Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa
Ciencias Básicas e Ingineniería
Maestría en Ciencias Matemáticas

Espacios pseudoradiales

García Ramírez Evzy Oscar
Asesor:
Richard Gordon Roberts Wilson
México D.F. 29 Octubre de 2004

OCT 2004

Universidad Autónoma Metropolitana

Iztapalapa

Ciencias Básicas e Inginenería

Maestría en Ciencias Matemáticas

Espacios pseudoradiales

García Ramírez Evzy Oscar

Asesor:

Richard Gordon [redacted] Wilson

México D.F. 29 Octubre de 2004

Índice general

Introducción

Si estuvieramos interesados en estudiar la topología mediante la convergencia, veremos que las sucesiones no son suficientes para tal fin. Por ejemplo, pensemos en la compactificación de Stone-Čech de los naturales $\beta\mathbb{N}$. Cada conjunto cerrado de $\beta\mathbb{N}$ es finito u homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$-vease [**1**]. Sea $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es denso en $\beta\mathbb{N}$, se sigue que $x \in \overline{\mathbb{N}}$. Sin embargo, ninguna sucesión $\mathbb{N}$ converge a x. Este ejemplo nos deja dos formas de proceder para estudiar la topologia usando sucesiones:

1. Dejar de usar sucesiones. En su lugar podríamos usar filtros o redes.
2. No considerar espacios topológicos en general. En su lugar podríamos limitarnos a aquellas clases de espacios en los cuales las sucesiones son suficientes para estudiar la topología.

El esquema anterior fue planteado primeramente por Franklin [**16**]. Otro camino en este estudio es considerar sucesiones de tamaño arbitrario; es decir que en vez de funciones $S\colon \omega \to X$, consideraremos funciones $S\colon \alpha \to X$ donde α es cualquier ordinal. Bajo esta generalización, el analogo de espacio secuencial es la nocion de espacio pseudoradial.

Los espacios pseudoradiales son una generalización de los espacios secuenciales en el sentido de que en los primeros la longitud de las sucesiones es ω y en los segundos, consideramos sucesiones cuya longitud es un ordinal arbitrario. En general, cuando desarrollamos una generalización tenemos el propósito de superar una restricción. Con ello, la clase de objetos que cumplen el nuevo concepto se vuelve más amplio, pero sin sus restricciones. En este sentido, son más ricos en cuanto a propiedades y de ahi el interés que pueden suscitar para su estudio.

En el estudio de los espacios topológicos se buscan invariantes, es decir, aquellas propiedades que se preservan bajo mapeos, productos, inmersiones, etc. Es decir, que en topología, como en toda la matemática, la clasificación se debe hacer tomando en cuenta las propiedades que permanecen sin modificación bajo ciertas acciones. Sin embargo, para el caso del producto topológico, no siempre se preservan las propiedades topológicas de los espacios factores, ejemplo de ello es el hecho de que el producto de espacios normales no es normal. En esta situación, lo natural es indagar si hay condiciones que preservan la propiedad estudiada bajo producto topológico.

Muchas veces la clasificación de ciertas propiedades se hace más llevadera mediante propiedades equivalentes o caracterizaciones; este es el caso de los espacios pseudoradiales. La atención en ellos toma auge a partir de la década del 90 del siglo pasado cuando Shapirovskii demuestra la equivalencia de la compacidad secuencial y la pseudoradialidad en espacios compactos T_2.

Entre los resultados que vamos a abordar está que el producto, aún finito, de espacios pseudoradiales no es pseudoradial. Sin embargo, cuando agregamos la condición de que los factores sean R-monolíticos, entonces el producto de espacios pseudoradiales es pseudoradial.

CAPíTULO 1

Preliminares

1.1. Propiedades básicas

En esta sección formularemos los axiomas de separación que son necesarios para el desarrollo de esta tesis y remarcaremos ciertas propiedades de espacios T_4 y T_2 compactos que se usarán en lo sucesivo. Sin embargo, todo el material que a continuación se expone se encuentra en la bibliografía del área—en particular, referimos al lector a [**1, 2, 3**].

El espacio topológico que consiste en un conjunto X y una topología τ en X se denotará por (X, τ). Cuando no hay posibilidad de confusión, suprimimos τ y nos referimos al *espacio topológico* X.

DEFINICIÓN 1.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que $\mathcal{B} \subset \tau$ es una *base* de τ si para todo $U \in \tau$ y para todo $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que se cumple $x \in B \subset U$. Ahora $\mathcal{B} \subset \tau$ es una subbase de τ si la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ es una base para τ.

DEFINICIÓN 1.1.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que la colección de conjuntos abiertos $\mathcal{B}_x$ de X es una *base local* de x si para todo $V \in \mathcal{B}_x$ satisface que $x \in V$ y para todo conjunto $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe un $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V \subset U$.

DEFINICIÓN 1.1.3. Diremos que un espacio topológico X es T_1 si $\{x\}$ es un conjunto cerrado para cada $x \in X$. El espacio X es de *Hausdorff* o T_2 si para todos los $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen en el espacio X conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$.

Recordemos que una *cubierta* de un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Si X es un espacio topológico la familia $\{A_s\}_{s\in S}$ es una *cubierta abierta* si todos sus elementos son abiertos en X. Una cubierta $\mathcal{A}' = \{A'_s\}_{s\in S'}$ de X es una *subcubierta* de otra cubierta $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ de X si $S' \subset S$ y $A'_s = A_s$ para toda $s \in S'$.

DEFINICIÓN 1.1.4. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio *compacto* si es Hausdorff y cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Si en la definición anterior no requerimos la hipótesis de que el espacio sea Hausdorff diremos que el espacio es *cuasi-compacto*.

PROPOSICIÓN 1.1.5. *Sea* (X,τ) *un espacio* T_1 *y* $\mathcal{B}=\{U\in\tau : x\in U\}$, *entonces* $\{x\}=\bigcap\mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x\in X$. Entonces, por ser X un espacio T_1, para cada $y\in X\setminus\{x\}$ el conjunto $U_y=X\setminus\{y\}$ es abierto. En consecuencia, se sigue que $\{x\}=\bigcap\{U_y : y\in X\setminus\{x\}\}$. $\square$

DEFINICIÓN 1.1.6. Diremos que un espacio topológico X es T_3 o *regular* si es T_1 y para cualquier $x\in X$ y cualquier cerrado $F\subset X$ tal que $x\notin F$ hay $U_1,U_2\in\tau$ tales que $x\in U_1, F\subset U_2$ y $U_1\cap U_2=\varnothing$.

DEFINICIÓN 1.1.7. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es T_4 o *normal* si es T_1 y para cualquier par de subconjuntos cerrados disjuntos $A,B\subset X$ hay un par de conjuntos disjuntos $U,V\in\tau$ tales que $A\subset U, B\subset V$.

PROPOSICIÓN 1.1.8. *Sea* X *un espacio topológico y* T$_1$. *Entonces X es normal si y sólo si para cada* $F\subset X$*, F cerrado y para todo abierto V tal que* $F\subset V$ *existe un abierto* $U\subset X$ *tal que* $F\subset U\subset\overline{U}\subset V$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $F\subset X$ un conjunto cerrado y V un conjunto abierto tal que $F\subset V$. Los conjuntos F y $X\setminus V$ son cerrado ajenos, entonces existen conjuntos abiertos S y T tales que $F\subset S$, $X\setminus V\subset T$ y $S\cap T=\varnothing$, porque el espacio X es normal. Luego $F\subset S\subset\overline{S}\subset X\setminus T\subset V$.

Inversamente, sean C,D cerrados ajenos, entonces $C\subset X\setminus D=V$. Puesto que $X\setminus D=V$ es un conjunto abierto y C es un conjunto cerrado, entonces existe un conjunto U abierto tal que $C\subset U\subset\overline{U}\subset V$, por que este es nuestro supuesto. Por lo tanto los conjuntos U y $X\setminus\overline{U}$ son abiertos ajenos tales que $C\subset U$ y $D\subset X\setminus\overline{U}$ por lo tanto el espacio X es normal. $\square$

PROPOSICIÓN 1.1.9. *Sea* X *un espacio topológico compacto , si el conjunto* C *es compacto en* X *y* $x\notin C$*, entonces existen conjuntos abiertos* U *y* V *tales que* $x\in V$*,* $C\subset U$ *y* $V\cap U=\varnothing$.

DEMOSTRACIÓN. Como $x\notin C$ y X es T_2, entonces para cada $y\in C$ existen conjuntos abiertos U_y y V_y tales que $y\in U_y, x\in V_y$ y además $U_y\cap V_y=\varnothing$. Luego $C\subset U=\bigcup_{y\in C}U_y$. Como C es compacto existen puntos $y_1,y_2,\ldots,y_n$ en C tales que $C\subset\bigcup_{i=1}^n U_{y_i}=U$. Como $x\in V_{y_i}, 1\le i\le n$, se sigue que el conjunto $\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}=V$ es abierto y contiene el punto x. Por lo tanto los conjuntos abiertos U y V satisfacen que $C\subset U$, $x\in V$ y $V\cap U=\varnothing$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.1.10. *Si (X,τ) es un espacio T_2, y C_1, $C_2 \subset X$ son subconjuntos compactos ajenos, entonces existen $U_1, U_2 \in \tau$ ajenos tales que $C_1 \subset U_1, C_2 \subset U_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in C_2$, entonces por la proposición 1.1.9 existen conjuntos abiertos W_x, V_x tales que $x \in V_x, C_1 \subset W_x$, $V_x \cap W_x = \varnothing$. Luego $\bigcup_{x\in C_2} V_x$ es una cubierta abierta de C_2, por lo tanto existen $x_1, x_2, ..., x_m$ en C_2 tales que $C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} = U_2$, porque C_1 es compacto. Pero $C_1 \subset W_{x_i}$ con $1 \leq i \leq m$, por lo tanto $C_1 \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i} = U_1$. Se sigue que los conjuntos abiertos U_1 y U_2 satisfacen $C_1 \subset U_1$ y $C_2 \subset U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. □

COROLARIO 1.1.11. *Si (X,τ) es T_2 compacto, entonces, es T_4.*

DEFINICIÓN 1.1.12. Sea λ un cardinal y (X,τ) un espacio. Un conjunto $L \subset X$ es un G_λ en X si hay una familia $\{U_\alpha : \alpha \in \lambda\} \subset \tau$ tal que $L = \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$.

PROPOSICIÓN 1.1.13. *Si (X,τ) es T_4, $K \subset X$ es cerrado y $K \subset V$, $V \in \tau$, entonces existe un conjunto G cerrado y G_δ en X tal que $K \subset G \subset V$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando la proposición 1.1.8, escogemos inductivamente conjuntos abiertos U_n tales que para cada n, $K \subset U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n \subset V$. Sea $G = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Entonces G satisface $K \subset G \subset V$. □

COROLARIO 1.1.14. *Si X es un espacio topológico T_4, $K \subset X$ es cerrado en X y sea V un conjunto G_λ en X tal que $K \subset V$, entonces existe un conjunto G cerrado en (X,τ) y G_λ, tal que $K \subset G \subset V$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $V = \bigcap_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ donde V_α es abierto para toda $\alpha < \lambda$. Usando la proposición 1.1.13 para cada $\alpha < \lambda$ podemos encontrar un conjunto G_δ cerrado G_α tal que $K \subset G_\alpha \subset V_\alpha$. Entonces el conjunto $G = \bigcap_{\alpha<\lambda} G_\alpha$ es el conjunto buscado. □

DEFINICIÓN 1.1.15. Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que la familia de subconjuntos $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X, converge al punto $p \in X$ si para todo $U \in \tau$ que contiene el punto p existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$.

OBSERVACIÓN 1.1.16. Sea (X,τ) un espacio T_3. Sean x y y puntos de (X,τ) tal que $x \neq y$. Entonces existen conjuntos C_1, C_2 cerrados en X tales que $x \in int\,(C_1)\,, y \in int\,(C_2)$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

DEMOSTRACIÓN. El espacio (X,τ) es T_2,luego existen conjuntos $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1$, $y \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Por ser el espacio

(X,τ) regular ,existen conjuntos $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $x \in V_1 \subseteq \mathrm{cl}(V_1) \subseteq U_1$ y $y \in V_2 \subseteq \mathrm{cl}(V_2) \subseteq U_2$. Luego si $C_1 = \mathrm{cl}(V_1)$ y $C_2 = \mathrm{cl}(V_2)$ se sigue el resultado □

COROLARIO 1.1.17. *Si (X,τ) es compacto y $x, y \in X, x \neq y$, entonces existen conjuntos disjuntos N, M que son cerrados y G_δ disjuntos tales que satisfacen $x \in int\,(N)\,, y \in int\,(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X,τ) un espacio compacto. Por la observación 1.1.16, existen cerrados ajenos C_1, C_2 tales que $x \in int(C_1)$, $y \in int(C_2)$. Por el corolario 1.1.11, X es T_4 y por lo tanto existen abiertos ajenos V_0, W_0 tales que $C_1 \subset V_0$, $C_2 \subset W_0$. Aplicando repetidamente la Proposición 1.1.9 construimos recursivamente familias de abiertos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $C_1 \subset W_{n+1} \subset \overline{W_{n+1}} \subset W_n \subset W_0$ y además $C_2 \subset V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_0$. Es claro que $V = \bigcap_{n\in\omega} V_n$ y $W = \bigcap_{n\in\omega} W_n$ son los conjuntos G_δ cerrados buscados. □

OBSERVACIÓN 1.1.18. Sea (X,τ) un espacio T_2 infinito, entonces hay un conjunto $U \in \tau$ tal que $\varnothing \neq U$ y no es denso en el espacio X tal que $\left|X \setminus \overline{U}\right| \geq \omega$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sean $x, y \in X$ puntos distintos, entonces hay un par de conjuntos V, W abiertos en X tales que $x \in V, y \in W, V \cap W = \varnothing$, es decir que $V \subset X \setminus \overline{W}$. Si V es infinito, entonces W es el conjunto abierto buscado. Por el otro lado, si V es finito, entonces $V = \overline{V}$ y por lo tanto V es el abierto buscado. □

COROLARIO 1.1.19. *Si (X,τ) es un espacio T_2 infinito, entonces hay una familia $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$, donde $U_n \neq \varnothing$, $U_n \cap U_m = \varnothing$ para todo $n \neq m$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la observación 1.1.18 sabemos que hay un conjunto U_1 abierto en X tal que $\overline{U_1}$ no denso en X y $\left|X \setminus \overline{U_1}\right| \geq \omega$. Luego restringiendonos al conjunto $X \setminus \overline{U_1}$, existe un conjunto U_2 abierto en $X \setminus \overline{U_1}$ tal que $\overline{U_2} \neq X \setminus \overline{U_1}$, $\left|X \setminus \overline{U_2}\right| \geq \omega$; así obtenemos un conjunto U_3 abierto en $X \setminus (\overline{U_2} \cup \overline{U_2})$ tal que $\overline{U_2} \neq \varnothing$, $\left|X \setminus (\overline{U_2} \cup \overline{U_1})\right| \geq \omega$. Así recursivamente construimos la familia requerida. □

1.2. Los números ordinales

Vamos a utilizar en la tesis a los números ordinales, en particular un subconjunto de ellos, los números cardinales. La caracterización de cardinal regular y singular, nos será de mucha utilidad— referimos al lector a [**4**].

DEFINICIÓN 1.2.1. Un conjunto P es *parcialmente ordenado* por la relación $<$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $Para\ cualquier\ p \in P$, se tiene $p \not< p$ $(antisimetría)$;
(ii) $Si\ p < q\ y\ q < r\ entonces\ p < r$ $(transitividad)$.

Diremos que $(P, <)$ es un *orden lineal* Si

(iii) $Para\ todos\ los\ p, q \in P$, se cumple $p < q\ o\ p = q\ o\ p > q$.

Sean P un conjunto parcialmente ordenado y $\varnothing \neq X \subset P$. Para todos los $x, y \in P$ el símbolo $x \leq y$ lo vamos a entender como $x < y$ o $x = y$.

Diremos que $a \in P$ es *el mínimo elemento* de X si $a \in X$ y $a \leq x$ para todo $x \in X$.

$(P, <)$ es un *conjunto bien ordenado* si

(iv) $cualquier\ subconjunto\ no\ vacío\ de\ P\ tiene\ elemento\ mínimo$

Diremos que $a \in P$ es un *elemento minimal* de X si $a \in X$ y $x \not< a$ para todo $x \in X$.

Diremos que $a \in P$ es una *cota inferior* de X si $a \leq x$ para todo $x \in X$.

Diremos que $a \in P$ es el *ínfimo* de X si a es cota inferior de X y para todo $b \in P$ si $a < b$ entonces existe $x \in X$ tal que $a < x$.

Es decir, si a es la máxima cota inferior de X.

Similarmente, definimos *elemento máximo, elemento maximal, cota superior, y al supremo.*

Si f es una función de un conjunto parcialmente ordenado $(P, <_P)$ en el conjunto parcialmente ordenado $(Q, <_Q)$, entonces:

Diremos que f es un *homomorfismo* si para todos los $x, y \in P$
se satisface $x \leq_P y$ si sólo si $f(x) \leq_Q f(y)$;

Diremos que f es una *inmersión* si f es uno a uno y para todos los $x, y \in X$
se satisface $x <_P y$ si y sólo si $f(x) <_Q f(y)$;

Diremos que f es un *isomorfismo* entre P y Q si f es una inmersión del conjunto $(P, <_P)$ en el conjunto $(Q, <_Q)$ y $rng(f) = Q$;

Diremos que f *preserva el orden* si $x <_P y$ si y sólo si $f(x) <_Q f(y)$.

El rango de la función f es el conjunto $rng(f) = \{y : \exists x[(x, y) \in f]\}$.

DEFINICIÓN 1.2.2. Un conjunto S es *transitivo* si

$$\forall x\,(x \in S \Longrightarrow x \subset S)$$

Los números ordinales son tipos de orden de conjuntos bien ordenados. La siguiente definición de número ordinal se debe a Von Neumann.

DEFINICIÓN 1.2.3. Un conjunto es un número ordinal (o simplemente ordinal) si es transitivo y bien ordenado por $\in$.

A los números ordinales los denotaremos por el símbolo On.

LEMA 1.2.4. [**4**] *Sea $(P, <)$ un conjunto bien ordenado, si $f : P \to P$ es una función que preserva el orden de P, entonces $x \leq f(x)$ para cada $x \in P$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que hay un $x \in P$ tal que $f(x) < x$, luego el subconjunto $A = \{z \in P : f(z) < z\}$ de P es no vacío, se sigue que A tiene un elemento mínimo, digamos x_0. Como $f(x_0) < x_0$, entonces $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$. Por lo tanto $f(x_0) \in A$, pero esto contradice la minimalidad de x_0. □

Si $(P, <)$ es un conjunto bien ordenado y $x \in P$ entonces el conjunto $\widehat{x} = \{y \in P : y < x\}$ es el *segmento inicial* de P determinado por x.

