_2$  como  $K_1 = \text{diag}(K_{1,1}, K_{1,2}, \dots, K_{1,n})$  y  $K_2 = \text{diag}(K_{2,1}, K_{2,2}, \dots, K_{2,n})$ ; donde los escalares positivos  $K_{1,j}$  y  $K_{2,j}$  asociados al eslabón  $j$  pueden ser parametrizados en términos de la constante de tiempo en lazo cerrado  $\tau_{c,j}$  y del coeficiente de amortiguamiento  $\xi_{c,j}$

$$\begin{aligned} K_{1,j} &= \tau_{c,j}^{-2} \\ K_{2,j} &= 2\xi_{c,j}\tau_{c,j}^{-1} \end{aligned} \quad (6.28)$$

iii) Escoja un valor suficientemente pequeño de  $\varepsilon > 0$  de manera que se obtenga un comportamiento en lazo cerrado aceptable. Valores más pequeños de  $\varepsilon > 0$ , producen regiones de estabilidad más grandes y errores de seguimiento más pequeños. Note que  $\varepsilon$  puede verse como una constante de tiempo de estimación, la cual tiene significado físico en términos, por ejemplo, de la dinámica no modelada (ancho de banda alcanzable) y de la velocidad de la trayectoria de referencia. Esto significa, por ejemplo, que trayectorias deseadas  $q_d(t)$  más rápidas pueden requerir valores más pequeños de la constante de tiempo  $\varepsilon$  para obtener errores de estado estacionario aceptables.

Debe considerarse que una vez que las matrices  $\bar{M}$ ,  $K_1$  y  $K_2$  han sido seleccionadas, las ganancias del control PID dependen un sólo parámetro, es decir, de la constante de tiempo de estimación  $\varepsilon$ . Más aún, las guías de sintonizado hacen uso de un conocimiento mínimo del sistema (las cotas máxima y mínima de la matriz de inercia).

**Comentario 22.** *La configuración PID (6.11), (6.12) puede inducir en la práctica retroalimentación de alta ganancia, debido a que para obtener un error de seguimiento aceptable, pueden requerirse valores excesivamente pequeños de  $\varepsilon > 0$ . Sin embargo, en presencia de ruido de medición o de dinámicas no modeladas, es deseable evitar controladores de alta ganancia. Una solución práctica para seguir una determinada trayectoria  $q_d(t)$ , es hacerlo más lentamente. Como se mostrará en las simulaciones, esta solución deriva en ganancias PID moderadas con errores de estado estacionario aceptables.*

**Comentario 23.** *La representación PID basada en observador (6.11), (6.12) tiene dos ventajas sobre la representación estándar (6.1):*

- (i) *Los estados de controlador  $w \in \mathbb{R}^n$  son significativos como estimados de la dinámica del robot; esto es  $\varepsilon^{-1}(w + v)$  es un estimado del error de modelado asociado con el control PID*
- (ii) *Cuenta con un esquema natural de "antireset-windup" (ARW) para manejar limitaciones en la entrada de control. De hecho, si  $\tau^c$  es la acción de control calculada y  $\tau^{sat} = \text{sat}(\tau^c)$  es el par aplicado al robot, donde  $\text{sat}$  es una función de saturación definida apropiadamente, entonces la ley de control (6.11), (6.12) puede escribirse*



como<sup>2</sup>

$$\tau^c = -K_P q - K_I \int_0^t q(\sigma) d\sigma - K_D v + \varepsilon^{-1} \int_0^t (\tau^{\text{sat}}(\sigma) - \tau^c(\sigma)) d\sigma$$

donde las ganancias del control PID están dadas por (6.17). La estructura de ARW está dada por la señal retroalimentada  $\varepsilon^{-1} \int_0^t (\tau^{\text{sat}} - \tau^c) d\sigma$ . De esta manera, cuando la entrada de control se satura (i.e.,  $\tau^{\text{sat}} - \tau^c \neq 0$ ), esta señal trata de llevar el error de la entrada de control  $\tau^{\text{sat}} - \tau^c$  a cero, recalculando la integral de manera que la salida del controlador  $\tau^c$  se encuentra exactamente en el límite de la saturación [22].

## Ejemplo

Se realizaron simulaciones numéricas en un brazo mecánico de dos grados de libertad, para ilustrar las cualidades del observador propuesto. El objetivo de estas pruebas es doble. Primero se pretende ilustrar que la elección del estimado de la matriz de inercia  $\bar{M}$  de manera que cumpla con la restricción del Lema 5, no es difícil. Y segundo, mostrar la naturaleza práctica del controlador. Los parámetros del sistema dinámico del brazo utilizado pueden encontrarse en el Apéndice.

La restricción del Lema 5 puede cumplirse escogiendo  $\bar{M}$  como el promedio de las cotas de la norma de la matriz de inercia  $M(q)$ . Sin embargo, en las siguientes simulaciones, se mostrará como el controlador PID, es capaz de alcanzar los objetivos de control con un estimado grueso de la matriz de inercia  $\bar{M}$ . Primero, la matriz  $\bar{M}$  se escoge como

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 7.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

que corresponde a las cotas máximas de las entradas de la matriz de inercia y para la cual  $\|I_{n \times n} - M_r^{-1} \bar{M}\|_{\infty} = 0.794 < 1$ . Esto es, la matriz  $\bar{M}$  satisface las suposición del Lema 5. Las ganancias de internas del control  $K_1$  y  $K_2$  se escogen diagonales y parametrizadas en términos de  $\xi_{c,i}$  y  $\tau_{c,i}$ . Se escoge  $\xi_{c,1} = \xi_{c,2} = 0.85$  y  $\tau_{c,1} = \tau_{c,2} = 0.2$  s.

<sup>2</sup>La deducción de esta ecuación, puede hacerse de manera similar a como se hizo en el Capítulo 3, (Ecuaciones 3.11-3.15).

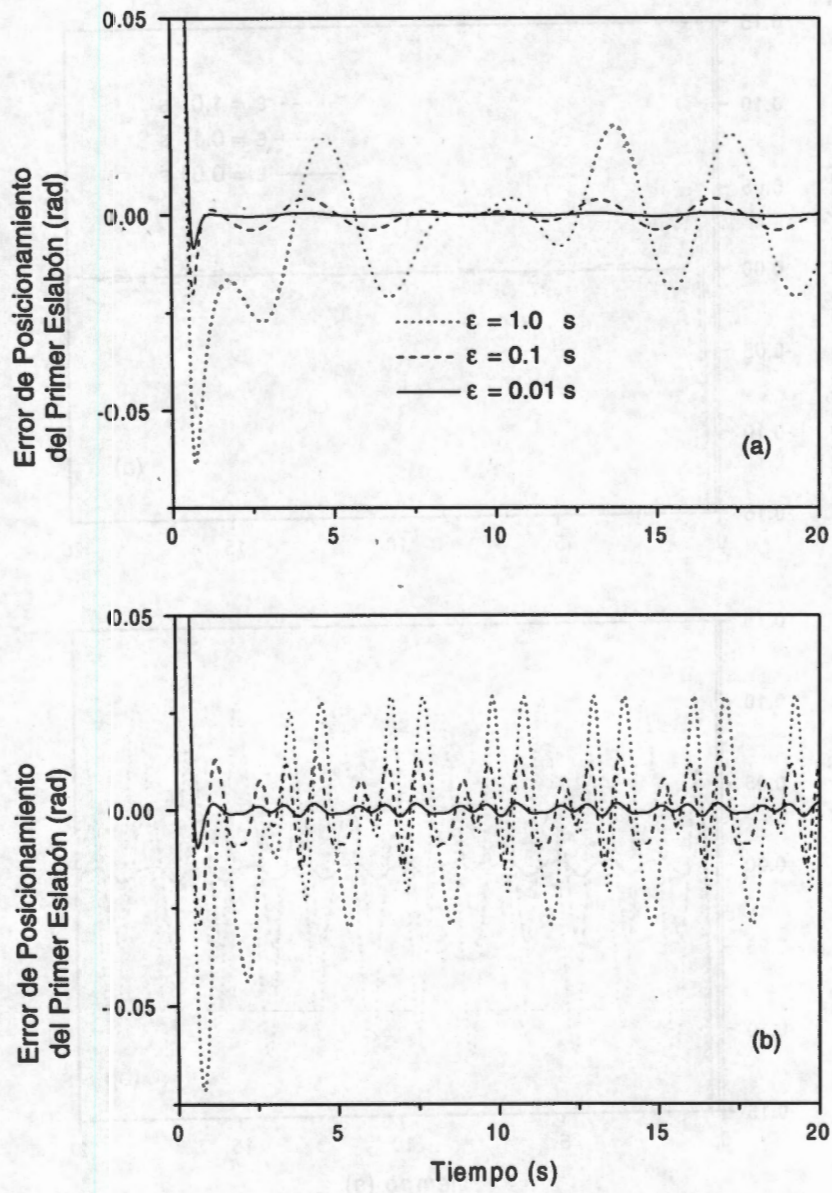


Figura 6.1 Error de seguimiento del primer eslabón; (a)  $q_{r,\alpha}$ , (b)  $q_{r,\beta}$



