

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
División de Ciencias Básicas e Ingenierías
Posgrado en Matemáticas

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Análisis de Fourier aplicando integración generalizada

Tesis de doctorado

Presenta:

Manuel Bernal González

Matricula: 2171801337

Directores de tesis:

Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz

Dra. María Guadalupe Morales Macías

Jurado:

Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz

Presidente

Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson

Vocal

Dra. María de Lourdes Palacios Fabila

Vocal

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Vocal

Dr. Julio Cesar García Corte

Secretario

31 de agosto del 2023

Dedicado:

A mi madre, a mi padre, a mis hermanas y a mis sobrinos.

En especial a mis hijas Ximena y Liliana. En esta vida cumpliremos nuestros sueños y en la eternidad seguiremos juntos.

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a mis asesores de tesis doctoral:

1. Al Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz por iniciarme en el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil y el Análisis de Fourier. Dr. Arredondo gracias por enseñarme tan hermosas matemáticas.
2. A la Dra. María Guadalupe Morales Macías por sus sugerencias y correcciones. Dra. Morales su guía fue muy importante para realizar este proyecto doctoral.

Gracias a ambos por sus clases, su confianza y su tiempo para explicarme detalles valiosos.

Por otra parte, un aspecto fundamental para la conclusión de mi tesis doctoral fueron las correcciones y sugerencias de mis sinodales de examen de grado:

1. Dr. Julio Cesar García Corte
2. Dra. María de Lourdes Palacios Fabila
3. Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
4. Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson.

Su experiencia académica me permitieron afinar detalles para mejorar la redacción, formato y presentación final de esta tesis. Muchas gracias por su tiempo.

Al Dr. Carlos Ibarra Valdez, quien fue parte de mi examen predoctoral, sus sugerencias en mi examen predoctoral fueron una gran motivación para realizar algunas modificaciones.

Por último, quiero agradecer a la coordinadora del posgrado del departamento de matemáticas, por hacer posible que la Dra. Marcia Cristina Anderson Braz Federson revisara mi tesis de doctorado y fuese sinodal de mi examen de grado y su apoyo fue fundamental durante el proceso administrativo para llevar a cabo mi examen de grado.

Índice general

1. La integral de Henstock-Kurzweil y Kurzweil-Stieltjes	13
1.1. La integral de Henstock-Kurzweil en intervalos compactos	13
1.2. Propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil	16
1.2.1. Las funciones de variación acotada y su relación con la integral de Henstock-Kurzweil	25
1.2.2. El espacio de las funciones absolutamente integrables y su relación con el espacio $HK(I)$	29
1.3. La integral de Henstock-Kurzweil en intervalos no acotados	37
2. La transformada de Fourier	51
2.1. La transformada de Fourier en el sentido de la integral de Lebesgue	51
2.2. Una versión del Lema de Riemann-Lebesgue sobre $BV_0(\mathbb{R})$	56
2.3. La transformada HK de Fourier $\mathcal{F}_{HK}(f)$	58
2.3.1. La transformada HK de Fourier sobre el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$	61
3. Generalización de algunas propiedades de la transformada de Fourier para funciones no absolutamente integrables	65
3.1. Una aproximación de \mathcal{F}_p a través de \mathcal{F}_{HK}	65
3.2. Diferenciabilidad de la transformada HK de Fourier	75
3.3. La relación de continuidad entre \mathcal{F}_2^S y \mathcal{F}_{HK}^C	89
4. La integrabilidad de la transformada Seno de Fourier	95
4.1. Integración generalizada	95
4.2. La integrabilidad de la transformada Seno de Fourier	97
4.3. Condición necesaria para la integrabilidad de la transformada Seno de Fourier	102
5. Conclusiones	109

Introducción

La teoría de Riemann (1854) permite integrar funciones acotadas y discontinuas, cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida cero (con respecto a la medida de Lebesgue). En cierto sentido, la teoría de Riemann es lo suficientemente amplia. Sin embargo, esta tiene limitaciones para integrar funciones acotadas y discontinuas en todo punto, por ejemplo la función de Dirichlet [6, 8, 13, 16, 35], o bien los teoremas de convergencia de la integral de Riemann son restrictivos, véase el Ejemplo 1.1.1. La introducción de una integral más general fue necesaria después de los trabajos publicados por Fourier y Dirichlet [8, 20], ya que por ejemplo, se requería considerar la integral de funciones que en general no son Riemann integrables, véanse los Ejemplos 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.6 y 1.3.2. En particular, se necesitaba integrar funciones discontinuas en todo punto. Además de asegurar el intercambio de una serie infinita e integral, y una teoría de integración con teoremas de convergencia más generales que los que ofrece la teoría de integración de Riemann.

Emilie Borel, alrededor del año 1898, desarrolló la teoría de la medida y estableció las propiedades que se deben satisfacer para que un conjunto sea medible y también cuando este conjunto tiene medida cero [8, 13, 16]. Henri Lebesgue en 1902, utilizó la teoría desarrollada por Emilie Borel para definir una nueva integral [8, 13, 16, 20]. En la actualidad, a esta integral se le conoce como la integral de Lebesgue. La teoría de la medida es fundamental para definir la integral de Lebesgue [8, 10, 13, 40].

Las integrales de Riemann y Lebesgue conceptualmente tienen orígenes diferentes. La integral de Lebesgue resultó de una generalización de la integral de Riemann manteniendo válidos algunos teoremas de esta última integral. Así, toda función f Riemann integrable es Lebesgue integrable y los valores de sus integrales coinciden [8, 16, 20]. Además, una función Lebesgue es Riemann integrable si y sólo si el conjunto de sus discontinuidades tiene medida de Lebesgue cero [8, 13]. Estas propiedades son empleadas para evaluar la integrabilidad, en el sentido de Riemann, de ciertas funciones Lebesgue integrables.

Por otra parte, no siempre es posible emplear métodos numéricos para evaluar funciones Lebesgue integrables debido a que existen funciones que no son continuas [8, 16, 35]. La mayoría de los métodos de integración numérica necesitan la continuidad y la primera derivada de la función, ya sea el caso para intervalos acotados o no acotados. Dada una función Lebesgue integrable su aproximación numérica sería a través de funciones escalonadas para intervalos acotados. Para intervalos no acotados, la aproximación por funciones escalonadas resulta un método computacional poco eficiente al implementar un algoritmo.

Para sucesiones de funciones, la integral de Lebesgue cuenta con teoremas de convergencia, los cuales no suponen la convergencia uniforme [8, 13, 16, 35]. Los teoremas de convergencia de la teoría de integración de Lebesgue hacen de esta una herramienta

esencial en infinidad de áreas de las Matemáticas. Por dar un ejemplo, el Teorema de la Convergencia Dominada se emplea en el Análisis Funcional en múltiples artículos, por ejemplo [1, 3, 33].

Por otra parte, el proceso de integración puede ser definido por dos caminos diferentes. Una de manera descriptiva y la otra constructiva [23]. Isaac Newton (1642-1723) definió su integral como una antiderivada, es decir, si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces f es Newton integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

y esto se conoce como una definición descriptiva. Por su parte, Bernhard Riemann en 1854 definió su integral de forma constructiva, tomando sumas de áreas y el límite en las particiones y a este proceso se le conoce como constructivo [23].

En el marco de la integral de Lebesgue, el Teorema Fundamental del Cálculo Integral se reformula de la siguiente manera, conforme [13].

Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable casi donde sea en $[a, b]$, F' es Lebesgue integrable, y

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a, b].$$

Una caracterización de las funciones Lebesgue integrables se hace a través de las funciones absolutamente continuas. En esta tesis se denotará a este espacio de funciones como AC , conforme a los textos [6, 13, 16, 35]. Así, usando la notación previa, una función f es Lebesgue integrable en $[a, b]$ si y sólo si F es $AC[a, b]$.

Continuando con esta línea, el trabajo de Ulisse Dini y Vito Volterra muestra que existen funciones que son acotadas y sus derivadas no son Lebesgue integrables. En general, el Teorema Fundamental del Cálculo Integral no es válido para todo el conjunto de las funciones derivada [16]. Por ejemplo, la función

$$F(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \operatorname{sen}(1/(x-a)) & \text{si } a < x \leq b, \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

es oscilante, diferenciable sobre la recta real pero F' no es Lebesgue integrable, ya que F no es una función absolutamente continua [16].

Con el interés de integrar funciones oscilantes, en 1912, Arnaud Denjoy propone una integral que permitió generalizar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para funciones que son derivadas. Así, la integral de Denjoy generalizó la caracterización que existe entre las funciones absolutamente continuas y las funciones Lebesgue integrables, tal relación fue demostrada por el matemático ruso Nikolái Luzin [13, 16].

En 1914, Oskar Perron propuso otra integral que se le conoce como la integral de Perron. Esta establece una extensión de la integral de Lebesgue y también con la propiedad de que todas las derivadas son integrables en este marco teórico [16]. Introduce las nociones de funciones mayores y menores que se definen utilizando las derivadas superior e inferior, respectivamente [16]. El trabajo de Oskar Perron fue independiente al de Arnaud Denjoy, por tal motivo tienen enfoques diferentes. Sin embargo, estas integrales son equivalentes sobre \mathbb{R} (véase [16, Teorema 11.2]) y en la actualidad se conocen como la integral de Denjoy-Perron [6, 16].

En 1957, al realizar investigaciones en el área de ecuaciones diferenciales, Jaroslav Kurzweil retomó las ideas de Bernhard Riemann para desarrollar una integral en términos de ε - δ , que mantuviera válidos los teoremas de convergencia de la integral de Lebesgue y que todas las derivadas fuesen integrables como en la integral de Denjoy-Perron [6, 11, 16].

Posteriormente, en la década de 1960, Ralph Henstock propone una definición de integral, que bajo ciertas condiciones resulta equivalente a la definición de Jaroslav Kurzweil [6, 16]. Así, a estas se les conoce como la integral de Henstock-Kurzweil, en otros textos la podemos encontrar como la integral generalizada de Riemann [6, 16]. En [16, Teorema 11.3], se demuestra que las integrales de Denjoy-Perron y Henstock-Kurzweil son equivalentes sobre \mathbb{R} . Una característica importante de espacio de las funciones Lebesgue integrables son un subconjunto propio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables y, el valor de las integrales coinciden [6, 16]. Cabe señalar, que la integral de Henstock-Kurzweil establece una relación con la integral de Riemann-Stieltjes [35]. Este hecho es de gran utilidad en el desarrollo de algunas de nuestras contribuciones como veremos en capítulos posteriores.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral es uno de los resultados principales de la teoría de integración. En el marco de la integral de Henstock-Kurzweil todas las funciones derivadas en el sentido usual son integrables, a diferencia de la teoría de Lebesgue. En la presente tesis, se enuncian las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo Integral en el marco de la teoría de Henstock-Kurzweil [6]. Los Ejemplos 1.2.1-1.2.3 expuestos en la sección 1.2 muestran el alcance teórico de la integral de Henstock-Kurzweil. En [12] se extiende el Teorema Fundamental de Calculo para en espacios de Banach.

La integral de Henstock-Kurzweil cuenta con el Teorema del Multiplicador. Éste muestra la conexión con la integral de Riemann-Stieltjes. Existen diferentes definiciones de una integral del tipo de Riemann-Stieltjes. En esta tesis, empleamos la definición de Riemann-Stieltjes dada en [6] y usamos la conexión con otras integrales tipo Stieltjes, tales como Lebesgue-Stieltjes y Kurzweil-Stieltjes [29, 35]. Por último, cabe remarcar que los multiplicadores de las funciones Lebesgue integrables son las funciones medibles y acotadas [8, 13, 16]. Así, en [43] se muestra que los multiplicadores de las funciones Henstock-Kurzweil son las funciones de variación acotada; el conjunto de estas funciones se denota como $BV(\mathbb{R})$, conforme a [6, 16, 33, 35]. El Teorema del Multiplicador es válido para intervalos no acotados y es empleado en recientes publicaciones [1, 3, 33]. Considerando las funciones de variación acotada se obtienen nuevos resultados en el contexto del Análisis de Fourier con la integral de Henstock-Kurzweil.

Una caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil fue establecida por Heinrich Hake. El Teorema de Hake afirma que cualquier función cuya integral impropia exista es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Una consecuencia de este resultado es que las funciones Riemann integrables en el sentido impropio están contenidas en el espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables. Un aspecto teórico importante es el siguiente, en general no toda función Riemann impropriamente integrable es Lebesgue integrable, véase el Ejemplo 1.3.2. El Teorema de Hake es válido para intervalos compactos e intervalos no acotados [6, 16].

En [49, Proposición 2.5] se establece una relación de orden parcial en \mathcal{G} , idénticamente (\mathcal{G}, \square) , donde denotamos con \mathcal{G} a la clase de Saks de integrales, véase [49]. Notemos que la integral de Henstock-Kurzweil (HK) incluye a la integral de Newton (N),

Riemann (R) y Lebesgue (L), idénticamente $N \sqsubset HK$, $R \sqsubset HK$, $L \sqsubset HK$, véase [49].

En [49, Teorema 4.10] se demuestra que la integral de Henstock-Kurzweil es invariante bajo las extensiones de Cauchy y de Harnack. La integral de Henstock-Kurzweil está contenida en cada integral que contiene la integral de Lebesgue [49]. De esta manera, el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables es el espacio más pequeño que contiene funciones Lebesgue integrables y es invariante bajo estas extensiones, véase [49].

Es importante señalar que la teoría de integración de Henstock-Kurzweil cuenta con buenos teoremas de convergencia. Las pruebas de convergencia para funciones definidas sobre intervalos no acotados son enunciadas y demostradas en la tesis, en particular, utilizamos la Prueba de Chartier-Dirichlet para desarrollar algunos de nuestros resultados principales.

La teoría de integración surge como una subárea del Análisis Matemático en el año de 1823 con el formalismo empleado por Agustín Cauchy [8]. La teoría moderna de integración inicia con la introducción de nuevas integrales, más generales que las anteriores y abre la posibilidad de aplicaciones en diferentes áreas. En particular, el Análisis de Fourier está directamente relacionado con la teoría de integración [8, 13, 20]. En [48] se inicia el estudio de las series de Fourier en el contexto de la integral de Denjoy. Posteriormente, aproximadamente en el año 2002, Erik Talvila [44] estudió la transformada de Fourier empleando la integral de Henstock-Kurzweil. En la actualidad, un grupo de investigadores de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y la Universidad de Masaryk (República Checa) continúan investigando propiedades fundamentales de la transformada de Fourier sobre espacios de funciones no absolutamente integrables [3, 33, 36]. Por otro lado, el Dr. Juan Héctor Arredondo de la Universidad Autónoma Metropolitana estudia posibles generalizaciones de espacios de interpolación, también en el sentido de integrales generalizadas [4].

En [33], se presenta una versión del Lema de Riemann-Lebesgue para funciones de variación acotada que se desvanecen en el infinito, y que no son necesariamente Lebesgue integrables. Además, se describe un espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables pero no Lebesgue integrables, donde dicha versión del Lema de Riemann-Lebesgue es válida.

La integral de Henstock-Kurzweil es empleada en [36] para estudiar la transformada clásica de Fourier en espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Obteniendo que la transformada clásica de Fourier $\mathcal{F}_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$ y $1 < p \leq 2$ tiene una representación integral y puntual, casi donde sea, en el sentido de la integral de Henstock-Kurzweil en un espacio denso de funciones no necesariamente Lebesgue integrables. Además, para cualquier función f en este subespacio, su transformada de Fourier $\mathcal{F}_p(f)(s)$ obedece el Lema de Riemann-Lebesgue demostrado en [33] y coincide casi donde sea con una función continua excepto en el punto $s = 0$.

Los operadores lineales transformada Coseno y Seno de Fourier son estudiados en [3] en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil. Estos dos operadores son llamados HK -Coseno y HK -Seno de Fourier, respectivamente. Desde [46] se muestra que el comportamiento de la transformada Seno de Fourier y transformada Coseno de Fourier tienen propiedades cualitativas diferentes. En [3], se muestra que estos operadores lineales tienen más diferencias cualitativas en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil. De mane-

ra más precisa, el operador HK -Coseno de Fourier es acotado y el operador HK -Seno de Fourier no es acotado.

Con las ventajas teóricas que presenta la integral de Henstock-Kurzweil y las aportaciones antes mencionadas, este trabajo de tesis tiene como líneas de investigación desarrolladas en [3, 13, 26, 27, 28, 33, 36, 40, 45] que son las siguientes resultados:

1. El comportamiento asintótico y expresiones analíticas de las transformadas Seno y Coseno de Fourier.
2. El acotamiento del operador transformada Coseno con la integral de Henstock-Kurzweil.
3. El Lema de Riemann-Lebesgue para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$.
4. Las propiedades de la transformada de Fourier en espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con la integral de Henstock-Kurzweil.
5. Condiciones necesarias y suficientes para obtener la derivación bajo el signo de la integral en el marco de la integral de Lebesgue y de Henstock-Kurzweil.

Así, logramos desarrollar resultados originales usando la integral de Henstock-Kurzweil generalizado algunos de los teoremas clásicos de la transformada de Fourier.

Un primer resultado (Teorema 3.1.1) desarrollado en la presente tesis consiste en considerar una función f en el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, con $1 \leq p \leq 2$, para demostrar que $\mathcal{F}_p(f)$ es una función que se desvanece en el infinito, establecer una relación de igualdad entre el operador \mathcal{F}_{HK} (transformada de Fourier en el sentido de Henstock-Kurzweil, la cual se le conoce como la transformada HK de Fourier) y el operador clásico \mathcal{F}_p (transformada de Fourier) en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$. Notemos que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ no está contenido en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Una consecuencia directa del Teorema 3.1.1 es el Corolario 3.1.1, donde consideramos los casos particulares cuando la función f es una función par o impar. De esta manera, se obtienen expresiones analíticas que definen a la transformada de Fourier en términos de la transformada HK -Seno de Fourier o de la transformada HK -Coseno de Fourier. En ambos casos, las transformadas HK -Seno y HK -Coseno de Fourier se definen de manera puntual excepto para $s = 0$, estos resultados se desarrollaron en la sección 3.1. Además, vía el Teorema de Hake se pueden realizar cálculos numéricos para valores específicos de $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$.

Los ejemplos 3.1.1 y 3.1.2 muestran la aplicabilidad del Corolario 3.1.1. En ambos ejemplos, utilizaron programas computacionales especializados en matemáticas para calcular numéricamente la transformada HK de Fourier, estos resultados no serían posibles en el marco de la teoría de Lebesgue. En particular, en el Ejemplo 3.1.1 se considera una función con las siguientes características: pertenece a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y de variación acotada que se desvanece en el infinito. Luego, empleamos la integral de Henstock-Kurzweil para obtener una representación integral de manera puntual de su transformada de Fourier. Se obtiene una representación puntual de la transformada de Fourier con $p > 1$, véase sección 3.1. Al realizar estimaciones puntuales de la transformada HK de Fourier, observamos un comportamiento asintótico, de acuerdo al Lema de Riemann-Lebesgue, cuando los valores del parámetro s son suficientemente grande.

Para el Ejemplo 3.1.2 se elige una función que pertenece a: $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y que sea de variación acotada desvaneciéndose en el infinito. Al emplear, el Teorema 2.1.6 (Teorema de Plancherel) tenemos la igualdad entre las transformadas de Fourier $\mathcal{F}_1(f)$ y $\mathcal{F}_2(f)$, con lo cual, sólo se garantiza la convergencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ -norma. Al cambiar el enfoque a la integral de Henstock-Kurzweil, logramos una expresión analítica que permite obtener una representación integral de la transformada de Fourier. Notemos que nuestros resultados pueden ser empleados para funciones no absolutamente integrables o absolutamente integrables.

Posteriormente, en [45] se publican nuevos resultados en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil que dan condiciones necesarias y suficientes para derivar bajo el signo de la integral. Los resultados anteriores permiten enunciar y demostrar el Teorema 3.2.3 que es una contribución relevante para el Análisis de Fourier. El Teorema 3.2.3 es una generalización de la Proposición 3.2.2 y puede ser consultada en [13]. El Teorema 3.2.3 establece las condiciones para derivar la transformada HK de Fourier de funciones f en el espacio vectorial $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$, un espacio no clásico, donde la transformada HK de Fourier ha sido definida. A partir del Teorema 3.2.3 se obtuvieron resultados para lograr la diferenciabilidad de $\mathcal{F}_{HK}(f)$ y $\mathcal{F}_p(f)$. Véanse las Proposiciones 3.2.4 y 3.2.5 y los Corolarios 3.2.3 y 3.2.4. Para mostrar la relevancia teórica de estos resultados se presentan los Ejemplos 3.2.2-3.2.4. De esta manera, mostramos la diferenciabilidad de la función transformada de Fourier $\mathcal{F}_p(f)$ bajo condiciones más generales que en la teoría de Lebesgue.

Por otra parte, estudiamos la continuidad del operador transformada de Fourier de manera independiente, es decir, analizamos la continuidad del operador transformada Seno de Fourier y del operador transformada Coseno de Fourier sobre diferentes dominios. En este sentido, la transformada Seno de Fourier y transformada Coseno de Fourier tienen un comportamiento muy distinto [3, 28]. En [3] se demostró que el operador transformada HK -Coseno de Fourier es un operador lineal acotado. Empleamos este resultado para mostrar la continuidad del operador \mathcal{F}_2^S Seno de Fourier sobre un subespacio de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y con rango en $HK(\mathbb{R})$. En particular, si \mathcal{F}_2^S no cambia de signo entonces es Lebesgue integrable, véase el Teorema 3.3.1.

Para finalizar nuestra investigación, en el Capítulo 4 se enuncia y se demuestra el Teorema 4.2.1, el cual nos proporciona la única condición necesaria para garantizar la integrabilidad de la transformada HK -Seno de Fourier $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$, cuando f no es una función Lebesgue integrable pero sí es una función de variación acotada. Además, el Corolario 4.2.1 derivado del Teorema 4.2.1 nos muestra las relaciones que existen entre las diferentes integrales de Lebesgue, Henstock-Kurzweil, Riemann-Stieltjes y Kurzweil-Stieltjes [34, 35]. Los Ejemplos 4.3.1 y 4.3.2 nos muestran que la condición de que $f/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es óptima para lograr la integrabilidad de la transformada HK - Seno de Fourier.

De esta manera se han aportado nuevos resultados al Análisis de Fourier aplicando integración generalizada, véase [1, 2].

Capítulo 1

La integral de Henstock-Kurzweil y Kurzweil-Stieltjes

1.1. La integral de Henstock-Kurzweil en intervalos compactos

Iniciamos introduciendo las definiciones básicas de la integral de Henstock-Kurzweil, para después enunciar los teoremas de la integral de Henstock-Kurzweil sobre intervalos acotados, y posteriormente extender algunas de estas definiciones y resultados a intervalos no acotados.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $-\infty < a < b < \infty$. Una partición de $[a, b]$ es una colección finita de intervalos cerrados no traslapados cuya unión es $[a, b]$. Dos intervalos son no traslapados si la intersección de sus interiores es igual al vacío.

Una partición de $[a, b]$ es denotada por $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Si $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, decimos que t_i es una etiqueta del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y la colección finita de pares ordenados $\dot{\mathcal{P}} = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ se le conoce como partición etiquetada.

Las siguientes definiciones y resultados básicos de la integral de Henstock-Kurzweil se pueden consultar en [6, 16, 22, 23, 35].

Definición 1.1.1. Sea $[a, b]$ un intervalo compacto en \mathbb{R} . Decimos que $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medidora si es positiva, es decir, $\delta(t) > 0$.

Definición 1.1.2. Sea $[a, b]$ un intervalo compacto y $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada de $[a, b]$. Sea δ una medidora en $[a, b]$, decimos que $\dot{\mathcal{P}}$ es δ -fina si

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Si la partición etiquetada es δ -fina, decimos que $\dot{\mathcal{P}}$ está subordinada a δ y lo denotamos $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta$.

Notemos que cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ está contenido en la bola con centro t_i y radio $\delta(t_i)$, es decir, $B[t_i; \delta(t_i)]$ está controlado por t_i .

Definición 1.1.3. Decimos que el intervalo $[a, b]$ es no degenerado si consta de más de un punto.

El Teorema de Cousin nos asegura la existencia de al menos una partición etiquetada subordinada, dada una función medidora δ sobre cualquier intervalo no degenerado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. El enunciado del Teorema de Cousin y su demostración pueden ser consultados en [6, 16].

Ahora, introducimos la definición de la integral de Henstock-Kurzweil para intervalos compactos no degenerados. Con el objetivo de facilitar la notación denotamos el intervalo compacto $I := [a, b]$.

Definición 1.1.4. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Henstock-Kurzweil integrable si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función medidora δ_ε en I para cualquier partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ subordinada a δ_ε , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon,$$

donde $A = \int_I f = \int_a^b f(x)dx$.

El valor de la integral en la Definición 1.1.4 es único [6, 16, 23]. Al conjunto de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en I , lo denotamos de la siguiente manera: $HK(I)$. A partir de este momento todas las integrales son en el sentido de la integral de Henstock-Kurzweil, a menos que se especifique lo contrario.

La integral de Henstock-Kurzweil es análoga a la integral de Riemann. La idea intuitiva de la integral de Riemann es obtener el área bajo la curva para funciones no negativas. Ahora estudiaremos la relación que existe entre la integral de Henstock-Kurzweil y la integral de Riemann. El espacio vectorial de las funciones Riemann integrables en I es denotado por $\mathcal{R}(I)$ y si $f \in \mathcal{R}(I)$, su integral será denotada por

$$\mathcal{R} \int_I f(x)dx.$$

Teorema 1.1.1. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en I , entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en I y los valores de las integrales coinciden.

Demostración: Supongamos que $f \in \mathcal{R}(I)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ de I con

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta,$$

entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{R} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Sea $\delta_\varepsilon(t) = \frac{\delta}{2}$, para cualquier $t \in I$. Por el Teorema de Cousin, existe una partición $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\varepsilon$ de I . Si $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(t_i) \leq \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{R} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es Henstock-Kurzweil integrable y como el valor de A es único se tiene el resultado. ■

El proceso de integración de Riemann permite integrar de funciones acotadas con un número finito de discontinuidades en un intervalo compacto. Sin embargo, en 1829 el matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet da un ejemplo de una función discontinua y acotada, la cual no es Riemann integrable. Esta función recibe el nombre de la función de Dirichlet, y así resulta un contraejemplo para ilustrar el hecho de que no toda función acotada es Riemann integrable.

Ejemplo 1.1.1. *La función de Dirichlet se define en $[0, 1]$ como*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Usando la noción de área bajo la curva que la integral de Riemann proporciona para funciones no negativas. Podemos pensar que la integral de la función de Dirichlet, si existiera, sería cero. Sin embargo, es bien conocido que esta función no es Riemann integrable [6, 8, 16].

Ahora, mostraremos que la función de Dirichlet es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil. Sea $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de los números racionales en $[0, 1]$ y dado $\varepsilon > 0$. Definimos la medidora

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} & \text{si } t = r_k, \\ 1 & \text{si } t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sea $\dot{\mathcal{P}} = \{I_i, t_i\}_{i=1}^n$ una partición δ_ε -fina del intervalo $[0, 1]$. Si la etiqueta $t_i \in I_i$ es irracional, entonces $f(t_i) = 0$ y la contribución de este intervalo a la suma de Riemann es cero. Por otra parte, si la etiqueta es racional, entonces $f(t_i) = 1$ y la longitud del respectivo subintervalo $l(I_i) = x_i - x_{i-1}$ está controlada por la función medidora, ya que $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\varepsilon$. Si el k -ésimo número racional r_k es la etiqueta para el intervalo I_i , entonces

$$I_i \subset [r_k - \delta_\varepsilon(r_k), r_k + \delta_\varepsilon(r_k)],$$

así que

$$l(I_i) \leq 2\delta_\varepsilon(r_k) = \varepsilon/2^k.$$

De hecho, si r_k es una etiqueta para dos intervalos consecutivos en $\dot{\mathcal{P}}$, la suma de las longitudes de dos intervalos no traslapados es a lo más $\varepsilon/2^k$. De esta forma, cada elemento r_k aporta a lo más $\varepsilon/2^k$ a la suma de Riemann $S(f, \dot{\mathcal{P}})$.