LEMA 1.2.5. [**4**] *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a un segmento inicial del mismo.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $f : P \to \widehat{x}$ es un isomorfismo entre P y $\widehat{x}$ para alguna $x \in P$. Entonces $f(x) \in \widehat{x}$ y por lo tanto $f(x) < x$, pero esto contradice el lema 1.2.4, porque en particular f preserva el orden. □

LEMA 1.2.6. [**4**] *Si P y Q son conjuntos bien ordenados, entonces uno y sólo uno de los siguientes incisos se cumple:*

I) *El conjunto P es isomorfo al conjunto Q;*
II) *El conjunto P es isomorfo a un segmento inicial del conjunto Q;*
III) *El conjunto Q es isomorfo a un segmento inicial del conjunto P.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que los casos son mutuamente excluyentes, porque si por ejemplo suponemos I y II, entonces P es isomorfo a Q y P es isomorfo a un segmento inicial de Q; entonces Q es isomorfo a un segmento inicial contenido en el mismo Q, lo cual contradice el lema 1.2.5. Los otros casos se tratan análogamente.

Sea

$$f = \{(p, q) \in P \times Q : \widehat{p} \text{ es isomorfo a } \widehat{q}\}.$$

Entonces se verifica:

1) f es función

En efecto $f \subset P \times Q$; además si $(p, q) \in f$ y $(p, q') \in f$, entonces tenemos que $\widehat{p}$ es isomorfo al segmento inicial $\widehat{q}$ y $\widehat{p}$ es isomorfo a $\widehat{q'}$, por lo tanto $\widehat{q'}$ es isomorfo a $\widehat{q}$. Luego, $q = q'$, porque de no ser así, suponemos que $q < q'$. Entonces $q \in \widehat{q'}$ y $\widehat{q}$ es segmento inicial de $\widehat{q'}$, lo cual contradice el enunciado del lema 1.2.5. Análogamente llegamos a una contradicción si suponemos la desigualdad $q' < q$. Por lo tanto $q = q'$.

2) f es uno a uno

Sean $p, p' \in P$ y suponemos que $\widehat{p}$ y $\widehat{p'}$ son isomorfos. Vamos a demostrar que $p = p'$. En efecto, pues si suponemos que $p < p'$ entonces $p \in p'$, es decir que $\widehat{p}$ es segmento inicial de $\widehat{p'}$, esto contradice el lema 1.2.5. Por otra parte si suponemos que $p' < p$ también llegamos a una contradicción. Por lo tanto $p = p'$.

3) f preserva el orden

Vamos a demostrar que si $p, p' \in P$ son tales que $p < p'$ y $(p, q), (p', q')$son elementos de f entonces $q < q'$. Sea $(p', q') \in f$, y sea $h : \widehat{p'} \to \widehat{q'}$ un isomorfismo. Como $p < p'$ luego , $p \in \widehat{p'}$. Por lo tanto $h(p) \in \widehat{q'}$. Es decir :

$$(*) \qquad h(p) < f(p').$$

Ahora como, $\widehat{p} \subset \widehat{p'}$, tiene sentido considerar la restricción:

$$h|_{\widehat{p}} = \{(r, s) \in h : r \in \widehat{p}\}.$$

Afirmamos que $h|_{\widehat{p}}$ es isomorfismo entre $\widehat{p}$ y $\widehat{h(p)}$. Para demostrar nuestra afirmación debemos comprobar que:

i) $h|_{\widehat{p}}$ es uno a uno;
ii) $h|_{\widehat{p}}$ preserva el orden;
iii) $rng\left(h|_{\widehat{p}}\right) = \widehat{h(p)}$.

Los incisos $(i), (ii)$ son obvios, pues $h|_{\widehat{p}}$ hereda estas propiedades de h y basta verificar (iii).

Si $q_0 \in rng\left(h|_{\widehat{p}}\right)$, entonces por la definición del conjunto $rng\left(h|_{\widehat{p}}\right)$ existe $p_0 \in \widehat{p}$ tal que $h(p_0) = h|_{\widehat{p}}(p_0) = q_0$. Además, puesto que $p_0 < p$, se tiene $q_0 = h(p_0) < h(p)$, por lo tanto $q_0 \in \widehat{h(p)}$.

Inversamente, si $q_0 \in \widehat{h(p)}$, es decir $q_0 < h(p)$, entonces existe $p_0 \in \widehat{p}$ tal que $h(p_0) = q_0$,esto ocurre porque $rng(h|_{\widehat{p}}) = \widehat{h(p)}$. Luego $q_0 \in rng(h|_{\widehat{p}})$. Por lo tanto $rng\left(h|_{\widehat{p}}\right) = \widehat{h(p)}$. Se sigue que $\widehat{p}$ y $\widehat{h(p)}$ son isomorfos, y esto ocurre si y sólo si $(p, h(p)) \in f$. Entonces $f(p) = h(p) < f(p')$, por $(*)$.

De 1), 2) y 3) concluimos que f es un isomorfismo entre su dominio, un subconjunto de P y su rango, un subconjunto de Q.

a) Ahora si $dom(f) = P$ y $rng(f) = Q$, tenemos el caso (i), es decir los conjuntos P y Q son isomorfos.

b) Si $dom\,(f) \neq P$, se verifica que $S = dom\,(f)$ es un segmento inicial del conjunto P.

En efecto pues, si $x \in S$ y $z < x$, entonces existe un isomorfismo h entre el segmento inicial $\widehat{x}$ y el segmento inicial $\widehat{f\,(x)}$, luego $h\mid_{\widehat{z}}$ es un isomorfismo entre el segmento inicial $\widehat{z}$ y el segmento inicial $\widehat{h\,(z)}$, se sigue que la pareja ordenada $(z, h\,(z))$ es un elemento de f, y finalmente $z \in S$.

Basta verificar que S es isomorfo a Q.

El rango de f es segmento inicial de Q. En efecto suponemos lo contrario, es decir que $L = rng\,(f) \neq Q$. Por el buen orden de P se tiene que el conjunto $P \setminus S$ tiene elemento mínimo, digamos x_0, luego $S = \widehat{x_0}$. Sean $l \in L$ y $z < l$, entonces $z \in L$. Por otra parte existe $l' \in \widehat{x_0}$ tal que $f\,(l') = l$, y esto último ocurre si y sólo si existe un isomorfismo g tal que $g : \widehat{l'} \to \widehat{l}$. Luego, como $z \in \widehat{l}$, existe $z' \in \widehat{l'}$ tal que $g\,(z') = z$. Más aún $g\mid_{\widehat{z'}}$ es un isomorfismo entre $\widehat{z'}$ y $\widehat{g\,(z')} = \widehat{z}$. Entonces $(z', z) \in f$. Luego $z \in rng(f) = L$. Por lo tanto si tomamos $y_0 = \min\{Q \setminus L\}$, $L = \widehat{y_0}$. En otras palabras, f es isomorfismo entre $\widehat{x_0}$ y $\widehat{y_0}$, luego, por la definición de la función f se tiene $(x_0, y_0) \in f$ o que $x_0 \in dom\,(f) = \widehat{x_0}$, lo cual es una contradicción.

$c)$ Con un argumento análogo al de $b)$ se demuestra que si $dom(f) = P$ pero $rng(f) \neq Q$, entonces P es isomorfo a un segmento inicial de Q.

$\square$

Ahora vamos a hacer unas observaciones con respecto a ciertas propiedades de los números ordinales, pero antes necesitamos unos resultados previos.

LEMA 1.2.7. [**4**] *Un conjunto S es transitivo si y sólo si cuando $u \in v \in S$ entonces $u \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $v \in S$ y $u \in v$ entonces $v \subset S$ y $u \in v$ luego $u \in S$. Inversamente sea v tal que $v \in S$, entonces, si $u \in v$ se sigue que $u \in S$ luego se tiene que $v \subset S$.

$\square$

TEOREMA 1.2.8. *Cualquier elemento de un número ordinal es un número ordinal*

DEMOSTRACIÓN. Sea α un ordinal y $x \in \alpha$. Es claro que x es bien ordenado y procederemos a demostrar que x es transitivo. Para tal fin, suponemos que u es elemento de v y que v es elemento de x ; como α es transitivo y $x \in \alpha$, se sigue que $v \in \alpha$ y por lo tanto $u \in \alpha$. Así u, v son elementos de α y $u \in v \in x$, puesto que $\in$ ordena linealmente a α, concluimos $u \in x$. $\square$

Por el teorema 1.2.8 se tiene:
si $\alpha \in On$ entonces $\alpha = \{\beta \in On : \beta < \alpha\}$.

TEOREMA 1.2.9. [**4**] *El conjunto* $\alpha \cup \{\alpha\}$ *es el mínimo ordinal mayor que* α.

DEMOSTRACIÓN. $i)$ El conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un conjunto transitivo. En efecto, si tomamos $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} = \cup\{\alpha, \{\alpha\}\}$, entonces $\beta \in \alpha$ o $\beta \in \{\alpha\}$. Luego $\beta \subset \alpha$ o $\beta = \alpha$. En ambos casos $\alpha \cup \{\alpha\}$ es conjunto transitivo.

$ii)$ El conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ está bien ordenado por $\in$. Si $p, q \in \alpha \cup \{\alpha\}$ se sigue que $p \in \alpha$ o $p \in \{\alpha\}$ o $q \in \alpha$ o $q \in \{\alpha\}$. Si $p, q \in \alpha$ no hay nada que demostrar porque α es un conjunto bien ordenado. Si $p \in \alpha$ y tomamos $q \in \{\alpha\}$, entonces $p < q$. Si $q \in \alpha$, y $p \in \{\alpha\}$, entonces $q < p$. Por último si $p, q \in \{\alpha\}$, entonces $p = q$. Es decir que tenemos las siguientes posibilidades $p < q$ o $q < p$ o $p = q$. Entonces $\alpha \cup \{\alpha\}$ es linealmente ordenado. Ahora sea $y \subset \alpha \cup \{\alpha\}, y \neq \varnothing$, se siguen dos posibilidades una es que $y \subset \alpha$ y la otra es $\alpha \in y$. Si $y \subset \alpha$, se tiene que y tiene elemento mínimo, puesto que α es un conjunto bien ordenado. Si $\alpha \in y$, entonces hay dos subcasos.

Subcaso 1.

Si $\alpha \cap y \neq \varnothing$ y $y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ entonces existe $\min\{\alpha \cap y\}$, porque $\alpha \cap y \subset \alpha$ además el conjunto α está bien ordenado.

Subcaso 2.

Si $\alpha \cap y = \varnothing$ y $y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$, entonces $y = \{\alpha\}$, $\min\{y\} = \alpha$. Por lo tanto y tiene mínimo. □

Al conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ lo denotaremos $\alpha + 1$.

TEOREMA 1.2.10. [**4**] *Sea* A *un subconjunto de números ordinales. Entonces* A *tiene elemento mínimo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha \in A$, hay dos casos:

$i)$ Si $\alpha \cap A = \varnothing$, entonces α es el mínimo; pues si existiera $\beta \in A$ tal que $\beta < \alpha$, entonces $\beta \in \alpha$, porque α está bien ordenado por la $\in$ por ser un ordinal. Luego $\beta \in \alpha \cap A$, lo cual contradice nuestra suposición de que la intersección $\alpha \cap A$ es vacía.

$ii)$ Si $\alpha \cap A \neq \varnothing$, entonces $\alpha \cap A \subset \alpha$, luego dicha intersección tiene elemento mínimo, digamos γ, porque α es un conjunto bien ordenado. Para demostrar que γ es el mínimo de A sea $\delta \in A$ tal que $\delta < \gamma$, entonces $\delta \in \gamma \in \alpha \cap A$, luego $\gamma < \delta$, lo cual contradice la antisimetría del orden de $\in$. □

LEMA 1.2.11. [**4**] *Si* A *es un conjunto de ordinales, entonces* $\sup A = \bigcup A$

DEMOSTRACIÓN. $i)$ El conjunto $\cup A$ es un ordinal

Primero se verifica que $\bigcup A$ es transitivo.

Si $x \in y \in \bigcup A$, entonces $y \in \alpha$ para algún $\alpha \in A$, dado que α es un conjunto transitivo, se tiene que $x \in \alpha$. luego $x \in \bigcup A$. Por el teorema anterior se tiene que $\bigcup A$ está bien ordenado por $\in$, por lo tanto $\bigcup A$ es ordinal.

$ii)$ Se verifica que $\sup A = \bigcup A$

Sea $\alpha \in A$, entonces $\alpha \subset \bigcup A$. Luego $\alpha \in \bigcup A$ o $\alpha = \bigcup A$. Por lo tanto tenemos que $\alpha \leq \bigcup A$, es decir que $\bigcup A$ es cota superior de A. Ahora tomamos $\beta \in On$ tal que $(\forall \alpha \in A)\, [\alpha \leq \beta]$. Luego para cada $\alpha \in A$ ocurre que $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$. Si $\alpha \in \beta$, entonces $\alpha \subset \beta$, por ser β conjunto transitivo. Si $\alpha = \beta$, entonces $\alpha \subset \beta$. En cualquiera de los dos casos $\bigcup A \subset \beta$, entonces se tiene $\bigcup A \in \beta$ o $\bigcup A = \beta$, es decir $\bigcup A \leq \beta$, por lo tanto $\bigcup A$ es la mínima cota superior de A. $\square$

COROLARIO 1.2.12. [**4**] *No existe ningún conjunto que contenga a todos los ordinales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto de numeros ordinales, entonces por el lema anterior, $\bigcup X$ es un número ordinal. Además por el teorema 1.2.9 tenemos que $\bigcup X + 1 = \alpha$ es un ordinal.

Para demostrar que $\alpha \notin X$, suponemos que $\alpha \in X$, entonces tenemos dos casos $\alpha \in \bigcup X$ o $\alpha = \bigcup X$, en cualquier caso $\alpha \in \bigcup X + 1 = \alpha$, lo cual es una contradicción. $\square$

Se ha demostrado que para cualquier conjunto$X$ hay un ordinal α tal que $\alpha \notin X$.

DEFINICIÓN 1.2.13. Un ordinal α se dice un *ordinal sucesor* si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. En otro caso α se dirá *ordinal límite* .

LEMA 1.2.14. [**4**] *El ordinal α es un ordinal límite si y sólo si $\alpha = \sup \alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta \in \alpha$, entonces, dado que α es límite, se sigue que $\alpha \neq \beta + 1$. Si $\alpha < \beta + 1$, entonces $\beta < \alpha < \beta + 1$, lo cual contradice el hecho de que el ordinal $\beta + 1$ es sucesor de β. Si $\alpha > \beta + 1$, entonces, $\beta \in \beta + 1 \in \alpha$, luego tenemos que $\beta \in \bigcup \alpha$. Ahora tratamos la otra contención, si $x \in \sup \alpha = \bigcup \alpha$, entonces, existe un $y \in \alpha$, tal que $x \in y \in \alpha$, se sigue que $x \in \alpha$, porque el ordinal α es un conjunto transitivo. Inversamente. Si $\alpha = \beta + 1$ para algún número ordinal β, entonces $\bigcup \alpha = \bigcup (\beta + 1) = \beta \neq \alpha$. Por lo tanto si α no es un ordinal límite, entonces $\alpha \neq \sup \alpha$. $\square$

DEFINICIÓN 1.2.15. Sean A, B conjuntos. Diremos que el conjunto A es *equipotente* con el conjunto B si hay una biyección $f \colon A \to B$.

DEFINICIÓN 1.2.16. Un número ordinal ρ le llamaremos un *ordinal inicial* si no es equipotente a cualquier ordinal γ tal que $\gamma < \rho$.

DEFINICIÓN 1.2.17. Si X es un conjunto que se puede bien ordenar, entonces el número cardinal de X, denotado $|X|$, es *el único número ordinal inicial equipotente a* X.

Es decir que si X es un conjunto que se puede bien ordenar entonces el número cardinal $\kappa = |X|$ no es equipotente con ningun ordinal $\alpha < \kappa$. Cuando no haya posibilidad de confución en vez de número cardinal diremos cardinal.

PROPOSICIÓN 1.2.18. *Sea κ un número cardinal. Entonces todo ordinal α tal que $\alpha < \kappa$ satisface que $|\alpha| < \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos lo contrario, es decir que para un cardinal κ existe un ordinal α tal que $\alpha < \kappa$ y $\kappa < |\alpha|$. Ahora, no es posible que $\kappa = |\alpha|$ por la definición de cardinal. Así, podemos asumir $\kappa < \alpha$. Entonces, existe una inyección $f \colon \kappa \to \alpha$ tal que $\alpha \setminus rng(f) \neq \varnothing$. Sea $\alpha_0 = \min\{\alpha \setminus rng(f)\}$. Afirmamos que $\alpha = rng(f)$. En efecto, por la minimalidad de α_0 deducimos que si $\delta < \alpha$, entonces $\delta \in rng(f)$, es decir $\alpha \subset rng(f)$. Ahora sea $\lambda \in rng(f)$. Luego $\lambda < \alpha_0$, es decir $rng(f) \subset \alpha_0$. Por lo tanto $\kappa = |\alpha_0|$ con $\alpha_0 < \kappa$, lo cual está en contradicción con la definición de cardinal. □

La siguiente definición es de gran importancia en los capítulos sucesivos.

DEFINICIÓN 1.2.19. Sean X un conjunto y α un ordinal. Una sucesión transfinita del conjunto X es una función $f \colon \alpha \to X$.

En lo sucesivo, omitiremos la palabra “transfinita”y nos referimos a f como “una sucesión”.

DEFINICIÓN 1.2.20. Sea κ cardinal infinito, llamaremos a κ cardinal singular si existe una sucesión $\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \vartheta\}$ de ordinales $\alpha_\upsilon < \kappa$ cuya longitud ϑ es un ordinal límite menor que κ, y $\kappa = \sup\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \vartheta\}$. Un cardinal que no es singular le llamaremos *regular*.

DEFINICIÓN 1.2.21. Sea α un ordinal límite, entonces la cofinalidad de α es el *menor número ordinal* ϑ tal que α es supremo de una sucesión $\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \vartheta\}$ creciente de números ordinales de longitud ϑ. La vamos a denotar por $cf\,(\alpha)$

LEMA 1.2.22. [**4**] *Si un ordinal límite α no es un cardinal entonces tenemos que $cf(\alpha) < \alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α un ordinal límite tal que no es un número cardinal. Sea $\kappa = |\alpha|$, entonces hay una función uno a uno con imagen igual a α y dominio κ, es decir una sucesión uno a uno $\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \kappa\}$ de longitud κ tal que $\alpha = \{\alpha_\upsilon : \upsilon < \kappa\}$. Para demostrar que $\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \kappa\}$ tiene una subsucesión creciente que converge a $\alpha,$ sea $\beta_0 = \min\{\beta : \beta < \alpha\}$, luego definimos $\beta_1 = \min\{\eta \in \alpha : \beta_0 < \eta\}$. Ahora al siguiente ordinal lo definimos en forma similar $\beta_2 = \min\{\delta \in \alpha : \beta_1 < \delta\}$, así por recursión construimos una subsucesión mónotona creciente $\{\beta_\delta : \delta < \lambda\}$ de $\{\alpha_\upsilon : \upsilon < \kappa\}$ donde tomamos $\lambda \leq \kappa$. Afirmamos que $\{\beta_\delta : \delta < \lambda\}$ tiene como límite a α. En efecto, pues si $\mu \in \alpha$ y $\mu \notin \bigcup_{\delta<\lambda} \beta_\delta$, entonces para toda $\gamma \in \alpha$ pasa que $\mu > \gamma$, es decir que $\mu > \bigcup_{\gamma\in\alpha} \gamma$ lo cual es una contradicción. Ahora como la longitud de la subsucesión es a lo más κ y como $\kappa = |\alpha|$ es menor que α, porque α no es un cardinal, por lo tanto $cf(\alpha) < \alpha$. $\square$

CAPíTULO 2

Pseudoradialidad y compacidad secuencial

2.1. Preliminares

En este capítulo vamos a introducir un concepto, el de pseudoradialidad, y vamos a estudiar algunas relaciones de dicho concepto con la compacidad secuencial.