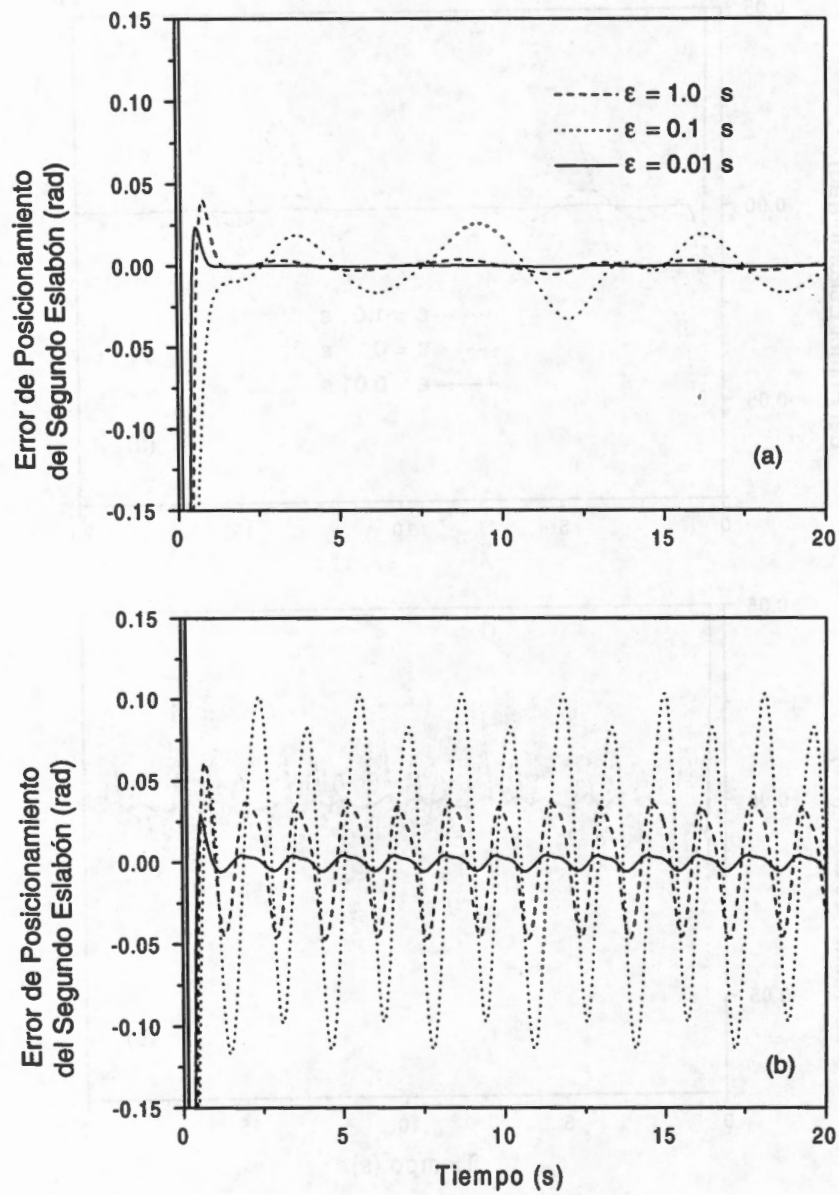


Figura 6-2 Error de seguimiento del segundo eslabón; (a)  $q_{r,\alpha}$ , (b)  $q_{r,\beta}$

Las condiciones iniciales son  $q_1(0) = \pi \text{ rad}$ ,  $q_2(0) = -\pi \text{ rad}$ ,  $v_1(0) = 5.0 \text{ rad/s}$ ,  $v_2(0) = 13.5 \text{ rad/s}$  y la trayectoria de referencia es

$$\begin{aligned} q_{d,1}(t) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sin(\beta t) + \frac{\pi}{6} \cos(\beta t/2) \\ q_{d,2}(t) &= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \sin(\beta t/2) + \frac{\pi}{4} \cos(\beta t) \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde  $\beta > 0$  es un factor de escalamiento de tiempo. El factor  $\beta$  define la velocidad de la trayectoria deseada  $q_d(t)$ , *i.e.* valores mayores de  $\beta$ , derivan en trayectorias con velocidades mayores.

La Figura 6.1 muestra el error de seguimiento del primer eslabón, para tres diferentes valores de  $\varepsilon$  y para dos diferentes velocidades; una "lenta" ( $\beta = 1$ ) y otra "rápida" ( $\beta = 4$ ). Como se espera, valores más pequeños del parámetro de estimación, derivan en errores de seguimiento más pequeños. Por supuesto, en aplicaciones prácticas existe un valor mínimo del parámetro  $\varepsilon$  para el cual el ruido de medición y las dinámicas no modeladas son despreciables. También note que errores de seguimiento son más pequeños para trayectorias más lentas ( $\beta = 1$ ). De hecho, para un determinado valor de  $\varepsilon$ , pueden obtenerse valores más pequeños de los errores de seguimiento para trayectorias deseadas más lentas. Este comportamiento también puede ser observado para el segundo eslabón, el cual se muestra en la Figura 6.2. Estos resultados concuerdan con lo observado experimentalmente y en aplicaciones industriales (ver por ejemplo [17], [37]) donde la velocidad de seguimiento es sacrificada para obtener un mejor seguimiento de la referencia. Esta práctica puede ser observada en la Figura 6.3, que muestra las trayectorias rápida y lenta en el espacio de estados (*i.e.*  $q_1$  vs.  $q_2$ ) para  $\varepsilon = 1 \text{ sec}$ .

Se realizaron simulaciones para el caso del control de juntas independientes. En una primera prueba se escogió  $\bar{M} = \text{diag}(0.47, 0.47)$ , según se sugirió en la sección anterior. En la segunda prueba  $\bar{M} = \text{diag}(8.77, 0.62)$ , que coinciden con los valores máximos de los valores de la diagonal de la matriz de inercia  $M(q)$ . Para el primer y segundo caso se tiene que  $\|I_{n \times n} - M_r^{-1} \bar{M}\|_{\infty} = 0.963 < 1$  y  $\|I_{n \times n} - M_r^{-1} \bar{M}\|_{\infty} = 2.861 > 1$ . Bajo estas selecciones, no se encontró diferencias significativas con los resultados de las Figuras 6.1 y 6.2. Esto muestra que la condición  $\|I_{n \times n} - M_r^{-1} \bar{M}\|_{\infty} < 1$  del Lema 5 puede ser conservadora, permitiendo elecciones de  $\bar{M}$  más relajadas sin degradación de la estabilidad en lazo cerrado.



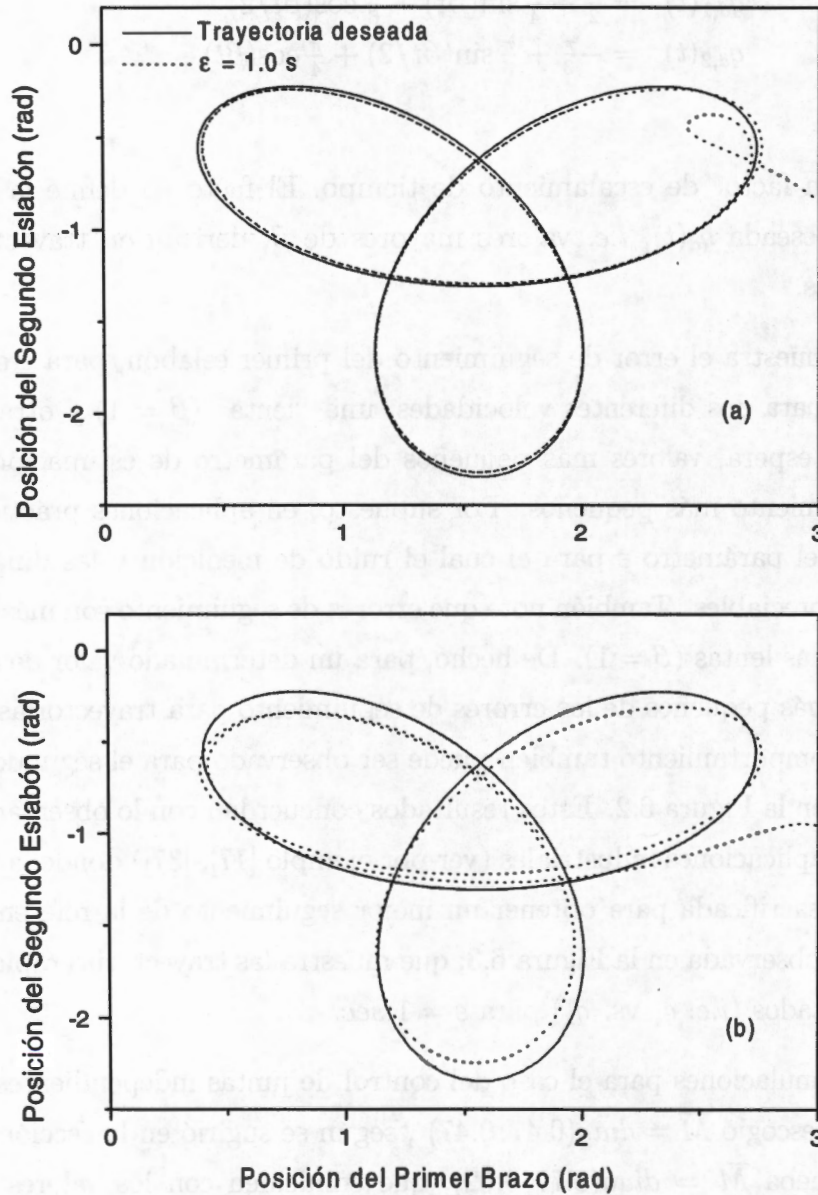


Figura 6-3 Retrato fase de las trayectorias seguidas en comparación con la deseada; (a)

$q_{r,\alpha}$ , (b)  $q_{r,\beta}$

## Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el problema de seguimiento de trayectorias en coordenadas articulares con control PID. La utilización de una configuración novedosa del control PID permite escribir el sistema en lazo cerrado, como un sistema singularmente perturbado y para el cual puede derivarse estabilidad semiglobal práctica. Esto es, dada cualquier condición inicial de posición y velocidad, existen ganancias PID que garantizan que el robot sigue una trayectoria deseada con precisión arbitraria. Del análisis de estabilidad se extraen reglas de sintonizado, las cuales fueron ilustradas con simulaciones numéricas en un brazo mecánico de dos grados de libertad.