Por lo tanto,

$$S(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

De esta forma, concluimos que

$$|S(f, \mathcal{P})| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Teorema 1.1.2. *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es medible y acotada. Entonces $f \in HK(I)$.*

En [16] se puede consultar la demostración del Teorema 1.1.2. De esta manera, tenemos que para intervalos compactos el proceso integración de Riemann no puede integrar ciertas funciones acotadas, mientras que el proceso de integración de Henstock-Kurzweil las logra integrar. Del Teorema 1.1.2 se tiene en particular el Ejemplo 1.1.1.

Continuando con nuestro estudio de la integral de Henstock-Kurzweil, en la siguiente sección se enunciarán las propiedades que subyacen de la Definición 1.1.4.

1.2. Propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil

En esta sección enunciamos las propiedades básicas de la integral de Henstock-Kurzweil en intervalos compactos y que se preservan para intervalos no acotados [6, 16].

Teorema 1.2.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Para $f, g \in HK(I)$.*

1. *Entonces $f + g \in HK(I)$ y*

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

2. *Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $cf \in HK(I)$ y*

$$\int_I cf = c \int_I f.$$

3. *Si $f \geq 0$ para toda $x \in I$, entonces*

$$\int_I f \geq 0.$$

4. *Si $f \geq g$ para toda $x \in I$, entonces*

$$\int_I f \geq \int_I g.$$

La demostración de los incisos del Teorema 1.2.1 es una consecuencia directa de la definición de la integral de Henstock-Kurzweil [6, 16]. Los incisos 1 y 2 del Teorema 1.2.1 nos afirman que el espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables es un espacio vectorial con respecto a la suma usual de funciones y el producto escalar.

Corolario 1.2.1. *Si f y $|f|$ son integrables sobre I , entonces*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|. \quad (1.1)$$

Demostración: Notemos que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para toda $x \in I$ y aplicando el inciso 4 del Teorema 1.2.1, tenemos que

$$-\int_I |f(x)| dx \leq \int_I f(x) dx \leq \int_I |f(x)| dx.$$

■

Teorema 1.2.2 (Criterio de Cauchy). *Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una medidora η_ε en I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son cualesquiera particiones η_ε -finas, entonces*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \leq \varepsilon.$$

Demostración: (\Rightarrow) Sea $f \in HK(I)$ con integral A . Definamos la medidora $\eta_\varepsilon := \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ en I tal que $\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{Q}} \ll \eta_\varepsilon$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Las particiones $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$, cumplen

$$\begin{aligned} |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| &\leq |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| + |A - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define una medidora δ_n en I tal que $\dot{\mathcal{P}}, \dot{\mathcal{Q}} \ll \delta_n$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \leq \frac{1}{n}.$$

Las medidoras pueden ser decrecientes, $\delta_n(t) \geq \delta_{n+1}(t)$ para toda $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. De lo contrario, reemplazamos δ_n por

$$\delta'_n(t) := \min\{\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t)\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\dot{\mathcal{P}}_n \ll \delta_n$. Claramente, si $m > n$, entonces $\dot{\mathcal{P}}_m$ y $\dot{\mathcal{P}}_n$ son δ_n -finas y se tiene

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{P}}_m)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para } m > n. \quad (1.2)$$

De esta manera, obtenemos una sucesión de Cauchy $(S(f; \mathcal{P}_m))_{m \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} , y definimos $\lim_{m \rightarrow \infty} S(f; \mathcal{P}_m) := A$. Pasando al límite cuando $m \rightarrow \infty$ en (1.2) se tiene

$$|S(f; \mathcal{P}_n) - A| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ con $K > \frac{2}{\varepsilon}$, y como \mathcal{Q} es una partición δ_K -fina arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} |S(f; \mathcal{Q}) - A| &\leq |S(f; \mathcal{Q}) - S(f; \mathcal{P}_K)| + |S(f; \mathcal{P}_K) - A| \\ &\leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ya que $\varepsilon > 0$ arbitrario, la función f es integrable con valor A . ■

El siguiente teorema nos asegura que si una función f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, entonces la función f es integrable en subintervalos.

Teorema 1.2.3. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Entonces f es integrable en I si y sólo si sus restricciones para $[a, c]$ y $[c, b]$ son integrables. En este caso, se tiene*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

El siguiente corolario es una generalización del Teorema 1.2.3 para un número finito de puntos dentro del intervalo $[a, b]$.

Corolario 1.2.2. *Si $f \in HK([a, b])$ y $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$, entonces las restricciones de f para cada subintervalo $[c_{i-1}, c_i]$ son integrables y*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

La demostración del Teorema 1.2.3 puede ser consultada en [6, 16] y la demostración del Corolario 1.2.2 se sigue de aplicar el Teorema 1.2.3 e inducción matemática.

Ahora, presentamos una extensión del concepto de primitiva para obtener una generalización del Teorema Fundamental de Cálculo Integral, este desarrollo nos permitirá obtener nuevos resultados en el Análisis de Fourier.

Definición 1.2.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $F, f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

- a) *Decimos que F es una primitiva de f sobre I , si la derivada $F'(x)$ existe y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$.*
- b) *Decimos que F es una a -primitiva (c -primitiva) de f sobre I , si F es continua sobre I , y existe un conjunto finito (nulo contable) E de puntos $x \in I$, donde $F'(x)$ no existe o no es igual a $f(x)$. Al conjunto E se le llama conjunto excepcional.*

c) Si $f \in HK(I)$ y $u \in I$, entonces la función $F_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$F_u(x) := \int_u^x f,$$

es llamada la integral indefinida de f con base u .

Con el objetivo de demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, enunciaremos el Lema de Straddle que es una consecuencia directa de la definición de derivada.

Lema 1.2.1 (Lema de Straddle). *Sea $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $t \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función medidora $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tales que si $u, v \in I$ satisfacen*

$$t - \delta_\varepsilon(t) \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta_\varepsilon(t), \quad (1.3)$$

entonces

$$|F(u) - F(v) - F'(t)(u - v)| \leq \varepsilon(u - v). \quad (1.4)$$

Demostración: Por definición de derivada de F en el punto $t \in I$, dado $\varepsilon > 0$ existe δ_ε tal que si $0 < |z - t| \leq \delta_\varepsilon(t)$ para $z \in I$, entonces

$$\left| \frac{F(z) - F(t)}{z - t} - F'(t) \right| \leq \varepsilon,$$

y obtenemos

$$|F(z) - F(t) - F'(t)(z - t)| \leq \varepsilon|z - t|.$$

En particular, si elegimos el punto t tal que $u \leq t$ y $v \geq t$ en el intervalo I con medidora $\delta_\varepsilon(t)$. Note que $v - t \geq 0$ y $t - u \geq 0$, entonces aplicando desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| &= |F(v) - F(u) - F'(t)(v - t) + F'(t)(v - t) - F(t) - F(u)| \\ &\leq |F(v) - F(u) - F'(t)(v - t)| + |F'(t)(v - t) - F(t) - F(u)| \\ &\leq \varepsilon(v - t) + \varepsilon(t - u) \\ &= \varepsilon(v - u). \end{aligned}$$

De esta manera, la expresión (1.4) está demostrada. ■

A continuación, presentamos y demostramos dos versiones generalizadas del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Teorema 1.2.4. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F sobre $[a, b]$, entonces $f \in HK([a, b])$ y*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración: Sea F la primitiva de f . Dado $\varepsilon > 0$, consideramos δ_ε una función medidora y una partición etiquetada de $[a, b]$ tal que satisface la condición (1.3) del Lema 1.2.1. Aplicamos el Lema 1.2.1 al subintervalo con extremos $[x_{i-1}, x_i]$ y etiqueta t_i , para obtener la siguiente desigualdad

$$\left| F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon(x_i - x_{i-1}). \quad (1.5)$$

Por otra parte, para estimar $F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}})$ realizamos la siguiente suma telescópica

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|. \quad (1.6)$$

De esta manera, obtenemos la siguiente igualdad

$$F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right]. \quad (1.7)$$

La desigualdad del triángulo aplicada a (1.7), nos permite tener la siguiente expresión

$$\left| F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right|. \quad (1.8)$$

Realizando la suma acumulada en (1.5) y por la desigualdad (1.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \left| F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}}) \right| &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se concluye que

$$f \in HK([a, b]) \quad y \quad \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.2.5. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una c -primitiva F en $[a, b]$, entonces $f \in HK([a, b])$ y

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración: Sean F una c -primitiva de f y $E = \{c_k\}_{k=1}^\infty$ el conjunto excepcional para la c -primitiva F . Como E es contable, entonces E es un conjunto nulo. Podemos suponer que $f(c_k) = 0$, con $c_k \in E$.

Definamos una función medidora en $I := [a, b]$ de la siguiente manera, dado $\varepsilon > 0$, $t \in I - E$

y, sea $\delta_\varepsilon(t)$ tal que cumple la expresión (1.3) del Lema 1.2.1. Si $t \in E$, entonces $t = c_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$; por la continuidad de F en c_k , se elige $\delta_\varepsilon(c_k) > 0$ tal que

$$|F(z) - F(c_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}},$$

para toda $z \in I$, entonces

$$|z - c_k| \leq \delta_\varepsilon(c_k).$$

De esta manera, hemos definido δ_ε en I .

Ahora, sea $\dot{\mathcal{P}} = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ una partición δ_ε -fina en I . Si ninguna de las etiquetas pertenece al conjunto excepcional E se aplica el Teorema 1.2.4.

Por otro lado, si $c_k \in E$ es una etiqueta del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\begin{aligned} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| &\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| \\ &\quad + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Ahora cada punto de E puede ser la etiqueta de a lo más dos subintervalos de $\dot{\mathcal{P}}$, por lo tanto la suma de los términos, donde $t_i \in E$ satisface la siguiente desigualdad

$$\sum_{t_i \in E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \quad (1.9)$$

Aplicando el Lema 1.2.1 a la suma de los términos, donde $t_i \notin E$ se satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{t_i \notin E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| &\leq \sum_{t_i \notin E} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon(b - a). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Sumando las expresiones (1.9) y (1.10) para después aplicar desigualdad triangular, ya que $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\varepsilon$ se tiene

$$|F(b) - F(a) - S(f; \dot{\mathcal{P}})| \leq \varepsilon(1 + b - a).$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se concluye que

$$f \in HK([a, b]) \quad y \quad \int_a^b f = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

El Teorema 1.2.5 es una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, ya que todas las derivadas son integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil, incluso si la función derivada no existe en un conjunto numerable, lo que no asegura la teoría de integración de Lebesgue [6, 16].

Veremos a continuación algunos ejemplos de funciones primitivas sin conjunto excepcional, con conjunto excepcional finito y conjunto excepcional contable, respectivamente.

Ejemplo 1.2.1. Sea

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\pi/x^2) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Su derivada es

$$F'(x) = 2x \cos(\pi/x^2) + 2\pi x^{-1} \operatorname{sen}(\pi/x^2) \quad x \in (0, 1].$$

Aplicando la definición de derivada en el punto $x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\pi/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\pi/x^2). \end{aligned}$$

Dado que $|\cos(u)| \leq 1$ para toda $u \in \mathbb{R}$, tenemos que $-|x| \leq x \cos(\pi/x^2) \leq |x|$ y como $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\pi/x^2) = 0,$$

entonces $F'(0) = 0$. Por lo tanto,

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\pi/x^2) + 2\pi x^{-1} \operatorname{sen}(\pi/x^2) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en cada punto de $[0, 1]$.

De esta manera, por el Teorema 1.2.4 se tiene

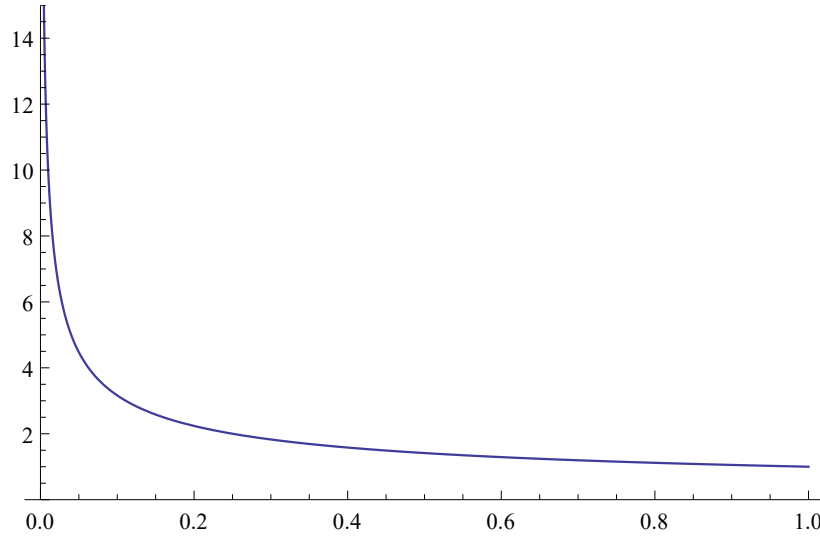
$$\begin{aligned} \int_0^1 F'(x) dx &= F(1) - F(0) \\ &= \cos(\pi) - 0 \\ &= -1. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo mostramos una función que no es Riemann integrable, y por otra parte, su primitiva es tal que el conjunto excepcional es un conjunto singular. Así, empleamos el Teorema 1.2.5, el cual es una generalización del Teorema 1.2.4 y permite que el conjunto excepcional sea a lo más contable.

Ejemplo 1.2.2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función f no es acotada en $[0, 1]$, en consecuencia no es una función Riemann integrable.

Figura 1.1: $f(x) = 1/\sqrt{x}$.

Si consideramos la función $F(x) := 2\sqrt{x}$ para toda $x \in [0, 1]$ notemos que F es continua en $[0, 1]$ y F' es diferenciable en $(0, 1]$ con $F'(x) = f(x)$ pero $F'(0)$ no existe. En consecuencia, F es una a -primitiva de f en $[0, 1]$. De hecho, el conjunto excepcional de f es $E = \{0\}$, por el Teorema 1.2.5 se tiene que $f \in HK[0, 1]$ y

$$\int_0^1 f(x)dx = 2.$$

Por otro lado, la función de Dirichlet que fue discutida previamente es Henstock-Kurzweil integrable, este hecho nos permite dar un ejemplo de una función f cuya primitiva tiene un conjunto excepcional contable. Enseguida explicamos este ejemplo.

Ejemplo 1.2.3. Sea f la función de Dirichlet, la cual es discontinua casi donde sea y es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[0, 1]$.

Sea $F(x) := 0$ para toda $x \in [0, 1]$, entonces F es una c -primitiva de f en $[0, 1]$, esto se sigue debido a que $F'(x) = 0 = f(x)$ para todos los números irracionales $x \in [0, 1]$, véase [6].

El conjunto excepcional resulta ser el conjunto de todos los números racionales en $[0, 1]$, el cual es un conjunto contable.

Por el Teorema 1.2.5 se tiene

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Ahora, introducimos las definiciones de subpartición y subpartición etiquetada para enunciar el Lema de Saks-Henstock y sus corolarios.

Definición 1.2.2. Sea $I := [a, b]$ un intervalo compacto no degenerado.

1. Una subpartición de I es una colección $\{J_j\}_{j=1}^s$ de intervalos cerrados no traslapados en I .

2. Una subpartición etiquetada de I es una colección de $\dot{\mathcal{P}}_0 := \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^s$ de pares ordenados, donde J_j son subintervalos que forman una subpartición de I y $t_j \in J_j$ son las etiquetas con $j = 1, \dots, s$.

3. Si δ es una función medidora en I , decimos que la subpartición $\dot{\mathcal{P}}_0$ es δ -fina si

$$J_j \subseteq [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)] \quad \text{para } j = 1, \dots, s.$$

4. Si δ es una función medidora de un subconjunto $E \subseteq I$, decimos que la subpartición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}_0$ es (δ, E) -fina si tiene todas las etiquetas $t_j \in E$ y

$$J_j \subseteq [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)] \quad \text{para } j = 1, \dots, s.$$

Lema 1.2.2 (Lema de Saks-Henstock). Sea $f \in HK(I)$ y para $\varepsilon > 0$, sea δ_ε una función medidora en I tal que si $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f \right| \leq \varepsilon.$$

Si $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(J_j, t_j) : j = 1, 2, \dots, s\}$ es una subpartición δ_ε -fina de I , entonces

$$\left| \sum_{j=1}^n \{f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f\} \right| = \left| S(f; \dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f \right| \leq \varepsilon,$$

con

$$U(\dot{\mathcal{P}}_0) := \cup_{j=1}^s J_j \quad \text{y} \quad S(f, \dot{\mathcal{P}}_0) = \sum_{j=1}^s f(t_j)l(J_j),$$

donde $l(J)$ es la longitud del intervalo J .

El Lema de Saks-Henstock tiene los siguientes corolarios, los cuales se utilizarán en las siguientes secciones, de manera más específica en la demostración del Teorema del Multiplicador, entre los espacios de funciones absolutamente integrables y Henstock-Kurzweil integrables y en la demostración del Teorema de Hake.

Corolario 1.2.3. Con las hipótesis del Lema 1.2.2 se tiene

$$\sum_{j=1}^s \left| f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right| \leq 2\varepsilon.$$

Corolario 1.2.4. Con las hipótesis del Lema 1.2.2 se tiene

$$\left| \sum_{j=1}^s |f(t_j)|l(J_j) - \sum_{j=1}^s \left| \int_{J_j} f \right| \right| \leq 2\varepsilon.$$

En la siguiente sección, introducimos el concepto de función de variación acotada con el objetivo desarrollar resultados relacionados con la integrabilidad del producto de funciones en el sentido de la integral de Henstock-Kurzweil.

1.2.1. Las funciones de variación acotada y su relación con la integral de Henstock-Kurzweil

Las funciones de variación acotada nos permiten obtener varios resultados que caracterizan a las funciones absolutamente integrables usando la integral de Henstock-Kurzweil ver sección 1.2.2, por lo cual, introducimos algunos de sus aspectos geométricos. La variación de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en $[a, b]$ mide el desplazamiento vertical total observado por el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f al recorrer x del punto a al punto b , es decir, la variación de una función es una forma de cuantificar "que tan variables" son los valores de la función en el intervalo $[a, b]$.

Definición 1.2.3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que g es de variación acotada en I si y sólo si

$$\text{Var}(g, I) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \right\} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de I . La colección de todas las funciones que tienen variación acotada en I , será denotada por $BV(I)$.

Por otra parte, se enuncian las propiedades básicas de las funciones de variación acotada sobre el intervalo compacto $I = [a, b]$, estas propiedades pueden ser consultadas [6, 35].

Proposición 1.2.1. Sean $f, g \in BV(I)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\text{Var}(f, I) = 0$ si y sólo si $f(x) = f(a)$, para toda $x \in I$.
2. $a \leq x \leq y \leq b$ implica $|f(x) - f(y)| \leq \text{Var}(f, [x, y]) \leq \text{Var}(f, I)$.
3. $|f(x)| \leq |f(a)| + \text{Var}(f, I)$, para toda $x \in I$.
4. $cf \in BV(I)$ con $\text{Var}(cf, I) = |c| \text{Var}(f, I)$.
5. $f \pm g \in BV(I)$ con $\text{Var}(f \pm g, I) \leq \text{Var}(f, I) + \text{Var}(g, I)$.

Además, una de las principales propiedades de una función de variación acotada es su descomposición en diferencia de dos funciones monótonas crecientes o decrecientes [33, 35].

Teorema 1.2.6. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f \in BV(I)$ si y sólo si existen funciones $g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ no decrecientes tales que $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$, para toda $x \in I$.

El espacio vectorial de las funciones de variación acotada está dotado con la norma

$$\|f\|_{BV(I)} := f(a) + \text{Var}(f, I).$$

Por otro lado, la familia de funciones de variación acotada está relacionada con la integral de Henstock-Kurzweil, ya que los multiplicadores de las funciones Henstock-Kurzweil

integrables son las funciones normalizadas de variación acotada en $[a, b]$, es decir, son funciones de variación acotada, continuas por la derecha y se desvanecen en a , las cuales se denotan de la siguiente manera $NBV[a, b]$ [43].

El concepto de función de variación acotada está relacionado con la integral de Riemann-Stieltjes y esta a su vez con el Teorema del Multiplicador. Para enunciar este teorema, es necesario introducir la integral de Riemann-Stieltjes. Usualmente, la integral de Riemann-Stieltjes aparece en la literatura matemática de la siguiente forma

$$\int_a^b h(x)d\varphi(x),$$

donde $h(x)$ es el integrando y $\varphi(x)$ se le conoce como la función integradora.

Existen diversas definiciones del tipo integral de Riemann-Stieltjes, véase [6, 29, 35]. Una integral que permite desarrollar nuevos resultados en el Análisis de Fourier es la integral Kurzweil-Stieltjes. La integral Kurzweil-Stieltjes es más general que la integral Riemann-Stieltjes. Ahora, enunciamos de manera formal la definición de la integral de Riemann-Stieltjes que utilizamos en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.2.4. *Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a φ en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe, $\zeta_\varepsilon > 0$ tal que si*

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$$

es una partición etiquetada de $[a, b]$ y

$$\mu(\dot{\mathcal{P}}) = \text{Max}\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\} \leq \zeta_\varepsilon,$$

entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) - A \right| \leq \varepsilon.$$

El número A es la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a φ en $[a, b]$.

En este trabajo basta denotar la integral de Riemann-Stieltjes como

$$\int_a^b f d\varphi.$$

Esta definición es bastante elemental pero generaliza a la integral de Riemann y es útil para nuestros propósitos. Note que si $\varphi(x) := x$, en la Definición 1.2.4 se obtiene la integral de Riemann.

Como mencionamos, existen diversas definiciones de la integral de Riemann-Stieltjes, nosotros seguimos los textos [29, 35] y enunciamos el siguiente resultado que nos da una relación entre algunas de estas integrales, además se utilizará este hecho para obtener el Teorema 3.1.1, el cual fue publicado en [1]. Ahora, enunciamos el teorema que unifica a estas integrales.

Teorema 1.2.7. *Si la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f dg$ en sentido de la Definición 1.2.4 existe, entonces existe en el sentido de Kurzweil-Stieltjes y sus valores coinciden.*

La demostración del Teorema 1.2.7 puede ser consultada en [35].

Los siguientes teoremas establecen la conexión entre las funciones de variación acotada y la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.2.8. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a φ en $[a, b]$.*

Teorema 1.2.9. *Sean $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de variación acotada. Entonces f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a φ en $[a, b]$ si y sólo si φ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a f en $[a, b]$. En este caso, se tiene la siguiente igualdad*

$$\int_a^b f d\varphi + \int_a^b \varphi df = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a).$$

Las demostraciones de los Teoremas 1.2.8 y 1.2.9 pueden consultarse en el apéndice H de la referencia [6].

Dada la definición y las propiedades de las funciones de variación acotada y por otra parte la definición de la integral de Riemann-Stieltjes, procedemos a enunciar el Teorema del Multiplicador. La aplicación de este es de vital importancia en el desarrollo de la presente tesis.

Teorema 1.2.10 (Teorema del Multiplicador). *Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Si $f \in HK(I)$ y $\varphi \in BV(I)$, entonces $f\varphi \in HK(I)$ y*

$$\begin{aligned} \int_a^b f\varphi &= \int_a^b \varphi dF \\ &= F(b)\varphi(b) - \int_a^b Fd\varphi, \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde $\int_a^b \varphi dF$, $\int_a^b Fd\varphi$ son integrales de Riemann-Stieltjes según la Definición 1.2.4 y $F(x) = \int_a^x f$ es la integral indefinida de f .

Demostración: Sea $f \in HK(I)$ y F su integral indefinida, luego F es continua en I . Por los Teoremas 1.2.8 y 1.2.9, tenemos que las dos integrales de Riemann-Stieltjes en la expresión (1.11) existen. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe una medidora $\zeta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1} - x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de I , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi(t_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b \varphi dF \right| \leq \varepsilon.$$

Como φ es acotada, existe $M > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M$ para toda $x \in I$.

Dado que $f \in HK(I)$, existe una medidora δ_ε en I tal que si $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})]) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Por el Corolario 1.2.3 se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \left| f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Supongamos que $\delta_\varepsilon(x) \leq \zeta$ para toda $x \in I$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)\varphi(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b \varphi dF \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)\varphi(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \varphi(t_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \varphi(t_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b \varphi dF \right| \\ &\leq M \sum_{i=1}^n \left| f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right| + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces $f\varphi \in HK(I)$ y se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f\varphi &= \int_a^b \varphi dF \\ &= F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi. \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 1.2.10 y se utiliza para demostrar los tres teoremas de convergencia para la integral de Henstock-Kurzweil en intervalos no acotados que serán enunciados y demostrados en la siguiente sección.

Teorema 1.2.11. *Si $f \in HK(I)$ y g es monótona en $I := [a, b]$, entonces existe $\xi \in I$ tal que*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

A este resultado, se le conoce como el Segundo Teorema del Valor Medio y su demostración puede ser consultada en [6].

Enseguida se estudiará la relación que existe entre los espacios de vectoriales de las funciones absolutamente integrables y las funciones Henstock-Kurzweil integrables. Es importante destacar que el concepto de variación acotada es fundamental para establecer esta relación.

1.2.2. El espacio de las funciones absolutamente integrables y su relación con el espacio $HK(I)$

Ahora, denotamos a la familia de funciones absolutamente integrables sobre un intervalo compacto I como sigue

$$\mathcal{L}^1(I) := \{f \in HK(I) : |f| \in HK(I)\}.$$

En el siguiente ejemplo se muestra que $\mathcal{L}^1(I)$ está propiamente contenido en $HK(I)$, esto es existen funciones Henstock-Kurzweil integrables y que no son absolutamente integrables.

Ejemplo 1.2.4. Sea

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\pi/x^2) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Donde su derivada es

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\pi/x^2) + 2\pi x^{-1} \sin(\pi/x^2) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

por lo tanto, es diferenciable en cada punto de $[0, 1]$, véase el Ejemplo 1.2.1.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Teorema 1.2.4) nos asegura que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x \cos(\pi/x^2) + 2\pi x^{-1} \sin(\pi/x^2)) dx &= F(1) - F(0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Al considerar la función $|F'|$ resulta ser una función oscilante cerca del origen. Probemos que $|F'|$ no es una función Henstock-Kurzweil integrable, para demostrar este hecho procederemos por contradicción. Supongamos que $|F'(x)|$ es una función Henstock-Kurzweil integrable. Sean $a_k = 1/\sqrt{k+1}$ y $b_k = 1/\sqrt{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de esta manera se tiene la siguiente partición $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$.

Por el Corolario 1.2.1 y el Teorema 1.2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} |F'| &\geq \left| \int_{a_k}^{b_k} F' \right| \\ &= |F(b_k) - F(a_k)| \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ &\geq \frac{2}{k+1}. \end{aligned}$$

Si $|F'|$ estuviese en $HK([0, 1])$, al realizar la suma acumulada de los subintervalos se tendría la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |F'| \\ &\leq \int_0^1 |F'|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para n arbitrariamente grande, la serie

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1} = \infty.$$

Por la expresión (1.12) se tiene

$$\int_0^1 |F'| \geq \infty,$$

por lo tanto la integral diverge, lo cual es una contradicción. Así, F' es Henstock-Kurzweil y no es absolutamente integrable.