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea β un número ordinal y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\beta}\subset X$. Diremos que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\beta}$ converge a un punto x de X si para todo $U\in\tau$ tal que $x\in U$ existe un ordinal $\delta<\beta$ tal que para todo ordinal α con $\delta<\alpha<\beta$, se satisface que $x_\alpha\in U$. El espacio X es pseudoradial si cada conjunto H no cerrado en X contiene una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\beta}$ que converge en X a un punto $x\notin H$.

DEFINICIÓN 2.1.2. Si H es un conjunto no cerrado en (X,τ), donde el espacio es T_1, entonces se define el número cardinal $\lambda(H,X)$ como:

$$\begin{aligned}\lambda(H,X)=\min\{\kappa\colon\ &\kappa \text{ es un cardinal tal que existe un}\\ &\text{conjunto } K \text{ cerrado y } G_\kappa \text{ en } X \text{ con}\\ &K\cap H=\varnothing \text{ y } K\cap\overline{H}\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

LEMA 2.1.3. [5] *Sean (X,τ) un espacio compacto y λ un cardinal. Tomamos $K\subset X$ un G_λ y cerrado en (X,τ). Entonces, existe una base $\mathcal{U}\subset\tau$ para X en K con $|\mathcal{U}|=\lambda$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{V_\alpha:\alpha\in\lambda\}$ una familia de abiertos tal que $K=\bigcap_{\alpha\in\lambda}V_\alpha$. Por ser X compacto, para cada α, existe un abierto W_α tal que $K\subset W_\alpha\subset\overline{W}_\alpha\subset V_\alpha$. Entonces $X\setminus K=\bigcup_{\alpha\in\lambda}\left(X\setminus\overline{W}_\alpha\right)$. Además, si tenemos $U\in\tau$ tal que $K\subset U$, entonces $X\setminus U\subset\bigcup_{\alpha\in\lambda}\left(X\setminus\overline{W}_\alpha\right)$ y $X\setminus U$ es compacto. Por lo tanto, existe una familia finita $\{\left(X\setminus\overline{W}_{\alpha_i}\right):1\leq i\leq n\}\subset\tau$ tal que $X\setminus U\subset\bigcup_{i=1}^n\left(X\setminus\overline{W}_{\alpha_i}\right)$. Luego, al tomar complementos, obtenemos $K\subset\bigcap_{i=1}^n W_{\alpha_i}\subset\bigcap_{i=1}^n\overline{W}_{\alpha_i}\subset U$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{U}$ de intersecciones finitas de elementos de $\{W_\alpha:\alpha\in\lambda\}$ forma una base para X en K y $|\mathcal{U}|=\lambda$. □

DEFINICIÓN 2.1.4. Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que la sucesión $\{x_\beta\}_{\beta<\lambda}\subset X$ converge en X al conjunto L de X, lo denotaremos como $x_\beta\colon \to L$, si para todo $U \in \tau$ tal que $L \subset U$, hay un $\delta < \lambda$ tal que para todo número ordinal β con $\lambda > \beta \geq \delta$, se satisface que $x_\beta \in U$.

PROPOSICIÓN 2.1.5. [**5**] *Sean X un espacio topológico compacto y λ un cardinal. Sean $H, K \subset X$, donde H no es cerrado en X, tales que:*
1) *El conjunto K es G_λ y cerrado en X;*
2) *El conjunto $K \cap H$ es vacío;*
3) *El conjunto $K \cap \overline{H}$ es no vacío;*
4) *El cardinal λ es el mínimo con respecto a las propiedades 1), 2), 3).*

Entonces existe una sucesión $\{x_\alpha\colon \alpha < \lambda\} \subset H$ tal que $x_\alpha \to K$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que X es un espacio compacto y K es un conjunto G_λ, deducimos del lema 2.1.3 que existe una base local de K en X de cardinalidad λ, digamos $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Para cada $\beta < \lambda$, $\bigcap_{\alpha<\beta} V_\alpha$ es un conjunto $G_{|\beta|}$, y sigue del corolario 1.1.14 que existe un conjunto W_β que es $G_{|\beta|}$ y cerrado en X tal que $K \subset W_\beta \subset \bigcap_{\alpha<\beta} V_\alpha$. Ahora, de la minimalidad del cardinal λ respecto de 1), 2), 3) y por la proposición 1.2.18 deducimos que $\bigcap_{\alpha<\beta} W_\alpha \cap H \neq \varnothing$. Por lo tanto, podemos escoger $x_\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} W_\alpha \cap H$. Afirmamos que la sucesión $\{x_\beta\}_{\beta<\lambda}$ converge en X a K. Para ver esto, sea U abierto, $U \supset K$. Entonces existe $\beta < \lambda$ tal que $K \subset V_\beta \subset U$ y, por lo tanto, si $\gamma > \beta$, entonces $x_\gamma \in \bigcap_{\eta<\gamma} W_\eta \subset \bigcap_{\alpha<\gamma} V_\alpha \subset V_\beta \subset U$. $\square$

2.2. Espacios CSC y pseudoradialidad

NOTACIÓN 1. Los espacios (X, τ) compactos y secuencialmente compactos los denotaremos, por cuestiones de brevedad, con *CSC*.

DEFINICIÓN 2.2.1. Sea X un espacio topológico y κ un ordinal. Un $A \subset X$ es *radialmente* (*κ-radialmente*) cerrado si contiene los puntos límites de toda sucesión en A que converge en X (sucesiones de tamaño a lo más κ).

LEMA 2.2.2. [**5**] *Sea X un espacio topológico compacto. Tomamos $H \subset X$ no cerrado en X y κ un número cardinal. Si K es un conjunto G_λ y cerrado en X , que verifica que $\lambda(H, X) = \kappa$. Afirmamos:*
a) Si K es un conjunto unitario, $K = \{x\}$, entonces H no es radialmente cerrado.
b) Si $\lambda(H, X) = \omega$ y X es secuencialmente compacto, entonces H no es siquiera secuencialmente cerrado.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea X un espacio compacto. Suponemos que el conjunto K tiene un sólo elemento y es un conjunto G_κ y cerrado en X, tal que el número cardinal κ satisface $\lambda(H, X) = \kappa$. Entonces por la proposición 2.1.5 existe una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \subset H$ que converge en X al conjunto unitario $K = \{x\}$. Ahora por definición del cardinal κ tenemos

que $K \cap H = \varnothing$. Luego basta demostrar que la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \subset H$ converge a x. Para tal fin sea U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$, luego $K \subset U$. Puesto que la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ converge a K entonces hay un $\beta < \kappa$ tal que para todo ordinal $\alpha \geq \beta$ tenemos $x_\alpha \in U$. Por lo tanto la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ converge a x en X.
(b) Sea X un espacio compacto. Suponemos que el conjunto *K* es un conjunto G_κ y cerrado en X tal que el número cardinal κ satisface $\kappa = \lambda(H, X) = \omega$. Entonces por la proposición 2.1.5 existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset H$ que converge al conjunto K. Puesto que el espacio X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m\in\omega}$ que converge a x en X. Claramente x_{n_m} converge en X al conjunto K. Puesto que $K \cap H = \varnothing$, basta demostrar que el punto x es elemento de K; para tal fin, suponemos que $x \notin K$, entonces por la proposición 1.1.9 hay conjuntos U y V abiertos y disjuntos en X tales que $x \in U$ y $K \subset V$. Entonces hay un $r \in \omega$ tal que para toda $m \geq r$ sucede que $x_{n_m} \in U$ y $x_{n_m} \in V$. Pero esto es una contradicción, por lo tanto el punto x pertenece al conjunto K y no pertenece al conjunto H. □

DEFINICIÓN 2.2.3. El carácter de un espacio topológico X en un punto p se define como el más pequeño de los cardinales λ, donde λ es la cardinalidad de una base de X en p. Dicho cardinal lo vamos a denotar por el símbolo $\chi(p, X)$.

TEOREMA 2.2.4. [**5**] *Sea X un espacio topológico CSC tal que cualquier $F \subset X$ no vacío y cerrado en X tiene un punto p tal que $\chi(p, F) \leq \omega_1$. Entonces el espacio X es pseudoradial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H \subset X$ un conjunto radialmente cerrado y no cerrado en X. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X = \overline{H}$. Sea $\kappa = \lambda(H, X)$. Ahora, si existe un conjunto K de $X \setminus H$ tal que $\lambda(H, K) = \omega$, deducimos inmediatemente del lema 2.2.2(*b*) que H no es radialmente cerrado. Por lo tanto, podemos asumir que $\kappa = \lambda(H, X) > \omega$. Si $H \neq X$, tomamos un subconjunto F no vacío G_κ y cerrado en X de $X \setminus H$. Por otra parte, por el lema 2.2.2(*b*), si un punto p de F satisface $\chi(p, F) \leq \omega_1$, entonces satisface con ser límite de una sucesión de tamaño κ en H. Esto contradice la cerradura radial de H. □

En lo sucesivo el cardinal $\mathfrak{c}$ representa la cardinalidad del continuo. Más adelante usaremos la siguiente notación: Si A es un conjunto y κ un cardinal, $[A]^\kappa = \{B \subset A \colon |B| = k\}$

LEMA 2.2.5. [**5**] *Para cada espacio topológico X compacto secuencialmente compacto hay un cardinal λ tal que $\lambda < \mathfrak{c}$ y una sucesión*

$\{H_n : n \in \omega\}$ *de conjuntos no vacíos* G_λ *y cerrados que convergen a un punto* $p \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que el lema falla para algún espacio *X* compacto secuencialmente compacto. Ahora por inducción transfinita sobre $\beta \in \mathfrak{c}$ definimos una sucesión $\{H_n \colon n \in \omega\}$ de conjuntos no vacíos $G_{|\beta|+\omega}$ y cerrados en X como sigue:

Fijemos una enumeración $\{M_\beta \colon \beta \in \mathfrak{c}\} = [\omega]^\omega$ de todos los subconjuntos infinitos de ω. Ahora, para $\beta = 0$, sea $\{H_n^0 \colon n \in \omega\}$ cualquier colección disjunta de cerrados G_δ no vacíos en *X*. Luego asumimos $\beta > 0$ y que para cada $\gamma \in \beta$ hemos definido conjuntos no vacíos $G_{|\gamma|+\omega}$, H_n^γ, de tal forma que si $\eta < \gamma$ entonces $H_n^\eta \supset H_n^\gamma$ para cada $n \in \omega$.

a) Si γ es un ordinal límite entonces definimos $H_n^\gamma = \bigcap\{H_n^\eta \colon \eta \in \gamma\}$

b) Por otra parte si $\gamma = \eta + 1$, entonces consideremos la sucesión de conjuntos $\{H_n^\eta \colon n \in M_\beta\}$ no vacíos $G_{|\eta|+\omega}$ y cerrados en X que suponemos que no puede converger a ningún punto $p \in X$. Ahora, tomamos un punto x_n en H_n^η para cada $n \in M_\eta$. Puesto que X es secuencialmente compacto la sucesión$\{x_\eta\}_{\eta \in M_\eta}$ tiene un punto de acumulación, digamos p. Pero H_n^η no converge a p, es decir hay un abierto V con $p \in V$ tal que $A = \{n \in M_\eta \colon\ H_n^\eta \subset V\}$ es infinito. Para cada $n \in A$ escogemos un punto y_n en $H_n^\eta \setminus V$. Notemos que $x_n \notin V$ para cada $n \in A$. Puesto que el espacio X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{y_n\}_{n \in A}$ tiene un punto de acumulación, digamos p_0 y claramente $p_0 \neq p$. Entonces hay conjuntos U y V abiertos en X y disjuntos tales que $p_0 \in U$, $p \in V$ por que el espacio es T_2, por la proposición 1.1.17 podemos escoger dos conjuntos disjuntos K_1, K_2, G_δ y cerrados en X tales que $p_0 \in Int(K_1)$, $p \in Int(K_2)$, y tomamos los conjuntos $C_1 = \{n \in M_\eta \colon H_n^\eta \cap K_1 \neq \varnothing\}$ y $C_2 = \{n \in M_\eta \colon H_n^\eta \cap K_2 \neq \varnothing\}$. Si $C_1 \cap C_2$ es infinito sea $\{B_1, B_2\}$ una partición de $C_1 \cap C_2$, tal que tanto B_1 como B_2 son infinitos.

Si $C_1 \cap C_2$ es finito, digamos $C_1 \cap C_2 = C$, entonces definimos los conjuntos $B_1 = C_1 \setminus C, B_2 = C_2 \setminus C$. Es decir, en ambos casos podemos escoger conjuntos inifinitos disjuntos $B_1, B_2 \in [M_\eta]^\omega$ tal que $K_i \cap H_n^\eta \neq \varnothing$ cuando $n \in B_i$ con $i \in \{1, 2\}$. Podemos entonces definir los conjuntos:

$$H_n^\gamma = K_i \cap H_n^\eta,\ si\ n \in B_i\ con\ i \in \{1,2\}\ o\ H_n^\gamma\ si\ n \in \omega \setminus (B_1 \cup B_2)\,.$$

Puesto que $\{H_n^\eta \colon \eta \in \mathfrak{c}\}$ es una familia de cerrados encajados en el espacio compacto X para cada $n \in \omega$ podemos escoger un punto p_n en el conjunto $\bigcap\{H_n^\eta \colon \eta \in \mathfrak{c}\}$. Se verifica que la sucesión $\{p_n \colon n \in \omega\}$ no tiene subsucesión convergente.

Para cualquier $\eta \in \mathfrak{c}$ por nuestra construcción tenemos una cantidad infinita de $n \in M_\eta$, es decir $n \in B_i$, $p_n \in H_n^{\eta+1} \subset K_i$ con $i \in \{1, 2\}$. Puesto que el espacio es normal entonces existen conjuntos L, M abiertos en X y disjuntos tales que $K_1 \subset L$ y $K_2 \subset M$. Verificandose que la subsucesión $\{p_n : n \in M_\eta\}$ no converge. Pero esto contradice la compacidad numerable de *X*. Con lo cual concluimos. □

Sea ρ un número cardinal, entonces vamos a entender por ρ^+ el menor de los cardinales que son mayores que ρ. Para cualquier cardinal infinito κ tenemos $\kappa^- = \lambda$ si $\kappa = \lambda^+$ y si κ es cardinal límite entonces $\kappa^- = \kappa$.

TEOREMA 2.2.6. [**5**] *Sea X es un espacio topológico CSC. Tomamos $H \subset X$ radialmente cerrado y no cerrado en X. Entonces* $\omega < cf(\lambda(H, X)) \leq \lambda(H, X) < \mathfrak{c}^-$

DEMOSTRACIÓN. La primera desigualdad ya la tenemos por el lema 2.2.2, y por eso basta demostrar la tercera desigualdad. Podemos asumir que el conjunto H es denso en X. Sea $\kappa = \lambda(H, X)$. Tomamos un conjunto K, cerrado y G_κ en el espacio X, tal que $K \cap H = \varnothing$ y $K \cap \overline{H} \neq \varnothing$.

Suponemos, que $\kappa \geq \mathfrak{c}^-$. Ahora, vamos a aplicar el lema 2.2.5 al conjunto K. Sea μ un cardinal tal que $\mu < \mathfrak{c}$. Así, tenemos una sucesión $\{H_n : n \in \omega\}$ de conjuntos cerrados G_μ en K con $\mu < \mathfrak{c}$, o sea, $\mu \leq \kappa$, y un punto $p \in K$ tal que la sucesión $\{H_n : n \in \omega\}$ converge al punto p. Como $\mu \leq \kappa$, los conjuntos de la sucesión $\{H_n\}_{n\in\omega}$ también son G_κ en X, así también el cardinal κ cumple con que $\kappa = \lambda(H, X)$, luego por la proposición 2.1.5 podemos seleccionar para cada $n \in \omega$ una sucesión de tamaño κ, digamos $\{q_{n,\alpha} : \alpha \in \kappa\}$ de puntos en H que converge a H_n. Puesto que X es secuencialmente compacto y H es secuencialemente cerrado, para cualquier $\alpha \in \kappa$ podemos escoger un punto de acumulación $p_\alpha \in H$ de la sucesión $\{q_{n,\alpha} : n \in \omega\}$. Afirmamos que la κ-sucesión formada por los puntos $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ converge a un punto $p \notin H$, contradiciendo la cerradura radial de H.

Sea V una vecindad de p y U un abierto tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset V$. Entonces, puesto que $H_n \to p$, para casi toda $n \in \omega$, salvo un número finito de ellas, tenemos que $H_n \subset U$. Pero para cada una de tales n hay un segmento final de la sucesión $\{q_{n,\alpha} : \alpha \in \kappa\}$ contenido en U. Puesto que $cf(\kappa) > \omega$ hay una $\alpha_0 \in \kappa$ tal que

$$\{q_{n,\alpha} : \alpha \in \kappa \setminus \alpha_0\} \subset U$$

para toda n tal que $H_n \subset U$, i.e., para cualquier $n \in \omega$ salvo un número finito de ellas. Entonces para cada $\alpha \in \kappa \setminus \alpha_0$ se tiene

$$p_\alpha \in \overline{\{q_{n,\alpha} : \alpha \in \kappa \setminus \alpha_0\}} \subset \overline{U} \subset V$$

Así probando que $\{p_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ converge a p, con lo cuál concluimos. □

Del teorema anterior se tiene inmediatamente el siguiente resultado importante.

COROLARIO 2.2.7. [**5**] *Si $\mathfrak{c} \leq \omega_2$ entonces cada espacio CSC es pseudoradial.*

DEFINICIÓN 2.2.8. [**12**] Sea $[\omega]^\omega$ el conjunto de todos los subconjuntos infinitos del ordinal ω. Un subonjunto $\mathcal{S}$ de $[\omega]^\omega$ se dirá una familia separadora de $[\omega]^\omega$ si para toda $N \in [\omega]^\omega$ existe un $S \in \mathcal{S}$ tal que $|N \cap S| = |N \setminus S| = \omega$

DEFINICIÓN 2.2.9. Sean $A, B \in [\omega]^\omega$, se dice que A está casi contenido en B si $|A \setminus B| < \omega$. Esto lo vamos a denotar como $A \subset^* B$.

