Grupos $\mathbb{R}$-factorizables y sus generalizaciones

Tesis que presenta el M. C. Constancio Hernández G. para la obtención del grado de Doctor en Ciencias

Julio de 1998

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Grupos $\mathbb{R}$-factorizables y sus generalizaciones

Tesis que presenta el
M. C. Constancio Hernández G.
para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias

Julio de 1998

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Contenido

Introducción

La idea de grupo topológico, que se remonta al inicio del siglo XX, es uno de los ejemplos más interesantes de la interacción exitosa de dos áreas distintas de las matemáticas: la teoría de grupos y la topología general. Un grupo topológico es un grupo en el que se define una topología de tal forma que se relacione con las operaciones del grupo: se pide que las operaciones tomar inverso y multiplicación de grupo sean continuas. La interacción del álgebra y la topolgía, es decir, lograr que una topología haga continua a las operaciones del grupo, genera una estructura muy rica e interesante en donde se consiguen resultados inesperados y elegantes. Podemos encontrar a los grupos topológicos en casi todas las áreas de las matemáticas, desde la geometría algebraica y teoría de números (grupos algebraicos, variedades abelianas, etcétera), análisis matemático (representación de grupos de Lie, grupos reductivos, etcétera) hasta las ciencias de la computación.

Esta tesis presenta los resultados de una investigación que contribuye a la tarea de caracterizar y clasificar los grupos topológicos. En particular, se aportan elementos para la caracterización de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables y se introducen dos tipos nuevos de grupos topológicos que se ubican entre los subgrupos de los grupos σ-compactos y los $\aleph_0$-acotados.

El capítulo 1 presenta una introducción a los grupos topológicos en donde aparecen hechos generales y básicos de la teoría así como las definiciones fundamentales. En este capítulo se desarrolla la teoría de grupos τ-acotados introducidos por I. Guran [**7**] en 1981. Los resultados más importantes de esta parte son el lema 1.42 y el teorema de encaje (teorema 1.43, este último caracteriza a los grupos τ-acotados como subgrupos de un producto de grupos con peso menor o igual a τ), porque son herramientas fundamentales para el desarrollo de la teoría de grupos $\mathbb{R}$-factorizables. Además se estudian algunos temas sobre invariantes cardinales en grupos topológicos, en particular, la noción de Σ-grupo de Lindelöf, que también juega un papel importante en el estudio de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables.

En el capítulo 2 estudiamos los grupos $\mathbb{R}$-factorizables y sus subgrupos. El origen de este tema se remonta a los años treinta, cuando en un ejemplo del libro de Pontriagin (pág. 118–119 de [**10**]) apareció el enunciado siguiente: Para toda función real continua sobre un grupo topológico compacto existe un subgrupo normal y cerrado tal que el grupo cociente correspondiente tiene una base numerable y la función es constante sobre cada clase lateral. W. Comfort y K. Ross [**5**] generalizaron este teorema probando que la misma conclusión es válida para funciones continuas de valores reales sobre grupos topológicos seudocompactos. Más adelante, en 1988 M. Tkachenko [**13**] probó que el mismo hecho sigue siendo válido para los grupos totalmente acotados, los de Lindelöf y otras clases importantes de grupos topológicos. Entre las contribuciones resultantes de nuestra investigación se caracteriza a los subgrupos de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables que heredan esta propiedad. Mediante una pequeña modificación de una construcción en [**12**], damos una gran cantidad de subgrupos densos de grupos $\mathbb{R}$-factorizables que no son $\mathbb{R}$-factorizables (teorema 2.16). También construimos un subgrupo cerrado y G_δ de un grupo abeliano $\mathbb{R}$-factorizable que no es $\mathbb{R}$-factorizable (ejemplo 2.17). Por último, damos una caracterización de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables en términos de la noción, formalmente más débil, de grupos semi-$\mathbb{R}$-factorizables.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de dos conceptos nuevos: los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados. O. Okunev propuso el concepto de o-acotación para grupos topológicos como un intento de dar una caracterización interna de los subgrupos de grupos σ-compactos. Más adelante, M. Tkachenko la modificó levemente introduciendo los grupos estrictamente o-acotados. La idea es definir dos clases nuevas de grupos topológicos tan parecidas a la clase de los σ-compactos como sea posible. Primero estudiamos las propiedades elementales de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados. Luego, encontramos las relaciones entre los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados, por un lado, y los grupos σ-compactos, $\mathbb{R}$-factorizables y $\aleph_0$-acotados por el otro. Por último, probamos que las clases de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados son distintas.

Los resultados de estas investigaciones se expusieron y comentaron en el Seminario de Grupos Topológicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, en el Seminario de Topología de la Facultad de Ciencias de la UNAM y en el II Congreso Iberoamericano de Topología y sus Aplicaciones.

Por último, quiero expresar mi más sincero agradecimiento al doctor Mikhail G. Tkachenko, sin cuya ayuda no hubiera sido posible esta tesis, por haberme dirigido con tanta atención, paciencia y dedicación durante mi trabajo doctoral y porque debido a sus valiosas sugerencias pude mejorar de manera importante mis resultados.

CAPÍTULO 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar un breve estudio de las propiedades elementales más importantes de los grupos topológicos. No se pretende dar una introducción a los grupos topológicos, el objetivo es dar una referencia lo más completa posible a quien lea esta tesis sobre los resultados utilizados en la parte principal del trabajo, la cual se ubica en los capítulos 2 y 3. Por esto mismo se omitirán muchas demostraciones y sólo en las secciones 4 y 3 se probarán todos o casi todos los resultados.

1. Propiedades elementales de los grupos topológicos

Un grupo topológico es un conjunto con dos estructuras, una operación binaria y una topología, relacionadas entre si.

DEFINICIÓN 1.1. Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama *grupo topológico* si

(1) $(G, \cdot)$ es un grupo;
(2) (G, τ) es un espacio topológico;
(3) las funciones $g_1\colon (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ y $g_2\colon (G,\tau) \to (G,\tau)$ dadas por $g_1(x,y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.

En ocasiones prescindiremos del uso del símbolo de operación binaria $\cdot$ es decir, en vez de $x \cdot y$ escribiremos simplemente xy.

Sea G un grupo topológico, si denotamos como $\mathcal{N}(x)$ a la familia de vecindades de un punto $x \in G$, podemos describir la condición (3) de la definición 1.1 como sigue: si x y y son elementos de G, para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, donde $V \cdot W = \{vw : v \in V, w \in W\}$; y para cada $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, donde $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$. El símbolo e_G denotará siempre a la identidad de un grupo G.

Un grupo topológico G con operación $\cdot$ y topología τ es por lo tanto una terna $(G, \cdot, \tau)$. Sin embargo, si no hay ambigüedad, escribiremos sólo G en vez de $(G, \cdot, \tau)$.

Es fácil ver que una terna $(G, \cdot, \tau)$, donde $(G, \cdot)$ es un grupo y τ una topología en G es un grupo topológico si y sólo si la función $g_3\colon (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$, dada por $g_3(x,y) = xy^{-1}$, es continua.

Sea G un grupo topológico. Para cada $g \in G$ fijo, las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, $x \in G$, de G en sí mismo, son homeomorfismos. La inversión $f\colon G \to G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismo. Las funciones φ_g y σ_g se llaman *traslaciones por g derecha e izquierda,* respectivamente.

Observe que una consecuencia de que φ_g y σ_g sean homeomorfismos es que todo grupo topológico es un espacio homogéneo. Esto permitirá estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico G en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos como la identidad e_G del grupo.

De la misma manera que nos interesan los isomorfismos entre grupos o los homeomorfismos entre espacios topológicos, en grupos topológicos estaremos interesados en funciones que preservan tanto la estructura algebraica como la topológica, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. Decimos que una función biyectiva $f\colon G \to G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un *isomorfismo topológico* si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama *automorfismo topológico.* Dos grupos topológicos son *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.

Es fácil ver que un isomorfismo topológico y su inverso son homomorfismos abiertos. Si G es un grupo topológico y $a \in G$ está fijo, entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico. Por lo tanto, si G no es abeliano, es fácil construir muchos automorfismos de G en G. En el caso de los grupos abelianos, estos automorfismos son triviales, es decir, son la identidad.

Describir la topología en un grupo topológico es generalmente una tarea más fácil que hacerlo en un espacio topológico arbitrario. Basta describir una base local para la identidad e_G del grupo.

LEMA 1.3. *Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{N}(e_G)$ una base local para la identidad e_G del grupo. Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x toma valores en los elementos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{N}(e_G)$, son bases para la topología de grupo de G.*

El lema siguiente nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades tales que $V^{-1} = V$. Estas vecindades reciben el nombre de *simétricas.*

LEMA 1.4. *Si G es un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e_G constituyen una base local para e_G.*

En lo sucesivo denotaremos con $\mathcal{N}^*(e_G)$ la base de vecindades abiertas y simétricas para la identidad e_G de un grupo topológico G.

La identidad de un grupo topológico tiene aún otra propiedad muy importante: admite una red local formada por subconjuntos cerrados.

LEMA 1.5. *Sea G un grupo topológico.*

(1) *Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $V^n \subseteq U$ ($V^n = V \dots V$, n factores).*
(2) *Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $\overline{V} \subseteq U$. En particular las vecindades cerradas de e_G constituyen una red local de la identidad.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos 2. Sea $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $xV \cap V \neq \varnothing$; es decir, existen v_1, $v_2 \in V$ con $xv_1 = v_2$, por lo cual $x = v_2v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$. Así que $\overline{V} \subseteq U$. □

El hecho de que las traslaciones en los grupos topológicos son homeomorfismos se utiliza para probar que el producto de un abierto por cualquier conjunto es abierto. En el caso de los conjuntos cerrados tenemos una situación similar sólo para conjuntos compactos.

TEOREMA 1.6. *Sean G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G. Entonces:*

(1) *Si O es abierto, los conjuntos aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son abiertos.*
(2) *Si A es cerrado, aA, Aa, A^{-1} son conjuntos cerrados.*
(3) *Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1}.*

Ya sabemos que todo grupo topológico es un espacio homogéneo. Por lo tanto, para demostrar propiedades locales en un grupo topológico (P. Ej., conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc.) es suficiente con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Por ello, y como consecuencia inmediata del lema 1.5, tenemos:

TEOREMA 1.7. *Todo grupo topológico es un espacio T_3.*

Si G es un grupo no trivial con la topología indiscreta, tenemos un grupo topológico que no es T_1 o T_0. Pero si un grupo topológico es T_0, dado que también es T_3, el grupo es regular y por lo tanto es un espacio de Hausdorff. En adelante consideraremos sólo grupos T_0, es decir, todos nuestros grupos serán espacios regulares. De hecho, más adelante se probará que todo grupo T_0 es un espacio de Tikhonov. Observe que para todo grupo topológico G, la propiedad de ser T_0 equivale a ser T_1; en particular, $\{e_G\}$ es un conjunto cerrado en G.

El siguiente teorema es de suma importancia. En él se resumen varias de las propiedades obtenidas anteriormente para la familia $\mathcal{N}(e_G)$; de hecho, esta familia se caracteriza completamente. Ésta es una de las propiedades que distinguen a los grupos topológicos de los espacios topológicos arbitrarios. Además, dicho teorema nos proporciona un método para definir topologías de grupos topológicos.

TEOREMA 1.8. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local $\mathcal{V}$ para e_G que cumple las condiciones siguientes.*

(1) $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$;
(2) *si* U, V *son dos elementos arbitrarios de* $\mathcal{V}$, *entonces existe* $W \in \mathcal{V}$ *tal que* $W \subseteq U \cap V$;
(3) *para cada* $U \in \mathcal{V}$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $VV^{-1} \subseteq U$;
(4) *para cada* $U \in \mathcal{V}$ *y para cada* $x \in U$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *con* $xV \subseteq U$;
(5) *para cada* $U \in \mathcal{V}$ *y* $a \in G$ *existe* $W \in \mathcal{V}$ *con* $aWa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G *y una familia* $\mathcal{V}$ *no vacía de subconjuntos de* G *que contienen a* e_G, *tal que se satisfacen las condiciones (1) a (5) para* $\mathcal{V}$, *entonces cada una de las familias* $\{xU : U \in \mathcal{V},\ x \in G\}$ *y* $\{Ux : U \in \mathcal{V},\ x \in G\}$ *es base para una topología de grupo* τ *para* G. *Además* $\mathcal{V}$ *es una base local para* e_G *en* (G, τ).

Veamos algunos ejemplos de grupos topológicos.

Ejemplo 1.9. Sea G un grupo arbitrario con la topología discreta. Entonces G forma un grupo topológico llamado un *grupo discreto*.

Ejemplo 1.10. Cualquier grupo G con la topología indiscreta es un grupo topológico. Este no es un grupo topológico T_0 si G contiene más de un elemento.

Ahora estudiaremos los conceptos de morfismos para grupos topológicos. Decimos que el homomorfismo $f\colon G \longrightarrow G'$ es *abierto* si f es una función abierta. El concepto de homomorfismo abierto es muy importante porque permite establecer el concepto de grupos topológicos equivalentes.

A continuación enunciaremos algunas de las propiedades elementales más importantes de los homomorfismos continuos.

El lector con experiencia en análisis funcional recordará que basta probar la continuidad de un operador lineal en la identidad de un espacio vectorial topológico para saber que es continuo en todo el espacio. Esta propiedad es aún válida para grupos topológicos.

Lema 1.11. *Sea* $\varphi\colon G \longrightarrow H$ *un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo* φ *es continuo (resp. abierto) si lo es en la identidad* e_G, *es decir, si* φ *satisface la condición (1) (resp. (2)) siguiente:*
(1) *para toda* W *vecindad de* e_H *en* H, *existe* U *vecindad de* e_G *en* G *tal que* $\varphi(U) \subseteq W$;
(2) *para toda vecindad* U *de* e_G *en* G *existe* W *vecindad de* e_H *tal que* $W \subseteq \varphi(U)$.

De manera similar al caso de subespacios topológicos, la operación de tomar subgrupos topológicos es una fuente muy importante para construir "nuevos" grupos topológicos a partir de los ya conocidos.

Definición 1.12. Sea G un grupo topológico, un subconjunto H de G se llama *subgrupo topológico* de G si
(1) H es subgrupo del grupo G;

(2) H es un subespacio con la topología inducida de G.

El siguiente resultado justifica la definición de subgrupo topológico en el sentido de que este último es por si mismo un grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.13. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo topológico de G. Entonces H es un grupo topológico con la topología que hereda de G.*

Recordemos que un subgrupo N de un grupo G se llama *subgrupo normal* de G si $a^{-1}Na \subseteq N$ para todo $a \in G$. Note que la última inclusión es equivalente a la igualdad $aNa^{-1} = N$ para todo $a \in G$.

PROPOSICIÓN 1.14. *Sean G un grupo topológico y H, N subgrupos de G. Entonces: .*

(1) *$\overline{H}$ es un subgrupo de G;*
(2) *Si N es un subgrupo normal de G, entonces $\overline{N}$ es un subgrupo normal de G;*
(3) *H es abierto si y sólo si su interior no es vacío;*
(4) *Si H es abierto, entonces $\overline{H} = H$.*

Pasemos ahora al estudio de grupos cocientes. Definiremos una topología de grupo en el conjunto de clases laterales.

Recordemos que si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G, entonces se define una relación de equivalencia en G como $a \sim b$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de clases laterales derechas de H. Denotaremos con G/H al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir, $G/H = \{Ha : a \in G\}$. De manera similar se definen las clases laterales izquierdas de H. Usaremos la misma notación para designar al conjunto formado por dichas clases, es decir $G/H = \{aH : a \in G\}$. Los siguientes resultados se establecen para el conjunto G/H de clases laterales derechas y los resultados correspondientes se cumplen para el conjunto de clases laterales izquierdas.

Introducimos en G/H una topología de la manera siguiente. Sea $\mathfrak{B}$ una base del grupo topológico G y H un subgrupo de G. Para cada $U \in \mathfrak{B}$ definamos $U^* = \{Hx : x \in U\}$ y $\mathfrak{B}^* = \{U^* : U \in \mathfrak{B}\}$.

PROPOSICIÓN 1.15. *Para todo subgrupo H de G, $\mathfrak{B}^*$ es una base para una topología τ en G/H. Si H es cerrado en G, la topología τ es T_1.*

El espacio topológico $(G/H, \tau)$ así construido recibe el nombre de *espacio cociente* de G entre H, o *grupo cociente* de G entre H para el caso cuando H es un subgrupo normal de G.

A continuación estudiaremos las propiedades de la función canónica $\pi\colon G \to G/H$, que le asigna a cada $x \in G$ la clase lateral Hx.

PROPOSICIÓN 1.16. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica dada por $\pi(x) = Hx$ para todo $x \in G$. Entonces π es continua y abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in G$ y U u erto en G tales que $Hx = \pi(x)$ pertenece a $U^* = \{Hy : y \in U\}$. Para ar la continuidad de π debemos hallar un abierto $V \ni x$ en G tal que $\subseteq U^*$. De hecho, el conjunto $V = HU$ es un abierto de G y $x \in V$. Además, $\pi(V) = \pi(HU) = \pi(U) = U^*$ y, por lo tanto, π es continua.

Sean U un abierto en G y $\mathfrak{B}$ una base para la topología de G, entonces $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, donde $B_j \in \mathfrak{B}$. Observe que $\pi(U) = \pi(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j \in J} B_j^*$, y por lo tanto, $\pi(U)$ es un abierto. $\square$

En general la función canónica $\pi\colon G \to G/H$ no es cerrada. Sin embargo, si H es compacto entonces π resulta ser cerrada.

El resultado siguiente nos muestra que las propiedades topológicas locales del espacio cociente de G entre H también se pueden estudiar en un solo punto.

TEOREMA 1.17. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G, entonces G/H es un espacio homogéneo.*

El siguiente resultado es un lema auxiliar que nos permitirá establecer dos propiedades topológicas del espacio cociente G/H.

LEMA 1.18. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y U, V vecindades abiertas de e_G en G tales que $VV^{-1} \subseteq U$. Entonces si $\pi\colon G \to G/H$ es la función canónica, se cumple que $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Hx \in \overline{\pi(V)}$ para un elemento $x \in G$, entonces $\pi(xV)$ es una vecindad abierta que contiene a Hx y por lo tanto intersecta a $\pi(V)$ por lo que existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $Hxv_1 = Hv_2$, esto es $Hx = Hv_2v_1^{-1} \in \pi(VV^{-1}) \subseteq \pi(U)$. $\square$

TEOREMA 1.19. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces*

(1) *G/H es un espacio regular y por tanto de Hausdorff.*
(2) *G/H es un espacio discreto si y sólo si H es abierto en G.*

En el caso particular en él que el subgrupo N de G resulte ser normal, de modo que G/N es un grupo, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.20. *Sean G un grupo topológico y N un subgrupo normal y cerrado de G, entonces*

(1) *G/N con la topología cociente es un grupo topológico;*
(2) *la función canónica $\pi\colon G \to G/N$ es un homomorfismo abierto y continuo;*
(3) *el grupo G/N es un espacio T_1 y por tanto regular;*
(4) *el grupo G/N es discreto si y sólo si N es abierto.*

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Damos estructura de grupo al producto cartesiano $G = \prod_{i \in I} G_i$ definiendo $(x_i)_{i \in I}(y_i)_{i \in I} = (x_iy_i)_{i \in I}$. Si e_i

es el elemento identidad de G_i, entonces $e = (e_i)_{i\in I}$ es el elemento identidad de G, y tenemos $(x_i)_{i\in I}^{-1} = (x_i^{-1})_{i\in I}$. La topología producto de Tikhonov es compatible con esta estructura de grupo porque la función $h\colon G\times G \to G$ dada por $h((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = (x_i y_i^{-1})_{i\in I}$ es la composición de las funciones $((x_i, y_i)_{i\in I}) \to (x_i y_i^{-1})_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I}(G_i \times G_i)$ en G y la proyección $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \to ((x_i, y_i)_{i\in I})$ de $G\times G$ en $\prod_{i\in I}(G_i\times G_i)$, y estas dos funciones son continuas.