La gráfica de $|F'|$ es la siguiente

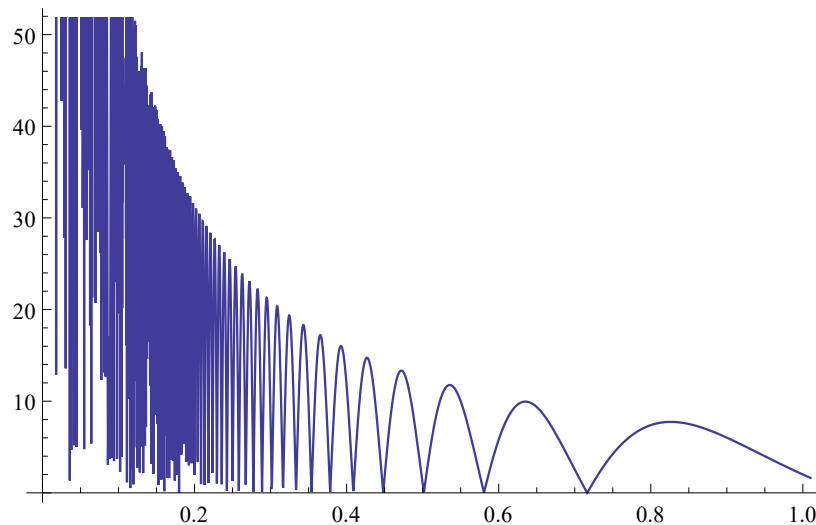


Figura 1.2: $|F'(x)| = |2x \cos(\pi/x^2) + 2\pi x^{-1} \text{sen}(\pi/x^2)|$.

Por otro lado, el Teorema 1.2.4 afirma que todas las funciones derivadas son Henstock-Kurzweil integrables. El ejemplo 1.2.4 ilustra que no toda función derivada F' es absolutamente integrable.

Ahora, veremos algunas propiedades de las funciones en el espacio $\mathcal{L}^1(I)$.

Teorema 1.2.12. Sean f, g en $HK(I)$ y $|f(x)| \leq g(x)$ para toda $x \in I$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(I)$. Más aun, se tiene

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \leq \int_I g.$$

Proposición 1.2.2. Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(I)$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $f + g \in \mathcal{L}^1(I)$.
2. $cf \in \mathcal{L}^1(I)$.

La Proposición 1.2.2 nos dice que $\mathcal{L}^1(I)$ es un espacio vectorial. Abajo enunciamos una caracterización de las funciones en $\mathcal{L}^1(I)$.

Proposición 1.2.3. Sea $f \in HK(I)$. Entonces son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{L}^1(I)$.
2. Existe $\omega \in \mathcal{L}^1(I)$ tal que $f(x) \leq \omega(x)$, para cada $x \in I$.
3. Existe $\alpha \in \mathcal{L}^1(I)$ tal que $\alpha(x) \leq f(x)$, para cada $x \in I$.

La integral de Henstock-Kurzweil no es una integral absoluta, es decir, si f es Henstock-Kurzweil integrable no implica que $|f|$ es Henstock-Kurzweil integrable, véase el Ejemplo 1.2.4. El siguiente teorema nos da las condiciones para que $|f|$ sea Henstock-Kurzweil integrable, en otras palabras, se caracteriza a las funciones absolutamente integrables.

Teorema 1.2.13. Sea $f \in HK(I)$. Entonces $|f|$ es integrable si y sólo si la integral indefinida $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es de variación acotada en I . En este caso,

$$\int_I |f| = Var(F; I).$$

Demostración: (\Rightarrow) Sea f tal que $|f|$ es integrable y $\mathcal{Q} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ es cualquier partición de I . Por los Corolarios 1.2.1 y 1.2.2 se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})| &= \sum_{i=1}^m \left| \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} |f| \\ &= \int_a^b |f|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral indefinida $F \in BV(I)$ y $Var(F; I) \leq \int_I |f|$.

(\Leftarrow) Dada una partición \mathcal{Q} cuya suma se aproxime a $Var(F; I)$, entonces usamos los puntos de la partición \mathcal{Q} para generar una partición más fina cuya suma de Riemann de $|f|$ este más cerca de $Var(F; I)$.

Supongamos que la integral indefinida $F \in BV(I)$, entonces $Var(F; I) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, y $\mathcal{Q} = \{\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_m\}$ una partición de I tal que

$$\begin{aligned} Var(F; I) - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^m |F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})| \\ &\leq Var(F; I). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Sea $\bar{\xi} \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$, el Teorema 1.2.3 y la desigualdad triangular nos permiten obtener la siguiente estimación

$$|F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})| \leq |F(\bar{\xi}) - F(\xi_{i-1})| + |F(\xi_i) - F(\bar{\xi})|.$$

Procediendo por inducción, podemos agregar un número finito de puntos a la partición \mathcal{Q} . Entonces la suma

$$\sum |F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})|$$

siempre estará acotada por $Var(F; I)$.

Sea δ_ε una medidora sobre I , tal que para cualquier partición $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es δ_ε -fina en I se tiene

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon.$$

Aplicando el Colorario 1.2.4 a la partición $\dot{\mathcal{P}}$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n |f(t_i)| l(I_i) - \sum_{i=1}^n \left| \int_{I_i} f \right| \right| \leq 2\varepsilon. \quad (1.14)$$

Sea $E := \{\xi_i : i = 0, 1, \dots, m\}$ y definimos a δ_ε^* en $[a, b]$ como

$$\delta_\varepsilon^*(t) := \min \left\{ \delta_\varepsilon(t), \frac{1}{2} \text{dist}(t, E - \{t\}) \right\}.$$

Si la partición $\dot{\mathcal{P}}^*$ es δ_ε^* -fina, también es δ_ε -fina, así que (1.14) se mantiene para $\dot{\mathcal{P}}^*$.

Notemos que cualquier punto $\xi_j \in E$ debe ser una etiqueta de al menos un subintervalo en $\dot{\mathcal{P}}^*$ y empleamos este procedimiento de derecha a izquierda para obtener los puntos ξ_1, \dots, ξ_{m-1} como etiquetas para dos subintervalos, es decir, se están agregando un número finito de puntos a la partición $\dot{\mathcal{P}}^*$. Ahora, sean u_i los puntos de la partición $\dot{\mathcal{P}}^*$ y τ_i las etiquetas de la partición ($i = 1, 2, \dots, p$) de esta manera definimos los subintervalos $J_i := [u_{i-1}, u_i]$.

Por la expresión (1.13) se tiene

$$\begin{aligned} Var(F; I) - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^p |F(u_i) - F(u_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^p \left| \int_{J_i} f \right| \\ &\leq Var(F; I). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Combinando las desigualdades (1.14) y (1.15), concluimos que

$$\begin{aligned} \left| S(|f|; \dot{\mathcal{P}}^*) - Var(F; I) \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^p |f(\tau_i)| l(j_i) - \sum_{i=1}^p \left| \int_{J_i} f \right| \right| + \left| \sum_{i=1}^p \left| \int_{J_i} f \right| - Var(F; I) \right| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, por lo tanto $|f|$ es Henstock-Kurzweil integrable y

$$\int_I |f| = \text{Var}(F; I).$$

■

Así, hemos mostrado que las integrales indefinidas de funciones absolutamente integrables son de variación acotada.

Las funciones absolutamente continuas representan un caso especial de funciones con variación acotada. El concepto de funciones absolutamente continuas es importante en la teoría de integración debido a que estas funciones tienen una relación directa con las integrales indefinidas de las funciones Lebesgue integrables. Ahora, definiremos de manera formal el concepto de función absolutamente continua.

Definición 1.2.5. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es absolutamente continua en I , si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(v_i) - f(u_i)| \leq \varepsilon,$$

cuando $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^n$ es una subpartición finita de intervalos no traslapados de I tal que satisfice

$$\sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \leq \eta_\varepsilon.$$

El conjunto de funciones absolutamente continuas en I es denotado por $AC(I)$.

La noción de función absolutamente continua "nos dice que tan suave es la función", a la vez es una condición más restrictiva que la continuidad y la continuidad uniforme [13, 16]. El conjunto de funciones absolutamente continuas en cada intervalo compacto se denota por $AC_{loc}(\mathbb{R})$ [16, 24, 27, 28, 45].

Las propiedades básicas del conjunto $AC(I)$ son enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.14. Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $f \in AC(I)$ implica f es uniformemente continua en I .
2. $f \in AC(I)$ implica $f \in BV(I)$.
3. $f, g \in AC(I)$ implica que las funciones
 - a) cf ,
 - b) $|f|$,
 - c) $f \pm g$,
 - d) $f \cdot g$,

pertenecen a $AC(I)$.

El conjunto $AC(I)$ es un espacio vectorial con respecto a la suma y producto usual, además se tiene la siguiente contención propia de conjuntos $AC(I) \subsetneq BV(I)$ [16]. Para mostrar esta contención propia exhibimos una función de variación acotada que tiene un conjunto contable de discontinuidades y por lo tanto, no es absolutamente continua.

Ejemplo 1.2.5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{y } \quad x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \quad k \in \mathbb{N},$$

Esta función es no decreciente en el intervalo $[0, 1]$, $Var(f, [0, 1]) = 1$ y claramente es discontinua.

El concepto de continuidad absoluta establece una relación entre las dos operaciones fundamentales del cálculo, la derivación y la integración usando la integral de Lebesgue [6, 13, 16].

Teorema 1.2.15. Sea $F : I \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $F \in AC(I)$ si y sólo si F es la integral indefinida de una función en $\mathcal{L}^1(I)$.

Corolario 1.2.5. Sea $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente en $I = [a, b]$. Entonces $F \in AC(I)$ si y sólo si

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por otra parte, las funciones Lebesgue integrable se definen de la siguiente manera, conforme a los textos [13, 16].

Definición 1.2.6. Sean (X, σ, μ) un espacio de medida y f una función σ -medible. Diremos que f es Lebesgue cuando sus partes positiva f^+ y negativa f^- tienen integrales finitas. Y la integral está dada por fórmula

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Es claro que existen diferentes medidas en \mathbb{R} y así distintas integrales según la Definición 1.2.6. En este trabajo de tesis emplearemos la medida de Lebesgue [8, 13, 40].

En particular, cuando $X = I$, $\sigma = \sigma$ -álgebra de Borel y $\mu =$ la medida de Lebesgue, entonces tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.2.16. Sea $d\mu = ds$ la medida de Lebesgue y $f : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrable en I . Entonces

$$F(x) := \int_a^x f(s)ds \quad (a \leq x \leq b)$$

pertenece al espacio $AC(I)$ y cumple que $F' = f$ en I , salvo un conjunto de medida cero.

Teorema 1.2.17. *Sea $F : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F \in AC(I)$. Entonces F' es Lebesgue integrable en I y cumple que*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

para toda $x \in I$.

Teorema 1.2.18. *Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe $F \in AC[a, b]$ tal que $F' = f$ en $[a, b]$ salvo un conjunto de medida cero.*

Es decir, se ha demostrado una caracterización de las funciones Lebesgue integrables. Las integrales indefinidas, las cuales son funciones absolutamente continuas en intervalos compactos, conforme a los Teoremas 1.2.15 y 1.2.18. Notemos que el Teorema 1.2.13 y la Definición 1.2.6 se mantiene en intervalos no acotados, es decir, f es Lebesgue si y sólo si es absolutamente integrable [6, 24]. Sin embargo, no se usa el concepto de funciones absolutamente continua [24]. Existen varias formas de definir a las funciones absolutamente continuas en intervalos no acotados, véase [24, 44]. Es fácil ver que si se extiende la Definición 1.2.5 sobre \mathbb{R} , la función identidad es absolutamente continua sobre \mathbb{R} , pero su derivada no es Lebesgue integrable sobre \mathbb{R} , además la función identidad en \mathbb{R} no es una función de variación acotada [24].

Ahora, introducimos la familia de funciones medibles sobre un intervalo compacto $I := [a, b]$. Veremos que el conjunto de funciones $HK(I)$ está contenido en el conjunto de funciones medibles, con respecto a la medida de Lebesgue. A este conjunto lo denotamos como $\mathcal{M}(I)$.

Definición 1.2.7. *Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice medible sobre $I := [a, b]$ si existe una sucesión $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones escalonadas sobre I tal que*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \quad \text{c.s.d. sobre } I.$$

Proposición 1.2.4. *Sea I un intervalo compacto y $f \in \mathcal{M}(I)$ una función acotada. Entonces ambas funciones f y $|f|$ pertenecen a $HK(I)$.*

Proposición 1.2.5. *Si f y $|f|$ pertenecen a $HK(I)$ ($f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$), $h \in \mathcal{M}(I)$ y acotada en I , entonces $f \cdot h$ pertenece a $HK(I)$.*

Las demostraciones de las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.5 pueden ser consultadas en [6].

Teorema 1.2.19. *Sea $f \in HK[a, b]$, entonces f es el límite de una sucesión $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones escalonadas salvo un conjunto de medida cero.*

La demostración del Teorema 1.2.19 puede ser consultada en [23].

De esta manera, los espacios de funciones Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil integrables están relacionadas por las siguientes contenciones

$$\mathcal{R}(I) \subsetneq \mathcal{L}^1(I) \subsetneq HK(I) \tag{1.16}$$

y los valores de sus integrales coinciden, además estas contenciones son propias, véase [6, 16, 33]. La función de Dirichlet es un ejemplo que ilustra la primera contención propia de la relación (1.16). El Ejemplo 1.2.4 muestra la segunda contención propia en la expresión (1.16). Además, incluimos el Ejemplo 1.2.6, el cual es presentado abajo para remarcar este último hecho.

El siguiente ejemplo nos muestra que existe al menos una función Henstock-Kurzweil integrable y no Lebesgue integrable.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos a la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Y su derivada

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2}) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

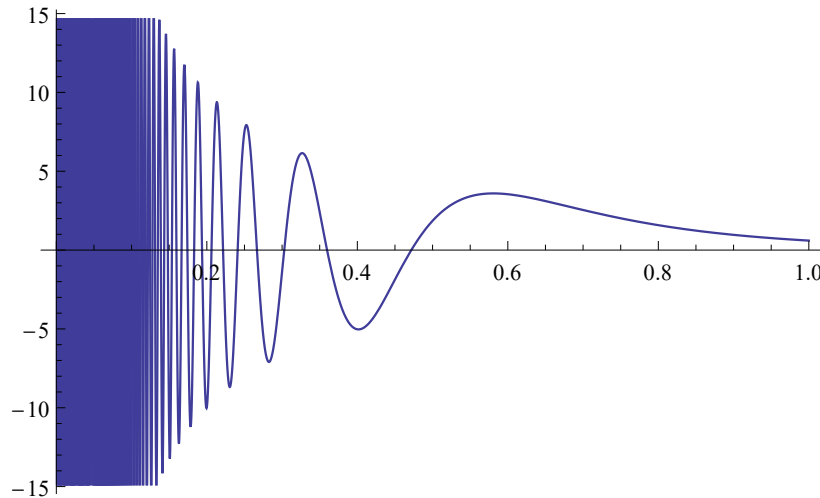


Figura 1.3: $F'(x) = 2x \operatorname{sen}(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2})$.

La función F' no es acotada en el intervalo $[0, 1]$ y es oscilante cerca del origen como se muestra en la Figura 1.3, por lo tanto, no es Riemann integrable. Por otra parte, la función F' no es Lebesgue integrable porque F no está $AC([0, 1])$ [16].

Notemos que no todas las derivadas son integrables en el marco de la integral de Lebesgue, mientras que el Teorema 1.2.5 nos asegura que todas las derivadas son integrables en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil. Entonces F' es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil y se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x \operatorname{sen}(x^{-2}) - 2x^{-1} \cos(x^{-2})) dx &= F(1) - F(0) \\ &= \operatorname{sen}(1). \end{aligned}$$

Por otro lado, el espacio de funciones Henstock-Kurzweil contiene a las funciones Riemann integrables en el sentido impropio en intervalos acotados [6, 16]. El Teorema de Hake, el cual se enunciará en la siguiente sección, nos asegura que si una función es integrable en el sentido impropio de Riemann también es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil, esto es

$$\mathcal{RI}(I) \subset \mathcal{HK}(I),$$

donde $\mathcal{RI}(I)$ denota el conjunto de las funciones integrables en el sentido impropio de Riemann [29, 33, 42].

En la siguiente sección se estudiarán las propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil en intervalos no acotado.

1.3. La integral de Henstock-Kurzweil en intervalos no acotados

Consideremos el conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. A este conjunto se llama eje real extendido y se denota de la siguiente manera: $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.3.1. Sea $\delta : [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}} \rightarrow (0, \infty)$, se le llama función medidora en $[a, b]$. Dada una función medidora δ sobre $[a, b]$ decimos que una partición etiquetada $\mathcal{P} := \{([x_{i-1}, x_i]; t_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ es δ -fina conforme a los siguientes casos:

Para $a \in \mathbb{R}$ y $b = \infty$:

1. $a = x_0, b = x_n = t_n = \infty$.
2. $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, para toda $i = 1, 2, \dots, n-1$.
3. $[x_{n-1}, \infty] \subset [\frac{1}{\delta(t_n)}, \infty]$.

Para $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$

1. $a = x_0 = t_1 = -\infty, b = x_n$.
2. $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, para toda $i = 2, \dots, n$.
3. $[-\infty, x_1] \subset [-\infty, -\frac{1}{\delta(t_1)}]$.

Para $a = -\infty$ y $b = \infty$:

1. $a = x_0 = t_1 = -\infty, b = x_n = t_n = \infty$.
2. $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, para toda $i = 2, \dots, n-1$.
3. $[x_{n-1}, \infty] \subset [\frac{1}{\delta(t_n)}, \infty]$ y $[-\infty, x_1] \subset [-\infty, -\frac{1}{\delta(t_1)}]$.

El caso $a, b \in \mathbb{R}$ fue discutido previamente. Conforme a la convección aritmética en $\overline{\mathbb{R}}$, $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, una función f real-valuada sobre \mathbb{R} se puede extender a $\overline{\mathbb{R}}$, si definimos $f(\pm\infty) = 0$. Por lo tanto, se introduce la definición de la integral de Henstock-Kurzweil en los reales extendidos, donde los intervalos pueden ser acotados o no acotados.

Definición 1.3.2. Sea $I = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ un intervalo. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Henstock-Kurzweil integrable si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función medidora δ_ε en $[a, b]$ tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P} = \{I_i, t_i\}_{i=1}^n$ es δ_ε -fina, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon,$$

donde $A = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$.

Notemos que el caso de un intervalo compacto, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fue estudiado en el capítulo anterior en la Definición 1.1.4.

El espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables en los reales extendidos es denotado por $HK(\overline{\mathbb{R}})$, mientras $HK_{loc}(\mathbb{R})$ denotará el espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables sobre cada intervalo compacto de \mathbb{R} .

Teorema 1.3.1 (Teorema de Hake). Sea $I := [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Las afirmaciones son equivalentes:

1. $f \in HK(I)$ y $\int_a^b f(x)dx = A$.
2. $f \in HK([c, d])$, para todo intervalo $[c, d] \subset (a, b)$ y

$$\lim_{\substack{c \rightarrow a^+ \\ d \rightarrow b^-}} \int_c^d f(x)dx = A. \quad (1.17)$$

Demostración: Supongamos 1. Fijemos la base a en la expresión (1.17) y apliquemos el Teorema 1.2.3 con $d \in (a, b)$, entonces la restricción de f en $[a, d]$ es integrable.

Además, la integral indefinida de f con base a es una función continua en b , entonces

$$\int_a^b f = \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f.$$

De manera análoga fijamos a b y procedemos de la misma forma. Por lo tanto, $\int_a^b f := A$.

Supongamos 2. Esto es, $A \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $d \in (a, b)$ con $f \in HK([a, d])$ y (1.17) se cumple.

Definamos $(c_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión estrictamente creciente con $c_0 = a$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = b$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - c_r \leq \frac{\varepsilon}{|f(b)| + 1},$$

y sea $t \in [c_r, b)$, entonces

$$\left| \int_a^t f - A \right| \leq \varepsilon.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y δ_k una medidora en $I_k := [c_{k-1}, c_k]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_k$ es alguna partición δ_k -fina de I_k , entonces

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}_k) - \int_{I_k} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que

1. $\delta_1(c_0) \leq \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$ y si $k \geq 1$.
2. $\delta_{k+1}(c_k) \leq \min\{\delta_k(c_k), \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_{k+1} - c_k)\}$.
3. $\delta_k(t) \leq \min\{\frac{1}{2}(t - c_{k-1}), \frac{1}{2}(c_k - t)\}$ para $t \in (c_{k-1}, c_k)$.

Ahora, definamos δ en I de la siguiente manera:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_k(t) & \text{si } t \in [c_{k-1}, c_k], k \in \mathbb{N}, \\ b - c_r & \text{si } t = b. \end{cases}$$

Así, δ es una medidora en I y sea $\dot{\mathcal{P}} := \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ una partición δ -fina de I . Dado que b no pertenece a ningún intervalo I_k , el último subintervalo $[x_{n-1}, b]$ en $\dot{\mathcal{P}}$ debe tener la etiqueta $t_n = b$. Dado que $\dot{\mathcal{P}} \ll \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} c_r &= b - \delta(b) \\ &\leq x_{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $s \in \mathbb{N}$ el entero más pequeño tal que $x_{n-1} \leq c_s$, así que $r \leq s$. Si $k = 1, \dots, s-1$, la condición 3 implica que el punto c_k debe ser una etiqueta para algún subintervalo en $\dot{\mathcal{P}}$ que contiene a c_k . Usando el procedimiento de derecha a izquierda [6], asumimos que los puntos c_0, c_1, \dots, c_{s-1} son también puntos finales cada subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$. Sean

$$\dot{\mathcal{Q}}_1 := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_0, c_1], \quad \dots, \quad \dot{\mathcal{Q}}_{s-1} := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_{s-2}, c_{s-1}], \quad \dot{\mathcal{Q}}_s := \dot{\mathcal{P}} \cap [c_{s-1}, x_{n-1}].$$

Cada $\dot{\mathcal{Q}}_k$ ($k = 1, \dots, s-1$) es una partición δ -fina de I_k , entonces

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{I_k} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{para } k = 1, \dots, s-1.$$

Del hecho que $\dot{\mathcal{Q}}_s$ es una subpartición δ_s -fina de I_s , el Lema 1.2.2 implica que

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{Q}}_s) - \int_{I_s} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^s}.$$

Si $\dot{\mathcal{Q}}^b := \{([x_{n-1}, b], b)\}$, entonces

$$S(f, \dot{\mathcal{Q}}^b) = f(b)(b - x_{n-1})$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} |S(f, \dot{\mathcal{Q}}^b)| &\leq |f(b)|(b - x_{n-1}) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup \dots \cup \dot{\mathcal{Q}}_{s-1} \cup \dot{\mathcal{Q}}_s \cup \dot{\mathcal{Q}}^b$, se obtiene que

$$\begin{aligned} |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| &= \left| \sum_{i=1}^s S(f; \dot{\mathcal{Q}}_i) + S(f; \dot{\mathcal{Q}}^b) - A \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^s S(f; \dot{\mathcal{Q}}_i) - \int_a^{x_{n-1}} f \right| + |S(f; \dot{\mathcal{Q}}^b)| - \left| \int_a^{x_{n-1}} f - A \right| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces $f \in HK([a, b])$ con integral A . De manera similar se realiza la prueba para el límite inferior en la integral (1.17) y la demostración está completa.

■

El Teorema de Hake se demuestra para un intervalo $[a, b]$ contenido en los reales extendidos y puede ser empleado para cualquier intervalo arbitrario no degenerado.

En el siguiente ejemplo empleamos el Teorema de Hake, primero sobre el intervalo $[0, \infty)$ y de manera análoga para $[-\infty, 0]$. Así, por el Teorema de la aditividad (Teorema 1.2.3) se tiene que la función g definida a continuación es integrable en $\overline{\mathbb{R}}$.

Ejemplo 1.3.1. *Sea*

$$g(x) := \begin{cases} 1/(1+x^2) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{si } x = -\infty \text{ y } x = \infty. \end{cases}$$

Definimos la primitiva $G(x) := (\arctan(x))'$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Teorema 1.2.5) la función g es Henstock-Kurzweil siempre que $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, entonces por el Teorema de Hake se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan(b) - \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(a) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Observemos que por el Teorema de Hake la integral impropia de Riemann está contenida propiamente en la integral de Henstock-Kurzweil, es decir,

$$\mathcal{RI}[a, b] \subset HK[a, b].$$

Sin embargo, esta contención no se preserva en dimensión $n > 1$, véase [37].

Resulta que las funciones Riemann impropias no están contenidas propiamente en el espacio de funciones Lebesgue integrables, y para mostrar este hecho se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

y con gráfica

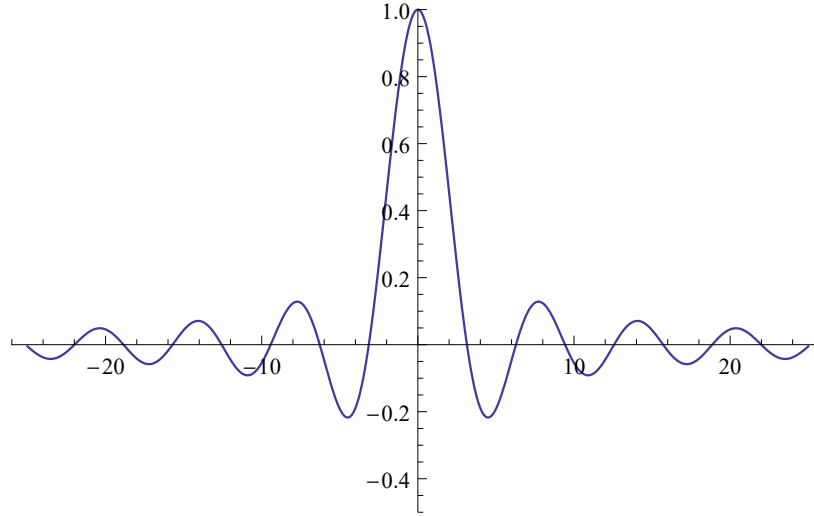


Figura 1.4: $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

La función es integrable en el sentido impropio de Riemann, véase [13, 40]. El valor integral es

$$\mathcal{RI} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

De acuerdo con la Figura 1.4, la función es continua en el intervalo cerrado $[2\pi, \infty)$ y por lo tanto es medible. Consideremos la parte positiva, es decir,

$$f^+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} \chi_{[2k\pi, (2k+1)\pi]}(x).$$

Sea $A_k := \left[\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi, \left(2k + \frac{3}{4}\right)\pi \right]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $x \mapsto \frac{1}{x}$ es decreciente en $[2\pi, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned} f^+(x) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\left(2k + \frac{3}{4}\right)\pi} \chi_{A_k}(x) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k\pi} \chi_{A_k}(x). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{\infty} f^+ &\geq \int_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k\pi} \chi_{A_k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6k\pi} \chi_{A_k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{12\pi k} = \infty, \end{aligned}$$

resulta que la integral es divergente y por lo tanto no es Lebesgue integrable.

Así, podemos concluir que

$$\mathcal{RI}(\mathbb{R}) \subsetneq HK(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subsetneq HK(\mathbb{R}).$$

Enunciaremos otra caracterización de las funciones Henstock-Kurzweil integrables, este resultado es conocido como el Criterio de Cauchy. La aplicación del Criterio de Cauchy es de gran utilidad para demostrar la convergencia de integrales impropias y su demostración es un caso particular del Teorema de Hake [6, 16].

Teorema 1.3.2 (Criterio de Cauchy). *Sea $f : I := [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, una función tal que $f \in HK([a, c])$ para toda $c \geq a$. Entonces $f \in HK(I)$ si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon) \geq a$ tal que si $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces $\left| \int_p^q f \right| \leq \varepsilon$.*

Ahora empleamos el Criterio de Cauchy para mostrar la convergencia de la siguiente integral impropia.