LEMA 2.2.10. *Sea $\mathcal{S} \subset [\omega]^\omega$. Diremos que, la familia $\mathcal{S}$ es una familia separadora si y sólo si no existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $S \in \mathcal{S}$ ocurre $A \subset^* S$ ó $A \subset^* \omega \setminus S$*

DEMOSTRACIÓN. Si la familia $\mathcal{S}$ no fuera separadora entonces habría un $N \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $S \in \mathcal{S}$ $|N \cap S| = |N \setminus (\omega \setminus S)| < \omega$, o $|N \setminus S| < \omega$, es decir que N está casi contenido en S o N está casi contenido en $\omega \setminus S$.

Inversamente, suponemos que existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $S \in \mathcal{S}$, luego $A \subset^* S$ o $A \subset^* \omega \setminus S$. Pero si $A \subset^* S$, entonces $|A \setminus S| < \omega$ y si $A \subset^* \omega \setminus S$, entonces $|A \cap S| < \omega$ y por lo tanto $\mathcal{S}$ no es una familia separadora. $\square$

DEFINICIÓN 2.2.11. Sea $\mathfrak{s}$ un número cardinal tal que

$$\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S}\ es\ una\ familia\ separadora\ de\ \omega\}.$$

Al cardinal $\mathfrak{s}$ le llamaremos el número de separación.

DEFINICIÓN 2.2.12. Sea X un espacio topológico y $\omega(X)$ un número cardinal tal que $\omega(X) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ es una base de abiertos de $X\}$. Al número cardinal $\omega(X)$ le llamaremos el peso del espacio X.

LEMA 2.2.13. [**12**] *Sea X es un espacio topológico numerablemente compacto T_1 tal que $w(X) < \mathfrak{s}$. Entonces, el espacio X es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio numerablemente compacto con $w(X) = \kappa < \mathfrak{s}$. Sea $\mathcal{B}$ una base de X de cardinal κ y sea A una sucesión de longitud ω en X. Ahora se define la familia de conjuntos $\mathcal{B}^* = \{B \in \mathcal{B} : |B \cap A| = \omega\}$. Puesto que, la cardinalidad de $|\mathcal{B}^*|$ es menor que el cardinal $\mathfrak{s}$, la familia de conjuntos $\mathcal{S} = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}^*\}$ no es separadora para $[A]^\omega$. Por el lema 2.2.10 existe un $C \in [A]^\omega$ tal que, para cada $B \in \mathcal{B}^*$ ocurre $C \subset^* B \cap A$ o $C \subset^* A \setminus B$. Puesto que X es compacto, el conjunto C tiene un punto de acumulación, digamos p. Ahora, si $p \in B \in \mathcal{B}$ entonces $B \in \mathcal{B}^*$. Además $C \subsetneq^* A \setminus B$, porque $|C \cap B| \geq \omega$. Luego $C \subset^* B \cap A$. Por lo tanto C converge a p. $\square$

LEMA 2.2.14. [**12**] *Si* $\kappa \geq \mathfrak{s}$ *entonces* 2^κ *no es secuencialmente compacto*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que $\mathcal{S}$ es una familia separadora. Afirmamos que $X = 2^{\mathcal{S}}$ no es secuencialmente compacto. Vamos a definir una función $f : \omega \to 2^{\mathcal{S}}$ dada por $\pi_S[f(n)] = 1$ si y sólo si $n \in S$ para cada $S \in \mathcal{S}$. Denotamos el rango de la función f por C. Afirmamos que C es un conjunto numerablemente infinito pero no contiene ninguna sucesión convergente. Para ver que C es infinito, basta demostrar que la función f es finita a uno. Si suponemos lo contrario, es decir que el conjunto $A = f^{-1}(t)$ es infinito para algún $t \in 2^{\mathcal{S}}$, entonces tenemos que $A \subset S$ o $A \cap S = \varnothing$ para cada $S \in \mathcal{S}$, contradiciendo que $\mathcal{S}$ es una familia separadora.

Ahora, suponemos que la sucesión $T = \{t_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en C digamos $t_m = f(n_m)$ que converge en X. Puesto que la convergencia en (X, τ) es puntual, para $S \in \mathcal{S}$, la sucesión $\{\pi_S(t_m)\}$ es finalmente constante (0 o 1). Pero esto implica que para cada $S \in \mathcal{S}$, existe $\varepsilon_S \in \{0, 1\}$ tal que $\{m \in \omega : \pi_S(t_m) = \varepsilon_S\}$ es finito. Para cada $S \in \mathcal{S}$, $\varepsilon_S = 0$ o $\varepsilon_S = 1$ según sea que la sucesión finalmente termina en 1 o 0. Entonces, dado $S \in \mathcal{S}$ si $\varepsilon_S = 0$ tenemos que $n_m \in S$ para todo m excepto un número finito de ellas; mientras si $\varepsilon_S = 1$, tenemos $n_m \notin S$ excepto un número finito de m. Es decir, si ponemos $D = \{n_m : m \in \omega\}$, entonces $D \cap S$ es finito o $D \setminus S$ es finito, lo cual contradice que $\mathcal{S}$ es una familia separadora. $\square$

TEOREMA 2.2.15. [**12**] *Los siguientes son equivalentes para un cardinal* κ

i) El espacio 2^κ *es secuencialmente compacto*

ii) El número cardinal κ *es menor que el número cardinal* $\mathfrak{s}$

iii) Todo espacio numerablemente compacto de peso menor o igual a κ *es secuencialmente compacto.*

En particular $2^{\mathfrak{c}}$ *no es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. $(i) \Rightarrow (ii)$ Es el lema 2.2.14.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es el lema 2.2.13.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Puesto que 2^κ es compacto con peso κ. $\square$

LEMA 2.2.16. *Sea* X *un espacio* T_2 *pseudoradial y* $A \subset X$ *no cerrado. Entonces existe una sucesión* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ *en* A *convergiendo a* $x \notin A$*, donde el número cardinal* κ *es tal que* $\kappa \leq |A|$ *y* κ *regular.*

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una sucesión en A que converge a $x \notin A$ y κ es singular, entonces existe una función uno a uno creciente y cofinal $f : cf(\kappa) \to \kappa$. Entonces $\{x_{f(\alpha)}\}_{\alpha\in cf(\kappa)}$ converge a x también. Por lo tanto podemos asumir que κ es regular.

Ahora suponemos que X es un espacio T_1 pseudoradial y $A \subset X$ no cerrado y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una sucesión en A que converge a $x \notin A$, donde asumimos que κ es regular. Entonces si $\kappa > |A|$ por la regularidad de κ existe $\alpha \in \kappa$ tal que $|\{\beta : x_\alpha = x_\beta\}| = \kappa$, tomamos $I = \{\beta : x_\alpha = x_\beta\}$, por lo tanto $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converge a $x_\alpha \in A$ y no a x, lo cual es una contradicción. $\square$

TEOREMA 2.2.17. [**5**] *El espacio* $2^{\mathfrak{s}}$ *no es pseudoradial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f\colon \omega \to 2^{\mathfrak{s}}$ la sucesión definida en $2^{\mathfrak{s}}$ en el lema 2.2.14. Luego definimos $C = \{f(n)\}_{n\in\omega}$. Puesto que el conjunto C es numerable, tenemos de los lemas 2.2.14 y 2.2.16 que C es radialmente cerrado. Por otra parte, el conjunto C no es cerrado en $2^{\mathfrak{s}}$, ya que si el conjunto numerable C fuera cerrado en el espacio compacto $2^{\mathfrak{s}}$, entonces sería compacto y por lo tanto segundo numerable. Es decir que el conjunto C contiene una sucesión convergente. Pero esto contradice lo demostrado en el lema 2.2.14, que C no contiene sucesiones convergentes. $\square$

TEOREMA 2.2.18. [**5**] *El enunciado “el producto de ω_1 espacios pseudoradiales compactos es siempre pseudoradial”es independiente de los axiomas de Zermelo Frankel*

CAPíTULO 3

Productos

3.1. Preliminares

En este capítulo veremos que la pseudoradialidad no es una propiedad que se preserva incluso bajo el producto finito, como a continuación veremos. Posteriormente se introducirá el concepto de $R-$monolítico, y se demostrará que bajo el producto numerable de espacios $R-$monolíticos compactos, dicha propiedad si se preserva.

DEFINICIÓN 3.1.1. Sea X un espacio topológico, un punto de acumulación completa z de $A \subset X$ es un punto tal que para cada conjunto U abierto en X que contiene a z, satisface que $|A \cap U| = |A|$.

LEMA 3.1.2. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff entonces los siguientes son equivalentes*

1) *El espacio X es compacto*
2) *Cada subconjunto infinito del espacio X tiene un punto de acumulación completo*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar la implicación $1) \Rightarrow 2)$ por contradicción. Suponemos que el espacio X es compacto, y que no tiene puntos de acumulación completa. Es decir que para toda $x \in X$ existe un conjunto abierto U_x en X tal que $x \in U_x$ y $|U_x| < |X|$. Claramente se tiene que $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Puesto que, el espacio es compacto, dicha cubierta tiene una subcubierta finita digamos $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ de X. Luego $|X| = \sum_{i=1}^n |U_{x_i}|$, pero $|U_{x_i}| < |X|$ para cada $1 \leq i \leq n$, por lo que $|X| = \sum_{i=1}^n |U_{x_i}| < |X|$, lo cual es una contradicción.

Para probar la implicación $2) \Rightarrow 1)$ suponemos que el espacio X no es compacto. Luego, existe una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, digamos $\mathcal{L} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \kappa\}$, tal que $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \varnothing$. Sea $W_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$. Entonces $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} W_\alpha = \varnothing$. Sea $\lambda \leq \kappa$ el mínimo ordinal tal que $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} W_\alpha = \varnothing$. Podemos asumir que λ es un cardinal regular, por que de no ser así, tenemos $cf(\lambda) < \lambda$, luego hay una sucesión mónotona creciente de ordinales $\{\beta_\mu : \mu < \eta\}$ donde η es mínimo con respecto de la propiedad de que $\sup\limits_{\mu<\eta}\beta_\mu = \lambda$ y $\bigcap\limits_{\beta_\mu<\eta} W_{\beta_\mu} = \varnothing$. Entonces $\{W_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es una familia descendente de cerrados no vacíos cuya intersección es vacía. Escogemos un punto $x_\alpha \in W_\alpha$ para toda $\alpha \in \lambda$. Sea $A = \{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Afirmamos que A no tiene punto de acumulación completa. En efecto, si $z \in X$, entonces existe $\alpha_0 \in \lambda$ tal que $z \notin W_{\alpha_0}$. Luego el conjunto $U = X \setminus W_{\alpha_0}$ es una vecindad de z en X. Se sigue que $U \cap A \subset \{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$. Es decir, que $|U \cap A| \leq |\alpha_0| < \lambda$. Con lo cúal concluímos □

DEFINICIÓN 3.1.3. Un espacio topológico X es de Lindelöf si toda cubierta abierta del espacio tiene subcubierta numerable.

Empecemos con un ejemplo para mostrar que el producto de dos espacios pseudoradiales no tiene que ser pseudoradial.

Sea Y un conjunto tal que $|Y| = \omega_1$. Sea $p \notin Y$. Ahora, vamos a definir en el conjunto $X = Y \cup \{p\}$ una topología. Los puntos del conjunto Y son aislados en X. Las vecindades del punto p en X son los conjuntos $A \cup \{p\}$, donde $A \subset Y$ es tal que tal que $|Y \setminus A| \leq \omega$.

PROPOSICIÓN 3.1.4. *El espacio X es Lindelöf y X es pseudoradial*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de conjuntos abiertos de X. Luego existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $p \in B$. Entonces, $X \setminus B$ es numerable. Escogemos $\{B_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} B_n \supset X \setminus B$ entonces $\{B_n : n \in \omega\} \cup \{B\}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ de X. Sea $p \in \overline{B}$. Luego $|B| > \omega$. Ahora, si $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un buen orden de B, se sigue que $b_\alpha \to p$ □

PROPOSICIÓN 3.1.5. *El espacio $Z = [0, 1] \times X$ no es pseudoradial*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.1.4, el espacio X es Lindelöf, por lo tanto, Z también lo es por ser el producto de un espacio compacto con un espacio de Lindelöf— vease el corolario 3.8.10 de [**1**]. Afirmamos que Z no es pseudoradial.

Como $\omega_1 \leq 2^\omega$ entonces hay una inyección $f\colon \omega_1 \to [0, 1]$, digamos que para cada $\alpha \in \omega_1$, $f(\alpha) = r_\alpha$. Sea $A = \{(r_\alpha, \alpha)\colon \alpha \in \omega_1\}$. Puesto que el conjunto $\{r_\alpha\colon \alpha \in \omega_1\}$ es infinito en el intervalo $[0, 1]$, luego, por el lema 3.1.2 tiene un punto de acumulación completa $r \in [0, 1]$. Afirmamos que $(r, p) \in \overline{A}$. Para demostrar esto, tomamos una vecindad básica U de (r, p) en $[0, 1] \times X$, digamos $U = (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \times (X \setminus N)$, donde $N \subset \omega_1$ es numerable. Ahora bien, puesto que r es punto de acumulación completa del conjunto $\{r_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, tenemos que $|\{\alpha : r_\alpha \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)\}| = \omega_1$. Por lo tanto, hay $\alpha \in \omega_1$ tal que $r_\alpha \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ y $\alpha \notin N$. Entonces $(r_\alpha, \alpha) \in U \cap A$. Por lo tanto $(r, p) \in \overline{A}$. Así se ha demostrando que A no es cerrado en Z. Finalmente afirmamos que ninguna sucesión S en A converge a (r, p). No obstante, afirmamos que ninguna sucesión en A converge fuera de A. Consideremos dos casos.

i) Si $S = \{x_n \colon n \in \omega\} \subset A$, entonces existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $S \subset [0,1] \times \alpha$. Pero, si $(t_\beta, \beta) \in [0,1] \times \alpha$ entonces $(t_\beta - \varepsilon, t_\beta + \varepsilon) \times \{\beta\}$ contiene a lo más un punto de A. Por lo tanto (t_β, β) no es punto de acumulación de A.

ii) Sea $S = \{x_\alpha \colon \alpha \in \omega_1\}$ una sucesión en A. Suponemos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$ converge en Z a un punto $\overrightarrow{x} \in Z$. Vamos a denotar por π_1 la función proyección de Z en el conjunto $[0,1]$ y por π_2 la función proyección de Z en el conjunto X. Si $\pi_2(\overrightarrow{x}) = \alpha \in \omega_1$, entonces $\overrightarrow{x} = (t, \alpha)$ para algún $t \in [0,1]$. Más aún $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times \{\alpha\}$ es una vecindad de $\overrightarrow{x}$ en la cual hay a lo más un punto A. Por lo tanto $\overrightarrow{x} = (s, p)$ para algún $s \in [0,1]$. Sea $\{B_n : n \in \omega\}$ una base local anidada en s. Si $x_\alpha \to (s, p)$ para toda $n \in \omega$ existe α_n tal que $x_\alpha \in B_n \times X$ para toda $\alpha \geq \alpha_n$. Sea $\gamma = \sup_{n \in \omega}\{\alpha_n\}$; entonces $\pi_1(x_\alpha) = s$ para toda $\alpha \geq \gamma$, pero la fibra $\{s\} \times X$ contiene a lo más un elemento de A, por lo que la sucesión no converge a (s, p). □

DEFINICIÓN 3.1.6. Sea X un espacio topológico y tomamos $p \in X$. *La estrechez del punto* p es el menor cardinal $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ tal que si $C \subset X$ satisface con $p \in \overline{C}$, entonces existe $C_0 \subset C$ tal que $|C_0| \leq \mathfrak{m}$ y $p \in \overline{C_0}$. Este cardinal lo vamos a denotar por $t(X, p)$. *La estrechez del espacio* X es el cardinal $t(X) = \sup\{t(p, X) \colon p \in X\}$.

DEFINICIÓN 3.1.7. Sea X un espacio topológico. Diremos que $A \subset X$ es $\kappa-$*cerrado* si para todo $U \subset A$ tal que $|U| = \kappa$, satisface $\overline{U} \subset A$. Esto lo vamos a denotar como $\overline{A}^\kappa = A$.

LEMA 3.1.8. *Sea X un espacio topológico. Tomamos κ un cardinal. Tenemos que* $t(X) \leq \kappa$ $si\ y\ sólo\ si\ cada\ conjunto\ \kappa-cerrado\ es\ cerrado$

DEMOSTRACIÓN. Para la suficiencia suponemos que $t(X) > \kappa$, existe $A \subset X$ y $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin \overline{B}$ para todo $B \subset A$. $\overline{A}^\kappa$ es $\kappa-$cerrado pero no cerrado. Para la necesidad, si $A \subset X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$, puesto que $t(X) \leq \kappa$, existe $B \subset A, |B| \leq \kappa$ y $x \in \overline{B}$, entonces A no es κ-cerrado. □

PROPOSICIÓN 3.1.9. *Sea X un espacio topológico T_1. Sea Y un espacio compacto. Entonces, la proyección $\pi_X \colon X \times Y \to X$ es un mapeo cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F \subset X \times Y$ cerrado. Para demostrar que $\pi_X(F)$ es cerrado, sea $x \notin \pi_X(F)$. Entonces $\{x\} \times Y \subset (X \times Y) \setminus F$. Ahora, vamos a construir una cubierta abierta de $\{x\} \times Y$. Afirmamos que, para cada $y \in Y$, el punto (x, y) tiene una vecindad $U_y \times V_y \subset (X \times Y) \setminus F$ abierta en $X \times Y$, tal que los conjuntos $U_y \subset X, V_y \subset Y$ son abiertos en X y Y respectivamente. En efecto, si $y \in Y$ tomamos un conjunto $V_y \subset Y$ abierto en Y tal que $y \in V_y$. Por otra parte, como $x \in X \setminus \pi_X(F)$ y el conjunto

$X \setminus \pi_X(F)$ es un conjunto abierto en X entonces, hay un conjunto abierto $U \subset X \setminus \pi_X(F)$ tal que $x \in U$, así hacemos $U = U_y$. Luego, el conjunto $U_y \times V_y$ es abierto en $X \times Y$ y es tal que $(x, y) \in U_y \times V_y$. Por último , por construcción del conjunto $U_y \times V_y$ tenemos que $U_y \times V_y \subset (X \times Y) \setminus F$. Claramente $\{x\} \times Y \subset \cup_{y \in Y}(U_y \times V_y)$. Es decir que la familia $\{U_y \times V_y \colon y \in Y\}$ es una cubierta abierta del conjunto $\{x\} \times Y$. Puesto que, el espacio Y es compacto entonces, el conjunto $\{x\} \times Y$ también es compacto, porque es homeomorfo a Y. Se sigue que, hay un conjunto finito $\{y_1, y_2, ..., y_k\} \subset Y$ tal que $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{k}(U_{y_i} \times V_{y_i})$. Entonces $U = \cap_{i=1}^{k} U_{y_i}$ satisface $F \cap (U \times Y) = \varnothing$. Por lo tanto $\pi_X(F) \cap U = \varnothing$. Así hemos demostrado que para $x \notin \pi_X(F)$ hay un abierto $U \subset (X \setminus \pi_X(F))$ tal que $x \in U$. Es decir, que el conjunto $X \setminus \pi_X(F)$ es abierto en X. Por lo tanto, el conjunto $\pi_X(F)$ es cerrado en X. $\square$