DEFINICIÓN 1.21. El producto cartesiano de una familia de grupos topológicos $\{G_i : i\in I\}$ se obtiene al dar al producto

$$G = \prod_{i\in I} G_i$$

la topología producto de Tikhonov.

La proyección natural $\pi_j\colon G \to G_j$ con $j\in I$ definida por $\pi_j(x) = x_j$ para todo $x = (x_i)_{i\in I} \in G$ es un homomorfismo continuo. Este último hecho se deduce directamente de la definición de la topología producto. Más aún, la función $\phi_j\colon G_j \to G$ definida por $\phi_j(x) = (y_i)_{i\in I}$, donde $y_i = e_i$ para $i\neq j$ y $y_j = x$, es un isomorfismo topológico entre G_j y $N_j = \phi_j(G_j)$. Es decir, ϕ_j es una inmersión de G_j en G.

2. Seudonormas y teoremas de metrización

En esta sección estudiaremos el concepto de seudonorma en grupos topológicos. El objetivo será caracterizar la familia de vecindades de la identidad en términos de seudonormas.

Comenzamos con la definición y las propiedades elementales de las seudonormas.

DEFINICIÓN 1.22. Sean G un grupo y N una función de valores reales no negativos definida en G. Diremos que *N es una seudonorma en G* si cumple las condiciones siguientes:

(S.1) Si e es la identidad del grupo G, entonces $N(e) = 0$.

(S.2) Si x y y son elementos arbitrarios de G, entonces

$$N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y).$$

Si además se cumple la condición $N(x)\neq 0$ para todo $x\neq e$, entonces diremos que N es una *norma* en G.

Las siguientes propiedades se deducen fácilmente a partir de la definición de seudonorma.

LEMA 1.23. *Si N es una seudonorma en el grupo G, entonces*

(1) *$N(x)\geq 0$ y $N(x) = N(x^{-1})$ para $x\in G$ arbitrario.*

(2) *$N(xy)\leq N(x) + N(y)$, para cualesquier x, $y\in G$.*

(3) *$|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y)$, para cualesquier x, $y\in G$.*

LEMA 1.24. *El producto de una seudonorma en G por un número real no negativo es una seudonorma en G.*

LEMA 1.25. *La suma de dos seudonormas de un grupo G también es una seudonorma de G.*

El siguiente lema nos proporciona un método para definir una seudonorma a partir de una función.

LEMA 1.26. *Si f es una función real acotada cuyo dominio es el grupo G, entonces la función N en G definida por*

$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|, \qquad (x \in G)$$

es una seudonorma en G.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $N(e) = 0$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(z)| \\ &\leq \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(zx)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= \sup_{t \in G} |f(ty^{-1}) - f(t)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= N(y^{-1}) + N(x). \end{aligned}$$

Además, si definimos $z = yx^{-1}$, entonces

$$N(x^{-1}) = \sup_{y \in G} |f(yx^{-1}) - f(y)| = \sup_{z \in G} |f(z) - f(zx)| = N(x).$$

En consecuencia, aplicando esta última igualdad con y en lugar de x, tenemos que $N(xy^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x) = N(y) + N(x)$. La función N cumple entonces las condiciones (S.1) y (S.2) de la definición de seudonorma. □

LEMA 1.27. *Sean φ un homomorfismo del grupo G al grupo H y P una seudonorma en H; entonces la función $P \circ \varphi$ es una seudonorma en G.*

DEFINICIÓN 1.28. Sean G un grupo y N una seudonorma en G. Diremos que N *es una seudonorma invariante* si $N(x) = N(y^{-1}xy)$ para cualesquier x y y en G.

Observe que si sustituimos x por yx en la definición 1.28, obtenemos la siguiente condición equivalente para seudonormas invariantes:

$$N(xy) = N(yx) \quad \text{para cualesquier } x \text{ y } y \text{ en } G.$$

Hasta ahora sólo hemos considerado seudonormas en grupos sin estructura topológica. En lo sucesivo consideraremos grupos topológicos y seudonormas continuas. Una seudonorma es continua si es continua como función de $G \times G$ a $\mathbb{R}$. El siguiente resultado es una consecuencia sencilla del hecho de que para toda a en un grupo topológico G la función definida por $x \mapsto a^{-1}xa$ es un automorfismo continuo de G, y de que la composición de funciones continuas es continua.

LEMA 1.29. *Si $a \in G$ y N es una seudonorma continua en el grupo G, entonces la seudonorma N_a en G definida por la fórmula*

$$N_a(x) = N(a^{-1}xa), \qquad (x \in G)$$

también es una seudonorma continua en G.

El siguiente resultado establece la continuidad de una seudonorma a partir de su continuidad en la identidad del grupo. Como ya vimos antes, este resultado también es válido para homomorfismos.

LEMA 1.30. *Una seudonorma N en un grupo topológico G es continua si y sólo si dado un número positivo ε existe una vecindad U del elemento unitario e_G tal oue para todo punto x de la vecindad U, $N(x) < \varepsilon$. Esto es, si N es continua en e_G, esta seudonorma es continua en todo el grupo.*

En el siguiente lema, que es muy importante por sus consecuencias, utilizaremos la siguiente notación, donde N es una seudonorma definida en un grupo topológico G: $B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$

LEMA 1.31. *Supongamos que $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de vecindades simétricas de la identidad de un grupo topológico G tales que para todo $i \in \mathbb{N}$,*

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i. \tag{1.1}$$

Entonces podemos definir en el grupo G una seudonorma N tal que

$$B_N(\tfrac{1}{2^i}) \subseteq U_i \subseteq \Big\{x \in G : N(x) \le \frac{1}{2^{i-1}}\Big\} \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Si los conjuntos de esta sucesión poseen además la propiedad

$$y^{-1}U_iy = U_i \qquad \text{para } y \in G \text{ e } i \in \mathbb{N} \text{ arbitrario} \tag{1.3}$$

entonces se puede definir la seudonorma N de manera que sea invariante.

DEMOSTRACIÓN. Primero construiremos por inducción una familia de vecindades de la identidad comenzando con $U(1) = U_0$. Luego definimos las vecindades $U(\frac{m}{2^n})$, en donde n es fijo y $m = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$, de la siguiente manera:

$$U\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = U_{n+1}, \tag{1.4}$$

$$U\Big(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\Big) = U\Big(\frac{m}{2^n}\Big)U_{n+1}, \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2^n - 1). \tag{1.5}$$

Hemos definido por inducción un sistema de vecindades $U(r)$ de la identidad, en donde r recorre todas las fracciones diádicas positivas. Además, definimos

$$U\Big(\frac{m}{2^n}\Big) = G \qquad \text{para } m > 2^n. \tag{1.6}$$

Ahora probaremos por inducción que

$$U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U\left(\tfrac{1}{2^n}\right) \subseteq U\left(\tfrac{m+1}{2^n}\right). \tag{1.7}$$

En efecto, si $m \geq 2^n$, entonces esta relación se deduce directamente de 1.6. Cuando $n = 1$ tenemos $U(\frac{1}{2})U(\frac{1}{2}) = U_1U_1 \subseteq U_0 = U(1)$.

Ahora tomaremos dos casos: m par y m impar. Supongamos primero que $m = 2k$, donde k es un entero positivo, y que la relación vale para $p < n$, entonces en virtud de las relaciones (1.1), (1.4) y (1.5) tenemos que $U(\frac{m}{2^n})U(\frac{1}{2^n}) = U(\frac{k}{2^{n-1}})U_n = U(\frac{2k+1}{2^n}) = U(\frac{m+1}{2^n})$; y si ahora $m = 2k+1$,

$$\begin{aligned} U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U\left(\tfrac{1}{2^n}\right) &= U\left(\tfrac{2k+1}{2^n}\right)U_n = U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U_nU_n \subseteq U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U_{n-1} \\ &= U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) \subseteq U\left(\tfrac{k+1}{2^{n-1}}\right) = U\left(\tfrac{m+1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Con esto terminamos la verificación de (1.7).

Supongamos que tenemos un par de fracciones diádicas tales que $0 < r < s$. Entonces podemos suponer que $r = \frac{k}{2^n}$ y $s = \frac{m}{2^n}$, donde $k < m$, por lo tanto, de (1.7) y (1.4) se deduce que $U(r) \subseteq U(s)$. Sea ahora $x \in G$, y definimos $f(x)$ como la máxima cota inferior de todas las fracciones r para las cuales $x \in U(r)$. Como $U(r) = G$ si $r > 1$, entonces $f(x) \leq 1$ para todos los elementos de G. De la definición de f vemos que si $f(x) < r$, entonces $x \in U(r)$. Puesto que $e \in U(\frac{1}{2^n})$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, deducimos que $f(e) = 0$.

Como la función $f(x)$ está acotada en G, podemos, de acuerdo con el lema 1.26, definir la seudonorma N en el grupo G mediante la fórmula $N(x) = \sup_{y\in G} |f(yx) - f(y)|$, y probaremos que esta seudonorma cumple con la condición (1.3).

En efecto, si $N(x) < \frac{1}{2^i}$ para alguna x de G, como $f(e) = 0$, obtenemos, debido a la definición de la seudonorma N, $f(x) = |f(ex) - f(e)| \leq N(x) < \frac{1}{2^i}$. De acuerdo con la observación mencionada antes, se deduce que $x \in U(\frac{1}{2^i}) = U_i$ y, por lo tanto, $B_N(\frac{1}{2^i}) \subseteq U_i$.

Por otro lado, si $x \in U_i$ y y es un elemento arbitrario de G, se puede hallar un número natural $k \geq 1$ tal que $\frac{k-1}{2^i} \leq f(y) < \frac{k}{2^i}$.

Sin embargo, de acuerdo con la observación anterior, tenemos que $y \in U(\frac{k}{2^i})$ y, por tanto, $yx \in U(\frac{k}{2^i})U_i$, $yx^{-1} \in U(\frac{k}{2^i})U_i^{-1}$; como la vecindad U_i es simétrica, y de (1.4) y (1.7), obtenemos $yx \in U(\frac{k+1}{2^i})$, $yx^{-1} \in U(\frac{k+1}{2^i})$.

En consecuencia, $f(yx) \leq \frac{k+1}{2^i}$, $f(yx^{-1}) \leq \frac{k+1}{2^i}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} f(yx) - f(y) &\leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}, \\ f(yx^{-1}) - f(y) &\leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

Las relaciones anteriores valen para todo y en G y, por lo tanto, sustituyendo yx en lugar de y en la segunda, obtenemos $f(y) - f(yx) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$, y por consiguiente, $|f(yx) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ para $y \in G$ arbitrario, de donde $N(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$, y de esta forma $U_i \subseteq \{x \in G : N(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}}\}$, con lo cual hemos demostrado la validez de la relación (1.2) para la seudonorma N. La misma condición (1.2) implica que N es continua en la identidad e del grupo G, y por el lema 1.30, N es continua en todo el grupo G.

Por último, observemos que si el conjunto U_i $(i = 0, 1\ldots)$ cumple la condición (1.3), entonces esta misma condición la cumplen todos los conjuntos $U(r)$ definidos inductivamente según las fórmulas (1.4), (1.5) y (1.6). No obstante, para la función f definida antes tenemos

$$f(y^{-1}xy) = f(x) \quad \text{para cualesquier } x, y \in G.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} N(y^{-1}xy) &= \sup_{z\in G} |f(zy^{-1}xy) - f(z)| \\ &= \sup_{z\in G} |f(yzy^{-1}x) - f(yzy^{-1})| = N(x). \end{aligned}$$

Como z recorre todos los elementos del grupo G, yzy^{-1} también recorre todos los elementos del grupo G. De esta forma, en el caso especial que consideramos, la seudonorma N es invariante y el lema 1.31 queda demostrado. □

El siguiente resultado dice que la topología de un grupo se puede definir mediante seudonormas continuas. Lo aplicaremos para probar que todo grupo topológico es completamente regular (Teorema 1.33) y todo grupo primero numerable es metrizable (Teorema 1.37).

TEOREMA 1.32. *Sean G un grupo topológico y U una vecindad de la identidad de G. Entonces, en el grupo topológico G existe una seudonorma continua N tal que el conjunto $U_N = \{x \in G : N(x) < 1\}$ está contenido en la vecindad U.*

DEMOSTRACIÓN. Si suponemos que $U_0 = U \cap U^{-1}$, tomemos una sucesión $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ de vecindades simétricas de la identidad en el grupo G que cumple la condición 1.1 del lema 1.31. De acuerdo con esto, en el grupo G existe una seudonorma continua N tal que

$$(1.8) \qquad B_N\left(\tfrac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq \left\{x \in G : N(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}}\right\} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Para $i = 0$ deducimos de 1.8 que $U_N = B_N(1) \subseteq U_0 \subseteq U$ y, por lo tanto $U_N \subseteq U$. □

Como se sabe, existen espacios topológicos Hausdorff no regulares y además hay espacios regulares Hausdorff que no son completamente regulares (Ejs. 1.5.7 y 2.4.21 de [**6**]). La presencia de la estructura de grupo impide estas situaciones: según el lema 1.7, todo grupo topológico Hausdorff es regular. A partir del teorema 1.32, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 1.33. *Todo grupo topológico T_0 es completamente regular.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x un elemento arbitrario y U una vecindad de éste en el grupo topológico G. Debemos mostrar la existencia de una función continua f en G tal que $f(x) = 0$ y $\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U$.

Con este fin, consideremos la vecindad $x^{-1}U$ de la identidad en el grupo G. Por el teorema 1.32, en el grupo G existe una seudonorma continua N tal que $B_N(1) \subseteq x^{-1}U$. Sin embargo, la función f definida por la fórmula $f(y) = N(x^{-1}y)$ es continua en G, $f(x) = 0$ y de $f(y) < 1$ se deduce que $x^{-1}y \in x^{-1}U$; por lo tanto, $y \in U$, es decir, $\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U$, que es lo que se quería demostrar. □

Otra consecuencia importante del teorema 1.32 es que la topología de cualquier grupo topológico se puede generar mediante una familia de seudonormas. En efecto, si U es cualquier vecindad de la identidad, por el teorema 1.32 existe una seudonorma continua N tal que $U_N \subseteq U$. Esto implica que todas las vecindades de la identidad se pueden generar mediante alguna seudonorma continua.

Ahora estudiaremos grupos que cumplen con el primer axioma de numerabilidad y su relación con la existencia de métricas invariantes por un lado en grupos topológicos.

DEFINICIÓN 1.34. Sea G un grupo con una métrica ρ. La métrica ρ es *invariante por la izquierda* si la relación $\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$ se cumple para cualesquier x, y y z elementos de G. De una manera similar se define una *métrica invariante por la derecha*. Una métrica en el grupo G que es simultáneamente invariante por la izquierda y por la derecha recibe el nombre de *métrica invariante*.

Sea G un grupo topológico con una métrica continua ρ. Diremos que ρ *genera* la topología de G si la familia $\{O_\rho(x, \varepsilon) : x \in G, \varepsilon > 0\}$ es una base para la topología original de G, donde

$$O_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in G : \rho(y, x) < \varepsilon\} \quad \text{para } x \in G \text{ y } \varepsilon > 0.$$

Si en un grupo topológico G existe una métrica invariante por la izquierda ρ que genera su topología, entonces en este grupo existe una métrica invariante por la derecha ρ_1 que genera la topología de G definida por la fórmula $\rho_1(x, y) = \rho(x^{-1}, y^{-1})$. El recíproco también es válido.

En los siguientes resultados relacionaremos los conceptos de métrica y norma. Para ello, las métricas invariantes por algún lado son las más adecuadas, y más aún las métricas invariantes porque existe una relación sencilla entre éstas y las normas en un grupo topológico. Sea ρ una métrica continua invariante por la derecha en grupo G; entonces la función $N(x) = \rho(x, e)$ es una norma continua en el grupo G. En efecto, es evidente que $N(e) = 0$ y

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \rho(xy^{-1}, e) = \rho(x, y) \\ &\leq \rho(x, e) + \rho(y, e) = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Por último, si $x \neq e$, entonces $N(x) = \rho(x, e) > 0$. La continuidad de N es evidente.

Ahora demostraremos un teorema sobre metrización de grupos topológicos. Por supuesto, un espacio topológico metrizable cumple con el primer axioma de numerabilidad. En general, la afirmación inversa no es verdadera. Existen espacios no metrizables que son normales y cumplen el primer axioma de numerabilidad, por ejemplo la flecha de Sorgenfrey (véase el Ej. 1.5.17 de [**6**]). Si se trata de grupos topológicos, la afirmación inversa es verdadera.

TEOREMA 1.35. *Todo grupo topológico G que cumple el primer axioma de numerabilidad posee una métrica continua invariante por la derecha que genera la topología de G.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es un grupo topológico primero numerable, entonces existe una base numerable $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de la identidad e de G. Se puede elegir como sistema de vecindades de e una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ tales que $U_i^{-1} = U_i$, y $U_{i+1}^2 \subseteq U_i \cap V_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por el lema 1.31, para esta sucesión existe una norma N continua en G tal que $O_n(e) = \{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\} \subseteq U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $O_n \subseteq U_n \subseteq V_n$, la familia $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de e. Es fácil ver que la función $\rho\colon G \times G \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = N(xy^{-1})$ es una métrica continua invariante por la derecha en el grupo G. Por ello, la familia $\{O_n(e) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades de la identidad de G, y al ser ρ invariante por la derecha concluimos que la métrica ρ genera la topología de este grupo. $\square$

DEFINICIÓN 1.36. El conjunto A en el grupo G se llama *invariante* si para cualquier $x \in G$ se cumple la igualdad $x^{-1}Ax = A$.

TEOREMA 1.37. *Un grupo topológico primero numerable posee una métrica invariante que genera su topología si y sólo si tiene una base de vecindades de la identidad formada por conjuntos invariantes.*

3. Acotación en grupos topológicos

El resultado más importante de esta sección es el teorema de encaje (Teo. 1.43). Este resultado caracteriza a los grupos τ-acotados, el objeto de estudio de esta sección, como subgrupos de productos de grupos con peso $\leq \tau$. Sin embargo, el lema 1.42 tiene una importancia especial porque es una herramienta fundamental para el desarrollo de uno de los temas más importantes de esta tesis: los grupos $\mathbb{R}$-factorizables.

DEFINICIÓN 1.38. Sea τ un cardinal infinito. Decimos que un grupo topológico G es *τ-acotado* si para toda vecindad U de la identidad en G existe un subconjunto $K \subseteq G$ con $|K| \leq \tau$ tal que $K \cdot U = G$.

Es fácil ver que los grupos σ-compactos y de Lindelöf son $\aleph_0$-acotados. Más aún, los subgrupos de los grupos de Lindelöf también son $\aleph_0$-acotados. En la primera proposición enunciamos las propiedades más elementales de los grupos τ-acotados.

PROPOSICIÓN 1.39. (*a*) *Todo subgrupo de un grupo τ-acotado es τ-acotado.*
(*b*) *Si $\pi\colon G \to H$ es un homomorfismo continuo de un grupo τ-acotado G sobre un grupo topológico H, entonces H es τ-acotado.*
(*c*) *El producto cartesiano de una cantidad arbitraria de grupos τ-acotados es τ-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. No probaremos los puntos (a) y (b) porque sus demostraciones son elementales y muy similares a las de los teoremas 3.1 y 3.3.