Ejemplo 1.3.3. *Para demostrar la convergencia de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$.*

Realizando el cambio de variable

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{entonces} \quad u^2 = \frac{1}{x},$$

obtenemos la siguiente integral

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty u^{-2} \operatorname{sen}(u^2) du.$$

Notemos que

$$\left| \frac{1}{u^2} \operatorname{sen}(u^2) \right| \leq \left| \frac{1}{u^2} \right| \quad u \in [1, \infty).$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon)$ tal que

$$\left| \int_p^q \frac{1}{u^2} \operatorname{sen}(u^2) du \right| \leq \int_p^q \left| \frac{1}{u^2} \right| du \leq \varepsilon,$$

cuando

$$p \geq K(\varepsilon).$$

De esta manera

$$\left| \int_p^q \frac{1}{u^2} \operatorname{sen}(u^2) du \right| \leq \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad q > p \geq K(\varepsilon).$$

Por el Criterio de Cauchy

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

es convergente.

Por otra parte, en el capítulo anterior se enuncio el Teorema del Multiplicador, un aspecto teórico importante es que es válido para intervalos no acotados, véase [3, 6, 16].

Continuando con el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil, se enuncian las tres pruebas de convergencia para intervalos no acotados. Los dos primeros teoremas pueden ser considerados como extensiones del Teorema 1.2.10 (Teorema del Multiplicador) para intervalos no acotados y nos limitamos a considerar a φ como una función monótona [6].

El primer criterio es conocido como la Prueba de Dirichlet para series, pero formulado para integrales por J. Chartier [6].

Teorema 1.3.3 (Prueba de Chartier-Dirichlet). Sean $f, \varphi : I := [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que

1. $f \in HK([a, c])$ para toda $c \geq a$ y $F(x) := \int_a^x f$ es acotada en $[a, \infty)$.
2. φ es monótona en I y $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Entonces $f\varphi \in HK(I)$.

Demostración: El Teorema 1.2.10 implica que $f\varphi \in HK([a, c])$ para toda $c \geq a$. Sea $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M$ para $x \in [a, \infty)$. Por hipótesis tenemos $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon) \geq a$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{para } x \geq K(\varepsilon).$$

Si $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces por el Teorema 1.2.11 implica que existe $\xi \in [p, q]$ tal que

$$\begin{aligned} \int_p^q f\varphi &= \varphi(p) \int_p^\xi f + \varphi(q) \int_\xi^q f \\ &= \varphi(p)[F(\xi) - F(p)] + \varphi(q)[F(q) - F(\xi)]. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f\varphi \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{4M} 2M \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

El Teorema 1.3.2 implica que $f\varphi \in HK(I)$. ■

El segundo criterio de convergencia es una versión integral de una prueba para series dada en 1826 por el matemático noruego Niels H. Abel [6].

Teorema 1.3.4 (Prueba de Abel). Sean $f, \varphi : I := [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, y supongamos que

1. $f \in HK(I)$.
2. φ es acotada y monótona en I .

Entonces $f\varphi \in HK(I)$.

Demostración: Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M$ para $x \in I$.

Como $f \in HK(I)$, el Teorema 1.3.2 implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon) \geq a$ tal que $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\left| \int_p^q f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Como φ es monótona, aplicando el Teorema 1.2.10, se sigue $f\varphi \in HK([p, q])$. Por el Teorema 1.2.11 existe $\xi \in [p, q]$, tal que

$$\int_p^q f\varphi = \varphi(p) \int_p^\xi f + \varphi(q) \int_\xi^q f.$$

Así, si $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q f\varphi \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2M}M \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ es arbitrario, y por el Teorema 1.3.2 implica que $f\varphi \in HK(I)$. ■

Como se menciono anteriormente, las pruebas anteriores de convergencia consideran a φ como función monótona. La siguiente prueba impone otro tipo de condiciones sobre φ .

Teorema 1.3.5 (Prueba de Du Bois-Reymond). Sean $f, \varphi : I := [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, supongamos que:

1. $f \in HK([a, c])$, para toda $c \geq a$ y $F(x) = \int_a^x f$ es acotada en I .
2. φ es diferenciable en $[a, \infty)$ y $\varphi' \in \mathcal{L}^1(I)$ acotada y monótona en I .
3. $F(x)\varphi(x)$ tiene límite cuando $x \rightarrow \infty$.

Entonces $f\varphi \in HK(I)$.

Demostración: De la hipótesis 1, existe $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, \infty)$.

Por lo tanto,

$$|F(x)\varphi'(x)| \leq M|\varphi'(x)| \quad \text{para } x \in I,$$

y así que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x F\varphi'$$

existe. Dado c en I , tenemos que $F\varphi' \in \mathcal{L}^1([a, c])$ y el Teorema 1.2.9 implica que $f\varphi \in HK([a, c])$, además se tiene la siguiente igualdad

$$\int_a^c f\varphi = F(c)\varphi(c) - \int_a^c F\varphi'.$$

Aplicando el Teorema 1.3.1, se sigue que $f\varphi \in HK(I)$. ■

Los siguientes ejemplos muestran el alcance de los tres teoremas convergencia para intervalos no acotados.

Ejemplo 1.3.4. Para determinar la convergencia de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}} dx,$$

definamos la función f sobre $[1, c]$ como $f(x) := \text{sen}(x) \in HK[1, c]$ para todo $1 \leq c < \infty$ y sea

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \text{sen}(t) dt \\ &= -\cos(x) + \cos(1), \end{aligned}$$

de esta manera $|F(x)| \leq 2$ para toda x en $[1, \infty)$. Es claro que $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ es monótona decreciente en $[1, \infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$.

Por la Prueba de Chartier-Dirichlet (Teorema 1.3.3) se tiene la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Abajo se muestra la gráfica del producto de funciones $f(x)\phi(x)$.

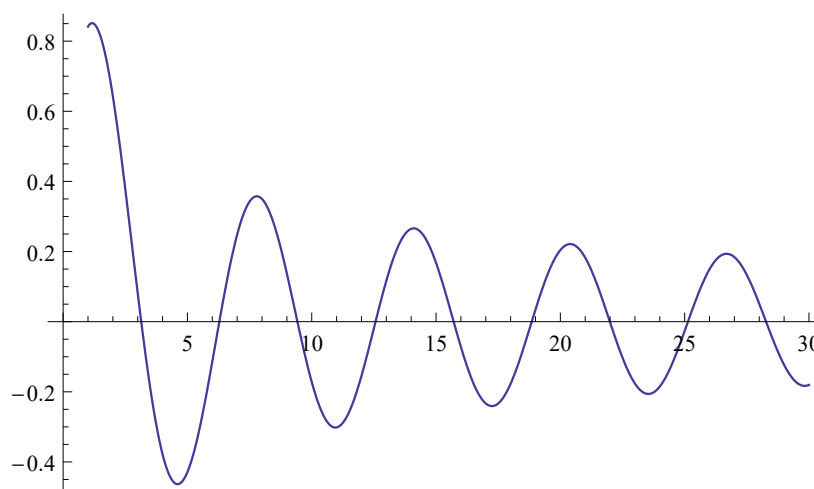


Figura 1.5: La gráfica de $\text{sen}(x)/\sqrt{x}$.

Ejemplo 1.3.5. Para determinar si la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1} dx$$

es convergente, consideramos

$$f(x) = \arctan(x) \quad y \quad \phi(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Notemos que $f \in HK([0, \infty))$ y $|\phi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0, \infty)$. Por la Prueba de Abel (Teorema 1.3.4) se tiene la convergencia de la integral.

Para finalizar el ejemplo, mostramos la gráfica de $f(x) \cdot \phi(x)$.

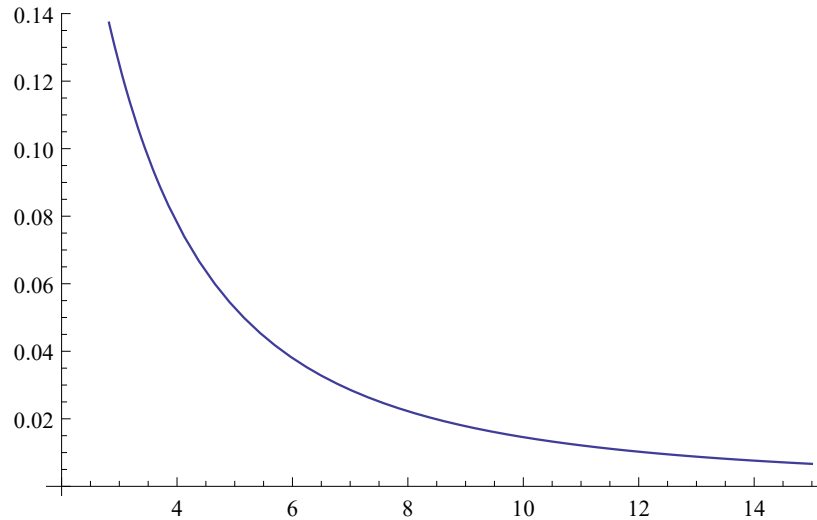


Figura 1.6: La gráfica de $\arctan(x)/(1+x^2)$.

Ejemplo 1.3.6. Veamos la convergencia de la siguiente integral

$$\int_2^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} dx.$$

Consideremos $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $\varphi(x) = 1/\ln(x)$.

De esta manera,

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \varphi'(x) dx &= \int_2^{\infty} \frac{-1}{x(\ln(x))^2} dx \\ &= \ln(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi' \in \mathcal{L}^1([2, \infty))$.

Más aun,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)\varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\cos(x) + \cos(1)}{\ln(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.3.5 (Prueba de Du Bois-Reymond) se tiene la convergencia de la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} dx. \text{ A continuación, se muestra la gráfica } f(x) \cdot \phi(x).$$

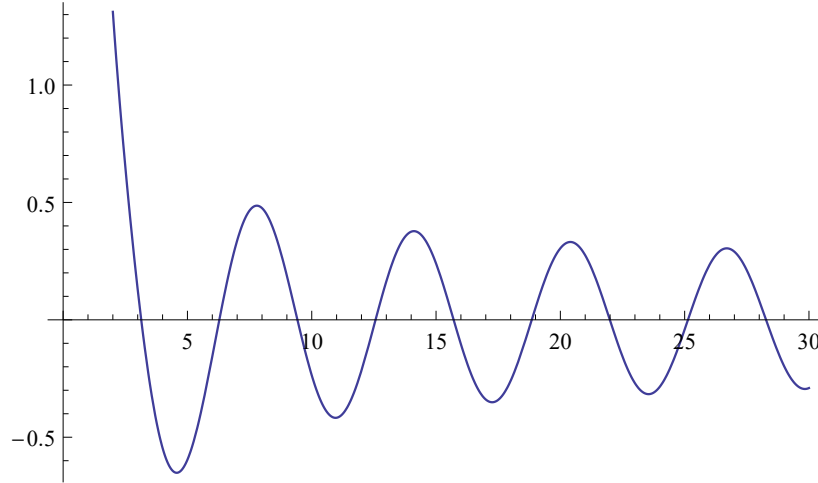


Figura 1.7: La gráfica de $\text{sen}(x)/\ln(x)$.

En la sección 1.2.1 se mostró la relevancia de las funciones de variación acotada en la teoría de integración de Henstock-Kurzweil sobre intervalos acotados. Ahora, se extiende el concepto de función de variación acotada en intervalos no acotados y se usará esta definición para obtener resultados análogos sobre la integrabilidad del producto de dos funciones.

Las funciones de variación acotada en intervalos no acotados se definen de la siguiente manera, véase [3, 33, 36].

Definición 1.3.3. Decimos g es una función de variación acotada en \mathbb{R} si y sólo si

$$\text{Var}(g, \mathbb{R}) := \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow \infty}} \text{Var}(g, [c, d])$$

existe en \mathbb{R} . La colección de todas las funciones que tienen variación acotada en \mathbb{R} , es denotada por $BV(\mathbb{R})$.

Si consideramos $I := [a, \infty)$ y la Definición 1.3.3, podemos enunciar el Teorema del Multiplicador para intervalos no acotados en el siguiente versión.

Teorema 1.3.6. Si $f \in HK(I)$ y $\varphi \in BV(I)$, entonces $f\varphi \in HK(I)$ y

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f\varphi &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi dF \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Notemos que la descomposición de Jordan para funciones en $BV(\mathbb{R})$ es válida, ver detalles en [35]. En contraste al caso de intervalos compactos, $BV(\mathbb{R})$ no está contenido en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, por ejemplo considere la función $f(x) = 1/x$ para toda $x \in [1, \infty)$ y cero en otro caso, $f \in BV(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La gráfica de esta función es la siguiente y sus propiedades se analizarán en capítulos posteriores.

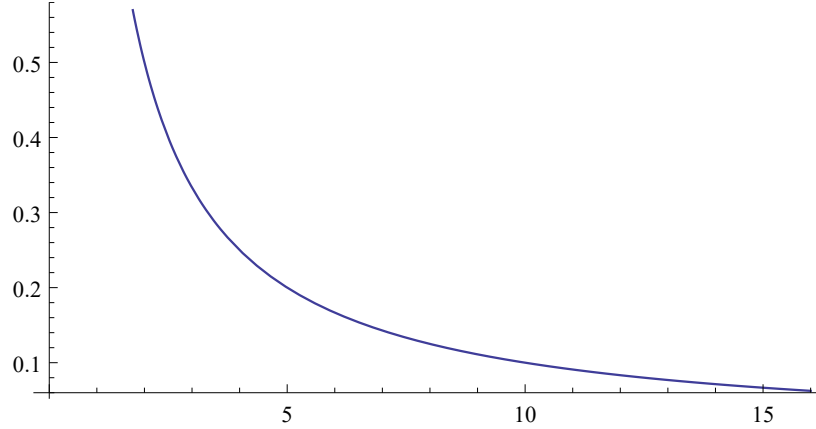


Figura 1.8: $f(x) = 1/x \quad \forall x \in [1, \infty)$ y cero en otro caso.

El conjunto $BV(\mathbb{R})$ será objeto de estudio para considerar y analizar la transformada de Fourier de funciones no Lebesgue integrables.

Y para finalizar este capítulo, enunciaremos el siguiente espacio vectorial que nos permite definir la transformada de Fourier en espacios no clásicos en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil y que engloba a la transformada clásica de Fourier.

Definición 1.3.4.

$$HK(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f = f_1 + i f_2 : f_1, f_2 \in HK(\mathbb{R})\}$$

y establecemos su norma

$$\|f\|_{HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})} := \|f_1\|_{HK(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{HK(\mathbb{R})},$$

donde

$$\|f\|_{HK(I)} := \sup \left\{ \left| \int_c^d f(x) dx \right| : [c, d] \subset I \right\}. \quad (1.18)$$

A la expresión (1.18) se le conoce como la norma de Alexiewicz [33, 36]. Una aplicación de la norma de Alexiewicz en la tesis se refleja en la función seno integral, notemos que la función seno integral es una generalización del Ejemplo 1.3.2.

Definimos la función seno integral como:

$$Si(v) := \frac{2}{\pi} \int_0^v \frac{\text{sen}(y)}{y} dy.$$

La función seno integral satisface las siguientes propiedades, véase[3] :

- 1) $Si(0) = 0$,
- 2) $\lim_{v \rightarrow \infty} Si(v) = 1$,
- 3) $Si(v) \leq Si(\pi) \quad \forall v \in [0, \infty)$.

Definimos la familia de funciones $\Omega := \{h_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$ tales que

$$h_t(x) := \begin{cases} \frac{\text{sen}(xt)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ t & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notemos que $h_{-t}(x) = -h_t(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, dado que la función h_t es una función par. Consideremos $v \geq u \geq 0$ y $t > 0$, se sigue

$$\left| \int_u^v \frac{\text{sen}(xt)}{x} dx \right| = \left| \int_{tu}^{tv} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy \right|.$$

De ahí, se sigue el conjunto de Ω es acotado en $HK(\mathbb{R})$ y

$$\pi Si(\pi) = \sup \{ \|h_t\|_{HK(\mathbb{R})} : h_t \in \Omega \}. \quad (1.19)$$

Definición 1.3.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función con $f_1 := \text{Re}(f)$ y $f_2 := \text{Im}(f)$, entonces definimos la integral de Henstock-Kurzweil de f mediante

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx + i \int_{\mathbb{R}} f_2(x) dx.$$

En el siguiente capítulo se dan los aspectos teóricos de la transformada de Fourier en el sentido clásico, considerando la integral de Lebesgue y en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Capítulo 2

La transformada de Fourier

2.1. La transformada de Fourier en el sentido de la integral de Lebesgue

En general, la transformada de Fourier de una función real-valuada f definida sobre \mathbb{R} está dada de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}(f)(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx,$$

donde la integral converge en algún sentido. Haremos uso de la siguiente notación $\mathcal{F}_{(\cdot)}$ para señalar que dominio se va a considerar.

Enunciaremos algunos resultados del Análisis de Fourier en el sentido clásico, es decir, consideramos la integral de Lebesgue. La construcción teórica de la integral de Lebesgue puede ser consultada en [8, 16, 40]. El conjunto de funciones real-valuadas f tales que

$$\|f\|_p < \infty,$$

donde $p \geq 1$ (funciones p -integrables) es un espacio normado (considerando clases de equivalencia respecto $\|\cdot\|_p$) y es denotado por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. El espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es conocido como el espacio de las funciones Lebesgue integrables o funciones absolutamente integrables sobre \mathbb{R} .

Introducimos el operador transformada clásica de Fourier en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Ya que en esta sección, consideramos distintos dominios para el operador transformada de Fourier y mostraremos sus principales propiedades usando la integral de Lebesgue.

Definición 2.1.1. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La transformada de Fourier de f en el punto s es definida por

$$\mathcal{F}_1(f)(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx,$$

donde la integral es en el sentido de Lebesgue.

De la definición anterior se sigue el siguiente teorema y posteriormente daremos un ejemplo de una transformada de Fourier en el sentido de la Definición 2.1.1.

Teorema 2.1.1. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}_1(f)(s)$ está bien definida para cada $s \in \mathbb{R}$.

Dada la Definición 2.1.1 damos un ejemplo de una función absolutamente integrable y calculamos su transformada clásica de Fourier.

Ejemplo 2.1.1. Sea $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, con $\alpha > 0$. Por definición se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(e^{-\alpha|x|})(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-isx} e^{\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-isx} e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\alpha - ik} + \frac{1}{\alpha + ik} \right] \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}(\alpha^2 + k^2)}.\end{aligned}$$

La demostración del siguiente teorema es una consecuencia directa de la Definición 2.1.1, además de emplear la linealidad y homogeneidad de la integral de Lebesgue mostrando la linealidad del operador, estas propiedades pueden ser consultadas en las siguientes referencias [6, 8, 9, 13].

Teorema 2.1.2. Sea $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\mathcal{F}_1(f + g)(s) = \mathcal{F}_1(f)(s) + \mathcal{F}_1(g)(s)$.
2. $\mathcal{F}_1(\alpha f)(s) = \alpha \mathcal{F}_1(f)(s)$.

El siguiente resultado nos asegura que la transformada de Fourier con f Lebesgue integrable resulta una función continua [10].

Teorema 2.1.3. La transformada de Fourier de una función Lebesgue integrable es una función uniformemente continua. Más aun,

$$|\mathcal{F}_1(f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Para cualquier $h, k \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\left| \mathcal{F}_1(f)(h+k) - \mathcal{F}_1(f)(h) \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(h+k)} f(x) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixh} f(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} (e^{ihx} - 1) f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ikx} (e^{ihx} - 1) f(x)| dx.\end{aligned}$$

Notemos que por desigualdad triangular se tiene

$$|(e^{ihx} - 1)f(x)| \leq 2|f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |(e^{ihx} - 1)| = 0. \quad (2.1)$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada y la expresión (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ikx}(e^{ihx} - 1)f(x)| dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} |e^{-ikx}(e^{ihx} - 1)f(x)| dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra la continuidad de la transformada de Fourier. Como es independiente de valor de k , también se demuestra que la transformada clásica de Fourier es una función uniformemente continua. ■

La aplicación del Teorema de integración por partes a la transformada de Fourier permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4. *Sea f una función continua y diferenciable a trozos, tal que $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces*

$$\mathcal{F}_1(f')(s) = is\mathcal{F}_1(f)(s).$$

Demostración: Por Definición 2.1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(f') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f'(x) dx, \end{aligned}$$

e integrando por partes, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f'(x) dx = \lim_{a, b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-isx} \Big|_{x=-a}^{x=b} + \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx. \quad (2.2)$$

Como f es continua y Lebesgue integrable implica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

y dada la expresión (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(f') &= \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx \\ &= is\mathcal{F}_1(f). \end{aligned}$$

El Lema de Riemann-Lebesgue nos asegura que para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se tiene $\mathcal{F}_1(f) \in C_0(\mathbb{R})$, donde $C_0(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones real-valuadas que se desvanecen en $\pm\infty$ [33, 36, 39]. ■

Lema 2.1.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Para cualquier función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \mathcal{F}_1(f)(s) = 0.$$

Ahora tenemos que el operador transformada de Fourier sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es un operador lineal acotado, como se demostró en el Teorema 2.1.3, es decir,

$$|\mathcal{F}_1(f)(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

está bien definido puntualmente para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$ y

$$\mathcal{F}_1 : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}).$$

Por otra parte, el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ se le conoce como el espacio de las funciones cuadrado integrables y es un espacio normado con producto interno que proporciona técnicas algebraicas y geométricas que pueden aplicarse en espacios de dimensión infinita [10]. Ahora procedemos a introducir la definición de transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y sus propiedades básicas [10, 13, 18, 40].

Definición 2.1.2. *Sea $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y (φ_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que convergen a $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, es decir,*

$$\|f - \varphi_n\|_2 \rightarrow 0.$$

La transformada de Fourier de f es definida por

$$\mathcal{F}_2(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_1(\varphi_n), \quad (2.3)$$

donde el límite es con respecto a la norma en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Note que la convergencia es con respecto a la topología dada por la norma $\|\cdot\|_2$, así la transformada de Fourier de funciones en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ es un límite y no una expresión integral puntual como la transformada de Fourier sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1.5. *Sea $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\mathcal{F}_2(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-isx} f(x) dx,$$

donde la convergencia es con respecto a la norma en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Plancherel). *Para cualquier $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathcal{F}_2(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y además*

1. si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}_2(f)(s) = \mathcal{F}_1(f)(s)$,
2. $\|\mathcal{F}_2(f)(\cdot) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-i(\cdot)x} f(x) dx\|_2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$,
3. $\|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}_2(f)\|_2^2$.

En [18, 36] se da una descomposición de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < 2$) para definir el operador transformada de Fourier sobre este espacio. Dada la función f en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$, el conjunto

$$E := \{x : |f(x)| > 1\}$$

tiene medida de Lebesgue finita y $f = f_1 + f_2$, donde $f_1(x) = f_{\chi_E}(x)$ y $f_2 = f - f_1$. La desigualdad de Hölder nos asegura que

$$\begin{aligned} \|f_1\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_{\chi_E}| \\ &\leq \mu(E)^{1/q} \|f\|_p \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Por otra parte, se tiene $|f(x)| \leq 1$ para $x \in E^c$ y

$$\begin{aligned} \|f_2\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f_{\chi_{E^c}}|^2 \\ &\leq \int_{E^c} |f|^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Así,

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

De esta manera, podemos definir la transformada de Fourier para funciones en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, como una suma de transformadas clásicas de Fourier.

Definición 2.1.3. [18, 39] Para $1 < p < 2$, el operador transformada de Fourier en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{L}^q(\mathbb{R}), \\ \mathcal{F}_p(f) &= \mathcal{F}_1(f_1) + \mathcal{F}_2(f_2), \end{aligned}$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y $f = f_1 + f_2$,

$$f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \quad f_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}).$$

Se puede ver en [36] que la transformada de Fourier no depende del representante. Es decir, está bien definida para cada $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Notemos que si $f_2 = 0$, obtenemos la Definición 2.1.1 de la transformada de Fourier; y si procedemos de manera análoga para $f_1 = 0$, se tiene la Definición 2.1.2 de la transformada de Fourier.

Cabe mencionar que existen más resultados respecto a la transformada de Fourier en distintos contextos e involucrando teorías matemáticas más complejas, como la teoría de interpolación, teoría de distribuciones, entre otras, véase [4, 26, 27, 28, 45, 44]. En este capítulo nos limitamos a enunciar los resultados que hemos extendido en algún sentido, y los que hemos utilizado en las demostraciones de dichas extensiones, esto será desarrollado con detalle en el último capítulo.

2.2. Una versión del Lema de Riemann-Lebesgue sobre $BV_0(\mathbb{R})$

El estudio de la transformada de Fourier en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil ha sido desarrollado recientemente por Erik Talvila [44]. Él ha mostrado algunos teoremas sobre la existencia y la continuidad de la transformada de Fourier en ciertos subespacios. Los resultados de [44] dieron pauta para desarrollar el estudio de la transformada de Fourier para funciones no absolutamente integrables. Notemos que si I es un intervalo compacto en \mathbb{R} , tenemos que

$$BV(I) \subset \mathcal{L}^1(I) \subset HK(I)$$

y en consecuencia

$$BV(I) \cap HK(I) \subset \mathcal{L}^1(I).$$

Ahora si I no es acotado, se tienen las siguientes dos observaciones

$$BV(I) \not\subset \mathcal{L}^1(I) \tag{2.4}$$

y

$$\mathcal{L}^1(I) \not\subset HK(I) \cap BV(I), \tag{2.5}$$

las demostraciones de (2.4) y (2.5) pueden ser consultadas en [42]. Enseguida, exhibimos contraejemplos para probar (2.4) y (2.5). En el caso de la prueba de (2.4), consideramos la función $f(x) = 1/x$ para toda $x \in [1, \infty)$ y cero en otro caso, notemos que

$$Var(f, [1, \infty)) = 1.$$

Sin embargo,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dt = \infty, \tag{2.6}$$

lo que demuestra que $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Para ver que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ no está contenido en $BV(\mathbb{R})$, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

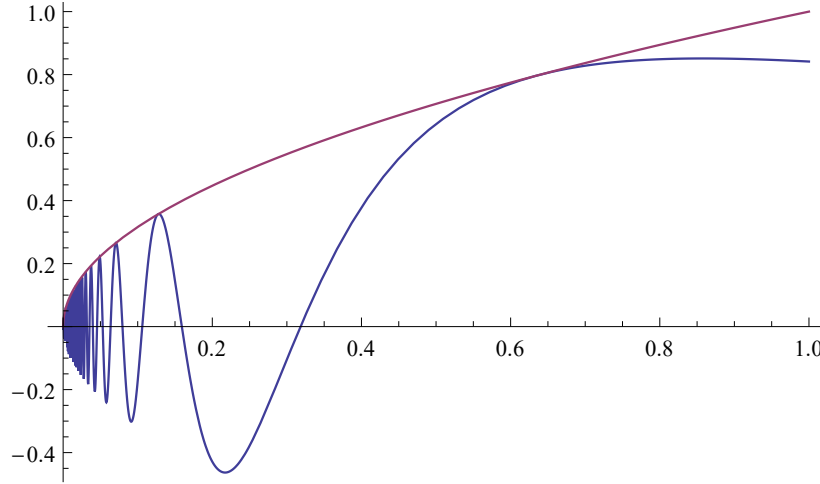


Figura 2.1: Notemos que la gráfica $g(x)$ representada por curva morada domina a la gráfica $f(x)$, representada por la curva azul en el intervalo $[0, 1]$.

Notemos que la función f está dominada por la función $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$, luego f está en $\mathcal{L}^1([0, 1])$. Sin embargo, f no está en $BV([0, 1])$, véase [31], ya que cerca del origen es oscilante, conforme a la Figura 2.1.

Además, en [42] se demostró que no hay relación de inclusión entre

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \gamma \quad HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}),$$

es decir,

$$HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

En particular, en [42] se exhibieron una familia de funciones tales que muestran este último hecho.