Conclusiones

En este artículo se ha tratado el problema de seguimiento de trayectorias con control PID. La realización de una configuración en el espacio de estado. El PID puede ser utilizado en lazo cerrado, como un sistema de control. En este caso, el error puede ser eliminado. El control PID puede ser utilizado en lazo abierto, como un sistema de control. En este caso, el error puede ser eliminado. El control PID puede ser utilizado en lazo cerrado, como un sistema de control. En este caso, el error puede ser eliminado. El control PID puede ser utilizado en lazo abierto, como un sistema de control. En este caso, el error puede ser eliminado.

---

## Capítulo 7

---

# Control por Campo de Velocidad

## Introducción

Hasta ahora, se ha considerado el problema de seguimiento de trayectorias de manera estándar. Es decir, dada una trayectoria parametrizada en tiempo  $q_d(t)$  se diseña una ley de control que sigue esta parametrización. En este capítulo se aborda el problema de seguimiento de trayectorias pero con una formulación novedosa; esta es, con el concepto de control por campo de velocidad (CCV). El control por campo de velocidad (CCV) ha emergido recientemente de la literatura [24], [27], [33] como una alternativa del control de movimiento. El CCV codifica las trayectorias deseadas utilizando campos de velocidad, esto es, define un vector tangente a cada punto del espacio de configuración [24].

Muchas tareas pueden codificarse como campos de velocidad, tales como seguimiento de contornos para operaciones de corte, pintado etc. Este enfoque tiene varias ventajas con respecto al enfoque tradicional, de las que se pueden mencionar las siguientes:

- (a) El error de seguimiento del campo vectorial es una medida apropiada de describir si se está siguiendo una trayectoria
- (b) La especificación de la tarea, codificada como un campo vectorial, y la velocidad se realiza pueden ser desacopladas [27].



Por otro lado, se han reportado varias aplicaciones de este novedoso enfoque en manipuladores teleoperados [25], sistemas cooperativos de robots manipuladores [48], sistemas cooperativos de robots móviles [49] y control pasivo-adaptivo de campo de velocidad [26]. Sin embargo, existen varias preguntas que aún están abiertas; entre las que se cuenta por ejemplo, el control de campo de velocidad en robots de dinámica incierta. Este capítulo trata este problema. Se propone un control tipo PI, el cual requiere de un mínimo conocimiento del sistema. Se muestra que dada cualquier condición inicial en posición y velocidad, existen ganancias PI tales que el campo vectorial puede seguirse con precisión arbitraria.

## Formulación del Problema

Siguiendo la notación introducida por [27], se define  $T_q\mathcal{G}$  como el espacio tangente a  $\mathcal{G}$  en una configuración específica del robot  $q$ . El campo de velocidad deseado es un mapeo invariante en tiempo tal que

$$\begin{aligned} V : \mathcal{G} &\rightarrow T\mathcal{G}, \\ q &\mapsto V(q) \in T_q\mathcal{G} \end{aligned}$$

donde  $T\mathcal{G} = \cup_{q \in \mathcal{G}} T_q\mathcal{G}$  es el haz tangente a  $\mathcal{G}$ . Entonces, el campo de velocidad deseado, define un vector tangente a cada punto  $q$  del espacio de configuración

$$\dot{q} = V(q)$$

El problema de control por campo de velocidad (CCV) se formula como sigue. Sea la dinámica de un robot de  $n$  grados de libertad (2.3), entonces el problema es diseñar una ley de control lineal  $\tau$  de manera que la velocidad  $\dot{q}$  siga un campo de velocidad deseado  $V(q)$ , i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(q(t)) - \dot{q}(t) = 0 \quad (7.1)$$

y la condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0))^T \in \mathbb{R}^{2n}$  esté contenida en la región de atracción.

Con el fin de solucionar el problema de control se hacen las siguientes suposiciones:

Suposición 1. Las funciones  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$  son  $C^1$  y además son inciertas.

Suposición 2. El campo de velocidad  $V(q)$  tiene primera y segunda derivadas en tiempo continuas y acotadas.

Suposición 3. El campo de velocidad  $V(q)$  define trayectorias global y uniformemente acotadas (i.e.,  $\|q(0) + \int_0^t V(q(\sigma))d\sigma\|$  está globalmente acotada para todo  $q(0) \in \mathbb{R}^n$  y  $t \geq 0$ ).

## La Ley de Control Inversa

En esta sección, trataremos el problema de control por campo de velocidad, suponiendo que el modelo y los parámetros del robot son conocidos. El propósito es doble

- (i) Obtener un resultado previo al diseño del controlador robusto
- (ii) Determinar las limitaciones de este controlador

Sea  $v = \dot{q}$  la velocidad del robot y  $e_r \stackrel{\text{def}}{=} V(q) - v \in \mathbb{R}^n$  el error de seguimiento del campo de velocidad. La dinámica del robot (2.3) en lazo cerrado puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= \phi(q, e_r) - M(q)^{-1} [\tau - V(q, e_r)]\end{aligned}\quad (7.2)$$

donde

$$\begin{aligned}\phi(q, e_r) &\stackrel{\text{def}}{=} DV(q) [V(q) - e_r] \in \mathbb{R}^n \\ V(q, e_r) &\stackrel{\text{def}}{=} g(q) + C [q, (V(q) - e_r)] [V(q) - e_r] \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

y donde  $\mathcal{N}(x, t) = 0$ . El controlador inverso es

$$\tau = F_1^{\text{inv}}(q, e_r) \stackrel{\text{def}}{=} V(q, e_r) + M(q) [\phi(q, e_r) + K_r e_r] \quad (7.3)$$

donde  $K_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida que induce

$$\begin{aligned}\dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= -K_r e_r\end{aligned}\quad (7.4)$$

de manera que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$  se cumple exponencialmente. Utilizando la Suposición 3,  $q(t)$  permanece acotada para todo  $t \geq 0$ .

**Comentario 24.** Si  $R(q)$  es el conjunto límite de las trayectorias generadas por el campo de velocidad  $V(q)$  (i.e.,  $q(0) + \int_0^t V(q(\sigma))d\sigma \rightarrow R(q(t))$  asintóticamente), entonces  $R(q)$  es también el conjunto límite del sistema (7.4). De esta manera,  $R(q) \times 0_n$  es el conjunto límite de (7.4). Note que la Suposición 3 implica que  $R(q) \times 0_n$  es un conjunto compacto.



**Comentario 25.** *Básicamente, el control por campo de velocidad es una configuración de control cascada [23]. De hecho, el campo de velocidad deseado  $V(q)$  se diseña con base en un sistema de grado relativo uno  $\dot{q} = v^*$ , donde  $v^*$  se toma como una entrada de control virtual. De esta manera, el así llamado lazo primario o maestro es  $v^* = V(q)$ . Debido a que el sistema real es  $\dot{q} = v$ , la acción del control maestro deriva en  $\dot{q} = V(q) - e_r$ . De esta manera, el objetivo del segundo lazo o control esclavo es el de alcanzar un error de seguimiento cero (i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$ ). Este objetivo se cumple con el control inverso  $\tau = F_1^{inv}(q, e_r)$ . Una ventaja del control por campo de velocidad sobre el enfoque tradicional (sin cascada) es que que la especificación de la tarea, codificada como un campo de velocidad y la velocidad a la cual puede ser realizada, están desacopladas [27].*

**Comentario 26.** *Es interesante considerar el caso cuando*

$$V(q) = K_V(q_d - q) \quad (7.5)$$

donde  $K_V$  es una matriz positiva definida y  $q_d \in \mathbb{R}^n$  es la configuración deseada. En este caso, el punto  $R(q) = q_d$  es el conjunto límite del campo vectorial  $K_V(q_d - q)$ . Debido a que  $DV(q) = -K_V$ , el control inverso correspondiente es

$$\tau = V(q, e_r) - M(q) [-K_1(q_d - q) + K_2 v] \quad (7.6)$$

donde  $K_1 = K K_V$  y  $K_2 = K + K_V$ . El controlador (7.6) es el control llamado par calculado, que estabiliza al robot en la posición de equilibrio  $q_d$ .

## Diseño del la Ley de Control Robusta

La ley de control inversa (7.3) asegura que el sistema (2.3) sigue el campo de velocidad asintóticamente. Desafortunadamente, dado que la estructura del robot siempre es incierta, esta ley de control sólo puede implementarse aproximadamente. Para evitar este problema, se diseñará una ley de control inversa basada en observador.

Sea

$$\tilde{V}(q, e_r) = \bar{g}(q) - \bar{C}(q, V(q) - e_r) (V(q) - e_r)$$

donde  $\bar{M}(q)$  es una matriz positiva definida que corresponde al estimado de  $M(q)$ ,  $\bar{g}(q)$ ,  $\bar{C}(q, V(q) - e_r)$  son estimados de  $g(q)$ ,  $C(q, V(q) - e_r)$  respectivamente y  $\tilde{V}(q, e_r)$  es el

estimado de la función  $V(q, e_r)$ . Se define la función de error de modelado  $\eta(q, e_r, \tau)$ , como sigue

$$\eta(q, e_r, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} -M(q)^{-1} [\tau - V(q, e_r)] + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \tilde{V}(q, e_r)] \quad (7.7)$$

De esta manera, el sistema (7.2) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= \phi(q, e_r) + \eta(q, e_r, \tau) - \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \tilde{V}(q, e_r)] \end{aligned} \quad (7.8)$$

En términos de la función de error de modelado  $\eta(q, e_r, \tau)$ , el controlador inverso es

$$\begin{aligned} \tau &= F_2^{\text{inv}}(q, e_r, \eta(q, e_r, \tau)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{V}(q, e_r) + \bar{M}(q) [\phi(q, e_r) + \eta(q, e_r, \tau) + K_r e_r] \end{aligned} \quad (7.9)$$

**Comentario 27.** La función de retroalimentación de dinámica inversa  $\tau = F_2^{\text{inv}}(q, e_r, \eta(q, e_r, \tau))$  puede ser vista como una representación implícita de la función exacta  $\tau = F_1^{\text{inv}}(q, e_r)$ . De hecho,  $F_1^{\text{inv}}(q, e_r) = F_2^{\text{inv}}(q, e_r, \eta(q, e_r, F_1^{\text{inv}}(q, e_r)))$ .