LEMA 3.1.10. *Sea X un espacio topológico T_1. Tomamos el espacio topológico Y un espacio compacto. Entonces $t(X \times Y) \leq t(X)t(Y)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\kappa = t(X)t(Y)$. Vamos a probar que un conjunto $\kappa-$cerrado $H \subset X \times Y$ es cerrado en $X \times Y$. Sea $(p, q) \in \overline{H}$. Como el espacio X es T_1, se tiene que $\{p\}$ es cerrado. Entonces $\pi_X^{-1}(\{p\}) = \{p\} \times Y \subset X \times Y$ es cerrado por la continuidad de π_X. Afirmamos que $T = H \cap (\{p\} \times Y) \subset H$ es $\kappa-$cerrado. En efecto, pues si $L \subset T$ tal que $|L| \leq \kappa$, entonces $\overline{L} \subset H$. Además $L \subset \{p\} \times Y$ entonces $\overline{L} \subset \overline{\{p\} \times Y} = \{p\} \times Y$, por lo que $\overline{L} \subset T$. Es decir que basta probar que $q \in \pi_Y(T)$. Ahora, si $q \in \pi_Y(T)$ entonces, $(p, q) \in T \subset H$. Por lo que es suficiente probar que $q \in \pi_Y(T)$. Suponemos lo contrario, es decir que $q \notin \pi_Y(T)$. Como $t(Y) \leq \kappa$ y el conjunto T es $\kappa-$cerrao en $\{p\} \times Y$, entonces por lema 3.1.8 el conjunto T es cerrado en $\{p\} \times Y$, esto implica que $\pi_Y(T)$ es un conjunto cerrado en Y, por que $\pi_Y(\{p\} \times (Y \setminus T))$ es un conjunto abierto en Y. Puesto que el espacio Y es T_3 podemos escoger una vecindad V cerrada en Y de q tal que el conjunto $V \cap \pi_Y(T)$ es vacío. Entonces $X \times V$ es una vecindad del punto (p, q) en $X \times Y$, por lo tanto $(p, q) \in \overline{(X \times V) \cap H}$. Como $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$, este conjunto es cerrado por la continuidad de π_Y y del hecho de que H es $\kappa-$cerrado se tiene que $(X \times V) \cap H$ es $\kappa-$cerrado en $X \times Y$. Deducimos de la compacidad de Y y de la proposición 3.1.9 que el mapeo $\pi_X \colon X \times Y \to X$ es cerrado. Por lo tanto $S = \pi_X((X \times V) \cap H)$ es $\kappa-$cerrado. Como $t(X) \leq \kappa$ se tiene que el conjunto S es también cerrado. Ahora por la continuidad de π_X tenemos $p \in \pi_X(\overline{(X \times V) \cap H}) \subset \overline{\pi_X((X \times V) \cap H)} = \pi_X((X \times V) \cap H) = S$. Entonces, hay un punto $r \in V$ con $(p, r) \in H$, contradiciendo que $(\{p\} \times V) \cap H = (\{p\} \times V) \cap T = \varnothing$. $\square$

DEFINICIÓN 3.1.11. Sea X un espacio topológico y pseudoradial. Para $A \subset X$, donde el conjunto A no es cerrado, llamaremos el *carácter de sucesiones del conjunto* A, a la función cardinal $\sigma_c(A, X)$ que definimos como:

$$\sigma_c(A, X) = \text{mín}\{|S|\colon S\ es\ una\ sucesión\ en\ A\ que\\ converge\ a\ un\ punto\ fuera\ de\ A\}.$$

Se define el carácter secuencial del espacio X como:

$$\sigma_c(X) = \sup\{\sigma_c(A, X)\colon A \subset X, \overline{A} \neq A\}.$$

DEFINICIÓN 3.1.12. Diremos que el espacio topológico X es semiradial si para todo $A \subset X$ que no es $\kappa-$cerrado, hay una sucesión $\{x_\xi : \xi \in \lambda\} \subset A$, con $\lambda \leq \kappa$, que converge fuera de A.

OBSERVACIÓN 3.1.13. Para nuestro siguiente resultado es importante la siguiente construcción por recursión. Sea X un espacio topológico pseudoradial y sea α un ordinal. Tomamos $B \subset X$, se define por recursión :

(1) $B_0 = B$
(2) Al haber definido B_β para todo ordinal β, tal que $\beta < \alpha$, definimos:

$$B_\alpha = \begin{cases} \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta, \text{ si } \alpha \text{ es límite} \\ \{x : x \text{ es limíte de una sucesión en } B_\gamma\}, \text{ si } \alpha = \gamma + 1 \end{cases}$$

LEMA 3.1.14. *Sea X un espacio topológico pseudoradial. Entonces, para todo $B \subset X$ tenemos que $\overline{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \sigma_c(X)^+\}$*

DEMOSTRACIÓN. Se verifica por inducción transfinita que $B_\alpha \subset \overline{B}$. Sabemos que $B_0 = B \subset \overline{B}$. Sea $B_\alpha \subset \overline{B}$. Entonces, como cada elemento de $B_{\alpha+1}$ es límite de una sucesión en B_α, luego cada elemento de $B_{\alpha+1}$ está en la cerradura de B_α. Pero $B_\alpha \subset \overline{B_\alpha} \subset \overline{B}$, por lo que $B_{\alpha+1} \subset \overline{B}$. Por último, si el ordinal $\alpha \neq 0$ es límite y $B_\beta \subset \overline{B}$ para toda $\beta < \alpha$ entonces, por definición de las B_α tenemos que $B_\alpha \subset \overline{B}$. Ahora, sigue de la definición de un espacio pseudoradial que $B \subset \cup\{B_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, para algún ordinal λ (donde $\lambda < |X|^+$) y por eso basta demostrar que $\bigcup\{B_\alpha\colon \alpha < \sigma_c(X)^+\}$ es cerrado. Supóngamos que no y que $\sigma_c(X) = \kappa$. Entonces, hay una sucesión $\{x_\delta\}_{\delta<\kappa} \subset \bigcup\{B_\alpha\colon \alpha < \sigma_c(X)^+\}$ que converge a un punto x fuera de $\bigcup\{B_\alpha\colon \alpha < \sigma_c(X)^+\}$. Para cada ordinal δ, con $\delta < \kappa$, vamos a escoger un ordinal $\alpha(\delta) < \kappa^+$ tal que $x_\delta \in B_{\alpha(\delta)}$. Sea $\gamma = \sup\{\alpha(\delta) : \delta < \kappa\}$. Entonces $x_\delta \in B_\gamma$ para todo ordinal δ que satisface $\alpha(\delta) < \delta < \kappa$. Por lo tanto $x \in B_{\gamma+1}$, lo cual es una contradicción. $\square$

DEFINICIÓN 3.1.15. Sea X un espacio topológico. Tomamos κ un cardinal y una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \subset X$.Diremos que la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$

es estrictamente convergente en X al punto $x \in X$, si converge a x, el cardinal κ es regular, y $x \notin \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \beta\}}\ \forall \beta < \kappa$.

DEFINICIÓN 3.1.16. Sea X un espacio topológico. Se dice que un subconjunto A de X es cadena (estrictamente cadena) cerrada si contiene todos los puntos límites de todas las sucesiones convergentes en X (estrictamente convergentes) contenidas en A. Sea μ un ordinal. Diremos que A *es* $\mu-$*cadena cerrada* si contiene todos los puntos límites de todas las sucesiones convergentes de longitud μ contenidas en A.

DEFINICIÓN 3.1.17. El espacio topológico X se llamará casi-radial si cada subconjunto A estrictamente cadena cerrada es cerrada

OBSERVACIÓN 3.1.18. Cada espacio casi-radial es pseudoradial

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subset X$ cadena cerrada. Como A es estrictamente cadena y puesto que X es casi radial, el conjunto A es cerrado en X. Por lo tanto, X es pseudoradial. $\square$

DEFINICIÓN 3.1.19. La *estrechez de un conjunto* A en un espacio topológico X es el menor número cardinal $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ con la propiedad de que si $A \bigcap \overline{C} \neq \varnothing$, entonces existe $C_0 \subset C$ tal que $|C_0| \leq \mathfrak{m}$ y $A \bigcap \overline{C_0} \neq \varnothing$. Este cardinal lo vamos a denotar por $t(A, X)$.

PROPOSICIÓN 3.1.20. *Si el espacio topológico X es pseudoradial entonces $t\,(X) \leq \sigma_c\,(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma_c\,(X) = \kappa$. Si $t\,(X) > \kappa$, entonces por el lema 3.1.8 existe un $A \subset X$ que es $\kappa-$cerrado pero no es cerrado. Sea $z \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, por la definición de estrechez hay un $A_0 \subset A$ tal que $|A_0| \leq t(X)$ y $z \in \overline{A_0}$. Como el conjunto A es $\kappa-$cerrado tenemos que $|A_0| > \kappa$. Ahora, por la observación 3.1.13 y por el lema 3.1.14, hay una familia de conjuntos $\{A_\alpha \colon \alpha < \sigma_c(X)^+\}$ tal que $\overline{A} = \bigcup\{A_\alpha \colon \alpha < \sigma_c(X)^+\}$. Sea

$$\gamma = \min\{\alpha \colon \alpha \text{ es un ordinal con } \alpha < \sigma_c(X)^+ \ y \text{ existe}$$
$$z \in A_\alpha \text{ tal que } t\,(\{z\}, A) > \kappa\}.$$

Por la construcción de las A_α tenemos que γ es sucesor, digamos $\gamma = \eta + 1$. Puesto que $\sigma_c(X) = \kappa$, tenemos que el punto z es límite de una sucesión en el conjunto A_η de longitud a lo más κ. Sea $\lambda = |A_\gamma|$. Luego, para cada $\beta \in \lambda$ hay un punto $a_\beta \in A_\gamma$ y una sucesión $S_\beta \subset A_\eta$ que converge a a_β. Pero $\sigma_c(X) = \kappa$ entonces, para cada $\beta < \lambda$ tenemos que $|S_\beta| \leq \kappa$. Por lo tanto $z \in \overline{\bigcup\limits_{\beta<\lambda} S_\beta}$ y $|\bigcup\limits_{\gamma<\lambda} S_\gamma| \leq \kappa$, lo cual es una contradicción. $\square$

PROPOSICIÓN 3.1.21. *Sea X un espacio topoloógico T_1 y casi-radial. Entonces $\sigma_c(X) \leq t(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma_c(X) = \kappa$. Por definición de caractér secuencial, tenemos que para cada ordinal $\mu < \kappa$ existe un subconjunto $A \subset X$ no cerrado en X, tal que A es cerrado con respecto a cadenas estrictamente convergentes de longitud μ. Entonces, existe $x \in \overline{A} \setminus A$ y una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda} \subset A$ que converge estrictamente a x, donde el ordinal μ es tal que $\mu < \lambda \leq \kappa$. Sea $B = \{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. Luego $x \in \overline{B}$, pero $x \notin \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ para todo ordinal β tal que $\beta < \lambda$. Por lo tanto $t(X, B) \geq \lambda$. Entonces $t(X) \geq \lambda > \mu$. Puesto que μ es arbitrario, se tiene que $t\,(X) \geq \kappa$. □

LEMA 3.1.22. *Si el espacio topológico X es casi-radial entonces* $t(X) = \sigma_c(X)$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos verificado la desigualdad $\sigma_c(X) \geq t(X)$ en la proposición 3.1.20. Ahora, cada espacio casi-radial es pseudoradial, por la observación 3.1.18. Es decir que, se satisfacen las condiciones de la proposición 3.1.21. Por lo tanto tenemos la desigualdad $\sigma_c(X) \leq t(X)$, con lo cual concluimos. □

3.2. R-Monoliticidad y Pseudoradialidad

DEFINICIÓN 3.2.1. Sea X un espacio topológico pseudoradial. Al espacio X le llamaremos *R-monolítico* si para cada $A \subset X$ se satisface $\sigma_c(\overline{A}) \leq |A|$.

LEMA 3.2.2. *Sea X un espacio topológico. Si el espacio X es $R-$monolítico entonces el espacio X es casi-radial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio pseudoradial y tal que para cada $A \subset X$ se satisface $\sigma_c(\overline{A}) \leq |A|$. Ahora, suponemos que hay $A \subset X$ tal que A es estrictamente cadena cerrada pero, el conjunto A no es cerrado. Entonces, hay una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\lambda} \subset A$ que converge a un $x \notin \overline{A} \setminus A$, donde λ es un cardinal regular y mínimo respecto de que la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ converge a $x \notin A$. Puesto que, el conjunto A es estrictamente cadena cerrada, existe un ordinal μ mínimo tal que $\mu < \lambda$ y $x \notin \overline{\{x_\alpha : \alpha \in \mu\}}$. Hacemos $B = \{x_\alpha : \alpha \in \mu\}$. Ahora, definimos por recursión:

(1) $B_0 = B$
(2) Al haber definido B_β para todo ordinal β, tal que $\beta < \alpha$, definimos:

$$B_\alpha = \begin{cases} \underset{\beta<\alpha}{\cup} B_\beta, & \text{si } \alpha \text{ es límite} \\ \{x : x \text{ es limíte de una sucesión en } B_\gamma\}, & \text{si } \alpha = \gamma + 1 \end{cases}$$

Luego para alguna α, tenemos que $B_\alpha \setminus A \neq \varnothing$. Para salir de A necesitamos una cadena de longitud a lo menos λ. Observemos que $B \subset B_\alpha \subset \overline{B}$. Por lo tanto $\sigma_c\left(\overline{B}\right) > \lambda > |B| = \mu$. Así, contradiciendo el hecho de que el espacio X es $R-$monolítico. $\square$

TEOREMA 3.2.3. [**6**] *La clase de los espacios $R-$monolíticos compactos es numerablemente productiva*

DEMOSTRACIÓN. Sean X, Y espacios $R-$monolíticos y compactos. Vamos a demostrar que $X \times Y$ es casi-radial.

Suponemos que $X \times Y$ no es casi-radial. Sea κ el menor cardinal tal que existe un conjunto estrictamente cadena cerrada $A \subset X \times Y$ que no es $\kappa-$cerrado. Seleccionemos un conjunto $B \subset A$ tal que $|B| \leq \kappa$ con $\overline{B} \setminus A \neq \varnothing$. Ahora, fijemos un punto $(x, y) \in \overline{B} \setminus A$. Como cada conjunto $R-$monolítico es casi-radial por el lema 3.2.2 y el conjunto $(\{x\} \times Y) \cap A$ es estrictamente cadena cerrada. Tenemos que $(\{x\} \times Y) \cap A$ es cerrado en X.
Ahora sea V una vecindad cerrada de (x, y) tal que $V \cap [(\{x\} \times Y) \cap A] = \varnothing$. Luego el conjunto $A' = A \cap V$ satisface $\pi_X(x) \notin \pi_X(A')$. Es decir, que cambiando a A por A' se tiene $\pi_X(x) \notin \pi_X(A)$. Ahora, el conjunto A' sigue siendo estrictamente cadena cerrada en $X \times Y$. Además, puesto que $A = A' \cup [(\{x\} \times Y) \cap A]$, se sigue que

$$(x, y) \in \overline{A} = \overline{A'} \cup \overline{(\{x\} \times Y) \cap A} = \overline{A'} \cup (\{x\} \times Y) \cap A.$$

Por lo tanto $(x, y) \in \overline{A'}$. Como $(x, y) \in \overline{B}$ se sigue que $\pi_X(x, y) = x \in \pi_X\left(\overline{B}\right)$. Por otra parte $\pi_X\left(\overline{B}\right) \subset \overline{\pi_X(B)}$ por lo que $\overline{\pi(B)} \setminus \pi_X(A) \neq \varnothing$. Sabemos que $\sigma_c(\overline{\pi_X(B)}) \leq \left|\overline{\pi_X(B)}\right| \leq |B| \leq \kappa$. Por la proposición 3.1.9 se tiene que π_X es un mapeo cerrado. Por lo tanto $\pi_X(A)$ es $< \kappa$-cerrado, por que si $C \subset \pi_X(A)$ es tal que $|C| < \kappa$, entonces para toda $l \in C$, existe $y_l \in Y$ tal que $(l, y_l) \in A$. Sea $K = \{(l, y_l) \colon l \in C\}$. Pero A es un conjunto $< \kappa-$cerrado. Luego $\overline{K} \subset A$. Por lo tanto, tenemos $C \subset \pi_X(\overline{K}) \subset \pi_X(A)$. Se sigue que hay una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \kappa} \subset \pi_X(A)$ convergiendo a un punto $x' \notin \pi_X(A)$. Para cada α escogemos y_α tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in A$. Sea z un punto de acumulación completo del conjunto $\{y_\alpha \colon \alpha \in \kappa\}$. Luego, el conjunto $X \times \{z\} \cap A$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Ahora, puesto que el conjunto $\pi_Y^{-1}(z) = X \times \{z\}$ es cerrado en $X \times Y$ y puesto que el conjunto A es cadena estrictamente cerrada, entonces el conjunto $(X \times \{z\}) \cap A$ es cadena estrictamente cerrada. Pero X es $R-$monolítico. Es decir, en particular es pseudoradial, por lo que el conjunto $X \times \{z\} \cap A$ es cerrado. Entonces $X \times \{z\} \cap A$ no contiene a (x', z).

Sea V una vecindad cerrada en $X \times Y$ de (x', z) que no intersecta a $(X \times \{z\}) \cap A$. Ahora, como z es punto de acumulación completa de las y_α se tiene que:

$$|\{\alpha \in \kappa \colon y_\alpha \in \pi_Y(V)\}| = \kappa.$$

Ahora, tomamos $J = \{\alpha \in \kappa\colon y_\alpha \in \pi_Y(V)\}$. Como $x_\alpha \to x'$, por lo tanto, existe $\beta \in \kappa$ tal que $x_\alpha \in \pi_X(V)$ para toda $\alpha \geq \beta$. Puesto que $J \cap [\beta,\kappa) \neq \varnothing$, existe α tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in V$. Por lo tanto $(x', z) \in \overline{\{(x_\alpha, y_\alpha)\colon \alpha \in [\beta,\kappa)\}}$. Reemplazamos al conjunto A con el conjunto $A \cap V$, y el conjunto $\{y_\alpha\colon \alpha \in \kappa\}$ con el conjunto $\{y_\alpha\colon \alpha \in J \cap [\beta,\kappa)\}$. Notemos que el conjunto A es estrictamente cadena cerrada, $(<\kappa)-$cerrado, pero no es $\kappa-$cerrado. Ahora, puesto que $z \notin \pi_Y(A)$, y $\pi_Y(A)$ es $<\kappa-$ cerrado, tenemos $\overline{\{y_\varphi\colon \varphi \leq \alpha\}} \subset \pi_Y(A)$ pero $z \in \overline{\{y_\varphi\colon \varphi \in \kappa\}} \setminus \{y_\varphi\colon \varphi \in \kappa\}$.