Las observaciones (2.4) y (2.5) motivan a estudiar un subespacio de funciones integrales en el sentido Henstock-Kurzweil que no está contenido en el espacio de funciones Lebesgue integrables.

También, se consideró la transformada de Fourier en el sentido de la integral de Henstock-Kurzweil para funciones en el espacio $BV_0(\mathbb{R})$ que contiene a

$$HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}).$$

Los siguientes resultados fueron publicados en [33], donde se obtiene un resultado de tipo Lema Riemann-Lebesgue en un espacio no clásico usando la integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema 2.2.1. *Sea $\varphi \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ y $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(x)dx$ una función acotada en \mathbb{R} . Entonces para cada $f \in BV_0(\mathbb{R})$, la función*

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(\omega t)dt$$

está bien definida para $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es continua para cada $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} H(\omega) = 0.$$

Demostración: Del Teorema 1.2.6 obtenemos una descomposición de la función f en la diferencia de dos funciones $f = g_1 - g_2$, donde g_i son funciones monótonas decrecientes o crecientes, con $i = 1, 2$ y ambas pertenecen a $BV_0(\mathbb{R})$.

Por el Teorema 1.3.3, se tiene que $f\varphi_\omega \in HK([0, \infty])$. El Teorema 1.2.10 nos garantiza que para $\omega \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)\varphi(\omega t)dt &= -\int_0^\infty \frac{\Phi(\omega t)}{\omega} df(t) \\ &= -\int_0^\infty \frac{\Phi(\omega t)}{\omega} dg_1(t) + \int_0^\infty \frac{\Phi(\omega t)}{\omega} dg_2(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $dg_1(t)$ y $dg_2(t)$ son medidas de Lebesgue-Stieltjes generadas por g_1 y g_2 .

Sea $\beta > 0$ y M la cota superior de $|\Phi|$. Para cada $\omega \in [\beta, \infty)$ se tiene que

$$\left| \frac{\Phi(\omega t)}{\omega} \right| \leq \frac{M}{\beta}.$$

La función $\Phi(\omega t)(\omega)^{-1}$ es continua en $[\beta, \infty)$ y las medidas $dg_i(t)$ son finitas ($i = 1, 2$), entonces aplicando el Teorema de Convergencia Dominada en (2.7) se sigue

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} H(\omega) = H(\omega_0),$$

para cada $\omega_0 \in [\beta, \infty)$. Como β es arbitrario esto implica la continuidad de H en $(0, \infty)$. Por otra parte, por la expresión (2.7) con $\omega \in (0, \infty)$ se tiene que

$$\left| \int_0^\infty f(t)\varphi(\omega t)dt \right| \leq \frac{M}{|\omega|} \text{Var}(f; [0, \infty]).$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t)\varphi(\omega t)dt = 0.$$

Los mismos argumentos son válidos para el semieje $(-\infty, 0]$. ■

Notemos que el operador integral definido en el Teorema 2.2.1 es bastante general. Además, este resultado y el hecho de que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ no está contenido en $BV_0(\mathbb{R})$ son cruciales para extender el operador transformada de Fourier sobre un espacio de funciones no absolutamente integrables. La siguiente sección esta dedicada a desarrollar dicha extensión.

Observe que las funciones Seno y Coseno satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.1, así el operador transformada de Fourier de cualquier función en $BV_0(\mathbb{R})$ tiene una expresión integral puntual para todo $s \neq 0$, es continuo y se desvanece al infinito.

2.3. La transformada HK de Fourier $\mathcal{F}_{HK}(f)$

El Teorema 2.2.1 introduce un nuevo dominio de funciones donde el operador transformada de Fourier tiene sentido de manera puntual.

Definición 2.3.1. La transformada HK de Fourier de $f \in BV_0(\mathbb{R})$ en el punto $s \neq 0$ está definida como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{HK}(f)(s) &:= \mathcal{F}_{HK}(f)(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx \\
&= \mathcal{F}_{HK}^C(f)(s) - i \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde las integrales son en el sentido de Henstock-Kurzweil. Denotemos con $\mathcal{F}_{HK}^C(f)$ y $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$ a la transformada HK-Coseno de Fourier y HK-Seno de Fourier de f , respectivamente.

Notemos que la transformada de Fourier no está definida, en $s \neq 0$ debido a que

$$\mathcal{F}_{HK}^C(f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

puede converger o no puede converger.

Así, podemos definir una suma de dos espacios de funciones para obtener un nuevo dominio, el cual es un espacio no clásico de funciones y más general que $BV_0(\mathbb{R})$. Para obtener este nuevo espacio no clásico de funciones. Introducimos el siguiente espacio vectorial que consiste en la suma de dos espacios de funciones.

Definición 2.3.2. Sea $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ un espacio vectorial tal que $f = f_1 + f_2$, donde

$$f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad y \quad f_2 \in BV_0(\mathbb{R}).$$

El Teorema 2.2.1 y la Definición 2.3.2 nos permiten definir al operador transformada HK de Fourier en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ de la siguiente manera.

Definición 2.3.3. La transformada HK de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ en el punto $s \neq 0$ está definida como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{HK}(f)(s) &:= \mathcal{F}_{HK}(f_1)(s) + \mathcal{F}_{HK}(f_2)(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx \\
&= \mathcal{F}_{HK}^C(f)(s) - i \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde las integrales son en el sentido de Henstock-Kurzweil. Denotemos con $\mathcal{F}_{HK}^C(f)$ y $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$ a la transformada HK-Coseno de Fourier y HK-Seno de Fourier de f , respectivamente.

Notemos que si $f_1 = 0$, la transformada HK de Fourier está definida excepto en el punto $s = 0$ para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$. Por otra parte si $f_2 = 0$, dado que la integral de Henstock-Kurzweil contiene a la integral de Lebesgue y la contención es válida en intervalos no acotados, recuperamos la Definición 2.1.1.

Corolario 2.3.1. *La transformada HK de Fourier $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ está bien definida para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y $s \neq 0$. Además,*

$$\mathcal{F}_{HK} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Es claro que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ no define una suma directa de espacios vectoriales. Es decir, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ puede tener diferentes representantes. Sin embargo, veremos que la transformada HK de Fourier está bien definida en dicho espacio, esto es, que no depende de la elección del representante.

Proposición 2.3.1. *La transformada HK de Fourier no depende del representante.*

Demostración: Supongamos que $f = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ con $u_i \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $v_i \in BV_0(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}).$$

El resultado se sigue del hecho de que la integral de Henstock-Kurzweil coincide con la integral de Lebesgue en la intersección $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ [36]. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{HK}(f)$ no depende de la representación de la función f . ■

Corolario 2.3.2. *Para cada $f \in BV_0(\mathbb{R})$,*

$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Demostración: Por definición de transformada de Fourier y la Definición 1.3.5 se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(f)(s) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notemos que las funciones Seno y Coseno cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1. Más aun,

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(sx) f(x) dx &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Procedemos de la misma manera para el semieje $(-\infty, 0]$. Así, la demostración esta completa. ■

Note que con $f \in BV_0(\mathbb{R})$ y para $s = 0$, la expresión (2.10) puede ser convergente o divergente.

De esta manera, haciendo uso de la integral Henstock-Kurzweil, el operador transformada HK de Fourier tiene sentido en un contexto más amplio para cada $s \neq 0$ sobre el espacio de funciones $BV_0(\mathbb{R})$, el cual no está contenido en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ [42].

2.3.1. La transformada HK de Fourier sobre el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$

De acuerdo con las Definiciones 2.1.3 y 2.3.3 existen varios espacios de funciones, donde la transformada de Fourier puede ser definida. Los siguientes resultados fueron publicados en [36] y establecen la relación entre la transformada clásica de Fourier y la transformada HK de Fourier. Además, el comportamiento asintótico de la transformada HK de Fourier \mathcal{F}_{HK} sobre un subespacio denso de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ para $1 < p \leq 2$ obedece a un resultado del tipo Riemann-Lebesgue para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$.

Ahora bien, extendemos algunas propiedades del operador transformada HK de Fourier sobre subconjunto denso de funciones en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Lema 2.3.1. *Para $p > 1$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ es un subconjunto propio de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$.*

Demostración: Es fácil ver que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Considerando la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

y por la expresión (2.6) la aseveración es cierta. ■

El siguiente teorema permitió desarrollar nuevos resultados publicados en [1, 36]. Su demostración puede ser consultada en [40].

Teorema 2.3.1. *Si $1 \leq p \leq \infty$ y (f_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, con límite f , entonces (f_n) tiene una subsucesión, la cual converge puntualmente a f casi donde sea.*

Teorema 2.3.2. *Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$ para $1 < p \leq 2$, entonces*

$$\mathcal{F}_{HK}(f) \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Más aun,

$$\mathcal{F}_p(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f)(s),$$

casi donde sea.

Demostración: Para $p = 2$. Sea $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la sucesión (φ_n) , donde

$$\varphi_n(x) = f \chi_{[-n,n]}(x).$$

Entonces $\varphi_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\varphi_n)(s) &= \mathcal{F}_{HK}(\varphi_n)(s) \\ &= \mathcal{F}_2(\varphi_n)(s), \end{aligned}$$

puntualmente para cada $s \in \mathbb{R}$. Por el Teorema de Plancherel se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_{HK}(\varphi_n) - \mathcal{F}_2(f)\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_2(\varphi_n) - \mathcal{F}_2(f)\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - f\|_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea $f = f_0 + f_1$, donde $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $f_0 \in BV_0(\mathbb{R})$. Por [33, Teorema 3.2] y por el Teorema 1.3.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{HK}(\varphi_n)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f_1 \chi_{[-n,n]}(x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f_0 \chi_{[-n,n]}(x) dx \\ &= \mathcal{F}_{HK}(f)(s), \end{aligned}$$

puntualmente para todo $s \neq 0$. Por el Teorema 2.3.1, se tiene la igualdad

$$\mathcal{F}_2(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f)(s).$$

Por otra parte, por [33, Teorema 3.2] se sigue que

$$\mathcal{F}_{HK}(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Para $1 < p < 2$. Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$. Entonces

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \\ &= f'_1 + f'_2, \end{aligned}$$

donde $f_1, f'_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y $f'_2 \in BV_0(\mathbb{R})$. De esta manera expresamos

$$f_2 = f'_1 - f_1 + f'_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})),$$

y por el razonamiento previo, la demostración está completa. ■

Según el Lema 2.3.1 y el Teorema 2.3.2 el operador transformada de Fourier $\mathcal{F}_p(f)$ se ha extendido sobre un subconjunto de funciones no necesariamente absolutamente integrables. Además, $\mathcal{F}_p(f)(s)$ tiene un comportamiento asintótico al infinito, según la versión de tipo Lema Riemann-Lebesgue, tiene una representación integral puntual y coincide casi donde sea con una función en $C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ vía la transformada HK de Fourier.

Estos resultados dan pauta a estudiar diferentes aspectos de la transformada clásica de Fourier. Por ejemplo, obtener una aproximación numérica de $\mathcal{F}_p(f)(s)$ para $1 < p \leq 2$ empleando una integral más general, como la integral de Henstock-Kurzweil, establecer condiciones para obtener la diferenciabilidad de la transformada de Fourier y analizar bajo que hipótesis el operador transformada Seno de Fourier resulta ser un operador lineal y acotado. En el siguiente capítulo, abordaremos los aspectos antes mencionados, de esta manera se aportan nuevas contribuciones matemáticas sobre las propiedades analíticas de la transformada de Fourier sobre espacios de funciones no absolutamente integrables, estas aportaciones fueron publicadas en [1].

Capítulo 3

Generalización de algunas propiedades de la transformada de Fourier para funciones no absolutamente integrables

3.1. Una aproximación de \mathcal{F}_p a través de \mathcal{F}_{HK}

Los algoritmos de integración numérica son muy importantes para las aplicaciones. Por ejemplo, la aproximación numérica de la transformada de Fourier tiene implicaciones en el procesamiento de imágenes digitales, estimaciones económicas, acústica, entre otros campos prácticos [7, 41]. En particular, si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ no es posible realizar estimaciones de manera puntual para el operador transformada de Fourier $\mathcal{F}_2(f)$ en el sentido clásico, únicamente se tiene garantizada su convergencia en norma $\|\cdot\|_2$.

En el artículo [33], se obtuvo un primer resultado, el cual consiste en cambiar el enfoque del operador transformada de Fourier del sentido clásico (considerando la integral de Lebesgue) a la integral de Henstock-Kurzweil sobre el espacio de funciones $BV_0(\mathbb{R})$, y así obtener una representación integral bien definida de manera puntual, excepto para $s = 0$. Posteriormente, en [36] el operador transformada de Fourier \mathcal{F}_p para $1 < p \leq 2$ es representado por la integral Henstock-Kurzweil sobre un subespacio de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, lo cual implica una extensión de algunas propiedades de dicho operador.

En la publicación [1], extendemos algunas propiedades analíticas fundamentales de la transformada de Fourier demostradas en los trabajos [33, 36], de esta manera obtenemos una representación integral del operador transformada de Fourier \mathcal{F}_p para $1 \leq p \leq 2$ y hacemos una aproximación numérica con la integral de Henstock-Kurzweil, ya que en ocasiones la integral de Lebesgue tiene ciertas limitaciones para realizar cálculos numéricos, véase ejemplos.

En el siguiente teorema, demostramos que el operador transformada de Fourier $\mathcal{F}_p(\phi)(s)$ donde ϕ es cualquier función en espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq 2$ es una función que se desvanece en el infinito, se establece una relación del operador transformada HK de Fourier y operador clásico transformada de Fourier \mathcal{F}_p en un subespacio denso de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$. Además, notemos que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ no está contenido en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$.

Teorema 3.1.1. Si $\phi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq 2$, entonces

1. $\mathcal{F}_{HK}(\phi) \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.
2. $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = \mathcal{F}_p(\phi)(s)$ c.d.s.
3. Para cualquier $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = -\frac{i}{s} \mathcal{F}_1(\phi')(s). \quad (3.1)$$

4. Más aun,

$$|\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|s|} \|\phi'\|_1.$$

Demostración: Sea $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$. Por el Teorema 2.3.2, obtenemos los incisos 1. y 2. Notemos que $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)$ está bien definido para cualquier $s \neq 0$, mientras $\mathcal{F}_p(\phi)(s)$ está definido, excepto en un conjunto de medida cero.

Ahora demostraremos el inciso 3.

De la Definición 2.3.3, podemos obtener la siguiente igualdad

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(sx)\phi(x)dx - i \int_{\mathbb{R}} \text{sen}(sx)\phi(x)dx \right]. \quad (3.2)$$

Empleando el Teorema 1.3.1 en la expresión (3.2) se obtiene

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-T}^T \cos(sx)\phi(x)dx - i \int_{-T}^T \text{sen}(sx)\phi(x)dx \right]. \quad (3.3)$$

Definamos $\text{Cos}_s(x) = \cos(sx)$, así para cada s tenemos que $\text{Cos}_s \in HK_{loc}([-T, T])$, y

$$F(x) = \int_{-T}^x \cos(st)dt = \frac{\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)}{s}$$

es la integral indefinida y se cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.10.

Como $\phi \in BV(\mathbb{R})$, de la expresión (1.11), se obtiene la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(sx)\phi(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(sT)\phi(T)}{s} - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\frac{\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)}{s} \right] d\phi. \quad (3.4)$$

Ahora, notemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(sT)\phi(T)}{s} = 0.$$

Por lo tanto, la expresión (3.4) se puede reducir a

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(sx)\phi(x)dx = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\frac{\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)}{s} \right] d\phi. \quad (3.5)$$

De manera similar, para la transformada HK -Seno de Fourier se tiene la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sen}(sx)\phi(x)dx = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\frac{-\cos(sx) + \cos(sT)}{s} \right] d\phi, \quad (3.6)$$

debido a que $\phi \in BV_0(\mathbb{R})$, esto es ϕ se desvanece en el infinito.

Sustituyendo las expresiones (3.5) y (3.6) en (3.3), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T \frac{\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)}{s} d\phi \\ &+ i \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T \frac{-\cos(sx) + \cos(sT)}{s} d\phi. \end{aligned}$$

Las integrales de tipo Stieltjes en (3.5) y (3.6) existen como integrales de Riemann-Stieltjes y Lebesgue-Stieltjes [5, 19, 35]. Por otra parte, $\phi \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ por el Teorema 1.2.7 y [29, Ejercicio 2, p. 186] resulta que

$$\int_{-T}^T (\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)) d\phi = \int_{-T}^T (\text{sen}(sx) + \text{sen}(sT)) \phi'(x) dx$$

y

$$\int_{-T}^T (-\cos(sx) + \cos(sT)) d\phi = \int_{-T}^T (-\cos(sx) + \cos(sT)) \phi'(x) dx.$$

Por otra parte, dado que $\phi \in BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ se obtiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[(\cos(sT) - \text{sen}(sT)) \int_{-T}^T \phi'(x) dx \right] = 0, \quad (3.7)$$

y [24, Corolario 2.23] implica que $\phi' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[- \int_{-T}^T [\text{sen}(sx) + i \cos(sx)] \phi'(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{is} \mathcal{F}_1(\phi')(s). \end{aligned}$$

Además,

$$|\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|s|} \|\phi'\|_1.$$

Para $1 \leq p < 2$ las mismas fórmulas y argumentos son válidos. ■

Observación 3.1.1. Como $\phi \in BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, por [6, Teorema 7.5] y [24, Teorema 3.39] tenemos que

$$\|\phi'\|_1 = Var(\phi, \mathbb{R})$$

y así $\phi \in AC(\mathbb{R})$, este conjunto de funciones está definido en [13, 16]. Así,

$$BV_0(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R}) = BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R}).$$

Estos resultados permiten calcular de manera puntual la transformada de Fourier, por lo cual, se pueden hacer aproximaciones vía la integral de Henstock-Kurzweil.

Del Teorema 3.1.1, suponiendo que ϕ es una función par (o impar) se obtiene una representación puntual de su transformada HK de Fourier.

Corolario 3.1.1. Sea $\phi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq 2$.

1. Si ϕ es una función par, entonces

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{s} \int_0^\infty \text{sen}(sx)\phi'(x)dx. \quad (3.8)$$

2. Si ϕ es una función impar, entonces

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{s} \int_0^\infty [\cos(sx) - 1]\phi'(x)dx. \quad (3.9)$$

Demostración: Sea $\phi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq 2$ y $\phi(-x) = \phi(x)$. Como

$$\int_{-T}^T \text{sen}(sx)\phi(x)dx = 0,$$

la expresión (3.3) se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \cos(sx)\phi(x)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \cos(sx)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Por el Teorema del Multiplicador se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \cos(sx)\phi(x)dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(sT)}{s} \phi(T) - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\text{sen}(sx)}{s} d\phi \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dado que $\phi \in BV_0(\mathbb{R})$ se obtiene que el

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(sT)}{s} \phi(T) = 0. \quad (3.11)$$

Debido a la expresión (3.11) y la hipótesis $\phi \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ en (3.10) obtenemos

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{s} \int_0^\infty \text{sen}(sx)\phi'(x)dx.$$

En el caso de que ϕ sea una función impar, procedemos de manera análoga ya que

$$\int_{-T}^T \cos(sx)\phi(x)dx = 0.$$

Por el Teorema del Multiplicador se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \text{sen}(sx)\phi(x)dx \\ &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{\cos(sx)}{s} + \frac{1}{s} \right) \phi(x) \Big|_0^T - \frac{1}{s} \int_0^T (\cos(sx) - 1)\phi'(x)dx \right]. \end{aligned}$$

Dado que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(sT)}{s} + \frac{1}{s} \right) \phi(T) = 0.$$

De esta manera tenemos

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s} \int_0^\infty (\cos(sx) - 1)\phi'(x)dx.$$

■

En cualquier caso, $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = \mathcal{F}_p(\phi)(s)$ casi donde sea, donde $\mathcal{F}_{HK}(\phi) \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Las expresiones (3.8) y (3.9) nos permiten calcular de manera puntual la transformada de Fourier, en particular para una función cuadrado integrable. La integral de Lebesgue garantiza la convergencia en norma de acuerdo con la Definición 2.1.2 y no de manera puntual.

E. Liflyand en [25, 26, 27, 28] trabajó en un subespacio de $BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ para obtener fórmulas de integrabilidad y estudió el comportamiento asintótico de la transformada de Fourier con la integral de Lebesgue. En el presente trabajo, restringimos el dominio del operador transformada de Fourier para proporcionar nuevas expresiones integrales de la transformada de Fourier \mathcal{F}_p .

Los resultados del Teorema 3.1.1 y su Corolario 3.1.1 implican que la transformada de Fourier clásica $\mathcal{F}_p(\phi)$, ϕ en un subespacio denso de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, está representada por una integral de Henstock-Kurzweil, esta transformada de Fourier resulta ser una función continua, excepto en $s = 0$ y se desvanece en el infinito como $o(|s|^{-1})$.

Además, hemos comentado que la integral de Lebesgue tiene ciertas limitaciones relacionadas con aproximaciones numéricas [8, 13]. En ese sentido, las fórmulas obtenidas en (3.1), (3.8) y (3.9) proporcionan una representación puntual que pueden emplearse para

aproximar numéricamente al operador $\mathcal{F}_p(\phi)$ en valores específicos. En realidad, esto es posible por el Teorema 1.3.1 (Teorema de Hake). A través, de la siguiente relación

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \leq M} e^{-isx} \phi(x) dx \quad (M \rightarrow \infty), \quad (3.12)$$

para cualquier $s \neq 0$, $\phi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ($1 < p \leq 2$). Más aun, el Teorema 3.1.1 justifica y asegura que $\mathcal{F}_p(\phi)(s)$ se aproxima asintóticamente por (3.12). Notemos que la teoría de la integración de Lebesgue sólo asegura la convergencia de las integrales en (3.12) para una sucesión de valores de M y s en algún subconjunto (desconocido) $\mathfrak{A} \subsetneq \mathbb{R}$.

Ahora veamos la aplicabilidad del Colorario 3.1.1, primero consideramos una función que no es absolutamente integrable pero si cuadrado integrable, del punto de vista clásico, Ejemplo 3.1.1. Por otro lado, en el Ejemplo 3.1.2 consideremos otra función con la propiedad de ser cuadrado integrable y absolutamente integrable. En ambos casos, cambiamos el sentido a la integral de Henstock-Kurzweil para obtener expresiones integrables de manera puntual para la transformada de Fourier de dichas funciones.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos la función $\phi(x) = |x|/(x^2 + 1)$ con las propiedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| dx = \infty \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = \pi/2,$$

lo cual confirma que ϕ no es Lebesgue integrable, sin embargo, si es cuadrado integrable. La función ϕ es par, de variación acotada, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$ y $AC_{loc}(\mathbb{R})$. La gráfica de ϕ es la siguiente:

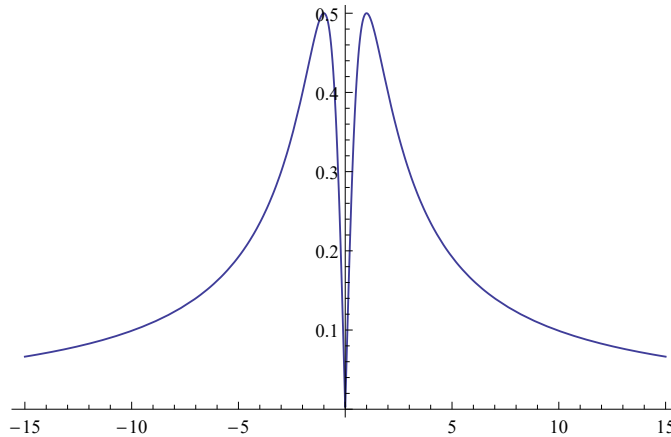


Figura 3.1: $\phi(x) = |x|/(x^2 + 1)$.

En otras palabras, la función ϕ cumple las siguientes propiedades:

1. $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,
2. ϕ es una función par.
3. $\phi \in BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$.

Por el Corolario 3.1.1 y la expresión (3.8), para $s \neq 0$ la transformada HK de Fourier de ϕ está dada por

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) = -\frac{1}{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(sx)(1-x^2)}{(x^2+1)^2} dx \quad (3.13)$$

y

$$\mathcal{F}_2(\phi)(s) = \mathcal{F}_{HK}(\phi)(s) \quad \text{c.d.s.}$$

Además, por el Teorema 3.1.1 se tiene que es una función que se desvanece en el infinito, es decir,

$$\mathcal{F}_{HK}(\phi) \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Si nos limitamos sólo a aplicar la teoría desarrollada en el contexto de la integral de Lebesgue, tenemos que para $1 < p < 2$ se tiene la siguiente igual de operadores

$$\mathcal{F}_p(\phi) = \mathcal{F}_2(\phi),$$

cuya convergencia es en norma $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, sin obtener una representación integral de manera puntual.

Los algoritmos matemáticos implementados computacionalmente nos pueden llevar a funciones especiales con parámetros desconocidos y expresiones condicionadas a dichos parámetros. Por ejemplo, consideremos la función del Ejemplo 3.1.1 y calculamos su transformada de Fourier, esto es

$$\mathcal{F}\left(\frac{|x|}{1+x^2}\right)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{|x|}{1+x^2} dx. \quad (3.14)$$

Empleando la siguiente sentencia computacional

$$\text{Integrate}[\text{Sqrt}[1/(2 * \text{Pi})] * e^{-i*x*s} * (\text{Abs}[x]/(1 + x^2)), \{x, -\text{Infinity}, \text{Infinity}\}],$$

se tiene la siguiente de salida

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{\text{MeijerG}\left[\{\{0\}, \{\}\}, \{\{0, 0\}, \{1/2\}\}, s^2/4\right]}{\sqrt{2}}, s \in \text{Reals}\right].$$

La función MeijerG es una función implementada en el software que generaliza a ciertas funciones especiales como la hipergeométrica. Esta función especial incluye valores desconocidos, lo cual, dificulta la interpretación de la transformada de Fourier. Por otra parte, si variamos un parámetro podemos obtener un resultado significativamente diferente.

Notemos que la transformada de Fourier de la función $|x|/(1+x^2)$ no ha sido reducida algebraicamente, ya que no tenemos algún desarrollo teórico que sustente nuevas expresiones algebraicas. Esto significa que no podemos garantizar aproximación numérica hecha a través de nuevas igualdades o bajo que condiciones se mantienen válidas estas igualdades.

Por otra parte, la expresión (3.14) es reducida algebraicamente a la expresión (3.13), consecuencia directa de la integral de Henstock-Kurzweil.

Empleando integración numérica vía computacional, podemos calcular de manera puntual el operador transformada HK de Fourier, conforme a las expresiones (3.13) y (3.12) establecidas en [1]. Más aun, el Teorema de Hake nos garantiza que no existe diferencia entre la integral impropia y la integral de Henstock-Kurzweil. Utilizando la expresión (3.13) e integrando numéricamente, procedemos a estimar de manera puntual el operador transformada HK de Fourier.

Implementando la siguiente sentencia, obtenemos valores aproximados del operador transformada HK de Fourier para valores discretos:

$$s = s_0$$

$$NIntegrate[-Sqrt[2/Pi] * Sin[s_0 * x] * (1 - x^2)/(s_0 * (1 + x^2)^2), \{x, 0, Infinity\}].$$

Ahora se muestra la siguiente tabla de valores discretos obtenidos de la transformada de Fourier:

s	$\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)$
1	-0.0402244
2	-0.123335
3	-0.0927512
4	-0.0611205
5	-0.0400315
6	-0.0270801
7	-0.0191447
8	-0.014143
9	-0.0108602
10	-0.00861065
11	-0.00700584
12	-0.00581993
13	-0.00491716
14	-0.00421272
15	-0.00365162
16	-0.00319691
17	-0.00282296
18	-0.00251153
19	-0.00285153
20	-0.00202633

El Teorema 3.1.1 nos asegura que el operador transformada HK de Fourier para valores de s suficientemente grandes tienden a cero. Por lo cual, se implementa el siguiente algoritmo computacional que permite graficar el operador transformada HK de Fourier de $\phi(x) = |x|/(1 + x^2)$:

$$F = Array[0\&, 50];$$


```

Do[F[[s]] = NIntegrate[-Sqrt[2/Pi] * Sin[s * x] * (1 - x^2)/(s * (1 + x^2)^2)
, {x, 0, Infinity}], {s, 50}];
ListPlot[Table[{s, F[[s]]}, {s, 50}], Joined -> True, PlotRange -> -0,15,0,03
, AxesLabel -> {"s", "F[s]"}].