(c) Sea $G = \prod_{i \in I} G_i$ un producto cartesiano de grupos τ-acotados G_i. Si U es una vecindad de la identidad e en G, existe un conjunto abierto canónico V en G tal que $e \in V \subseteq U$. Sean $i_1, \ldots, i_n \in I$ las coordenadas de las cuales depende el conjunto V, es decir, las coordenadas que satisfacen la igualdad

$$V = p_{i_1}^{-1} p_{i_1}(V) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1} p_{i_n}(V), \tag{$*$}$$

donde p_i es la proyección de G sobre el factor G_i, $i \in I$. Note que $V_k = p_{i_k}(V)$ es una vecindad de la identidad en G_{i_k} para cada $k \leq n$, y escoja un subconjunto C_k con $|C_k| \leq \tau$ de G_{i_k} de manera que $C_k \cdot V_k = G_{i_k}$. Defina el subconjunto K de G mediante $K = \prod_{i \in I} K_i$, donde $K_i = C_k$ si $i = i_k$ para algún $k \leq n$, y $K_i = \{e_{G_i}\}$ en caso contrario. Es claro que $|K| = |C_1 \times \cdots \times C_n| \leq \tau$. De ($*$) se deduce que $K \cdot V = G$ y, consecuentemente, $K \cdot U = G$. Esto termina la demostración. □

LEMA 1.40. *Sea H un grupo topológico τ-acotado con carácter $\leq \tau$. Entonces $w(H) \leq \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Denote con $\mathcal{H}$ una base local de la identidad e de H que cumpla con $|\mathcal{H}| \leq \tau$. Como H es τ-acotado, para todo $U \in \mathcal{H}$ existe un conjunto $S_U \subseteq G$ con $|S_U| \leq \tau$ tal que $S_U \cdot U = G$. Para toda $U \in \mathcal{H}$, hacemos $\mathcal{B}_U = \{xU : x \in S_U\}$ y definimos $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{H}\}$. Entonces $|\mathcal{B}| \leq \tau$ y afirmamos que $\mathcal{B}$ es una base de H.

En efecto, sea O una vecindad de un punto $a \in G$. Podemos hallar U, $V \in \mathcal{H}$ tales que $aU \subseteq O$ y $V^{-1} \cdot V \subseteq U$. Existe $x \in S_V$ tal que $a \in xV$, por lo tanto, $x \in aV^{-1}$. Entonces tenemos

$$xV \subseteq (aV^{-1}) \cdot V = a(V^{-1} \cdot V) \subseteq aU \subseteq O,$$

es decir, xV es una vecindad abierta de a y $xV \subseteq O$. Por último, observe que $xV \in \mathcal{B}$. $\square$

LEMA 1.41. *Suponga que una familia $\mathcal{Q}$ de seudonormas continuas sobre un grupo topológico G y un conjunto $S \subseteq G$ cumplen las condiciones siguientes:*

(*a*) $N_1 + N_2 \in \mathcal{Q}$ *para todas las* N_1, $N_2 \in \mathcal{Q}$;

(*b*) *Si* $N \in \mathcal{Q}$ *y* $x \in S$, *entonces la seudonorma* N_x *definida por* $N_x(g) = N(xgx^{-1})$, *para todo* $g \in G$, *pertenece a* $\mathcal{Q}$;

(*c*) $U_N \cdot S = G$ *para cada* $N \in \mathcal{Q}$, *donde* $U_N = \{x \in G : N(x) < 1\}$.

Entonces $K = \bigcap_{N \in \mathcal{Q}} U_N$ *es un subgrupo normal cerrado de* G. *Más aún, si* $\pi\colon G \to G/K$ *es el homomorfismo cociente, entonces la familia* $\{\pi(U_n) : N \in \mathcal{Q}\}$ *es una base local en la identidad para una topología Hausdorff de grupo sobre* G/K *contenida en la topología cociente.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos que K es un subgrupo normal cerrado de G. Denote con $\mathcal{F}$ la familia $\{U_N : N \in \mathcal{Q}\}$. Observe que todos los conjuntos de $\mathcal{F}$ son simétricos. Afirmamos que $\mathcal{F}$ cumple la condición (3) del teorema 1.8, es decir,

$$\text{para todo } U \in \mathcal{F} \text{ existe } V \in \mathcal{F} \text{ tal que } V \cdot V^{-1} \subseteq U. \qquad (*)$$

En efecto, todo $U \in \mathcal{F}$ tiene la forma $U = U_N$ para alguna $N \in \mathcal{Q}$. Por (a), $2N = N + N \in \mathcal{Q}$, así que $V = U_{2N} \in \mathcal{F}$. Si x, $y \in V$, entonces $N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, por lo tanto, $xy^{-1} \in U$. Esto prueba que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$.

Es claro que la identidad e de G pertenece a K. Sean x, $y \in K$ y $U \in \mathcal{F}$ abitrarios. Por $(*)$, existe $V \in \mathcal{F}$ con $V \cdot V^{-1} \subseteq U$, de donde, $xy^{-1} \in V \cdot V^{-1} \subseteq U$. Esto implica que $K \cdot K^{-1} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = K$, por lo tanto, K es un subgrupo de G.

Para probar que K es normal en G, probaremos que la familia $\mathcal{F}$ satisface la condición (5) del teorema 1.8:

$$\text{para todo } U \in \mathcal{F} \text{ y } x \in G, \text{ existe } W \in \mathcal{F} \text{ tal que } xWx^{-1} \subseteq U. \qquad (**)$$

Sean $U \in \mathcal{F}$ y $x \in G$. Por $(*)$, podemos hallar $V \in \mathcal{F}$ tal que $V^3 \subseteq U$. Existe $N \in \mathcal{Q}$ tal que $V = U_N$. Por (c), existe $y \in S$ tal que $x \in Vy$ y, en consecuencia, $xy^{-1} \in V$ y $yx^{-1} \in V^{-1} = V$. De (b) se deduce que $N_y \in \mathcal{Q}$ y, por lo tanto, el conjunto $W = \{g \in G : N_y(g) < 1\}$ pertenece a $\mathcal{F}$. Observe que $yWy^{-1} \subseteq V$ por la definición de W. Ahora bien, de esto deducimos que

$$xWx^{-1} = (xy^{-1}) \cdot (yWy^{-1}) \cdot (yx^{-1}) \subseteq V \cdot V \cdot V \subseteq U.$$

Esto prueba $(**)$. Para probar que K es normal en G, tomamos $U \in \mathcal{F}$ y $x \in G$. Por $(**)$, existe $W \in \mathcal{F}$ con $xWx^{-1} \subseteq U$, de donde, $xKx^{-1} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = K$. En consecuencia, K es un subgrupo normal de G.

Observe que si $V^2 \subseteq U$, entonces $\overline{U} \subseteq U$, para todo par de vecindades U, $V \in \mathcal{F}$ (podemos aplicar la argumentación del teorema 1.5). Procediendo como en la demostración de $(*)$, podemos probar que para todo $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Por lo tanto, como $K \subseteq V$, $\overline{K} \subseteq \overline{V} \subseteq U$. De donde $\overline{K} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = K$, es decir, K es cerrado en G.

Para probar que la familia $\mathcal{H} = \{\pi(U) : U \in \mathcal{F}\}$ es una base en la identidad $\bar{e}$ de G/K para una topología de grupo Hausdorff es suficiente verificar que $\mathcal{H}$ cumple las condiciones (1) a (5) del teorema 1.8.

1. Probemos que $\bigcap \mathcal{H} = \{\bar{e}\}$. Es claro que $\bar{e} \in \bigcap \mathcal{H}$ y que $\pi^{-1}(\bar{e}) = K$. Sea $U \in \mathcal{F}$ arbitrario. Por $(*)$, existe $V \in \mathcal{F}$ con $V \cdot V^{-1} = V^2 \subseteq U$, de donde $\pi^{-1}\pi(V) = K \cdot V = V^2 \subseteq U$. Como $\bar{e} \in \pi(V)$ para cada $V \in \mathcal{F}$, tenemos

$$K = \pi^{-1}(\bar{e}) \subseteq \pi^{-1}(\bigcap \mathcal{H}) = \bigcap\{\pi^{-1}\pi(V) : V \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = K.$$

Esto implica de inmediato que $\bigcap \mathcal{H} = \{e\}$.

2. Para todo par U_1, $U_2 \in \mathcal{H}$, existe $V \in \mathcal{H}$ con $V \subseteq U_1 \cap U_2$. Primero observe que la misma condición se cumple para $\mathcal{F}$ en lugar de $\mathcal{H}$. En efecto, Si O_1, $O_2 \in \mathcal{F}$, existen N_1, $N_2 \in \mathcal{Q}$ tales que $O_i = \{g \in G : N_i(g) < 1\}$, $i = 1, 2$. Por (a), la seudonorma $N = N_1 + N_2$ pertenece a $\mathcal{Q}$, así el conjunto $W = \{g \in G : N(g) < 1\}$ está en $\mathcal{F}$. Observe que $N_i(g) < N(g) < 1$ para todo $g \in W$ $(i = 1, 2)$, de donde $W \subseteq O_1 \cap O_2$.

Dados U_1, $U_2 \in \mathcal{H}$ arbitrarios, elija O_1, $O_2 \in \mathcal{F}$ con $\pi(O_i) = U_i$, $i = 1, 2$. Por lo demostrado en el párrafo anterior, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \subseteq O_1 \cap O_2$. Por lo tanto, $\pi(W) \in \mathcal{H}$ y

$$\pi(W) \subseteq \pi(O_1 \cap O_2) \subseteq \pi(O_1) \cap \pi(O_2) \subseteq U_1 \cap U_2.$$

3. Para todo $U \in \mathcal{H}$, existe $V \in \mathcal{H}$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$. En efecto, para $U \in \mathcal{H}$, elegimos U_1, $V_1 \in \mathcal{F}$ tales que $\pi(U_1) = U$ y $V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq U_1$. Entonces $V = \pi(V_1) \in \mathcal{H}$ y $V \cdot V^{-1} \subseteq \pi(V_1 \cdot V_1^{-1}) \subseteq \pi(U_1) \subseteq U$.

4. Para todo $U \in \mathcal{H}$ y $a \in U$, existe $V \in \mathcal{H}$ con $aV \subseteq U$. Es suficiente probar que la condición se cumple para $\mathcal{F}$ en lugar de $\mathcal{H}$. Sean $U \in \mathcal{F}$ y $a \in U$ arbitrarios. Por la definición de $\mathcal{F}$, existe $N \in \mathcal{Q}$ tal que $U = \{x \in G : N(x) < 1\}$. Como $a \in U$, tenemos que $N(a) < 1$ y, por lo tanto, podemos hallar $k \in \mathbb{N}^+$ con $\frac{1}{k} < 1 - N(a)$. Entonces $M = kN \in \mathcal{Q}$ por (a), y definimos $V = U_M$, es decir, $V = \{x \in G : M(x) < 1\}$. Es claro que $V \in \mathcal{F}$. Si $x \in V$, entonces $N(ax) \leq N(a) + N(x) < (1 - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k} = 1$, de donde $ax \in U$. Esto prueba que $aV \subseteq U$.

5. Para todo $U \in \mathcal{H}$ y $a \in G/K$, existe $V \in \mathcal{H}$ tal que $aVa^{-1} \subseteq U$. Esto es consecuencia inmediata de $(**)$.

La deducimos que $\mathcal{H}$ es una base en la identidad $\bar{e}$ de G/K para una topología de grupo Hausdorff del teorema 1.8 y es claro que esta topología es más débil que la topología cociente. □

LEMA 1.42. *Sea U una vecindad abierta de la identidad de un grupo τ-acotado G. Entonces existe un homomorfismo continuo $\pi\colon G \to H$ de G sobre* *un grupo topológico H con $w(H) \leq \tau$ y una vecindad abierta V de la identidad de H tales que $\pi^{-1}(V) \subseteq U$.*

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es construir una familia $\mathcal{Q}$ de seudonormas continuas sobre G y un subconjunto $S \subseteq G$, ambos de cardinalidad menor o igual que τ, que cumplan las condiciones (a) a (c) del lema 1.41. Procederemos por inducción sobre $n \in \omega$.

Sea $\mathcal{P}$ la familia de todas las seudonormas continuas de G. Para toda $N \in \mathcal{P}$ y $k \in \mathbb{N}^+$, definimos $U(N,k) = \{x \in G : N(x) < 1/k\}$. Denote con $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos de G de la forma $U(N,k)$, donde $N \in \mathcal{P}$ y $k \in \mathbb{N}^+$. Es claro que $\mathcal{B}$ consta de vecindades abiertas y simétricas de la identidad de G. Para toda $N \in \mathcal{P}$, defina $\mu(N) = \{U(N,k) : k \in \mathbb{N}^+\}$. Observe que $\mu(N) \subseteq \mathcal{B}$.

Por el teorema 1.32, existe $N_0 \in \mathcal{P}$ tal que $U_0 = U(N_0, 1) \subseteq U$. Defina $\mathcal{F}_0 = \mu(N_0)$ y $\mathcal{Q}_0 = \{N_0\}$. Como el grupo G es τ-acotado, podemos hallar un subconjunto S_0 de G con $|S_0| \leq \tau$ tal que $V \cdot S_0 = G$ para cada $V \in \mathcal{F}_0$.

Suponga que para alguna $n \in \omega$, hemos definido las familias $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{B}$ y el conjunto $S_n \subseteq G$ que satisfacen las condiciones siguientes:

(0) $|\mathcal{Q}_n| \leq \tau$, $|\mathcal{F}_n| \leq \tau$ y $|S_n| \leq \tau$;
(1) $\mathcal{F}_n = \bigcup\{\mu(N) : N \in \mathcal{Q}_n\}$;
(2) $V \cdot S_n = G$ para cada $V \in \mathcal{F}_n$.

Como $|\mathcal{Q}_n| \cdot |S_n| \leq \tau$, podemos aplicar el lema 1.25 y el lema 1.29 para definir una subfamilia $\mathcal{Q}_{n+1} \subseteq \mathcal{P}$ que satisface

(3) $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q}_{n+1}$ y $|\mathcal{Q}_{n+1}| \leq \tau$;
(4) Si N_1, $N_2 \in \mathcal{Q}_n$, entonces $N_1 + N_2 \in \mathcal{Q}_{n+1}$;
(5) Si $N \in \mathcal{Q}_n$ y $x \in S_n$, entonces $N_x \in \mathcal{Q}_{n+1}$.

Definamos $\mathcal{F}_{n+1} = \bigcup\{\mu(N) : N \in \mathcal{Q}_{n+1}\}$. Es fácil ver que $|\mathcal{F}_{n+1}| \leq |\mathcal{Q}_{n+1}| \cdot \aleph_0 \leq \tau$. Como el grupo G es τ-acotado, existe un subconjunto S_{n+1} de G con $S_n \subseteq S_{n+1}$ y $|S_{n+1}| \leq \tau$ tal que $V \cdot S_{n+1} = G$ para cada $V \in \mathcal{F}_{n+1}$. Es claro que $\mathcal{Q}_{n+1}$, $\mathcal{F}_{n+1}$ y S_{n+1} cumplen (0) a (2).

Ahora definimos las familias $\mathcal{Q} = \bigcup\{\mathcal{Q}_n : n \in \omega\}$ y $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ y el conjunto $S = \bigcup\{S_n : n \in \omega\}$. Es fácil ver que $|\mathcal{Q}| \cdot |\mathcal{F}| \cdot |S| \leq \tau$. Observe que $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q}_{n+1}$ y $S_n \subseteq S_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Ahora aplicamos (2) a (5) para deducir que $\mathcal{Q}$ y S cumplen las condiciones (a) a (c) del lema 1.41.

Por el lema 1.41, $K = \bigcap \mathcal{F}$ es un subgrupo normal cerrado de G. Sea $\pi \colon G \to G/K$ el homomorfismo cociente. Definimos $\mathcal{H} = \{\pi(U) : U \in \mathcal{F}\}$. Observe que $|\mathcal{H}| \leq \tau$. De nuevo, por el lema 1.41, $\mathcal{H}$ es una base de la identidad para una topología Hausdorff $\mathcal{T}$ de grupo topológico sobre G/K. Denote con H el grupo G/K con la topología $\mathcal{T}$. De la definición de $\mathcal{T}$, deducimos que el carácter de H no es mayor que τ. La proposición 1.39 (b) implica que el grupo H es τ-acotado. Aplicamos el lema 1.40 para deducir que $w(H) \leq \tau$.

Para finalizar la prueba, elegimos $O \in \mathcal{F}$ tal que $O^2 \subseteq U_0 \subseteq U$ y hac- os $V = \pi(O)$. Entonces V es abierto en H, la identidad $\bar{e}$ de H pertenece a y

$$\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}\pi(O) = O \cdot K \subseteq O^2 \subseteq U.$$

El lema está probado. □

TEOREMA 1.43 (Teorema de encaje). *Un grupo topológico G es τ-acotado si y sólo si G se puede encajar como un subgrupo topológico en un producto cartesiano de grupos topológicos de peso $\leq \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que todo grupo topológico de peso $\leq \tau$ es τ-acotado. En consecuencia, la proposición 1.39 implica que todo subgrupo de un producto cartesiano $\prod_{i\in I} H_i$ de grupos topológicos H_i que cumplen $w(H_i) \leq \tau$ para cada $i \in I$ es τ-acotado.

Supongamos ahora que G es un grupo topológico τ-acotado con identidad e. Denote con $\mathcal{B} = \{U_i : i \in I\}$ la familia de todas las vecindades abiertas de e en G. Por el lema 1.42, para toda $i \in I$ existe un homomorfismo continuo $\pi_i \colon G \to H_i$ de G sobre un grupo topológico H_i con $w(H_i) \leq \tau$ tal que $\pi_i^{-1}(V_i) \subseteq U_i$ para alguna vecindad V_i de la identidad en H_i. Sea $\Pi = \prod_{i\in I} H_i$ el producto cartesiano de los grupos H_i y $\varphi \colon G \to \Pi$ el producto diagonal de los epimorfismos π_i, $i \in I$. Es fácil ver que φ es un homomorfismo continuo de G en Π. Sólo queda demostrar que φ es un encaje topológico.

Sea $H = \varphi(G)$. Elija una vecindad arbitraria U de e en G. Existe $i \in I$ tal que $U_i \subseteq U$ y, por lo tanto, $\pi_i^{-1}(V_i) \subseteq U_i$ por la elección de la vecindad abierta V_i de la identidad H_i. Denote con p_i la proyección de Π sobre el factor H_i. El conjunto $W = p_i^{-1}(V_i)$ es una vecindad abierta de la identidad en Π, donde $p_i \colon \Pi \to H_i$ es la proyección. Como φ es el producto diagonal de los homomorfismos π_j, $j \in I$, tenemos $\pi_i = p_i \circ \varphi$. En consecuencia, $\varphi^{-1}(W) = \pi_i^{-1}(V_i) \subseteq U_i \subseteq U$. En particular, $W' = W \cap H$ es una vecindad abierta de la identidad en H que satisface $\varphi^{-1}(W') \subseteq U$.

Hemos demostrado que para todo conjunto abierto U en G que contiene a e, existe un conjunto abierto W' en H que contiene a la identidad de H tal que $\varphi^{-1}(W') \subseteq U$. Esto implica de inmediato que $\varphi \colon G \to H$ es un isomorfismo continuo y su inversa φ^{-1} también es continua. Por lo tanto, $\varphi \colon G \to H$ es un isomorfismo y un encaje topológico. □

4. Cardinales invariantes elementales

Ahora estudiaremos algunas propiedades de las funciones cardinales definidas en grupos topológicos. Utilizamos $w(X)$, $\mathrm{nw}(X)$, $d(X)$, $\chi(X)$, $\psi(X)$ y $l(X)$ para denotar el peso, la densidad, el carácter, el seudocarácter y el número de Lindelöf de un espacio X. La primera propiedad, respecto a las funciones cardinales, que encuentra una expresión muy especial en el caso de grupos topológicos, está descrita en el siguiente teorema:

LEMA 1.44. *Sea G un grupo topológico. Suponga que D es un subespacio denso en G y que U es una vecindad de la identidad e_G, entonces $G = D \cdot U$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in G$. Dado que D es denso y gU^{-1} es abierto no vacío, existe $x \in D \cap gU^{-1}$. Por lo tanto, $g \in xU \subseteq D \cdot U$. Al ser g un elemento arbitrario de G concluimos que $G = D \cdot U$. □

El *índice de acotación* de un grupo topológico G, el cual denotaremos por $ib(G)$, es el cardinal mínimo $\tau \geq \aleph_0$ tal que G es τ-acotado. Es fácil ver que $ib(G) \leq l(G)$. El resultado siguiente es una reformulación del lema 1.40.