Sea $C_\alpha = \overline{\{y_\beta\colon \beta \in \alpha\}} \subset \pi_Y(A)$ y hacemos $C = \bigcup\limits_{\alpha\in\kappa} C_\alpha$. Entonces por lo anterior sabemos que C no es cerrado. Afirmamos que C es $(<\kappa)-$cerrado. En efecto, pues si $D \subset C$, y tomamos al cardinal λ tal que $\lambda = |D| < \kappa$, digamos $D = \{s_\beta\colon \beta < \lambda\}$, entonces para toda $\beta \in \lambda$ existe $\alpha_\beta \in \kappa$ tal que $s_\beta \in \overline{\{y_\alpha\colon \alpha < \alpha_\beta\}}$. Sea $\varphi = \sup\{\alpha_\beta\colon \beta \in \lambda\} < \kappa$ (por que al ser κ regular tenemos que $cf(\kappa) = \kappa$) y $D \subset C_\varphi$, entonces, $\overline{D} \subset \overline{C_\varphi} \subset C$.

Puesto que C no es cerrado en un $R-$monolítico, entonces hay una sucesión $\{y'_\alpha\colon \alpha \in \kappa\} \subset C$ convergiendo a un punto $y' \notin C$. Pasando a una subsucesión; $\{y_{g(\alpha)}\colon \alpha < \kappa\}$ definida por $g\,(\alpha) = \min\{\delta\colon y'_\delta \notin C_\alpha\}$. Podemos asumir que $y'_\alpha \notin C_\alpha\ \forall\alpha < \kappa$.

Vamos definir por recursión una función $f\colon \kappa \to \kappa$ tal que

$$y'_\alpha \in \overline{\{y_\beta\colon \alpha \in \beta \in f(\alpha)\}}$$

Sea η el minimo ordinal tal que $y'_0 \in C_\eta$. Hacemos $f(0) = \eta$. Al haber definido y'_β para todo ordinal $\beta < \alpha$ y $f(\beta)$ para todo ordinal $\beta < \alpha$, entonces, se define $f(\alpha) = \rho$, donde $\rho \in \kappa$ es el mínimo ordinal respecto a que $y'_\alpha \in \overline{\{y_\beta\colon 0 < \beta < \rho\}}$ y $f(\alpha) > f(\beta)\ \forall\beta < \alpha$. Ahora escogemos $x'_\beta \in \overline{\{x_\beta\colon \alpha < \beta < f(\alpha)\}}$, de manera que $(x'_\alpha . y'_\alpha) \in A$. Afirmamos que $\{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión que converge estrictamente a $(x', y') \notin A$. En efecto pues dado $\delta < \kappa$, se tiene además $x' \notin \overline{\pi_X(\{(x'_\alpha, y'_\alpha) : \alpha < \delta\})}$, $y' \notin \overline{\pi_Y(\{(x'_\alpha, y'_\alpha) : \alpha < \delta\})}$ lo cual implica que $(x', y') \notin \overline{\{(x'_\alpha, y'_\alpha) : \alpha < \delta\}}$. Sabemos que y'_α converge a y', basta demostrar que x'_α converge a x'. En efecto, sea U una vecindad cerrada de x', entonces existe α tal que para toda $\beta > \alpha\ \ x_\alpha \in U$, por lo tanto si $\beta > \alpha, x'_\alpha \in \overline{\{x_\beta\colon \alpha < \beta < f\,(\alpha)\}} \subset \overline{\{x_\beta\colon \beta > \alpha\}} \subset \overline{U} = U$. Es decir que la sucesión $\{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}_{\alpha<\kappa}$ es estrictamente convergente. Por último $(x', y') \notin A$ pues $x' \notin \pi_X(A)$, lo cual es una contradicción. El argumento de este párrafo se usa más adelante, nos referiremos a él por (♣).

Hemos verificado el producto de dos espacios, X, Y $R-$monolíticos compactos es casi-radial. Por último si $A \subset X \times Y$ entonces, por el lema 3.1.22 $\sigma_c(\overline{A}) = t(\overline{A}) \subset t(\overline{\pi_X(A)})t(\overline{\pi_Y(A)}) \leq \sigma_c(\overline{\pi_X(A)})\sigma_c(\overline{\pi_Y(A)}) \leq |A|$.

Ahora vamos a demostrar el teorema. Sea $\{X_n \colon n \in \omega\}$ una familia de espacios compactos $R-$monolíticos, sea $X = \prod_{n\in\omega} X_n$. Vamos a indicar con π_n la proyección de X sobre el producto de los $n+1$ primeros factores. La estrechéz se preserva bajo el producto numerable de espacios compactos [**15**], y por lo tanto por el mismo razonamiento expuesto al principio de esta prueba, basta demostrar que X es casi-radial. Hacemos esto por contradicción, asumimos que existe $A \subset X$ no cerrado pero estrictamente cadena cerrada, sea κ el mínimo cardinal tal que A no es κ cerrado. Sea $B \subset A$ tal que $|B| = \kappa$ y $\overline{B} \setminus A \neq \varnothing$; ahora escogemos un punto $s \in \overline{B} \setminus A$. Para demostrar que existe $m \in \omega$ tal que $\pi_m(s) \notin \pi_m(A)$, supóngamos que $\pi_n(s) \in \pi_n(A)$ $\forall n \in \omega$; escogemos $s_n \in A$ tal que $\pi_n(s) = \pi_n(s_n)$. Claramente por la elección de las s_n's la sucesión $\{s_n \colon n \in \omega\}$ de A converge estrictamente a x, lo cual es imposible pues A es estirctamente cadena cerrada. Luego para algún $m \in \omega$ pasa que $\pi_m(s) \notin \pi_m(A)$, y en consecuencia $\pi_m(A)$ no es cerrado en $\pi_m(X)$. Por la productividad finita de los espacios $R-$monolíticos, podemos reindexar de tal manera que el cero ahora pase a ocupar el lugar de m. Reindexando como se mencionó, es claro que $\pi_0(A)$ no es κ-cerrado, pero $(<\kappa)-$cerrado. Ahora usando el argumento (♣) se va definir por recursión una sucesión $\{s_{n,\alpha} \colon \alpha \in \kappa\}$ de tal forma que la sucesión $\{\pi_n(s_{n,\alpha}) \colon \alpha \in \kappa\}$ converja al punto $(s'_0, s'_1, ..., s'_n) \notin \pi_n(A)$. En (♣) empezamos con $x'_\alpha \to x'$ y construímos $(x'_\alpha, y_\alpha) \subset A$ tal que $(x'_\alpha, y_\alpha) \to (x', y)$. Puesto que $\pi_0(A)$ no es $\kappa-$cerrado y es $(<\kappa)-$cerrado, por lo tanto existe una sucesión $\{s_{0,\alpha} \colon \alpha < \kappa\} \subset A$ tal que $\pi_0(s_{0,\alpha}) \to s'_0 \in X_0 \setminus \pi_0(A)$. Aplicamos (♣) para obtener una sucesión $\{s_{1,\alpha} \colon \alpha < \kappa\} \subset A$ tal que $\pi_1(s_{1,\alpha}) \to (s'_0, s'_1) \in (X_0 \times X) \setminus \pi_1(A)$, etc. En general aplicando (♣) por recursión, obtenemos una sucesión $\{s_{n,\alpha}\} \subset A$ tal que $\pi_n(s_{n,\alpha}) \to (s'_0, s'_1, ..., s'_n) \in \left(\prod_{1\leq i\leq n} X_i\right) \setminus \pi_n(A)$. Notemos que en la construcción (♣), construímos una sucesión $\{y'_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ tal que $(x'_\alpha, y'_\alpha) \in A$ y $(x'_\alpha, y'_\alpha) \to (x', y') \notin A$. Además $y'_\alpha \in \overline{\{y_\beta \colon \alpha < \beta < f(\alpha)\}}$, por lo tanto, si $\kappa = \omega$, entonces la sucesión $\{y'_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una subsucesión de $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$, por lo tanto $\pi_0(s_{0,\alpha}) \to s'_0$, y además $\pi_1(s_{1,\alpha}) \to (s'_0, s'_1)$. Sea $s' \in X$ tal que su n-ésima coordenada sea s'_n. Entonces, la construcción (♣) nos muestra que la sucesión $\{s_{n+1,m} \colon m \in \omega\}$ se puede tomar como subsucesión de $\{s_{n,m} \colon m \in \omega\}$. La sucesión diagonal $\{s_{n,n} \colon n \in \omega\}$ converje a s', en contradicción con el hecho de que A es cadena cerrada. Por lo tanto el cardinal κ no es numerable. Para cada $\alpha \in \kappa$ seleccionamos un punto de acumulación s'_α de la sucesión $\{s_{n,\alpha}\colon n \in \omega\}$. Como A es ω-cerrado, dicho punto está en A. Afirmamos que la sucesión $\{s'_\alpha\colon \alpha \in \kappa\}$ converge a s'. Basta demostrar que para toda vecindad cerrada de s' de la forma $\pi_j^{-1}(U)$, donde U es una vecindad cerrada de $\pi_j(s')$ en $\pi_j(X)$, la sucesión a partir de un ordinal $\beta \in \kappa$ satisface que $s'_\alpha \in \pi_j^{-1}(U)$ para todo ordinal $\alpha \geq \beta$ con $\alpha < \kappa$. Por construcción, para cada $n \geq j$ hay un ordinal $\alpha_n \in \kappa$ tal que $\pi_n(s_{n,\alpha_n}) \in U \times X_{j+1} \times ... \times X_n$ cuando $\alpha \geq \alpha_n$, pues κ es regular. Sea $\widehat{\alpha} = \sup\{\alpha_n\colon n \geq j\}$. Para cualquier $\alpha \geq \widehat{\alpha}$ y $n \geq l$ tenemos que $s_{n,\alpha} \in \pi_j^{-1}(U)$ y por lo tanto , $s'_\alpha \in \pi_j^{-1}(U)$, esto demuestra la convergencia, claramente estricta, de $\{s'_\alpha\colon \alpha \in \kappa\}$ a $s' \in \overline{A} \setminus A$. Lo cual es una contradicción y la prueba está completa. $\square$

TEOREMA 3.2.4. *Sea κ un cardinal. Tomamos $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de espacios compactos $R-$monolíticos y un cardinal λ tal que $\lambda \geq \kappa$. Entonces, cada subconjunto $(< \kappa)-$cerrado λ cadena cerrada de $\Pi_{\alpha\in\kappa}X_\alpha$ es λ cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se ha verificado para todos los cardinales κ tales que $\kappa \leq \omega$ en el teorema 3.2.3. Ahora, asumimos que κ es un cardinal tal que $\kappa > \omega$ y que el teorema es cierto para cada cardinal menor que κ. Basta verificar que si A es un subconjunto $(< \kappa)-$cerrado no λ $-$cerrado de $\Pi_{\alpha\in\kappa}X_\alpha$, entonces A no es $\lambda-$cadena cerrada . Tomamos

$$\lambda = \min\{\theta\colon \theta \text{ es un cardinal y el conjunto } A \\ \text{es menor que } \theta - cerrado\}.$$

Sea $B \subset A$ tal que $|B| = \lambda$ y $\overline{B}\backslash A \neq \varnothing$. Sea β un ordinal tal que $\beta < \kappa$. El mapeo $\pi_\beta\colon \Pi_{\alpha\in\kappa}X_\alpha \to \Pi_{\alpha\in\beta}X_\alpha$ denotará la proyección canónica. Sea $x \in \overline{B}\backslash A$. Si $\pi_\beta(x) \in \pi_\beta(A)$ para cada $\beta \in \kappa$ entonces, escogemos puntos $x_\beta \in A$ tal que $\pi_\beta(x) = \pi_\beta(x_\beta)$. Por construcción la sucesión $\{x_\beta\colon \beta \in \kappa\}$ converge a x. Por lo tanto, el conjunto A no es $\lambda-$cadena cerrada. Ahora, suponemos que para algún $\beta \in \kappa$, se satisface que $\pi_\beta(x) \in \overline{\pi_\beta(B)}\backslash\pi_\beta(A)$. Es decir, que $\pi_\beta(A)$ no es un subconjunto $\lambda-$cerrado de $\Pi_{\mu\in\beta}X_\mu$, pero si es menor que $\lambda-$cerrado. En efecto, pues si $D \subset \pi_\beta(A)$ es tal que $|D| < \lambda$ entonces, por la elección de λ hay un $D' \subset A$ tal que $|D| = |D'|$, que satisface que $\pi_\beta(D') = D$. Ahora, por ser A un conjunto $(< \lambda)$-cerrado en $\prod_{\mu\in\kappa} X_\mu$ se tiene que $\overline{D'} \subset A$. Entonces $\overline{D} \subset \overline{\pi_\beta(D')} \subset \pi_\beta(A)$ porque la proyección π_β es cerrada. Ahora, por hipótesis de inducción, hay una sucesión $\{x^\beta_\alpha\colon \alpha \in \lambda\} \subset A$ y un punto $x^\beta \in \Pi_{\mu\in\beta}X_\mu \setminus \pi_\beta(A)$ tal que, la sucesión $\{\pi_\beta(x^\beta_\alpha)\colon \alpha \in \lambda\}$ converge a x^β. De lo anterior se tiene que λ debe de ser regular, pues de no ser asi existiría un ordinal η, menor que λ, tal que hay una sucesión creciente de ordinales υ_ε que cumple con $\bigcup_{\varepsilon\in\eta} \upsilon_\varepsilon = \lambda$, lo cual contradice la minimalidad de λ . Sea $C_\gamma = \overline{\{x^\beta_\alpha \colon \alpha \in \gamma\}}$, luego tomamos $C = \bigcup_{\gamma\in\lambda} C_\gamma$. Afirmamos que $\pi_{\beta+1}(C)$ es un subconjunto $(<\lambda)-$cerrado de $\Pi_{\mu\in\beta+1}X_\mu$. En efecto, sea $D \subset \pi_{\beta+1}(C)$ tal que $|D| < \lambda$. Entonces, hay un $D' \subset C$ con $|D'| < \lambda$ tal que $\pi_{\beta+1}(D') = D$. Puesto que el espacio $\Pi_{\beta+1<\mu<\lambda}X_\mu$ es compacto se tiene que $\overline{D} \subset \overline{\pi_{\beta+1}(D')} \subset \pi_{\beta+1}(C)$. Claramente el conjunto $\pi_{\beta+1}(C)$ no es $\lambda-$cerrado. Luego, aplicando la hipótesis de inducción hay una sucesión $\{x^{\beta+1}_\alpha \colon \alpha\in\lambda\} \subset C$ y un punto $x^{\beta+1} \in \Pi_{\mu\in\beta+1}X_\mu \setminus \pi_{\beta+1}(C)$ tal que $\{\pi_{\beta+1}(x^{\beta+1}_\alpha) : \alpha \in \lambda\}$ converge a $x^{\beta+1}$. Más aún, la sucesión puede ser escogida de tal forma $x^{\beta+1}_\gamma \notin C_\gamma$ para toda $\gamma \in \lambda$. En efecto, definimos una función $f : \lambda \to \lambda$ definida por $f(\delta) = \min\{\theta : \theta \text{ es un ordinal y } x^{\beta+1}_\theta \notin C_\delta\}$. Es decir que podemos reindexar de tal forma que la propiedad requerida se cumpla. En consecuencia $x^{\beta+1}_\gamma \in \overline{\{x^\beta_\alpha \colon \gamma\in\alpha\in\lambda\}}$. Ahora, la sucesión $\{\pi_\beta(x^{\beta+1}_\alpha) \colon \alpha \in \lambda\}$ converge a x^β en $\Pi_{\mu<\alpha}X_\mu$ pues cualquier vecindad de x^β contiene a las $\pi_{\beta+1}(x^{\beta+1}_\alpha)$ por lo que $x^{\beta+1}$ es una extensión de x^β, es decir que para todo ordinal $\rho \in \beta$ se cumple que $\pi_\rho(x^{\beta+1}) = \pi_\rho(x^\beta)$.

Continuando este proceso inductivamente construímos sucesiones $\{x^{\beta+n}_\alpha \colon \alpha \in \lambda\}$ de tal forma que $\{\pi_{\beta+n}(x^{\beta+n}_\alpha) \colon \alpha \in \lambda\}$ converge a un punto $x^{\beta+n} \in \Pi_{\mu\in\beta+n}X_\mu$, tal que:

$$(*) \qquad x^{\beta+n+1}_\gamma \in \overline{\{x^{\beta+n}_\alpha \colon \gamma\in\alpha\in\lambda\}},$$

además el punto$x^{\beta+n+1}$ es una extención de $x^{\beta+n}$. En el paso límite $\beta+\omega$ definimos $x^{\beta+\omega} = \bigcup_{n\in\omega} x^{\beta+n}$ y para cualquier $\alpha \in \lambda$ escogemos un punto de acumulación $x^{\beta+\omega}_\alpha \in \overline{\{x^{\beta+n}_\alpha : n \in \omega\}} \subset A$. Afirmamos que la sucesión $\{\pi_{\beta+\omega}(x^{\beta+\omega}_\alpha) \colon \alpha \in \lambda\}$ converge a $x^{\beta+\omega} \in \Pi_{\mu<\beta+\omega}X_\mu$. En efecto, sea V una vecindad básica de $x^{\beta+\omega}$. Luego el conjunto $\overline{V}$es una vecindad cerrada en $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ de $x^{\beta+\omega}$, digamos $\overline{V} = \Pi^{n_0}_{i=1}\overline{U_{\alpha_i}} \times \Pi_{\substack{\alpha\neq\alpha_i\\ \alpha\in\kappa}} X_\alpha$. Luego si n_1 es tal que $\beta+n_1 \geq \alpha_n$ para toda $n = 1, .., n_0$, se sigue que $x^{\beta+n} \in \pi_{\beta+n}(\overline{V})$ para toda $n \geq n_1$ por lo que $x^{\beta+n}$está finalmente en $\pi_{\beta+n}(\overline{V})$ para toda $n \geq n_1$. Ahora, para cada $n \geq n_1$ vamos a escoger $\gamma_n \in \lambda$ tal que para toda $\gamma \geq \gamma_n$ se satisface que $x_\gamma \in \pi_{\beta+n}(\overline{V})$. Sea $\gamma_0 = \sup_{n\in\omega}\{\gamma_n\}$. Tomamos $\gamma \geq \gamma_0$, luego $x^{\beta+n}_\gamma \in \Pi_{\beta+n}(\overline{V})$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto $x^{\beta+n}_\gamma \in \overline{V}$ para cada $\gamma \geq \gamma_0$. Así por inducción transfinita se construyen para cualquier $\gamma \in \kappa$ sucesiones $\{x^{\beta+\gamma}_\alpha \colon \alpha \in \lambda\} \subset A$ y puntos $x^{\beta+\gamma} \in \Pi_{\alpha\in\beta+\gamma}X_\alpha$ de tal forma que $\{\pi_{\beta+\gamma}(x^{\beta+\gamma}_\alpha) \colon \alpha \in \lambda\}$ converge a $x^{\beta+\gamma}$ y para toda $\gamma \in \delta$ el punto $x^{\beta+\delta}$ es una extensión de $x^{\beta+\gamma}$. Más aún, para cada ordinal sucesor digamos $\gamma = \sigma + 1$ se satisface que $x^{\beta+\delta+1}_\eta \in \overline{\{x^{\beta+\delta}_\alpha \colon \eta\in\alpha\in\lambda\}}$. Ahora para cada ordinal límite γ el punto $x^{\beta+\gamma}_\alpha$ es un punto de acumulación completa del conjunto $\{x_\alpha^{\beta+\delta}\colon \delta \in \gamma\}$. Por último sea $z = \bigcup_{\gamma\in\kappa} x^{\beta+\gamma} \in \Pi_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \setminus A$. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si $\lambda = \kappa$ entonces hacemos $z_\alpha = x_\alpha^{\beta+\alpha}$. Afirmamos que la sucesión $\{z_\alpha\colon \alpha \in \kappa\}$ converge z. En efecto, tomamos el conjunto W una vecindad de z. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $W = \pi_{\beta+\gamma}^{-1}(V)$ donde V es una vecindad cerrada de $x^{\beta+\gamma}$ en $\Pi_{\mu\in\beta+\gamma} X_\mu$. Puesto que el conjunto V está restringido sólo en un número finito de coordenadas, por lo tanto hay un ordinal $\widetilde{\alpha}$ tal que $x_\alpha^{\beta+\gamma} \in V$ para cualquier ordinal $\alpha \geq \widetilde{\alpha}$. Por construcción para cada $\alpha \geq \widetilde{\alpha}$. Tenemos $x_\alpha^{\beta+\gamma+1} \in \overline{\{x_\xi^{\beta+\gamma}\colon \xi \in \kappa, \xi > \widetilde{\alpha}\}}$ vemos que $x_\alpha^{\beta+\gamma+1} \in \pi_{\beta+\gamma}^{-1}(V)$ para cualquier $\alpha \geq \widetilde{\alpha}$ y para cualquier $n \in \omega$. Pero entonces $x_\alpha^{\beta+\gamma+\omega} \in \pi_{\beta+\gamma}^{-1}(V)$ y así inductivamente tenemos que $x_\alpha^{\beta+\delta} \in \pi_{\beta+\gamma}^{-1}(V)$ para cualquier $\alpha \geq \widetilde{\alpha}$ y para cualquier $\gamma \leq \delta \in \kappa$. Sea $\upsilon = \text{máx}\{\widetilde{\alpha}, \gamma\}$ tenemos que $z_\alpha = x_\alpha^{\beta+\alpha} \in W$ para cualquier $\alpha \geq \upsilon$ y por lo tanto $\{z_\alpha\colon \alpha \in \kappa\}$ converge a z.

Caso 2: Si $\lambda > \kappa$ entonces para cualquier ordinal $\alpha \in \lambda$ escogemos un punto de acumulación completa z_α del conjunto $\{x_\alpha^{\beta+\gamma}\colon \gamma \in \kappa\}$. Observemos que $z_\alpha \in A$ para toda $\alpha \in \lambda$, por que A es $(<\lambda)-$cerrado. Afirmamos que $\{z_\alpha\colon \alpha \in \lambda\}$ converge a z. En efecto, fijemos como antes una vecindad U de z. Ahora, por regularidad del espacio $\Pi_{\mu\in\kappa} X_\mu$ hay un conjunto abierto V tal que $z \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sea γ un ordinal fijo tal que el conjunto $W = \pi_{\beta+\gamma}^{-1}(\overline{V})$ contiene a todas las coordenadas que determinan a V. Entonces, para cada $\delta \geq \gamma$ hay un ordinal $\alpha_\delta \in \gamma$ tal que $x_\alpha^{\beta+\delta} \in V \subset \overline{V} \subset U$ para cada $\alpha \geq \alpha_\delta$. Luego $\pi_{\beta+\delta}(x_\alpha^{\beta+\delta}) \in \pi_{\beta+\delta}(W)$ cuando $\alpha \geq \alpha_\delta$. Dado que λ es regular $\vartheta = \sup_{\delta\in\kappa}\{\alpha_\delta\} \in \lambda$. Tenemos $x_\alpha^{\beta+\delta} \in W$ para toda $\delta \in \kappa$ y para toda $\vartheta \in \alpha \in \lambda$ y por lo tanto $z_\alpha \in W$ para cada $\vartheta \in \alpha \in \lambda$.

En ambos casos se tiene que la sucesión $\{z_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ converge a z y esto completa la prueba. $\square$

CAPíTULO 4

La propiedad de Whyburn y la pseudoradialidad

En este capítulo vamos a introducir dos nuevos conceptos, el concepto de espacio de Whyburn y el de espacio débilmente Whyburn, y posteriormente vamos que relación tienen dichos conceptos con la pseudoradialidad y con el producto de espacios pseudoradiales. Para el desarrollo del capítulo se consultó [**14, 11, 9**].

4.1. Las propiedades de Whyburn

DEFINICIÓN 4.1.1. Diremos que un espacio X topológico tiene *la propiedad de Whyburn* (informalmente diremos que el espacio *es Whyburn*) si cuando $M \subset X$ y M no es cerrado, entonces para cada $x \in \overline{M} \setminus M$ existe $A \subset M$ tal que $\overline{A} \setminus M = \{x\}$. Diremos que el espacio X es *débilmente Whyburn* si cuando $M \subset X$ no es cerrado, entonces existe $x \in \overline{M} \setminus M$ y $A \subset M$ tal que $\overline{A} \setminus M = \{x\}$.

OBSERVACIÓN 4.1.2. De la definición anterior se sigue que todo espacio de Whyburn es débilmente Whyburn.

DEFINICIÓN 4.1.3. Sea X un espacio topológico. Diremos que el espacio X es *secuencial* si los $A \subset X$ cerrados son aquellos que contienen los puntos límites de las sucesiones convergentes contenidas en A.

DEFINICIÓN 4.1.4. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio Frechet-Urysohn si para cada $A \subset X$ y para cada $x \in \overline{A}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset A$ que converge a x.

PROPOSICIÓN 4.1.5.
i) *Un espacio Frechet-Urysohn Hausdorff es de Whyburn*
ii) *Un espacio secuencial Hausdorff es débilmente Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. i) Sea X un espacio Frechet-Urysohn Hausdorff. Tomamos $M \subset X$ no cerrado y un $x \in \overline{M} \setminus M$. Puesto que X es Frechet-Urysohn existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en M que converge a x. Por último, por ser el espacio X Hausdorff se tiene que $\overline{\{x_n : n \in \omega\}} \setminus M = \{x\}$.

ii) Sea X un espacio secuencial Hausdorff. Tomamos un $M \subset X$ no cerrado. Entonces, hay una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset M$ tal que $x_n \to x \in \overline{M} \setminus M$. Luego, por ser el espacio X Hausdorff se sigue que $\overline{\{x_n : n \in \omega\}} \setminus M = \{x\}$.

□

EJEMPLO 4.1.6. Sea

$$T = \{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\left(\frac{1}{m}, 0\right) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}.$$

Cada conjunto $\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$, es abierto en T. Un $U \subset T$ es vecindad del punto $(0,0)$ si y sólo si para todos los naturales m excepto para un número finito de ellos el conjunto $\{n : \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \notin U\}$ es finito. Afirmamos que el espacio T cumple con ser débilmente Whyburn pero no de Whyburn.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N}\}$, si hay un $M \subset A$ tal que $\overline{M} \setminus M = \{(0,0)\}$, entonces $(\frac{1}{m}, 0) \notin \overline{M}$ para toda $m \in \mathbb{N}$, luego la $\frac{1}{m}-$esíma columna contiene sólo un número finito de elementos de M para toda $m \in \mathbb{N}$. Se sigue que $(A \setminus M) \cup \{(0,0)\}$ es una vecindad de $(0,0)$. □

PROPOSICIÓN 4.1.7. *Sea X un espacio de Hausdorff semiradial, entonces X es débilmente Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \subset X$ no cerrado, sea κ el mínimo cardinal tal que M no es $\kappa-$cerrado. Puesto que el espacio X es semiradial, se sigue que hay una sucesión $\{x_\alpha : \alpha \leq \kappa\} \subset M$, que converge a un punto $x \notin M$. Puesto que el espacio es de Hausdorff y de la minimalidad κ, se tiene que $\overline{\{x_\alpha : \alpha \leq \kappa\}} \setminus M = \{x\}$. □

DEFINICIÓN 4.1.8. Sea X un espacio topológico T_1. El *pseudocaracter* de un punto $x \in X$ es el menor cardinal de la forma $\mathfrak{m} = |\mathcal{U}|$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos de X tales que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Este número cardinal lo denotaremos por $\psi(x, X)$. El *pseudocaracter* de X es el número cardinal $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) \colon x \in X\}$.

LEMA 4.1.9. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces $\chi(X) = \psi(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio compacto. Vamos a tomar un $x \in X$ y una base local $\mathcal{B}_x$ de x. Luego, por la proposición 1.1.5 se sigue que $\{x\} = \bigcap \mathcal{B}_x$. Es decir que $\psi(x, X) \leq \chi(x, X)$. Por lo tanto $\psi(X) \leq \chi(X)$. Notemos que esta desigualdad es válida para cualquier espacio T_1. Ahora, como antes, sea $x \in X$. Tomamos una familia $\mathcal{U}$ de abiertos de X tales que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Sea $|\mathcal{U}| = \kappa$ entonces, el conjunto $\{x\}$ es un G_κ. Luego, por el lema 2.1.3 hay una base para el conjunto $\{x\}$ en X de cardinalidad κ. Así, tenemos que $\psi(x,X) \geq \chi(x,X)$. Por lo tanto $\chi(X) \geq \psi(X)$.

$\square$

PROPOSICIÓN 4.1.10. [**9**] *Sea X un espacio compacto y débilmente Whyburn. Entonces X es pseudoradial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \subset X$ no cerrado. Puesto que el espacio es débilmente Whyburn, hay un $x \in \overline{M} \setminus M$ y un $A \subset M$ tal que $\overline{A} \setminus M = \{x\}$. Escogemos una familia minimal de abiertos $\{U_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$ tal que $\cap_{\alpha\in\kappa}\overline{U_\alpha} = \{x\}$. Podemos escoger dicha familia de tal forma que sea una base local en x, esto es posible por que en un espacio compacto el pseudocarácter es igual al carácter, por el lema 4.1.9. Por la minimalidad de κ se tiene que $(\cap_{\beta\in\lambda}(\overline{U_\beta}\cap\overline{A}))\setminus\{x\} \neq \varnothing$ para toda $\lambda \in \kappa$. Ahora escogemos $x_\lambda \in (\cap_{\beta\in\lambda}(\overline{U_\beta} \cap \overline{A})) \setminus \{x\}$, luego por la compacidad de $\overline{A}$ se tiene que la sucesión $\{x_\lambda : \lambda \leq \kappa\}$ converge a $x \notin M$. $\square$

DEFINICIÓN 4.1.11. Sea (X,τ) un espacio de Whyburn. Diremos que $M \subset X$ es *Whyburn-cerrado* si para toda $A \subset M$ tal que $\overline{A} \setminus A = \{x\}$, pasa que $x \in M$.

OBSERVACIÓN 4.1.12. Sea X un espacio topológico débilmente Whyburn. Entonces, cada $M \subset X$ Whyburn-cerrado es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos lo contrario. Es decir que existe un $M \subset X$ que es Whyburn-cerrado pero no es cerrado. Ahora, como es espacio X es débilmente Whyburn entonces, existe un $x \in \overline{M} \setminus M$ y un $A \subset M$ tal que $\overline{A} \setminus M = \{x\}$. Sea $y \in \overline{A} \setminus A$. Entonces $y \notin M$. Por lo tanto $y \in \overline{A} \setminus M$. Es decir que $\overline{A} \setminus A \subset \overline{A} \setminus M$. Luego $\overline{A} \setminus A = \{x\}$. Puesto que el conjunto M es Whyburn-cerrado en X tenemos que $x \in M$, lo cual es una contradicción. $\square$

TEOREMA 4.1.13. [**9**] *Sea X un espacio semiradial compacto y débilmente Whyburn, sea Y un espacio compacto y débilmente Whyburn, entonces $X \times Y$ es débilmente Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que hay un espacio compacto débilmente Whyburn y semiradial X, y un espacio débilmente Whyburn y compacto Y, tal que $X \times Y$ no es débilmente Whyburn. Entonces, hay un conjunto Whyburn-cerrado $A \subset X \times Y$ que no es cerrado. Sea κ el mínimo cardinal tal que A no es $\kappa-cerrado$. Ahora, escogemos un conjunto $B \subset A$ que satisface con $|B| = \kappa$ y $\overline{B} \setminus A \neq \varnothing$. Tomamos un punto $(x,y) \in \overline{B} \setminus A$. El conjunto $\{x\} \times Y$ es débilmente Whyburn, pues es homeomorfo a Y.

Afirmamos que si $A \cap (\{x\} \times Y) \neq \varnothing$ entonces hay una vecindad cerrada de (x, y) que es disjunta de $A \cap (\{x\} \times Y)$. En efecto, puesto que $A \cap (\{x\} \times Y)$ es Whyburn-cerrado, luego el conjunto $A \cap (\{x\} \times Y)$ es cerrado,por la observación 4.1.12, en $\{x\} \times Y$. Por lo tanto el conjunto $N = \{y \in Y \colon (x, y) \in A \cap (\{x\} \times Y)\}$ es cerrado en Y. Se sigue que $A \cap (\{x\} \times Y) = \pi_Y^{-1}(N) \cap \pi_X^{-1}(x)$, es decir que el conjunto $A \cap (\{x\} \times Y)$ es cerrado en $X \times Y$. Puesto que el espacio $X \times Y$ es compacto hay una vecindad cerrada V de (x, y) en $X \times Y$ tal que $V \cap [A \cap (\{x\} \times Y)] = \varnothing$. Haciendo $A' = A \cap V$ tenemos que $x \notin \pi_X(A')$ y $(x, y) \in \overline{A'}$ y A' es Whyburn cerrado pero no cerrado. Así podemos asumir que $A \cap (\{x\} \times Y) = \varnothing$. Como $(x, y) \in \overline{B}$ se tiene $\pi_X(x, y) = x \in \pi_X\left(\overline{B}\right) \subset \overline{\pi_X(B)}$ por lo que $\overline{\pi(B)} \setminus \pi_X(A) \neq \varnothing$. Puesto que $x \in \overline{\pi_X(B)}$ se sigue que $\pi_X(A)$ no es $\kappa - cerrado$. Por otra parte, siendo X semiradial, podemos fijar una sucesión $\{x_\varepsilon : \varepsilon \in \lambda\} \subset \pi_X(A)$ que converge a un punto $x' \in X \setminus \pi_X(A)$. Afirmamos que el conjunto $\pi_X(A)$ es $(< \kappa) - cerrado$. En efecto, por la proposición 3.1.9 sabemos que π_X es un mapeo cerrado por lo tanto $\pi_X(A)$ es $(< \kappa)$-cerrado, por que si $\overline{C} \subset \pi_X(A), |C| < \kappa$, para toda $l \in C$, existe $y_l \in Y$ tal que $(l, y_l) \in A$. Sea $K = \{(l, y_l) : l \in C\}$, pero A es $< \kappa-$cerrado, entonces $\overline{K} \subset A$ por lo tanto $C \subset \pi_X(\overline{K}) \subset \pi_X(A)$. En consecuencia tenemos que $\lambda = \kappa$ y por lo tanto κ es cardinal regular. Para cualquier $\xi \in \kappa$, escogemos y_ξ tal que $(x_\xi, y_\xi) \in A$. Ahora escogemos un punto de acumulación completa $p \in Y$ del conjunto $\{y_\xi : \xi \in \kappa\}$. Se tiene que el punto $(x', p) \notin A$, así podemos asumir como antes que $p \notin \pi_Y(A)$. Para cualquier $\xi \in \kappa$, denotamos por C_ξ la cerradura en Y del conjunto $\{y_\nu : \nu \in \xi\}$ y sea $C = \bigcup_{\xi \in \kappa} C_\xi$. Como $\pi_Y(A)$ es $(< \kappa) - cerrado$ se sigue que $C \subset \pi_Y(A)$. Más aún puesto que $p \in \overline{C} \setminus \pi_Y(A)$, se sigue que C no es cerrado en Y. Por ser y débilmente Whyburn hay un conjunto $D \subset C$ y un punto $y' \notin C$ tal que $\overline{D} \setminus C = \{y'\}$. Claramente podemos escribir a $\overline{D} = \{y'\} \bigcup (\cup_{\xi \in \kappa} (\overline{D} \cap C_\xi))$. Para todo $\xi \in \kappa$ escogemos una vecindad cerrada U_ξ de y' en el subespacio $\overline{D}$ tal que $U_\xi \cap (\overline{D} \cap C_\xi) = \varnothing$ y sea $V_\xi = \cap_{\nu \in \xi} U_\nu$. Puesto que el espacio $\overline{D}$ es compacto y $\overline{D} \setminus \{y'\}$ es $(< \kappa) - cerrado$, se sigue que cada $V_\xi \setminus \{y'\}$ es no vacía. Ahora, escogiendo un punto $y'_\xi \in V_\xi \setminus \{y'\}$ para toda $\xi \in \kappa$, tenemos una sucesión que converge a y'. Vamos a definir por recursión una función $f \colon \kappa \to \kappa$ tal que:

$$y'_\xi \in \overline{\{y_\nu : \xi \in \nu \in f(\xi)\}}.$$

Sea η mínimo tal que $y'_0 \in C_\eta$ y hacemos $f(0) = \eta$. Al haber definido y'_ν para toda $\nu < \xi$ y $f(\nu)$ para toda $\nu < \xi$, entonces se define $f(\xi) = \rho$, donde $\rho \in \kappa$ es mínimo respecto a que $y'_\xi \in \overline{\{y_\nu : 0 < \nu < \rho\}}$ y $f(\xi) > f(\nu) \forall \nu < \xi$. Ahora escogemos $x'_\nu \in \overline{\{x_\nu : \xi < \nu < f(\xi)\}}$, de manera que $(x'_\xi, y'_\xi) \in A$. Afirmamos que $\{\left(x'_\xi, y'_\xi\right)\}_{\xi<\kappa}$ es una sucesión que converge a $(x', y') \notin A$. En efecto, sabemos que y'_ξ converge a y', basta demostrar que x'_ξ converge a x'. En efecto, sea U una vecindad cerrada de x', entonces existe ξ tal que para toda $\nu > \xi \;\; x_\xi \in U$, por lo tanto si $\nu > \xi, x'_\xi \in \overline{\{x_\nu : \xi < \nu < f(\xi)\}} \subset \overline{\{x_\nu : \nu > \xi\}} \subset \overline{U} = U$. Es decir que la sucesión $\{\left(x'_\xi, y'_\xi\right)\}_{\xi<\kappa}$ es estrictamente convergente. Por último $(x', y') \notin A$ pues $x' \notin \pi_X(A)$. Así la sucesión $F = \{(x'_\xi, y'_\xi) : \xi \in \kappa\}$ está en la cerradura de un segmento inicial de F y por lo tanto en A, por lo que $\overline{F} \setminus A = \{(x', y')\}$, en contradicción con el supuesto de que A es Whyburn-cerrado. □

4.2. Espacios submaximales, espacios dispersos y pseudoradialidad.

DEFINICIÓN 4.2.1. Diremos que el espacio topológico X es un espacio submaximal si cada subconjunto denso es abierto

LEMA 4.2.2. *El espacio topológico X es submaximal si y sólo si para todo $A \subset X$ con interior vacío es cerrado y discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio submaximal, y $A \subset X$ un conjunto con interior vacío. Puesto que para todo abierto no vacío U, ocurre que $U \subsetneq A$; es decir que $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, por lo tanto A es cerrado. Sea $B \subset A$, entonces claramente para todo abierto no vacío U, ocurre que $U \subsetneq B$; es decir que $U \cap (X \setminus B) \neq \varnothing$, luego B es cerrado para todo $B \subset A$ por lo que A es discreto. Inversamente; sea $D \subset X$ denso en X, entonces para todo abierto U no vacío ocurre que $U \subsetneq (X \setminus D)$, por lo tanto el interior de $X \setminus D$ es vacío. Luego $X \setminus D$ es cerrado, esto implica que D es abierto. □

PROPOSICIÓN 4.2.3. [**14**] *Un espacio submaximal T_2 es de Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio submaximal T_2 de Whyburn y $x \in \overline{A} \setminus A$. El conjunto $A \setminus int(A)$ tiene interior vacío en X y entonces es cerrado y discreto en X. Por lo tanto, $x \in \overline{int(A)}$. Puesto que $\overline{int(A)} \setminus A$ es cerrado y discreto, hay una vecindad abierta de W de x, tal que $\overline{W} \cap (\overline{int(A)} \setminus A) = \{x\}$. Claramente que $B = W \cap int(A)$ satisface con $\overline{B} \setminus A = \{x\}$. □

Para notar que la hipótesis de que el espacio sea T_2 se expone el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.2.4. Consideremos al conjunto $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con su topología natural. Ahora en $X = M \cup \{2\}$ las vecindades de un punto de M son sus vecindades inducidas por la topología de $\mathbb{R}$ y las vecindades del punto 2 son de la forma $K \cup \{2\}$, donde $K \subset M$

es cofinito (o sea, $M \setminus K$ es finito). Por construcción el espacio es T_1 y submaximal, pues los únicos conjuntos densos son los que contienen a $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y éstos son abiertos en X. Además cualquier subconjunto de $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ que tiene a 0 en su cerradura, va a tener 2 en su cerradura también.