```

Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ tenemos que $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)$ tiende a cero cuando s tiende a infinito, como se ilustra en la Figura 3.2.

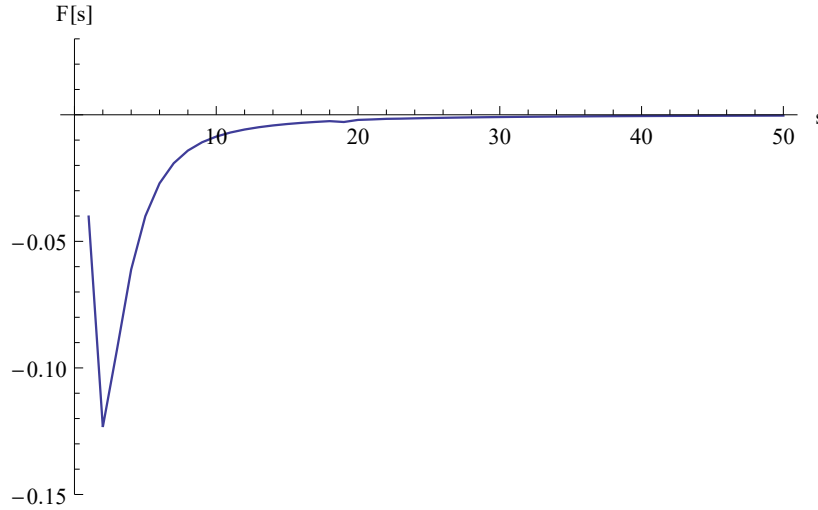


Figura 3.2: La representación gráfica $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)$ $s \in (1, 50]$.

Ejemplo 3.1.2. Consideramos la función $\varphi(x) = x/(1+x^2)^2$ con las siguientes propiedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx = 1 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \pi/16,$$

lo cual nos confirma que es una función Lebesgue integrable y cuadrado integrable. La función φ es impar, de variación acotada, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ y $AC_{loc}(\mathbb{R})$, véase la Figura 3.3.

En otras palabras, la función φ cumple las siguientes propiedades:

1. $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,
2. φ es una función impar.
3. $\varphi \in BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$.

Por el Corolario 3.1.1 y la expresión (3.9), para $s \neq 0$ la transformada HK de Fourier de φ está dada por

$$\mathcal{F}_{HK}(\varphi)(s) = -i \frac{1}{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{(\cos(sx) - 1)(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} dx. \quad (3.15)$$

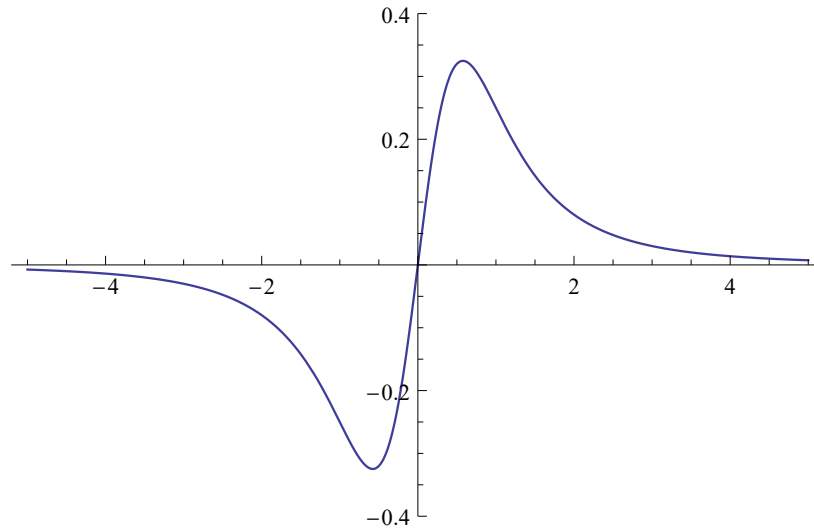


Figura 3.3: $\varphi(x) = x/(1+x^2)^2$.

Notemos que la expresión analítica dada en (3.15) define a la transformada de Fourier de manera puntual para valores de $s \in \mathbb{R}$, excepto $s = 0$. A diferencia del operador $\mathcal{F}_1(\varphi)$, donde es posible tener un conjunto de medida cero (desconocido) y no poder determinar el valor puntual del operador transformada de Fourier con la integral de Lebesgue.

Conforme a la expresión (3.15), procedemos a calcular numéricamente la transformada de Fourier de manera computacional con el siguiente algoritmo:

$$F = \text{Array}[0\&, 20];$$

$$\text{Do}[F[[s]] = \text{NIntegrate}[-\text{Sqrt}[2/\text{Pi}] * (\text{Cos}[s * x] - 1) * (1 - 3 * x^2)/(s * (1 + x^2)^3), \{x, 0, \text{Infinity}\}], \{s, 20\}].$$

Mostremos la siguiente tabla con los valores discretos de la transformada HK de Fourier:

s	$\mathcal{F}_{HK}(\varphi)(s)$
1	-0.230534 i
2	-0.169618 i
3	-0.0935983 i
4	-0.0459105i
5	-0.0211119i
6	-0.00931997i
7	-0.00400006i
8	-0.00168176i
9	-0.000696021i
10	-0.000284502 i
11	-0.000115129i
12	-0.0000462038i
13	-0.0000184139i
14	$-7.29517 \times 10^{-6} i$
15	$-2.87544 \times 10^{-6} i$
16	$-1.12834 \times 10^{-6} i$
17	$-4.41035 \times 10^{-7} i$
18	$-1.71792 \times 10^{-7} i$
19	$-6.67096 \times 10^{-8} i$
20	$-2.58327 \times 10^{-8} i$

Los ejemplos anteriores muestran el alcance teórico de la integral de Henstock-Kurzweil empleada en el Análisis de Fourier. Además, la implementación de algoritmos computacionales permiten calcular de manera puntual el operador transformada de Fourier de funciones no necesariamente Lebesgue integrables.

3.2. Diferenciabilidad de la transformada HK de Fourier

Mientras se estudian condiciones para la convergencia de la transformada de Fourier, la diferenciabilidad de la función transformada de Fourier cerca del infinito suele ser un punto de interés [10]. La diferenciabilidad cerca de infinito es de vital importancia en aplicaciones de la Física e Ingeniería.

Cuando se tiene una integral que depende de un parámetro, digamos

$$H(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

es importante saber cuando H es continua y diferenciable.

El Teorema de Convergencia Dominada proporciona algunos criterios de continuidad y diferenciabilidad de funciones definidas como integrales bajo un parámetro [13, 40].

Proposición 3.2.1. Si la función $t \rightarrow f(x, t)$ es continua en Y un intervalo compacto, para $x \in X$, donde X es un intervalo compacto. Si existe una función integrable g en X tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, entonces la función F definida por

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

es continua para $t \in Y$.

Proposición 3.2.2. Supongamos que para algún $t_0 \in Y$ un intervalo compacto, la función $x \rightarrow f(x, t_0)$ es integrable en X , si $\partial f / \partial y$ existe en $X \times Y$, y se tiene una función g en X -integrable tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x).$$

Entonces la función F definida en la Proposición 3.2.1 es diferenciable en Y y

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t} f(x, t) d\mu(x).$$

Enseguida damos un ejemplo, donde se calcula la derivada bajo el signo de la integral aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada.

Ejemplo 3.2.1. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2xt) dx$.

Del hecho de que

$$|e^{-x^2} \cos(2xt)| \leq e^{-x^2},$$

se tiene para toda x y t que la integral de Riemann impropia $F(t)$ existe y es Lebesgue integrable sobre $[0, \infty)$. Además, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} e^{-x^2} \cos(2xt) \right| &= |-2xe^{-x^2} \operatorname{sen}(2xt)| \\ &\leq 2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

para toda $x \geq 0$ y $t \in \mathbb{R}$. Por otra parte,

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx = 1.$$

Entonces, aplicando el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que

$$F'(t) = -2 \int_0^\infty xe^{-x^2} \operatorname{sen}(2xt) dx.$$

Si consideramos una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable (a, b) , no siempre resulta que g' es integrable en el sentido de Riemann o Lebesgue, como se muestra en el Ejemplo 1.2.6.

Por otra parte, el Teorema 1.2.5 nos garantiza que todas las derivadas son integrables en marco de la integral de Henstock-Kurzweil. Usando la versión más general del Teorema Fundamental del Cálculo Integral [6], podemos formular las condiciones necesarias y suficientes para la diferenciación bajo el signo de la integral.

Notemos que bajo ciertas condiciones se obtiene que la transformada de Fourier de una función absolutamente integrable es diferenciable, véase [40, Teorema 9.2]. En la presente tesis, se obtiene una generalización de este resultado sobre un espacio de funciones no absolutamente integrables, es decir, la diferenciación bajo el signo de integral se usa para demostrar la diferenciabilidad del operador transformada HK de Fourier aplicado a una función ϕ que no es necesariamente Lebesgue integrable. Primero, introducimos el concepto de función absolutamente continua generalizada en el sentido restringido para obtener nuestros resultados.

Definición 3.2.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Una función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en el sentido restringido en I si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^l w(F, [c_i, d_i]) < \delta,$$

cuando $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^l$ es una colección finita de intervalos no traslapados que tienen como extremos los puntos finales del intervalo I y satisface

$$\sum_{i=1}^l (d_i - c_i) < \delta,$$

donde

$$w(F, [a, b]) := \sup\{|F(y) - F(x)|, a \leq x \leq y \leq b\}.$$

El espacio de todas las funciones absolutamente continuas en el sentido restringido en I es denotado por $AC^*(I)$. Una función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una generalización de las funciones absolutamente continuas en el sentido restringido en I si F es continua en I y I puede escribirse como una unión contable de intervalos en donde F es AC^* en cada uno de ellos. El espacio de todas las funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido en I es denotado por $ACG^*(I)$.

Una caracterización de las funciones Henstock-Kurzweil integrables está dada por las funciones absolutamente continuas generalizadas en el sentido restringido, debido a que las primitivas de las funciones Henstock-Kurzweil integrables son funciones en ACG^* [16]. Una función f es Henstock-Kurzweil integrable si y sólo si existe una función F en ACG^* con $F' = f$ casi donde sea. En este caso,

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Note que esta caracterización es análoga a la que se tiene para el espacio de funciones Lebesgue integrables, véase Teorema 1.2.18.

Para un intervalo no acotado de la forma $[0, \infty]$ se pide la continuidad de la función f en el punto ∞ y que el $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ exista.

Así, las primitivas de funciones localmente Henstock-Kurzweil integrables son funciones

absolutamente continuas generalizadas localmente en el sentido restringido sobre \mathbb{R} , y este espacio será denotado como $ACG_{loc}^*(\mathbb{R})$.

Los siguientes resultados fueron publicados en [45], los cuales fueron esenciales para obtener nuevas contribuciones en este trabajo de tesis.

Teorema 3.2.1. *1. Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $\int_a^b f$ existe y $F(x) = \int_a^x f$ para toda $x \in [a, b]$ si y sólo si F está $ACG^*[a, b]$, $F(a) = 0$ y $F' = f$ casi donde sea en (a, b) . Si $\int_a^b f$ existe y f es continua en $x \in (a, b)$, entonces*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x).$$

2. Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces F está $ACG^[a, b]$ si y sólo si F' existe casi donde sea en (a, b) , F' es Henstock-Kurzweil en $[a, b]$, y $\int_a^b F' = F(x) - F(a)$ para toda $x \in [a, b]$.*

Corolario 3.2.1. *Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable casi en todas partes en (a, b) . Entonces F' es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ para toda $x \in [a, b]$.*

Sea $F(x, y) = \int_a^b f(x, y)dy$ una función en $ACG^*([a, b])$, nos interesa saber cuando F es derivable y $F'(x, y) = \int_a^b f_1(x, y)dy$ en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil. Notemos que la Proposición 3.2.2 nos muestra que el Teorema de Convergencia Dominada nos permite diferenciar la función F . El siguiente Teorema nos das las condiciones necesarias y suficientes para diferenciar F e intercambiar el orden de las integrales.

Teorema 3.2.2. [45] *Sea $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga que $f(\cdot, y)$ está $ACG^*[\alpha, \beta]$ y $F'(x) = \int_a^b f_1(x, y)dy$ para casi toda $x \in (\alpha, \beta)$ si y sólo si*

$$\int_{x=s}^t \int_{y=a}^b f_1(x, y)dydx = \int_{y=a}^b \int_{x=s}^t f_1(x, y)dxdy \quad \text{para todo } [s, t] \subseteq [\alpha, \beta].$$

Ahora presentamos y demostramos nuevos resultados relacionados a la diferenciabilidad de la transformada de Fourier, los cuales fueron publicados en [1].

Proposición 3.2.3. *Sea $g \in BV_0(\mathbb{R})$ y $Sen_s(x) = \text{sen}(sx)$, entonces para cada $s \neq 0$ se tiene que*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Sen_s(x)g(x)dx \right| \leq \frac{2}{|s|} Var(g, \mathbb{R}).$$

Demostración: Dado que $Sen_s \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ y $g \in BV_0(\mathbb{R})$ por los Teoremas 1.3.1 y 1.2.10 se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} Sen_s(x)g(x)dx \right| &= \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R sen(sx)g(x)dx \right| \\
&= \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \left[g(x) \frac{\cos(sR) - \cos(sx)}{s} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R \frac{\cos(sR) - \cos(sx)}{s} dg \right] \right| \\
&= \left| - \int_{-R}^R \frac{\cos(sR) - \cos(sx)}{s} dg \right| \\
&\leq \left| \int_{-R}^R \frac{\cos(sR)}{s} dg \right| + \left| \int_{-R}^R \frac{\cos(sx)}{s} dg \right| \\
&\leq \frac{2}{|s|} Var(g, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.3. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ tal que $g(x) := xf(x)$ pertenecen a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)$ es continuamente diferenciable en puntos distintos de cero y

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_{HK}(f)(s) = -i \mathcal{F}_{HK}(g)(s), \quad (s \neq 0). \quad (3.16)$$

Demostración: Como primer paso consideremos $f, g \in BV_0(\mathbb{R})$. Por el Teorema 2.3.2, tenemos

$$\mathcal{F}_{HK}^S(g) \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Dada la Proposición 3.2.3, es fácil ver que

$$|\mathcal{F}_{HK}^S(g)| \leq \frac{2}{|s|\sqrt{2\pi}} Var(g, \mathbb{R}).$$

Definamos $G(s, x) := \cos(sx)f(x)$ en $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ con respecto a s para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $[\alpha, \beta]$ cualquier intervalo compacto tal que $0 \notin [\alpha, \beta]$ y definimos la sucesión $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$\Phi_n(s) := \int_{-n}^n \frac{d}{ds} G(s, x) dx, \quad (3.17)$$

con $n \in \mathbb{N}$. De la Proposición 3.2.3 se sigue

$$|\Phi_n(s)| \leq \frac{2}{|s|\sqrt{2\pi}} Var(g, \mathbb{R}),$$

entonces la sucesión $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1[\alpha, \beta]$.

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, el Teorema de Fubini y el Teorema 1.3.1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} G(s, x) dx ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} -\operatorname{sen}(sx)g(x) dx ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)[\cos(\beta x) - \cos(\alpha x)] dx \\
&= \mathcal{F}_{HK}^C(f)(\beta) - \mathcal{F}_{HK}^C(f)(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{ds} G(s, x) ds dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)] f(x) dx \\
&= \mathcal{F}_{HK}^C(f)(\beta) - \mathcal{F}_{HK}^C(f)(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De (3.18), (3.19) y el Teorema 3.2.2, obtenemos que la transformada HK -Coseno de Fourier es diferenciable bajo el signo de integral. Debido a que $g \in BV_0(\mathbb{R})$, aplicando el Teorema 2.3.2 se obtiene que

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_{HK}^C(f)$$

es una función continua (excepto en $s = 0$) que se desvanece en el infinito. Por argumentos similares,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}^C(g)(s)$$

para cualquier $s \neq 0$.

Para el caso general, suponemos que $tf = g_1 + g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Entonces la expresión (3.17) con $g = g_1 + g_2$ obedece también $(\Phi_n) \subset \mathcal{L}^1[\alpha, \beta]$, así las expresiones (3.18) y (3.19) siguen siendo válidas. Por lo tanto, la transformada HK de Fourier es diferenciable y aplicando de nuevo el Teorema 3.2.2 obtenemos (3.16). ■

Corolario 3.2.2. *Supongamos las hipótesis del Teorema 3.2.3. Entonces*

$$\mathcal{F}_{HK}^S(f) \in ACG_{loc}^*(\mathbb{R}).$$

Demostración: El Teorema 3.2.3 implica que $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$ es una función continuamente diferenciable en puntos distintos de cero, y por [3, Corolario 1] se obtiene que su derivada es una función en $HK_{loc}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, el Teorema 3.2.1 nos da el resultado. ■

Ampliaremos el Teorema 3.2.3 para estudiar la diferenciability de la transformada de Fourier $\mathcal{F}_p(f)$ para $1 \leq p \leq 2$, y f no necesariamente absolutamente integrable. Primero, presentamos resultados auxiliares.

Lema 3.2.1. *Supongamos que $1 \leq p \leq 2$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Entonces, existe una sucesión $(n_k) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathcal{F}_p(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx, \quad (3.20)$$

casi donde sea en \mathbb{R} .

Demostración: Los casos $p = 1$ o $p = 2$ se siguen de [39, 40]. Para $1 < p < 2$, debido a [18, 36, 38] existen funciones

$$f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \quad y \quad f_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$$

tal que $f = f_1 + f_2$. Así, tenemos que

$$\mathcal{F}_p(f) = \mathcal{F}_1(f_1) + \mathcal{F}_2(f_2).$$

Aplicando el Teorema 2.3.1, obtenemos una sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx = \mathcal{F}_2(f_2)(s),$$

casi donde sea en \mathbb{R} . Esto implica que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f_1(x) dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f_2(x) dx \\ &= \mathcal{F}_1(f_1)(s) + \mathcal{F}_2(f_2)(s) \\ &= \mathcal{F}_p(f)(s), \end{aligned}$$

casi donde sea. Esto prueba la afirmación. ■

Proposición 3.2.4. Sea $1 \leq p \leq 2$ fija. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $g(x) := xf(x)$ pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Redefiniendo $\mathcal{F}_p(f)(s)$ sobre un conjunto de medida cero, entonces se tiene

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_p(f)(s) = -i \mathcal{F}_{HK}(g)(s), \quad (s \neq 0).$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Por definición de la transformada de Fourier se tiene

$$\mathcal{F}_p(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx.$$

Por el Lema 3.2.1, se tiene una subsucesión tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Notemos que la subsucesión converge en norma casi donde sea

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx \xrightarrow{\mathcal{L}^q} \mathcal{F}_p(s),$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Supongamos que $0 < \alpha < \beta$. Procediendo de manera similar a la demostración del Teorema 3.2.3, tenemos

$$\begin{aligned} -i \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{F}_{HK}(g)(s) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} x f(x) dx ds \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-isx} x f(x) ds dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} (e^{-i\beta x} - e^{-i\alpha x}) f(x) dx \\ &= \mathcal{F}_p(f)(\beta) - \mathcal{F}_p(f)(\alpha), \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde (3.21) es cierto casi donde sea, por el Lema 3.2.1. Esto implica la validez de la proposición. ■

Corolario 3.2.3. *Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$ y $g := xf \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$. Entonces redefiniendo $\mathcal{F}_p^S(f)$ en un conjunto de medida cero, se tiene*

$$\mathcal{F}_p^S(f) \in ACG^*(\mathbb{R}).$$

Demostración: Esto se sigue de la Proposición 3.2.4, [3, Corolario 1] y [45, Teorema 2]. ■

Lema 3.2.2. *Sea $1 < p \leq 2$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, entonces existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ tal que tal que*

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q \leq M < \infty.$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$, notemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-isx} f(x) dx \xrightarrow{\mathcal{L}^q} \mathcal{F}_p(f)$$

converge en norma $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, casi donde sea. Por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que si $n > N(\varepsilon)$, entonces

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-isx} f(x) dx - \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q \leq \varepsilon. \quad (3.22)$$

De la expresión (3.22), tomemos $\varepsilon = 1$. Por el Lema 3.2.1 existe una subsucesión y un $k > 0$ tal que existe $n_k \geq N(1)$, entonces

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx - \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q \leq 1. \quad (3.23)$$

Por desigualdad triangular se sigue que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx - \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q + \left\| \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q. \quad (3.24)$$

De las expresiones (3.23) y (3.24) se obtiene

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q \leq 1 + \left\| \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q. \quad (3.25)$$

Para acotar los primeros términos de la subsucesión, los cuales son un número finito, procedemos a definir el máximo de ellos, es decir,

$$b = \max \left\{ \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_1}^{n_1} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q, \dots, \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_{N(1)}}^{n_{N(1)}} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q \right\}.$$

Ahora, consideremos $M = \max \left\{ b, 1 + \left\| \mathcal{F}_p(f)(s) \right\|_q \right\}$, entonces

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x) dx \right\|_q \leq M. \quad \blacksquare$$

Proposición 3.2.5. Sea $1 < p \leq 2$ fija, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $xf = h_p + h_0 \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Entonces redefiniendo $\mathcal{F}_p(f)(s)$ en un conjunto de medida cero, se tiene

$$\mathcal{F}_p(f) \in AC_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$$

y

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_p(f)(s) = -i[\mathcal{F}_p(h_p)(s) + \mathcal{F}_{HK}(h_0)(s)] \quad c.d.s.$$

Demostración: Debido a que el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{-isx} h_p(x) dx$$

converge a

$$\mathcal{F}_p(h_p),$$

con respecto a la norma en $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, por el Lema 3.2.2 existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} h_p(x) dx \right\|_q \leq M < \infty.$$

Como se argumentó en la ecuación (3.18), con $\alpha < \beta$ tales que

$$\begin{aligned} -i \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{F}_p(h_p)(s) + \mathcal{F}_{HK}(h_0)(s) ds &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-isx} (h_p + h_0)(s) ds dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-isx} x f(x) ds dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-n_k}^{n_k} (e^{-i\beta x} - e^{-i\alpha x}) f(x) dx \\ &= \mathcal{F}_p(f)(\beta) - \mathcal{F}_p(f)(\alpha). \end{aligned}$$

Donde tomamos una subsucesión de (n_k) , si es necesario. ■

Corolario 3.2.4. *Suponga las hipótesis de la Proposición 3.2.5. Entonces, redefiniendo $\mathcal{F}_p^S(f)$ en un conjunto de medida cero tenemos que*

$$\mathcal{F}_p^S(f) \in ACG_{loc}^*(\mathbb{R}).$$

Demostración: Por argumentos similares a los anteriores se tiene el resultado. ■

Los siguientes ejemplos muestran la aplicabilidad de nuestros resultados obtenidos sobre la transformada de Fourier en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil en espacios no clásicos.

Ejemplo 3.2.2. *La función $\phi(x) := (1 + x^2)^{-1}$ tiene la siguiente representación gráfica sobre el intervalo $[-10, 10]$ en la Figura de abajo.*

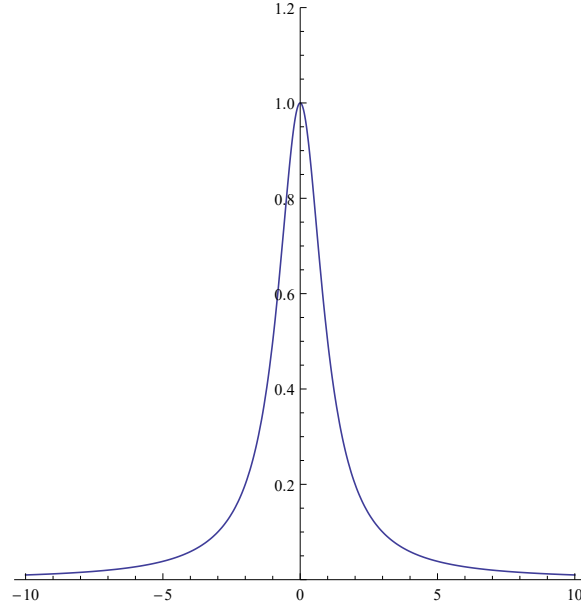


Figura 3.4: $\phi(x) := (1 + x^2)^{-1}$

Notemos que es una función ϕ es par y $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
Además,

$$g = x\phi \in BV_0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Puede verificar mediante un cálculo simbólico computacional que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\phi)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(sx)(1+x^2)^{-1} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i\mathcal{F}_{HK}(g)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x \operatorname{sen}(sx)}{1+x^2} dx \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(s) e^{-|s|} \quad (s \neq 0). \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 3.2.4, obtenemos la igualdad

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_2(\phi)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x \operatorname{sen}(sx)}{1+x^2} dx.$$

Notemos que la integral es en el sentido de Henstock-Kurzweil.

En particular,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_{HK}^S(\phi)(s) = \mathcal{F}_{HK}^C(g)(s) \quad \text{y} \quad \frac{d}{ds} \mathcal{F}_{HK}^S(\phi)(s) = -\mathcal{F}_{HK}^S(g)(s).$$

El siguiente ejemplo muestra la aplicabilidad del Teorema 3.1.1 y la Proposición 3.2.4.

Ejemplo 3.2.3. Sea $\psi(x) = \arctan|x| - \frac{\pi}{2}$ es una función de variación acotada tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0,$$

es decir, $\psi \in BV_0(\mathbb{R})$.

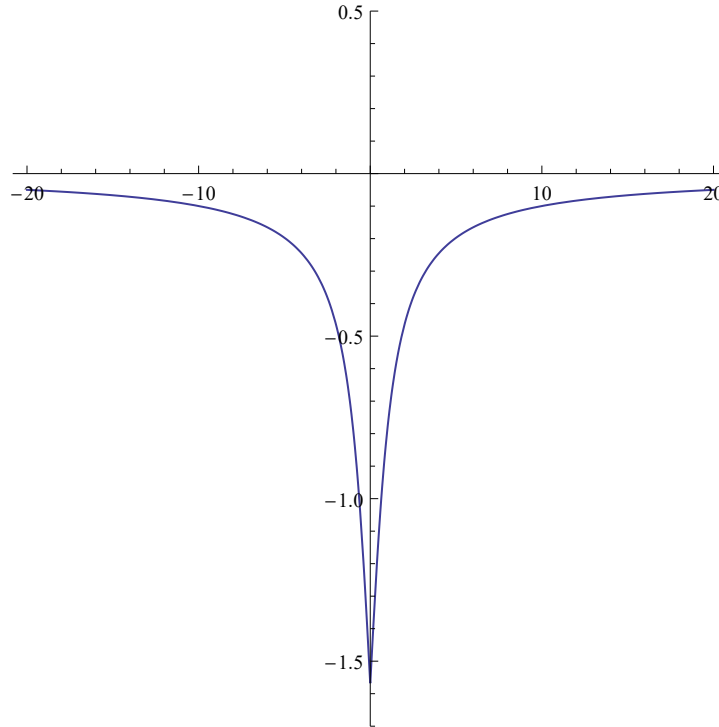
Por otra parte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx = \infty \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2\pi \log(2).$$

Es decir,

$$\psi \in BV_0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Abajo se muestra la representación gráfica de ψ .