TEOREMA 1.45. *Sea G un grupo topológico. Entonces $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$.*

COROLARIO 1.46. *Si G es un grupo topológico, entonces $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$.*

Antes de continuar presentamos una desigualdad cardinal muy importante válida en cualquier grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.47. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal cerrado de G. Entonces $w(H) \leq w(G)$ y $w(G/H) \leq w(G)$. Además $\chi(G/H) \leq \chi(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad $w(H) \leq w(G)$ es evidente. Para probar que $w(G/H) \leq w(G)$ note que si U es abierto en G, entonces $U^* = \pi(U)$ es abierto en G/H, donde π es el homomorfismo canónico $\pi \colon G \to G/H$. Además, si $\mathcal{B}$ es una base para G, $\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para G/H. Así es que $w(G/H) \leq w(G)$. La desigualdad $\chi(G/H) \leq \chi(G)$ se prueba de la misma forma. □

El *i-peso* de un espacio de Tikhonov X, el cual denotaremos con $iw(X)$ se define como el cardinal mínimo τ tal que existe una función biyectiva y continua de X sobre un espacio de Tikhonov de peso τ. Ahora utilizaremos el índice de acotación para dar una estimación del i-peso de un grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.48. *Sea G un grupo topológico. Entonces existe un isomorfismo continuo $\varphi \colon G \to H$ de G sobre un grupo topológico H que satisface $w(H) \leq ib(G) \cdot \psi(G)$. Por lo tanto, $iw(G) \leq ib(G) \cdot \psi(G)$ para todo grupo topológico G.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = ib(G) \cdot \psi(G)$. Existe una familia $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in \tau\}$ de vecindades abiertas de la identidad e en G tal que $\bigcap \gamma = \{e\}$. Por el lema 1.42, para toda $\alpha \in \tau$ podemos hallar un homomorfismo continuo $\pi_\alpha \colon G \to H_\alpha$ sobre un grupo topológico H_α con $w(H_\alpha) \leq \tau$ tal que $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$ para alguna vecindad abierta V_α de la identidad en H_α.

Sea $\varphi \colon G \to \prod_{\alpha \in \tau} H_\alpha$ el producto diagonal de los homomorfismo π_α, $\alpha \in \tau$. Si $H = \varphi(G)$, entonces es claro que $w(H) \leq \tau$ y de la elección de γ se deduce que $\varphi \colon G \to H$ es un homomorfismo uno a uno, es decir, un isomorfismo continuo. Por lo tanto, $iw(G) \leq \tau$. □

Ahora definiremos un invariante cardinal llamado *número de Nagami* de un espacio de Tikhonov X, el cual denotaremos con $\mathrm{Nag}(X)$. Este cardinal topológico es muy importante en los teoremas de factorización de funciones continuas. Llamaremos subconjunto G_τ de X, o subconjunto de tipo G_τ, a una intersección de a lo más τ subconjuntos abiertos de X.

DEFINICIÓN 1.49. Sean X es un espacio de Tikhonov y $\mathcal{F}_X$ la familia de todos los subconjuntos cerrados de la compactificación de Čech-Stone βX de X. Hacemos $\mathrm{Nag}(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_X$ y para cualesquier $x \in X$, $y \in \beta X \setminus X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $y \notin B\}$.

El teorema siguiente establece una desigualdad entre el número de Lindelöf y el número de Nagami.

TEOREMA 1.50. *Para todo espacio de Tikhonov X, $l(X) \leq \mathrm{Nag}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la caracterización del número de Lindelöf que dice que $l(X) \leq \tau$ si y sólo si para todo conjunto cerrado $F \subseteq \beta X \setminus X$, existe un conjunto Z de tipo G_τ en βX tal que $F \subseteq Z \subseteq \beta X \setminus X$. Supongamos que $\mathrm{Nag}(X) \leq \tau$ y sea $F \subseteq \beta X \setminus X$ un conjunto cerrado en βX. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_X$ una familia con $|\mathcal{B}| \leq \tau$ que separa puntos de X de puntos del residuo. Podemos suponer que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, porque de no ser así, agregamos todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ sin modificar la cardinalidad de $\mathcal{B}$. Considere un elemento $y \in F$ fijo. Observe que para cada $x \in X$ podemos hallar un conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal $x \in B_x$ y $y \notin B_x$. Más aún, como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y F es compacto, podemos hallar $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x$ y $F \subseteq \beta X \setminus B_x$. Entonces la familia de cerrados $\{B_x : x \in X\}$ tiene cardinalidad $\leq \tau$ y, en consecuencia, $Z = \bigcap_{x \in X}(\beta X \setminus B_x)$ tiene las propiedades deseadas, es decir, Z es G_τ en βX y $F \subseteq Z \subseteq \beta X \setminus X$. □

Si $\mathrm{Nag}(X) \leq \aleph_0$, entonces decimos que X es un Σ-espacio de Lindelöf. El número de Nagami es monótono al tomar subconjuntos cerrados y no crece bajo imágenes continuas. Es claro que $\mathrm{Nag}(X) \leq \aleph_0$ para todo espacio σ-compacto. La clase de los Σ-espacios de Lindelöf es cerrada bajo uniones numerables y productos numerables.

DEFINICIÓN 1.51. Un espacio de Tikhonov X se llama p-espacio de Lindelöf si existe una función perfecta y suprayectiva $f\colon X \to M$ donde M es un espacio métrico separable.

TEOREMA 1.52. *Un espacio de Tikhonov X es un Σ-espacio de Lindelöf si y sólo si existe un p-espacio de Lindelöf Y y una función continua y suprayectiva $g\colon Y \to X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un Σ-espacio de Lindelöf y $\mathcal{B}$ una familia numerable de subconjuntos cerrados de βX que separa puntos de X de puntos de

$\beta X \setminus X$. Supongamos que $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots\}$. Definimos el subespacio Y del producto $\beta X \times \mathbb{N}^\omega$ de la manera siguiente:

$$Y = \{(x, \alpha) \in \beta X \times \mathbb{N}^\omega : x \in \bigcap_{n=0}^{\omega} B_{\alpha(n)} \subseteq X\},$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^\omega$, denotaremos con $U_k(\alpha)$ al conjunto abierto definido por $U_k(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{N}^\omega : \beta(i) = \alpha(i), \text{ para } 0 \leq i \leq k\}$. Es claro que la familia $\{U_k(\alpha) : k \in \omega\}$ es una base local para α en $\mathbb{N}^\omega$. La función $g = p_1 \restriction Y : Y \to X$, donde $p_1 \colon \beta X \times \mathbb{N}^\omega \to \beta X$ es la proyección sobre la primera coordenada, es continua y suprayectiva. Ahora probaremos que $f = p_2 \restriction Y : Y \to M$, donde $p_2 \colon \beta X \times \mathbb{N}^\omega \to \mathbb{N}^\omega$ es la proyección sobre la segunda coordenada y $M = f(Y)$, es una función perfecta. Es claro que es continua. Como $f^{-1}(\alpha) = \bigcap_{n=0}^{\omega} K_{\alpha(n)} \times \{\alpha\}$, la función f tiene fibras compactas. Con el propósito de probar que es cerrada, considere un abierto $V \times W$ que contiene a $f^{-1}(\alpha)$. Por el lema de Shura-Bura, existe $i \in \omega$ tal que $K_{\alpha(i)} \subseteq V$. Sea $j \in \omega$ tal que $U_j\alpha \subseteq W$.. Sea $k = \max\{i, j\}$. Es claro que $f^{-1}(U_k(\alpha)) \subseteq V \times W$. Esto demustra que f es cerrada. El enunciado del teorema se deduce porque $\mathbb{N}^\omega$ y, por lo tanto M, son espacios métricos separables. $\square$

LEMA 1.53. *Sea G un grupo topológico con $l(G) \leq \tau$ y H un subgrupo normal cerrado del tipo G_τ en G. Entonces $\psi(G/H) \leq \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea γ una familia de conjuntos abiertos en G tal que $H = \bigcap \gamma$ y $|\gamma| \leq \tau$. Si $O \in \gamma$ y $x \in G \setminus O$, elija una vecindad abierta y simétrica $U(x, O)$ de la identidad e de G tal que $xU(x, O) \cap H = \varnothing$. La familia $\{xU(x, O) : x \in G \setminus O\}$ cubre al conjunto cerrado $G \setminus O$, por lo tanto, existe una subfamilia $\mu(O)$ de esta familia tal que $G \setminus O \subseteq \bigcup \mu(O)$ y $|\mu(O)| \leq \tau$. Defina $\mu = \bigcup\{\mu(O) : O \in \gamma\}$. Es fácil ver que $|\mu| \leq \tau$.

Denote con π el homomorfismo cociente de G sobre G/H. Afirmamos que $\bigcap\{\pi(U) : U \in \mu\}$ contiene sólo a la identidad $\bar{e}$ de G/H. En efecto, sea $\bar{x} \in G/H$ un elemento arbitrario con $\bar{x} \neq \bar{e}$. Elija $x \in G$ con $\pi(x) = \bar{x}$. Por la definición de μ, existe $U \in \mu$ tal que $xU \cap H = \varnothing$, de donde, $x \notin H \cdot U^{-1} = H \cdot U$. En consecuencia, $\bar{x} = \pi(x) \notin \pi(U)$. Como la familia $\{\pi(U) : U \in \mu\}$ tiene cardinalidad $\leq \tau$, concluimos que $\psi(G/H) \leq \tau$. $\square$

LEMA 1.54. *Sea G un grupo topológico con* $\mathrm{Nag}(G) \leq \tau$. *Entonces para todo subgrupo normal cerrado N de tipo G_τ en G, tenemos* $\mathrm{nw}(G/N) \leq \tau$.

DEMOSTRACIÓN. Sea N un subgrupo normal cerrado de G con $\psi(N, G) \leq \tau$ y $K = G/N$. Como $l(G) \leq \mathrm{Nag}(G) \leq \tau$, el lema 1.53 implica que $\psi(K) \leq \tau$. Además, tenemos $ib(K) \leq l(K) \leq l(H) \leq \tau$. Por lo tanto, por la proposición 1.48, existe un isomorfismo continuo de K sobre un grupo topológico H con $w(H) \leq \tau$. Sin embargo, sabemos que $\mathrm{nw}(X) \leq \mathrm{Nag}(X) \cdot iw(X)$ para cualquier espacio de Tikhonov X (véase el teorema 8 de [**2**]), así, podemos concluir que $\mathrm{nw}(K) \leq \tau$. $\square$

LEMA 1.55. *Sea G un grupo topológico con* $\mathrm{Nag}(G) \leq \tau$. *Entonces los conjuntos de la forma $\pi^{-1}(V)$ forman una base de G, donde $\pi\colon G \to K$ es un epimorfismo continuo y abierto sobre un grupo topológico K con* $\mathrm{nw}(K) \leq \tau$ *y V es un abierto en K.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U una vecindad de la identidad de G. Por el lema 1.42, podemos hallar un epimorfismo continuo $p\colon G \to H$ de G sobre un grupo topológico H con $w(H) \leq \tau$ y una vecindad abierta W de la identidad de H tal que $p^{-1}(W) \subseteq U$. Denote on N el núcleo de p y considere el grupo cociente $K = G/N$. Sea $\pi\colon G \to G/N$ el homomorfismo cociente. Por el lema 1.54, $\mathrm{nw}(K) \leq \tau$. Los grupos K y H son algebráicamente isomorfos, por lo tanto, existe un isomorfismo $\varphi\colon K \to H$ tal que $\varphi \circ \pi = p$. Como π es abierto, el isomorfismo φ es continuo. Por último, con $V = \varphi^{-1}(W)$, tenemos que $\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi^{-1}(W)) = p^{-1}(W) \subseteq U$. ☐

LEMA 1.56. *Sea G un grupo topológico con* $\mathrm{Nag}(G) \leq \tau$. *Entonces para todo conjunto G_δ y cerrado Φ en G, existe un epimorfismo abierto y continuo $\pi\colon G \to K$ sobre un grupo topológico K con* $\mathrm{nw}(K) \leq \tau$ *y un subconjunto cerrado $F \subseteq K$ tal que $\Phi = \pi^{-1}(F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Φ un conjunto G_τ y cerrado en G y γ una familia de conjuntos abiertos en G tales que $\Phi = \bigcap \gamma$ y $|\gamma| \leq \tau$. Tomemos un elemento arbitrario $W \in \gamma$. Existe una cubierta abierta de Φ formada por conjuntos del tipo $\pi^{-1}(V)$ que satisfacen $\pi^{-1}(V) \subseteq W$, donde π y V son como en el lema 1.55. Como $l(\Phi) \leq l(G) \leq \mathrm{Nag}(G) \leq \tau$, esta cubierta de Φ contiene una subcubierta μ_W de cardinalidad $\leq \tau$, digamos $\mu_W = \{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) : \alpha < \tau\}$. Entonces el producto diagonal φ_W de la familia $\{\pi_\alpha : \alpha \leq \tau\}$ es un homomorfismo continuo de G en el producto de una cantidad τ de grupos topológicos con peso de red $\leq \tau$ y, en consecuencia, el grupo $G_W = \varphi_W(G)$ satisface $\mathrm{nw}(G_W) \leq \tau$. Es fácil verificar que el conjunto $O_W = \bigcup \mu_W$ comple con $\Phi \subseteq O_W = \varphi_W^{-1}\varphi_W(O_W) \subseteq W$ y $\varphi_W(O_W)$ es abierto en G_W.

Sea p el producto diagonal de la familia $\{\varphi_W : W \in \gamma\}$. Como $|\gamma| \leq \tau$, el grupo $H = p(G)$ satisface $\mathrm{nw}(H) \leq \tau$. De la definición de p se deduce que $O_W = p^{-1}p(O_W) \subseteq W$ para cada $W \in \gamma$, así que la igualdad $\Phi = \bigcap \gamma$ implica que $\Phi = p^{-1}p(\Phi)$. Como en el lema 1.55, considere el núcleo N del homomorfismo p y el grupo cociente $K = G/N$. Sea $\pi\colon G \to G/N$ el homomorfismo cociente. Entonces existe un homomorfismo continuo $\varphi\colon G/N \to H$ tal que $\varphi \circ \pi = p$. De 1.54 se deduce que $\mathrm{nw}(K) \leq \tau$. Como el homomorfismo π es cociente y $\Phi = \pi^{-1}\pi(\Phi)$, el conjunto $F = \varphi(\Phi)$ es cerrado en K. ☐

CAPÍTULO 2

Grupos $\mathbb{R}$-factorizables

Decimos que un grupo G es $\mathbb{R}$-*factorizable* [**12**], [**13**] si para toda función continua $g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ existen un homomorfismo continuo $\pi\colon G \longrightarrow H$ de G sobre un grupo topológico segundo numerable H y una función continua $h\colon H \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g = h \circ \pi$. En esta definición, podemos sustituir los números reales por cualquier espacio X regular y segundo numerable, dándonos, así, la posibilidad de factorizar funciones continuas $f\colon G \longrightarrow X$ mediante homomorfismos continuos sobre grupos topológicos segundo numerables [**13**]. La clase de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables es muy amplia; contiene a los grupos totalmente acotados, a los grupos σ-compactos (o, en forma más general, a los grupos de Lindelöf, teorema 2.11) y a los subgrupos arbitrarios de los Σ-grupos de Lindelöf (véase teorema 2.7 o [**12**], [**13**]). Sin embargo, se sabe que los subgrupos de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables no heredan esta propiedad [**12**, Ejemplo 2].

Uno de los primeros teoremas sobre grupos $\mathbb{R}$-factorizables establece que cualquier grupo compacto es $\mathbb{R}$-factorizable (págs. 118–119 de [**10**]). El teorema 1.2 de [**5**] implica, en particular, que todo grupo topológico seudocompacto es $\mathbb{R}$-factorizable. Observe que todo grupo seudocompacto es totalmente acotado [**5**, Teorema 11].

1. Teoremas de factorización para grupos topológicos

El objetivo principal de esta sección es probar que todo subgrupo de un Σ-grupo de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable (teorema 2.7).

LEMA 2.1. *Sean X un Σ-espacio de Lindelöf, $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subset X$ y $\{\rho_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una familia de seudométricas continuas sobre X. Entonces existen α, $\beta \in \omega_1$, con $\alpha < \beta$ y $x \in X$ tales que $\rho_\alpha(x, x_\beta) = 0$ y $\rho_\beta(x, x_\alpha) < 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la propiedad de X indicada por el lema se preserva bajo funciones continuas, se puede suponer que X es un p-espacio de Lindelöf (véase 1.52). Entonces X admite un mapeo perfecto y suprayectivo $p^*\colon X \longrightarrow M$, donde $w(M) \le \aleph_0$. Para cada $\alpha \in \omega_1$, sea X_α el espacio métrico asociado con el espacio seudométrico (X, ρ_α) y sea $p_\alpha\colon X \longrightarrow X_\alpha$ la proyección natural. Para cada $\alpha < \omega_1$, considere la función f_α definida por

$$f_\alpha = p^* \Delta(\Delta_{\beta<\alpha} p_\beta)\colon X \longrightarrow M \times \prod_{\beta<\alpha} X_\beta.$$

Como p^* es perfecta, todas las funciones f_α son perfectas. Sean $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $Y_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Observe que para cada $\alpha < \omega_1$, $M \times \prod_{\beta<\alpha} X_\beta$ es un espacio segundo numerable y, por lo tanto, es hereditariamente separable. En consecuencia, existe $s(\alpha) < \omega_1$ tal que $s(\alpha) > 0$ y $f_\alpha(Y_{s(\alpha)})$ es denso en $f_\alpha(Y)$. Definimos úna sucesión haciendo $\beta_0 = 0$ y $\beta_{n+1} = s(\beta_n)$. Si β es el límite de esta sucesión, entonces $f_\beta(Y_\beta)$ es denso en $f_\beta(Y)$. En particular, $f_\beta(x_\beta) \in \overline{f_\beta(Y_\beta)} = f_\beta(\overline{Y_\beta})$. Fije una $x \in \overline{Y}_\beta$ con $f_\beta(x) = f_\beta(x_\beta)$. Para cualquier $\alpha < \beta$, tenemos $\rho_\alpha(x, x_\beta) = 0$ y se deduce de la condición $x \in \overline{Y_\beta}$ que $\rho_\beta(x, x_\alpha) < 1$ para alguna $\alpha < \beta$. El lema está demostrado. □

DEFINICIÓN 2.2. Un espacio X se llama espacio de Mal'tsev si existe una función continua $f\colon X^3 \to X$ tal que $f(x, y, y) = f(y, y, x)$ para todo par x, $y \in X$.

Observe que todo grupo topológico G es un espacio de Mal'tsev. En efecto, la función $f\colon G^3 \to G$ definida por $f(x, y, z) = xy^{-1}z$ cumple las condiciones de la definición 2.2.

TEOREMA 2.3. *Sea X un Σ-espacio de Lindelöf que además es un espacio de Mal'tsev, y sea γ una familia de conjuntos G_δ en X. Entonces existe una subfamilia $\mu \subseteq \gamma$ tal que $|\mu| \le \aleph_0$ y $\overline{\bigcup \mu} = \overline{\bigcup \gamma}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir, que la cerradura de la unión de toda subfamilia numerable de γ está propiamente contenida en $\overline{\bigcup \gamma}$. Si $\mu_0 \subseteq \gamma$ es numerable, entonces existe $C_0 \in \gamma$ tal que $C_0 \setminus \overline{\bigcup \mu_0} \neq \varnothing$. Defina $F_0 = C_0$ y sea U_0 cualquier abierto que contenga a F_0. Sea $\mu_1 = \mu_0 \cup \{C_0\}$. Entonces existe $C_1 \in \gamma$ tal que $C_1 \setminus \overline{\bigcup \mu_1} \neq \varnothing$. Defina $F_1 = C_1 \setminus \overline{\bigcup \mu_1}$ y U_1 como cualquier abierto tal que $C_1 \subseteq U_1$ y $U_1 \cap F_0 = \varnothing$. Repetimos el razonamiento para toda $\alpha \in \omega_1$ y obtenemos una sucesión $\{F_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de conjuntos G_δ no vacíos en X y una sucesión de abiertos $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tales que

(1) $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$.
(2) $F_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ si $\alpha < \beta < \omega_1$.