DEFINICIÓN 4.2.5. El espacio topológico X es denso en sí mismo si cada $x \in X$ es punto de acumulación de X.

TEOREMA 4.2.6. [**9**] *Si X es un espacio topológico numerable T_2, submaximal y denso en sí mismo, entonces $Z = X \times (\omega + 1)$ no es débilmente Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos una biyección $f : X \to \omega$. Afirmamos que el conjunto $A = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es no cerrado por que $\overline{A} \supset A \cup (X \times \{\omega\})$. En efecto, si $c \in X$ y U es una vecindad básica de (c, ω), digamos $U = V \times ((\omega + 1) \setminus N)$, donde N es un conjunto finito de ω y V es una vecindad abierta de c. Por ser X denso en sí mismo, c es punto de acumulación de X, es decir $(V \setminus \{c\}) \cap X$ es infinito. Luego $(V \times [(\omega+1) \setminus N]) \cap A$ es infinito y por lo tanto $(U \setminus (c, \omega)) \cap A$ es infinito. Ahora suponemos que existe un $B \subset X$ tal que $D = \{(x, f(x)) : x \in B\}$ y $\left|\overline{D} \diagdown A\right| = 1$. Claramente, $\overline{D} \diagdown A = \{(y, \omega)\}$ para algún $y \in X$ pues todos los puntos de acumulación de A yacen en $X \times \{\omega\}$ y sin pérdida de generalidad, asumimos que $y \notin B$. Puesto que $\omega + 1$ es compacto, la proyección $\pi_X : Z \to X$ es cerrada, lo cual implica que $\pi_X(\overline{D})$ es cerrado y por lo tanto, $\pi_X(\overline{D}) = B \cup \{y\}$. Hay dos posibilidades, $y \in \overline{B}$ o B es cerrado en $B \cup \{y\}$. No obstante, la segunda no es posible pues $D \subset \pi_X^{-1}(B)$ y $y \in \overline{D}$. Por lo tanto, $y \in \overline{B} \setminus B$; así por el lema 4.2.2, B no tiene interior vacío en X. Sea z un punto arbitrario de $int_X(B)$; afirmamos que $(z, \omega) \in \overline{D} \diagdown A$. En efecto, $(z, \omega) \notin A$ y si $U = V \times ((\omega + 1) \setminus F)$ es una vecindad básica de (z, ω) (donde V es una vecindad de z en X y $F \subset \omega$ es finito), puesto que $V \cap B$ es infinito, $U \cap D$ también lo es, así demostrando nuestra afirmación. Por lo tanto, tal conjunto D no existe y la demostración es completa. $\square$

DEFINICIÓN 4.2.7. El espacio topológico X es disperso si no contiene subconjuntos no vacíos densos en sí mismos.

LEMA 4.2.8. *Sean X un espacio topológico disperso y A el conjunto de todos sus puntos aislados, entonces A es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $X \setminus \overline{A} \neq \varnothing$, entonces por ser el espacio disperso el conjunto $X \setminus \overline{A}$ tiene un punto aislado z en $X \setminus \overline{A}$. Por ser $X \setminus \overline{A}$ un abierto en X se tiene que z es un punto aislado en X, lo cual es una contradicción. $\square$

TEOREMA 4.2.9. [**14**] *Un espacio T_3, disperso es débilmente Whyburn.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio disperso y de Hausdorff. Para cualquier $L \subset X$, denotamos por $a(L)$ el conjunto de puntos aislados del subespacio L. Suponemos que hay un $B \subset X$ no cerrado que es Whyburn cerrado en X. Sea $B_0 = a(B)$ y $C_0 = \overline{B_0} \setminus B_0$. Por el lema 4.2.8 B_0 es denso en B y C_0 es cerrado en X. Sin pérdida de generalidad asumimos que $\overline{B} = X$. Ahora por recursión transfinita si se han definido los conjuntos C_α, B_α, sea $B_{\alpha+1} = a(C_\alpha)$ y $C_{\alpha+1} = C_\alpha \setminus B_{\alpha+1}$. Si β es un ordinal límite y si están definidos C_α, B_α para toda $\alpha < \beta$, hacemos $B_\beta = \varnothing, C_\beta = \bigcap\{C_\alpha : \alpha < \beta\}$. Como X es disperso , hay un ordinal δ tal que $X = \overline{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \delta\}$. Sea $\lambda = \min\{\alpha < \delta : B_\alpha \cap (\overline{B} \setminus B) \neq \varnothing\}$, entonces por la definición de los B_λ, λ no es un ordinal límite, digamos $\lambda = \lambda_0 + 1$. Escogemos un punto $x \in B_\lambda \setminus B = a(C_{\lambda_0}) \setminus B$. Como x es aislado en C_{λ_0} hay un abierto U en X tal que $U \cap C_{\lambda_0} = \{x\}$. Por ser el espacio T_3 podemos encontrar $V \in \tau$ tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ y considere el conjunto $F = (\overline{V} \cap B) \setminus \{x\}$. Puesto que $x \in \overline{B}$ tenemos que $x \in \overline{F}$. Afirmamos que F es tal que $\overline{F} \setminus F = \{x\}$. En efecto, pues $\overline{F} \subset \overline{B} = \cup\{B_\alpha : \alpha \leq \lambda_0\} \cup C_{\lambda_0}$ y $\overline{F} \cap C_{\lambda_0} \subset \overline{V} \cap C_{\lambda_0} = \{x\}$. Por lo tanto $\overline{F} \setminus \{x\} = \cup\{B_\alpha : \alpha \leq \lambda_0\} \subset B$. Se sigue x está en la Whyburn-cerradura de B, una contradicción. □

OBSERVACIÓN 4.2.10. En contraste, un espacio T_3 disperso no tiene que ser de Whyburn como lo demuestra el ejemplo 4.2.15.

Tampoco es válido el teorema 4.2.9 para espacios T_2 dispersos como se demuestra el siguiente ejemplo. Primero necesitamos una definición:

DEFINICIÓN 4.2.11. Sea X un espacio de Hausdorff y τ su topología. Sea $T(X)$ la familia de todos los ultrafiltros en τ (o sea, ultrafiltros abiertos) que no convergen a ningún punto de X. Se le dota de una topologia al conjunto $\kappa X = X \cup T(X)$ tomando como vecindad de un punto de X a la familia de todas las vecindades de x en X y como vecindades de $\mathcal{F} \in T(X)$ la familia de todos los conjuntos $\{\mathcal{F}\} \cup U$, donde $U \in \mathcal{F}$. El espacio que así se obtiene se llama *la extensión de Katetov* del espacio X; es fácil ver que κX es un espacio de Hausdorff y $\kappa X \setminus X$ es discreto.

EJEMPLO 4.2.12. Suponer que ω tiene la topología discreta; $\kappa\omega$ es disperso, T_2 y no débilmente Whyburn.

DEMOSTRACIÓN. Que $\kappa\omega$ sea de Hausdorff es consecuancia de la definición. Además, puesto que ω tiene la topología discreta y $\kappa\omega \setminus \omega$ es discreta, sigue que $\kappa\omega$ es disperso. Para demostrar que $\kappa\omega$ no es débilmente Whyburn, sea $A \subset \omega$ tal que $|A| = \aleph_0$, notemos que los puntos $\kappa\omega \setminus \omega$ que pertenecen a la cerradura de A son aquellos filtros $\mathcal{F}$ tales que $A \in \mathcal{F}$.

Ahora para cada $B \in 2^A \setminus \{\varnothing, A\}$ hay un filtro $\mathcal{L}$ que no contiene a B. En efecto, sean $C = \{D : \omega \setminus B \subset D \text{ o } A \subset D\}$, $E = \{D_1 \cap D_2 : D_1, D_2 \in E\}$, cerrando a E bajo superconjuntos obtenemos el filtro $\mathcal{L}$. Más aún si $\mathcal{L} \to x$, entonces $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{x\}$ es un filtro que no converge a x. Por lo tanto $\{\mathcal{L}'\} \cup V$, $V \in \mathcal{L}'$ es una vecindad de A. Es decir que la familia de filtros que contienen a A tiene cardinalidad mayor o igual a $\left|2^A\right| = |2^\omega|$. Puesto que ω es abierto en $\kappa\omega$ y cualquier $A \subset \omega$ infinto tiene en su cerradura 2^ω puntos, se sigue que para todo $p \in \kappa\omega \setminus \omega$ no hay subconjunto $A \subset \omega$ tal que $\overline{A} \setminus \omega = \{p\}$. □

COROLARIO 4.2.13. [**14**] *Un espacio compacto y disperso es pseudo-radial.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia inmediata del lema 4.2.8 y de la proposición 4.2.2. □

PROPOSICIÓN 4.2.14. [**9**] *Sea X un espacio topológico disperso de Whyburn, entonces cada punto de acumulación $p \in X$ puede incluirse en un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que p es el único punto de acumulación de F.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$ un punto de acumulación de X, y sea A el conjunto de todos los puntos aislados de X. Por el lema 4.2.8 $p \in \overline{A}$. Como $p \in \overline{A}$ y puesto que el espacio X es de Whyburn, hay un conjunto $B \subset A$ tal que $\overline{B} \setminus A = \{p\}$. Claramente el conjunto $F = B \cup \{p\}$ cumple lo requerido. □

COROLARIO 4.2.15. [**14**] *Un espacio compacto T_1, disperso y de Whyburn es Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio compacto T_1, disperso y de Whyburn. Si $A \subset X$ no es cerrado $p \in \overline{A} \setminus A$, entonces puesto que el espacio es de Whyburn, hay un $B \subset A$ tal que $\overline{B} \setminus A = \{p\}$. Aplicamos la proposición anterior al espacio disperso $\overline{B}$; se tiene que existe $F \subset \overline{B}$ cerrado (y por lo tanto, cerrado en X) que tiene como único punto de acumulación a p. Por ser cerrado en X, F es compacto, luego cualquier subconjunto infinito numerable de $F \setminus \{p\} \subset A$ es una sucesión convergente a p. □

TEOREMA 4.2.16. [**14**] *Un espacio numerablemente compacto T_2 y de Whyburn es Frechet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio numerablemente compacto T_2 y de Whyburn, $A \subset X$ no cerrado, y $x \in \overline{A} \setminus A$. Por ser el espacio de Whyburn A contiene un conjunto M tal que $\overline{M} \setminus M = \{x\}$. Tomamos una familia de abiertos de M que sea maximal y disjunta, digamos $\mathcal{L}$, tal que las cerraduras de sus elementos no contienen a x. Entonces $x \in \overline{\bigcup \mathcal{L}}$ y por lo tanto, por ser el espacio X de Whyburn, hay un $N \subset \bigcup \mathcal{L}$ tal que $\overline{N} \setminus N = \{x\}$. Sea $\mathcal{L}' = \{U \in \mathcal{L} : U \cap N \neq \varnothing\}$. Afirmamos que $\mathcal{L}'$ es infinito. En efecto, ya que si $\mathcal{L}'$ fuera finito entonces $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap N)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{(U_i \cap N)}$; o sea, para algún elemento de dicha unión, digamos j, se cumple que $x \in \overline{U_j \cap N} \subset \overline{U}$, lo que contradice la elección de los elementos de $\mathcal{L}$. Ahora para cada $V \in \mathcal{L}'$ escogemos un $x_V \in V \cap N$. Por construcción el conjunto $D = \{x_V : V \in \mathcal{L}'\}$ es discreto en M y $(\overline{D} \setminus D) \cap (\bigcup \mathcal{L}) = \varnothing$. Es decir, que D es cerrado en N y por lo tanto x debe de ser el único punto de acumulación de D en el espacio numerablemente compacto $N \cup \{x\}$. Por lo tanto $D \cup \{x\}$ es un espacio infinito numerablemente compacto cuyo único punto no aislado es x. Este espacio es compacto, por lo que hay una sucesión numerable en D que converge a x. $\square$

DEFINICIÓN 4.2.17. El espacio topológico X es $k-$espacio si es T_2 y para cada $Z \subset X$, Z es cerrado en X si la intersección de Z con cualquier subespacio compacto K de X es cerrado en K.

COROLARIO 4.2.18. [**14**] *Un $k-$espacio de Whyburn es Fréchet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un $k-$espacio de Whyburn, $A \subset X$ y $x \in \overline{A} \setminus A$. Por ser el espacio de Whyburn hay un $F \subset A$ tal que $\overline{F} \setminus F = \{x\}$. Podemos asumir que $F \cap A = \overline{F} \cap A$(sí no son iguales es reemplazamos a F por $\overline{F} \cap A$). El conjunto F no es cerrado pues $\overline{F} = F \cup \{x\}$. Ahora por ser X un $k-$espacio, hay $K \subset X$ compacto tal que $K \cap F$ no es cerrado en K. Pero $\overline{K \cap F} \subset \overline{K} \cap \overline{F} \subset K \cap (F \cup \{x\})$. Por lo tanto $\overline{K \cap F} = (K \cap F) \cup \{x\}$, y como consecuencia $x \in \overline{K \cap F}$, luego por el corolario 4.2.15 el espacio K es Fréchet-Urysohn, así hay una sucesión $S \subset K \cap F$ que converge a x; claramente $S \subset A$. $\square$

Conclusiones

En el capítulo 2 se expone una caracterización de la pseudoradialidad y su relación con la compacidad secuencial, y además bajo el supuesto de $\mathfrak{c} \leq \omega_2$ se concluye que cada espacio secuencialmente compacto es pseudoradial. Se define el número de separación y con el se caracteriza la compacidad secuencial como sigue:

i) Si X es númerablemente compacto y T_1 con $\omega < \mathfrak{s}$ entonces X es secuencialmente compacto.

ii) Si $\kappa \geq \mathfrak{s}$ entonces 2^κ no es secuencialmente compacto.

Con los resultados anteriores se caracteriza la compacidad secuencial y se tiene:

iii) 2^κ no es pseudoradial.

En el capítulo 3 se trata el producto de espacios pseudoradiales, la propiedad no se preserva aún bajo producto finito, y se buscan las condiciones bajo las cuales se preserva la propiedad bajo el producto topológico, en particular:

iv) El producto numerable de espacios R-monolíticos es pseudradial

En el capítulo 4 se abordan las propiedades de Whyburn y su relación con la pseudoradialidad, concluyendose:

v) Un espacio Hausdorff compacto y débilmente Whyburn es pseudoradial.

Además se vio que un espacio T_3 disperso es débilmente Whyburn, como consecuencia se concluyó

vi) Un espacio Hausdorff disperso y compacto es pseudoradial.

Bibliografía

[1] R. Engelking, *General Topology*, PWN Polish Scientific Publishers, Varsovia, 1977.

[2] S. Willard, *General topology*, Addison Wesley Publication Company, Reading, Mass., 1970.

[3] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer Verlag, Berlín, 1985.

[4] T. Jech, *Set Theory*, Springer Verlag, Berlín, 1971.

[5] I. Juhász e Z. Szentmiklóssy, *Sequential compactness versus pseudoradiality in compact spaces*, Topology and its Applications, **50** (1993), 47-53.

[6] A. Bella, *Countable productivity of a class of pseudoradial spaces*, Proceedings of American Mathematical Society, **119** no. 2 (1993), 637-640.

[7] A. Bella, *Few remarks and questions on pseudoradial and related spaces*, Topology and its Applications, **70** (1996), 113-123.

[8] A. Bella, *Cleavability, pseudo-radial and R-monolithic spaces*, Topology and its Applications, **53** (1993), 229-237.

[9] A. Bella, *On spaces with the property of weak approximation by points*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **35** no. 2 (1994), 357-360.

[10] A. Bella, *More on the product of pseudoradial spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **32** no. 1 (1991), 125-128.

[11] A. Bella e I. Yashchenko, *On AP and WAP spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **40**, 3 (1999), 531-536.

[12] *Handbook of set-theoretic topology*, North-Holland, **1988**, 115-123.

[13] R. C. Walker, *The Stone-Cech Compactification*, Springer Verlag, Berlín, 1974.

[14] V. V. Tkachuk, *Almost closed sets and the topologies they determine*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **42**, 2 (2001), 395-405.

[15] V. I. Malyhin, *On the tightness and Suslin number of expX and of a product of spaces*, Soviet Mathematical Doklady, **13**, (1972), 496-499.

[16] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences siffice*, Fundamenta Mathematicae, **57**,(1965),107-115.