El producto $x\psi(x) = x \cdot \arctan|x| - \frac{x\pi}{2}$ se puede entender como la suma de

$$f_1(x) = x \cdot \arctan|x| \quad y \quad f_2(x) = \frac{-x\pi}{2},$$

tenemos

$$\int_0^{\infty} f_1(x) dx = \infty \quad y \quad f_2 \notin BV_0(\mathbb{R}).$$

Entonces

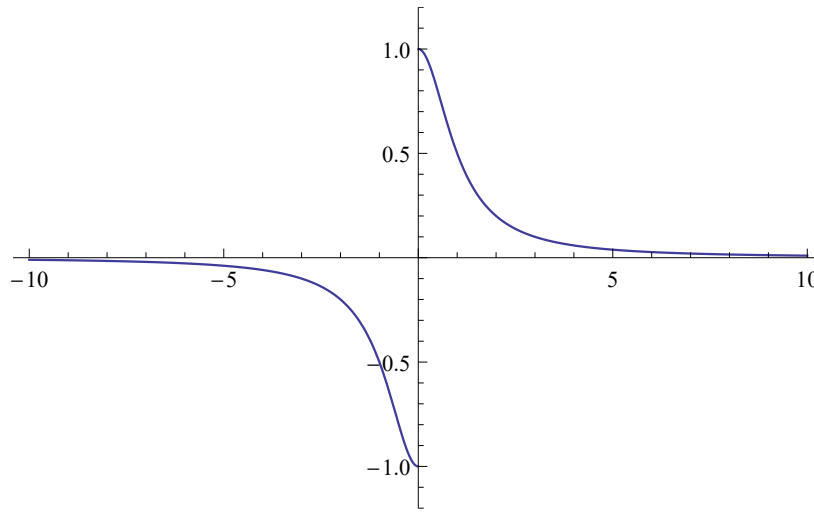
$$x\psi \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}).$$

Por el Teorema 3.1.1 tenemos que

$$\mathcal{F}_2(\psi)(s) = -\frac{i}{s} \mathcal{F}_1(\psi')(s), \quad (s \neq 0).$$

A continuación, mostramos la representación gráfica de ψ' , donde

$$\psi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 0, \\ \frac{-1}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



Observe que $\psi' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y $g = x\psi' \in BV_0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Aplicando la Proposición 3.2.4 a $\mathcal{F}_1(\psi')$ obtenemos que

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_1(\psi')(s) = -i \mathcal{F}_{HK}(g)(s),$$

con

$$g(x) = x\psi'(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{si } x > 0, \\ \frac{-x}{1+x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Así, $\mathcal{F}_2(\psi)$ es una función continuamente diferenciable en puntos diferentes de cero y

$$\frac{d}{ds} \mathcal{F}_2(\psi)(s) = \frac{i}{s^2} \mathcal{F}_1(\psi')(s) - \frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}(g)(s).$$

Ejemplo 3.2.4. Sea $\psi(x) := \sqrt[3]{x} \operatorname{sen}(1/x)$ y $\varphi(x) := 1 - C(\frac{2}{\pi} \arctan(x))$, donde C es la función de Cantor [9]. Tomemos

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{if } 0 < x < 1, \\ x^{-1} \cdot \varphi(x) & \text{if } x > 2, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Debido a $x^{-1} \cdot \varphi(x)$ pertenece a $\mathcal{L}^p([2, \infty))$ para $p \geq 1$, resulta que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ [17]. Más aun,

$$\varphi \in BV_0([2, \infty)) \setminus \mathcal{L}^1([2, \infty)).$$

Así, $g(x) = x \cdot f(x)$ no pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pero está $BV_0(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La teoría clásica no nos permite calcular la derivada de la transformada de Fourier de f . Sin embargo, aplicando la Proposición 3.2.4, se tiene para $1 \leq p \leq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{F}_p(f)(s) &= -i \mathcal{F}_{HK}(g)(s) \\ &= -i[\mathcal{F}_{HK}(g_1)(s) + \mathcal{F}_1(g_2)(s)] \quad (s \neq 0), \end{aligned}$$

donde $g_1(x) := \varphi(x) \cdot \chi_{(2, \infty)}(x)$ y $g_2(x) := x \cdot \psi \chi_{(0, 1)}(x)$. Más aun,

$$\mathcal{F}_p(f)' \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Estos son algunos ejemplos que muestran la aplicabilidad y el alcance de nuestros resultados y los avances en el desarrollo de las propiedades analíticas de la transformada de Fourier sobre espacios de funciones no clásicos.

En la siguiente sección, estudiaremos otro aspecto del operador transformada de Fourier, su continuidad (como operador) sobre diferentes dominios.

3.3. La relación de continuidad entre \mathcal{F}_2^S y \mathcal{F}_{HK}^C

El Análisis de Fourier está relacionado con el Análisis funcional. Así de manera natural, se estudia la continuidad de un operador sobre distintos dominios.

En particular, dada la expresión (2.9) de la Definición 2.3.3 podemos estudiar por separado la transformada HK -Coseno de Fourier

$$\mathcal{F}_{HK}^C(f)(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x) dx$$

y la transformada HK -Seno de Fourier

$$\mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx.$$

El comportamiento de las transformadas Seno de Fourier y Coseno de Fourier es distinto, incluso en el marco de la integral de Lebesgue, este es un fenómeno ya conocido y estudiado en [28].

La integrabilidad de la transformada HK -Coseno de Fourier de funciones no absolutamente integrables fue estudiada en [3] y fue demostrado que la transformada HK -Coseno es un operador acotado de $(BV_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{BV})$ en $(HK(\mathbb{R}), \|\cdot\|_A)$. Por otra parte, en [3] se demostró que la transformada HK -Seno no es un operador acotado si consideramos el mismo dominio $BV_0(\mathbb{R})$ y codominio $HK(\mathbb{R})$.

Para demostrar que el operador transformada HK -Seno de Fourier no es integrable en sentido de Henstock-Kurzweil se considera la siguiente función.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{if } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teniendo que $f \in BV(\mathbb{R}) \cap HK(\mathbb{R}) \subset BV_0(\mathbb{R})$, véase [42]. Para $s > 0$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(sx) f(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \operatorname{sen}(sx) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos(s)}{s} \notin HK(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos

$$\mathcal{F}_{HK}^S(BV_0(\mathbb{R})) \not\subset HK(\mathbb{R}).$$

Así, ilustramos que \mathcal{F}_{HK}^C es un operador acotado de $BV_0(\mathbb{R})$ en $HK(\mathbb{R})$, mientras que \mathcal{F}_{HK}^S no lo es.

Ahora, introducimos la definición del espacio de Sobolev y denotamos a $I = (a, b)$ como un intervalo abierto, posiblemente no acotado, y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 3.3.1. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ es definido por

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(I) : \exists g \in \mathcal{L}^p(I) \text{ tal que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \varphi \in C_C^1(I) \right\}.$$

El espacio $W^{1,p}$ es equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{\mathcal{L}^p} + \|u'\|_{\mathcal{L}^p},$$

donde $u \in W^{1,p}(I)$, para más detalles consultar [24].

En particular, para $p = 1$ se tiene que

$$\mathcal{F}_2^S(W^{1,1}(\mathbb{R})) = \mathcal{F}_{HK}^S(W^{1,1}(\mathbb{R})) \subsetneq HK(\mathbb{R}),$$

donde $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset BV_0(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones de Sobolev en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, con derivada en el sentido de distribuciones también en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Siguiendo la línea de estudio de la continuidad del operador \mathcal{F}^C con codominio $HK(\mathbb{R})$, en [1], se mostró la continuidad de \mathcal{F}_2^S con rango en $HK(\mathbb{R})$.

Como veremos, el siguiente resultado es una aportación producto del trabajo de esta tesis. Empezamos, considerando el espacio Banach

$$\mathcal{B}_1 := \{ \varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R}) \mid \varphi' \in BV_0(\mathbb{R}) \},$$

con norma definida

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}_1} = \|\varphi\|_2 + \|\varphi'\|_{BV}.$$

Teorema 3.3.1. El operador \mathcal{F}_2^S restringido a \mathcal{B}_1 en $HK(\mathbb{R})$ es un operador acotado. En particular, si $\mathcal{F}_2^S(f)$ no cambia de signo, entonces es Lebesgue integrable.

Demostración: Primero mostremos que \mathcal{F}_2^S restringido a \mathcal{B}_1 pertenece a $HK(\mathbb{R})$. Sea j una función no negativa con soporte en $(-1, 1)$ e infinitamente diferenciable, tal que

$$\int_{-1}^1 j(t) dt = 1.$$

Para cualquier $\varphi \in \mathcal{B}_1$ tomamos

$$\varphi_\varepsilon(x) := \int_{-1}^1 \varphi(x - \varepsilon t) j(t) dt \in \mathcal{B}_1.$$

Tenga en cuenta que para cada intervalo acotado $[-M, M]$ tenemos

$$\varphi'_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi'(x) \text{ en } \mathcal{L}^1 \text{-norma.}$$

También,

$$\text{Var}(\varphi'_\varepsilon, |x| \geq M) \leq \text{Var}(\varphi', |x| \geq M - 1) \rightarrow 0 \text{ si } M \rightarrow \infty.$$

Por otra parte,

$$(\varphi_\varepsilon * j)' = \varphi'_\varepsilon * j \rightarrow \varphi' \text{ en } BV_0\text{-norma.}$$

Para continuar nuestro desarrollo utilizamos la siguiente notación $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ que representa el límite de ε tendiendo a cero por la derecha.

Por definición de transformada Seno de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_2^S(\varphi_\varepsilon)(s) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(sx) \varphi_\varepsilon(x) dx \quad c.d.s.\end{aligned}$$

Por el Teorema de integración por partes se tiene en casi todas partes en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\varphi_\varepsilon(x) \cos(sx) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) d\varphi_\varepsilon \right]. \quad (3.26)$$

Una de las propiedades de la convolución es que resulta ser una operación conmutativa en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, es decir, $\varphi * j(x) = j * \varphi(x)$.

Como la función j tiene soporte compacto en $(-1, 1)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_\varepsilon(x) \cos(sx) = 0.$$

De manera que la expresión (3.26) se reduce a

$$\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(sx) d\varphi_\varepsilon \right].$$

Dado que $\varphi_\varepsilon \in AC_{loc}(\mathbb{R})$ por el Teorema 1.2.7 y [29, Ejercicio 2, p. 186] se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(sx) d\varphi_\varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(sx) \varphi'_\varepsilon(x) dx \right].\end{aligned} \quad (3.27)$$

Dado que la función $\cos(\cdot)$ tiene integral indefinida acotada y φ'_ε es de variación acotada por el Lema de Riemann-Lebesgue para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$, el operador HK -Coseno de Fourier está bien definido para todo $s \neq 0$.

De esta manera, se establecemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}^C(\varphi'_\varepsilon)(s) \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}^C(\varphi')(s).\end{aligned}$$

Ahora vemos que $\mathcal{F}_2^S(\varphi)$ está en $HK(s : |s| > 1)$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^S(\varphi)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \text{sen}(sx) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\int_{\mathbb{R}} \cos(sx) \varphi'(x) dx \right] \\ &= 1/s \mathcal{F}_{HK}^C(\varphi')(s).\end{aligned}$$

Por [3, Teorema 1], $\mathcal{F}_{HK}^C(\phi') \in HK(\mathbb{R})$ y además

$$\begin{aligned} \left| \int_1^s \mathcal{F}_{HK}^C(\phi')(s) ds \right| &\leq 2 \left\| x^{-1} [\text{sen}(st) - \text{sen}(x)] \right\|_{HK(\mathbb{R})} \|\phi'\|_{BV(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|\phi'\|_{BV(\mathbb{R})} < \infty, \end{aligned}$$

donde $C > 0$ y consideramos a $HK(\mathbb{R})$ como un espacio normado con respecto a la norma de Alexiewicz, definida en la expresión (1.18).

Notemos que $1/s$ es monótona decreciente en $[1, \infty)$ y $\lim_{s \rightarrow \infty} 1/s = 0$.

Aplicando el Teorema 1.3.3 (Prueba de Chartier-Dirichlet), obtenemos

$$\frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}^C(\phi')(s) \in HK(\{s : |s| > 1\}).$$

Por la expresión (3.28) y el Teorema 1.2.10 implica que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}_2^S(\phi) \right\|_{HK(|s|>1)} &\leq \left\| \frac{1}{s} \right\|_{BV_0(|s|>1)} \left\| \mathcal{F}_{HK}^C(\phi') \right\|_{HK(|s|>1)} \\ &\leq 4\pi Si(\pi) \|\phi'\|_{BV(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $Si(\pi)$ está definida por la expresión (1.19).

Veamos que $\mathcal{F}_2^S(\phi) \in HK(s : |s| \leq 1)$. Sea $\phi \in \mathcal{B}_1$ se tiene que

$$\mathcal{F}_2^S(\phi)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}^C(\phi')(s).$$

Por definición de transformada Seno de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, tenemos para cada $b > 0$

$$\mathcal{F}_2^S(\phi) \in \mathcal{L}_{loc}^1([b, 1]).$$

Esto se debe a que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ está encajado continuamente en $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$, y por lo tanto lo está en $HK_{loc}(\mathbb{R})$. Así, Por el Teorema 2.1.6 y el Lema 3.2.1 se tiene que

$$\int_b^1 \mathcal{F}_2^S(\phi)(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^1 \lim_{M_k \rightarrow \infty} \int_{-M_k}^{M_k} \text{sen}(sx) \phi(x) dx ds. \quad (3.29)$$

Por desigualdad triangular, desigualdad de Hölder y $\|\mathcal{F}_2^S(\phi)\|_2 \leq \|\phi\|_2$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_b^1 \mathcal{F}_2^S(\phi)(s) ds \right| &\leq \int_b^1 |\mathcal{F}_2^S(\phi)(s)| ds \\ &\leq C_1 \|\mathcal{F}_2^S(\phi)\|_2 \\ &\leq C_2 \|\phi\|_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Así, por las desigualdades (3.28) y (3.30), es decir,

$$\left\| \mathcal{F}_2^S(\varphi) \right\|_{HK(|s|>1)} \leq C_3 \|\varphi'\|_{BV(\mathbb{R})} \quad \gamma \quad \left\| \mathcal{F}_2^S(\varphi) \right\|_{HK(|s|\leq 1)} \leq C_4 \|\varphi\|_2,$$

entonces

$$\left\| \mathcal{F}_2^S(\varphi) \right\|_{HK(\mathbb{R})} \leq C_5 \left(\|\varphi'\|_{BV(\mathbb{R})} + \|\varphi\|_2 \right).$$

■

El siguiente corolario se deriva directamente de argumentaciones similares.

Corolario 3.3.1.

1. *El operador lineal*

$$\Xi(\varphi)(s) := \frac{1}{s} \mathcal{F}_{HK}^C(\varphi)(s),$$

es un operador acotado de

$$\mathcal{W} := \{ \varphi \in BV_0(\mathbb{R}) \mid \Phi'(x) = \varphi(x), \Phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \},$$

en $HK(\mathbb{R})$.

2. *El operador lineal*

$$\Upsilon(\varphi) := \frac{1}{s} \mathcal{F}_1^S(\varphi)(s),$$

está acotado de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en $HK(\mathbb{R})$.

Demostración: La afirmación 1 es una nueva redacción del Teorema 3.3.1.

Con respecto a la afirmación 2, notamos

$$\Upsilon(\varphi) = -\mathcal{F}_{HK}^C(h),$$

donde h es la extensión uniforme de la función

$$\int_x^\infty \varphi(t) dt, \quad (x > 0).$$

Entonces, el resultado se sigue de [3].

■

Las afirmaciones anteriores se relacionan con los resultados de E. R. Liflyand, donde se han analizado la integrabilidad de la transformada de Fourier con la integral de Lebesgue [28, 26], véase también [3].

Ejemplo 3.3.1. Si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es una función impar y decreciente o decreciente en $(0, \infty)$ entonces $\Upsilon(\varphi) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Esto se sigue del corolario anterior y del hecho de que una función en $HK(\mathbb{R})$ que no cambia de signo también está en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, [46, Teorema 123]. Además, $\mathcal{F}_{HK}^C(h) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donde h es la extensión par de la integral indefinida de φ .

El Análisis de Fourier es un tema fundamental en matemáticas y sus aplicaciones aparecen en diferentes áreas de la ciencia. En este trabajo, empleamos una teoría de integración generalizada para considerar una clase más amplia de funciones, donde los operadores transformada Seno de Fourier y transformada Coseno de Fourier y otros objetos matemáticos tienen un sentido. Lo más notable de este trabajo es que nuestros resultados tienen implicaciones no sólo en el nuevo espacio de funciones, sino también en los espacios clásicos $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$. Los ejemplos expuestos ilustran la aplicabilidad de los resultados obtenidos, y estos son una contribución original en el Análisis de Fourier sobre los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$.

Para finalizar nuestra investigación se abordará la integrabilidad de la transformada *HK*-seno de Fourier en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil.

Capítulo 4

La integrabilidad de la transformada Seno de Fourier

4.1. Integración generalizada

La integrabilidad de la transformada de Fourier fue analizada por E. Liflyand en [27]-[28] en el marco de la integral de Lebesgue para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$, en espacios particulares.

Ahora abordamos la integrabilidad de la función transformada HK -Seno de Fourier cuando f pertenece al espacio de funciones de variación acotada que se desvanecen en el infinito aplicando integración generalizada.

Esta sección se enunciarán resultados relacionados con las diferentes teorías de integración.

Lema 4.1.1. Sea $f \in BV(\mathbb{R})$. Entonces para cada $0 < a \leq 1$, la función

$$\frac{\cos(a \cdot) - \cos(\cdot)}{(\cdot)} f(\cdot)$$

es Lebesgue integrable sobre $[0, 1]$. Más aun,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{\cos(ax) - \cos(x)}{x} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(x)}{x} f(x) dx.$$

El siguiente lema es una consecuencia del Corolario 6.6.2 en [35] y todas las integrales tipo Riemann-Stieltjes son conforme a la Definición 1.2.4.

Lema 4.1.2. Sea $[a, b]$ en intervalo compacto sobre \mathbb{R} . Sea g una función en $C^1[a, b]$. Si f es una función acotada e integrable con respecto a g en el sentido Riemann-Stieltjes sobre $[a, b]$. Entonces $f g'$ es Riemann integrable y

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx.$$

El siguiente Teorema es una generalización de la teoría de integración de Riemann y se le conoce como el Teorema de integración por partes [35].

Teorema 4.1.1. Si una de estas integrales $\int_a^b f dg$ y $\int_a^b gdf$ existe, entonces la otra integral también existe y

$$\int_a^b f dg - \int_a^b gdf = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

La siguiente proposición es un resultado que nos permitirá obtener nuevos resultados en el Análisis de Fourier. La Proposición se sigue del Lema 4.1.2 y de los Teoremas [6, H.3, H.7].

Proposición 4.1.1. Sea $f \in BV([a, b])$ y $g, h \in C^1([a, b])$. Entonces

$$\int_a^b hd(fg) = \int_a^b ghdf + \int_a^b fhg'dx.$$

Demostración: Notemos que $g \in C^1([a, b]) \subset AC([a, b]) \subsetneq BV([a, b])$, véase [13, 16] y $f \in BV([a, b])$, así $fg \in BV([a, b])$. Por [6, Teorema H.3]

$$\int_a^b hd(fg) \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Por otro lado,

$$\int_a^b ghdf \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Dado que (4.1) y (4.2) existen, implica que la diferencia

$$\int_a^b hd(fg) - \int_a^b ghdf \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Sustrayendo (4.1) de (4.2) y aplicando el Teorema 4.1.1, se tiene que

$$\int_a^b hd(fg) - \int_a^b ghdf = hfg \Big|_a^b - \int_a^b fgdh - ghf \Big|_a^b + \int_a^b fd(gh).$$

Más aun,

$$\int_a^b fgdh \quad y \quad \int_a^b fd(gh)$$

existen en \mathbb{R} . Por lo tanto,

$$\int_a^b hd(fg) - \int_a^b ghdf = - \int_a^b fgdh + \int_a^b fd(gh). \quad (4.4)$$

Aplicando el Lema 4.1.2 a las integrales de la derecha, se tiene

$$\int_a^b fgdh = \int_a^b fgh'dx \quad (4.5)$$

y

$$\int_a^b f d(gh) = \int_a^b f gh' dx + \int_a^b fhg' dx. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5) y (4.6) en (4.4)

$$\int_a^b hd(fg) - \int_a^b ghdf = - \int_a^b f gh' dx + \int_a^b fhg' dx + \int_a^b f gh' dx.$$

y en consecuencia se tiene

$$\int_a^b hd(fg) = \int_a^b fhg'(x) dx + \int_a^b ghdf.$$

■

En el siguiente teorema asumimos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no-decreciente y su medida asociada $d\mu_g$ esta definida en [35, pag. 220].

Teorema 4.1.2. *Sea $[a, b]$ un intervalo compacto en \mathbb{R} . Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y la integral Lebesgue-Stieltjes $\int_a^b f d\mu_g$ tiene valor finito, entonces la integral de Kurzweil-Stieltjes $\int_a^b f dg$ también existe, y*

$$\int_a^b f dg = \int_{(a,b)} f d\mu_g + f(a)(g(a+) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(b-)). \quad (4.7)$$

Si $g(a+) = g(a)$ y $g(b+) = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f dg = \int_{(a,b]} f d\mu_g. \quad (4.8)$$

Si $g(a-) = g(a)$ y $g(b-) = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f dg = \int_{[a,b)} f d\mu_g. \quad (4.9)$$

El teorema 4.1.2 nos demuestra que la integral Kurzweil-Stieltjes puede ser reducida a una integral tipo Riemann-Stieltjes.

4.2. La integrabilidad de la transformada Seno de Fourier

Uno de los aspectos que debemos tener en cuenta, cuando estudiamos la transformada de Fourier en marco de la integral de Riemann o Lebesgue es que la transformada Coseno de Fourier tiene un comportamiento cualitativo diferente al de la transformada Seno de Fourier [3, 46]. La teoría de integración de Henstock-Kurzweil realza estas diferencias sutiles como se muestra en la sección 3.3.

En general, tenemos que para $f \in BV_0(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_{HK}^C(f)(s)$ no está bien definida para $s = 0$, y $\mathcal{F}_{HK}^S(f)(0) = 0$. Sin embargo, siempre tenemos que $\mathcal{F}_{HK}^C(f) \in HK(\mathbb{R})$ para $f \in BV_0(\mathbb{R})$. Por otro lado, $\mathcal{F}_{HK}^S(f) \notin HK(\mathbb{R})$ para $f \in BV_0(\mathbb{R})$.

En [2] se demuestra que cuando $f \in BV_0(\mathbb{R})$ tal que $f/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces la función transformada Seno de Fourier de f resulta integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Ahora presentamos el resultado sobre la integrabilidad de la función transformada Seno de Fourier.

Teorema 4.2.1. *Sea f en $BV_0(\mathbb{R})$ tal que*

$$f(x)/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Entonces $\mathcal{F}_{HK}^S(f) \in HK(\mathbb{R})$.

Demostración: Sea $f \in BV_0(\mathbb{R})$. Por Teorema 2.2.1, tenemos que $\mathcal{F}_{HK}^S(f) \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Así, $\mathcal{F}_{HK}^S(f) \in HK([-b, -a])$ y $\mathcal{F}_{HK}^S(f) \in HK([a, b])$ para cualquier $0 < a < b < \infty$. Sea $s > 0$, por el Teorema de Hake, es suficiente para demostrar que

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) ds = \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b \mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) ds$$

existe en \mathbb{R} . Del Teorema 2.2.1 obtenemos por $s \neq 0$,

$$\mathcal{F}_{HK}^S(f)(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \text{sen}(sx) f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Entonces, es suficiente considerar la transformada HK - Seno de Fourier $f \chi_{[0, \infty]}$. Por un razonamiento análogo podemos demostrar el enunciado del Teorema para $f \chi_{(-\infty, 0]}$. Donde χ_A es la función característica de un conjunto medible A . Así, Probaremos que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b \mathcal{F}_{HK}^S(f \chi_{[0, \infty)})(s) ds \in \mathbb{R}.$$

Por el Teorema del Multiplicador

$$\left| \int_0^R \text{sen}(sx) f(x) dx \right| \leq \|\text{sen}(s \cdot)\|_{A([0, R])} \text{Var}(f, \mathbb{R}) < \infty.$$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b \mathcal{F}_{HK}^S(f \chi_{[0, \infty)})(s) ds &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \text{sen}(sx) f(x) dx ds \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b \int_0^R \text{sen}(sx) f(x) dx ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por el Teorema 1.2.3 se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b \int_0^R \operatorname{sen}(sx) f(x) dx ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^1 \int_0^R \operatorname{sen}(sx) f(x) dx ds \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^b \int_0^R \operatorname{sen}(sx) f(x) dx ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando el Teorema de Fubini en la primera integral a la derecha de (4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^1 \int_0^R \operatorname{sen}(sx) f(x) dx ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \int_a^1 \operatorname{sen}(sx) f(x) ds dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(x)}{x} f(x) dx. \end{aligned}$$

Por el Lema 4.1.1, cuando $a \rightarrow 0^+$ se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(x)}{x} f(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Para la segunda integral de la derecha en la expresión (4.11), por el Teorema de Convergencia Dominada y el Teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^b \mathcal{F}_{HK}^S(f \chi_{[0, \infty)})(s) ds &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^b \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \operatorname{sen}(sx) f(x) dx ds \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \int_1^b \operatorname{sen}(sx) f(x) ds dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \frac{\cos(x) - \cos(bx)}{x} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \frac{\cos(x)}{x} f(x) dx \\ &- \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \frac{\cos(bx)}{x} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por el Lema 2.1.1 (Lema de Riemann-Lebesgue), tenemos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \frac{\cos(bx)}{x} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x} f(x) dx = 0. \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.14) para obtener

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R \frac{\cos(x) - \cos(bx)}{x} f(x) dx = \mathcal{F}_1^C(f/x\chi_{[0,\infty)}(x))(1). \quad (4.16)$$

Tomando el límite cuando $a \rightarrow 0^+$ en (4.12) y agregando (4.16) obtenemos

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_{HK}^S(f\chi_{[0,\infty)})(s) ds = \mathcal{F}_1^C(f/x\chi_{[0,\infty)}(x))(0) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx. \quad \blacksquare$$

Una consecuencia del Teorema 4.2.1 es el siguiente corolario y posteriormente se mostrará la importancia de la hipótesis $f/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ para la integrabilidad de la transformada Seno de f .

Corolario 4.2.1. *Sea $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \mathcal{F}_{HK}^S(f\chi_{[0,\infty)})(s) ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1 - \cos(x)}{x} f(x) dx \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{x}\right) df(x) \\ &+ \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f(x) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Demostración: De (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^1 \mathcal{F}_{HK}^S(f\chi_{[0,\infty)})(s) ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\cos(ax) - \cos(x)}{x} f(x) dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(ax)}{x} f(x) dx \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aplicando el Teorema del Multiplicador en la segunda integral de la derecha de (4.18), y tomando el límite cuando $R \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \cos(ax) \frac{f(x)}{x} dx = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{a} d\left(\frac{f(x)}{x}\right). \quad (4.19)$$

Es claro que el límite (4.19) existe en \mathbb{R} .

Aplicando la Proposición 4.1.1 a la integral del lado derecho de (4.19),

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} d\left(\frac{f(x)}{x}\right) &= \int_1^R \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} df(x) \\ &- \int_1^R f(x) \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax^2} dx. \end{aligned}$$

El Teorema 1.3.3 implica la convergencia del límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R f(x) \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax^2} dx = \int_1^\infty f(x) \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax^2} dx \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \cos(ax) \frac{f(x)}{x} dx &= - \int_1^\infty \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} df(x) \\ &+ \int_1^\infty f(x) \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax^2} dx \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Analizando la primera integral a la derecha de la expresión (4.20), es decir,

$$\int_1^b \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} df \quad (4.21)$$

sabemos que existe por la Definición 1.2.4, véase [29, 35]. El Teorema 1.2.7 nos garantiza que la integral dada en (4.21) que existe también en el sentido de Kurzweil-Stieltjes.