Siguiendo las ideas de compensación de error de modelado [3], y con base en el hecho de que

$$\eta(q, e_r, \tau) = \dot{e}_r - \phi(q, e_r) + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \tilde{V}(q, e_r)]$$

la señal <sup>1</sup>  $\eta(t) = \eta(q(t), e_r(t), \tau(t))$  puede ser reconstruída usando el siguiente observador de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}} &= \varepsilon^{-1} [\eta - \bar{\eta}] \\ &= \varepsilon^{-1} [\dot{e}_r - \phi(q, e_r) + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \tilde{V}(q, e_r)] - \bar{\eta}] \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde  $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$  es el estimado de  $\eta(t)$  y  $\varepsilon > 0$  es el parámetro de estimación. El controlador práctico puede ser escrito utilizando la siguiente función de equivalencia cierta

$$\tau = F_2^{\text{inv}}(q, e_r, \bar{\eta}) \quad (7.11)$$

donde el término incierto  $\eta(q, e_r, \tau)$  de la ley de control inversa (7.9), ha sido reemplazada por el estimado  $\bar{\eta}$ . El controlador resultante está compuesto por el estimador de error de modelado (7.10) y la función de equivalencia cierta (7.11) [5].

<sup>1</sup>Con un abuso de notación, el símbolo  $\eta$  se usara para denotar tanto la señal  $\eta(t)$  como la función  $\eta(q(t), e_r(t), \tau(t))$ .



**Comentario 28.** El observador (7.10) es impropio ya que requiere de la derivada en tiempo  $\dot{e}_r$ . Introduciendo la variable  $w \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \bar{\eta} - e_r$ , este observador puede ser implementado. De esta manera, se obtiene el observador propio

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\phi(q, e_r) + \bar{M}(q)^{-1} [\tau - \tilde{V}(q, e_r)] - \varepsilon^{-1}(w + e_r) \\ \bar{\eta} &= \varepsilon^{-1}(w + e_r)\end{aligned}\quad (7.12)$$

con condición inicial  $w(0) = -e_r(0)$ .

**Comentario 29.** No es difícil ver, que el controlador práctico (7.11), (7.12) puede reescribirse como

$$\tau = P(q, \dot{q}) + \bar{M}(q)F_{PI}(e_r) \quad (7.13)$$

donde

$$P(q, \dot{q}) = \bar{M}(q)\phi(q, e_r) + \tilde{V}(q, e_r) \quad (7.14)$$

y

$$F_{PI}(e_r) = K_P e_r + K_I \int_0^t e_r(\sigma) d\sigma \quad (7.15)$$

es el controlador clásico PI con ganancias

$$K_P = \varepsilon^{-1}I_n + K_r$$

$$K_I = \varepsilon^{-1}K_r$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . Note que cuando  $\bar{C}(q, \dot{q})$  y  $\bar{M}(q)$  son matrices diagonales constantes, la Ec. (7.13) es un control descentralizado compuesto de un control PI lineal y un compensador de la dinámica del campo de velocidad. Además, si el campo de velocidad es como el que se propuso en el Comentario 26, el controlador (7.13) es un PID con ganancia derivativa  $K_D = \bar{M}K_V$ .

**Comentario 30.** El control práctico (7.11), (7.12) es una representación basada en observador de la dinámica inversa [2]. Esta representación tiene varias ventajas, con respecto del formato tradicional. Por ejemplo, cuenta con un esquema de "antireset windup" para compensar saturaciones en el actuador [2]. En la sección posterior, se explotará esta representación para describir el sistema en lazo cerrado como un sistema singularmente perturbado.

## Ecuaciones en lazo Cerrado

Para simplificar las ecuaciones y sin pérdida de generalidad, se tomará  $\bar{M}(q)$  como una matriz constante y  $\tilde{V}(q, e_r) = 0$ . El error de observación se define como

$$e_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \eta - \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$$

Utilizando (7.11) en (7.8), se tiene que la dinámica del robot en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= -K e_r + e_\eta \end{aligned} \quad (7.16)$$

Por otro lado, según la Ec. (7.10), la dinámica del error de observación es

$$\dot{e}_\eta = -\varepsilon^{-1} e_\eta + \dot{\eta} \quad (7.17)$$

Es posible calcular la derivada en tiempo  $\dot{\eta}$  de (7.11) y (7.7)

$$\dot{e}_\eta = -\varepsilon^{-1} M^{-1} \bar{M} e_\eta + \Psi(q, e_r, e_\eta) \quad (7.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi(q, e_r, e_\eta) \stackrel{\text{def}}{=} & [I_r - M^{-1} \bar{M}] [D_1 V(q, e_r) [V(q) - e_r] + D_2 V(q, e_r) \rho(q, e_r, e_\eta) + K_r e_\eta - K_r^2 e_r] + \\ & M^{-1} [D_1 V(q, e_r) [V(q) - e_r] + D_2 V(q, e_r) \rho(q, e_r, e_\eta)] + \\ & M^{-1} [V(q) - e_r]^T \otimes I_n [DM(q)] [\phi(q, e_r) - e_\eta + K_r e_r] \end{aligned} \quad (7.19)$$

y

$$\rho(q, e_r, e_\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(q, e_r) - e_\eta + K_r e_r$$

donde  $\otimes$  denota el producto de Kronecker.

## Estabilidad del Sistema

Resumiendo, en las coordenadas  $(q, e_r, e_\eta)$ , el sistema en lazo cerrado puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= -K e_r + e_\eta \\ \varepsilon \dot{e}_\eta &= -M^{-1} \bar{M} e_\eta + \varepsilon \Psi(q, e_r, e_\eta) \end{aligned} \quad (7.20)$$



Para valores pequeños de  $\varepsilon > 0$ , el sistema (7.20) es un sistema singularmente perturbado. Debido a que  $M^{-1}\bar{M}$  es una matriz invertible, el sistema reducido es

$$\begin{aligned}\dot{q} &= V(q) - e_r \\ \dot{e}_r &= -Ke_r\end{aligned}\quad (7.21)$$

el cual se obtiene haciendo  $\varepsilon = 0$  en (7.20). Note que el sistema reducido es el sistema bajo la ley de control inversa (7.3). Entonces, el sistema reducido (7.21) tiene un error de velocidad  $e_r(t)$  que es globalmente exponencialmente estable, con trayectorias acotadas globalmente. El sistema de capa límite asociado con (7.20) es

$$e'_\eta = -M^{-1}\bar{M}e_\eta \quad (7.22)$$

donde  $e'_\eta = de_\eta/d(t/\varepsilon)$ . En relación a la estabilidad el sistema de capa límite (7.22) se tiene el siguiente resultado.

**Lema 6.** Suponga que  $\|M(q)^{-1}\bar{M} - I_n\| \leq \alpha < 1$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^n$  y algún  $\alpha > 0$ . Entonces, el sistema de capa límite (7.22) es uniforme y exponencialmente estable alrededor del origen<sup>2</sup>.

**Demostración.** Escriba el sistema de capa límite como

$$e'_\eta = -[I_n - \Gamma(q)]e_\eta \quad (7.23)$$

donde  $\Gamma(q) \stackrel{\text{def}}{=} I - M^{-1}\bar{M}$ . La derivada en tiempo de la función positiva  $V_{e_\eta} = e_\eta^T e_\eta$  a lo largo de las trayectorias de (7.22) satisface

$$V'_{e_\eta} = -2V_{e_\eta} + e_\eta^T[\Gamma(q) + \Gamma(q)^T]e_\eta \leq -2(1 - \alpha)V_{e_\eta} < 0 \quad (7.24)$$

para  $V_{e_\eta} \neq 0$ . Esto muestra que (7.22) es global y exponencialmente estable, y su función de Lyapunov es  $V_{e_\eta}(e_\eta) = e_\eta^T e_\eta$ . ■

El siguiente resultado establece las propiedades de estabilidad del sistema (7.20), dada una selección arbitraria del campo de velocidad  $V(q)$ .

**Proposición 13.** El error de campo de velocidad del sistema en lazo cerrado (7.20) es semiglobal y prácticamente estabilizable alrededor del conjunto límite  $R(q) \times 0_n$ . Esto es, para cada par de conjuntos compactos

<sup>2</sup>En [25] se muestra que siempre existe una elección de  $\bar{M}$  que satisface esta suposición.

$B_{(q,e_r)}, W_{(q,e_r)}$  vecindades de  $R(q) \times 0_n$ , con  $B_{(q,e_r)} \subset W_{(q,e_r)} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , existe un  $\varepsilon_{\max} > 0$  y un par de conjuntos compactos  $(B_{e_\eta}, W_{e_\eta})$ , en la vecindad del origen y  $B_{e_\eta} \subset W_{e_\eta} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , tales que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado (7.20), con condición inicial en  $W_{(q,e_r)} \times W_{e_\eta} \subset \mathbb{R}^{3n}$ , son capturadas por el conjunto  $B_{(q,e_r)} \times B_{e_\eta} \subset \mathbb{R}^{3n}$ , para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ .

**Demostración.** Una vez que el sistema en lazo cerrado ha sido descrito como un sistema singularmente perturbado, la prueba de estabilidad es una aplicación directa de los resultados de [14]. De hecho, note que según la Suposición 1,  $\Psi(q, e_r, e_\eta)$  tiene derivadas acotadas en conjuntos compactos. El Lema 6 implica que el sistema de capa límite es exponencialmente estable alrededor del origen. Entonces, el Teorema 2 en [14] y la metodología de expansión asintótica de soluciones, implica que para todo  $t \geq 0$  y pequeños  $\varepsilon > 0$ , la solución de (7.20) con condiciones iniciales en el conjunto compacto  $B_{(q,e_r)} \times B_{e_\eta} \subset \mathbb{R}^{3n}$  satisface

$$\begin{aligned} q(t, \varepsilon) &= q_0(t) + \varepsilon \tilde{q}_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ e_r(t, \varepsilon) &= e_{r,0}(t) + \varepsilon \tilde{e}_{r,1}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ e_\eta(t, \varepsilon) &= e_{\eta,0}(t) + \varepsilon \tilde{e}_{\eta,1}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

donde  $(q_0(t), e_{r,0}(t))$  y  $e_{\eta,0}(t)$  son respectivamente soluciones del sistema reducido y el de capa límite,  $\tilde{q}_1(t)$ ,  $\tilde{e}_{r,1}(t)$  y  $\tilde{e}_{\eta,1}(t)$  son los términos de primer orden de la expansión asintótica de la solución. Entonces, para pequeños  $\varepsilon > 0$ , las trayectorias del sistema (7.20) convergen a una vecindad  $B_{(q,e_r)} \times B_{e_\eta} \subset \mathbb{R}^{3n}$  del conjunto compacto  $R(q) \times 0_n \times 0_n$ . Más aún, tal vecindad es  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Como consecuencia, el conjunto límite  $R(q) \times 0_n$  es semiglobalmente prácticamente estable. ■

**Comentario 31.** *Note que*

$$\begin{aligned} q(t, \varepsilon) &\rightarrow q_0(t) \\ e_r(t, \varepsilon) &\rightarrow e_{r,0}(t) \\ e_\eta(t, \varepsilon) &\rightarrow e_{\eta,0}(t) \end{aligned}$$

*de manera uniforme cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto es, las trayectorias del sistema singularmente perturbado (7.20) convergen a las trayectorias del sistema compuesto por el sistema reducido y el de capa límite. Como consecuencia, se concluye que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el control robusto  $F_2^{inv}(q, e_r, \bar{\eta})$  (ver Ec.(7.9) recupera el desempeño inducido por el controlador exacto  $F_1^{inv}(q, e_r)$  (ver Ec. (7.3)).*



**Comentario 32.** *El resultado de la Proposición 13 establece que, dado cualquier conjunto compacto de condiciones iniciales, existen ganancias PI que garantizan que el robot sigue el campo de velocidad deseado con precisión arbitraria. Esto se logra tomando valores suficientemente pequeños del parámetro  $\varepsilon > 0$ . Valores más pequeños de  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  inducen conjuntos de condiciones inicial más grandes  $W_{(q,e_r)} \times W_{e_\eta}$  y conjuntos residuales más pequeños  $B_{(q,e_r)} \times B_{e_\eta}$ .*

**Comentario 33.** *(Estabilidad Práctica Semiglobal) Si el conjunto límite del campo vectorial  $V(q)$  es una posición deseada,  $q_d$  (ver Comentario 26), entonces  $\Psi(q_d, 0, 0) = 0$ . En este caso, el sistema reducido (7.21) tiene un punto límite asintótico en  $(q_d, 0_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ . El Teorema 3 en [14] implica que el equilibrio de la posición  $(q_d, 0_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  es semiglobalmente asintóticamente estable. Si además,  $V(q) = K_V(q_d - q)$ ,  $\bar{M}(q)$  es una matriz positiva definida, y  $\bar{C}(q, v) = 0$ ,  $F_2^{inv}(q, e_r, \bar{\eta})$  es equivalente a un controlador PID clásico. Entonces, la Proposición 13 provee de un soporte teórico a la práctica general de utilizar controladores PID para posicionamiento en robots.*

## Guías de Sintonizado

De la Proposición 13, la parametrización (7.15) en  $\varepsilon$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$  define una trayectoria en el espacio  $\{K_P, K_I\}$  para la cual se asegura la estabilidad práctica del robot controlado. Este hecho y el resultado de estabilidad de la sección anterior, permite extraer reglas de sintonizado simples que garantizan una implementación estable del controlador (7.13).

- i) Escoja  $\bar{M}$  de manera que se satisfaga la restricción del Lema 6
- ii) Escoja la ganancia interna del controlador  $K_r$  de acuerdo con algún criterio de desempeño (colocación de polos, etc.)
- iii) Escoja un valor suficientemente pequeño de  $\varepsilon > 0$  de manera que se obtenga una estabilidad en lazo cerrado aceptable (Proposición 13).

Note que  $\varepsilon$  afecta inversamente el desempeño del controlador PID. Valores más pequeños de  $\varepsilon > 0$ , derivan en regiones de atracción más grandes  $W_{(q,e_r)} \times W_{e_\eta}$  y en conjuntos residuales más pequeños  $B_{(q,e_r)} \times B_{e_\eta}$ . Por supuesto en la práctica, el valor mínimo de  $\varepsilon > 0$  está limitado por el ruido de medición y por la presencia de dinámicas no modeladas;

por ejemplo, la dinámica del actuador. En la sección posterior, se ilustrará el desempeño del controlador propuesto, y se mostrará que pueden obtenerse buenos desempeños con valores moderados de  $\epsilon > 0$ .

## Evaluación Experimental

Esta sección muestra la implementación experimental de la ley de control por campo de velocidad propuesta (Ec. (7.10)), en un brazo mecánico de dos grados de libertad. El modelo dinámico se muestra en el Apéndice.

Se escogió un campo vectorial, el cual traza un círculo (conjunto límite). El origen del sistema cartesiano de referencia se fijó en el eje de rotación del primer brazo.  $y_1$  y  $y_2$  denotan los ejes horizontal y vertical, respectivamente. El campo de velocidad, se escogió de manera que no sucedieran cambios repentinos de velocidad o aceleración, para prevenir saturación de los actuadores. La expresión matemática del campo de velocidad deseado es (ver también [33])

$$v(y) = -k(y)f(y) \begin{bmatrix} 2(y_1 - y_{c1}) \\ 2(y_2 - y_{c2}) \end{bmatrix} + c(y) \begin{bmatrix} -2(y_2 - y_{c2}) \\ 2(y_1 - y_{c1}) \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

donde

$$f(y) = (y_1 - y_{c1})^2 + (y_2 - y_{c2})^2 - r_0^2$$

$$k(y) = \frac{k_0^*}{|f(y)| \|\nabla f(y)\| + \epsilon}$$

$$c(y) = \frac{c_0 \exp^{-\beta|f(y)|}}{\|\nabla f(y)\|}$$

$r_0 = 0.2 \text{ m}$  es el diámetro del círculo,  $y_{c1} = 0.318 \text{ m}$  y  $y_{c2} = 0.318 \text{ m}$  son las coordenadas del centro del círculo.  $k_0^* = 0.1 \text{ m sec}^{-1}$ ,  $\beta = 20 \text{ m}^{-2}$ ,  $\epsilon = 0.005 \text{ m}^3$  y  $c_0 = 0.1 \text{ m sec}^{-1}$  es la velocidad de seguimiento deseada (ver Figura 7.1).

Debido a que el controlador propuesto fue diseñado para trazar un círculo en coordenadas articulares, es necesario transformar las ecuaciones de campo de velocidad anteriores para que sean expresadas en coordenadas articulares. Con este fin, se usa la cinemática directa del robot

$$y = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2 + q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$



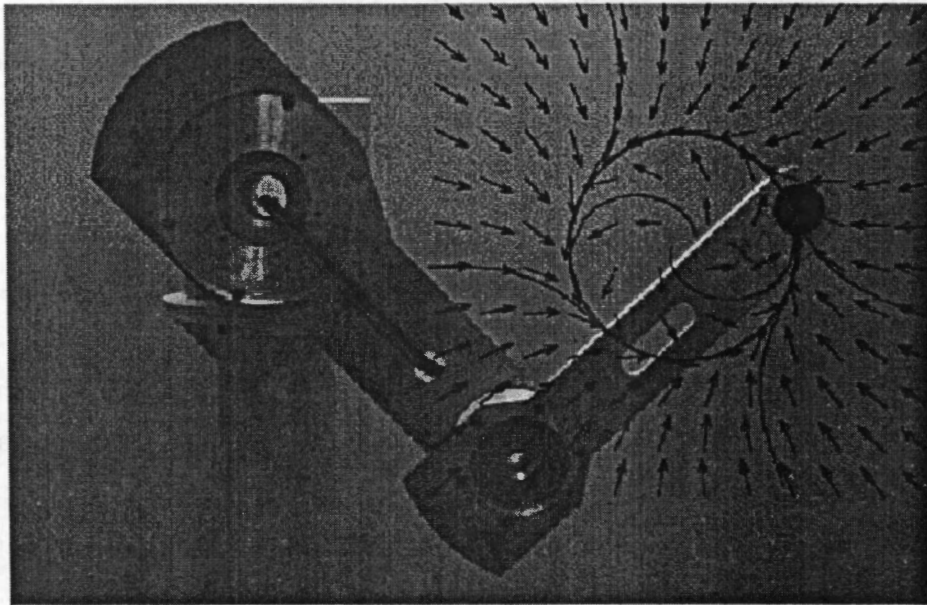


Figura 7-1 Conjunto límite del campo vectorial deseado.

Entonces, el jacobiano analítico está dado por

$$J(q) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

donde  $l_1$  y  $l_2$  son respectivamente, la longitud del primer y segundo brazos. La velocidad de seguimiento deseada en coordenadas articulares es  $V(q) = J(q)^{-1}v(y)$ .

El objetivo de la evaluación experimental es doble. Primero se quiere ilustrar que la tarea de escoger  $\bar{M}$  no es difícil y; segundo, ilustrar el desempeño del controlador propuesto. Con este fin, se ha escogido  $\bar{M} = \text{diag}(3.0, 0.2)$ , que es una matriz estimada cuyos elementos son las cotas superiores de la diagonal de la matriz  $M(q)$ . La ganancia interna del controlador es  $K_r = \text{diag}(6.6, 6.6) \text{ Nm s rad}^{-1}$ . Las condiciones iniciales son  $q_1(0) = 45^\circ$ ,  $q_2(0) = 90^\circ$  (i.e.,  $y(0) = (0.636, 0)^T \text{ m}$  en coordenadas Cartesianas),  $\dot{q}_1(0) = 0 \text{ rad s}^{-1}$  y  $\dot{q}_2(0) = 0 \text{ rad s}^{-1}$ . La velocidad de los eslabones ha sido calculada a partir de diferencias finitas atrasadas con un período de muestreo de 2.5 ms.

La Figura 7.2 muestra el contorno trazado por el extremo del segundo eslabón, en comparación con la referencia, para un parámetro de observación  $\varepsilon = 0.025 \text{ s}$ . Por otro lado, las Figuras 7.3 y 7.4 muestran la evolución de los errores de velocidad en  $\text{rad/s}$  para tres diferentes valores del parámetro  $\varepsilon$  (i.e.,  $\varepsilon = 0.025 \text{ s}$ ,  $\varepsilon = 0.050 \text{ s}$ ,  $\varepsilon = 0.080 \text{ s}$ ). Puede observarse que valores más pequeños de  $\varepsilon$ , derivan en errores de seguimiento de

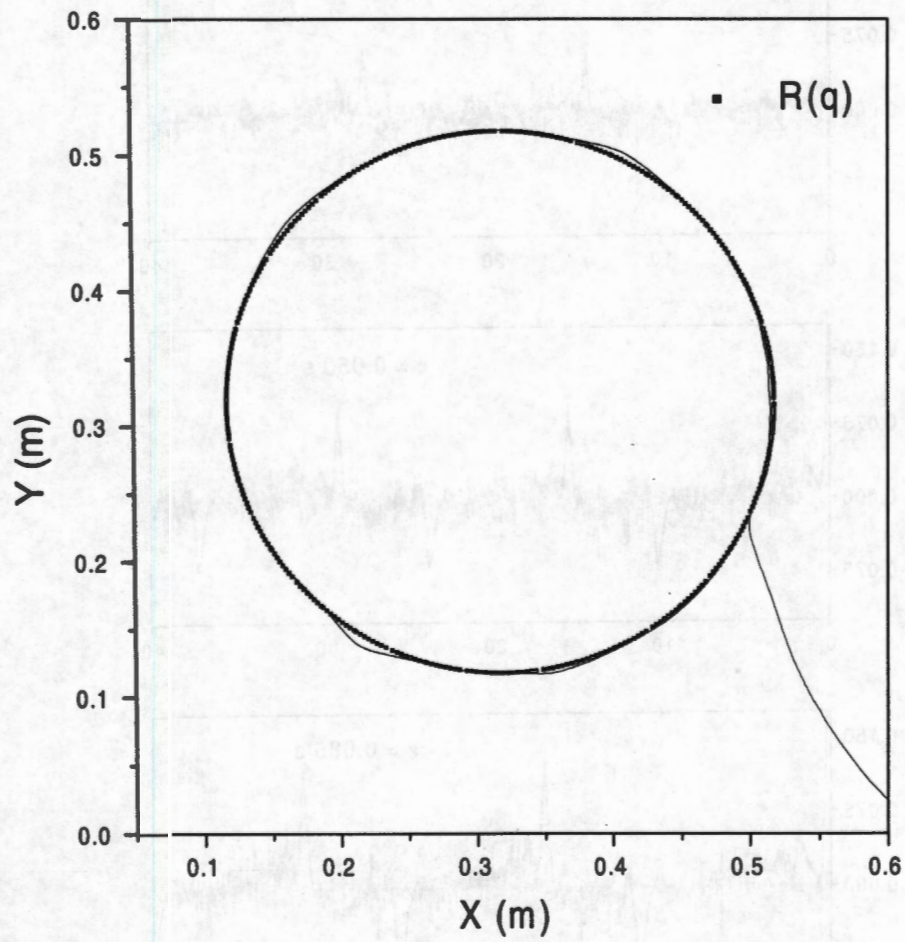


Figura 7-2 Conjunto límite experimental  $R(q)$  en comparación con el deseado.



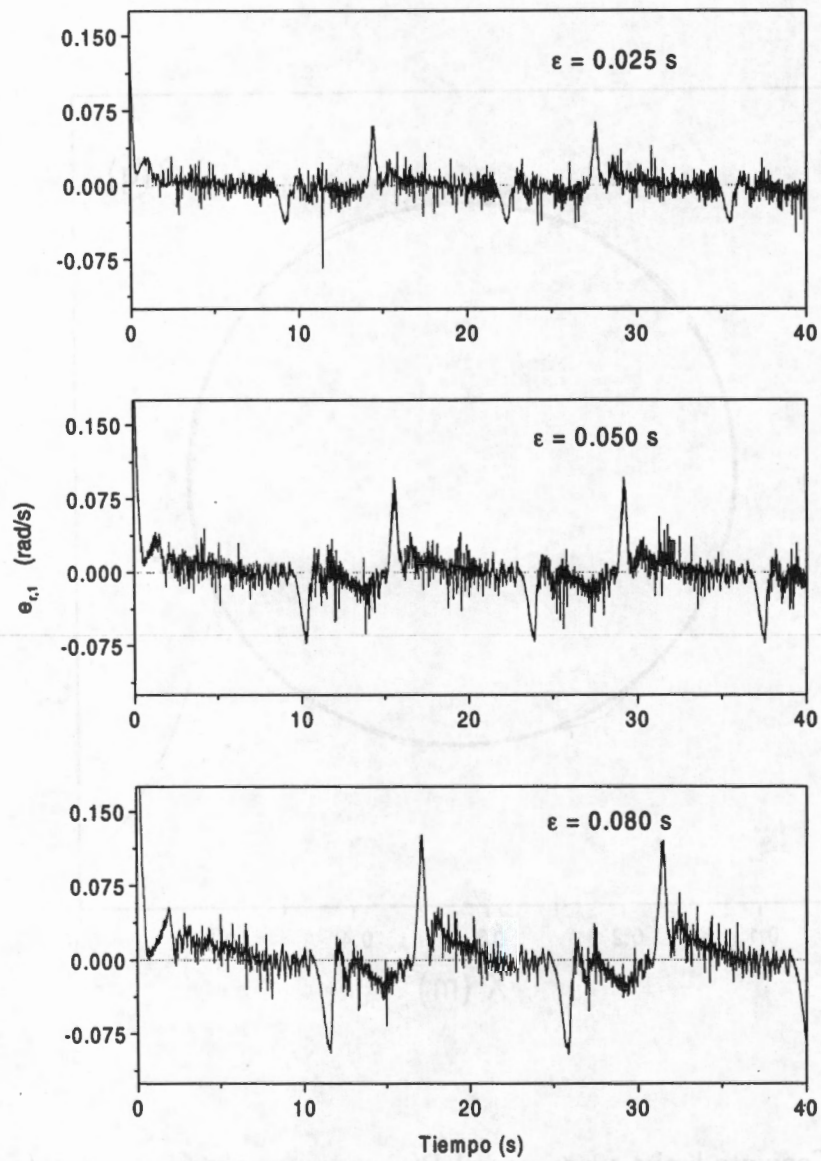


Figura 7-3 Evolución del error de seguimiento del campo de velocidad en el primer eslabón.

campo de velocidad menores.

## Conclusiones

En este capítulo, se ha estudiado el control por campo de velocidad de robots manipuladores en coordenadas articulares, utilizando un control tipo PI. Este controlador se desarrolló utilizando técnicas de compensación de error de modelado y requiere de un mínimo conocimiento del sistema. Se ha mostrado que puede alcanzarse estabilidad semiglobal práctica; esto es, dado un conjunto inicial de error de seguimiento de campo de velocidad, existen ganancias PI que garantizan que el robot sigue un campo de velocidad con precisión arbitraria. Los resultados han sido ilustrados con pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.



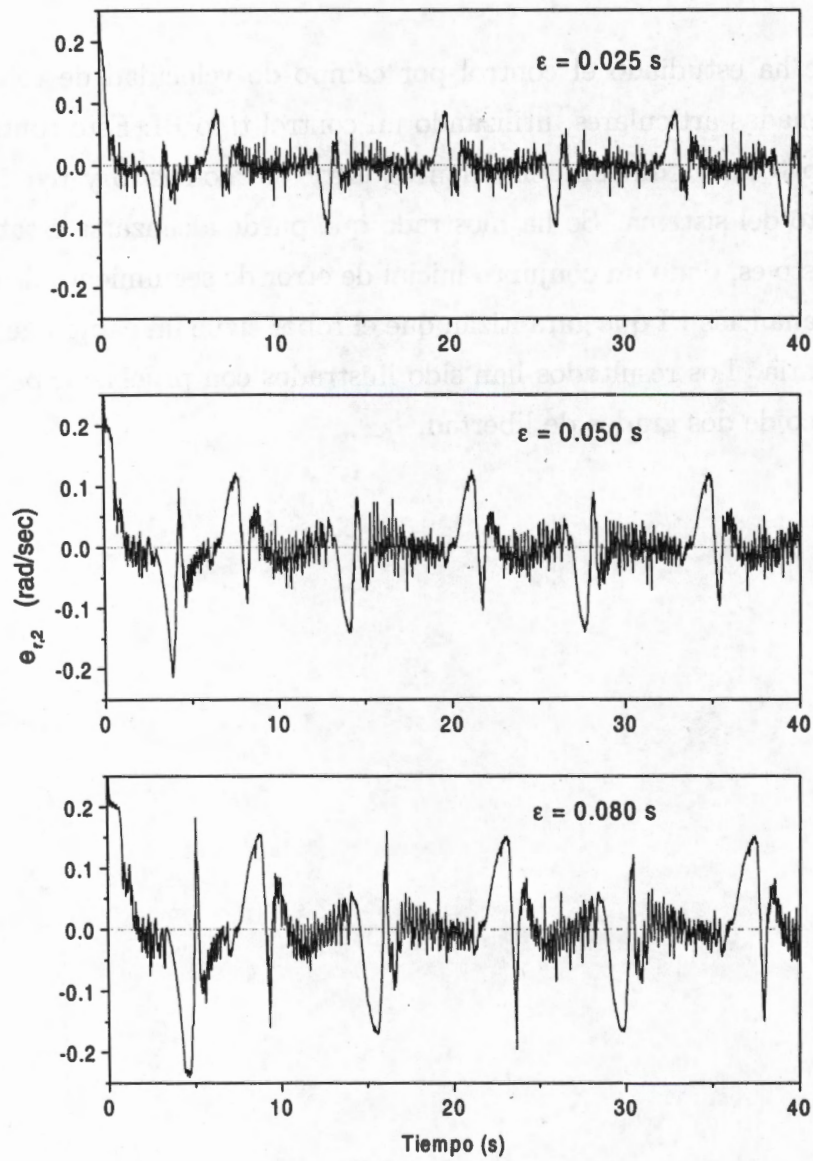


Figura 7-4 Evolución del error de seguimiento del campo de velocidad en el segundo eslabón.

**Parte III**

**Conclusiones**



Part III

Conclusions

## Conclusiones Generales

En esta tesis se ha analizado la estabilidad del control PID en robots manipuladores en la realización de tareas de posicionamiento y seguimiento de trayectorias, bajo las siguientes condiciones de operación:

- (a) Dinámica incierta del robot (paramétrica y estructural)
- (b) Retroalimentación de estados / salidas
- (c) Entradas de control acotadas

En estos casos, se ha probado que el control PID es capaz de estabilizar de manera semiglobal la posición deseada, aún cuando estos manipuladores tienen un comportamiento altamente no lineal. Una herramienta básica en el estudio del controlador PID realizado en esta tesis, es el establecimiento de un principio de separación para una clase de sistemas no lineales, de la manera en que se estableció en [3]. Es decir, la acción conjunta de un controlador y un observador, deriva en la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo ciertas condiciones [3]. Utilizando estas ideas, se interpreta al controlador PID como la fusión de un controlador inverso y un estimador de incertidumbres (principio de equivalencia cierta). Con base en esta representación, se interpreta la acción integral como el efecto del estimador de incertidumbres, este hecho es esencial en la fundamentación de la robustez del controlador PID. Bajo esta perspectiva, se derivan reglas de sintonizado simples, las cuales son físicamente significativas ya que están relacionadas con la dinámica del sistema y que además, requieren de un mínimo conocimiento del sistema.

En el caso de regulación con retroalimentación de estados se ha probado estabilidad asintótica semiglobal de la posición deseada y la recuperación del desempeño inducido por el control inverso exacto. La recuperación del desempeño incluye tanto regiones de atracción como trayectorias. A este respecto, este trabajo sienta un precedente sobre el desempeño del control PID, pues se ha probado que este control es capaz de recuperar un desempeño determinado. Los resultados son ilustrados exitosamente tanto en simulaciones como en pruebas experimentales en un brazo mecánico de dos grados de libertad.

En el caso de regulación con retroalimentación de salida, se ha probado que la acción conjunta del esquema de observación incertidumbres-velocidad y la ley de control



inversa aproximada, es capaz de asegurar estabilidad semiglobal asintótica; así como de recuperar el desempeño inducido por la ley de control inversa exacta y la cual retroalimenta los estados del sistema. La recuperación del desempeño incluye tanto regiones de atracción como trayectorias. En este caso, se prueba que el controlador es capaz de lidiar con saturaciones en el actuador, ya que cuenta con un esquema de "antirest windup". Este esquema tiene una acción integral que compensa el error de la entrada de control  $\varepsilon^{-1} \int_0^t (\tau^{sat}(\sigma) - \tau^c(\sigma)) d\sigma$ , de manera que la acción de control calculada  $\tau^c(\sigma)$  tiende a su límite permitido  $\tau^{sat}(\sigma)$ .

En el caso del estudio del control PID saturado, la metodología utilizada da una interpretación geométrica del papel de la acción de integral de la ley de control. Esta constituye, la primera interpretación propuesta hasta el momento. Específicamente, se muestra como, la tarea de la acción proporcional-derivativa del controlador, es la de estabilizar al sistema alrededor de una superficie de puntos de equilibrio y como el papel de la acción integral, es el de buscar el punto de equilibrio que corresponde con la posición deseada  $q_d$ . Esto es lo que permite al controlador PID, alcanzar el equilibrio en presencia de incertidumbre y lo que fundamenta la inserción de la acción integral cuando existe sesgo de estado estacionario. Por otro lado, las investigaciones realizadas en esta tesis sobre control saturado, son las primeras en resolver el problema de estabilidad asintótica semiglobal, cuando los pares gravitacionales son inciertos.

En el caso del seguimiento de trayectorias, se ha demostrado que la creencia de que el controlador lineal PID es incapaz de seguir una posición deseada  $q_d$  cambiante en tiempo, es incorrecta. De hecho, se ha probado que el controlador PID es capaz de seguir la trayectoria  $q_d(t)$  con precisión arbitraria (estabilidad práctica). Esto es, dado un conjunto compacto de posición y velocidad iniciales, existen ganancias PID que garantizan que el robot sigue una trayectoria deseada con precisión arbitraria. Del análisis de estabilidad se extrajeron reglas de sintonizado simples que requieren de un conocimiento mínimo del sistema y las cuales fueron ilustradas con simulaciones numéricas en un brazo mecánico de dos grados de libertad. La configuración PID observador-controlador, cuenta además de un esquema ARW que maneja saturaciones en el actuador.

Por otro lado, en el Capítulo 7 se ha considerado una formulación novedosa del problema de seguimiento de trayectorias; esta es, utilizando el concepto de control por campo de velocidad (CCV). En esta filosofía de control se codifican las trayectorias deseadas utilizando campos de velocidad, es decir, se define un vector tangente a cada punto del espacio de configuración. Básicamente, el control por campo de velocidad es una configuración



de control cascada. De hecho, el campo de velocidad deseado  $V(q)$  se diseña con base en un sistema de grado relativo uno  $\dot{q} = v^*$ , donde  $v^*$  se toma como una entrada de control virtual. De esta manera, el así llamado lazo primario o maestro es  $v^* = V(q)$ . Debido a que el sistema real es  $\dot{q} = v$ , la acción del control maestro deriva en  $\dot{q} = V(q) - e_r$ . De esta manera, el objetivo del segundo lazo o control esclavo es el de alcanzar un error de seguimiento cero (*i.e.*,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0$ ). Este objetivo se cumple con el control inverso  $\tau = F_1^{inv}(q, e_r)$ . Una ventaja del control por campo de velocidad sobre el enfoque tradicional (sin cascada) es que que la especificación de la tarea, codificada como un campo de velocidad y la velocidad a la que se realiza, pueden ser desacopladas.

Bajo este enfoque se ha probado que el control PID es capaz de obtener estabilidad semiglobal práctica y en el límite de alta ganancia es posible alcanzar el conjunto límite definido por el control maestro.

## Trabajo Futuro

Aunque los resultados reportados en esta tesis han contribuido a un mejor entendimiento del controlador PID, todavía queda abierta una pregunta clásica de estabilidad en el campo de robots manipuladores. Esta es, ¿Puede alcanzarse estabilidad asintótica global de la posición deseada con control PID en el caso de regulación? La respuesta no ha sido dada aún y sólo podría especularse al respecto. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta tesis permiten ampliar las esperanzas de que la respuesta sea afirmativa. De hecho, las condiciones bajo las cuales se deriva la estabilidad *semiglobal* en este trabajo, son sólo suficientes; lo que implica que pueden ser muy conservadoras, dando algún margen de holgura, tal y como se ha visto en la sintonización del control PID. Cabe mencionar, que es posible que la metodología propuesta en esta tesis no pueda utilizarse para obtener un resultado de estabilidad global, debido a que la principal limitación proviene del término de pares centrífugos y de Coriolis. Es decir, para obtener un resultado de estabilidad global, sería necesario que éstos términos fueran globalmente Lipchitz.

Dentro de los tópicos que requieren de mayor investigación en el campo de robots manipuladores controlados con PID pueden mencionarse, las tareas de posicionamiento de sistemas robóticos de juntas y brazos flexibles. Aunque el análisis y la solución de estos problemas constituyen un formidable reto, en el caso de robots con juntas flexibles,



los resultados presentados en esta tesis sugieren una metodología para robustecer el control PD con compensación de gravedad.

Otro de los tópicos que pueden mencionarse como trabajo futuro es el problema conjunto de regulación de posición y fuerza en robots manipuladores. Este problema es sumamente importante cuando el espacio de configuración del robot está limitado o cuando existe la posibilidad de interacción con seres humanos. En estas circunstancias, generalmente la descripción del robot con su entorno es incierta, sobre todo si se tiene un entorno variante en tiempo. En este caso, la metodología propuesta en esta tesis, sienta un precedente para el tratamiento del problema de control y para la robustificación de los esquemas de control existentes.

## Apéndice

### Modelo Dinámico de un Brazo Mecánico

En esta tesis se presentan simulaciones numéricas y pruebas experimentales realizadas en un brazo mecánico de dos grados de libertad, que se mueve en el plano vertical (ver Figura 7.5). Este brazo fue construido y diseñado en CICESE. Una descripción física completa del brazo puede ser encontrada en [35], [36]. El modelo y los parámetros del robot están dados por

$$M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

donde:

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2$$

$$\theta_2 = l_1 m_2 l_{c2}$$

$$\theta_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$\theta_4 = g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)$$

$$\theta_5 = g m_2 l_{c2}$$

Los parámetros  $\theta_i, i = 1 \dots 5$  pueden ser interpretados como combinaciones de propiedades físicas de los brazos, los cuales son invariantes en tiempo. Estos parámetros son definidos en la Tabla 1



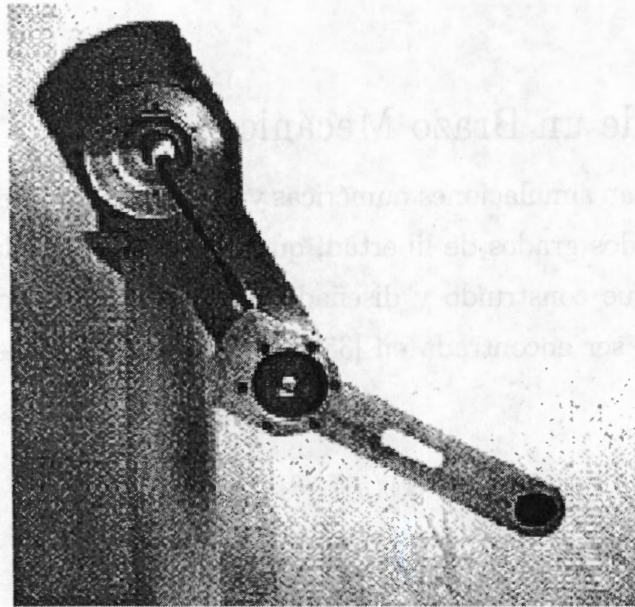


Figura 7-5 Brazo mecánico.

Parámetros	Notación	Valor	Unidad
Longitud eslabón 1	$l_1$	0.45	m
Masa eslabón 1	$m_1$	23.902	kg
Masa eslabón 2	$m_2$	3.880	kg
Centro de masa eslabón 1	$l_{c1}$	0.091	m
Centro de masa eslabón 2	$l_{c2}$	0.048	m
Inercia eslabón 1	$I_1$	1.266	kg m <sup>2</sup>
Inercia brazo 2	$I_2$	0.093	kg m <sup>2</sup>
Aceleración de gravedad	$g$	9.81	m s <sup>2</sup>

Tabla 1. Valores numéricos de los parámetros del robot.

# Bibliografía

- [1] A. Ailon, R. Ortega, An observed-based set-point controller for robot manipulators with flexible joints, *Syst. Contr. Lett.* 21 (1993) 295-306.
- [2] D. Alazard and P. Apkarian, Exact observer-based structures for arbitrary compensators, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.* vol. 9, (1999) 101-118.
- [3] J. Alvarez-Ramirez, Adaptive control of feedback linearizable systems: a modelling error compensation approach., *Int. J. Robust Nonlinear Control* 9 (1999) 361-377.
- [4] S. Arimoto and F. Miyazaki, Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability, Robotics. Research First Int. Symp. M. Brady and R.P. Paul, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, (1984) 228-235.
- [5] A.N. Atassi and H.K. Khalil, A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems, *IEEE Trans. Autom. Contr.* 44 (1999) 1672-1687.
- [6] B.R. Barmish, M. Corless and G. Leitmann, A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems, *SIAM J. Control Optim.* 21 (1983) 246-255.
- [7] H. Berghuis, H. Nijmeijer, Global regulation of robots using only position measurements, *Syst. Contr. Lett.* 21 (1993) 289-293.
- [8] J. W. Brewer, Kronecker products and matrix calculus in system theory, *IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-25* (1978) 772-781.
- [9] C. Canudas de Wit, N. Fixot, Robot control via robust estimated state feedback, *IEEE Trans. Autom. Contr.* 36 (1991) 1497-1501.
- [10] J.J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison Wesley Pub. Reading, MA. (1989).



- [11] P.J. Davis, *Interpolation & Approximation*, New York: Dover Publications, (1975).
- [12] A. De Luca, C. Manes, *IEEE Trans. Rob. Autom.*, 10 (1994) 542.
- [13] F. Esfandiari, H.K. Khalil, Output feedback stabilization of fully linearizable systems, *Int. J. Control* 56 (1992) 1007-1037.
- [14] F. Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbation problems. II: problems having matched asymptotic expansion solution, *J. Differential Equations* 15 (1974) 510-521.
- [15] P.A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, N.J. (1996).
- [16] R. Kelly A simple set-point robot controller by using only position measurements. *Proc IFAC 1993 World Congress*. Vol. 6. (1993) 173-173, Sydney, Australia.
- [17] R. Kelly, A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators, *Robotica* 13 (1995) 141-148.
- [18] R. Kelly, V. Santibañez and H. Berghuis, Point-to-point control under actuator constraints, *Control Eng. Practice* 5, (1997) 1555-1562.
- [19] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, K. Zhou, Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stability and H control theory, *IEEE Trans. Autom. Contr.* 35 (1990) 356-361.
- [20] R.D. Klafter, T.A. Chmielewski, M. Negin, *Robotic Engineering-An Integrated Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1989).
- [21] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functional Analysis-I: Metric and Normed Spaces*, Rochester: Graylock Press, (1957).
- [22] M.V. Kothare, P.J. Campo, M. Morari and C.N. Nett, A unified framework for the study of anti-windup designs, *Automatica* 30 (1994) 1869-1883.
- [23] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P.V. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley, New York, (1995).
- [24] P.Y. Li and R. Horowitz, Passive velocity field control of mechanical manipulators, *In Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation.*, Nagoya, Japan, May (1995), 2764-2770.

- [25] P.Y. Li, Passive control of bilateral teleoperated manipulators, *Proc. of the American Control Conference*, Philadelphia, PA., June (1998).
- [26] P.Y. Li, Coordinated contour following control for machining operations-A survey, *Proc. of the American Control Conference*, San Diego, CA. June (1999) 4543-4547.
- [27] P.Y. Li and R. Horowitz, Passive velocity field control of mechanical manipulators, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 15, no. 4, August (1999) 751-763.
- [28] M. Liu, Decentralized control of robot manipulators: nonlinear and adaptive approaches, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44 (1999) 357-363.
- [29] A. Loria, R. Kelly, R. Ortega, Output feedback control of Euler-Lagrange systems under input constraints, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 42 (1997) 1138-1144.
- [30] A. Loria and H. Nijmijer, Bounded output tracking control of fully actuated Euler-Lagrange systems, *Syst. Contr. Lett.*, 33 (1998) 151-161.
- [31] F. Miyazaki, S. Kawamura and S. Arimoto, Is a local linear PD feedback control law effective for trajectory tracking of robot motion? *Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, PA (April, 1988) 1335-1340.
- [32] M. Morari, E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice-Hall, New York, (1989).
- [33] J. Moreno and R. Kelly, On velocity field control of manipulators, submitted to *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, August (2000)
- [34] R. Ortega, A. Loria and R. Kelly, A semiglobally stable output feedback PI<sup>2</sup>D regulator for robot manipulators, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 40 (1995) 1432-1436.
- [35] F. Reyes and R. Kelly, Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot, *Robotica* 15 (1997) 563-571.
- [36] F. Reyes and R. Kelly, Experimental evaluation of model based controllers on a direct drive arm, *Mechatronics*, vol 11, (2001) 267-282.
- [37] P. Rocco, Stability of PID control for industrial robot arms, *IEEE Trans. Robot. Automat.* 12 (1996) 606-614.



- [38] R.M. Sanner, M. Kosha, *Biol. Cybern.* 80 (1999) 369.
- [39] V.Santibañez and R. Kelly, On global regulation of robot manipulators: saturated linear state feedback and saturated linear output feedback, *European J. Contr.* 3, 104-113.
- [40] M. Spong, M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control* New York: Wiley, (1989).
- [41] M. Takegaki, M., and S. Arimoto, A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control.* 103, (1981)119-125.
- [42] A. Teel and L. Praly, Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback, *SIAM J. Control Optim.*, 33 (1995) 1443-1488.
- [43] P. Tomei, Robust adaptive control of robots with arbitrary transient performance and disturbance attenuation, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44 (1999) 654-658.
- [44] D. van Campen, *Interaction Between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems* Kluwer Academic Publishers Dordrecht, (1997).
- [45] H. van der Kooij, R. Jacobs, B. Koopman, H. Grootenboer, *Biol. Cybern.* 80 (1999) 299.
- [46] L. Villani, C. Canudas de Wit and B. Brogliato, An exponentially stable adaptive control for force and position tracking for robot manipulators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44 (1999) 798-802.
- [47] J.T. Wen and S. Murphy, PID control for robot manipulators, *CIRSSE Document #54* (Resensselaer Polytechnic Institute, May 1990).
- [48] M. Yamakita, K. Suzuki, X.-Z. Zheng, M. Katayama and K. Ito, An extension of passive velocity field control to cooperative multiple manipulators systems, *Proc. of the IEEE International Conference of Intelligent Robots and Systems*, vol. 1, september (1997) 11-16.
- [49] M. Yamakita, T. Yazawa, X.-Z. Zheng and K. Ito, An application of passive velocity field control to cooperative multiple 3-wheeled mobile robots, *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 1 october (1998) 1368-1373.