Sea $f\colon X^3 \to X$ una función de Mal'tsev. Para cada $\alpha \in \omega_1$, elegimos $y_\alpha \in F_\alpha$ y definimos

$$V_\alpha = \{(x, z) \in X^2 : f(x, z, y_\alpha) \in U_\alpha\} \quad \text{y}$$
$$V'_\alpha = \{(x, z) \in X^2 : f(y_\alpha, x, z) \in F_\alpha\}.$$

Es claro que V_α es un entorno de la diagonal en X^2 y V'_α contiene a la diagonal y es un conjunto G_δ en X^2. Como X es paracompacto, cualquier vecindad de la diagonal en X^2 sirve cómo una vecindad en la estructura uniforme de X. En consecuencia, para cada $\alpha \in \omega_1$, existe una seudométrica continua ρ_α sobre X tal que

$$\{(x, z) : \rho_\alpha(x, z) < 1\} \subseteq V_\alpha \quad \text{y} \quad \{(x, z) : \rho_\alpha(x, z) = 0\} \subseteq V'_\alpha.$$

Aplicando el lema 2.1 a las familias $\{y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ y $\{\rho_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, hallamos $\alpha < \beta < \omega_1$ y $x \in X$ tales que $\rho_\alpha(x, y_\beta) = 0$ y $\rho_\beta(x, y_\alpha) < 1$. Para estas α, β y x tenemos que $(x, y_\beta) \in V'_\alpha$ y $(y_\alpha, x) \in V_\beta$, lo cual implica que $f(y_\alpha, x, y_\beta) \in F_\alpha \cap U_\beta$. Como el último conjunto es vacío por (2), hemos llegado a una contradicción. □

LEMA 2.4. *Sea G un grupo topológico con $\mathrm{nw}(G) \leq \aleph_0$ y γ una familia numerable de conjuntos abiertos en G. Entonces existen un isomorfismo continuo $p\colon G \to H$ sobre un grupo topológico segundo numerable H y una familia numerable μ de conjuntos abiertos en H tales que $\gamma = \{p^{-1}(V) : V \in \mu\}$.*

DEMOSTRACIÓN. De las hipótesis del lema tenemos $ib(G) \leq l(G) \leq \mathrm{nw}(G) \leq \aleph_0$ y $\psi(G) \leq \mathrm{nw}(H) \leq \aleph_0$, así que de la proposición 1.48 deducimos que existe un homomorfismo continuo $i\colon G \to H_0$ de G sobre un grupo topológico segundo numerable H_0.

Sea U un conjunto abierto arbitrario en G. Por el lema 1.42, existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de G que consta de conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(V)$, donde $\varphi\colon G \to K$ es un homomorfismo continuo sobre un grupo segundo numerable K y V es abierto en K. Como G es hereditariamente de Lindelöf, podemos hallar una familia numerable $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Sea $\varphi_n\colon G \to K_n$ el homomorfismo continuo sobre un grupo segundo numerable K_n correspondiente a U_n, $n \in \omega$. Entonces el producto diagonal φ de la familia $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ es un homomorfismo continuo de G en el grupo segundo numerable $\prod_{n\in\omega} K_n$, de donde el grupo $H_1 = \varphi(G)$ es también un grupo segundo numerable. Por construcción, tenemos que $U_n = \varphi^{-1}\varphi(U_n)$, con $\varphi(U_n)$ abierto en H_1 para cada $n \in \omega$. Sea $p_U\colon G \to H_0 \times H_1$ el producto diagonal de i y φ y sea $H_U = p_U(G)$. Es fácil ver que p_U es un homomorfismo continuo de G sobre un grupo segundo numerable H_U, $U = p_U^{-1} p_U(U)$ y $p_U(U)$ es abierto en H_U.

Por último, definimos p como el producto diagonal de la familia $\{p_U : U \in \gamma\}$, $H = p(G)$ y $\mu = \{p(U) : U \in \gamma\}$. Es fácil verificar que p, H y μ son como se requiere. □

LEMA 2.5. *Sean S un subespacio de un grupo topológico $\aleph_0$-acotado H con $\mathrm{nw}(S) \leq \aleph_0$ y $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen un homomorfismo continuo $p\colon H \to K$ sobre un grupo topológico segundo numerable K y una función continua $h\colon p(S) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ p \restriction S$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga primero que S genera a H, es decir, que $H = \langle S \rangle$. Entonces $\mathrm{nw}(H) \leq \aleph_0$. Sea $\{O_n : n \in \omega\}$ una base numerable de $\mathbb{R}$. Para todo $n \in \omega$, elija un subconjunto abierto U_n de H tal que $U_n \cap S = f^{-1}(O_n)$ y defina $\gamma = \{U_n : n \in \omega\}$. Por el lema 2.4, podemos hallar un homomorfismo continuo $p\colon H \to K$ sobre un grupo topológico segundo numerable K y una familia numerable $\mu = \{V_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en K tales que $U_n = p^{-1}(V_n)$ para todo $n \in \omega$. Afirmamos que para todo par x, $y \in S$ que cumple $p(x) = p(y)$, tenemos $f(x) = f(y)$. En efecto, si $f(x) \neq f(y)$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $f(x) \in O_n$ y $f(y) \notin O_n$. Como $U_n \cap S = f^{-1}(O_n)$, tenemos $x \in U_n$ y $y \notin U_n$. De $U_n = p^{-1}(V_n)$ se deduce que $p(x) \in V_n$ y $p(y) \notin V_n$, es decir, $p(x) \neq p(y)$.

El hecho que acabamos de demostrar permite definir una función $h\colon p(S) \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ p \restriction S$, así que sólo queda probar que h es continua. Sean $z \in p(S)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Existe $n \in \omega$ tal que $h(z) \in O_n \subseteq \{r \in \mathbb{R} : |r - h(z)| < \varepsilon\}$. De la definición de U_n, V_n y h, deducimos que $h(V_n \cap p(S)) = h(p(U_n \cap S)) = f(U_n \cap S) \subseteq O_n$. Esto prueba la continuidad de h.

Si $\langle S \rangle = H_0 \neq H$, aplicamos el argumento anterior al grupo H_0 para hallar un epimorfismo continuo $p_0\colon H_0 \to K_0$ sobre un grupo topológico segundo numerable K_0 y una función continua $h_0\colon p_0(S) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h_0 \circ p_0 \restriction S$. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ una base local de la identidad en K_0. Para todo $n \in \omega$, elija una vecindad U_n de la identidad de H tal que $U_n \cap H \subseteq p_0^{-1}(V_n)$. Como H es $\aleph_0$-acotado, podemos aplicar el lema 1.42 para hallar un homomorfismo continuo $p\colon H \to K$ sobre un grupo topológico segundo numerable K y una sucesión $\{W_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas de la identidad en K tal que $p^{-1}(W_n) \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Es fácil ver que la restricción de p a H_0 es más fina que p_0, es decir, existe un homomorfismo continuo $\varphi\colon p(H_0) \to K_0$ tal que $p_0 = \varphi \circ p \restriction H_0$. La función $h = h_0 \circ \varphi \restriction p(S)$ es continua y satisface la condición $f = h_0 \circ p_0 \restriction S = h \circ p \restriction S$. □

LEMA 2.6. *Sean $S \subseteq X$ un subespacio denso de X, $f\colon S \to Y$ y $g\colon X \to Z$ funciones continuas y $T \subseteq Z$. Suponga que para toda $t \in T$, existe $y_t \in Y$ tal que $g^{-1}(t) \subseteq f^{-1}(y_t)$. Suponga también que la función g es abierta supravectiva y defina $S_0 = S \cap \overline{g^{-1}(T)}$ y $T_0 = g(S_0)$. Entonces existe una función continua $h\colon T_0 \to Y$ tal que $f \restriction S_0 = f \circ g \restriction S_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo conjunto abierto V en Y, definimos $e(V) = X \setminus \overline{S \setminus f^{-1}(V)}$. Es fácil ver que $e(V)$ es abierto en X, que $e(V) \cap S = f^{-1}(V)$ y que si V_1, V_2 son subconjuntos abiertos disjuntos de Y, entonces $e(V_1) \cap e(V_2)$. Más aún, probaremos que si V_1, V_2 son subconjuntos abiertos de Y que cumplen $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \varnothing$, entonces $g(e(V_1)) \cap g(e(V_2)) \cap T_0 = \varnothing$. Suponga lo contrario y defina $O = g(e(V_1)) \cap g(e(V_2))$. Como $O \cap T_0 \neq \varnothing$ y $T_0 \subseteq \overline{T}$, podemos elegir un punto $t \in O \cap T$. De $g^{-1}(t) \subseteq f^{-1}(y_t)$ se deduce que $e(V_i) \cap f^{-1}(y_t) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Si $y_t \notin \overline{V}_i$ para alguna $i = 1, 2$, entonces existe una vecindad abierta W de y_t en Y tal que $W \cap V_i = \varnothing$. Por lo tanto, $e(W) \cap e(V) = \varnothing$. Es fácil ver que $f^{-1}(y_t) \subseteq \overline{e(W)} \subseteq X \setminus e(V_i)$ y, en consecuencia, $f^{-1}(y_t) \cap e(V_i) = \varnothing$, una contradicción. Por lo tanto, deducimos que $y_t \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. Esto último contradice la elección de los conjuntos V_1 y V_2, de donde se obtiene la afirmación.

Probaremos ahora que

$$x_1, x_2 \in S_0 \text{ y } g(x_1) = g(x_2) \implies f(x_1) = f(x_2). \tag{$*$}$$

Suponga lo contrario y elija vecindades abiertas V_1 y V_2 de los puntos $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en Y tales que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \varnothing$. Entonces $x_i \in e(V_i) = O_i$ para $i = 1, 2$.

Por lo tanto, $g(x_1) \in g(O_1) \cap g(O_2) \cap T_0$, lo cual contradice la afirmación del párrafo anterior y, por lo tanto, $(*)$ se cumple.

Por $(*)$, existe una función $h\colon T_0 \to Y$ tal que $f \restriction S_0 = f \circ g \restriction S_0$. Probaremos que h es continua. Tome un punto $t \in T_0$ y una vecindad abierta V de $y = h(t)$. Luego elegimos una vecindad abierta W de y tal que $\overline{W} \subseteq V$ y definimos $O = e(W)$ y $U = g(O) \cap T_0$. Es fácil ver que $t \in U$ y afirmamos que $h(U) \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Suponga que $h(U) \setminus \overline{W} \neq \varnothing$. Entonces existen puntos $y_1 \in Y \setminus \overline{W}$ y $t_1 \in U$ tales que $h(t_1) = y_1$. Elegimos un conjunto abierto W_1 que contiene a y_1 tal que $\overline{W}_1 \cap W = \varnothing$ y defina $O_1 = e(W_1)$, $U_1 = g(O_1) \cap T_0$. Elija un punto $x \in S_0$ tal que $f(x) = h(g(x)) = h(t_1) = y_1 \in W_1$, de donde $x \in O_1$. Así, $t_1 \in g(O) \cap g(O_1) \cap T_0$ lo cual contradice $(*)$. Esto demuestra que $h(U) \subseteq V$ y, por lo tanto, h es continua. □

TEOREMA 2.7. *Cualquier subgrupo de un Σ-grupo de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un Σ-grupo de Lindelöf, H un subgrupo de G y $f\colon H \to \mathbb{R}$ una función continua. Podemos suponer sin perder generalidad que H es denso en G porque, en caso contrario, podemos sustituir a G con $\overline{H}$ ya que $\mathrm{Nag}(\overline{H}) \leq \aleph_0$.

Por ser f continua, para todo $x \in H$ existe un conjunto G_δ y cerrado F en G tal que $x \in F$, f admite una extensión continua a $H \cup F$ y esta extensión es constante en F. Denotemos con $\mathcal{F}$ a la familia de estos conjuntos F. Como H es denso en G, existe una extensión continua de f a $S = \bigcup \mathcal{F}$, y esta extensión (la cual denotaremos con la misma letra f) es constante en cada $F \in \mathcal{F}$. Por el teorema 2.3, podemos hallar una subfamilia numerable $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup \mathcal{F}_0$ es denso en S. Sea $\mathcal{F}_0 = \{F_n : n \in \omega\}$. El lema 1.56 implica que para toda $n \in \omega$ existe un epimorfismo continuo φ_n de G sobre un grupo topológico con peso de red numerable tal que $F_n = \varphi_n^{-1}\varphi_n(F_n)$. Sea p el producto diagonal de los epimorfismos φ_n, $n \in \omega$. Entonces $F_n = p^{-1}p(F_n)$ para toda $n \in \omega$. El epimorfismo p no necesariamente es abierto, así que sea N el núcleo de p y $\varphi\colon G \to G/N$ el correspondiente homomorfismo cociente. Como el grupo $p(G)$ tiene peso de red numerable, el grupo N es de tipo G_δ en G y, por lo tanto, $\mathrm{nw}(G/N) \leq \aleph_0$ por el lema 1.54. Es fácil ver que $F_n = \varphi^{-1}\varphi(F_n)$ para toda $n \in \omega$.

Por nuestra elección, la unión $P = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ es densa en $\bigcup \mathcal{F} \supseteq H$, así que podemos aplicar el lema 2.6 (con $X = G$, $Y = \mathbb{R}$, $g = \varphi$ y $T = \varphi(P)$) para definir una función continua $h\colon \varphi(S) \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \varphi \restriction S$. Por último, $H^* = \varphi(H)$ es un subgrupo de G/N que tiene peso de red numerable, y en consecuencia, del lema 2.5 se deduce que existe un homomorfismo continuo $p^*\colon G/N \to K$ sobre un grupo topológico segundo numerable K y una función continua $h^*\colon p^*(H^*) \to \mathbb{R}$ tales que $h = h^* \circ p^* \restriction H^*$. Ahora, si definimos $\psi = p^* \circ \varphi$, tenemos un homomorfismo de G sobre K y observe que éste satisface $f = h^* \circ \psi \restriction H$. Esto completa la prueba. □

COROLARIO 2.8. *Sean S un subespacio denso de un grupo topológico G con $\mathrm{Nag}(G) \leq \aleph_0$ y $f\colon S \to X$ una función continua sobre un espacio X de peso numerable. Entonces existe un homomorfismo continuo $\pi\colon G \to H$ suprayectivo tal que $w(H) \leq \aleph_0$ y una función continua $h\colon \pi(S) \to H$ tal que $h \circ \pi \restriction S = f$.*

2. Subgrupos de grupos $\mathbb{R}$-factorizables

Recordemos que un grupo topológico G es $\aleph_0$-acotado si y sólo si se encaja en un producto cartesiano de grupos topológicos segundo numerables como un subgrupo topológico (*véase* el lema 1.43 o [**7**]). Aunque el resultado siguiente se mencionó en [**13**], su demostración sólo se delineo en esa ocasión.

LEMA 2.9. *Todo grupo $\mathbb{R}$-factorizable es $\aleph_0$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo $\mathbb{R}$-factorizable. Es suficiente probar que G se puede encajar como un subgrupo topológico en un producto de grupos segundo numerables. Sea $\mathcal{N}(e)$ una base de vecindades de la identidad e de G. Para toda vecindad $U \in \mathcal{N}(e)$, sea $f_U\colon G \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(e) = 1$ y $f(G \setminus U) = \{0\}$. Como G es $\mathbb{R}$-factorizable, existen un grupo segundo numerable H_U, un homomorfismo continuo $\pi_U\colon G \to H_U$ y una función continua $h\colon H_U \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \pi_U$. Observe que el producto diagonal $\varphi = \Delta\{\pi_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$ es un monomorfismo topológico de G en el grupo $\Pi = \prod\{H_U : U \in \mathcal{N}(e)\}$.

Como los grupos segundo numerables H_U son $\aleph_0$-acotados, el grupo Π es $\aleph_0$-acotado también. Ahora, los subgrupos de grupos $\aleph_0$-acotados son $\aleph_0$-acotados, así, G hereda esta propiedad. $\square$

Demostraremos que todo grupo de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable. Para lograr este propósito, primero probaremos un lema general de factorización de funciones continuas (véase [**11**]).

LEMA 2.10. *Sea S un subespacio de un producto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ de espacios arbitrarios X_i. Si $l(S) \leq \tau$, entonces para toda función continua $f\colon S \to \mathbb{R}$ existen un conjunto $J \subseteq I$ con $|J| \leq \tau$ y una función continua $h\colon \pi_J(S) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi_J \restriction S$, donde $\pi_J\colon X \to \prod_{i\in J} X_i$ es la proyección natural.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, sea γ_n la cubierta de $\mathbb{R}$ que consta de intervalos abiertos de diámetro $< 1/n$. Como f es continua, para todo $x \in S$ y $n \in \mathbb{N}^+$ existe un abierto canónico $U_n(x)$ en X tal que $x \in U_n(x)$ y $f(U_n(x) \cap S) \subseteq V$ para alguna $V \in \gamma_n$. Por hipótesis, $l(S) \leq \tau$, así que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ la cubierta $\{U_n(x) : n \in \mathbb{N}^+\}$ de S contiene una subcubierta μ_n con $|\mu_n| \leq \tau$. Cada elemento $U \in \mu_n$ depende de un conjunto finito de coordenadas $J(U) \subseteq I$. Ahora, definimos $J_n = \{J(U) : U \in \mu_n\}$ y $J = \bigcup\{J_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Es fácil ver que $|J| \leq \tau$ y $U = \pi_J^{-1}\pi_J(U)$ para cada $U \in \mu = \bigcup\{\mu_n : n \in \mathbb{N}^+\}$.

Afirmamos que $f(x) = f(y)$ para todos los x, $y \in S$ con $\pi_J(x) = \pi_J(y)$. En efecto, supongamos lo contrario y elija $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/n < |f(x) - f(y)|$. Por la definición de μ, existen $U \in \mu_n$ y $V \in \gamma_n$ tales que $x \in U$ y $f(U \cap S) \subseteq V$. De $U = \pi_J^{-1}\pi_J(U)$ y $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ se deduce que x, $y \in U$, de donde $f(x)$, $f(y) \in V$. En consecuencia, $|f(x) - f(y)| < 1/n$, lo cual contradice la elección de n.

Es claro que lo anterior implica que existe una función $h\colon \pi_J(S) \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \pi_J \restriction S$. Sólo queda probar que h es continua. Sean y un punto arbitrario de $Y = \pi_J(S)$, $z = h(y)$ y $\varepsilon > 0$ un número real. Podemos hallar $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $1/n < \varepsilon$. Elija un punto $x \in S$ con $\pi_J(x) = y$ y un elemento $U \in \mu_n$ que contiene a x. Es fácil ver que $f(x) = h(\pi_J(x)) = h(y) = z$, así que existe $V \in \gamma_n$ tal que $f(U \cap S) \subseteq V \subseteq O_\varepsilon(z)$ donde $O_\varepsilon(z) = \{t \in \mathbb{R} : |t - z| < \varepsilon\}$. Entonces $W = \pi_J(U) \cap Y$ es una vecindad abierta de y en Y, y tenemos

$$h(W) = h(\pi_J(U) \cap Y) = f(U \cap S) \subseteq O_\varepsilon(z).$$

Esto prueba la continuidad de h. □

TEOREMA 2.11. *Todo grupo de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable.*

DEMOSTRACIÓN. Un grupo topológico de Lindelöf G es $\aleph_0$-acotado, de donde, por el teorema 1.43, se puede encajar G como un subgrupo topológico en un producto cartesiano $\Pi = \prod_{i \in I} H_i$, de grupos segundo numerables H_i. Identifiquemos a G con su imagen bajo este encaje. Por el lema 2.10, para toda función continua $f\colon G \to \mathbb{R}$ existen un conjunto numerable $J \subseteq I$ y una función continua $h\colon \pi_J \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi_J \restriction S$, donde $\pi_J\colon \Pi \to \prod_{i \in J} X_i$ es la proyección natural. Observe que π_J y su restricción $\pi_J \restriction S$ son homomorfismos continuos, y la imagen $H = \pi_J(G)$ de G es un grupo topológico segundo numerable por ser subgrupo del grupo segundo numerable $\prod_{i \in J} X_i$. Esto completa la demostración. □

TEOREMA 2.12. *Un grupo localmente compacto es $\mathbb{R}$-factorizable si y sólo si es σ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Todo grupo topológico σ-compacto es de Lindelöf y, por lo tanto, es $\mathbb{R}$-factorizable por el teorema 2.11. Recíprocamente, sea G un grupo $\mathbb{R}$-factorizable localmente compacto. Entonces existe una vecindad U de la identidad de G tal que $\overline{U}$ is compacto. Como todo grupo $\mathbb{R}$-factorizable es $\aleph_0$-acotado (lema 2.9), existe un subconjunto numerable $C \subseteq G$ tal que $C \cdot U = G$. Por lo tanto, $\{g \cdot \overline{U} : g \in C\}$ es una familia numerable de conjuntos compactos cuya unión es G. □

M. G. Tkačenko [**12**] probó que los subgrupos de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables no son necesariamente $\mathbb{R}$-factorizables. Por otro lado, un subgrupo $\mathbb{R}$-factorizable de un grupo topológico arbitrario G está z-encajado en G [**8**]. En el teorema siguiente damos una caracterización completa de los subgrupos de los grupos

$\mathbb{R}$-factorizables que preservan la propiedad de ser $\mathbb{R}$-factorizabes. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Decimos que A está *z-encajado* en X si todo conjunto cero B en A es de la forma $B = A \cap C$, donde C es un conjunto cero en X.

TEOREMA 2.13. *Un subgrupo H de un grupo $\mathbb{R}$-factorizable G es $\mathbb{R}$-factorizable si y sólo si H está z-encajado en G.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que H es un subgrupo $\mathbb{R}$-factorizable de G. Sea F un conjunto cero en H y considere una función real continua f sobre H tal que $F = f^{-1}(0)$. Como H es $\mathbb{R}$-factorizable, podemos hallar un homomorfismo continuo π de H en un grupo segundo numerable K y una función continua g de K en $\mathbb{R}$ tales que $f = g \circ \pi$. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ una base numerable de la identidad de K. Denote con H_0 el núcleo de π. Podemos definir una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades simétricas de la identidad en G que cumplan para cada $n \in \omega$ las condiciones

(i) $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$;
(ii) $U_n \cap H \subseteq \pi^{-1}(V_n)$.

Es fácil ver que $G_0 = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es un subgrupo cerrado de G y $G_0 \cap H \subseteq H_0$. Sea φ el homomorfismo canónico de G en el espacio de las clases laterales izquierdas G/G_0. Como $G_0 \cap H$ es un subgrupo de H_0, existe una función ψ de $\varphi(H)$ en K que satisface $\psi \circ \varphi \restriction H = \pi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & H \arrow[l, "f"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi\restriction H"] & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& P \arrow[ul, "g"] & \varphi(H) \arrow[l, "\psi"] \arrow[r, hook] & G/K
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1

Los conjuntos abiertos U_n satifacen $e \in U_n = U_n^{-1}$ y $U_n^2 \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, el lema 1.31 implica que existe una seudonorma continua N sobre G tal que

$$(*) \qquad \{x \in G : N(x) < 1/2^n\} \subseteq U_n \subseteq \{x \in G : N(x) \leq 1/2^{n-1}\}.$$

Defina una seudométrica continua invariante por la izquierda d sobre G mediante $d(x,y) = N(x^{-1}y)$ para todos los x, $y \in G$. Es fácil verificar que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x^{-1}y \in G_0$. Esto último nos permite definir una métrica ρ sobre G/G_0 tal que $d(x,y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y))$ para todos los x, $y \in G$.

Para todo $x \in G$, $y \in G/G_0$ y $\varepsilon > 0$, definimos $B_\varepsilon(x) = \{a \in G : d(a,x) < \varepsilon\}$ y $C_\varepsilon(y) = \{b \in G/G_0 : \rho(b,y) < \varepsilon\}$. Por la definición de ρ, tenemos

(a) $\varphi(B_\varepsilon(x)) = C_\varepsilon(\varphi(x))$.

En otras palabras, las imágenes bajo φ de las bolas abiertas de G son abiertas en el espacio métrico $(G/G_0, \rho)$. Es fácil verificar que las bolas abiertas $B_\varepsilon(x)$ satisfacen (*b*) $B_\varepsilon(x) = \varphi^{-1}\varphi(B_\varepsilon(x))$.

Sea t_ρ la topología de G/G_0 generada por ρ. Observe que t_ρ es más gruesa que la topología cociente de G/G_0. Afirmamos que la función ψ de $\varphi(H)$ en K es continua si $\varphi(H)$ se considera como un subespacio de $(G/G_0, t_\rho)$. Esta es la clave de la demostración. En efecto, sea $\bar{x} \in \varphi(H)$ arbitrario y considere una vecindad O de $z = \psi(\bar{x})$ en K. Elija un punto $x \in H$ tal que $\varphi(x) = \bar{x}$, entonces $\pi(x) = z$. La imagen $\varphi(xB_{1/2^n}(e))$ es una vecindad abierta de $\bar{x}$ en $(G/G_0, t_\rho)$ por (*a*). Observe que el conjunto $U = B_{1/2^n}(e)$ está contenido en U_n. Por lo tanto, (*b*), (*ii*) y la igualdad $H \cap xU = x(H \cap U)$ implican que

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(xU) \cap \varphi(H)) &= \psi(\varphi(H \cap xU)) = \pi(H \cap xU) \\ &= \bar{x}\pi(H \cap U) \subseteq \bar{x}\pi(H \cap U_n) \subseteq \bar{x}O_n \subseteq O.\end{aligned}$$

Esto prueba que ψ es continua sobre el subespacio $\varphi(H)$ de $(G/G_0, t_\rho)$.

Sea $\Phi = g^{-1}(0) \subseteq K$. Como $f = g \circ \pi$, $\pi^{-1}(\Phi) = F$. Es claro que $\Phi^* = \psi^{-1}(\Phi)$ es un conjunto cero en $\phi(H)$. Por ser un subespacio del espacio métrico $(G/G_0, d)$, $\phi(H)$ está z-encajado en G/G_0. Por lo tanto, existe un conjunto cero F^* en $(G/G_0, d)$ tal que $F^* \cap \varphi(H) = \Phi^*$. Verifiquemos que $F = F_0 \cap H$, donde $F_0 = \varphi^{-1}(F^*)$ es un conjunto cero en G. Como $\psi \circ \varphi|_H = \pi$, tenemos $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\Phi)) \cap H = \pi^{-1}(\Phi)$, esto es, $\varphi^{-1}(\Phi^*) \cap H = F$. En consecuencia,

$$F_0 \cap H = \varphi^{-1}(F^*) \cap H = \varphi^{-1}(F^* \cap \varphi(H)) \cap H = \varphi^{-1}(\Phi^*) \cap H = F.$$

Es decir, H está z-encajado en G.

Suponga que H está z-encajado en G. Probaremos que H es $\mathbb{R}$-factorizable. Sea $f\colon H \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la familia γ de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ con extremos racionales. Para todo $U \in \gamma$, sea V_U un conjunto cocero en G tal que $V_U \cap H = f^{-1}(U)$. Existe una función continua $g_U\colon G \to \mathbb{R}$ tal que $g_U^{-1}(U) = V_U$. El producto diagonal $g = \Delta_{U\in\gamma} g_U$ es una función continua de G en el espacio segundo numerable $\mathbb{R}^\gamma$ y, como G es $\mathbb{R}$-factorizable, existen un epimorfismo continuo π de G sobre un grupo topológico segundo numerable G^* y una función continua $g^*\colon G^* \to \mathbb{R}^\gamma$ tales que $g = g^* \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "g_U"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\pi"] & H \arrow[l, hook'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}_{(U)} & \mathbb{R}^\gamma \arrow[l, "p_U"] & G^* \arrow[l, "g^*"] & H^* \arrow[l, hook'] \arrow[u, dashed, "g_*"']
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2

Afirmamos que $\pi(x_0) = \pi(x_1)$ implica $f(x_0) = f(x_1)$ para todos los x_0, $x_1 \in H$. Suponga lo contrario, es decir, que $f(x_0) \neq f(x_1)$ para x_0, $x_1 \in H$ con $\pi(x_0) = \pi(x_1)$. También podemos suponer que $f(x_0) < f(x_1)$. Si r_0, r_1 and r_2 son racionales y $r_0 < f(x_0) < r_1 < f(x_1) < r_2$, considere los intervalos $U_0 = (r_0, r_1) \in \gamma$ y $U_1 = (r_1, r_2) \in \gamma$. Sean $p_{U_i}\colon \mathbb{R}^\gamma \to \mathbb{R} = \mathbb{R}_{U_i}$ las proyecciones naturales, $g \circ p_{U_i} = g_{U_i}$ $(i = 0,\ 1)$. Por otro lado, los conjuntos

$g_{U_0}^{-1}(U_0) \cap H = f^{-1}(U_0)$ y $g_{U_1}^{-1}(U_1) \cap H = f^{-1}(U_1)$ son ajenos. Esto equivale a decir que $g^{-1}(O_0) \cap H$ y $g^{-1}(O_1) \cap H$ son ajenos, donde $O_i = p_{U_i}^{-1}(U_i) \ni g(x_i)$ $(i = 0,\ 1)$. En particular, $g(x_0) \neq g(x_1)$. Por otro lado, $g = g^* \circ \pi$, de donde $g(x_0) = g(x_1)$, una contradicción.

Defina $H^* = \pi(H)$. La afirmación recién probada implica que existe una función $g_*\colon H^* \to \mathbb{R}$ tal que $f = g_* \circ \pi \restriction H$. Sólo falta verificar que g_* es continua. Sea $U \in \gamma$ arbitrario. Entonces

$$g_*^{-1}(U) = \pi\big(f^{-1}(U)\big) = \pi\big(g_U^{-1}(U) \cap H\big) = (g^*)^{-1}\big(p_U^{-1}(U)\big) \cap \pi(H)$$

es abierto en $\pi(H) = H^*$. Como γ es una base de $\mathbb{R}$, esto prueba la continuidad de g_*. Así, tenemos $f = g_* \circ \varphi$, donde $\varphi = \pi \restriction H$ es un epimorfismo continuo de H sobre el grupo segundo numerable $H^* \subseteq G^*$ y, por lo tanto, H es $\mathbb{R}$-factorizable. □

Es fácil ver que todo retracto de un espacio X está z-encajado en X. En efecto, si $r\colon X \to X$ es un retracto y $Y = r(X)$, entonces para cada función continua $f\colon Y \to \mathbb{R}$, la función $\hat{f} = f \circ r$ es una extensión continua de f en X. Observe que si G es un grupo topológico y H es un subgrupo abierto de G, entonces H es un retracto de G. En efecto, en toda clase lateral izquierda U de H en G, elija un punto $x_U \in U$. Defina $r\colon G \to H$ de la manera siguiente: si $g \in H$, entonces $f(g) = g$; si $g \in U$ y $U \neq H$, haga $r(g) = x_U^{-1}g$. Como las clases laterales izquierdas son abiertas y ajenas, la continuidad de r es inmediata. De estas dos observaciones deducimos los resultados siguientes.

COROLARIO 2.14. *Sea G un grupo $\mathbb{R}$-factorizable y H un subgrupo de G. Si H es un retracto de G, entonces H es $\mathbb{R}$-factorizable.*

COROLARIO 2.15. *Un subgrupo abierto de un grupo $\mathbb{R}$-factorizable es $\mathbb{R}$-factorizable.*

3. Algunos ejemplos

Por el teorema 2.11, todo grupo topológico de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable (véase también el corolario 1.13 de [**13**]). Decimos que un grupo topológico G es *P-grupo* si toda intersección de una cantidad numerable de conjuntos abiertos en G es abierta. Utilizando la existencia de un P-grupo de Lindelöf especial G^* de peso $\aleph_1$ (véase [**4**]), Tkačenko [**12**] construyó un ejemplo de un subgrupo denso propio de G^* que no es $\mathbb{R}$-factorizable (la descripción de este grupo se da después del siguiente teorema). Nuestro propósito es probar que *cualquier* subgrupo denso propio de un P-grupo de Lindelöf arbitrario de peso $\aleph_1$ no es $\mathbb{R}$-factorizable.

TEOREMA 2.16. *Si H es un subgrupo denso propio de un P-grupo de Lindelöf G de peso $\aleph_1$, entonces H no es $\mathbb{R}$-factorizable.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es un P-grupo, es de dimensión cero. Por lo tanto, elegimos una base $\mathcal{B} = \{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ en la identidad e de G que satisfaga las condiciones siguientes para cada $\alpha < \omega_1$:

(1) O_α es un conjunto abierto cerrado y simétrico;
(2) $O_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} O_\beta$ para todo ordinal límite $\alpha < \omega_1$;
(3) $O^2_{\alpha+1} \subset O_\alpha$;
(4) $O_\alpha \setminus O_{\alpha+1} = A_\alpha \cup B_\alpha$ donde A_α y B_α son conjuntos ajenos abiertos cerrados no vacíos.

Ahora definimos U' y V' como $U' = (G \setminus O_0) \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha)$ y $V' = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. De las condiciones (1) y (4) se deduce que U' y V' son conjuntos abiertos. Las condiciones (2) y (4) implican que $U' \cup V' = G \setminus \{e\}$. Por último, (4) garantiza que U' y V' no son vacíos.

Elija un punto $g \in G \setminus H$ y defina $U = gU' \cap H$ y $V = gV' \cap H$. Entonces U y V son subconjuntos abiertos no vacíos de H y $H = U \cup V$. Sea f la función sobre H definida mediante la regla $f(x) = 0$ si $x \in U \cap H$ y $f(x) = 1$ si $x \in V \cap H$. Es fácil ver que f es continua. Sea $\pi \colon H \to K$ un homomorfismo continuo de H en un grupo metrizable K. Entonces el núcleo de π es un conjunto G_δ en H y, por lo tanto, es una vecindad abierta de e. Así, podemos hallar $\alpha < \omega_1$ tal que $O_\alpha \cap H \subseteq \ker \pi$. Elija puntos $a \in H \cap gA_{\alpha+1}$ y $b \in H \cap gB_{\alpha+1}$. Entonces $a^{-1}b \in O_\alpha$ por (3) y (4), lo cual implica que $\pi(a) = \pi(b)$, mientras que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$. Esto significa que el grupo H no es $\mathbb{R}$-factorizable. □

Sea $\mathbb{Z}(2) = \{0, 1\}$ el grupo discreto de dos puntos. Considere el producto cartesiano $\Pi = \prod_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$, donde $G_\alpha = \mathbb{Z}(2)$ para toda $\alpha < \omega_1$, con la topología de la $\aleph_0$-caja τ. Una base de esta topología consta de conjuntos de la forma $p_\alpha^{-1}(x)$ con $\alpha < \omega_1$ y $x \in \Pi_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} G_\beta$, donde $p_\alpha \colon \Pi \to \Pi_\alpha$ es la proyección. Es fácil ver que $\Pi = (\Pi, \tau)$ es un grupo topológico abeliano donde cada subconjunto G_δ es abierto, es decir, Π es un P-grupo. Para todo $g \in \Pi$ denote con $\operatorname{supp} g = \{\alpha < \omega_1 : \pi_\alpha(g) = 1\}$, donde π_α es la proyección de Π sobre G_α. Sea G^* la suma débil de los grupos G_α, $\alpha < \omega_1$, es decir, $G^* = \{g \in \Pi : |\operatorname{supp} g| < \aleph_0\}$. Considere a G^* como subgrupo de Π. Es evidente que G^* es un P-grupo y, por lo tanto, es de dimensión cero. Por el resultado de Comfort [**4**], el grupo G^* es de Lindelöf. Ahora, considere el subconjunto H de G^* que consta de todos los elementos g tales que $|\operatorname{supp} g|$ es un número par. Es fácil ver que H es un subgrupo propio denso de G^*. Por el teorema anterior, H es un ejemplo de un grupo toplógico que no es $\mathbb{R}$-factorizable. Este último razonamiento simplifica la construción de Tkačenko [**12**, Ejemplo 2.1].

El teorema anterior muestra que hay muchos subgrupos de grupos $\mathbb{R}$-factorizables que no son $\mathbb{R}$-factorizables. En clases especiales de grupos $\mathbb{R}$-factorizable la situación cambia: por el corolario 1.13 de [**13**], todo subgrupo de un grupo topológico σ-compacto es $\mathbb{R}$-factorizable. Intuitivamente, los subgrupos

G_δ de un grupo topológico parecen casi estar z-encajados en éste. Por ello, el teorema 2.13 puede sugerir la conjectura de que un subgrupo cerrado G_δ de un grupo $\mathbb{R}$-factorizable es también $\mathbb{R}$-factorizable. A continuación probamos que esto no ocurre.

EJEMPLO 2.17. Sea H un grupo abeliano $\aleph_0$-acotado de peso $\aleph_1$ que no es $\mathbb{R}$-factorizable construido anteriormente. Por el teorema de Guran (véase 1.43 o [**7**]), H se puede considerar como un subgrupo de un producto $\Pi = \prod_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$, donde cada G_α es un grupo abeliano segundo numerable. Sea $G = \Pi^\omega$. El subgrupo H' de G que consta de todos los elementos de la forma $(h, h, \dots)$ con $h \in H$ es isomorfo a H.

Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, existe un subconjunto denso numerable S de Π. Considere el subconjunto D de G de todos los elementos $x \in G$ tales que para un conjunto finito $n_1, \dots, n_k \in \omega$, $x(n_i) \in S$ y $x(n) = 0$ para el resto de los índices. Es fácil ver que el conjunto D es numerable y denso en G. Sea $K = \langle D \rangle$ el subgrupo de G generado por D. Entonces K es un subgrupo denso numerable de G y $K \cap H' = \{e_G\}$. Como cualquier subgrupo denso de un producto de grupos segundo numerables es $\mathbb{R}$-factorizable [**13**, Corolario 1.10], deducimos que el subgrupo $L = K + H'$ de G es $\mathbb{R}$-factorizable. Por otro lado, como la diagonal $\Delta = \{(x, x, \dots) : x \in G\}$ del grupo $G = \Pi^\omega$ es cerrada en G y $H' \subseteq \Delta$, tenemos $\overline{H'} \subseteq \Delta$ y $\Delta \cap K = \{e_G\}$, de donde $\overline{H'} \cap L = H'$. Esto significa que H' es un subgrupo cerrado de L. Para cada $x \in K$, $x + H'$ es un subconjunto cerrado de L y es fácil ver que

$$H' = \bigcap_{x \in K \setminus \{e_G\}} L \setminus (x + H').$$

Por lo tanto, $H' \simeq H$ es un subgrupo cerrado G_δ del grupo $\mathbb{R}$-factorizable $L = K + H'$, el cual no es $\mathbb{R}$-factorizable.

4. Grupos semi-ℝ-factorizables

El hecho de que un grupo topológico G sea $\mathbb{R}$-factorizable se puede expresar en la forma siguiente equivalente a la original: dada una función continua $f\colon G \to \mathbb{R}$, existen un subgrupo cerrado normal H de G, una topología de grupo Hausdorff segundo numerable τ para el grupo cociente G/H más gruesa que la topología cociente τ_q y una función continua $h\colon (G/H, \tau) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi$, donde $\pi\colon G \to G/H$ es el homomorfismo cociente.

La idea de la definition 2.18 proviene de omitir la condición de normalidad del subgrupo $H \subseteq G$. Así, definimos una clase de grupos topológicos que contiene a los grupos $\mathbb{R}$-factorizables. Veremos, sin embargo, que las dos clases coinciden (Teorema 2.20).

Sea H un subgrupo cerrado de un grupo topológico G y sea $G/H = \{xH : x \in G\}$ el espacio de clases laterales izquierdas con la topología cociente τ_q. Una topología $\tau \subseteq \tau_q$ para G/H se llama *invariante izquierda* si las funciones

$\phi_a \colon G/H \to G/H$ definidas por $\phi_a(xH) = axH$, $x \in G$, son continuas para toda $a \in G$. Esta notación se usará en las demostraciones del lema 2.19 y el teorema 2.20.

DEFINICIÓN 2.18. Decimos que un grupo topológico G es *semi-$\mathbb{R}$-factorizable* siempre que para toda función continua $f \colon G \to \mathbb{R}$ exista un subgrupo cerrado H de G, una topología segundo numerable y T_1 invariante izquierda τ sobre el espacio de las clases laterales izquierdas G/H más gruesa que la topología cociente y una función continua $h \colon (G/H, \tau) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi$, donde $\pi \colon G \to G/H$ es la proyección natural.

LEMA 2.19. *Todo grupo semi-$\mathbb{R}$-factorizable es $\aleph_0$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo semi-$\mathbb{R}$-factorizable y V una vecindad abierta de la identidad e de G. Como un grupo topológico es completamente regular, existe una función continua $f \colon G \to [0,1]$ tal que $f(e) = 1$ y $f(G \setminus V) = \{0\}$. Ya que G es semi-$\mathbb{R}$-factorizable, existen un subgrupo cerrado H de G, una topología T_1 invariante izquierda segundo numerable τ sobre G/H más gruesa que la topología cociente y una función continua $h \colon (G/H, \tau) \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \pi$, donde $\pi \colon G \to G/H$ es la proyección natural. El conjunto $U = h^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ es abierto en $(G/H, \tau)$ y $e \in \pi^{-1}(h^{-1}(\frac{1}{2}, 1]) = f^{-1}(\frac{1}{2}, 1] \subseteq V$. Para cada $g \in G$, la función $\sigma_g \colon G \to G$ definida por $\sigma_g(x) = gx$ es un homeomorfismo de G sobre G. Observe que $\pi \circ \sigma_g = \phi_g \circ \pi$ y, por lo tanto, $f \circ \sigma_g = h \circ \pi \circ \phi_g = h \circ \phi_g \circ \pi$. Como

$$(f \circ \sigma_{x^{-1}})^{-1}(\tfrac{1}{2}, 1] = \sigma_{x^{-1}}^{-1}(f^{-1}(\tfrac{1}{2}, 1]) = \sigma_x(f^{-1}(\tfrac{1}{2}, 1]) \subseteq \sigma_x(V) = xV,$$

deducimos que $U_x = \phi_{x^{-1}}^{-1}(h^{-1}(\frac{1}{2}, 1])$ es abierto en $(G/H, \tau)$ y $\pi^{-1}(U_x) \subseteq xV$. La colección $\{U_x : x \in G\}$ cubre a G/H. Ya que G/H tiene peso numerable, existe una sucesión $x_0, x_1, \ldots$ de elementos de G tales que $G/H \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{x_i}$. En consecuencia, la familia $\{\pi^{-1}(U_{x_i}) : i \in \omega\}$ cubre G y, por lo tanto, la familia correspondiente $\{x_i V : i \in \omega\}$ también cubre G. Esto prueba que G es $\aleph_0$-acotado. □

TEOREMA 2.20. *Todo grupo semi-$\mathbb{R}$-factorizable es $\mathbb{R}$-factorizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo semi-$\mathbb{R}$-factorizable y $f \colon G \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces G tiene un subgrupo cerrado H tal que existen una topología T_1 segundo numerable invariante izquierda τ sobre G/H más gruesa que la topología cociente y una función continua $h \colon (G/H, \tau) \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ \pi$, donde $\pi \colon G \to G/H$ es la proyección natural. Si $\{W_i : i \in \omega\}$ es una base local de G/H en $\{H\}$, entonces $H = \bigcap_{i \in \omega} \pi^{-1}(W_i)$. Como G es $\aleph_0$-acotado (lema 2.19), para todo $U_i = \pi^{-1}(W_i)$ existen un homomorfismo continuo $\pi_i \colon G \to H_i$ de G sobre un grupo segundo numerable H_i y una vecindad V_i de la identidad en H_i tales que $\pi_i^{-1}(V_i) \subseteq U_i$ (véase el lema 1.42 o [7]). Entonces $N = \bigcap_{i \in \omega} \ker \pi_i$ es un subgrupo normal cerrado de G y $N \subseteq H$.

Primero, definimos una topología de grupo segundo numerable t para G/N. Sea $\varphi_i\colon G/N \to H_i$ el homomorfismo definido por $\varphi_i(aN) = \pi_i(a)$, $a \in G$. Observe que φ_i está bien definido porque si $b \in aN$, entonces $a^{-1}b \in N \subseteq \ker \pi_i$ y, por lo tanto, $\pi_i(a) = \pi_i(b)$. Sea t la topología de grupo más débil sobre G/N que hace continuo a cada uno de los homomorfismos φ_i. Es fácil ver que $(G/N, t)$ es un grupo topológico porque la topología t esta generada por una familia de homomorfismos, y t es segundo numerable porque cada grupo H_i es segundo numerable. Definimos la función $\tilde{h}\colon G/N \to \mathbb{R}$ como $\tilde{h}(aN) = h(aH)$, es decir, $\tilde{h} = h \circ \psi$, donde $\psi\colon G/N \to G/H$ está dada por $\psi(aN) = aH$. Es fácil ver que ψ está bien definida porque las clases laterales izquierdas de N en G están contenidas en las clases laterales izquierdas de H en G. Sea π_N la proyección natural de G sobre G/N. Entonces $\tilde{h} \circ \pi_N = h \circ \psi \circ \pi_N = h \circ \pi = f$ (véase Diagrama 3.).

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\pi_i"'] \arrow[drr, "\pi_N"] \arrow[dd, "\pi"'] & & & \mathbb{R} \\
& H_i & G/N \arrow[l, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\tilde{h}"] \arrow[dll, "\psi"] & \\
G/H \arrow[uurrr, dashed, bend right, "h"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3

Por último, debemos probar que la función $\tilde{h}$ es continua. Para este propósito, es suficiente mostrar que ψ es continua, esto es, para cada $A \in G/N$ y cada conjunto abierto $V \in \tau$ que contiene a $\psi(A)$, existe $U \in t$ con $A \in U$ tal que $\psi(U) \subseteq V$. Como $A = gN$ para alguna $g \in G$, de la definición de ψ se deduce que $\psi(A) = gH$. Como la topología τ sobre G/H es invariante izquierda, el conjunto V tiene la forma $\phi_g(V')$, donde $H \in V' \in \tau$. Existe $i \in \omega$ tal que $W_i \subseteq V'$. Recuerde que $\pi_i^{-1}(V_i) \subseteq U_i = \pi^{-1}(W_i)$ por la elección de la vecindad V_i de la identidad en H_i. Defina $O = \varphi_i^{-1}(V_i)$ y $U = a \cdot O$, donde $a = \pi_N(g)$. Entonces $A \in U \in t$ y

$$
\begin{aligned}
\psi(U) = \psi(a \cdot O) &= \pi(g \cdot \pi_i^{-1}(V_i)) = \phi_g(\pi(\pi_i(V_i))) \\
&\subseteq \phi_g(\pi(U_i)) \subseteq \phi_g(\pi\pi^{-1}(W_i)) = \phi_g(W_i) \subseteq \phi_g(V') = V.
\end{aligned}
$$

Esto implica la continuidad de ψ y, por lo tanto, la función $\tilde{h} = h \circ \psi$ también es continua. $\square$

CAPÍTULO 3

Grupos o-acotados

Los grupos $\aleph_0$-acotados se definieron con el propósito de caracterizar a los subgrupos de los grupos de Lindelöf de la misma manera que los grupos totalmente acotados son exactamente los subgrupos de los grupos compactos. Sin embargo, resultó que la primera clase es más amplia y con un mejor comportamiento respecto a las operaciones principales, como productos y cocientes, que la segunda. En el caso de los grupos σ-compactos existe una caracterización de sus subgrupos en términos de conjuntos acotados: un grupo G es subgrupo de un grupo σ-compacto si y sólo si G es σ-acotado, es decir, se puede expresar como unión numerable de subconjuntos funcionalmente acotados en G.

1. Introducción

Nuestro propósito es definir dos clases nuevas de grupos topológicos tan parecidas a la clase de los σ-compactos como sea posible, y luego estudiar las relaciones entre los grupos $\aleph_0$-acotados y σ-compactos por un lado y los grupos (estrictamente) o-acotados por el otro. Decimos que un grupo topológico G es *o-acotado* si para toda sucesión U_0, $U_1, \ldots$ de vecindades de la identidad en G existen conjuntos finitos F_0, $F_1, \ldots$ tales que $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i$. Es fácil ver que todo grupo σ-compacto es o-ocotado.

El concepto siguiente se define en términos de juegos topológicos. Suponga que G es un grupo topológio y que tenemos dos jugadores, I y II. El jugador I elige una vecindad abierta U_0 de la identidad en G. Entonces el jugador II elige un subconjunto finito F_0 de G. En el segundo turno, el jugador I elige otra vecindad U_1 de la identidad en G y el jugador II elige un subconjunto finito F_1 de G. El juego continúa de la misma manera hasta que tenemos una sucesión U_0, $U_1, \ldots$ de vecindades de la identidad y una secesión F_0, $F_1, \ldots$ de subconjuntos finitos de G. El jugador II gana si $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i$. En otro caso, el jugador I gana. Decimos que el grupo G es *estrictamente o-acotado* si existe una estrategia ganadora para el jugador II. Es evidente que todo grupo estrictamente o-acotado es o-acotado. Es fácil verificar que todo grupo σ-compacto es estrictamente o-acotado. O. Okunev propuso el concepto de o-acotación para grupos topológicos como un intento de dar una caracterización interna de los subgrupos de grupos σ-compactos. Más adelante, M. Tkachenko la modificó levemente introduciendo los grupos estrictamente o-acotados.

En la sección 2 estudiaremos las propiedades elementales de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados. La clase de los grupos $\aleph_0$-acotados es productiva, (véase Prop. 1.39(c) o [**7**]). Es claro que todo grupo o-acotado es $\aleph_0$-acotado. Probaremos que el recíproco es falso aún para los grupos segundo numerables (véase el ejemplo 3.6).

En la section 3 damos un ejemplo de un grupo estrictamente o-acotado que no se puede encajar como un subgrupo en un grupo σ-compacto (Ejemplo 3.7). Es claro que todos los grupos segundo numerables son $\mathbb{R}$-factorizables. Ya sabemos que todo grupo topológico de Lindelöf es $\mathbb{R}$-factorizable (véase el teorema 2.11 o [**13**, Corolario 1.13]). El ejemplo 3.7 (junto con el ejemplo 2.1 en [**12**]) también muestran que un grupo estrictamente o-acotado no es necesariamente $\mathbb{R}$-factorizable.

En la section 4 presentamos una caracterización de los grupos o-acotados en términos de sus imágenes homomorfas continuas segundo numerables.

La section 5 contiene una caracterización de la o-acotación del grupo abeliano $C_p(X)$ de las funciones reales continuas sobre X con la topología de la convergencia puntual. Allí también estudiamos las propiedades de productividad de los grupos o-acotados.

Por último, en la section 6 probamos que las clases de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados son distintas (véase ejemplo 3.14).

Las clases de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados son más amplias que la clase de los subgrupos de los grupos σ-compactos, pero son subclases propias de la clase de los grupos $\aleph_0$-acotados. El diagrama siguiente ilustra la situación.

$$
\begin{tikzcd}
& \text{estrictamente o-acotado} \arrow[r] \arrow[dd, "/" marking] & \text{o-acotado} \arrow[dr] & \\
\text{subgrupo de un grupo } \sigma\text{-compacto} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \aleph_0\text{-acotado} \\
& \mathbb{R}\text{-factorizable} \arrow[uur, "/" marking] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

El ejemplo 3.7 muestra que no todo grupo estrictamente o-acotado es subgrupo de un grupo σ-compacto. La existencia de un grupo o-acotado que no es estrictamente o-acotado se deduce del ejemplo 3.14. El grupo $\mathbb{R}^\omega$ del ejemplo 3.6 muestra que no todo grupo $\aleph_0$-acotado es o-acotado. El mismo grupo $\mathbb{R}^\omega$ es $\mathbb{R}$-factorizable, pero no es o-acotado. El grupo G^* del ejemplo 3.7 es estrictamente o-acotado y, por el teorema 2.16, contiene un subgrupo H que no es $\mathbb{R}$-factorizable. El teorema 3.1 implica que H es estrictamente o-acotado. Así, los grupos estrictamente o-acotados no necesariamente son $\mathbb{R}$-factorizables. Por lo tanto, ninguna de las flechas del diagrama anterior es invertible. El hecho de que los subgrupos de los grupos topológicos σ-compactos son $\mathbb{R}$-factorizables se deduce del teorema 2.11.

2. Propiedades elementales

En esta sección estudiaremos las propiedades relativamente elementales de los grupos o-acotados y estrictamente o-acotados relacionadas con las operaciones de tomar subgrupos e imágenes continuas homomorfas.

TEOREMA 3.1. *Todo subgrupo de un grupo (estrictamente) o-acotado es (estrictamente) o-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean G un grupo estrictamente o-acotado, e su identidad y H un subgrupo de G. Supongamos que en el turno i, el jugador I elige una vecindad U_i de la identidad en H. Existen vecindades V_i y W_i de la identidad en G tales que $V_i \cap H = U_i$ y $W_i^{-1} \cdot W_i \subseteq V_i$. Como G es estrictamente o-acotado, el jugador II puede elegir los conjuntos finitos F_i correspondientes a la estrategia ganadora en G para W_i de tal manera que $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot W_i$. Si $x \in F_i$ y xW_i intersecta a H, elegimos $a_x \in H \cap (xW_i)$; en otro caso, hacemos $a_x = e$. Es fácil ver que $A_i = \{a_x : x \in F_i\}$ es finito. Verifiquemos que $H = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cdot U_i$. Es claro que $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cdot U_i \subseteq H$. Si $y \in H$, existe $x \in F_i$ tal que $y \in xW_i$ para algún $i \in \omega$. Por lo tanto, $a_x \in H \cap xW_i$, es decir, $x \in a_x W_i^{-1}$. En consecuencia,

$$y \in xW_i \subseteq a_x W_i^{-1} \cdot W_i \subseteq a_x V_i.$$

Como y y a_x son elementos de H, se deduce que $a_x^{-1} y \in V_i \cap H = U_i$. Así, $y \in a_x U_i \subseteq A_i \cdot U_i$ y hemos terminado.

El argumento para el caso de un grupo o-acotado G es similar. □

Note que todo grupo σ-compacto es estrictamente o-acotado: si G es un grupo topológico tal que $G = \bigcup_{i\in\omega} K_i$, donde K_i es compacto para toda $i \in \omega$, entonces la estrategia para el jugador II es cubrir al conjunto K_n con un número finito de traslaciones del abierto U_n elegido por jugador I en el paso n. Así, el teorema 3.1 implica lo siguiente.

COROLARIO 3.2. *Todo subgrupo de un grupo σ-compacto es estrictamente o-acotado.*

TEOREMA 3.3. *Sea $\phi\colon G \to H$ un epimorfismo continuo donde G es un grupo estrictamente o-acotado. Entonces H es estrictamente o-acotado. Una afirmación similar es válida para grupos o-acotados.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que en el paso i el jugador I elige una vecindad U_i de la identidad e_H en H. El conjunto $V_i = \phi^{-1}(U_i)$ es una vecindad de la identidad e_G en G. Como G es estrictamente o-acotado, el jugador II puede elegir los conjuntos finitos L_i correspondientes a la estrategia ganadora en G para V_i. Los conjuntos $F_i = \phi(L_i)$ son finitos y $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i = \phi(\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i \cdot V_i) = \phi(G) = H$. Un argumento similar muestra que una imagen homomorfa continua de un grupo o-acotado es o-acotada. □

TEOREMA 3.4. *Todo P-grupo de Lindelöf G es o-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que U_0, $U_1, \ldots$ es una sucesión de vecindades de la identidad en G. Como G es un P-grupo, $U = \bigcap_{i=0}^{\infty} U_i$ es una vecindad de la identidad. Si utilizamos el hecho de que G es un grupo de Lindelöf, podemos hallar un subconjunto numerable $N = \{x_0, x_1, \ldots\}$ de G tal que $N \cdot U = G$. Si $F_i = \{x_i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i = G,$$

y por lo tanto G es o-acotado. □

En la sección 3 presentamos una serie de P-grupos de Lindelöf que son estrictamente o-acotados. Sin embargo, el siguiente problema está abierto.

PROBLEMA 3.5. *¿Es todo P-grupo de Lindelöf G estrictamente o-acotado?*

EJEMPLO 3.6. Considere el grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$ con la topología usual. Probemos que $\mathbb{R}^\omega$ no es o-acotado. Para todo $i \in \omega$, sea U_i la vecindad de la identidad en $\mathbb{R}^\omega$ definida por

$$U_i = \prod_{j \in \omega} V_{i,j}$$

donde $V_{i,j} = (-1, 1)$ si $j \leq i$ y $V_{i,j} = \mathbb{R}$ en cualquier otro caso. Para toda sucesión $\{F_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{R}^\omega$, podemos definir un punto en $\mathbb{R}^\omega$ fuera de $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i$. En efecto, considere el punto $x = (x_i)_{i \in \omega} \in \mathbb{R}^\omega$, cuya i-ésima coordenada x_i satisface

$$x_i \in \mathbb{R} \setminus p_i(F_i) \cdot p_i(U_i),$$

donde $p_i \colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ es la proyección. Es fácil ver que x no pertenece al conjunto $\bigcup_{i \in \omega} F_i \cdot U_i$. Por lo tanto, el grupo $\mathbb{R}^\omega$ no es o-acotado.

El ejemplo anterior implica que si H es un subgrupo denso de un grupo topológico G y H es o-acotado, G no necesariamente es o-acotado (tome $G = \mathbb{R}^\omega$ y defina H como el σ-producto de los grupos $\mathbb{R}_i$, $H \subseteq G$). Esta es una diferencia más entre las clases de los grupos o-acotados y los $\aleph_0$-acotados (véase, por ejemplo, la proposición 3 de [**7**]).

3. Grupos o-acotados y σ-compactos

Demostremos que la clase de los grupos estrictamente o-acotados contiene a los subgrupos de los grupos σ-compactos como una subclase propia.

EJEMPLO 3.7. Sea $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de grupos numerables discretos. Considere el producto $\Pi = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ con la topología de la $\aleph_0$-caja τ, cuya base consta de los conjuntos de la forma $p_B^{-1}(x)$ donde $p_B \colon \Pi \to \Pi_B$ es la proyección, B es un subconjunto numerable de A y $x \in \Pi_B = \prod_{\alpha \in B} G_\alpha$. Es fácil ver que $\Pi = (\Pi, \tau)$ es un grupo topológico Hausdorff donde todos los subconjuntos G_δ son abiertos, es decir, Π es un P-grupo.

Para $g \in \Pi$, sea $\operatorname{supp} g = \{\alpha \in A : \pi_\alpha(g) \neq e_\alpha\}$ donde π_α es la proyección de Π sobre G_α y e_α es la identidad de G_α. Sea G^* la suma débil de los grupos G_α, es decir, $G^* = \{g \in \Pi : |\operatorname{supp} g| < \aleph_0\}$. Es evidente que G^* es un P-grupo y, por lo tanto, tiene dimensión cero. Por un resultado de Comfort (véase [**4**, Teorema 2.3]), el grupo G^* es de Lindelöf. Demostraremos que G^* es estrictamente o-acotado.

Denote con $[A]^{\leq\omega}$ la familia de todos los subconjuntos numerables no vacíos de A. Para todo $B \in [A]^{\leq\omega}$, sea e_B la identidad de Π_B. Entonces la familia $\mathfrak{U} = \{U_B : B \in [A]^{\leq\omega}\}$ es una base de la identidad e de G^*, donde $U_B = p_B^{-1}(e_B) \cap G^*$. Es fácil verificar lo siguiente:

(1) los conjuntos U_B son cerrados abiertos;
(2) todo U_B es un subgrupo de G^*;
(3) $|G^*/U_B| \leq \aleph_0$ para cada $B \in [A]^{\leq\omega}$.

Podemos suponer sin perder generalidad que el jugador I elige elementos de $\mathfrak{U}$. Más aún, supongamos que si U_{B_n} y $U_{B_{n+1}}$ son las elecciones del primer jugador en los pasos n y $n+1$, respectivamente, entonces $U_{B_n} \supseteq U_{B_{n+1}}$. Así, el jugador I formará una sucesión decreciente $U_{B_0} \supseteq U_{B_1} \supseteq \ldots$ de subgrupos abiertos de índice numerable en G^*. Para todo U_{B_i} en esta sucesión, definimos un conjunto numerable $A_i = \{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots\}$ eligiendo un elemento $x_{i,j}$ en toda clase lateral izquierda de U_{B_i} en G^* de tal manera que $\operatorname{supp} x_{i,j} \subseteq B_i$ para cada $j \in \omega$.

Sea U_{B_0} la elección del primer jugador. Entonces el jugador II elige $F_0 = \{x_{0,0}\}$. Si el jugador I elige U_{B_1}, el jugador II elige $F_1 = \{x_{0,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, x_{1,1}\}$. En el paso n, si el jugador I elige U_{B_n}, el jugador II elige $F_n = \{x_{i,j} : i, j \leq n\}$. Es fácil ver que $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

Ahora, probaremos que $G^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_{B_i}$. Sea $x \in G^*$ arbitrario, y defina $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Entonces $K = xU_B$ es una clase lateral izquierda de U_B que contiene a x. Para todo $i \in \omega$, K es un subconjunto de alguna clase lateral izquierda de U_{B_i}, digamos $K \subseteq x_{i,k_i} \cdot U_{B_i}$. Tenemos una sucesión decreciente

$$x_{0,k_0} U_{B_0} \supseteq x_{1,k_1} U_{B_1} \supseteq \cdots \supseteq x_{n,k_n} U_{B_n} \supseteq \cdots \supseteq K.$$

Observe que si $i < j$ y $yU_{B_j} \subseteq xU_{B_i}$, entonces $x^{-1}y \in U_{B_i}$. Por lo tanto, $x^{-1}(\alpha)y(\alpha) = e_\alpha$ para cada $\alpha \in B_i$. En consecuencia,

$$\operatorname{supp} x_{0,k_0} \subseteq \operatorname{supp} x_{1,k_1} \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{supp} x_{n,k_n} \subseteq \cdots .$$

En efecto, si $n < m$, entonces $x_{m,k_m} = x_{n,k_n} u$ para algún $u \in U_{B_n}$. Como $\operatorname{supp} x_{n,k_n} \subseteq B_n$, los soportes de x_{n,k_n} y u son ajenos. Esto implica que $\operatorname{supp} x_{n,k_n} \subseteq \operatorname{supp} x_{m,k_m}$.

Para todo $i \in \omega$, tenemos $x \in x_{i,k_i} U_{B_i}$, de donde $\operatorname{supp} x_{i,k_i} \subseteq \operatorname{supp} x$. En consecuencia, existe un entero m tal que

$$x_{m,k_m} = x_{m+1,k_{m+1}} = x_{m+2,k_{m+2}} = \cdots .$$

Defina $y = x_{m,k_m}$. Entonces $x \in y \cdot U_{B_i}$ para todo $i \geq m$, es decir, $x \in yU_B$. Observe que $y \in F_n$ para $n = \max\{m, k_m\}$, así que $G^* = (\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i) \cdot U_B$. Como

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i\right) \cdot U_B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_{B_i},$$

tenemos $G^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_{B_i}$. Por lo tanto, G^* es estrictamente o-acotado.

Es fácil ver que todo P-grupo de Lindelöf es completo. En efecto, todo subespacio de Lindelöf de un P-espacio de Hausdorff es cerrado. Además, si un P-grupo G es un subgrupo denso de un grupo topológico H, entonces H es un P-grupo. Por lo tanto, un P-grupo de Lindelöf coincide con su compleción. Así, el grupo anterior G^* no puede ser un subgrupo de un grupo σ-compacto H, de otra forma G^* sería cerrado en H y, por lo tanto, σ-compacto. Deducimos que los grupos estrictamente o-acotados no coinciden con los subgrupos de los grupos σ-compactos.

4. Una caracterización de los grupos o-acotados

Un grupo topológico segundo numerable no necesariamente es o-acotado (véase el ejemplo 3.6). El teorema siguiente caracteriza la clase de los grupos o-acotados en términos de sus imágenes homomorfas continuas segundo numerables.

TEOREMA 3.8. *Un grupo topológico $\aleph_0$-acotado G es o-acotado si y sólo si todas las imágenes homomorfas continuas segundo numerables de G son o-acotadas.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de la condición se deduce del teorema 3.3. Suponga que G es un grupo $\aleph_0$-acotado cuyas imágenes homomorfas continuas segundo numerables son o-acotadas. Sea $U_0, U_1, \ldots$ una sucesión de vecindades de la identidad en G. Para todo $i \in \omega$, elija una vecindad V_i de la identidad tal que $V_i^2 \subseteq U_i$. Como G es $\aleph_0$-acotado, para todo V_i podemos hallar un homomorfismo continuo $\psi_i \colon G \to H_i$ sobre un grupo segundo numerable H_i y una vecindad V_i^* de la identidad en H_i tales que $\psi_i^{-1}(V_i^*) \subseteq V_i$ (véase el lema 1.42 o [7]). Sea $\varphi = \Delta_{i\in\omega}\psi_i \colon G \to \prod_{i\in\omega} H_i$ el producto diagonal de los homomorfismos ψ_i. El grupo $K = \varphi(G)$ es segundo numerable y, por hipótesis, o-acotado. Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & K \subseteq \prod_{i\in\omega} H_i \arrow[d, "f_i"] \\ & H_i \end{tikzcd}$$

donde f_i es la restricción de la proyección $\pi_i \colon \prod_{j\in\omega} H_j \to H_i$ en K. Para cada $i \in \omega$, defina $W_i = f_i^{-1}(V_i^*)$. Como K es o-acotado, existe una sucesión

$\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de K tal que

$$K = \bigcup_{i\in\omega} E_i \cdot W_i.$$

Para todo $x \in E_i$, elija $g_x \in \varphi^{-1}(x)$ y defina $F_i = \{g_x : x \in E_i\}$.

Probaremos que $G = \bigcup_{i\in\omega} F_i \cdot U_i$. Para todo $g \in G$, existen $i \in \omega$ y $y \in E_i$ tales que $\varphi(g) \in yW_i$. Como $N = \ker\varphi \subseteq V_i$ para cada $i \in \omega$, tenemos

$$g \in \varphi^{-1}(yW_i) = g_yN \cdot \varphi^{-1}(W_i) \subseteq g_yN \cdot V_i \subseteq g_yV_i^2 \subseteq g_yU_i.$$

En consecuencia, $g \in F_i \cdot U_i$ y, por lo tanto, $G = \bigcup_{i\in\omega} F_i \cdot U_i$. Deducimos que G es o-acotado. $\square$

El teorema 3.8 nos permite dar otra demostración del hecho de que todo P-grupo de Lindelöf es o-acotado (véase el teorema 3.4). En efecto, si G es un P-grupo de Lindelöf y $\phi\colon G \to H$ es un homomorfismo continuo sobre un grupo segundo numerable H, entonces H debe ser numerable y, en consecuencia, o-acotado. Por lo tanto, G es o-acotado por el teorema 3.8.

PROBLEMA 3.9. *¿Es cierto que todo grupo $\aleph_0$-acotado G es estrictamente o-acotado si y sólo si todas sus imágenes homomorfas continuas segundo numerables son estrictamente o-acotadas?*

5. Los espacios $C_p(X)$ y propiedades de productividad

Para un espacio de Tikhonov X, denotamos con $C_p(X)$ el anillo de todas las funciones reales continuas sobre X con la topología de la convergencia punto por punto (véase [**3**] para resultados básicos en C_p-teoría). Con la operación de suma, $C_p(X)$ es un grupo topológico abeliano. Comenzamos esta sección con un teorema que caracteriza la o-acotación del grupo $C_p(X)$.

TEOREMA 3.10. *El grupo $C_p(X)$ es estrictamente o-acotado si y sólo si X es seudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es seudocompacto, entonces $C_p(X) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} [-n,n]^X$. Así, $C_p(X)$ es un subgrupo de un grupo σ-compacto, y el corolario 3.2 implica que $C_p(X)$ es estrictamente o-acotado. Por otro lado, si X no es seudocompacto, entonces contiene un subespacio discreto infinito numerable C^*-encajado Y. Por lo tanto, la función restricción $\pi\colon C_p(X) \to C_p(Y) \cong R^\omega$, $\pi(f) = f|_Y$ para $f \in C_p(X)$, es un epimorfismo continuo. En consecuencia, $C_p(X)$ no puede ser estrictamente o-acotado por el teorema 3.3 y el ejemplo 3.6. $\square$

No sabemos si la o-acotación es una propiedad productiva:

PROBLEMA 3.11. *¿Es o-acotado el producto de dos grupos o-acotados?*

Resolveremos el problema 3.11 en sentido afirmativo si uno de los factores es un subgrupo de un grupo σ-compacto.

TEOREMA 3.12. *Si G es un subgrupo de un grupo topológico σ-compacto y H es un grupo o-acotado, entonces $G \times H$ es o-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Primero suponga que G es σ-compacto. Sea $U_0, U_1, \ldots$ una sucesión de vecindades de la identidad en $G \times H$. Podemos suponer sin perder generalidad que cada U_i tiene la forma $U_i = V_i \times W_i$ donde V_i y W_i son vecindades de la identidad en G y H, respectivamente. Como el grupo G es σ-compacto, lo podemos representar como $G = \bigcup_{n\in\omega} K_n$, donde los K_n son subconjuntos compactos de G y $K_n \subseteq K_{n+1}$ para cada $n \in \omega$.

Para todo $i \in \omega$, sea $D_i \subset G$ un conjunto finito tal que $K_i \subseteq D_i \cdot V_i$. Considere las sucesiones $\mathcal{W}_n = \{W_{n+i} : i \in \omega\}$, $n \in \omega$. Como H es o-acotado, para todo $n \in \omega$ existe una sucesión $\mathcal{E}_n = \{E_{n,i} : i \geq n\}$ de subconjuntos finitos de H tal que

$$H = \bigcup_{i\geq n} E_{n,i} \cdot W_i.$$

Defina un subconjunto finito F_i de $G \times H$ por

$$F_i = D_i \times \Big(\bigcup_{n\leq i} E_{n,i}\Big).$$

Probaremos que

$$G \times H = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cdot U_i.$$

Para un punto $(g, h) \in G \times H$, existe $n \in \omega$ tal que $g \in K_n$. Por la elección de $\mathcal{E}_n$, existen $i \geq n$ y $y \in E_{n,i}$ tales que $y \cdot w = h$ para algún $w \in W_i$. Como $K_n \subseteq K_i$, existe $x \in D_i$ tal que $x \cdot v = g$ para algún $v \in V_i$. Entonces $(g, h) = (x, y) \cdot (v, w) \in F_i \cdot U_i$, y esto pruba que $G \times H$ es o-acotado.

Ahora, si G es un subgrupo de un grupo σ-compacto K, entonces $K \times H$ es o-acotado. Aplicamos el teorema 3.1 al subgrupo $G \times H$ de $K \times H$ para concluir que $G \times H$ es o-acotado. $\square$

Si combinamos los teoremas 3.10 y 3.12 obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.13. *Si G es un grupo o-acotado y X es un espacio seudocompacto, entonces $G \times C_p(X)$ es o-acotado.*

6. Un grupo o-acotado que no es estrictamente o-acotado

El ejemplo siguiente muestra que los conceptos de o-acotación y o-acotación estricta son diferentes aún en la clase de los grupos segundo numerables. Utilizamos la notación siguiente: Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos, $A_i \subseteq X_i$ para cada $i \in I$ y $V = \prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$, definimos $\operatorname{coord} V = \{i \in I : A_i \neq X_i\}$.

EJEMPLO 3.14. Para todo $x \in \mathbb{R}^\omega$, definimos $\operatorname{supp} x = \{n \in \omega : x(n) \neq 0\}$. Sea $\{n_k : k \in \omega\}$ una enumeración de $\operatorname{supp} x$ en orden creciente. Denote con X el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^\omega$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(n_k)}{n_{k+1}} = 0.$$

Considere el subgrupo G de $\mathbb{R}^\omega$ generado por X, es decir, $G = \langle X \rangle$. En lo que sigue, utilizaremos la notación aditiva para la operación de grupo en $\mathbb{R}^\omega$.

Probaremos que G no es estrictamente o-acotado dando una estrategia ganadora para el jugador I. En el primer turno, el jugador I elige $U_0 = G \cap (\prod_{j\in\omega} V_{0,j})$, donde $V_{0,0} = (-1,1)$ y $V_{0,j} = \mathbb{R}$ si $j > 0$. Suponga que para este turno la elección del jugador II es el conjunto finito $F_0 \subset G$. Para $n_0 = 0$, tome $x(0) \in \mathbb{R} \setminus \pi_0(F_0 + U_0)$ donde $\pi_0 \colon \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}_0$ es la proyección. Tome un entero n_1 tal que $|x(0)| < n_1$. En el segundo turno, el jugador I elige $U_1 = G \cap (\prod_{j\in\omega} V_{1,j})$, donde $V_{1,j} = (-1,1)$ para $0 \leq j \leq n_1$ y $V_{1,j} = \mathbb{R}$ si $j > n_1$. En general, suponga que ya se eligieron las vecindades $U_0, U_1, \ldots, U_k$ de la identidad en G, los subconjuntos finitos $F_0, F_1, \ldots, F_k$ de G, los enteros positivos $n_0 < n_2 < \cdots < n_k$ y los números reales $x(n_0), x(n_1), \ldots, x(n_k)$ de tal manera que $l \cdot |x(n_{l-1})| < n_l$ y $x(n_l) \notin \pi_l(F_l + U_l)$ para cada $l \leq k$. Elegimos un entero n_{k+1} tal que $(k+1)|x(n_k)| < n_{k+1}$. Entonces, en el turno $k+1$ el jugador I elige $U_{k+1} = G \cap (\prod_{j\in\omega} V_{k+1,j})$, donde $V_{k+1,j} = (-1,1)$ para $0 \leq j \leq n_{k+1}$ y $V_{k+1,j} = \mathbb{R}$ si $j > n_{k+1}$. Es fácil ver que el punto $p \in \mathbb{R}^\omega$ definido por

$$p(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \in \{n_0, n_1, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es un elemento de $X \subseteq G$ y que $p \notin \bigcup_{i\in\omega}(F_i + U_i)$. Esto implica que $\varnothing \neq G \setminus \bigcup_{i\in\omega}(F_i + U_i)$, así que el primer jugador tiene una estrategia ganadora, y el grupo G no es estrictamente o-acotado.

Demostraremos que G es o-acotado. Para este propósito, asociamos a cada sucesión creciente de enteros no negativos $q_0 < q_1 < \cdots$, una sucesión B_0, $B_1, \ldots$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^\omega$ definidos por

$$B_i = \prod_{j\in\omega} A_{i,j}, \quad \text{donde} \quad A_{i,j} = \begin{cases} [-q_{i+1}, q_{i+1}] & \text{si } j \leq q_i, \\ \mathbb{R} & \text{si } j > q_i. \end{cases}$$

Probemos que $X \subseteq \bigcup_{i\in\omega} B_i$ para toda sucesión de este tipo. En efecto, si $x \in X$, entonces $\lim_{k\to\infty}(x(n_k)/n_{k+1}) = 0$. Así, podemos elegir un entero N tal que

$$k \geq N \implies |x(n_k)| < n_{k+1}.$$

Defina $M = \max\{|x(n_0)|, |x(n_1)|, \ldots, |x(n_N)|\}$. Elija $i_0 \in \omega$ y $p \in \omega$ tales que $q_{i_0} > M$ y $q_{i_0} \leq n_p < q_{i_0+1}$. Sea $k \in \omega$ arbitrario. Si $n_k > q_{i_0}$, entonces $A_{i_0,n_k} = \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $x(n_k) \in A_{i_0,n_k}$; si $k < N$ y $n_k \leq q_{i_0}$, entonces $|x(n_k)| \leq M < q_{i_0}$ y $x(n_k) \in A_{i_0,n_k}$; por último, si $k \geq N$ y $n_k \leq q_{i_0}$, entonces $k < p$ y

$|x(n_k)| < n_{k+1} < q_{i_0+1}$. Esto implica que $x(n_k) \in A_{i_0,n_k} = [-q_{i_0+1}, q_{i_0+1}]$. En consecuencia, $|x(j)| \in A_{i_0,j}$ para todo $j \in \omega$, es decir, $x \in B_{i_0}$.

Si U_1, $U_2, \ldots$ es una sucesión de vecindades de la identidad en G, para toda $k \in \omega$ elegimos una vecindad básica V_k de la identidad en G tal que $V_k + \cdots + V_k \subseteq U_k$, donde V_k se toma k veces como sumando. Ahora, definimos una sucesión creciente de enteros $q_0 < q_1 < \ldots$ tal que $\operatorname{coord} V_k \subseteq [0, q_k]$ para cada $k \in \omega$. Para todo $k \in \omega$, elegimos un conjunto finito $E_k \subseteq G$ de tal manera que $E_k + V_k$ cubra B_k, el k-ésimo elemento de la sucesión asociada con $q_0 < q_1 < \ldots$. Defina $F_k = E_k + \cdots + E_k$, donde E_k es k veces sumando. Probemos que $G \subseteq \bigcup_{i\in\omega}(F_i + U_k)$. Si $x \in G$, entonces $x = y_1 + \cdots + y_n$, donde $y_i \in X$ para cada $i \leq n$. Por el argumento anterior, $y_i \in B_{k_i}$ para algún entero k_i, $i = 1, \ldots, n$. Si $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n, n\}$, entonces $y_i \in B_k$, para cada $i \leq n$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} y_1 + \cdots + y_n &\in \underbrace{E_k + V_k + \cdots + E_k + V_k}_{n \text{ veces}} \\ &\subseteq \underbrace{E_k + V_k + \cdots + E_k + V_k}_{k \text{ veces}} \\ &\subseteq \underbrace{E_k + \cdots + E_k}_{k \text{ veces}} + \underbrace{V_k + \cdots + V_k}_{k \text{ veces}} \subseteq F_k + U_k. \end{aligned}$$

Esto demuestra que G es o-acotado.

Bibliografía

1. A. V. Arhangel'skiĭ, Classes of topological groups, *Russian Math. Surveys* **36** (1981), 151–174. Russian original in: *Uspekhy Mat. Nauk* **36** (1981), 127–146.
2. A. V. Arhangel'skiĭ, *Factorization theorems and function spaces: stability and monolithicity,* Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 177–182.
3. A. V. Arkhangel'skiĭ, Topological functional spaces Kluwer Academic Publishers, (1992).
4. W. W. Comfort, *Compactness like properties for generalized weak topological sums,* Pacific J. Math. **60** (1975), 31–37.
5. W. W. Comfort and K. A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups,* Pacific J. Math. **16** (1966), 483–496.
6. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag (1989).
7. I. I. Guran, *On topological groups close to being Lindelöf,* Soviet Math. Dokl. **23** (1981), 173–175.
8. S. Hernández, M. Sanchiz, and M. Tkačenko, *Bounded sets in spaces and topological groups,* submitted for publication.
9. E. Hewitt y K. Ross, Abstract Harmonic Analysis Springer Verlag, (1963).
10. L. S. Pontryagin, Continuous Groups, Princeton Univ. Press, Princeton 1939.
11. M. G. Tkačenko, *Some results on inverse spectra I,* Comment. Math. Univ. Carolin. **22** (1981), 621–633.
12. M. G. Tkačenko, *Subgroups, quotient groups and products of* $\mathbb{R}$*-factorizable groups,* Topology Proceedings **16** (1991), 201–231.
13. M. G. Tkačenko, *Factorization theorems for topological groups and their applications,* Topology Appl. **38** (1991), 21–37.

Índice