Aplicando la descomposición de Jordan a la función $f = g_1 - g_2$, donde g_1 y g_2 son funciones monótonas decrecientes, véase [35, Teorema 2.1.21] se obtiene

$$\int_1^b \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} df = \int_1^b \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{a} d(g_1 - g_2). \quad (4.22)$$

Ahora consideremos el intervalo $[c, d] \subset [1, \infty)$, por el Teorema 4.1.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax} dg_i &= \int_{(c,d)} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax} d\mu_i(x) \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(ac) - \operatorname{sen}(a)}{ac} \Delta^+ g_i(c) \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(ad) - \operatorname{sen}(a)}{ad} \Delta^- g_i(d), \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$ y $d\mu_i$ es una medida finita generada por g_i . Tomando el límite $c \rightarrow 1^+$ y $d \rightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 1^+ \\ d \rightarrow \infty}} \int_c^d \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax} dg_i = \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(a)}{ax} d\mu_i(x) \quad i = 1, 2.$$

Por otro lado, existe el siguiente límite puntualmente

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{ax} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Dada que cada medida μ_i es finita para $i = 1, 2$; Por el Teorema de Convergencia Dominada, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{ax} dg_i &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{[1, \infty)} \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{ax} d\mu_i \\ &= \int_{[1, \infty)} \left(1 - \frac{1}{x}\right) d\mu_i. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_1^\infty \frac{1}{x} \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{a} df = \int_{[1, \infty)} \left(1 - \frac{1}{x}\right) d(\mu_1 - \mu_2).$$

De las expresiones (4.8) y (4.9) del Teorema 4.1.2, obtenemos

$$\int_{[1, \infty)} \left(1 - \frac{1}{x}\right) d(\mu_1 - \mu_2) = \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{x}\right) df(x). \quad (4.23)$$

Sustituyendo (4.20) en (4.18) se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \int_a^1 \mathcal{F}_{HK}^S(f \chi_{[0, \infty)})(s) ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\cos(ax) - \cos(x)}{x} f(x) dx \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{1}{x} \frac{\text{sen}(ax) - \text{sen}(a)}{a} df(x) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f(x) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(a)}{ax^2} f(x) dx \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Tomando el límite $a \rightarrow 0^+$ en (4.24), de acuerdo a (4.23) se obtiene la demostración del corolario. \blacksquare

La formula (4.17) muestra las relaciones que existen entre las diferentes teorías de integración.

4.3. Condición necesaria para la integrabilidad de la transformada Seno de Fourier

En esta sección mostramos que la condición $f(x)/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es óptima para garantizar la integrabilidad de la función $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$ sobre \mathbb{R} , donde f no es una función absolutamente integrable.

La transformada *HK*-Seno de Fourier se define de manera puntualmente, conforme a la Definición 2.3.3. A continuación mostramos dos funciones que no satisfacen la condición $f(x)/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ del Teorema 4.2.1, cuyas funciones transformada Seno de Fourier de f_1 y f_2 definidas abajo no son integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Ejemplo 4.3.1. Sea f_1 definida como

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-\log(x)} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

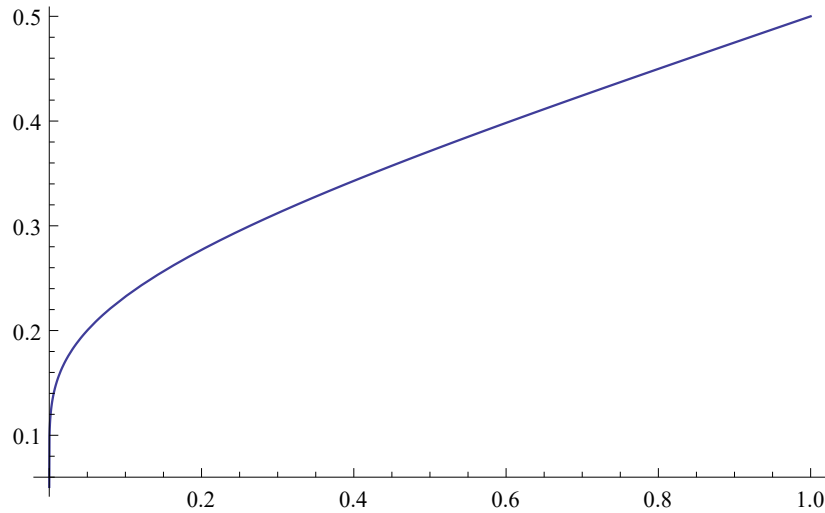


Figura 4.1: Notemos que la gráfica $f_1(x)$ es una función monótona creciente en el intervalo $(0, 1]$ y $f_1 \in BV_0(\mathbb{R})$.

Ahora consideremos la expresión $f_1(x)/x$, cuya gráfica se muestra enseguida para visualizar sus propiedades.

Mostremos que $f_1/x \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Calculando la siguiente integral

$$\int_0^1 f_1(x)/x dx = \int_0^1 \frac{dx}{(2-\log(x))x}. \quad (4.25)$$

Realizando el cambio de variable,

$$u = \log(x) \quad \text{entonces} \quad du = dx/x$$

se obtiene

$$\int_{-\infty}^0 \frac{du}{2-u} = \infty$$

se tiene que $f_1/x \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Además, en [3] se demuestra que

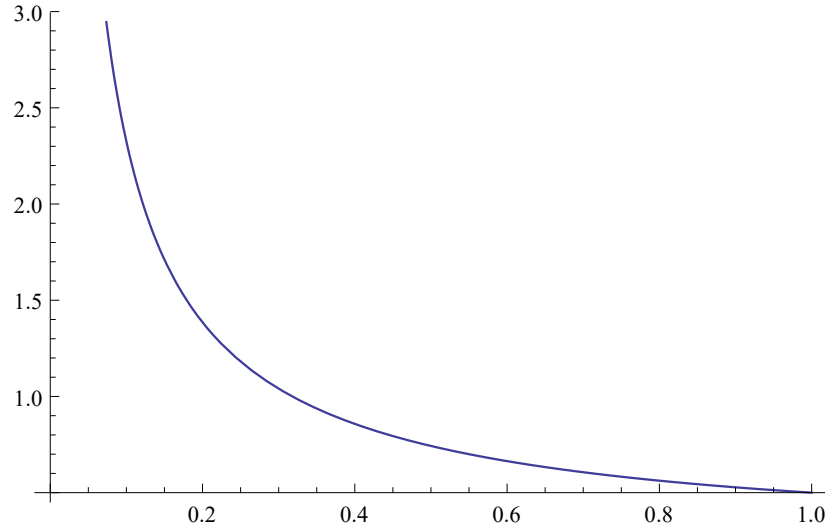


Figura 4.2: Notemos que la gráfica $f_1(x)/x$ es una función monótona decreciente y positiva en el intervalo $(0, 1]$ y $f_1/x \in BV_0(\mathbb{R})$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \mathcal{F}_{HK}^S(f_1)(s) ds = \infty.$$

De esta manera, se demuestra que la condición $f_1/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es necesaria para la integrabilidad de la transformada HK–Seno de Fourier.

Por último mostramos la siguiente función f_2 para mostrar que si f_2/x no pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$, entonces la transformada HK–Seno de Fourier no es integrable.

Ejemplo 4.3.2. Definamos

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } x \in [e^n, e^{n+1}) \wedge (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.26)$$

En general, la función f_2 es no-creciente y tiende a cero, cuando x tiende a ∞ . Su $\text{Var}(f_2, \mathbb{R}) = 2$ de acuerdo con [35, Teorema 2.1.11]. Por otro lado, graficamos $f_2(x)/x$ con $n = 1, \dots, 4$.

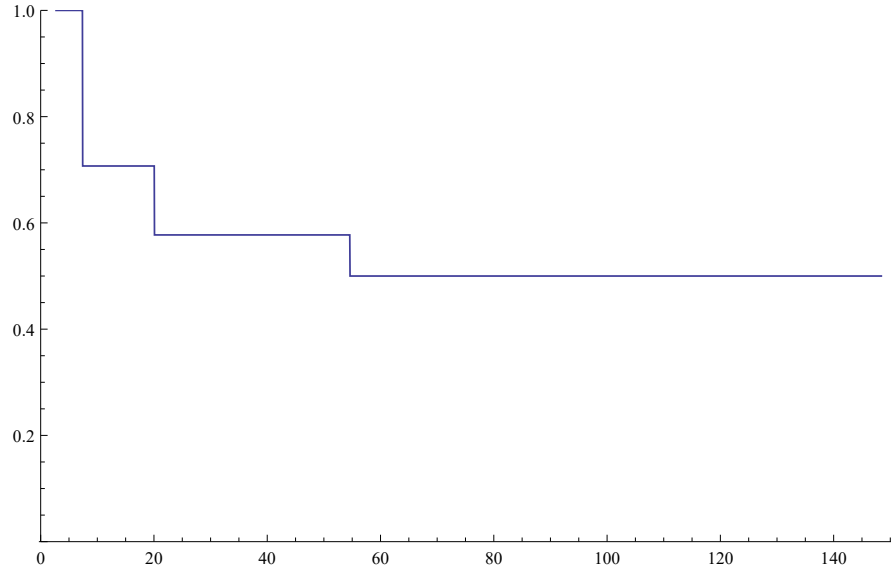


Figura 4.3: Notemos que la gráfica $f_2(x)$ es una función monótona no-creciente, constante en cada subintervalo $[e^n, e^{n+1})$ con $n = 1, \dots, 4$ y positiva sobre el intervalo $[e, e^5)$ y $f_2 \in BV_0(\mathbb{R})$.

En general, la función f_2/x es monótona decreciente y tiende a cero, cuando x tiende a ∞ y $f_2/x \in BV_0(\mathbb{R})$.

Enseguida calculamos la integral y obtenemos que

$$\int_e^\infty \frac{f_2(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x\sqrt{n}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

Así, $f_2(x) \cdot x^{-1}$ no pertenece al espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus (0, 1))$.

Aplicando el Corolario 4.2.1, obtenemos que la transformada Seno de Fourier de f_2 está en $HK([-1, 1])$ si y sólo si

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx$$

existe en \mathbb{R} .

Ahora mostraremos que este límite no existe. Sea $M > 1$ un número real y por el Teorema 1.2.3 podemos obtener la siguiente expresión

$$\int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx = \int_1^M \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx + \int_M^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx.$$

Mostremos que

$$\int_1^M \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx$$

existe para cada intervalo compacto $[1, M]$.

La función $\text{sen}(ax)/ax^2$ es absolutamente integrable y dado que las funciones acotadas son los multiplicadores de las funciones absolutamente integrables, entonces

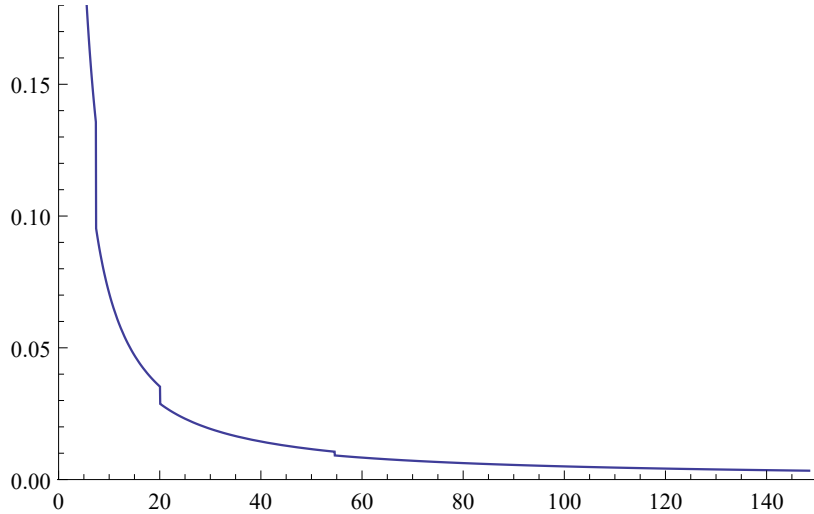


Figura 4.4: Notemos que la gráfica $f_2(x)/x$ es una función monótona decreciente y positiva en el intervalo $(e, e^5]$ y $f_2/x \in BV_0(\mathbb{R})$.

$$\frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) \in \mathcal{L}^1([1, M]).$$

Para toda $0 < a \leq 1$, existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} \right| \leq \frac{C}{x^2} \in \mathcal{L}^1([1, M]),$$

entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_1^M \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx = \int_1^M \frac{f_2(x)}{x} dx \in \mathbb{R}.$$

Ahora, analizaremos la divergencia del límite para la integral

$$\int_M^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx.$$

Aplicando el cambio de variable $x - M = y$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_M^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx &= \int_0^\infty \frac{\text{sen}(a(y+M))}{a(y+M)^2} f_2(y+M) dy \\ &= \frac{\cos(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(ay)}{(y+M)^2} f_2(M+y) dy \\ &\quad + \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\cos(ay)}{(y+M)^2} f_2(M+y) dy. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Consideremos

$$\limsup_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\cos(ay)}{(y+M)^2} f_2(M+y) dy.$$

Notemos que

$$\left| \frac{\cos(ay)f_2(y+M)}{(y+M)^2} \right| \leq \frac{f_2(y+M)}{(y+M)^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+).$$

Por el Teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\cos(ay)f_2(y+M)}{(y+M)^2} dy = M \int_0^\infty \frac{f_2(y+M)}{(y+M)^2} dy.$$

Si $y+M = e^{m+1}$ y $M = e^m$, entonces $y = e^{m+1} - e^m$ y debido a $f_2(x) = 1/\sqrt{m}$ es constante en cada intervalo $[e^m, e^{m+1})$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f_2(y+M)}{(y+M)^2} dy &= \int_0^\infty \frac{f_2(y+e^m)}{(y+e^m)^2} dy \\ &= \sum_{j=m}^\infty \int_{e^j - e^m}^{e^{j+1} - e^m} \frac{dy}{\sqrt{j}(y+e^m)^2} \\ &\leq \sum_{j=m}^\infty \int_{e^j - e^m}^{e^{j+1} - e^m} \frac{dy}{(y+e^m)^2} \\ &= e^{-m}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Así, obtenemos

$$\limsup_{a \rightarrow 0^+} \left| \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\cos(ay)f_2(y+M)}{(y+M)^2} dy \right| \leq 1. \tag{4.29}$$

Usando de las propiedades generales de límite superior y límite inferior [30, págs. 25-35], para obtener

$$\begin{aligned} \liminf_{a \rightarrow 0^+} \int_1^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx &\geq \liminf_{a \rightarrow 0^+} \int_1^M \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx \\ &+ \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\cos(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(ay)}{(y+M)^2} f_2(y+M) dy \\ &+ \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\cos(ay)}{(y+M)^2} f_2(M+y) dy. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Siendo $f_2(y+M)/(y+M)^2$ una función monótona positiva decreciente en \mathbb{R}^+ de [26, 46] se sabe que la transformada Seno de Fourier no cambia de signo y se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(ay)}{(y+M)^2} f_2(y+M) dy \geq 0.$$

Resulta que

$$\liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\cos(aM)}{a} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(ay)}{(y+M)^2} f_2(y+M) dy \geq 0. \tag{4.31}$$

Removiendo el término (4.31) en la expresión (4.30) produciendo

$$\begin{aligned} \liminf_{a \rightarrow 0^+} \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx &\geq \liminf_{a \rightarrow 0^+} \int_1^M \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx \\ &+ \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(aM)}{a} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ay)}{(y+M)^2} f_2(M+y) dy. \end{aligned}$$

De (4.29) y [30, Teorema 6.13], obtenemos

$$\liminf_{a \rightarrow 0^+} \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(ax)}{ax^2} f_2(x) dx \geq \int_1^M \frac{f_2(x)}{x} dx - 1 \quad (\forall M > 0).$$

Por lo tanto

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(ax) f_2(x)}{ax^2} dx \tag{4.32}$$

diverge.

Estos ejemplos muestran que la condición $f/x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es esencial para asegurar la HK -integrabilidad de $\mathcal{F}_{HK}^S(f)$, cuando f es una función de variación acotada.

Capítulo 5

Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo, se muestran nuevas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil sobre espacios no clásicos de funciones. También, se señalan las ventajas de utilizar la integral de Henstock-Kurzweil, ya que por ejemplo, contiene a la integral de Riemann, la integral impropia de Riemann, y la integral de Lebesgue y los valores de estas integrales coinciden. Por otra parte, se hizo un estudio de publicaciones actuales, principalmente [3, 33, 36, 44, 45] con las cuales se generalizaron teoremas clásicos del Análisis de Fourier, donde la integral de Lebesgue tiene ciertas limitaciones.

De esta manera, con la integral de Henstock-Kurzweil extendimos aspectos matemáticos esenciales del operador transformada de Fourier para demostrar los siguientes hechos:

- 1) En el Teorema 3.1.1 se obtuvo una representación integral puntual de la transformada de Fourier en el subespacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$, para $1 < p \leq 2$, la cual obedece al comportamiento asintótico que indica el Lema de Riemann-Lebesgue. Este hecho fue demostrado utilizando los teoremas de la integral de Henstock-Kurzweil y empleando diferentes integrales del tipo Riemann-Stieltjes conforme a los textos [6, 29, 35].
- 2) En el Corolario 3.1.1 se dan expresiones explícitas de la transformada de Fourier aplicada a f en el punto s ($\mathcal{F}_p(f)(s)$) para funciones f en el subespacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R})$ para $1 < p \leq 2$. En particular, obtenemos valores específicos de la transformada de Fourier para una función en el subespacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e incluso nuestros resultados son aplicables para funciones Lebesgue integrables.

Se aplicaron las expresiones (3.8) y (3.9) demostradas en el Corolario 3.1.1, y se implementaron algoritmos computacionales a funciones particulares, para calcular de manera puntual el operador transformada de Fourier con valores discretos, véase los Ejemplos 3.1.1 y 3.1.2. Esta aproximación numérica es posible dada la expresión (3.12). En particular, se obtuvo la representación gráfica de la transformada de Fourier de la función $\phi(x) = |x|/(1+x^2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ comprobando que sus valores tienden a cero conforme s crece, de acuerdo con el Teorema 2.2.1.

- 3) En el Teorema 3.2.3, se demostró que $\mathcal{F}_{HK}(\phi)(s)$ es diferenciable para cualquier función en $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $x\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Esto

es, se logro extender el teorema clásico de la diferenciabilidad de la transformada de Fourier [13, 40]. Por otra parte, se exhibieron ejemplos de funciones no Lebesgue integrables y se calcularon sus transformadas de Fourier aplicando los resultados publicados en [1].

4) Se consideró el siguiente espacio de Banach

$$\mathcal{B}_1 := \{\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}(\mathbb{R}) \mid \varphi' \in BV_0(\mathbb{R})\}$$

dotado con la norma definida por

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}_1} = \|\varphi\|_2 + \|\varphi'\|_{BV},$$

el cual es un subespacio de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

En el Teorema 3.3.1, se demostró que la transformada de Fourier \mathcal{F}_2^S es un operador lineal acotado de \mathcal{B}_1 al espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables, es decir,

$$\mathcal{F}_2^S : \mathcal{B}_1 \rightarrow HK(\mathbb{R})$$

es un operador acotado.

5) El Teorema 4.2.1 nos da una condición necesaria para garantizar la integrabilidad de la transformada HK -Seno de Fourier para una función no Lebesgue integrable.

El mérito de la hipótesis $f(x) \cdot x^{-1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en el Teorema 4.2.1, es exhibir funciones f_1, f_2 en $BV_0(\mathbb{R})$, tales que:

a) $f_1(x) \cdot x^{-1}$ no pertenece a $\mathcal{L}^1([-1, 1])$ y

$$\int_1^b \mathcal{F}_{HK}^S(f_1)(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(x) - \cos(bx)}{x} f_1(x) dx,$$

$$\mathcal{F}_{HK}^S(f_1) \notin HK(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]).$$

b) $f_2(x) \cdot x^{-1}$ no pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ y

$$\mathcal{F}_{HK}^S(f_2) \notin HK([-1, 1]).$$

Las contribuciones de este trabajo de tesis fueron publicadas en [1, 2].

Aun existen aspectos por desarrollar en esta línea de investigación, por ejemplo:

- 1) Emplear métodos numéricos para calcular la transformada de Fourier y estimar el error cuando se realiza integración numérica, [1].
- 2) Estudiar el alcance de las nuevas propiedades obtenidas de la transformada de Fourier en diferentes áreas de aplicación, por ejemplo en el área de ecuaciones diferenciales.

Bibliografía

- [1] Arredondo, J. H., Bernal, M. y Morales, M. G. Fourier analysis with generalized integration. *Mathematics*, **8** (2020), no.7, 1199.
- [2] , Arredondo J.H, Bernal, M. y Morales, M. G. A necessary condition for *HK*-integrability of the Fourier Sine Transform function, Aceptado para su publicación.
- [3] Arredondo, J. H., Mendoza, F. J. y Reyes, A. On the norm continuity of the *HK*-Fourier transform. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **25** (2018), no. 2, 36–47.
- [4] Arredondo, J. H. y Reyes, A. Interpolation theory for the *HK*-Fourier transform. *Rev. Un. Mat. Argentina.* **62** (2021), no.2, 401-413.
- [5] Ashordia, M. On the opial type criterion for the well-posedness of the Cauchy problem for linear systems of generalized ordinary differential equations. *Math. Bohem.* **141** (2016), no. 2, 183–215.
- [6] Bartle, R. G. A modern theory of integration. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 32. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [7] Bracewell, R. The Fourier transform and its applications. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 2000.
- [8] Burk, F. Lebesgue measure and integration, An introduction. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1998.
- [9] Corothers, N. L. Real analysis. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo, 2000.
- [10] Debnath, L. y Mikusiński, P. Introduction to Hilbert spaces with applications. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [11] Federson, M. Some peculiares of the Henstock and Kurzweil integrals of banach space-valued functions. *Real analysis exchange*, Vol 29, 2003/2004. 439-460.
- [12] Federson M. The fundamental theorem of calculus for multidimensional Banach space-valued Henstock vector integrals, *Real analysis exchange*, Vol (), , 469-480.
- [13] Folland, G. B. Real analysis, Modern techniques and their applications. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.

- [14] Folland, G. B. *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks, Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.
- [15] Gasquet, C. y Witomski, P. *Fourier analysis and applications. Filtering, numerical computation, wavelets*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [16] Gordon, R. A. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 4. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [17] Gordon, R. A. Some integrals involving the Cantor function. *Amer. Math. Monthly*. **116** (2009), no. 3, 218-227.
- [18] Grafakos, L. *Classical Fourier analysis*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249. Springer, New York, 2014.
- [19] Groh, J. A. Nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation a Gronwall inequality in one dimension. *Illinois J. Math.* **24** (1980), no. 2, 244-263.
- [20] Hawkins, T. *Lebesgue's theory, its origins and development*. AM Chelsea publishing, Second edition, 2000.
- [21] Ivashev-Musatov, O. S. On Fourier-Stieltjes coefficients of singular functions. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **20** (1956), 179–196.
- [22] Kurtz, D. S. y Swartz, C. W. *Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*. Series in Real Analysis, Vol. 9. World Scientific Publishing Co. Singapore, 2004.
- [23] Lee, P. Y. *Lanzhou lectures on Henstock integration*. Vol. 2 de Series in Real Analysis. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.
- [24] Leoni, G. *A first course in Sobolev spaces*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [25] Liflyand, E. Asymptotics of the Fourier sine transform of a function of bounded variation. *Math. Notes*. **100** (2016), no. 1-2, 93-99.
- [26] Liflyand, E. Integrability spaces for the Fourier transform of a function of bounded variation. *J. Math. Anal. Appl.* **436** (2016), no. 2, 1082-1101.
- [27] Liflyand, E. The Fourier transform of a function of bounded variation: symmetry and asymmetry. *J. Fourier Anal. Appl.* **24** (2018), 525-544.
- [28] Liflyand, E. *Functions of bounded variation and their Fourier transforms*. Applied and numerical harmonic analysis. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.
- [29] McLeod, R. M. *The generalized Riemann integral*. Carus Mathematical Monographs, Vol. 20. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1980.

- [30] McShane, E. J. Integration. Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton, N. J., Second Printing 1947.
- [31] Mendoza, F. J., Escamilla J. A y Sánchez, S. Some results about the Henstock-Kurzweil Fourier transform. *Math. Bohem.* **134** (2009), no. 4, 379-386.
- [32] Mendoza, F. J. On pointwise inversion of the Fourier transform of BV_0 functions. *Ann. Funct. Anal.* **1** (2010), no. 2, 112-120.
- [33] Mendoza, F. J., Morales, M. G., Escamilla, J. A. y Arredondo, J. H. Several aspects around the Riemann-Lebesgue Lemma. *J. Adv. Res. Pure Math.* **5** (2016), no. 3, 33-46.
- [34] Monteiro G., Tvrđý, M. On Kurzweil-Stieltjes integral in a Banach space, *Math. Bohem.* **137** (2012), 365-381.
- [35] Monteiro, G., Slavík, A. y Tvrđý, M. Kurzweil-Stieltjes integral. Theory and applications. Series in Real Analysis, Vol. 15. World Scientific Publishing Co. Singapore, 2019.
- [36] Morales, M. G., Arredondo, J. H. y Mendoza, F. J. An extension of some properties for the Fourier transform operator on $L^p(\mathbb{R})$ spaces. *Rev. Un. Mat. Argentina* **57** (2016), no. 2, 85-94.
- [37] Muldowney, P. y Skvortsov, V. Improper Riemann integral and Henstock integral in R^n . *Mathematical Notes.* **78** (2005) no. 2, 228-233.
- [38] Pinsky, M. A. Introduction to Fourier analysis and wavelets. Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002.
- [39] Reed, M. y Simon, B. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, New York-London, 1975.
- [40] Rudin, W. Real and complex analysis. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [41] Ruzhansky, M. y Tikhonov, S. Some problems in Fourier analysis and approximation theory. *Methods of Fourier analysis and approximation theory.* Birkhäuser/Springer, 2016, pp 1–19.
- [42] Sánchez-Perales, S., Mendoza, F. J. y Escamilla, J. A. Henstock-Kurzweil integral transforms. *Int. J. Math. Math. Sci.* (2012) Art. ID 209462, 11 pp.
- [43] Talvila, E. A product converge theorem for Henstock-Kurzweil integral. *R. Anal. Exch.* **29** (2003/2004), no.1, 199-204.
- [44] Talvila, E. Henstock-Kurzweil Fourier transforms. *Illinois J. Math.* **46** (2016), no. 4, 1207–1226.
- [45] Talvila, E. Necessary and sufficient conditions for differentiating under the integral sign. *Amer. Math. Monthly.* **108** (2001), no. 6, 544–548.

- [46] Titchmarsh, E. C. Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford, 1937.
- [47] Wiener, N. y Wintner, A. Fourier-Stieltjes transforms and singular infinite convolutions. Amer. J. Math. **60** (1938), 513–522.
- [48] Čelidze V. G. y Džvaršeišvili A. G. The theory of the Denjoy integral and some applications, Series in Real Analysis, Vol. 3, World Scientific, Singapore, 1989.
- [49] Štefan Schwabik. General integration and extensions I. Czechoslovak Mathematical Journal, **60** (2010) no. 4, 961–981.



Análisis de Fourier
aplicando integración
generalizada.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 10:00 horas del día 31 del mes de agosto del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ
- DRA. MARCIA CRISTINA ANDERSON BRAZ FEDERSON
- DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA
- DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
- DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: MANUEL BERNAL GONZALEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



MANUEL BERNAL GONZALEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

VOCAL

DRA. MARCIA CRISTINA ANDERSON BRAZ
FEDERSON

VOCAL

DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

VOCAL

DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES

SECRETARIO

DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE